

Bài 1 (5điểm)

- 1, Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$. Tính giá trị biểu thức khi $x = 81$
- 2, Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$ với $x > 0, x \neq 1$
- 3, Tìm giá trị của x để $\frac{B}{A} = \frac{4}{3}$
- 4, Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = B - 9\sqrt{x}$

Bài 2: (3 điểm)

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 5m - 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$

- a) Giải hệ phương trình với $m = 1$
- b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = 1$.

Bài 3 (4điểm) : Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình hoặc phương trình.

Hai công nhân cùng làm một công việc trong 4 ngày thì xong việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 4 ngày rồi người thứ hai đến làm một mình trong 3 ngày nữa thì được $\frac{5}{6}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc?

Bài 4(7điểm) Cho đường tròn $(O; R)$, từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O) . Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP , kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của OM và AB .

1. Chứng minh tứ giác $AMBO$ nội tiếp.
2. Chứng minh $OI \cdot OM = R^2$; $OI \cdot IM = IA^2$.
3. Chứng minh $OAHB$ là hình thoi.
4. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

Bài 5 (1 điểm) Cho $a > 0, b > 0$ và $a + b \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

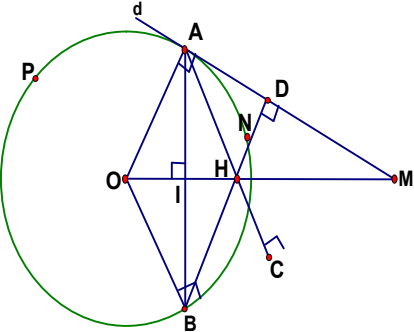
$$A = \frac{2}{a^2 + b^2} + \frac{35}{ab} + 2ab$$

----- **Hết** -----

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 (5 đ)	1) Với $x = 81$ (Thỏa mãn $x \geq 0$), Ta có : $A = \frac{\sqrt{81}-1}{\sqrt{81}+1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ 2) Với điều kiện $0 < x \neq 1$ ta có: $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$ $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$ $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1}$ $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ 3) Ta có: $\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ Đề: $\frac{B}{A} = \frac{4}{3}$ thì $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x}+3=4\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy $x=9$ thì $\frac{B}{A} = \frac{4}{3}$ 4). Ta có $P = B - 9\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = -\left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 1$ Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương ta có: $9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 6$ Suy ra: $P \leq -6 + 1 = -5$. Đẳng thức xảy ra khi $9\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$	1 đ (1,5đ) 0,25đ 0,5 đ 0,25 đ 0,5 đ (1,5đ) 0,5 đ 0,75 đ 0,25 đ (1đ) 0,5đ 0,25đ 0,25đ

	Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = -5$ khi $x = \frac{1}{9}$	
Bài 2 (3 đ)	a) Với $m = 1$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$	0,5 đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$	0,5 đ
	Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 0)$	0,5 đ
	b) $\begin{cases} 2x + y = 5m - 1(1) \\ x - 2y = 2(2) \end{cases}$	0,25
	Từ phương trình (1) ta có: $y = 5m - 1 - 2x$ Thế vào phương trình (2) ta được: $x - 2(5m - 1 - 2x) = 2$ $\Leftrightarrow x - 10m + 2 + 4x = 2$ $\Leftrightarrow 5x - 10m = 0 (*)$	0,25 đ 0,25 đ
	Phương trình (*) luôn có nghiệm duy nhất với mọi m , nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi m . Khi đó : $x = 2m; y = m - 1$ Vậy để $x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow (2m)^2 - 2(m - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 3 = 0$ Tìm được: $m = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}$ và $m = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$	0,25 0,5 đ
Bài 3 (4 đ)	Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc là $x(\text{ngày})(x > 0)$	0,25 đ
	Thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là $y(\text{ngày})(y > 0)$	0,25 đ
	- Mỗi ngày người thứ nhất làm được: $\frac{1}{x}$ công việc,	0,25
	người thứ hai làm được: $\frac{1}{y}$ công việc	0,25 đ
	- Vì hai người làm chung trong 4 ngày thì xong công việc nên 1 ngày cả 2 người làm được $\frac{1}{4}$ phần công việc ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \quad (1)$	0,5 đ

	- Người thứ nhất làm một mình trong 4 ngày ,rồi người thứ hai làm 3 ngày thì được $\frac{5}{6}$ phần công việc nên ta có phương trình : $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5}{6} \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5}{6} \end{cases}$ Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$ ta có hệ: $\begin{cases} a + b = \frac{1}{4} \\ 4a + 3b = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{12} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 6 \end{cases}$ Vậy người thứ nhất làm một mình thì trong 12 giờ xong công việc , người thứ hai làm một mình thì trong 6 giờ xong công việc .	0,5đ 0,5 1đ 0,5đ
Bài 4 (6đ)	 1, Xét tứ giác AMBO có: $\widehat{OAM} = 90^0 \text{ (Vì AM là tiếp tuyến)}$ $\widehat{OBM} = 90^0 \text{ (Vì BM là tiếp tuyến)}$ $\Rightarrow \widehat{OAM} + \widehat{OBM} = 180^0$ Mà hai góc này ở vị trí đối nhau. $\Rightarrow \text{Tứ giác AMBO nội tiếp.}$ 2, Ta có $MA = MB$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); $OA = OB = R$ $\Rightarrow OM$ là trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$ tại I . Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$ nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao. ép dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao $\Rightarrow OI \cdot OM = OA^2$ hay	0,5đ 1,5đ 1,5đ

	$OI \cdot OM = R^2$; và $OI \cdot IM = IA^2$. 3, Ta có $OB \perp MB$ (tính chất tiếp tuyến) ; $AC \perp MB$ (gt) $\Rightarrow OB \parallel AC$ hay $OB \parallel AH$. $OA \perp MA$ (tính chất tiếp tuyến) ; $BD \perp MA$ (gt) $\Rightarrow OA \parallel BD$ hay $OA \parallel BH$. $\Rightarrow$ Tứ giác $OAHB$ là hình bình hành; lại có $OA = OB (=R) \Rightarrow OAHB$ là hình thoi. 4, Theo trên $OAHB$ là hình thoi. $\Rightarrow AH = AO = R$. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính $AH = R$	1,5 đ 1,0đ
Bài 5 (1 đ)	Chúng minh được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (*) với $x > 0, y > 0$ $A = \frac{2}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} + \frac{32}{ab} + 2ab + \frac{2}{ab}$ Áp dụng (*) ta có: $\frac{2}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} = 2 \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \right) \geq 2 \cdot \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{8}{(a+b)^2} \geq \frac{8}{4^2} = \frac{1}{2}$ Áp dụng BĐT Cô-si với 2 số dương ta có: $2\sqrt{ab} \leq a + b \leq 4 \Rightarrow ab \leq 4 \Rightarrow \frac{2}{ab} \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{32}{ab} + 2ab \geq 2\sqrt{\frac{32}{ab} \cdot 2ab} = 16$ Nên $A \geq \frac{1}{2} + 16 + \frac{1}{2} = 17$ Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ ab = 4 \\ a = b \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$ Vậy GTNN của $A = 17$ khi $a = b = 2$	0,25 đ 0,25 đ 0,25đ 0,2 đ

