

TÍCH PHÂN

I. Khái niệm tích phân

1. Diện tích hình thang cong.

- Giới thiệu cho học sinh về cách tính diện tích của một hình thang cong
- Từ đó suy ra công thức : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

2. Định nghĩa tích phân

- Cho hàm f liên tục trên một khoảng K và a, b là hai số bất kỳ thuộc K . Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số : $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của f đi từ a đến b , ký hiệu là : $\int_a^b f(x)dx$
- Có nghĩa là : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ thì :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$
- Trong đó :
 - a : là cận trên, b là cận dưới
 - $f(x)$ gọi là hàm số dưới dấu tích phân
 - dx : gọi là vi phân của đối số
 - $f(x)dx$: Gọi là biểu thức dưới dấu tích phân

II. Tính chất của tích phân

Giả sử cho hai hàm số f và g liên tục trên K , a, b, c là ba số bất kỳ thuộc K . Khi đó ta có :

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. (Gọi là tính chất đối cận)
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$. (Tích phân của một tổng hoặc hiệu hai tích phân bằng tổng hoặc hiệu hai tích phân) .
5. $\int_a^b kf(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$. (Hằng số k trong dấu tích phân, có thể đưa ra ngoài dấu tích phân được)

Ngoài 5 tính chất trên, người ta còn chứng minh được một số tính chất khác như :

6. Nếu $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$ thì : $\int_a^b f(x)dx \geq 0 \forall x \in [a; b]$
7. Nếu : $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. (Bất đẳng thức trong tích phân)

8. Nếu : $\forall x \in [a; b]$ và với hai số M, N ta luôn có : $M \leq f(x) \leq N$. Thì :

$$M(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq N(b-a). \quad (\text{Tính chất giá trị trung bình của tích phân})$$

III. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

A. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

1. Trong phương pháp này , chúng ta cần :

- Kỹ năng : Cần biết phân tích $f(x)$ thành tổng , hiệu , tích , thương của nhiều hàm số khác , mà ta có thể sử dụng được trực tiếp bảng nguyên hàm cơ bản tìm nguyên hàm của chúng .
- Kiến thức : Như đã trình bày trong phần " Nguyên hàm " , cần phải nắm trắ các kiến thức về Vi phân , các công thức về phép toán lũy thừa , phép toán căn bậc n của một số và biểu diễn chúng dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ .

2. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau

$$a/ \int_1^2 \frac{x(2\sqrt{x^4-1}+1)}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$b/ \int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3} dx$$

$$c/ \int_1^3 \frac{2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx$$

$$d/ \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^3+x^2-x+1}{x^4-2x^2+1} dx$$

Giải

$$a/ \int_1^2 \frac{x(2\sqrt{x^4-1}+1)}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^2 \left(\frac{2x\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \int_1^2 \left(2x\sqrt{x^2-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \sqrt{x^2-1} d(\sqrt{x^2-1}) + \int_1^2 d(\sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2-1})^2 \Big|_1^2 + \sqrt{x^2+1} \Big|_1^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

b/

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3} dx = \int_0^1 \frac{(x+1-1)^2}{(x+1)^3} dx = \int_0^1 \left[\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3} - 2 \frac{x+1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3} \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} - 2 \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} \right] dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{d(x+1)}{x+1} - 2 \int_0^1 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} + \int_0^1 \frac{d(x+1)}{(x+1)^3} = \ln|x+1| \Big|_0^1 + 2 \frac{1}{x+1} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} \Big|_0^1 = \ln 2 + \frac{3}{8}$$

c/

$$\int_1^3 \frac{2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx = \int_1^3 \left[\frac{x-1}{(1+\sqrt{x})} + \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})} \frac{1}{2\sqrt{x}} \right] dx = \int_1^3 \left[(\sqrt{x}-1) + \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})2\sqrt{x}} \right] dx$$

$$\Rightarrow I = \int_1^3 (\sqrt{x}-1) dx + \int_1^3 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} d(1+\sqrt{x}) = \left[\frac{2}{3} (\sqrt{x})^3 - x \right]_1^3 + \ln^2(1+\sqrt{x}) \Big|_1^3$$

$$= 2\sqrt{3} - 4 + \ln^2(1+\sqrt{3}) - \ln^2 2$$

$$d/ \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^3+x^2-x+1}{x^4-2x^2+1} dx = \int_{\sqrt{2}}^2 \left[\frac{1}{4} \frac{4(x^3-x)}{x^4-2x^2+1} \right] + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{(x^2-1)} dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2dx}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{d(x^4 - 2x^2 + 1)}{(x^4 - 2x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx + 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln |(x^2 - 1)^2| \Big|_{\sqrt{2}}^2 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^2 + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right] \Big|_{\sqrt{2}}^2 =$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

a/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x (\sin^2 x - 1)}{1 + \cos x} dx$

b/ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx$

c/ $\int_{-1}^1 \frac{1}{4-x^2} \ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right) dx$

d/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \sqrt{1 + \tan x}}{\cos^2 x} dx$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau

a/ $\int_e^{e^2} \frac{\ln^3 x + 1}{x \ln^3 x} dx$

b/ $\int_1^2 \frac{x^2 - 1}{2x(x^2 + 1)} dx$

c/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 + \sin^3 2x}{\sin^2 2x} dx$

d/ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \cdot \cos x dx$

B. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

I. Phương pháp đổi biến số dạng 1.

Để tính tích phân dạng này, ta cần thực hiện theo các bước sau

1/ Quy tắc :

- Bước 1: Đặt $x=v(t)$
- Bước 2: Tính vi phân hai vế và đổi cận
- Bước 3: Phân tích $f(x)dx=f(v(t))v'(t)dt$
- Bước 4: Tính $\int_a^b f(x)dx = \int_{v(a)}^{v(b)} g(t)dt = G(t) \Big|_{v(a)}^{v(b)}$
- Bước 5: Kết luận : $I=G(t) \Big|_{v(a)}^{v(b)}$

2/ Nhận dạng : (Xem lại phần nguyên hàm)

* Chú ý :

a. Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là :

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x = a \sin t \leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ x = a \cos t \leftrightarrow 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t} \leftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \\ x = \frac{ a }{\cos t} \leftrightarrow t \in [0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \end{cases}$

$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\begin{cases} x = a \tan t \leftrightarrow t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ x = a \cot t \leftrightarrow t \in (0; \pi) \end{cases}$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \vee \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cdot \cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a) \sin^2 t$

b. Quan trọng nhất là các em phải nhận ra dạng :

- Ví dụ : Trong dạng phân thức hữu tỷ :

$$* \int_a^{\beta} \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx (\Delta < 0) = \int_a^{\beta} \frac{1}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 \right]} dx = \frac{1}{a} \int_a^{\beta} \frac{1}{u^2 + k} du$$

Với : $\left(u = x + \frac{b}{2a}, k = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, du = dx \right).$

* áp dụng để giải bài toán tổng quát : $\int_a^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^{2k+1}}} (k \in \mathbb{Z}).$

$$* \int_a^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2+2x-x^2}} dx = \int_a^{\beta} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (x-1)^2}} dx. \text{ Từ đó suy ra cách đặt : } x-1 = \sqrt{3} \sin t$$

3/ Một số ví dụ áp dụng :

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau

a/ $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

b/ $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}} dx$

c/ $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$

Giải

a/ Đặt $x = \sin t$ với : $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

• Suy ra : $dx = \cos t dt$ và : $\begin{cases} x = 0 \leftrightarrow \sin t = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \leftrightarrow \sin t = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

• Do đó : $f(x)dx = \sqrt{1-x^2} dx = \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \cos^2 t dt = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt$

• Vậy : $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos 2t) dt}{2} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi-1}{4}$

b/ Đặt : $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

• Suy ra : $dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t dt \Rightarrow \begin{cases} x=0 \leftrightarrow \sin t=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

- Do đó :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

c/ Vì : $3+2x-x^2=4-(x-1)^2$. Cho nên :

- Đặt : $x-1=2\sin t$ $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \leftrightarrow \sin t = \frac{x-1}{2} (*)$
- Suy ra : $dx=2\cos t dt$ và : $\begin{cases} x=1 \leftrightarrow \sin t = \frac{1-1}{2} = 0 \rightarrow t=0 \\ x=2 \leftrightarrow \sin t = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow t \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \rightarrow \cos t > 0$
- Do đó : $f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{4(1-\sin^2 t)}} 2\cos t dt = dt$
- Vậy : $\int_1^2 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

Ví dụ 2: Tính các tích phân sau

a/ $\int_1^2 \sqrt{12x-4x^2-5} dx$

b/ $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx$

c/ $\int_2^5 \frac{1}{x^2-4x+7} dx$

d/ $\int_0^b \frac{a-x^2}{(a+x^2)^2} dx$

***Chú ý :** Để tính tích phân dạng có chứa $(\sqrt{x^2+a}, \sqrt{a^2-x^2})$, ta còn sử dụng phương pháp đổi biến số : $u(x)=g(x,t)$

Ví dụ 1 : Tính tích phân sau $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

Giải :

- Đặt : $\sqrt{x^2+1} = x-t \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$
- Khi đó : $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=-1; x=1 \rightarrow t=1-\sqrt{2} \\ dx = \frac{t^2+1}{2t^2} \end{cases}$
- Do vậy : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{-2t}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} dt = \int_{-1}^{1-\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_{-1}^{1-\sqrt{2}} = -\ln(\sqrt{2}-1)$

Ví dụ 2: Tính tích phân : $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

Giải

- Đặt : $t=\sin x$, suy ra $dt=\cos x dx$ và khi $x=0, t=0$; Khi $x=1$, $t=\frac{\pi}{2}$

- Do đó : $f(x)dx = x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \sin^2 t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \left(\frac{1-\cos 4t}{2} \right) dt$
- Vậy : $I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t) dt = \frac{1}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$

II. Đổi biến số dạng 2

1. Quy tắc : (Ta tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số dạng 2 theo các bước sau :)

- Bước 1: Khéo léo chọn một hàm số $u(x)$ và đặt nó bằng $t : t=u(x)$.
- Bước 2: Tính vi phân hai vế và đổi cận : $dt=u'(x)dx$
- Bước 3: Ta phân tích $f(x)dx = g[u(x)]u'(x)dx = g(t)dt$.
- Bước 4: Tính $\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt = G(t) \Big|_{u(a)}^{u(b)}$
- Kết luận : $I = G(t) \Big|_{u(a)}^{u(b)}$

2. Nhận dạng :

TÍCH PHÂN HÀM PHÂN THỨC HỮU TỶ

A. DẠNG : $I = \int_a^b \frac{P(x)}{ax+b} dx \quad (a \neq 0)$

* Chú ý đến công thức : $\int_a^b \frac{m}{ax+b} dx = \frac{m}{a} \ln|ax+b| \Big|_a^b$. Và nếu bậc của $P(x)$ cao hơn hoặc bằng 2 thì ta chia tử cho mẫu dẫn đến

$$\int_a^b \frac{P(x)}{ax+b} dx = \int_a^b Q(x) + \frac{m}{ax+b} dx = \int_a^b Q(x) dx + m \int_a^b \frac{1}{ax+b} dx$$

Ví dụ 1 : Tính tích phân : $I = \int_1^2 \frac{x^3}{2x+3} dx$

Giải

$$\text{Ta có : } f(x) = \frac{x^3}{2x+3} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8} - \frac{27}{8} \frac{1}{2x+3}$$

Do đó :

$$\int_1^2 \frac{x^3}{2x+3} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8} - \frac{27}{8} \frac{1}{2x+3} \right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{8}x - \frac{27}{16} \ln|2x+3| \right) \Big|_1^2 = -\frac{13}{6} - \frac{27}{16} \ln 35$$

Ví dụ 2: Tính tích phân : $I = \int_{\sqrt{5}}^3 \frac{x^2-5}{x+1} dx$

Giải

$$\text{Ta có : } f(x) = \frac{x^2-5}{x+1} = x-1 - \frac{4}{x+1}.$$

$$\text{Do đó : } \int_{\sqrt{5}}^3 \frac{x^2-5}{x+1} dx = \int_{\sqrt{5}}^3 \left(x-1 - \frac{4}{x+1} \right) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - x - 4 \ln|x+1| \right) \Big|_{\sqrt{5}}^3 = \sqrt{5} - 1 + 4 \ln \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} \right)$$

B. DẠNG : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} dx$

1. Tam thức : $f(x) = ax^2 + bx + c$ **có hai nghiệm phân biệt**

Công thức cần lưu ý : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| \Big|_{\alpha}^{\beta}$

Ta có hai cách

Cách 1: (Hệ số bất định)

Cách 2: (Nhảy tầng lầu)

Ví dụ 3: Tính tích phân : $I = \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx$.

Giải

Cách 1: (Hệ số bất định)

Ta có : $f(x) = \frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

Thay $x=-2$ vào hai tử số : $3=A$ và thay $x=-3$ vào hai tử số : $-1=-B$ suy ra $B=1$

Do đó : $f(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

Vậy : $\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx = (3\ln|x+2| + \ln|x+3|) \Big|_0^1 = 2\ln 3 - \ln 2$

Cách 2: (Nhảy tầng lầu)

Ta có : $f(x) = \frac{2(2x+5)+1}{x^2+5x+6} = 2 \cdot \frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = 2 \cdot \frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$

Do đó :

$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(2 \cdot \frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \left(2\ln|x^2+5x+6| + \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| \right) \Big|_0^1 = 2\ln 3 - \ln 2$

2. Tam thức : $f(x) = ax^2 + bx + c$ **có hai nghiệm kép**

Công thức cần chú ý : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln(u(x)) \Big|_{\alpha}^{\beta}$

Thông thường ta đặt $(x+b/2a)=t$.

Ví dụ 4 : Tính tích phân sau : $I = \int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1} dx$

Giải

Ta có : $\int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1} dx = \int_0^3 \frac{x^3}{(x+1)^2} dx$

Đặt : $t=x+1$ suy ra : $dx=dt$; $x=t-1$ và : khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=3$ thì $t=4$.

Do đó : $\int_0^3 \frac{x^3}{(x+1)^2} dx = \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^2} dt = \int_1^4 \left(t - 3 + \frac{3}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + \ln|t| + \frac{1}{t} \right) \Big|_1^4 = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$

Ví dụ 5: Tính tích phân sau : $I = \int_0^1 \frac{4x}{4x^2-4x+1} dx$

Giải

Ta có : $\frac{4x}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{4x}{(2x-1)^2}$

Đặt : $t = 2x-1$ suy ra : $dt = 2dx \rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$; $\begin{cases} x=0 \leftrightarrow t=-1 \\ x=1 \leftrightarrow t=1 \end{cases}$

Do đó : $\int_0^1 \frac{4x}{4x^2 - 4x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{4x}{(2x-1)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{4 \cdot \frac{1}{2}(t+1)}{t^2} \frac{1}{2} dt = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \left(\ln|t| - \frac{1}{t} \right) \Big|_{-1}^1 = -2$

3. Tam thức : $f(x) = ax^2 + bx + c$ **vô nghiệm :**

Ta viết : $f(x) = \frac{P(x)}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right]} = \frac{P(x)}{a(u^2 + k^2)}$; $\begin{cases} u = x + \frac{b}{2a} \\ k = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$

Khi đó : Đặt $u = kt \tan t$

Ví dụ 6: Tính tích phân : $I = \int_0^2 \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx$

Giải

• Ta có : $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx = \int_0^2 \frac{x}{(x+2)^2 + 1} dx$

• Đặt : $x+2 = \tan t$, suy ra : $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$; $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \leftrightarrow \tan t = 2 \\ x=2 \leftrightarrow \tan t = 4 \end{cases}$

• Do đó : $\int_0^2 \frac{x}{(x+2)^2 + 1} dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\tan t - 2}{1 + \tan^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\sin t}{\cos t} - 2 \right) dt = \left(-\ln|\cos t| - 2t \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (1)$

Từ : $\begin{cases} \tan t = 2 \leftrightarrow 1 + \tan^2 t = 5 \leftrightarrow \cos^2 t = \frac{1}{5} \rightarrow \cos t_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \tan t = 4 \leftrightarrow 1 + \tan^2 t = 17 \leftrightarrow \cos^2 t = \frac{1}{17} \rightarrow \cos t_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$

• Vậy : $\left(-\ln|\cos t| - 2t \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = - \left[\left(\ln|\cos t_2| - 2t_2 \right) - \left(\ln|\cos t_1| - 2t_1 \right) \right] = -\ln \left| \frac{\cos t_2}{\cos t_1} \right| + 2(t_2 - t_1)$

• $\Leftrightarrow -\ln \left| \frac{\cos t_2}{\cos t_1} \right| + 2(t_2 - t_1) = 2(\arctan 4 - \arctan 2) - \ln \left| \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{5} \right| = 2(\arctan 4 - \arctan 2) - \frac{1}{2} \ln \frac{5}{17}$

Ví dụ 7: Tính tích phân sau : $I = \int_0^2 \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 4} dx$

Giải

• Ta có : $\frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 4} = x + 2 + \frac{1}{x^2 + 4}$

• Do đó : $\int_0^2 \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 4} dx = \int_0^2 \left(x + 2 + \frac{1}{x^2 + 4} \right) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4} = 6 + J \quad (1)$

Tính tích phân $J = \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$

- Đặt : $x=2\tan t$ suy ra : $dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt$; $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=2 \rightarrow t=\frac{\pi}{4} \leftrightarrow t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \cos t > 0 \end{cases}$
- Khi đó : $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t} \frac{2}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$
- Thay vào (1) : $I = 6 + \frac{\pi}{8}$

C. DẠNG : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{ax^3+bx^2+cx+d} dx$

1. Đa thức : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \neq 0$) có một nghiệm bội ba

Công thức cần chú ý : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^m} dx = \frac{1}{1-m} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} \Big|_{\alpha}^{\beta}$

Ví dụ 8: Tính tích phân : $I = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx$

Giải

Cách 1:

- Đặt : $x+1=t$, suy ra $x=t-1$ và : khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=1$ thì $t=2$
- Do đó : $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx = \int_1^2 \frac{t-1}{t^3} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt = \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{8}$

Cách 2:

- Ta có : $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{(x+1)-1}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$
- Do đó : $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right] dx = \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{8}$

Ví dụ 9 : Tính tích phân : $I = \int_{-1}^0 \frac{x^4}{(x-1)^3} dx$.

Giải

- Đặt : $x-1=t$, suy ra : $x=t+1$ và : khi $x=-1$ thì $t=-2$ và khi $x=0$ thì $t=-1$.
- Do đó : $\int_{-1}^0 \frac{x^4}{(x-1)^3} dx = \int_{-2}^{-1} \frac{(t+1)^4}{t^3} dt = \int_{-2}^{-1} \frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}{t^3} dt = \int_{-2}^{-1} \left(t+4+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3} \right) dt$
- $\Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} \left(t+4+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3} \right) dt = \left(\frac{1}{2}t^2+4t+6\ln|t|-\frac{4}{t}-\frac{1}{2t^2} \right) \Big|_{-2}^{-1} = \frac{33}{8}-6\ln 2$

2. Đa thức : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm :

Có hai cách giải : Hệ số bất định và phương pháp nhẩy tầng lầu

Ví dụ 10 : Tính tích phân sau : $I = \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} dx$

Giải

Cách 1. (Phương pháp hệ số bất định)

• Ta có : $\frac{1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$

• Thay hai nghiệm mẫu số vào hai tử số : $\begin{cases} 1=4A \\ 1=-2C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ C=-\frac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó (1)

$\Leftrightarrow \frac{(A+B)x^2 + (2A+C)x + A-B-C}{(x-1)(x+1)^2} \Rightarrow A-B-C=1 \Leftrightarrow B=A-C-1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$

• Do đó : $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)^2} dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$

$\Leftrightarrow I = \left[\frac{1}{4} \ln(x-1)(x+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)} \right]_2^3 = \frac{1}{4} \ln 8 = \frac{3}{4} \ln 2$

Cách 2:

• Đặt : $t=x+1$, suy ra : $x=t-1$ và khi $x=2$ thì $t=3$; khi $x=3$ thì $t=4$.

• Khi đó : $I = \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)^2} dx = \int_3^4 \frac{dt}{t^2(t-2)} = \frac{1}{2} \int_3^4 \frac{t-(t-2)}{t^2(t-2)} dt = \frac{1}{2} \left(\int_3^4 \frac{1}{t(t-2)} dt - \int_3^4 \frac{1}{t^2} dt \right)$

$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \int_3^4 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t} \right) dt - \int_3^4 \frac{1}{t^2} dt \right) = \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t} \right| - \frac{1}{2} \ln |t| \right) \Big|_3^4 = \frac{3}{4} \ln 2$

Hoặc : $\frac{1}{t^3-2t^2} = \frac{(3t^2-4t)}{t^3-2t^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{3t^2-4t-4}{t^3-2t^2} \right) = \left[\frac{3t^2-4t}{t^3-2t^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{3t+2}{t^2} \right) \right] = \frac{3t^2-4t}{t^3-2t^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{t} + \frac{2}{t^2} \right)$

• Do đó : $I = \int_3^4 \left(\frac{3t^2-4t}{t^3-2t^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{t} + \frac{2}{t^2} \right) \right) dt = \left(\ln |t^3-2t^2| - \frac{1}{4} \left(3 \ln |t| - \frac{2}{t} \right) \right) \Big|_3^4 = \frac{3}{4} \ln 2$

Hoặc : $\frac{1}{t^2(t-2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{t^2-(t^2-4)}{t^2(t-2)} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{t+2}{t^2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right)$

• Do đó :

$I = \frac{1}{4} \int_3^4 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{t-2}{t} \right| + \frac{2}{t} \right) \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{4} \left(\ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{6} \right)$

Ví dụ 11: Tính tích phân sau : $I = \int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} dx$

Giải

Đặt : $x-1=t$, suy ra : $x=t+1$, $dx=dt$ và : khi $x=2$ thì $t=1$; $x=3$ thì $t=2$.

Do đó : $\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} dx = \int_1^2 \frac{(t+1)^2}{t^2(t+3)} dt = \int_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)} dt$

Cách 1; (Hệ số bất định)

Ta có : $\frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)} = \frac{At+B}{t^2} + \frac{C}{t+3} = \frac{(At+B)(t+3)+Ct^2}{t^2(t+3)} = \frac{(A+C)t^2+(3A+B)t+3B}{t^2(t+3)}$

$$\text{Đồng nhất hệ số hai tử số : } \begin{cases} A+C=1 \\ 3A+B=2 \\ 3B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{3} \\ A=\frac{5}{9} \\ C=\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)} = \frac{1}{9} \frac{t+3}{t^2} + \frac{4}{9} \frac{1}{t+3}$$

Do đó :

$$\int_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{9} \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{1}{t+3} \right) \right) dt = \left(\frac{1}{9} \left(\ln|t| - \frac{3}{t} \right) + \frac{4}{9} \ln|t+3| \right) \Big|_1^2 = \frac{17}{6} + \frac{4}{9} \ln 5 - \frac{7}{9} \ln 2$$

Cách 2:

- Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{3t^2+6t+3}{t^3+3t^2} \right) = \frac{1}{3} \left[\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2} + \frac{3}{t^2(t+3)} \right] = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{t^2-(t^2-9)}{t^2(t+3)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2} \right) + \frac{1}{9} \frac{1}{t+3} - \frac{1}{9} \frac{t-3}{t^2} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2} \right) + \frac{1}{9} \frac{1}{t+3} - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{t^2} \right) \right] \end{aligned}$$

- Vậy :

$$\int_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{3} \left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{t+3} - \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} \right) \right) dt = \left[\frac{1}{3} \ln|t^3+3t^2| + \frac{1}{27} \left(\ln \left| \frac{t+3}{t} \right| - \frac{3}{t} \right) \right] \Big|_1^2$$

- Do đó $I = \frac{17}{6} + \frac{4}{9} \ln 5 - \frac{7}{9} \ln 2$

3. Đa thức : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có ba nghiệm :

Ví dụ 12: Tính tích phân sau : $I = \int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)} dx$

Cách 1: (Hệ số bất định)

- Ta có :

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

- Đồng nhất hệ số hai tử số bằng cách thay các nghiệm : $x=0; x=1$ và $x=-1$ vào

$$\text{hai tử ta có : } \begin{cases} x=0 \rightarrow 1 = -A \\ x=-1 \rightarrow 1 = 2C \\ x=1 \rightarrow 1 = 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} \right)$$

- Vậy :

$$\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)} dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x-1)(x+1)) - \ln|x| \right] \Big|_2^3 = \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$$

Cách 2: (Phương pháp nhẩy lâu)

$$\text{Ta có : } \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x(x^2-1)} = \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x}$$

$$\text{Do đó : } \int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{2x dx}{x^2-1} - \int_2^3 \frac{1}{x} dx = \left(\frac{1}{2} \ln(x^2-1) - \ln x \right) \Big|_2^3 = \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$$

Ví dụ 13: Tính tích phân sau : $I = \int_3^4 \frac{x+1}{x(x^2-4)} dx$

Cách 1:

$$\text{Ta có : } \frac{x+1}{x(x^2-4)} = \frac{x+1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x^2-4) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x^2-4)}$$

Thay các nghiệm của mẫu số vào hai tử số :

$$\text{Khi } x=0 : 1 = -4A \text{ suy ra : } A = -1/4$$

$$\text{Khi } x=-2 : -1 = 8C \text{ suy ra } C = -1/8$$

$$\text{Khi } x=2 : 3 = 8B \text{ suy ra : } B = 3/8 .$$

$$\text{Do đó : } f(x) = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x-2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{x+2} \right)$$

Vậy :

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{x+1}{x(x^2-4)} dx &= -\frac{1}{4} \int_3^4 \frac{1}{x} dx - \frac{1}{8} \int_3^4 \frac{1}{x-2} dx + \frac{3}{8} \int_3^4 \frac{1}{x+2} dx = \left(-\frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln|x-2| + \frac{3}{8} \ln|x+2| \right) \Big|_3^4 \\ &= \frac{5}{8} \ln 3 - \frac{3}{8} \ln 5 - \frac{1}{4} \ln 2 \end{aligned}$$

Cách 2:

Ta có :

$$\frac{x+1}{x(x^2-4)} = \frac{1}{(x^2-4)} + \frac{1}{x(x^2-4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{x^2 - (x^2-4)}{x(x^2-4)} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{Do đó : } \int_3^4 \frac{x+1}{x(x^2-4)} dx = \frac{1}{4} \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + \frac{1}{2} \ln(x^2-4) - \ln|x| \right] \Big|_3^4$$

Ví dụ 14: Tính tích phân sau : $\int_2^3 \frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)} dx$

Giải

Cách 1: (Hệ số bất định)

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x^2-1)}{(x^2-1)(x+2)}$$

Thay lần lượt các nghiệm mẫu số vào hai tử số :

$$\text{Thay : } x=1 \text{ Ta có : } 1=2A, \text{ suy ra : } A=1/2$$

$$\text{Thay : } x=-1, \text{ Ta có : } 1=-2B, \text{ suy ra : } B=-1/2$$

$$\text{Thay } x=-2, \text{ Ta có : } 4=-5C, \text{ suy ra : } C=-5/4$$

Do đó :

$$I = \int_2^3 \frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)} dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{5}{4} \frac{1}{x+2} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{5}{4} \ln|x+2| \right] \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

Cách 2.(Nhảy tầng lâu)

Ta có :

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{x^2-1+1}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \frac{x(x+1)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \left[\frac{x}{(x-1)(x+2)} - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) - \frac{1}{x+1} \right]$$

Từ đó suy ra kết quả .

D. DẠNG $\int_a^b \frac{R(x)}{ax^4+bx^2+c} dx$

Những dạng này , gần đây trong các đề thi đại học ít cho (Nhưng không hẳn là không cho) , nhưng tôi vẫn đưa ra đây một số đề thi đã thi trong những năm các trường ra đề thi riêng , mong các em học sinh khá ,giỏi tham khảo để rút kinh nghiệm cho bản thân .

Sau đây tôi lấy một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+3x+2)^2} dx$

b. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+x^2}{1+x^3} dx$

Giải

a. $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+3x+2)^2} dx$

Ta có :

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{1}{[(x+1)(x+2)]^2} = \left[\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+2)} \right]^2$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} - 2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right). \text{ Vậy :}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+3x+2)^2} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} - 2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \right] dx = \left(-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - 2 \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + 2 \ln 3$$

b. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+x^2}{1+x^3} dx$

Ta có : $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^3} = \frac{1-x+x^2+x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1-x+x^2}{(1+x)(1-x+x^2)} + \frac{x}{(1+x)(1-x+x^2)}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x^3} \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^3} \right) dx$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

a. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} dx$

b. $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$

Giải

a. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} dx$. Chia tử và mẫu cho $x^2 \neq 0$, ta có :

$$f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \Rightarrow \int_1^{\sqrt{3}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 1} \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2, dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow t=2 \\ x=\sqrt{3} \rightarrow t=\frac{4}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } \int_1^{\sqrt{3}} f(x) dx = \int_2^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t^2 - 3} = \int_2^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{1}{(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})} dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_2^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{t - \sqrt{3}} - \frac{1}{t + \sqrt{3}} \right) dt$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| \Bigg|_2^{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\ln \frac{1}{7} - \ln \frac{7 - 4\sqrt{3}}{7} \right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln(7 + 4\sqrt{3})$$

$$\text{b. } \int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1} dx. \text{ Vì : } \begin{cases} x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) \\ x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1 = t^2 - 1 (t = x^3) \end{cases}$$

Cho nên :

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} - \frac{x^2}{(x^3)^2+1} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3(x^3)^2+1} \right] dx$$

$$\text{Vậy : } I = \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \arctan(3x^2) \Big|_0^1 = \arctan 1 - \frac{1}{3} \arctan 3 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \arctan 3$$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau

$$\text{a. } \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx \quad \vee \quad \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$$

$$\text{b. } \int_1^2 \frac{1}{x^4+1} dx$$

Giải

$$\text{a. } \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx \quad \vee \quad \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^4+1} dx. \text{ Ta có :}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}, \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}. \text{ Cho nên}$$

$$\text{Đặt : } \begin{cases} t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx, x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2, x=1 \rightarrow t=2, x=2 \rightarrow t=\frac{5}{2} \\ t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx, x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2, x=1 \rightarrow t=0, x=2 \rightarrow t=\frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Vậy :}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = \int_2^{\frac{5}{2}} \left(\frac{dt}{t^2 - 2} \right) = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_2^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{t - \sqrt{2}} - \frac{1}{t + \sqrt{2}} \right) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| \Bigg|_2^{\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 g(x)dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t^2+2} dt \quad (1).$$

$$\text{Đặt : } t = \sqrt{2} \tan u \rightarrow dt = \sqrt{2} \frac{1}{\cos^2 u} du \leftrightarrow t = 0 \rightarrow u = 0, t = \frac{3}{2} \rightarrow u = \arctan \frac{3\sqrt{2}}{4} = u_1$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow \int_0^{u_1} \frac{\sqrt{2} du}{\cos^2 u (2 + 2 \tan^2 u)} = \int_0^{u_1} \frac{\sqrt{2}}{2} du = \frac{\sqrt{2}}{2} u \Big|_0^{u_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_1$$

$$\text{b. } \int_1^2 \frac{1}{x^4+1} dx. \text{ Ta có : } F(x) = \frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^2+1-x^2}{x^4+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+1}{x^4+1} - \frac{x^2-1}{x^4+1} \right) = \frac{1}{2} (f(x) - g(x))$$

Đã tính ở trên (phần a)

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau

$$\text{a. } \int_1^2 \frac{x^2-1}{(x^2-5x+1)(x^2-3x+1)} dx$$

$$\text{b. } \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{x^4-4x^2+3}$$

$$\text{c. } \int_1^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} dx$$

$$\text{d. } I = \int_2^3 \frac{x^7}{1+x^8-2x^4} dx$$

Giải

$$\text{a. } \int_1^2 \frac{x^2-1}{(x^2-5x+1)(x^2-3x+1)} dx. \text{ Ta có :}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2-5x+1)(x^2-3x+1)} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}-5\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)} \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{x}-5\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)} \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } t = x + \frac{1}{x} \rightarrow dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx, x=1 \rightarrow t=2, x=2 \rightarrow t=\frac{5}{2}$$

Vậy (1) trở thành :

$$\int_2^{\frac{5}{2}} \frac{dt}{(t-5)(t-3)} = \frac{1}{2} \int_2^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{t-5} - \frac{1}{t-3} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-5}{t-3} \right| \Big|_2^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$$

$$\text{b. } \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{x^4-4x^2+3}. \text{ Ta có : } f(x) = \frac{1}{x^4-4x^2+3} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2-3} - \frac{1}{x^2-1} \right)$$

$$\text{Do đó : } \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{x^2-3} - \frac{1}{x^2-1} \right) dx = I - J \quad (1) \text{ Với :}$$

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{x^2-3} dx = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{x-\sqrt{3}} - \frac{1}{x+\sqrt{3}} \right) dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| \Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{37-20\sqrt{3}}{65(7-4\sqrt{3})}$$

$$J = \int_0^1 \frac{1}{x^2-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Bigg|_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3}{7} - \ln \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{15}{7}$$

$$c. \int_1^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} dx.$$

Học sinh xem lại cách giải ví dụ 2-a . Chỉ khác là đặt : $t = x - \frac{1}{x}$, sẽ ra kết quả .

$$d. I = \int_2^3 \frac{x^7}{1+x^8-2x^4} dx = \int_2^3 \frac{x^4}{(x^4-1)^2} x^3 dx \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } t = x^4 - 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = 3x^3 dx, x=2 \rightarrow t=15; x=3 \rightarrow t=80 \\ f(x) dx = \frac{1}{3} \frac{x^4}{(x^4-1)} 3x^3 dx = \frac{1}{3} \frac{(t+1)}{t^2} dt = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I = \int_{15}^{80} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{3} \left(\ln |t| - \frac{1}{t} \right) \Bigg|_{15}^{80} = \frac{1}{3} \ln \frac{16}{3} + \frac{13}{720}$$

E. TRƯỜNG HỢP : $\int_a^b \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ (Với Q(x) có bậc cao hơn 4)

Ở đây tôi chỉ lưu ý : Đối với hàm phân thức hữu tỷ có bậc tử thấp hơn bậc mẫu tới hai bậc hoặc tình ý nhận ra tính chất đặc biệt của hàm số dưới dấu tích phân mà có cách giải ngắn gọn hơn . Phương pháp chung là như vậy , nhưng chúng ta khéo léo hơn thì cách giải sẽ hay hơn .

Sau đây tôi minh họa bằng một số ví dụ

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau .

$$a. \int_1^2 \frac{dx}{x(x^4+1)}$$

$$b. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)} dx$$

Giải

a. $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^4+1)}$. Nếu theo cách phân tích bằng đồng nhất hệ số hai tử số thì ta có :

$$f(x) = \frac{1}{x(x^4+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^4+1} = \frac{A(x^4+1)+x(Bx^3+Cx^2+Dx+E)}{x(x^4+1)} =$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{(A+B)x^4+Cx^3+Dx^2+Ex+A}{x(x^4+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0, D=0 \\ E=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0, D=0, \\ E=0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x^3}{x^4+1}$$

Nhưng nếu ta tình ý thì cách làm sau sẽ hay hơn .

Vì x và x^3 cách nhau 3 bậc , mặt khác $x \in [1;2] \Rightarrow x \neq 0$. Cho nên ta nhân tử và mẫu với

$x^3 \neq 0$. Khi đó $f(x) = \frac{x^3}{x^4(x^4+1)}$. Mặt khác $d(x^4) = 4x^3 dx \Leftrightarrow dt = 4x^3 dx$ ($t = x^4$), cho nên :

$f(x)dx = \frac{1}{3} \frac{3x^3 dx}{x^4(x^4+1)} = \frac{1}{3} \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) = f(t)$. Bài toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều. (Các em giải tiếp)

b. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(x-1)^2(x+3)} dx$

Nhận xét :

* Nếu theo cách hướng dẫn chung ta làm như sau :

$$- f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}$$

- Sau đó quy đồng mẫu số, đồng nhất hệ số hai tử số, ta có : $A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{8}, C = -D = \frac{5}{32}$

$$\begin{aligned} \text{Do vậy : } I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{3}{8(x-1)^2} + \frac{5}{32(x-1)} - \frac{5}{32(x+3)} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{8(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32} \ln|x-1| - \frac{5}{32} \ln|x+3| \right] \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{32} \ln \frac{1}{28} \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau :

a. $\int_2^3 \frac{x^4-1}{x^6-1} dx$

b. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^6+1} dx$

c. $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}$

d. $\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$

e. $\int_0^1 \frac{x^4+3x^2+1}{(1+x^2)^3} dx$

f. $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4} dx$

Giải

a.

$$\int_1^2 \frac{x^4-1}{x^6-1} dx = \int_1^2 \left(\frac{x^4+x^2+1}{(x^2-1)(x^4+x^2+1)} - \frac{x^2+2}{[(x^3)^2-1]} \right) dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx + \int_2^3 \left(\frac{x^2}{[(x^3)^2-1]} + \frac{1}{x^3-1} - \frac{1}{x^3+1} \right) dx$$

Tính J : $J = \arctan x \Big|_2^3 = \arctan 3 - \arctan 2$.

Tính K. Đặt $t = x^3 \Rightarrow \begin{cases} dt = 3x^2 dx, x=2 \rightarrow t=8; x=3 \rightarrow t=27 \\ g(x)dx = \frac{x^2}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \frac{dt}{(t-1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \end{cases}$

Do đó : $K = \int_2^3 g(x)dx = \frac{1}{6} \int_8^{27} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{6} (\ln|t-1| - \ln|t+1|) \Big|_8^{27} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_8^{27} = \frac{1}{6} \ln \frac{117}{98}$

Tính E : $E = \int_2^3 \frac{1}{x^3-1} dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} dx$

Ta có : $h(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2-(x^2-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$$= \frac{x^2}{x^3-1} - \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2}{x^3-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1} \right)$$

$$\text{Vậy : } I = \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{3x^2}{x^3-1} dx - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{(2x+1)}{x^2+x+1} dx - \int_2^3 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln(x^3-1) \Big|_2^3 - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) \Big|_2^3 - F = \frac{1}{3} \ln \frac{28}{9} - \frac{1}{2} \ln \frac{13}{6} - F \quad (2)$$

$$\text{Tính F : Đặt : } x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ x = 2 \rightarrow \tan t = \frac{5}{\sqrt{3}} \rightarrow t = a; x = 3 \rightarrow \tan t = \frac{10}{\sqrt{3}} \rightarrow t = b \end{cases}$$

$$\text{Do đó } F = \int_a^b \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\cos^2 t} dt}{\frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t)} = \int_a^b dt = t \Big|_a^b = b - a \quad \left(\tan t = \frac{5}{\sqrt{3}} \rightarrow t = a = \arctan \frac{5}{\sqrt{3}}; b = \arctan \frac{10}{\sqrt{3}} \right)$$

Thay vào (2) ta có kết quả .

$$\text{b. } \int_1^2 \frac{x^2+1}{x^6+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x^2-1)^2 - x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} dx$$

$$\text{Ta có : } \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} \\ = \frac{(A+C)x^3 + (B-A+C+D)x^2 + (A-B+C+D)x + (B+D)}{x^4 - x^2 + 1}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số hai tử số ta có hệ : } \begin{cases} A+C=0 \\ B-A+C+D=0 \\ A-B+C+D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C \\ 1-2C=0 \\ -B+D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 \frac{1-x}{x^2+x+1} dx + \int_1^2 \frac{x+1}{x^2-x+1} dx \right) = \frac{1}{2} (J+K) \quad (1)$$

Tính J=

$$\int_1^2 \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx = -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x+1-3}{x^2+x+1} dx = -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = -\frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| \Big|_1^2 + E \quad (2)$$

$$\text{Tính E} = \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx, \text{ học sinh tự tính bằng cách đặt : } x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t$$

Tính K

$$K = \int_1^2 \frac{x+1}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x-1+3}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| \Big|_1^2 + F \quad (2)$$

Tính $F = \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx$, học sinh tự tính bằng cách đặt : $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t$

c. $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)} = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{3x^3}{x^4(1+x^4)} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \left(\frac{d(x^4)}{x^4} - \frac{d(x^4)}{1+x^4} \right) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x^4}{1+x^4} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \ln \frac{32}{17}$

d. $\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3} 2x dx \quad (1). \text{ Đặt : } t = 1+x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t-1; dt = 2x dx \\ x=0 \rightarrow t=1, x=1 \rightarrow t=2 \end{cases}$

Do đó $I = \int_1^2 \frac{t-1}{t^3} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt = \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{4t^2} \right) \Big|_1^2 = \frac{13}{16}$

e. $\int_0^1 \frac{x^4+3x^2+1}{(1+x^2)^3} dx = \int_0^1 \left(\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^3} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = J + K \quad (1)$

Tính J : Bằng cách đặt $x = \tan t \Rightarrow J = \frac{\pi}{4}$

Tính K = $\int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^3} \right) dx = E + F \quad (2)$

Tính E : Bằng cách đặt $x = \tan t \leftrightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ x=0 \rightarrow t=0; x=1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Vậy : $E = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\tan^2 t} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 t} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$
 $= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi+2}{16}$

Tính F. Tương tự như tính E ;

Bằng cách đặt $x = \tan t \leftrightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ x=0 \rightarrow t=0; x=1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Vậy : $F = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\tan^2 t} \right)^3 \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^6 t} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)^2 dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 + 4\cos 2t + \cos 4t) dt = \frac{1}{16} \left(3t + 2\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16} \left(3\frac{\pi}{4} + 2 \right) = \frac{3\pi + 8}{64}$$

$$f. \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x - x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4} dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(\frac{x - x^3}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^3} dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$\text{Đặt : } t = \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \Rightarrow t + 1 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} dt = -\frac{dx}{x} \\ x = \frac{1}{3} \rightarrow t = 8; x = 1 \rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = - \int_8^0 t^{\frac{1}{3}} (t+1) dt = \int_0^8 \left(t^{\frac{4}{3}} + t^{\frac{1}{3}} \right) dt = \left(\frac{3}{7} t^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} \right) \Bigg|_0^8 = \frac{3}{7} \cdot 2^7 + \frac{3}{4} \cdot 2^4 = 16 \left(\frac{24}{7} + \frac{3}{4} \right) = \frac{468}{7}$$

*** Chú ý : Còn có cách khác**

$$\text{Vì : } x \in \left[\frac{1}{3}; 1 \right] \rightarrow x \neq 0. \text{ Đặt } x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt; f(x)dx = \frac{\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{t} \right)^4} \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = -\frac{t^2 (t^3 - t)^{\frac{1}{3}}}{t} dt$$

$$= -t (t^3 - t)^{\frac{1}{3}} dt = dt = -t^2 \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)^{\frac{1}{3}} dt (2). \text{ Đặt : } u = 1 - \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} = 1 - u; du = \frac{1}{t} dt$$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau

$$a. \int_1^{\frac{1}{e^{\frac{p+2}}}} \frac{x^{\frac{p}{2}}}{x^{p+2} + 1} dx$$

$$b. \int_0^a \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$c. \int_0^1 e^{x+e^x} dx$$

$$d. \int_0^{2a} x \sqrt{2ax - x^2} dx$$

Giải

$$a.. \int_1^{\frac{1}{e^{\frac{p+2}}}} \frac{x^{\frac{p}{2}}}{x^{p+2} + 1} dx \text{ (ĐHT Nguyễn-98) : Ta có : } f(x)dx = \frac{x^{\frac{p}{2}} dx}{\left(x^{\frac{p+2}{2}} \right)^2 + 1}.$$

$$- \text{Đặt : } t = x^{\frac{p+2}{2}} = x^{\frac{p}{2}+1} \Rightarrow \begin{cases} dt = x^{\frac{p}{2}} dx \\ x = 1 \rightarrow t = 1; x = e^{\frac{1}{p+2}} \rightarrow t = \sqrt{e} \end{cases} \Leftrightarrow I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$- \text{Đặt : } t = \tan u \Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{du}{\cos^2 u} \\ t = 1 \rightarrow u = \frac{\pi}{4}, t = e^{\frac{1}{p+2}} \rightarrow u = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{u_1} \frac{du}{\cos^2 u (1 + \tan^2 u)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{u_1} du = \frac{\pi}{4} - u_1$$

- Từ : $\tan u = \sqrt{e} \Rightarrow u = u_1 = \arctan \sqrt{e} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4} - \arctan \sqrt{e}$

b. $\int_0^a \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$. Đặt : $x = atant \Rightarrow \begin{cases} dx = a \frac{dt}{\cos^2 t}; x = 0 \rightarrow t = 0, x = a \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ f(x) = \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^3 \tan^3 t}{a^3 \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}} a \frac{dt}{\cos^2 t} = a \cos t \cdot \tan^3 t dt \end{cases}$

Vậy : $I = \int_0^a f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \cos t \cdot \tan^3 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \cos t \cdot \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \cdot \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt = a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \cos^2 t) \sin t}{\cos^2 t} dt =$

- Đặt : $\cos t = u \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin t dt; t = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}; t = 0 \rightarrow u = 1 \\ f(t) dt = \frac{(1 - u^2)}{u^2} (-du) = \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) du \end{cases}$

Vậy : $I = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) du = \left(u + \frac{1}{u}\right) \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2}$

c. $\int_0^1 e^{x+e^x} dx = \int_0^1 e^x e^{e^x} dx$. Đặt : $t = e^x \Rightarrow \begin{cases} dt = e^x dx; x = 0 \rightarrow t = 1; x = 1 \rightarrow t = e \\ f(x) dx = e^x e^{e^x} dx = e^t dt \end{cases}$

Vậy : $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_1^e e^t dt = e^t \Big|_1^e = e^e - e$

d. $\int_0^{2a} x \sqrt{2ax - x^2} dx = \int_0^{2a} x \sqrt{a^2 - (x - a)^2} dx$

Đặt : $x - a = a \cdot \sin t \Rightarrow \begin{cases} dx = a \cdot \cos t dt, x = 0 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = 2a \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ f(x) dx = (a + a \cdot \sin t) \sqrt{a^2 \cos^2 t} \cdot a \cdot \cos t dt \end{cases}$

Vậy :

$$I = a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t) \cos^2 t dt = a^3 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt \right] = a^3 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (cost) \right]$$

$$= a^3 \left[\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right] = a^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = a^3 \frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau

a. $\int_2^3 \frac{dx}{x^5 - x^2}$

b. $\int_0^1 \frac{x^7 dx}{(1 + x^4)^2}$

c. $\int_0^1 \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$

d. $\int_1^2 \frac{\sqrt{1 + x^3}}{x^4} dx$

Giải

$$a. \int_2^3 \frac{dx}{x^5 - x^2} = \int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Xét : } f(x) &= \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{E}{x-1} \\ &= \frac{A(x^2+x+1)(x-1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + (Cx+D)x^2(x-1) + E(x^2+x+1)x^2}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(B+C+E)x^4 + (A+D-C+E)x^3 + (E-D)x^2 - Bx - A}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}. \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số hai tử số ta có hệ :

$$\begin{cases} B+C+E=0 \\ A+D-C+E=0 \\ E-D=0 \\ B=0 \\ A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-E \\ E+E+E=1 \\ B=0 \\ E=D \\ A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=\frac{1}{3} \\ C=-\frac{1}{3} \\ B=0 \\ E=\frac{1}{3} \\ A=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2+x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1}$$

$$\text{Vậy : } I = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2+x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} \right) dx = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x^2+x+1} \right) + \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)} \right) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-1| \right) \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_2^3 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{7}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{5}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

$$b. \int_0^1 \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^4}{(1+x^4)^2} 3x^3 dx \quad (1).$$

$$\text{Đặt : } t = 1+x^4 \Rightarrow \begin{cases} dt = 3x^3 dx, x=0 \rightarrow t=1; x=1 \rightarrow t=2 \\ f(x)dx = \frac{1}{3} \left(\frac{t-1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I = \int_0^1 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{3} \left(\ln|t| + \frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$c. \int_0^1 \frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2-2)}{(x^2+1)^2} 2x dx \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } t = 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2 = t - 3 \Rightarrow \begin{cases} dt = 2x dx; x = 0 \rightarrow t = 1; x = 1 \rightarrow t = 2 \\ f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{t-3}{t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{t^2} \right) dt \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I = \int_1^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\ln|t| + \frac{3}{t} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{3}{2} \right)$$

$$\text{d. } \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^4} dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^6} x^2 dx \quad (1).$$

$$\text{Đặt : } t = \sqrt{1+x^3} \Leftrightarrow t^2 = 1+x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t dt = 3x^2 dx; x = 1 \rightarrow t = \sqrt{2}, x = 2 \rightarrow t = 3 \\ f(x) dx = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^6} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{t}{(t^2-1)^2} 2t dt = \frac{2}{3} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt \end{cases}$$

Vậy :

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} \int_{\sqrt{2}}^3 \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \right) dt = \frac{2}{3} \left[\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right)^2 dt \right] = \frac{1}{6} \int_{\sqrt{2}}^3 \left(\frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} - \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \right) dt \\ &= \frac{1}{6} \left[-\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right] \Big|_{\sqrt{2}}^3 = \frac{1}{6} \left(\frac{-2t}{(t^2-1)} - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^3 = \frac{8\sqrt{2}-3}{24} + \frac{1}{3} \ln(2\sqrt{2}-2) \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau :

$$\text{a. } \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$$

$$\text{b. } \int_0^1 \frac{(x^2-x)dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{c. } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5-2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\text{d. } \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$$

Giải

$$\text{a. } \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}} = \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{x dx}{x^2 \sqrt{x^2+9}} \quad (1).$$

$$\text{Đặt : } t = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow \begin{cases} t^2 = x^2+9 \Leftrightarrow t dt = x dx, x^2 = t^2-9 \\ x = \sqrt{7} \rightarrow t = 4, x = 4 \rightarrow t = 5 \end{cases}. \text{ Do đó : } I = \int_4^5 \frac{dt}{t(t^2-9)} = \int_4^5 \frac{dt}{t(t-3)(t+3)}$$

$$\text{Ta có : } f(t) = \frac{1}{t(t-3)(t+3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t+3} = \frac{A(t^2-9) + Bt(t+3) + Ct(t-3)}{t(t^2-9)}$$

Đồng nhất hệ số hai tử số bằng cách thay lần lượt các nghiệm vào hai tử số ta có :

$$\text{- Với } x=0 : -9A=1 \rightarrow A = -\frac{1}{9}$$

$$\text{- Với } x=-3 : 9C=1 \rightarrow C = \frac{1}{9}$$

$$\text{- Với } x=3 : 9B=1 \rightarrow B = \frac{1}{9}$$

$$\text{Vậy : } I = \frac{1}{9} \left[\int_4^5 \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-3} + \frac{1}{t+3} \right) dt \right] = \frac{1}{9} \left[\ln(t^2-9) - \ln t \right] \Big|_4^5 = \frac{1}{9} \ln \frac{t^2-9}{t} \Big|_4^5 = \frac{1}{9} \ln \frac{144}{35}$$

* Chú ý : Nếu theo phương pháp chung thì đặt : $x = 3 \sin t \rightarrow dx = 3 \cos t dt$.

Khi : $\begin{cases} x = \sqrt{7} \rightarrow \sqrt{7} = 3 \sin t \leftrightarrow \sin t = \frac{\sqrt{7}}{3} \\ x = 4 \rightarrow 4 = 3 \sin t \leftrightarrow \sin t = \frac{4}{3} > 1 \end{cases}$. Như vậy ta không sử dụng được phương pháp

này được .

$$b. \int_0^1 \frac{(x^2 - x)dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = J - K \quad (1)$$

* Để tính J :

$$\text{Đặt : } x = \tan t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt, x = 0 \rightarrow t = 0; x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ f(x)dx = \frac{\tan^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt}{\sqrt{1 + \tan^2 t}} = \frac{\tan^2 t}{\cos t} dt \end{cases} . \text{ Tính tích phân này không đơn}$$

giản , vì vậy ta phải có cách khác .

$$\text{- Từ : } g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

- Hai tích phân này đều tính được .

$$+/- \text{ Tính : } E = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx = x\sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{2} - \left(\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \right)$$

$$= \sqrt{2} - E + \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| \Big|_0^1 \Rightarrow 2E = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow E = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$* \text{ Tính K} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$\text{Do vậy : } I = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + \ln(1 + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$c. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5 - 2x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5}{\sqrt{x^2 + 1}} dx - 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = J - K \quad (1)$$

$$\text{- Tính J: Đặt } t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t^2 - 1; xdx = tdt; x = 0 \rightarrow t = 1, x = \sqrt{3} \rightarrow t = 2 \\ f(x)dx = \frac{x^4 xdx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(t^2 - 1)^2 tdt}{t} = (t^4 - 2t^2 + 1)dt \end{cases}$$

$$\text{Suy ra : } J = \int_1^2 (t^4 - 2t^2 + 1)dt = \left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t \right) \Big|_1^2 = \frac{38}{15}$$

$$\text{- Tính K: Đặt } t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t^2 - 1; xdx = tdt; x = 0 \rightarrow t = 1, x = \sqrt{3} \rightarrow t = 2 \\ f(x)dx = \frac{x^2 xdx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(t^2 - 1)tdt}{t} = (t^2 - 1)dt \end{cases}$$

$$\text{Suy ra : } K = \int_1^2 (t^2 - 1)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy : } I = \frac{28}{15} + \frac{4}{3} = \frac{48}{15} = \frac{16}{5}$$

$$d. \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx. \text{ Đặt : } x = \sin t \rightarrow \begin{cases} dx = \cos t dt. x=0 \rightarrow t=0; x=1 \rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ f(x)dx = \sqrt{(1-x^2)^3} dx = \sqrt{\cos^6 t} \cos t dt = \cos^4 t dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2t}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t \right) dt \\ &= \left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

TÍCH PHÂN CHỨA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC

1. Thuộc các nguyên hàm :

$$a/ \int_{\alpha}^{\beta} \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$b/ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin(ax+b)}{\cos(ax+b)} dx = -\ln|\cos(ax+b)| \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$c/ \int_{\alpha}^{\beta} \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$d/ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos(ax+b)}{\sin(ax+b)} dx = \ln|\sin(ax+b)| \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

2. Đối với : $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

a/ Nếu $f(x) = R(\sin^m x; \cos^n x)$ thì ta chú ý :

- Nếu m lẻ, n chẵn : đặt $\cos x = t$ (Gợi tắt là lẻ sin)
- Nếu n lẻ, m chẵn : đặt $\sin x = t$ (Gợi tắt là lẻ cos)
- Nếu m, n đều lẻ thì : đặt $\cos x = t$ hoặc $\sin x = t$ đều được (gợi tắt là sin hoặc cos)
- Nếu m, n đều chẵn : đặt $\tan x = t$ (gợi tắt là chẵn sinx, cosx)

b/ Phải thuộc các công thức lượng giác và các công thức biến đổi lượng giác, các hằng đẳng thức lượng giác, công thức hạ bậc, nhân đôi, nhân ba, tính theo tang góc chia đôi

3. Nói chung để tính được một tích phân chứa các hàm số lượng giác, học sinh đòi hỏi phải có một số yếu tố sau :

- Biến đổi lượng giác thuần thục
- Có kỹ năng khéo léo nhận dạng được cách biến đổi đưa về dạng đã biết trong nguyên hàm.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau :

a. (ĐH, CĐ Khối A – 2005) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$

b.. ĐH, CĐ Khối B – 2005 . $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$ **KQ:** $2\ln 2 - 1$

Giải

$$a. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos x + 1)\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{t^2 - 1}{3}; \sin x dx = -\frac{2}{3} t dt \\ x = 0 \rightarrow t = 2; x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó : } I = \int_2^1 \frac{\left(\frac{2t^2 - 1}{3} + 1\right)}{t} \left(-\frac{2}{3} t dt\right) = 2 \int_1^2 \frac{2t^2 + 1}{9} dt = \frac{2}{9} \left[\frac{1}{3} t^3 + t \right]_1^2 = \frac{34}{27}$$

$$b. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos^2 x}{1 + \cos x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x + 1} \sin x dx \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } t = 1 + \cos x \Rightarrow \begin{cases} dt = -\sin x dx, x=0 \rightarrow t=2; x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=1 \\ f(x)dx = \frac{(t-1)^2}{t} dt = \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right) dt \end{cases}$$

$$\text{Do đó : } I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = -2 \int_2^1 \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right) dt = 2 \left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + \ln|t|\right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

a. **ĐH- CĐ Khối A – 2006 .** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$ **KQ:** $\frac{2}{3}$

b. **CĐ Bến Tre – 2005 .** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\sin x + 1} dx$ **KQ:** $2 - 3\ln 2$

Giải

a. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$. Đặt : $t = \sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x} \Rightarrow t^2 = \cos^2 x + 4\sin^2 x$

$$\text{Do đó : } \begin{cases} 2tdt = (-2\sin x \cos x + 8\sin x \cos x) dx = 3\sin 2x dx \rightarrow \sin 2x dx = \frac{2}{3} t dt \\ x=0 \rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{tdt}{t} = \frac{2}{3} \int_1^2 dt = \frac{2}{3} t \Big|_1^2 = \frac{2}{3}$$

b. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\sin x + 1} dx$.

Ta có : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = (4\cos^2 x - 3)\cos x = (4 - 4\sin^2 x - 3)\cos x = (1 - 4\sin^2 x)\cos x$

Cho nên : $f(x)dx = \frac{\cos 3x}{1 + \sin x} dx = \frac{(1 - 4\sin^2 x)}{1 + \sin x} \cos x dx$ (1)

$$\text{Đặt : } t = 1 + \sin x \Rightarrow \begin{cases} dt = \cos x dx, x=0 \rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=2 \\ f(x)dx = \frac{[1 - 4(t-1)^2]}{t} dt = \left(8 - 4t - \frac{3}{t}\right) dt \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_1^2 \left(8 - 4t - \frac{3}{t}\right) dt = \left(8t - 2t^2 - 3\ln|t|\right) \Big|_1^2 = 2 - 3\ln 2$$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau

a. **CĐSP Sóc Trăng Khối A – 2005 .** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x + 2 \cos x \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}$

b. CD Y Tế – 2006 . $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$ **KQ:** $\ln \sqrt{2}$

Giải

a. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x + 2 \cos x \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x + \cos x \cdot (1 + \cos x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = -\ln |1 + \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2$

b. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{|\sin x + \cos x|} dx \quad (1)$

Vì : $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right); \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq 3\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) > 0$

Do đó : $|\sin x + \cos x| = \sin x + \cos x$

Mặt khác : $d(\sin x + \cos x) = (\cos x - \sin x) dx$

Cho nên : $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = -\ln |\sin x + \cos x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -[\ln 1 - \ln \sqrt{2}] = \frac{1}{2} \ln 2$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau

a. **CD Sư Phạm Hải Dương – 2006 .** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{(\sin x - \cos x + 3)^3} dx$ **KQ:** $\frac{1}{32}$

b. **CD KTKT Đông Du – 2006 .** $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin 2x} dx$ **KQ:** $\frac{1}{4} \ln 3$

Giải

a. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{(\sin x - \cos x + 3)^3} dx$. Vì : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$

Cho nên : $f(x) dx = \frac{\cos 2x}{(\sin x - \cos x + 3)^3} dx = \frac{(\cos x - \sin x)}{(\sin x - \cos x + 3)^3} (\cos x + \sin x) dx$

Đặt : $t = \sin x - \cos x + 3 \Rightarrow \begin{cases} dt = (\cos x + \sin x) dx; x = 0 \rightarrow t = 2, x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 4 \\ f(x) dx = \frac{t-3}{t^3} dt = \left(\frac{1}{t^2} - 3\frac{1}{t^3} \right) dt \end{cases}$

Vậy : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_2^4 \left(\frac{1}{t^2} - 3\frac{1}{t^3} \right) dt = \left(-\frac{1}{t} + \frac{3}{2t^2} \right) \Big|_2^4 = \frac{1}{32}$

b. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin 2x} dx$. Đặt : $t = 1 + 2 \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} dt = 4 \cos 2x dx \rightarrow \cos 2x dx = \frac{1}{4} dt \\ x = 0 \rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = 3 \end{cases}$

$$\text{Vậy : } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + 2\sin 2x} dx = \frac{1}{4} \int_1^3 \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln|t| \Big|_1^3 = \frac{1}{4} \ln 3$$

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau :

a. **CD Sư Phạm Quảng Ngãi – 2006 .** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x} dx$ **KQ: 2**

b. **CD Bến Tre – 2006 .** $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 3x - \sin^3 3x}{1 + \cos 3x} dx$

Giải

a. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1 + \cos x} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos^2 x)}{1 + \cos x} \sin x dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \sin x dx = 4 \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos x)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$

b. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 3x - \sin^3 3x}{1 + \cos 3x} dx .$

Ta có : $\sin 3x - \sin^3 3x = \sin 3x (1 - \sin^2 3x) = \sin 3x \cdot \cos^2 3x .$

Đặt : $t = 1 + \cos 3x \Rightarrow \begin{cases} dt = -3\sin 3x dx \rightarrow \sin 3x dx = -\frac{1}{3} dt \\ x = 0 \rightarrow t = 2; x = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = 1 \end{cases}$

Vậy : $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx = -\frac{1}{3} \int_2^1 \frac{(t-1)^2}{t} dt = \frac{1}{3} \int_1^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} t^2 - 2t + \ln|t| \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \ln 2$

Ví dụ 6. Tính các tích phân sau

a. $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin x} \cot x dx$

b. $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\sin(\frac{\pi}{4} + x)} dx$

c. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

d. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$

Giải

a. $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin x} \cot x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right)}}{\sin x} \cot x dx$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right)} \cot x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt[3]{\cot^2 x} \cot x dx$

$$\begin{aligned} \text{b. } I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\sin(\frac{\pi}{4} + x)} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} = \ln |\cos x + \sin x| \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \left(\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

$$\text{d. } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx. \text{ Vì: } \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

Cho nên :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \sin^3 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Ví dụ 7. Tính các tích phân sau

$$\text{a. } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$$

$$\text{b. } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \sqrt{\cot x}} dx$$

$$\text{c. } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} dx$$

$$\text{d. } *I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt[3]{\sin x}) dx$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a. } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x] d(\cos x) \\ &= \left(-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

$$b. I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \sqrt{\cot x}} dx.$$

$$\text{Đặt : } t = \sqrt{\cot x} \Rightarrow t^2 = \cot x \Leftrightarrow \begin{cases} 2t dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx \rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} dx = -2t dt \\ x = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = \sqrt{3}; x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I = -\int_{\sqrt{3}}^1 \frac{2t dt}{t} = 2 \int_1^{\sqrt{3}} dt = 2t \Big|_1^{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} - 1)$$

$$c. I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(\tan x - \cot x)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} |\tan x - \cot x| dx$$

$$\text{Vì : } \tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = -2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -2 \cot 2x$$

$$\text{Cho nên : } x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x \in \left(\frac{\pi}{3}; 2\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cot 2x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x - \cot x < 0; x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right] \\ \tan x - \cot x > 0; x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right] \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -(\tan x - \cot x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x - \cot x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2}$$

$$(\ln |\sin 2x|) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} (\ln |\sin 2x|) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2$$

$$d. I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt[3]{\sin x}) dx \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } x = \frac{\pi}{2} - t \rightarrow dx = -dt, x = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0$$

Do đó :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\sqrt[3]{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} - \sqrt[3]{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} \right) (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt[3]{\sin t} - \sqrt[3]{\cos t}) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\cos x}) dx \quad (2)$$

$$\text{Lấy (1) + (2) về với về : } 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

Ví dụ 8 . Tính các tích phân sau

$$a. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^4 x dx \text{ (Y-HN-2000)} \quad b. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)} dx \text{ (NT-2000)} \quad c. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx \text{ (NNI-2001)}$$

$$d. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx \text{ (GTVT-2000)}$$

$$e. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x} dx$$

$$f. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx \text{ (KB-03)}$$

Giải

$$a. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^4 x dx. \text{ Ta có : } f(x) = \tan^4 x = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^4 x} - 2 \frac{1}{\cos^2 x} + 1$$

$$\text{Do đó : } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^4 x} - 2 \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \tan^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} - \left[2 \tan x + x \right] \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \left(2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{12} \right) = \left(2\sqrt{3} - \frac{4}{3} \right) - \left(2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{12} \right) = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}$$

* Chú ý : Ta còn có cách phân tích khác :

$$f(x) = \tan^4 x = \tan^2 x (\tan^2 x + 1 - 1) = \tan^2 x (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x = \tan^2 x (1 + \tan^2 x) - (\tan^2 x + 1) + 1$$

$$\text{Vậy : } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} [\tan^2 x (1 + \tan^2 x) - (\tan^2 x + 1) + 1] dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dx$$

$$I = \left(\frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{3} 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}$$

$$b. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)} dx.$$

$$\text{Ta có : } f(x) = \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^3} = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\sin x + \cos x + 2)^3} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x + \cos x + 2)^3}$$

$$\text{Do đó : } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{(\cos x + \sin x)}{(\sin x + \cos x + 2)^3} \right) (\cos x - \sin x) dx \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } t = \sin x + \cos x + 2 \Rightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = t - 2, x=0 \rightarrow t=3; x=\frac{\pi}{4} \rightarrow t=\sqrt{2}+2, \\ dt = (\cos x - \sin x) dx \Rightarrow f(x) dx = \frac{t-2}{t^3} dt = \left(\frac{1}{t^2} - 2 \frac{1}{t^3} \right) dt \end{cases}$$

Vậy :

$$I = \int_3^{\sqrt{2}+2} \left(\frac{1}{t^2} - 2 \frac{1}{t^3} \right) dt = \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) \Bigg|_3^{\sqrt{2}+2} = \left(-\frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2} \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1+\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{(\sin t + \cos t)}{(\sin t + \cos t + 9)} (\sin t - \cos t) (-dt) = \frac{(\sin t + \cos t)}{(\sin t + \cos t + 9)} (\cos t - \sin t) dt = f(x)$$

$$c. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx =$$

$$\text{Ta có : } f(x) = \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} = \frac{(1 - \sin^2 x)^3}{\sin^4 x} = \frac{1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x}{\sin^4 x} = \frac{1}{\sin^4 x} - 3\frac{1}{\sin^2 x} + 3 - \sin^2 x$$

$$\text{Vậy : } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x) \frac{dx}{\sin^2 x} - 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x} + 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{3} \cot^3 x + 3 \cot x + 3x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{8} + \frac{23}{12}$$

$$d. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^6 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^6 x} - \frac{1}{\cos^4 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x)^2 \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x) d(\tan x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) d(\tan x)$$

$$= \left(\tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x - \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{15}$$

$$e. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4 - \frac{1 + \cos 2x}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin 2x}{7 - \cos 2x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(7 - \cos 2x)}{7 - \cos 2x} = - \ln |7 - \cos 2x| \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{3}{4}$$

$$f. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1 + \sin 2x)}{1 + \sin 2x} = \frac{1}{2} \ln |1 + \sin 2x| \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2$$

Ví dụ 9. Tính các tích phân sau :

$$a. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx$$

$$b. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{1 + 2\cos 3x} dx$$

$$c. I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx \quad \vee \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx \Rightarrow K = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sqrt{3} \sin x} dx$$

Giải

$$a. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \cdot \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6 x - \cos^4 x) d(\cos x)$$

$$= \left(\frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{35}$$

$$b. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{1+2\cos 3x} dx = -\frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin 3x}{1+2\cos 3x} dx = -\frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1+2\cos 3x)}{1+2\cos 3x} = -\frac{1}{6} (\ln|1+2\cos 3x|) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6} \ln 3$$

$$c. \text{Ta có : } I + J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx$$

$$\text{Do : } \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} \cdot \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{d\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right)}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\text{Vậy : } I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right)}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \ln \sqrt{3} = \frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$\text{- Mặt khác : } I - 3J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x - \sqrt{3}\cos x)(\sin x + \sqrt{3}\cos x)}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} dx$$

$$\text{Do đó : } I - 3J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x - \sqrt{3}\cos x) dx = (-\cos x - \sqrt{3}\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 1 - \sqrt{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ : } \begin{cases} I + J = \frac{1}{4} \ln 3 \\ I - 3J = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = \frac{3}{16} \ln 3 - \frac{\sqrt{3}-1}{4} \\ J = \frac{1}{16} \ln 3 + \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Để tính K ta đặt } t = x - 3\frac{\pi}{2} \rightarrow dt = dx \Leftrightarrow x = 3\frac{\pi}{2}; t = 0. x = 5\frac{\pi}{3} \rightarrow t = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Vậy : } K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2t+3\pi)}{\cos\left(t+3\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(t+3\frac{\pi}{2}\right)} dt = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2t}{\sin t + \sqrt{3}\cos t} dt = I - J = \frac{1}{8} \ln 3 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Ví dụ 10. Tính các tích phân sau .

$$a. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin 2x} dx \quad (\text{CĐ-99})$$

$$b. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x} \quad (\text{ĐH-LN-2000})$$

$$c. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{10} x + \cos^{10} x - \sin^4 x \cos^4 x) dx \quad (\text{SPII-2000})$$

$$d. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx \quad (\text{MĐC-2000})$$

Giải

$$a. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \sin x + \cos x}$.

Đặt : $t = \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow dt = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx; \Leftrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}; x=0 \rightarrow t=0, x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=1$

Vậy : $I = \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{(1+t^2)} dt = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2 + 2t + 3} = \int_0^1 \frac{2dt}{(t+1)^2 + 2} = (2)$

Đặt : $t+1 = \sqrt{2} \tan u \Rightarrow \begin{cases} dt = \sqrt{2} \frac{1}{\cos^2 u} du; t=0 \rightarrow \tan u = \frac{\sqrt{2}}{2}; t=1 \rightarrow \tan u = \sqrt{2} \\ f(t)dt = \frac{2dt}{(t+1)^2 + 2} = \frac{2}{2(1+\tan^2 u)} \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 u} du = \sqrt{2} du \end{cases}$

Vậy : $I = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{2} du = \sqrt{2} u \Big|_{u_1}^{u_2} = \sqrt{2} (u_2 - u_1) = \sqrt{2} \left(\arctan \frac{\sqrt{2}}{2} - \arctan \sqrt{2} \right)$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{10} x + \cos^{10} x - \sin^4 x \cos^4 x) dx$

Ta có : $\sin^{10} x + \cos^{10} x - \sin^4 x \cos^4 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = (\cos^4 x - \sin^4 x) (\cos^6 x - \sin^6 x)$
 $= (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^4 x + \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x)$
 $= \cos^2 2x \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x \right) = \cos^2 2x - \frac{1}{16} \sin^2 4x = \frac{1 + \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 8x}{32} = \frac{15}{32} + \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{32} \cos 8x$

Vậy : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{15}{32} + \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{32} \cos 8x \right) dx = \frac{15}{32} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{32 \cdot 8} \sin 8x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15\pi}{64}$

d. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} dx$.

Ta có : $\left(x + \frac{\pi}{6} \right) - x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin \left[\left(x + \frac{\pi}{6} \right) - x \right] = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos x - \sin x \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} (*)$

Do đó : $f(x) = \frac{1}{\sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} = 2 \frac{\frac{1}{2}}{\sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} = 2 \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos x - \sin x \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}$

$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} \Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} \right) dx = 2 \left(\ln |\sin x| - \ln \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right| \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$I = 2 \ln \left| \frac{\sin x}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} \right| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right| - \ln \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \right| = 2 \ln \frac{3}{2}$

* **Chú ý :** Ta còn có cách khác

$$f(x) = \frac{1}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sin x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right)} = \frac{2}{\sin^2 x (\sqrt{3} + \cot x)}$$

$$\text{Vậy : } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\sqrt{3} + \cot x} \frac{1}{\sin^2 x} dx = - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2d(\sqrt{3} + \cot x)}{(\sqrt{3} + \cot x)} = -2 \ln |\sqrt{3} + \cot x| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2 \ln \frac{3}{2}$$

Ví dụ 11. Tính các tích phân sau

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$ (HVBCVT-99)

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos^2 2x dx$ (HVNHTPHCM-98)

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\cos^6 x + \sin^6 x} dx$ (ĐHNT-01)

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$ (ĐHTM-95)

Giải

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} (\sin 2x) dx \quad (1)$

Đặt : $t = 1 + \cos^2 x \Rightarrow \begin{cases} dt = -2 \sin x \cos x dx = -\sin 2x dx \\ \cos^2 x = t - 1; x = 0 \rightarrow t = 2; x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$

Vậy : $I = \frac{1}{2} \int_2^1 \frac{(t-1)}{t} (-dt) = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - 1\right) dt = \frac{1}{2} (\ln |t| - t) \Big|_1^2 = \frac{\ln 2 - 1}{2}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos^2 2x dx$.

Ta có : $f(x) = \cos^2 x \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{4} (1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 4x \cdot \cos 2x)$
 $= \frac{1}{4} \left(1 + \cos 2x + \cos 4x + \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x)\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 6x$

Vậy : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 6x\right) dx = \left(\frac{1}{4} x + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin 6x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\cos^6 x + \sin^6 x} dx$.

Vì : $d(\sin^6 x + \cos^6 x) = (6 \sin^5 x \cos x - 6 \cos^5 x \sin x) dx = 6 \sin x \cos x (\sin^4 x - \cos^4 x)$

$\Leftrightarrow d(\sin^6 x + \cos^6 x) = 3 \sin 2x (\sin^2 x - \cos^2 x) (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = -3 \sin 2x \cos 2x dx$

$= -\frac{3}{2} \sin 4x dx \Rightarrow \sin 4x dx = -\frac{2}{3} d(\sin^6 x + \cos^6 x)$

Vậy : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\cos^6 x + \sin^6 x} dx = -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin^6 x + \cos^6 x)}{(\sin^6 x + \cos^6 x)} = -\frac{2}{3} \ln |\sin^6 x + \cos^6 x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3} \ln 2$

$$d. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) d(\tan x) = \left(\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}$$

Ví dụ 12. Tính các tích phân sau .

a. $\int_0^{\pi} \sin^{11} x dx$ (HVQHQT-96)

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$ (NNI-96)

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos 4x dx$ (NNI-98)

d. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$ (ĐHTL-97)

Giải

a. $\int_0^{\pi} \sin^{11} x dx$

Ta có :

$$\sin^{11} x = \sin^{10} x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x)^5 \sin x = (1 - 5\cos^2 x + 10\cos^3 x - 10\cos^4 x + 5\cos^5 x - \cos^6 x) \sin x$$

Cho nên : $I = \int_0^{\pi} (1 - 5\cos^2 x + 10\cos^3 x - 10\cos^4 x + 5\cos^5 x - \cos^6 x) \sin x dx$

$$= \left(\frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{5}{6} \cos^6 x + 2 \cos^5 x - \frac{5}{2} \cos^4 x + \frac{5}{3} \cos^3 x - \cos x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{-118}{21}$$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$

Hạ bậc :

$$\sin^2 x \cos^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} (1 - \cos 2x) (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{8} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2 \cos^2 2x - \cos^3 2x)$$

$$= \frac{1}{8} (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) = \frac{1}{8} \left(1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} - \cos 2x \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{16} (1 + \cos 2x - \cos 4x + \cos 4x \cdot \cos 2x) = \frac{1}{16} \left(1 + \cos 2x - \cos 4x + \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2} \right)$$

$$\frac{1}{32} (2 + 3 \cos 2x + \cos 6x - \cos 4x)$$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{32} (2 + 3 \cos 2x + \cos 6x - \cos 4x) dx = \left(\frac{1}{32} x + \frac{3}{64} \sin 2x + \frac{1}{32 \cdot 6} \sin 6x - \frac{1}{32 \cdot 4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$

d. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cos^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \sqrt{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \right)$

$$= \sqrt{2} \left(\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \sqrt{2} (1 + 1) = 2\sqrt{2}$$

III. MỘT SỐ CHÚ Ý QUAN TRỌNG

1. Trong phương pháp đổi biến số dạng 2.

* **Sử dụng công thức :** $\int_0^b f(x)dx = \int_0^b f(b-x)dx$

Chứng minh :

- Đặt : $b-x=t$, suy ra $x=b-t$ và $dx=-dt$, $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow t=b \\ x=b \rightarrow t=0 \end{cases}$
- Do đó : $\int_0^b f(x)dx = \int_b^0 f(b-t)(-dt) = \int_0^b f(b-t)dt = \int_0^b f(b-x)dx$. Vì tích phân không phụ thuộc vào biến số

Ví dụ : Tính các tích phân sau

$$a/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x dx}{(\sin x + \cos x)^3}$$

$$b/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\cos x - 4\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$$

$$c/ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_2(1 + \tan x) dx$$

$$d/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$$

$$e/ \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

$$f/ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x \cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

Giải

$$a/ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x dx}{(\sin x + \cos x)^3} \cdot (1) \text{ . Đặt :}$$

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t \Leftrightarrow \begin{cases} dt = -dx, x=0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t=0 \\ f(x)dx = \frac{4\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]^3} (dt) = -\frac{4\cos t}{(\cos t + \sin t)^3} dt = f(t)dt \end{cases}$$

Nhưng tích phân không phụ thuộc vào biến số, cho nên :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx \quad (2)$$

$$\text{Lấy (1) + (2) vế với vế ta có : } 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} dx \Rightarrow I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx$$

$$\Leftrightarrow I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

b/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \cos x - 4 \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$. Tương tự như ví dụ a/ ta có kết quả sau :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \cos x - 4 \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{5 \sin t - 4 \cos t}{(\cos t + \sin t)^3} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin x - 4 \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx \quad (2)$$

$$\text{Vậy : } 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} dx = \frac{1}{2} \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$$

c/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_2 (1 + \tan x) dx$. Đặt :

$$t = \frac{\pi}{4} - x \rightarrow x = \frac{\pi}{4} - t \Leftrightarrow \begin{cases} dx = -dt, x = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{4}; x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = 0 \\ f(x)dx = \log_2 (1 + \tan x) dx = \log_2 \left(1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - t \right) \right) (-dt) \end{cases}$$

$$\text{Hay: } f(t) = \log_2 \left(1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t} \right) (-dt) = \log_2 \frac{2}{1 + \tan t} (-dt) = \log_2 2 - \log_2 t$$

$$\text{Vậy : } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_2 t dt \Rightarrow 2I = t \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{8}$$

$$d/ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 \left(\frac{\pi}{2} - t \right)}{\sin^6 \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + \cos^6 \left(\frac{\pi}{2} - t \right)} d(-t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\cos^6 x + \sin^6 x} dx = I \quad (2)$$

$$\text{Cộng (1) và (2) ta có : } 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^6 x + \sin^6 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

e/ $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx$. Đặt : $t=1-x$ suy ra $x=1-t$. Khi $x=0, t=1; x=1, t=0; dt=-dx$

$$\text{Do đó : } I = \int_1^0 (1-t)^m t^n (-dt) = \int_0^1 t^n (1-t)^m dt = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^2 x}{1 + \cos x} dx$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + 2 \sin x}{4 \cos x + 3 \sin x} dx \quad (\text{XD-98})$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$5. \int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx \text{ (ĐHKT-97)}$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + 2 \cos x}{3 \sin x + \cos x} dx \text{ (CĐSPHN-2000)}$$

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{9 + 4 \cos^2 x} dx \text{ (ĐHYDTPHCM-2000)}$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx \text{ (HVNHTPHCM-2000)}$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{2 + \cos^2 x} dx \text{ (AN-97)}$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) dx \text{ (CĐSPKT-2000)}$$

$$10. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x \cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

* **Dạng** : $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \sin x + b \cos x + c}{a' \sin x + b' \cos x + c'} dx$

Cách giải :

Ta phân tích : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \sin x + b \cos x + c}{a' \sin x + b' \cos x + c'} dx = A + \frac{B(a' \cos x - b' \sin x)}{a' \sin x + b' \cos x + c'} + \frac{C}{a' \sin x + b' \cos x + c'}$

- Sau đó : Quy đồng mẫu số
- Đồng nhất hai tử số , để tìm A,B,C .
- Tính I :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left(A + \frac{B(a' \cos x - b' \sin x)}{a' \sin x + b' \cos x + c'} + \frac{C}{a' \sin x + b' \cos x + c'} \right) dx = (Ax + B \ln |a' \sin x + b' \cos x + c'|) \Big|_{\alpha}^{\beta} + C \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{a' \sin x + b' \cos x + c'}$$

VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ . Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2 \cos x + 3} dx \text{ (Bộ đề)}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + 2 \sin x}{4 \cos x + 3 \sin x} dx \text{ (XD-98)}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7 \cos x + 6}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$

d. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos x - 3 \sin x + 1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$

Giải

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2 \cos x + 3} dx$. Ta có : $f(x) = \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2 \cos x + 3} = A + \frac{B(\cos x - 2 \sin x)}{\sin x + 2 \cos x + 3} + \frac{C}{\sin x + 2 \cos x + 3} \quad (1)$

Quy đồng mẫu số và đồng nhất hệ số hai tử số :

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{(A-2B)\sin x + (2A+B)\cos x + 3A+C}{\sin x + 2 \cos x + 3} \Rightarrow \begin{cases} A-2B=1 \\ 2A+B=-1 \\ 3A+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{5} \\ B=-\frac{3}{5} \\ C=\frac{4}{5} \end{cases} \text{ Thay vào (1)}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{5} \right) dx - \frac{3}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x + 2\cos x + 3)}{\sin x + 2\cos x + 3} + \frac{4}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + 2\cos x + 3} dx = -\frac{\pi}{10} - \frac{3}{5} \ln |\sin x + 2\cos x + 3| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{5} J$$

$$I = -\frac{\pi}{10} - \frac{3}{5} \ln \frac{4}{5} - \frac{4}{5} J \quad (2)$$

- Tính tích phân J :

$$\text{Đặt : } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{1}{2} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}; x=0 \rightarrow t=0, x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=1 \\ f(x)dx = \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 2 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{2dt}{t^2 + 2t + 3} \end{cases} \Leftrightarrow J = \int_0^1 \frac{2dt}{(t+1)^2 + 2} \quad (3)$$

Tính (3) : Đặt :

$$t+1 = \sqrt{2} \tan u \Rightarrow \begin{cases} dt = \sqrt{2} \frac{du}{\cos^2 u}; t=0 \rightarrow \tan u = \frac{\sqrt{2}}{2} = u_1; t=1 \rightarrow \tan u = \sqrt{2} = u_2 \\ f(t)dt = \frac{1}{\frac{2}{\cos^2 u}} \frac{\sqrt{2} du}{\cos^2 u} = \frac{\sqrt{2}}{2} du \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } J = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{2}}{2} du = \frac{\sqrt{2}}{2} (u_2 - u_1) \Rightarrow I = I = -\frac{\pi}{10} - \frac{3}{5} \ln \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \frac{\sqrt{2}}{2} (u_2 - u_1) \quad \begin{cases} \tan u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan u_2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{b. } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + 2\sin x}{4\cos x + 3\sin x} dx; \quad f(x) = \frac{\cos x + 2\sin x}{4\cos x + 3\sin x} = A + \frac{B(3\cos x - 4\sin x)}{4\cos x + 3\sin x} + \frac{C}{4\cos x + 3\sin x} \rightarrow (1)$$

Giống như phần a. Ta có : $A = \frac{2}{5}; B = -\frac{1}{5}; C=0$

$$\text{Vậy : } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5} \frac{(3\cos x - 4\sin x)}{4\cos x + 3\sin x} \right) dx = \left(\frac{2}{5} x - \frac{1}{5} \ln |4\cos x + 3\sin x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{10} + \frac{1}{5} \ln \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

