

CHỦ ĐỀ 1. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN

Phương pháp

Cho hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$, ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$) ta cần nhớ các định nghĩa và phép tính cơ bản sau:

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}.$$

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i; \quad z - z' = (a - a') + (b - b')i.$$

$$z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{(a' + b'i)(a - bi)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{aa' + bb' + (ab' - a'b)i}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Vận dụng các tính chất trên ta có thể dễ dàng giải các bài toán sau.

Ta cũng cần chú ý kết quả sau: Với i^n , $n \in \mathbb{Z}$ thì

- Nếu $n = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1$
- Nếu $n = 4k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $i^n = i^{4k}i = 1 \cdot i = i$
- Nếu $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $i^n = i^{4k}i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
- Nếu $n = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $i^n = i^{4k}i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

I. CÁC VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Cho số phức: $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Tính các số phức sau: $\bar{z}$; z^2 ; $(\bar{z})^3$; $1 + z + z^2$.

Giải

Ta có

- $\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Tính $(\bar{z})^3$

$$\begin{aligned} (\bar{z})^3 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}i + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}i\right)^2 + \left(\frac{1}{2}i\right)^3 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8}i - \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i = i \end{aligned}$$
- $1 + z + z^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$

Ví dụ 2. Tìm phần thực và phần ảo của số phức:

- a) $z = (9 + 5i) - (1 - 2i)$; b) $z = (4 - 3i)(4 + 5i)$;
 c) $z = (2 + i)^3$; d) $z = \frac{2i}{i + 1}$.

Giải

a) Ta có: $z = (9 + 5i) - (1 - 2i) = 9 - 1 + (5 + 2)i = 8 + 7i$

Vậy phần thực $a = 8$; phần ảo $b = 7$.

b) Ta có: $z = (4 - 3i)(4 + 5i) = 16 + 20i - 12i + 15 = 31 + 8i$

Vậy phần thực $a = 31$; phần ảo $b = 8$.

c) Ta có: $z = (2 + i)^3 = 8 + 3.4.i + 3.2.i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$

Vậy phần thực $a = 2$; phần ảo $b = 11$.

d) Ta có: $z = \frac{2i}{i+1} = \frac{2i(i-1)}{i^2-1^2} = \frac{-2+2i}{-2} = 1+i$

Vậy phần thực $a = 1$; phần ảo $b = 1$.

Ví dụ 3. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \frac{1}{(1+i)(4-3i)}$; b) $B = \frac{-5+6i}{4+3i}$; c) $C = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

d) $D = \frac{3-2i}{i}$; e) $\left(\frac{1+7i}{4+3i}\right)^{2026}$

Giải

a) Ta có: $A = \frac{1}{(1+i)(4-3i)} = \frac{1}{4-3i+4i-3i^2} = \frac{1}{7+i} = \frac{7-i}{7^2-i^2} = \frac{7}{50} - \frac{1}{50}i$

b) Ta có: $B = \frac{-5+6i}{4+3i} = \frac{(-5+6i)(4-3i)}{4^2-(3i)^2} = \frac{-2+39i}{25} = \frac{-2}{25} + \frac{39}{25}i$.

c) Ta có: $C = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{2}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2(1+\sqrt{3}i)}{1^2-3i^2} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) Ta có: $D = \frac{3-2i}{i} = \frac{(3-2i)(-i)}{-i^2} = -3i + 2i^2 = -2 - 3i$.

e) Ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+7i}{4+3i}\right)^{2026} &= \left[\frac{(1+7i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}\right]^{2026} = (1+i)^{2026} = \left[(1+i)^2\right]^{1013} \\ &= (2i)^{1013} = 2^{1013} \cdot i^{1013} = 2^{1013} \cdot i^{1012} \cdot i = 2^{1013} \cdot i. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{1+7i}{4+3i} \right)^{2026} = 2^{1013} \cdot i.$$

Ví dụ 4. Viết các số phức sau đây dưới dạng $a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$:

a) $z = (2+i)^3 - (1+2i)^3 - (3-i)(2-i);$

b) $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{3-i}{2-i} - \frac{1+2i}{1+i};$ c) $z = \frac{(2+i)^2(1+i)}{2(1-i) - 3(1+i)};$

d) $z = \frac{(2+i)^5}{(1-2i)^3};$ e) $z = \frac{(1+i)^6}{(2-2i)^5}.$

Giải

a) $z = (2+i)^3 - (1+2i)^3 - (3-i)(2-i)$
 $= 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2i^2 + i^3 - [1 + 3 \cdot 2i + 3 \cdot (2i)^2 + (2i)^3] - (6 - 3i - 2i + i^2)$
 $= 8 + 12i - 6 - i - (1 + 6i - 12 - 8i) - (6 - 5i - 1) = 8 + 18i.$

b) $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{3-i}{2-i} - \frac{1+2i}{1+i}$
 $= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} + \frac{(2-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} - \frac{(1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$
 $= \frac{1+2i+i^2}{1+1} + \frac{6+i-i^2}{4+1} - \frac{1+i-2i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} + \frac{7+i}{5} - \frac{3+i}{2} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$

c) $z = \frac{(2+i)^2(1+i)}{2(1-i) - 3(1+i)} = \frac{(4+i^2+4i)(1+i)}{-1-5i}$
 $= -\frac{(3+4i)(1+i)}{1+5i} = -\frac{3+4i^2+7i}{1+5i} = \frac{(1-7i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}$
 $= \frac{1+35i^2-12i}{1+25} = \frac{-34-12i}{26} = -\frac{17}{13} - \frac{6}{13}i.$

d) $z = \frac{(2+i)^5}{(1-2i)^3} = \left(\frac{2+i}{1-2i} \right)^3 (2+i)^2 = \left(\frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \right)^3 (4+i^2+4i).$
 $= \left(\frac{5i}{1+4} \right)^3 (3+4i) = i^3(3+4i) = -i(3+4i) = 4-3i$

e) $z = \frac{(1+i)^6}{(2-2i)^5} = \frac{(1+i)^6}{2^5(1-i)^5} = \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 (1+i)$
 $= \frac{1}{32} \cdot i^4 \cdot i(1+i) = \frac{1}{32} \cdot i(1+i) = -\frac{1}{32} + \frac{1}{32}i.$

Ví dụ 5. Tìm nghịch đảo của số phức sau:

a) $z = 3 + 4i;$ b) $z = -3 - 2i;$ c) $z = \frac{1+i\sqrt{5}}{3-2i};$ d) $z = (3+i\sqrt{2})^2.$

Giải

a) Xét $z = 3 + 4i$. Ta có:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{3^2-(4i)^2} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

Vậy nghịch đảo của số phức z là $\frac{1}{z} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$.

b) Xét $z = -3 - 2i$. Ta có:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-3-2i} = \frac{-1}{3+2i} = \frac{-1(3-2i)}{9+4} = \frac{-3+2i}{13} = -\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$$

Vậy nghịch đảo của số phức z là $\frac{1}{z} = -\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$.

c) Xét $z = \frac{1+i\sqrt{5}}{3-2i}$. Ta có:

$$\frac{1}{z} = \frac{3-2i}{1+i\sqrt{5}} = \frac{(3-2i)(1-i\sqrt{5})}{1^2+5} = \frac{3-2\sqrt{5}}{6} - \frac{2+3\sqrt{5}}{6}i$$

d) Xét $z = (3+i\sqrt{2})^2 = 7+6\sqrt{2}i$. Ta có

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{7+6\sqrt{2}i} = \frac{7-6\sqrt{2}i}{7^2+(6\sqrt{2})^2} = \frac{7-6\sqrt{2}i}{121} = \frac{7}{121} - \frac{6\sqrt{2}}{121}i.$$

Lời bình: Nếu đề bài cho trắc nghiệm thì đối với câu này có thể dò kết quả từ đáp án trắc nghiệm giữa hai con số $\frac{6\sqrt{2}}{121} \approx 0,070126$.

Nhận xét: Quá trình thực hiện trên, thực ra ta đang dùng công thức sau:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Ví dụ 6. Cho $z = (2a-1) + (3b+5)i, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Tìm các số a, b để

a) z là số thực

b) z là số ảo.

Giải

a) z là số thực $\Leftrightarrow 3b+5=0 \Leftrightarrow b = -\frac{5}{3}$

b) z là số ảo $\Leftrightarrow 2a-1=0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 7. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để:

a) Số phức $z = 1 + (1+mi) + (1+mi)^2$ là số thuần ảo.

b) Số phức $z = \frac{m-1+2(m-1)i}{1-mi}$ là số thực.

Định hướng: Ta cần biến đổi số phức z về dạng $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$.

Lúc đó: z là số thuần ảo (ảo) khi $a=0$ và z là số thực khi $b=0$

Giải

a) Ta có:

$$z = 1 + (1 + mi) + (1 + mi)^2 = 1 + 1 + mi + 1 + 2mi + i^2 m^2 = 3 - m^2 + 3mi.$$

$$z \text{ là số thuần ảo } \Leftrightarrow 3 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} z &= \frac{m-1+2(m-1)i}{1-mi} = \frac{(m-1+2(m-1)i)(1+mi)}{(1-mi)(1+mi)} \\ &= \frac{m-1-m(2m-2)+[m(m-1)+2m-2]i}{1+m^2}. \end{aligned}$$

$$z \text{ là số thực } \Leftrightarrow m(m-1)+2m-2=0 \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow m=1 \vee m=-2.$$

Ví dụ 8. Tìm các số thực x, y sao cho $z = z'$, với từng trường hợp

a) $z = (-3x-9) + 3i, z' = 12 + (5y-7)i;$

b) $z = (2x-3) - (3y+1)i, z' = (2y+1) + (3x-7)i.$

c) $(x^2 + 2y + i)(3-i)^2 + y(x+1)(1-i)^3 = 26 - 14i.$

d) $(x^2 + y^2 + 2i)(\sqrt{3}i - 1)^6 + (y^2 + 2x) \frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1+i)^4} = 320 + 896i$

Giải

a) $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-9=12 \\ 3=5y-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy $x = -7; y = 2.$

b) $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=2y+1 \\ -3y-1=3x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=4 \\ 3x+3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy $x = 2; y = 0.$

c) Ta có $(3-i)^2 = 8-6i; (1-i)^3 = -2-2i$ nên đẳng thức đã cho có dạng

$$(x^2 + 2y + i)(8-6i) + y(x+1)(-2-2i) = 26 - 14i$$

Hay $8x^2 - 2xy + 14y + 6 + (8 - 6x^2 - 2xy - 14y) = 26 - 14i$

Suy ra: $\begin{cases} 4x^2 - xy + 7y = 10 \\ 3x^2 + xy + 7y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - xy + 7y = 10 \\ x^2 + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - xy + 7y = 10, (1) \\ 2y = 3 - x^2, (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1) ta có $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}$

Vậy các cặp số thực cần tìm là

$$(x; y) = (1; 1), (-1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-1 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$$

d) Ta có $(\sqrt{3}i - 1)^6 = 64, \frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1+i)^4} = 128i$ nên $64(x^2 + y^2 + 2i) + 128i(y^2 + 2x) = 320 + 896i$

Hay $x^2 + y^2 + 2i(y^2 + 2x + 1) = 5 + 14i$

Vì thế ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 + 2x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 = 6 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$

Vậy các cặp số cần tìm là: $(x;y)=(1;2),(1;-2)$.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng : $3(1+i)^{100} = 4i(1+i)^{98} - 4(1+i)^{96}$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 3(1+i)^{100} - 4i(1+i)^{98} + 4(1+i)^{96} &= (1+i)^{96} \left[3(1+i)^4 - 4i(1+i)^2 + 4 \right] \\ &= (1+i)^{96} \left[3(2i)^2 - 4i(2i) + 3 \right] = (1+i)^{96} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đã cho được chứng minh.

Ví dụ 10. a) Tính mô-đun của số phức z biết $z = 3i(2-i) + 2i^3$.

b) Cho số phức z thỏa mãn $\frac{1-\sqrt{3}i}{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Tìm mô-đun của số phức $\bar{z} + iz$.

Giải

a) Ta có $z = 3i(2-i) + 2i^3 = 6i - 3i^2 - 2i = 3 + 4i$.

Vậy mô-đun của z là $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

b) Ta có:

$$(1-\sqrt{3}i)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot (\sqrt{3}i) + 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}i)^2 - (\sqrt{3}i)^3 = 1 - 3\sqrt{3}i - 9 + 3\sqrt{3}i = -8$$

Do đó:

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i} = \frac{-8}{1-i} = -4-4i$$

Suy ra:

$$\bar{z} + iz = -4-4i + i(-4+4i) = -8-8i \Rightarrow |\bar{z} + iz| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}.$$

Ví dụ 11. Xét số phức: $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$. Tìm m để $z \cdot \bar{z} = \frac{1}{2}$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} z &= \frac{i-m}{(1-m^2)+2mi} = \frac{(-m+i)(1-m^2-2mi)}{(1-m^2)^2+4m^2} \\ &= \frac{-m(1-m^2)+2m+i(1-m^2+2m^2)}{(1+m^2)^2} = \frac{m(1+m^2)+i(1+m^2)}{(1+m^2)^2} \\ &= \frac{m}{1+m^2} + \frac{1}{1+m^2}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{m}{1+m^2} - \frac{1}{1+m^2}i \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } z \cdot \bar{z} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2+1}{(m^2+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{m^2+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2+1=2 \Leftrightarrow m=\pm 1.$$

Lời bình: Ta có thể tính z bằng cách biến đổi ở mẫu như sau:

$$1 - m(m - 2i) = 1 - m^2 + 2mi = -(m^2 - 2mi + i^2) = -(m - i)^2.$$

$$\text{Lúc đó: } z = \frac{i - m}{1 - m(m - 2i)} = \frac{i - m}{-(m - i)^2} = \frac{m - i}{(m - i)^2} = \frac{1}{m - i} = \frac{m + i}{m^2 + 1} = \frac{m}{m^2 + 1} + \frac{1}{m^2 + 1}i$$

Ví dụ 12. Tính $S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012}$.

Giải

Cách 1. Ta có:

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012} \Rightarrow iS = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2012} + i^{2013}$$

Suy ra:

$$S - iS = 1 - i^{2013} \Rightarrow S = \frac{1 - i^{2013}}{1 - i} = \frac{1 - i}{1 - i} = 1$$

Cách 2. Dãy số $1, i, i^2, i^3, \dots, i^{2012}$ lập thành một cấp số nhân gồm 2013 số hạng, có công bội là i , số hạng đầu là 1.

Do đó:

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012} = 1 \cdot \frac{1 - i^{2013}}{1 - i} = 1$$

Ví dụ 13. Số phức $z = x + 2yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thay đổi thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức: $P = x - y$.

Giải

$$\text{Ta có } |z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 1 \quad (1)$$

$$\text{Từ } P = x - y \Rightarrow y = x - P, \text{ thay vào (1) ta được } 5x^2 - 8Px + 4P^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 16P^2 - 5(4P^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq P \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Với } P = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow z = -\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{10}i. \text{ Với } P = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow z = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{10}i.$$

Suy ra:

$$\min P = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ khi } z = -\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{10}i; \max P = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ khi } z = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{10}i.$$

Ví dụ 14. Cho số phức $z = \cos 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)i$, với số α thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $|z|$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{\cos^2 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \sqrt{\cos^2 2\alpha - \sin 2\alpha + 1} \\ &= \sqrt{-\sin^2 2\alpha - \sin 2\alpha + 2} \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin 2\alpha, -1 \leq t \leq 1$. Xét hàm số $f(t) = -t^2 - t + 2, t \in [-1; 1]$

$$\text{Ta có: } f'(t) = -2t - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}. \text{ Ta có: } f(1) = 0, f(-1) = 2, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

Suy ra:

- $\max f(t) = \frac{9}{4}$ khi $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ \alpha = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$
- $\min f(t) = 0$ khi $t = 1 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Vậy $\max|z| = \frac{3}{2}, \min|z| = 0$

Ví dụ 15. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$

- A.** Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$. **B.** Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2 .
C. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$. **D.** Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2 .

Hướng dẫn giải

Ta có: $\bar{z} = 3 + 2i \Rightarrow$ phần thực là 3 và phần ảo là 2 .

Ví dụ 16. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

- A.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. **B.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. **C.** $|z_1 + z_2| = 1$. **D.** $|z_1 + z_2| = 5$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z_1 + z_2 = 3 - 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Vậy chọn đáp án A

Ví dụ 17. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$

- A.** $w = 7 - 3i$. **B.** $w = -3 - 3i$. **C.** $w = 3 + 7i$. **D.** $w = -7 - 7i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $z = 2 + 5i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 5i \Rightarrow w = iz + \bar{z} = i(2 + 5i) + 2 - 5i = -3 - 3i$.

Vậy chọn đáp án B.

Ví dụ 17. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$

- A.** $\bar{z} = 3 - i$ **B.** $\bar{z} = -3 + i$ **C.** $\bar{z} = 3 + i$ **D.** $\bar{z} = -3 - i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $z = i(3i + 1) = i - 3 \rightarrow \bar{z} = -3 - i$.

Vậy chọn đáp án D.

Ví dụ 18: Tính môđun của số phức z thoả mãn $z(2 - i) + 13i = 1$

- A.** $|z| = \sqrt{34}$. **B.** $|z| = 34$ **C.** $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$ **D.** $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$

Hướng dẫn giải

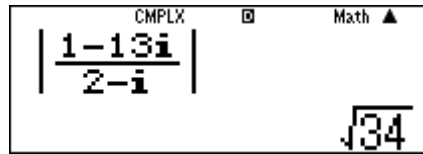
Ta có:

$$z(2 - i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1 - 13i}{2 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(1 - 13i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)}$$

$$\rightarrow z = \frac{2+i-26i+13}{4+i} = \frac{15-25i}{5} = 3-5i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$$

Vậy chọn đáp án A.

Dùng MTCT:



Ví dụ 19: Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2+i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$

B. $|z| > 2$

C. $|z| < \frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có

$$(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2+i \Leftrightarrow (|z|+2) + (2|z|-1)i = \frac{\sqrt{10}}{z} \Leftrightarrow (|z|+2) + (2|z|-1)i = \frac{\sqrt{10}}{|z|}$$

$$\Leftrightarrow ((|z|+2))^2 + (2|z|-1)^2 = \frac{10}{|z|^2} \Leftrightarrow |z|=1$$

Vậy chọn đáp án D.

Cách 2: Dùng MTCT

Ta có: $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2+i \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{10}}{(1+2i)|z|+2-i}$

II. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong những số sau số nào là số ảo: $\sqrt{-3}$, $\sqrt[3]{-3}$, $\sqrt[4]{-3}$, $\sqrt[5]{-3}$, $\sqrt[6]{-3}$

A. $\sqrt{-3}$

B. $\sqrt[3]{-3}$

C. $\sqrt[5]{-3}$

D. $\sqrt{-3}; \sqrt[4]{-3}; \sqrt[6]{-3}$

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án D do căn bậc 2 của số thực âm không tồn tại.

Câu 2. Số nào trong các số sau là số thực?

A. $(\sqrt{3}+2i) - (\sqrt{2}-2i)$

B. $(2+i\sqrt{5}) + (2-i\sqrt{5})$

C. $(1+i\sqrt{3})^2$

D. $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$

Hướng dẫn giải

$(2+i\sqrt{5}) + (2-i\sqrt{5}) = 4 \in \mathbb{R}$. Chọn đáp án B.

Câu 3. Số nào trong các số sau là số thuần ảo?

A. $(\sqrt{2} + 3i) + (\sqrt{2} - 3i)$

B. $(\sqrt{2} + 3i) + (\sqrt{2} - 3i)$

C. $(2 + 2i)^2$

D. $\frac{2 + 3i}{2 - 3i}$

Hướng dẫn giải

$(2 + 2i)^2 = 8i$ là số thuần ảo. Chọn đáp án B.

Câu 4. Phần ảo của số phức z^2 biết $\bar{z} = 4 - 3i + \frac{1+i}{2+i}$ là:

A. $\frac{644}{25}$

B. $\frac{644}{27}$

C. $\frac{644}{29}$

D. $\frac{644}{31}$

Hướng dẫn giải

$$\bar{z} = 4 - 3i + \frac{1+i}{2+i} = \frac{23}{5} - \frac{14}{5}i \Rightarrow z = \frac{23}{5} + \frac{14}{5}i \Rightarrow z^2 = \frac{333}{25} + \frac{644}{25}i. \text{ Chọn đáp án A.}$$

Câu 5. Số $z + \bar{z}$ là:

A. Số thực

B. Số ảo

C. 0

D. 2

Hướng dẫn giải

$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$. Có $z + \bar{z} = 2a$. Chọn đáp án A.

Câu 6. Số $z - \bar{z}$ là:

A. Số thực

B. Số ảo

C. 0

D. $2i$

Hướng dẫn giải

$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$. Có $z - \bar{z} = 2bi$. Chọn đáp án B.

Câu 7. Môđun của $1 - 2i$ bằng

A. 3

B. $\sqrt{5}$

C. 2

D. 1

Hướng dẫn giải

$$z = 1 - 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \text{ Chọn đáp án B.}$$

Câu 8. Môđun của $-2iz$ bằng

A. $-2|z|$

B. $\sqrt{2}z$

C. $2|z|$

D. 2

Hướng dẫn giải

$$|-2iz| = |-2i||z| = 2|z|. \text{ Chọn đáp án C.}$$

Câu 9. Cho số phức z thỏa điều kiện $2(z-1) = 3\bar{z} + (i-1)(i+2)$ (1). Môđun của z là:

A. $\frac{\sqrt{26}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{26}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{26}}{6}$

D. $\frac{\sqrt{26}}{12}$

Hướng dẫn giải

$$2(z-1) = 3\bar{z} + (i-1)(i+2) \Leftrightarrow 2(a+bi-1) = 3(a-bi) - 3 + i \Leftrightarrow -a-1+5bi = -3+i \Leftrightarrow a = -1; b = \frac{1}{5}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{26}}{5}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 10. Cho số phức z thỏa điều kiện $(3+i)z + (1+i)(2+i) = 5-i$. Môđun của z là:

A. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{6}$

D. $\frac{4\sqrt{5}}{13}$

Hướng dẫn giải

$$(3+i)z + (1+i)(2+i) = 5-i \Leftrightarrow z = \frac{4}{5} - \frac{8}{5}i \Rightarrow |z| = \frac{4\sqrt{5}}{5}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 11. Cho số phức thỏa $(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i$. Môđun của số phức $w = z+1+i$ bằng:

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

Hướng dẫn giải

$$(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i \Leftrightarrow z = 2+3i \Rightarrow w = 3+4i \Rightarrow |w| = 5. \text{ Chọn A.}$$

Câu 12. Phần ảo của số phức z , biết $\bar{z} = (\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i)$ là:

A. $-\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. -2

Hướng dẫn giải

$$\bar{z} = (\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i) = 5+\sqrt{2}i \Rightarrow z = 5-\sqrt{2}i. \text{ Chọn A.}$$

Câu 13. Môđun của số phức $z = 5+2i-(1+i)^3$ là :

A. 7

B. 3

C. 5

D. 2

Hướng dẫn giải

$$z = 5+2i-(1+i)^3 = 7. \text{ Chọn A}$$

Câu 14. Số phức z thỏa mãn $z + 2(z + \bar{z}) = 2-6i$ có phần thực là

A. -6

B. $\frac{2}{5}$

C. -1

D. $\frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải

$$z + 2(z + \bar{z}) = 2 - 6i \Leftrightarrow 5a + bi = 2 - 6i \Leftrightarrow a = \frac{2}{5}; b = -6. \text{ Chọn B.}$$

Câu 15. Cho số phức thỏa mãn $z + (1 - 2i)\bar{z} = 2 - 4i$. Tìm môđun của $w = z^2 - z$?

- A. $\sqrt{10}$ B. 10 C. 5 D. $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

$$a + bi + (1 - 2i)(a - bi) = 2 - 4i \Leftrightarrow 2a - 2b + (-2a)i = 2 - 4i \Leftrightarrow a = 2; b = 1$$

$$w = 1 + 3i \Rightarrow |w| = \sqrt{10}.$$

Câu 16. Cho số phức $z = 5 - 2i$. Số phức z^{-1} có phần ảo là :

- A. 29 B. 21 C. $\frac{5}{29}$ D. $\frac{2}{29}$

Hướng dẫn giải

$$z^{-1} = \frac{1}{5 - 2i} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29}i. \text{ Chọn D.}$$

Câu 17. Cho số phức $z = 1 + 3i$. Số phức z^2 có phần ảo là :

- A. 8 B. 10 C. 6 D. -8

Hướng dẫn giải

$$z^2 = -8 + 6i. \text{ Chọn C.}$$

Câu 18. Cho số phức $z = a + bi$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- A. $z + \bar{z} = 2bi$. B. $z - \bar{z} = 2a$. C. $z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2$. D. $|z^2| = |z|^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 19. Cho $z = -2 + 3i$ tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.

- A. Phần thực là -2; phần ảo là 3
B. Phần thực là -2; phần ảo là -3
C. Phần thực là 2; phần ảo là 3
D. Phần thực là 2; phần ảo là -3

Hướng dẫn giải

$$z = -2 + 3i \Rightarrow \bar{z} = -2 - 3i. \text{ Chọn B.}$$

Câu 20. Cho $z = 5 - 4i$ môđun của số phức z là

- A. 1 B. $\sqrt{41}$ C. 3 D. 9

$|z| = \sqrt{41}$. Chọn B.

Câu 21. Tìm $z = (2 + 3i)(2 - 3i)$.

A. $z = 4$

B. $z = -9i$

C. $z = 4 - 9i$

D. $z = 13$

Hướng dẫn giải

$z = 13$. Chọn D

Câu 22. Cho $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 2 - 3i$ tổng của hai số phức là

A. $3 - 5i$

B. $3 - i$

C. $3 + i$

D. $3 + 5i$

Hướng dẫn giải

$z_1 + z_2 = 3 - i$. Chọn B.

Câu 23. Cho các mệnh đề $i^2 = -1$; $i^{12} = 1$; $i^{112} = 1$; $i^{1122} = 1$ số mệnh đề đúng là

A. 2

B. 0

C. 1

D. 3

Hướng dẫn giải

$i^2 = -1$, $i^{12} = (i^2)^6 = 1$, $i^{1122} = (i^2)^{561} = -1$. Chọn A

Câu 24. Phần thực của số phức $(2 - 3i) + (5 - 2i)$ là?

A. 7

B. -5

C. 4

D. 8

Hướng dẫn giải

$(2 - 3i) + (5 - 2i) = 7 - 5i$. Chọn A.

Câu 25. Cho $\alpha = 3 - 2i$, $\beta = 5 - 4i$. Số phức $\alpha - \beta$ là?

A. $-2 + 2i$

B. $-3 - 6i$

C. $8 - 6i$

D. $-2 - 6i$

Hướng dẫn giải

$\alpha - \beta = -2 + 2i$. Chọn A.

Câu 26. Số phức liên hợp của số phức $5 + 2i - 3(-7 + 6i) + (2 - i)$ là?

A. $18 + 17i$

B. $18 - 17i$

C. $-14 + 19i$

D. $28 - 17i$

Hướng dẫn giải

$5 + 2i - 3(-7 + 6i) + (2 - i) = 28 - 17i$. Chọn D.

Câu 27. Phần ảo của số phức $\frac{3 + 2i}{2 - i}$ là?

A. $\frac{7}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{7}{5}i$

D. $\frac{7}{3}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{3+2i}{2-i} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i. \text{ Chọn A.}$$

Câu 28. Nghiệm của phương trình $4z + (2+3i)(1-2i) = 5+4i$ trên tập số phức là

- A. $-\frac{3}{4} + \frac{5}{4}i$ B. $\frac{3}{4} - \frac{5}{4}i$ C. $\frac{3}{4} + \frac{5}{4}i$ D. $-\frac{3}{4} - \frac{5}{4}i$

Hướng dẫn giải

$$4z + (2+3i)(1-2i) = 5+4i \Leftrightarrow z = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4}i. \text{ Chọn A.}$$

Câu 29. Tập hợp nghiệm của phương trình $i.z + 2017 - i = 0$ là:

- A. $\{1+2017i\}$ B. $\{1-2017i\}$ C. $\{2017-i\}$ D. $\{-2017+i\}$

Hướng dẫn giải

$$i.z + 2017 - i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2017+i}{i} = 1+2017i. \text{ Chọn A.}$$

Câu 30. Tập nghiệm của phương trình $(3-i).\bar{z} - 5 = 0$ là :

- A. $\left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$ B. $\left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$ C. $\left\{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$ D. $\left\{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

Hướng dẫn giải

$$(3-i).\bar{z} - 5 = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i. \text{ Chọn B.}$$

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)^2(2-i)z = 8+i+(1+2i)z$. Phần thực và phần ảo của z là:

- A. 2;3 B. 2;-3 C. -2;3 D. -2;-3

Hướng dẫn giải

$$(1+i)^2(2-i)z = 8+i+(1+2i)z \Leftrightarrow z = 2-3i. \text{ Chọn đáp án B.}$$

Câu 32. Cho số phức $z = 1+3i$. Số phức z^2 có phần thực là

- A. -8 B. 10 C. $8+6i$ D. $-8+6i$

Hướng dẫn giải

$$z^2 = -8+6i \text{ có phần thực là } -8. \text{ Chọn A.}$$

Câu 33. Điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{1}{2-3i}$ là

- A. $(2; -3)$ B. $\left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right)$ C. $(3; -2)$ D. $2; 3$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{1}{2-3i} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \Rightarrow M\left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right). \text{ Chọn B.}$$

Câu 34. Biểu diễn về dạng $z = a + bi$ của số phức $z = \frac{i^{2016}}{(1+2i)^2}$ là số phức nào?

- A. $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$ B. $\frac{-3}{25} + \frac{4}{25}i$ C. $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$ D. $\frac{-3}{25} - \frac{4}{25}i$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{i^{2016}}{(1+2i)^2} = \frac{1}{-3+4i} = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i. \text{ Chọn B}$$

Câu 35. Điểm M biểu diễn số phức $z = \frac{3+4i}{i^{2019}}$ có tọa độ là :

- A. $M(-4; 3)$ B. $M(4; -3)$ C. $M(4; 3)$ D. $M(-4; -3)$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{3+4i}{i^{2019}} = \frac{3+4i}{-i} = -3+4i \Rightarrow M(-3; 4)$$

Câu 36. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau :

- A. Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bằng điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng Oxy.
 B. Số phức $z = a + bi$ có số phức liên hợp là $-a - bi$
 C. Số phức $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
 D. Số phức $z = a + bi$ có số phức đối $-a - bi$

Hướng dẫn giải

Số phức $z = a + bi$ có số phức liên hợp là $-a - bi$. Chọn B.

Câu 37. Cho số phức $z = a + bi, ab \neq 0$. Khi đó số phức z^2 là số thuần ảo trong điều kiện nào sau đây?

- A. $a = b$ B. $a = -b$ C. $a = \pm b$ D. $a = 2b$

Hướng dẫn giải

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi. \quad z^2 \text{ thuần ảo } a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b.$$

Câu 38. Tìm $|z|$ biết $z = (1+2i)(1-i)^2$?

A. $2\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $5\sqrt{2}$

D. 20

Hướng dẫn giải

$z = (1+2i)(1-i)^2 = 4-2i \Rightarrow |z| = 2\sqrt{5}$. Chọn A.

Câu 39. Cho số phức thỏa mãn $z + (1-2i)\bar{z} = 2-4i$. Tìm môđun của $w = z^2 - z$?

A. $\sqrt{10}$

B. 10

C. 5

D. $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Câu 40. Cho số phức $z = a(a \in \mathbb{R})$ Khi đó khẳng định đúng là

A. z là số thuần ảo.

B. z có phần thực là a , phần ảo là i .

C. $\bar{z} = a$.

D. $|z| = a$.

Hướng dẫn giải

$\bar{z} = a$. Chọn đáp án C.

Câu 41. Cho số phức z , khi đó mệnh đề sai là

A. $|z| = |\bar{z}|$.

B. $z + \bar{z}$ là một số thực.

C. $z\bar{z}$ là một số thực dương.

D. môđun số phức z là một số thực

Hướng dẫn giải

$z = 0 \Rightarrow |z| = 0$. Chọn D.

Câu 42. Cho $z = m + 3i, z' = 2 - (m+1)i$. Giá trị nào của m sau đây để $z.z'$ là số thực

A. $m=1$ hoặc $m=-2$

B. $m=-2$ hoặc $m=-3$

C. $m=-1$ hoặc $m=2$

D. $m=2$ hoặc $m=-3$

Hướng dẫn giải

$zz' = (m+3i)(2-(m+1)i) = 5m+3+(6-m-m^2)i$

$zz' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3; m = 2$. Chọn D.

Câu 43. Trong các số phức sau, số phức nào có môđun nhỏ nhất?

A. $z = -3i$

B. $z = 1-3i$

C. $z = -3-2i$

D. $z = 2+2i$

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án D vì $|z| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ bé nhất.

Câu 44. Cho các số phức: $z_1 = 3i, z_2 = -1 - 3i, z_3 = -2 - 3i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức có mô đun lớn nhất trong 3 số phức đã cho là

A. 3

B. -5

C. -1

D. 5

Hướng dẫn giải

$|z_1| = 3, |z_2| = \sqrt{10}, z_3 = \sqrt{13}$. số phức có mô đun lớn nhất là z_3 . Tổng phần thực và ảo là -5. Chọn B.

Câu 45. Cho các số phức: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -2 + \sqrt{2}i, z_3 = -2 - \sqrt{3}i$. Tích phần thực và phần ảo của số phức có mô đun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là

A. $\sqrt{3}$

B. $-2\sqrt{2}$

C. $-2\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

$|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{6}, |z_3| = \sqrt{7}$. z_1 có mô đun nhỏ nhất nên chọn A.

Câu 46. Cho các số phức: $z_1 = 3i, z_2 = -1 - 3i, z_3 = m - 2i$. Tập giá trị tham số m để số phức z_3 có mô đun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là

A. $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$

B. $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

C. $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$

D. $m = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

Hướng dẫn giải

$z_1 = 3i \Rightarrow |z_1| = 3, z_2 = -1 - 3i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{10}, z_3 = m - 2i \Rightarrow |z_3| = \sqrt{m^2 + 4}$

$|z_3|_{\min} \Leftrightarrow |z_3| \leq 3 \Leftrightarrow m^2 + 4 \leq 9 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$. Chọn B.

Câu 47. Cho các số phức: $z_1 = 2i, z_2 = m - 3 - 2i, z_3 = 1 - 2i$. Tập giá trị tham số m để số phức z_2 có mô đun lớn nhất trong ba số phức đã cho là

A. $(2; 4)$

B. $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

C. $[2; 4]$

D.

$(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$

Hướng dẫn giải

$z_1 = 2i \Rightarrow |z_1| = 2, z_2 = m - 3 - 2i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{(m-3)^2 + (-2)^2}, z_3 = 1 - 2i \Rightarrow |z_3| = \sqrt{5}$

z_2 có mô đun lớn nhất khi $|z_2| \geq \sqrt{5} \Leftrightarrow (m-3)^2 + 4 \geq 5 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 8 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2 \vee m \geq 4$.

Chọn D.

Câu 48. Cho số phức $z = (1 - m)(1 + i)$. Giá trị của tham số m để số phức z có mô đun nhỏ nhất là

A. 0

B. 1

C. -1

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

$$z = (1-m)(1+i) \Leftrightarrow z = (1-m) + (1-m)i \Rightarrow |z| = \sqrt{(1-m)^2 + (1-m)^2} = \sqrt{2}|1-m|$$

$$|z| \text{ nhỏ nhất khi } \sqrt{2}|1-m| \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow m=1.$$

Chọn đáp án B.

Câu 49. Cho số phức $z = 2 - m + (m - 3)i$. Điểm biểu diễn trên mặt phẳng (Oxy) của số phức z có mô đun nhỏ nhất có tọa độ là

A. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

B. $(2; -3)$

C. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

D. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Hướng dẫn giải

$$|z| = \sqrt{(2-m)^2 + (m-3)^2} = \sqrt{2m^2 - 10m + 13} = \sqrt{2\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}, \quad |z|_{\min} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Khi đó } z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \text{ điểm biểu diễn của } z \text{ là } \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Chọn đáp án C.

Câu 50. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Số phức có mô đun nhỏ nhất là

A. $2 - 2i$

B. $2i$

C. $-2 + 2i$

D. $2 + 2i$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$ thay vào phương trình $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ ta được

$$|(a-2) + (b-4)i| = |a + (b-2)i| \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-4)^2 = a^2 + (b-2)^2 \Leftrightarrow b = 4 - a$$

$$\text{Mô đun } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (4-a)^2} = \sqrt{2(a-2)^2 + 8}.$$

$$\text{Mô đun nhỏ nhất } |z|_{\min} \Leftrightarrow a = 2. \text{ Vậy } z = 2 + 2i.$$

Chọn đáp án D.

Câu 51. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 2i| = |z - 2i|$. Mô đun nhỏ nhất của số phức z là

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{145}}{10}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{5}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$ thay vào phương trình $|z - 2 + 2i| = |z - 2i|$ ta được

$$|(a-2) + (b+2)i| = |a + (b-2)i| \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b+2)^2 = a^2 + (b-2)^2 \Leftrightarrow a = 1 + 2b$$

Mô đun $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1+2b)^2 + b^2} = \sqrt{5\left(b + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}}.$

Mô đun nhỏ nhất $|z|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ khi $b = -\frac{2}{5}.$

Chọn đáp án A.

Câu 52. Biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $u = (z + 3 - i)(\bar{z} + 1 + 3i)$ là một số thực. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. $\sqrt{10}$

B. $\sqrt{38}$

C. $2\sqrt{2}$

D. 1

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi.$

Ta có

$$u = [(a+3) + (b-1)i][(a+1) + (3-b)i] = (a+3)(a+1) - (b-1)(3-b) + [(a+3)(3-b) + (a+1)(b-1)]i$$

u là số thực $\Leftrightarrow (a+3)(3-b) + (a+1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow a+1 = b-3 \Leftrightarrow a = b-4$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(b-4)^2 + b^2} = \sqrt{2(b-2)^2 + 8}.$$

$$|z|_{\min} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 53. Cho số phức $z = -x + (x-3)i, x \in \mathbb{R}$. Với giá trị nào của x để z là số thực ?

A.

B.

C.

D.

Hướng dẫn giải

z là số thực khi phần ảo của z bằng 0 $\Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$

Chọn đáp án C.

Câu 45. Cho $z + 3 + 4i = (x+1)i, x \in \mathbb{R}$. Với giá trị nào của x để z là số thực ?

A.

B.

C.

D.

Hướng dẫn giải

$$z + 3 + 4i = (x+1)i \Leftrightarrow z = -3 + (x-3)i$$

z là số thực khi phần ảo của z bằng 0 $\Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$

Chọn đáp án C.

Câu 54. Cho $z + x^2 - 3x + (x^2 - 1)i = 0, x \in \mathbb{R}$. Với giá trị nào của x để z là số thực ?

A.

B.

C.

D.

Hướng dẫn giải

$$z + x^2 - 3x + (x^2 - 1)i = 0 \Leftrightarrow z = -x^2 + 3x + (1 - x^2)i$$

z là số thực khi phần ảo của z bằng 0 $\Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$ Chọn đáp án B.

Câu 55. Cho $z_1 = m + 3i, z_2 = 2 - (m + 1)i, m \in \mathbb{R}$. Với giá trị nào của m để $z_1 \cdot z_2$ là số thực ?

- A. ☐ B. ☐
C. ☐ D. ☐

Hướng dẫn giải

$$z_1 \cdot z_2 = (m + 3i)(2 - (m + 1)i) = 5m + 3 + (6 - m^2 - m)i$$

$$z_1 \cdot z_2 \text{ là số thực } \Leftrightarrow 6 - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = -3; m = 2.$$

Chọn đáp án D.

Câu 56. Điều kiện để số phức z là số thuần ảo là

- A. ☐ B. ☐ C. ☐ D. ☐

Hướng dẫn giải

z là số thuần ảo khi phần thực bằng 0 và phần ảo khác 0.

Chọn đáp án A.

Câu 57. Cho $z_1 = m + 3i, z_2 = 2 + i, m \in \mathbb{R}$. Với giá trị nào của m để $z_1 + z_2$ là số thuần ảo ?

- A. ☐ B. ☐ C. ☐ D. ☐

Hướng dẫn giải

Ta có $z_1 + z_2 = m + 2 + 4i$, $z_1 + z_2$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án B.

Câu 58. Cho $z_1 = 2m + 3i, z_2 = 4 + i, m \in \mathbb{R}$. Với giá trị nào của m để $z_1 \cdot z_2$ là số thuần ảo ?

- A. ☐ B. ☐ C. ☐ D. ☐

Hướng dẫn giải

$$z_1 \cdot z_2 = 8m - 3 + (12 + 2m)i. \quad z_1 \cdot z_2 \text{ thuần ảo } \Leftrightarrow \begin{cases} 8m - 3 = 0 \\ 12 + 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{8} \\ m \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 59. Cho số phức $z = a + bi$. Để z^3 là một số thuần ảo, điều kiện của a, b là

- A. $ab = 0$ B. $b^2 = 3a^2$ C. $\begin{cases} a = 0 \vee b \neq 0 \\ a \neq 0 \vee a^2 = 3b^2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a \neq 0 \vee b = 0 \\ b \neq 0 \vee a^2 = b^2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$z^3 = (a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i.$$

$$z^3 \text{ thuần ảo } \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 0 \\ 3a^2b - b^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \vee a^2 = 3b^2 \\ b \neq 0 \wedge b^2 \neq 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b \neq 0 \\ a \neq 0; a^2 = 3b^2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 60. Cho số phức $z = a + bi$. Số $z + \bar{z}$ luôn là

- A. Số thực B. Số ảo C. số 0 D. số

Hướng dẫn giải

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a \text{ là số thực.}$$

Chọn đáp án A.

Câu 61. Cho số phức z . Khi đó số phức $z^2 = (a + bi)^2$ là số thuần ảo trong điều kiện nào sau đây?

- A. $a = 0$ B. C. $a = \pm b$ D.

Hướng dẫn giải

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi, \quad z^2 \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b.$$

Chọn đáp án C.

Câu 62. Cho hai số phức z và z' . Điều kiện giữa z và z' để $z + z'$ là một số thực là

- A. $\begin{cases} a, a' \text{ bất kỳ} \\ b + b' = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b, b' \text{ bất kỳ} \end{cases}$ C. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b = b' \end{cases}$ D. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$z_1 + z_2 = a + a' + (b + b')i, \quad z + z' \text{ là số thực} \Leftrightarrow \begin{cases} b + b' = 0 \\ \forall a, a' \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 63. Cho hai số phức z và z' . Điều kiện giữa z và z' để $z + z'$ là một số thuần ảo là

- A. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ \forall a', b' \in \mathbb{R} \end{cases}$ C. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b = b' \end{cases}$ D. $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' \neq 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$z_1 + z_2 = a + a' + (b + b')i, \quad z + z' \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow \begin{cases} b + b' \neq 0 \\ a + a' = 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án D.

Câu 64. Cho hai số phức z và z' . Điều kiện giữa z và z' để zz' là một số thực là

- A. $aa' + bb' = 0$ B. $aa' - bb' = 0$ C. $ab' + a'b = 0$ D. $ab' - a'b = 0$

Hướng dẫn giải

$$zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i, \quad zz' \text{ là số thực} \Leftrightarrow ab' + a'b = 0.$$

Chọn đáp án C.

Câu 65. Cho hai số phức z và z' . Điều kiện giữa z và z' để zz' là một số thuần ảo là:

- A. $aa' = bb'$ B. C. D.

Hướng dẫn giải

$zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$, zz' là số thuần ảo $\Leftrightarrow aa' = bb'$.

Chọn đáp án A.

Câu 66. Cho hai số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$ và $z' = a' + b'i; a', b' \in \mathbb{R}$. Điều kiện giữa a, a', b, b' để $\frac{z}{z'}$ ($z' \neq 0$) là một số thực là

A. $aa' + bb' = 0$

B. $aa' - bb' = 0$

C. $ab' + a'b = 0$

D. $ab' - a'b = 0$

Hướng dẫn giải

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{a'^2 - b'^2} = \frac{aa' + bb' + (ba' - ab')i}{a'^2 - b'^2}$$

$\frac{z}{z'}$ là một số thực $\Leftrightarrow ba' - ab' = 0$.

Chọn đáp án D.

Câu 67. Cho hai số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$ và $z' = a' + b'i; a', b' \in \mathbb{R}$. (Trong đó a, a', b, b' đều khác 0) điều kiện giữa a, a', b, b' để $\frac{z}{z'}$ là một số thuần ảo là

A. $a + a' = b + b'$

B. $aa' + bb' = 0$

C. $aa' - bb' = 0$

D. $a + b = a' + b'$

Hướng dẫn giải

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{a'^2 - b'^2} = \frac{aa' + bb' + (ba' - ab')i}{a'^2 - b'^2}$$

$\frac{z}{z'}$ là một số thuần ảo $\Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

Chọn đáp án D.

Câu 68. Cho số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$. Để z^3 là một số thực, điều kiện của a và b là:

A. $\begin{cases} b = 0 \text{ v\mu a \text{b\text{t k\text{}} \\ b^2 = 3a^2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} b \text{b\text{t k\text{}} \text{ v\mu a = 0 \\ b^2 = a^2 \end{cases}$

C. $b = 3a$

D. $b^2 = 5a^2$

Hướng dẫn giải

$$z^3 = (a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i.$$

z^3 là số thực $\Leftrightarrow 3a^2b - b^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, a \in \mathbb{R} \\ 3a^2 = b^2 \end{cases}$.

Chọn đáp án A.

Câu 69. Với giá trị nào của tham số thực m thì số phức $z = 1 - (2m - 3i)^3$ là một số thực ?

A. $m = \frac{\pm 3}{4}$

B. $m = \frac{3}{4}$

C. $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $m = \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

$$z = 1 - (2m - 3i)^3 = 1 - (8m^3 - 3.4m^2.3i + 3.2m.9i^2 - 27i^3) = 1 - 8m^3 + 54m + (-27 + 36m^2)i$$

$$z \text{ là số thực} \Leftrightarrow -27 + 36m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 70. Mệnh đề nào sau đây là sai, khi nói về số phức?

A. $z + \bar{z}$ là số thực B. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ C. $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$ là số thực. D. $(1+i)^{10} = 2^{10}i$

Hướng dẫn giải

$$(1+i)^{10} = [(1+i)^2]^5 = (2i)^5 = 2^5(i^2)^2i = 2^5i.$$

Chọn đáp án D.

Câu 71. Cho số phức $z = 3 + 4i$. Khi đó môđun của z^{-1} là:

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i. \text{ Vậy } |z^{-1}| = \sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(-\frac{4}{25}\right)^2} = \frac{1}{5}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 72. Cho $z = \frac{2}{1+i\sqrt{3}}$. Số phức liên hợp của z là :

A. $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $1 + i\sqrt{3}$ C. $1 - i\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{2}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Chọn đáp án A.

Câu 73. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

A. $\bar{z} = -2 + 3i$. B. $\bar{z} = 3 - 2i$. C. $\bar{z} = 2 + 3i$. D. $\bar{z} = 3 + 2i$.

Hướng dẫn giải

$$z = 2 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 3i.$$

Chọn đáp án C.

Câu 74. Tìm số phức z biết $\bar{z} = 4 + 2i + \frac{1-i}{2+i}$

A. $\frac{21}{5} + \frac{7}{5}i$

B. $\frac{21}{5} - \frac{7}{5}i$

C. $-\frac{21}{5} + \frac{7}{5}i$

D. $-\frac{21}{5} - \frac{7}{5}i$

Hướng dẫn giải

$$\bar{z} = \frac{21}{5} + \frac{7}{5}i \Rightarrow z = \frac{21}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Chọn đáp án B.

Câu 75. Số phức nào sau đây là số thực:

A. $z = \frac{1-2i}{3-4i} + \frac{1+2i}{3-4i}$

B. $z = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{1-2i}{3+4i}$

C. $z = \frac{1-2i}{3-4i} - \frac{1+2i}{3+4i}$

D. $z = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{1-3i}{3+4i}$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{1-2i}{3+4i} = -\frac{2}{5} \text{ là số thực.}$$

Chọn đáp án B.

Câu 76. Biết rằng nghịch đảo của số phức z bằng số phức liên hợp của nó, trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A.

B.

C. z là số thuần ảo.

D.

Hướng dẫn giải

$$\text{Có } \frac{1}{z} = \bar{z} \Leftrightarrow 1 = z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1.$$

Chọn đáp án B.

Câu 77. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bằng điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng phức Oxy

B. Số phức $z = a + bi$ có môđun là $\sqrt{a^2 + b^2}$

C. Số phức $a + bi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

D. Số phức $z = a + bi$ có số phức đối $z' = a - bi$

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án D.

Câu 78. Cho số phức $z = a + bi$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $z + \bar{z} = 2bi$

B. $z - \bar{z} = 2a$

C. $z\bar{z} = a^2 - b^2$

D. $|z^2| = |z|^2$

Hướng dẫn giải

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow |z^2| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Chọn đáp án D.

Câu 79. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $2z + 3(1-i)\bar{z} = 1-9i$. Môđun của z bằng:

A. $\sqrt{13}$

B. $\sqrt{82}$

C. $\sqrt{5}$

D. 13

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ thay vào phương trình $2z + 3(1-i)\bar{z} = 1-9i$ ta được

$$2(a + bi) + (3 - 3i)(a - bi) = 1 - 9i \Leftrightarrow 5a - 3b + (-b - 3a)i = 1 - 9i \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 3b = 1 \\ 3a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}.$$

$$\bar{z} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 80. Số phức $z = -(1+3i)$ có môđun là:

A. 10

B. -10

C. $\sqrt{10}$

D. $-\sqrt{10}$

Hướng dẫn giải

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 81. Cho số phức z thỏa mãn: $z + 5 = 0$. Khi đó z có môđun là:

A. 0

B. $\sqrt{26}$

C. $\sqrt{5}$

D. 5

Hướng dẫn giải

$$z = -5 \Rightarrow |z| = 5.$$

Chọn đáp án D.

Câu 82. Số phức $z = (1-i)^2$ có môđun là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

Hướng dẫn giải

$$z = (1-i)^2 = -2i \Rightarrow |z| = 2.$$

Chọn đáp án C.

Câu 83. Số phức $z = 4 + i - (2+3i)(1-i)$ có môđun là:

A. 2

B. 0

C. 1

D. -2

Hướng dẫn giải

$$z = -1 \Rightarrow |z| = 1.$$

Chọn đáp án C.

Câu 84. Cho số phức: $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$. Khi đó giá trị $|z\bar{z}|$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 5

Hướng dẫn giải

$$z.\bar{z} = 5 \Rightarrow |z.\bar{z}| = 5.$$

Chọn đáp án D.

Câu 85. Cho hai số phức: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 - i$ Khi đó giá trị $|z_1.z_2|$ là:

A. 5

B. $2\sqrt{5}$

C. 25

D. 0

Hướng dẫn giải

$$z_1.z_2 = -5i \Rightarrow |z_1.z_2| = 5.$$

Chọn đáp án A.

Câu 86. Cho hai số phức: $z_1 = 6 + 8i$, $z_2 = 4 + 3i$ Khi đó giá trị $|z_1 - z_2|$ là:

A. 5

B. $\sqrt{29}$

C. 10

D. 2

Hướng dẫn giải

$$z_1 - z_2 = 2 + 5i \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 87. Cho số phức z có phần ảo gấp hai phần thực và $|z + 1| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Khi đó mô đun của z là:

A. 4

B. 6

C. $2\sqrt{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Có } z = a + 2ai \Rightarrow z + 1 = a + 1 + 2ai \Rightarrow |z + 1| = \sqrt{(a+1)^2 + (2a)^2} = \sqrt{5a^2 + 2a + 1}$$

$$\text{Mà } |z + 1| = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sqrt{5a^2 + 2a + 1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 25a^2 + 10a + 5 = 4 \Leftrightarrow 25a^2 + 10a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{5}.$$

$$\text{Vậy } |z| = \sqrt{a^2 + 4a^2} = |a|\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án D.

Câu 88. Số phức $z = 3 - 5i$ có

A. Phần thực bằng -5 , phần ảo bằng 3 .

B. Phần thực bằng 3 , phần ảo bằng -5 .

C. Phần thực bằng 3 , phần ảo bằng $-5i$.

D. Phần thực bằng $-5i$, phần ảo bằng 2 .

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án B.

Câu 89. Phần thực của số phức $z = -2i$ là:

A. 5

B. $-5i$

C. 0

D. -5

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án C.

Câu 90. Cho số phức z có phần thực là 2 phần ảo là 4, dạng đại số của số phức z là:

A. $4+2i$

B. $2+4i$

C. $4-2i$

D. $2-4i$

Hướng dẫn giải

$z = 2 + 4i$. Chọn đáp án B.

Câu 91. Cho các mệnh đề sau:

I. Mỗi số thực a được coi là số phức

II. Số ảo là số phức có phần thực bằng 0

III. Số phức $a+bi=0$ khi và chỉ khi $a=b=0$

Các mệnh đề đúng là:

A.I

B. II và III

C. III

D. I, II và III

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án D.

Câu 92. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$ là:

A. 0

B. 1

C. 3

D. 2

Hướng dẫn giải

$$z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \\ |z|^2 = a^2 + b^2 \\ \bar{z} = a - bi \end{cases} \quad \text{thay vào phương trình } z^2 = |z|^2 + \bar{z} \text{ ta được}$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = a^2 + b^2 + a - bi \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + a = 0 \\ 2ab + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + a = 0 \\ b = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 = a \\ a = -\frac{1}{2}, b = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức thỏa bài toán, nên chọn đáp án C.

Câu 93. Số phức z thỏa mãn: $(3-2i)\bar{z} - 4(1-i) = (2+i)z$. Môđun của z là:

A. $\sqrt{10}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ thay vào phương trình $(3-2i)\bar{z} - 4(1-i) = (2+i)z$ ta được

$$(3-2i)(a-bi)-4(1-i)=(2+i)(a+bi) \Leftrightarrow 3a-4-2b+(4-2a-3b)i=2a-b+(a+2b)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-4-2b=2a-b \\ 4-2a-3b=a+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=4 \\ 3a+5b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}.$$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 94. Số nào trong các số phức sau là số thực:

A. $(3-5i)(2+4i)$

B. $(2-3i)-(5-4i)$

C. $(4-\sqrt{3}i)-(5+i\sqrt{3})$

D. $(4-\sqrt{3}i)-(5-i\sqrt{3})$

Hướng dẫn giải

$$4-\sqrt{3}i-(5-i\sqrt{3})=-1 \text{ là số thực.}$$

Chọn đáp án D.

Câu 95. Số nào trong các số phức sau là số thuần ảo:

A. $(\sqrt{3}+2i)+(\sqrt{3}-2i)$

B. $(\sqrt{3}+3i)-(\sqrt{3}-3i)$

C. $(\sqrt{3}+2i)+(\sqrt{3}-3i)$

D. $(\sqrt{3}+3i)+(\sqrt{3}-2i)$

Hướng dẫn giải

$$(\sqrt{3}+3i)-(\sqrt{3}-3i)=6i \text{ là số thuần ảo.}$$

Chọn đáp án B.

Câu 96. Cho số phức $z=-12+5i$. Môđun của số phức z bằng:

A. 7

B. $\sqrt{17}$

C. $\sqrt{119}$

D. 13

Hướng dẫn giải

$$|z|=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13.$$

Chọn đáp án D.

Câu 97. Cho số phức thỏa mãn $(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$. Môđun của số phức

$w=z+i+1$ bằng:

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

Hướng dẫn giải

$$\text{Có } z=3+2i \text{ nên } w=4+3i. |w|=\sqrt{a^2+b^2}=5.$$

Chọn đáp án C.

Câu 98. Căn bậc hai của số phức $z=-117+44i$ là:

A. $\pm(2+11i)$

B. $\pm(2-11i)$

C. $\pm(7+4i)$

D. $\pm(7-4i)$

Hướng dẫn giải

$$z = -117 + 44i = (2 + 11i)^2 \Rightarrow \sqrt{z} = \pm(2 + 11i).$$

Chọn đáp án A.

Câu 99. Số nào trong các số sau đây là số thuần ảo:

A. $(\sqrt{2} + 3i)(\sqrt{2} - 3i)$

B. $(2 + 2i)^2$

C. $(\sqrt{2} + 3i) + (\sqrt{2} - 3i)$

D. $\frac{2 - 3i}{2 + 3i}$

Hướng dẫn giải

$$(2 + 2i)^2 = 8i.$$

Chọn đáp án B.

Câu 100. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z + (2 - i)\bar{z} = 13 - 3i$. Phần ảo của số phức z bằng:

A. 2

B. 4

C. 3

D. -1

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ thay vào phương trình $z + (2 - i)\bar{z} = 13 - 3i$ ta được

$$a + bi + (2 - i)(a - bi) = 13 - 3i \Leftrightarrow 3a - b + (-a - b)i = 13 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 13 \\ -a - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 101. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(3 + 4i)z + (1 - 3i) = 12 - 5i$. Phần thực của số phức z^2 bằng:

A. 5

B. -4

C. 4

D. -3

Hướng dẫn giải

$$z = 1 - 2i \Rightarrow z^2 = (1 - 2i)^2 = -3 - 4i. \text{ Phần thực của } z^2 \text{ bằng } -3.$$

Chọn đáp án D.

Câu 102. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Mô đun của số phức z bằng:

A. 1

B. $\sqrt{41}$

C. 3

D. 9

Hướng dẫn giải

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 103. Cho số phức $z = 4 - 3i$. Mô đun của số phức $\bar{z}$ bằng:

A. 5

B. $\sqrt{5}$

C. 25

D. 1

Hướng dẫn giải

Có $\bar{z} = 3 + 4i$, $|\bar{z}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Chọn đáp án A.

Câu 104. Trong các kết luận sau, kết luận nào sai

A. $z + \bar{z}$ là một số thực. B. $z - \bar{z}$ là một số ảo.

C. $z \cdot \bar{z}$ là một số thực.

D. $z^2 + \bar{z}^2$ là một số ảo.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$. Khi đó $z^2 + \bar{z}^2 = (a + bi)^2 + \overline{(a + bi)^2} = a^2 - b^2 + 2abi + a^2 + b^2 - 2abi = 2a^2$ là số thực.

Chọn đáp án D.

Câu 105. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 2 - 3i$. Xác định phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$

A. 11

B. 12

C. 10

D. 13

Hướng dẫn giải

$w = 3z_1 - 2z_2 = -1 + 12i$. Phần ảo của w là 12.

Chọn đáp án B.

Câu 106. Trong các số phức sau, hai số nào có phần ảo bằng nhau: $z_1 = 8 + 7i$; $z_2 = 2 - 3i$; $z_3 = 3 + 7i$; $z_4 = 8 - 7i$

A. $z_1; z_4$

B. $z_1; z_3$

C. $z_2; z_3$

D. $z_2; z_4$

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án B.

Câu 107. Phần thực của $z = 2i$ là:

A. 2

B. $2i$

C. 0

D. 1

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án C.

Câu 108. Phần ảo của $z = -2i$ là:

A. -2

B. $-2i$

C. 0

D. -1

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án A.

Câu 109. Phần ảo của số phức z thỏa $(1 - 2i)\bar{z} = (3 - 2i)^2$ là:

A.

B.

C. 4

D.

Hướng dẫn giải

$\bar{z} = \frac{(3 - 2i)^2}{1 - 2i} = \frac{29}{5} - \frac{2}{5}i \Rightarrow z = \frac{19}{5} + \frac{2}{5}i$. Vậy phần ảo của z là $\frac{2}{5}$.

Chọn đáp án A.

Câu 110. Phần thực của số phức z thỏa $5z(1+3i) - 5\bar{z} = (6+7i)(1+3i)$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

Hướng dẫn giải

$$5z(1+3i) - 5\bar{z} = -15 + 25i \Leftrightarrow (1+3i)z - \bar{z} = -3 + 5i.$$

Đặt $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$, thay vào phương trình $(1+3i)z - \bar{z} = -3 + 5i$ ta được

$$(a+bi)(1+3i) - (a-bi) = -3 + 5i \Leftrightarrow -3b + (3a+2b)i = -3 + 5i \Leftrightarrow \begin{cases} -3b = -3 \\ 3a+2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 111. Cho số phức $z = x + yi$. Số phức z^2 có phần thực là :

A. $x^2 + y^2$

B. $x^2 - y^2$

C. $x + y$

D. $x - y$

Hướng dẫn giải

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi. \quad z^2 \text{ có phần thực là } x^2 - y^2.$$

Chọn đáp án B.

Câu 112. Phần ảo của số phức $z = (2+3i)(2-3i)$ bằng

A. 13

B. 0

C. $-9i$

D. $13i$

Hướng dẫn giải

$$z = 13. \text{ Phần ảo của } z \text{ là } 0.$$

Chọn đáp án B.

Câu 113. Phần thực của số phức $z = \frac{3-4i}{4-i}$ bằng

A. $\frac{16}{17}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $-\frac{13}{17}$

D. $\frac{16}{17} - \frac{13}{17}i$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{3-4i}{4-i} = \frac{(3-4i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{16}{17} - \frac{13}{17}i. \text{ Phần thực của } z \text{ là } a = \frac{16}{17}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 114. Phần ảo của số phức $z = \frac{3+2i}{1-i} + \frac{1-i}{3+2i}$ là

A. $\frac{15}{26}$

B. $\frac{15}{26} + \frac{55}{26}i$

C. $\frac{55}{26}$

D. $\frac{55}{26}i$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{3+2i}{1-i} + \frac{1-i}{3+2i} = \frac{15}{26} + \frac{55}{26}i.$$

Chọn đáp án B.

Câu 115. Cho số phức $z = x + yi \neq 1 (x, y \in \mathbb{R})$. Phần ảo của số $\frac{z+1}{z-1}$ là

A. $\frac{-2y}{(x-1)^2 - y^2}$ B. $\frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}$ C. $\frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 - y^2}$ D. $\frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}$

Hướng dẫn giải

$$z = x + yi. \text{ Khi đó } \frac{z+1}{z-1} = \frac{x+1+yi}{x-1-yi} = \frac{(x+1+yi)(x-1+yi)}{(x-1-yi)(x-1+yi)} = \frac{(x-1)(x+1) + y^2}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}i$$

.

Chọn đáp án B.

Câu 116. Cho hai số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$ và $z' = a' + b'i; a', b' \in \mathbb{R}$. Số phức $\frac{z}{z'}$ có phần thực là

A. $\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}$ B. $\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}$ C. $\frac{a + a'}{a'^2 + b'^2}$ D. $\frac{2bb'}{a'^2 + b'^2}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{(ba' - ab')i}{a'^2 + b'^2}. \text{ Số phức } \frac{z}{z'} \text{ có phần thực là } \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 117. Số phức z thỏa mãn $z + 2(z + \bar{z}) = 2 - 6i$ có phần thực là

A. -6 B. $\frac{2}{5}$ C. -1 D. $\frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \text{ thay vào phương trình } z + 2(z + \bar{z}) = 2 - 6i \text{ ta được}$$

$$3(a + bi) + 2(a - bi) = 2 - 6i \Leftrightarrow 5a + bi = 2 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = -6 \end{cases}.$$

Chọn đáp án B.

Câu 118. Phần thực của số phức $(1+i)^2(2-i)z = 8+i+(1+2i)z$ là

A. -6 B. -3 C. 2 D. -1

Hướng dẫn giải

$(1+i)^2(2-i)z = 8+i + (1+2i)z \Leftrightarrow z = \frac{8+i}{(1+i)^2(2-i) - (1+2i)} \Leftrightarrow z = 2-3i$. Phần thực của z là $a=2$. Chọn đáp án C.

Câu 119. Cho số phức $z=1+3i$. Số phức z^2 có phần thực là

- A. -8. B. -2. C. $8+6i$. D. $-8+6i$.

Hướng dẫn giải

$z^2 = (1+3i)^2 = -8+6i$. Phần thực của z^2 là $a=-8$.

Chọn đáp án A.

Câu 120. Cho số phức $z=m+ni \neq 0$. Số phức $\frac{1}{z}$ có phần thực là

- A. $\frac{m}{m^2-n^2}$ B. $\frac{-n}{m^2-n^2}$ C. $\frac{m}{m^2+n^2}$ D. $\frac{-n}{m^2+n^2}$

Hướng dẫn giải

Câu 121. $\frac{1}{z} = \frac{1}{m+ni} = \frac{m-ni}{(m+ni)(m-ni)} = \frac{m}{m^2+n^2} - \frac{n}{m^2+n^2}i$. Số phức $\frac{1}{z}$ có phần thực là

$$a = \frac{m}{m^2+n^2}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 122. Số phức có phần thực là 2, phần ảo là -3 là

- A. $2-3i$ B. $2+3i$ C. $3+2i$ D. $3-2i$

Hướng dẫn giải

$z = 2-3i$. Chọn đáp án A.

Câu 123. Số phức $z = \frac{1}{-5+7i}$ có phần thực là

- A. $-\frac{5}{74}$ B. $\frac{5}{74}$ C. $\frac{7}{74}$ D. $-\frac{7}{74}$

Hướng dẫn giải

$z = \frac{1}{-5+7i} = \frac{-5-7i}{(-5+7i)(-5-7i)} = -\frac{5}{74} - \frac{7}{74}i$. Phần thực của z là $-\frac{5}{74}$. Chọn đáp án A.

Câu 124. Số phức $z = \frac{1}{-2+\sqrt{3}i}$ có phần ảo là

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{7}$ C. $-\frac{2}{7}$ D. $\frac{2}{7}$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{1}{-2 + i\sqrt{3}} = \frac{-2 - i\sqrt{3}}{(-2 + i\sqrt{3})(-2 - i\sqrt{3})} = -\frac{2}{7} - \frac{\sqrt{3}}{7}i. \text{ Phần ảo của } z \text{ là } -\frac{\sqrt{3}}{7}. \text{ Chọn đáp án A.}$$

Câu 125. Phần ảo của số phức $z = i^3$ là

- A. 1 B. -1 C. 0 D. -i

Hướng dẫn giải

$$z = i^3 = (i^2) \cdot i = -i. \text{ Chọn đáp án D.}$$

Câu 126. Phần thực của số phức $z = i^{100}$ là

- A. 0 B. 1 C. -1 D. 100

Hướng dẫn giải

$$z = i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1. \text{ Chọn đáp án B.}$$

Câu 127. Phần thực của số phức $\frac{1+4i}{3+2i}$ là

- A. $\frac{10}{13}$ B. $\frac{11}{13}$ C. 4 D. 6

Hướng dẫn giải

$$\frac{1+4i}{3+2i} = \frac{(1+4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{11}{13} + \frac{10}{13}i. \text{ Phần thực của số phức đã cho là } \frac{11}{13}. \text{ Chọn đáp án B.}$$

Câu 128. Số phức $z = \frac{3-4i}{4-i}$ có phần thực và phần ảo lần lượt là

- A. $\frac{16}{17}; -\frac{13}{17}$ B. $\frac{16}{15}; \frac{11}{15}$ C. $\frac{9}{5}; -\frac{4}{5}$ D. $\frac{9}{17}; \frac{23}{17}$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{(3-4i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{16}{17} - \frac{13}{17}i. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$

Câu 129. Phần thực của số phức $z = (1-\sqrt{3}i)^2 + (1+\sqrt{3}i)^2$ là

- A. -4 B. 8 C. $-4\sqrt{3}i$ D. 1

Hướng dẫn giải

$$z = -4. \text{ Phần thực của số phức } z \text{ là } -4. \text{ Chọn đáp án A.}$$

Câu 130. Phần ảo của số phức $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$ là

A. i

B. $-i$

C. 1

D. -1

Hướng dẫn giải

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017} = \left[\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right]^{1018} \left(\frac{1+i}{1-i}\right) = (-1)^{1018} i = i. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$

Câu 131. Cho số phức $z = m^2 + mi - (1-2m)(1-i)$, biết phần thực của số phức z là 2. Giá trị của tham số m là

A. 1 hoặc -3

B. -1

C. 1

D. 1 hoặc -1

Hướng dẫn giải

$z = m^2 + 2m - 1 + (1-m)i$. Phần thực của z là

$$2 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 2 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 132. Phần ảo của số phức $z = (7-3i)^2 + \frac{6-i}{3+2i}$ là:

A. $-\frac{561}{13}$

B. $\frac{561}{13}$

C. $\frac{13}{561}$

D. $-\frac{13}{561}$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{536}{13} - \frac{561}{13}i. \text{ Phần ảo của số phức } z \text{ là } -\frac{561}{13}. \text{ Chọn đáp án A.}$$

Câu 133. Phần thực của số phức $z = -5 + 3i$ là

A. 5.

B. -5 .

C. 3

D. -3 .

Hướng dẫn giải

Phần thực của số phức $z = -5 + 3i$ là $a = -5$. Chọn đáp án B.

Câu 134. Phần ảo của số phức $z = -1 - 2i$ là

A. 2.

B. -2 .

C. $-2i$

D. -1 .

Hướng dẫn giải

Phần ảo của số phức $z = -1 - 2i$ là $b = -2$. Chọn đáp án B.

Câu 135. Cho số phức $z = 1 - i$. Phần thực, phần ảo của z là

A. phần thực 1 và phần ảo $-i$.

B. phần thực 1 và phần ảo 1.

C. phần thực 1 và phần ảo -1 .

D. phần thực 1 và phần ảo i .

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án C.

Câu 136. Số phức $z = a + bi$ là số thuần ảo khi và chỉ khi ?

- A. $a = 0$. B. $b = 0$. C. $bi = 0$. D. $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Số phức $z = a + bi$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $a = 0$. Chọn đáp án A.

Câu 137. Cho số phức $z_1 = a_1 + b_1i; z_2 = a_2 + b_2i$ hai số phức $z_1 = z_2$ khi và chỉ khi ?

- A. $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1i = b_2i \end{cases}$ B. $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a_1 = b_2 \\ a_2 = b_1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a_1 = -a_2 \\ b_1i = -b_2i \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$. Chọn đáp án B.

Câu 138. Phần thực của số phức $z = (1 - 2i)(1 + 2i)$ là

- A. 5. B. -2. C. -3. D. 2.

Hướng dẫn giải

$z = (1 - 2i)(1 + 2i) = 5$. Phần thực của z là 5. Chọn đáp án A.

Câu 139. Phần ảo của số phức $z = (-1 - 2i)(1 + i) - 1$ là

- A. -2. B. 1. C. -3. D. $-3i$.

Hướng dẫn giải

$z = (-1 - 2i)(1 + i) - 1 = -3i$. Phần ảo của z là -3. Chọn đáp án C.

Câu 140. Cho số phức $z = 2 + 3i + \frac{5 - 3i}{i}$. Phần thực và phần ảo của z là:

- A. phần thực -1 và phần ảo -2. B. phần thực 5 và phần ảo 8.

- C. phần thực -5 và phần ảo 8. D. phần thực 1 và phần ảo -2.

Hướng dẫn giải

$z = 2 + 3i + \frac{5 - 3i}{i} = 2 + 3i - \frac{(5 - 3i)i}{-i^2} = -1 - 2i$. z có phần thực bằng -1 và phần ảo bằng -2.

Câu 141. Cho số phức z thỏa mãn: $z + 3\bar{z} = 2 + i^3$ Phần ảo của số phức z là:

- A. -10. B. $\frac{15}{4}$. C. 10. D. $-10i$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đặt $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$z + 3\bar{z} = 2 + i^3 \cdot 2 - i \Leftrightarrow x + yi + 3(x - yi) = 15 + 20i \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 15 \\ -2y = 20 \end{cases} \Rightarrow y = -10.$$

Cách 2: Bấm máy.

Chọn A.

Câu 142. Cho số phức z thỏa mãn $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$. Phần thực và phần ảo của z là:

A. phần thực $-\frac{1}{3}$ và phần ảo $\frac{1}{3}$.

B. phần thực $\frac{1}{3}$ và phần ảo $-\frac{1}{3}i$.

C. phần thực $\frac{1}{3}$ và phần ảo $\frac{1}{3}$.

D. phần thực $\frac{1}{3}$ và phần ảo $-\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i \Leftrightarrow (2x + 2yi - 1)(1 + i) + (x - yi + 1)(1 - i) = 2 - 2i$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3y - 2 + (x + y)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Chọn D.

Câu 143. Cho số phức z thỏa mãn: $\bar{z} = \sqrt{2} + i^3 \cdot 1 - \sqrt{2}i$. Phần thực của số phức z là

A. $4\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{3}$.

C. 5.

D. $5i$.

Hướng dẫn giải

Bấm máy cầm tay và áp dụng công thức $\bar{z} = x + yi, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow z = x - yi$

Chọn A.

Câu 144. Cho số phức $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^3$. Phần thực và phần ảo của z là

A. phần thực 2 và phần ảo -2 .

B. phần thực -2 và phần ảo 2

C. phần thực 2 và phần ảo 2.

D. phần thực 2 và phần ảo $2i$.

Hướng dẫn giải

Bấm máy cầm tay.

Chọn C.

Câu 145. Cho số phức $z = \frac{1+mi}{1-2i}$. Giá trị của tham số m để số phức z là số thực là

- A. $\frac{3}{2}$ B. -2 C. 4 D. 1

Hướng dẫn giải

Cách 1 : $z = \frac{1+mi}{1-2i} = \frac{1+mi}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1-2m + m + 2i}{5}$.

z là số thực khi $m = -2$.

Cách 2 : Thay đáp án, bấm máy.

Chọn B.

Câu 146. Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là:

- A. 1 B. 0 C. 4 D. 6

Hướng dẫn giải

Bấm máy được $z = 1+i$, chọn B.

Câu 147. Phần thực và phần ảo của $z = \frac{i^{2008} + i^{2009} + i^{2010} + i^{2011} + i^{2012}}{i^{2013} + i^{2014} + i^{2015} + i^{2016} + i^{2017}}$ là;

- A. $0; -1$ B. $1; 0$ C. $-1; 0$ D. $0; 1$

Hướng dẫn giải

Nhận xét $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = i^k (1+i+i^2+i^3) = 0$. Do đó $z = \frac{i^{2012}}{i^{2017}} = \frac{1}{i^5} = \frac{1}{i} = -i$.

Chọn A.

Câu 148. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z + 2+i \bar{z} = 3+5i$. Phần thực và phần ảo của z là:

- A. 2 và -3 B. 2 và 3 C. -2 và 3 D. -3 và 2 .

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Ta có

$$z + 2+i \bar{z} = 3+5i \Leftrightarrow x + yi + 2+i (x-yi) = 3+5i \Leftrightarrow 3x + y - 3 + x - y - 5i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Chọn A.

Câu 149. Cho số phức $z = a + bi$. Tìm mệnh đề đúng:

- A. $z + \bar{z} = 2bi$ B. $z - \bar{z} = 2a$ C. $z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2$ D. $|z^2| = |z|^2$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 150. Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^2 có phần thực là:

- A. $a + b$ B. $a - b$ C. $a^2 - b^2$ D. $a^2 + b^2$

Hướng dẫn giải

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Chọn C.

Câu 151. Cho số phức $u = a + bi$ và $v = a' + b'i$. Số phức $u \cdot v$ có phần thực là:

- A. $a + a'$ B. $a \cdot a'$ C. $a \cdot a' - b \cdot b'$ D. $2b \cdot b'$

Hướng dẫn giải

$$uv = (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + ab'i + a'b'i.$$

Chọn C.

Câu 152. Phần ảo của số phức $z = (\sqrt{2} + i)^2(1 - \sqrt{2}i)$ bằng:

- A. $-\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 3

Hướng dẫn giải

Bấm máy. Chọn C.

Câu 153. Phần thực của số phức z thỏa mãn $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z$ là:

- A. -6 B. -3 C. 2 D. -1

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{8 + i}{1 + i^2 \cdot 2 - i - 1 - 2i}, \text{ bấm máy.}$$

Câu 154. Phần ảo của số phức $\frac{3 + 2i}{2 - i}$ là?

- A. $\frac{7}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{7}{5}i$ D. $\frac{7}{3}$

Hướng dẫn giải

Bấm máy. Chọn A.

Câu 155. Cho $z = 2 + 3i$, nghịch đảo của số phức z là:

A. $2 - 3i$

B. $3 + 2i$

C. $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

D. $3 + 2i$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Cách khác: Bấm MTCT

Chọn C.

Câu 156. Biết rằng nghịch đảo của số phức z bằng số phức liên hợp của nó, trong các kết luận sau, kết luận nào là đúng?

A. $z \in \mathbb{R}$

B. $|z| = 1$

C. z là một số thuần ảo

D. $|z| = -1$

Hướng dẫn giải

Có $\frac{1}{z} = \bar{z} \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$.

Chọn B.

Câu 157. Cho số phức $z \neq 0$. Biết rằng số phức nghịch đảo của z bằng số phức liên hợp của nó. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

A. $z \in \mathbb{O}$

B. z là một số thuần ảo

C. $|z| = 1$

D. $|z| = 2$

Hướng dẫn giải

Có $\frac{1}{z} = \bar{z} \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$.

Chọn C.

Câu 158. Số phức nghịch đảo của số phức $z = 1 + i$ là

A. $1 - i$

B. $\frac{1}{1 - i}$

C. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

D. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Chọn C.

Câu 159. Cho số phức $z = -2 - 3i$. Nghịch đảo của số phức z là

A. $\frac{1}{z} = \frac{-2}{13} + \frac{3}{13}i$ B. $\frac{1}{z} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$ C. $\frac{1}{z} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$ D.

$\frac{1}{z} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Chọn A.

Câu 160. Dạng $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$ của số phức $\frac{1}{3+2i}$ là số phức nào dưới đây?

A. $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ B. $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$ C. $-\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ D. $-\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Chọn A.

Câu 161. Số phức liên hợp của $z = 3 + 2i$ là:

A. $\bar{z} = 3 - 2i$ B. $\bar{z} = 3 + 2i$ C. $\bar{z} = 2 - 3i$ D. $\bar{z} = -2 + 3i$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Chọn A.

Câu 162. Cho số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$. Số phức z^{-1} có phần ảo là

A. $a^2 + b^2$ B. $a^2 - b^2$ C. $\frac{a}{a^2 + b^2}$ D. $\frac{-b}{a^2 + b^2}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$. Chọn D.

Câu 163. Phần thực của số phức $z = \frac{1+4i}{3+2i}$ là

A. $\frac{10}{13}$ B. $\frac{11}{13}$ C. 4 D. 6

Hướng dẫn giải

Bấm máy. Chọn B.

Câu 164. Cho số phức $z = a + bi; a, b \in R, b \neq 0$. Số $z - \bar{z}$ luôn là:

A. số thực

B. số ảo

C. số 0

D. số i

Hướng dẫn giải

$$z - \bar{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi \text{ là số thuần ảo.}$$

Chọn B.

Câu 165. Số nào trong các số sau là số thuần ảo:

A. $\sqrt{3} + 2i + \sqrt{3} - 2i$

B. $\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3} - 2i$ C. $3 + 3i^2$ D. $\frac{2 + 3i}{2 - 3i}$.

Hướng dẫn giải

Bấm máy hoặc nhẩm ra kết quả. Chọn C.

Câu 166. Cho $z = \frac{2}{1 + i\sqrt{3}}$. Số phức liên hợp của z là

A. $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

$$z = \frac{2(1 - i\sqrt{3})}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \text{ Chọn A.}$$

Câu 167. Cho số phức $z = a + bi$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $z + \bar{z} = 2bi$.

B. $z - \bar{z} = 2a$.

C. $z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2$.

D. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Tính chất

Câu 168. Cho các số phức: $z_1 = 3i$; $z_2 = -1 - 3i$; $z_3 = -2 - 3i$. Số phức liên hợp của số phức có mô đun lớn nhất trong 3 số phức đã cho là

A. $2 - 3i$

B. $-3 - 2i$

C. $-2 + 3i$

D. $-3i$

Hướng dẫn giải

Số phức có mô đun lớn nhất là z_3 , chọn C.

Câu 169. Số phức liên hợp của số phức: $z = 1 - 3i$ là số phức:

A. $\bar{z} = 3 - i$

B. $\bar{z} = -1 + 3i$

C. $\bar{z} = 1 + 3i$

D. $\bar{z} = -1 - 3i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 170. Số phức liên hợp của số phức: $z = -1 + 2i$ là số phức:

- A. $\bar{z} = 2 - i$ B. $\bar{z} = -2 + i$ C. $\bar{z} = 1 - 2i$ D. $\bar{z} = -1 - 2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 171. Tìm $\bar{z}$ biết số phức $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$

- A. $\sqrt{2} - i\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{2} - i\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3} - i\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 172. Cho số phức $z = -5 - 12i$. Khẳng định nào sau đây là sai

- A. Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = 5 - 12i$ B. Phần thực của z là -5.
C. Phần ảo của z là -12. D. $|z| = 13$

Chọn A.

Câu 173. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn

- A. (6;7) B. (6;-7) C. (-6;7) D. (-6;-7)

Hướng dẫn giải

$\bar{z} = 6 - 7i$. Chọn B

Câu 174. Tính i^{15}

- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1

Hướng dẫn giải

$i^{15} = i^{2 \cdot 7} i = -1^7 i = -i$. Chọn A

Câu 175. Kết quả của phép tính: $\frac{2 - i^2 \cdot 2i^4}{1 - i}$ là:

- A. $7 - i$ B. $56 - 8i$ C. $7 + i$ D. $56 + 8i$

Hướng dẫn giải. Chọn B. Biến đổi đến bước 3, sử dụng MTCT ra kết quả.

$$\frac{2 - i^2 \cdot 2i^4}{1 - i} = \frac{2 - i^2 \cdot 2^4 i^4}{1 - i} = \frac{2 - i^2 \cdot 2^4}{1 - i} = 56 - 8i$$

Câu 176. Đẳng thức nào trong các đẳng thức sau là đúng?

A. $i^{1977} = -1$

B. $i^{2345} = i$

C. $i^{2005} = 1$

D. $i^{2006} = -i$

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Áp dụng $i^{2345} = i^{2 \cdot 1172} i = -1^{1172} i = i$

Câu 177. Đẳng thức nào trong các đẳng thức sau là đúng?

A. $1 + i^8 = -16$

B. $1 + i^8 = 16i$

C. $1 + i^8 = 16$

D. $1 + i^8 = -16i$

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Áp dụng $1 + i^8 = \left[(1 + i)^2 \right]^4 = \left[2i \right]^4 = 2^4 \cdot i^{2 \cdot 2} = 16$

Câu 178. Số $\frac{1}{1+i}$ bằng

A. $1 + i$

B. $\frac{1}{2} 1 - i$

C. $1 - i$

D. i

Hướng dẫn giải. Chọn B.

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1^2 + i^2} = \frac{1-i}{2}$$

Câu 179. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng:

A. 20

B. 30

C. 25

D. 35

Hướng dẫn giải. Chọn A.

$z^2 + 2z + 10 = 0$ có hai nghiệm $z = -1 \pm 3i$ Suy ra $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1^2 + 3^2 + 1^2 + (-3)^2 = 20$

Câu 180. Cho $z = 5 - 3i$. Tính $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ được kết quả :

A. $-6i$

B. $-3i$

C. 0

D. -3

Hướng dẫn giải. Chọn D.

$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i} \cdot (-6i) = -3$$

Câu 181. Thu gọn $z = (2 + 3i)(2 - 3i)$ ta được:

A. $z = 4$

B. $z = 13$

C. $z = -9i$

D. $z = 9 - 4i$

Hướng dẫn giải. Chọn B.

$$z = (2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 - 3^2 \cdot i^2 = 13$$

Câu 182. Số phức $z = (1 - i)^4$ bằng:

A. $2i$

B. $4i$

C. -4

D. 4

Hướng dẫn giải. Chọn C.

$$z = (1 - i)^4 = \left[(1 - i)^2 \right]^2 = 1 - 2i + i^2 = (-2i)^2 = 4$$

Câu 183. Số phức $z = (1 + i)^3$ bằng:

A. $-2 + 2i$

B. $4 + 4i$

C. $3 - 2i$

D. $4 + 3i$

Hướng dẫn giải. Chọn A. (MTCT)

Cách 2: $z = (1 + i)^3 = (1 + i)(2i) = 2i + 2i \cdot i = -2 - 2i$

Câu 184. Thu gọn số phức $z = \frac{3+2i}{1-i} + \frac{1-i}{3+2i}$ ta được:

A. $z = \frac{21}{26} + \frac{61}{26}i$

B. $z = \frac{23}{26} + \frac{63}{26}i$

C. $z = \frac{15}{26} + \frac{55}{26}i$

D. $z = \frac{2}{13} + \frac{6}{13}i$

Hướng dẫn giải. Chọn C. (MTCT)

Cách 2: $\frac{3+2i}{1-i} + \frac{1-i}{3+2i} = \frac{3+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} + \frac{1-i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{3+2i}{1^2+(-1)^2} + \frac{1-i}{3^2+2^2} = \frac{15}{26} + \frac{55}{26}i$

Câu 185. Cho $z_1 = 1 - 3i, z_2 = 2 + i, z_3 = 3 - 4i$. Tính:

185.1. Tính $z_1 + 2z_2 - \overline{z_3}$

A. $1 + 4i$

B. $2 - 4i$

C. $2 - 5i$

D. $4 - 6i$

185.2. Tính $\overline{z_1 z_2} + z_2 \overline{z_3}$

A. $1 + 4i$

B. $2 - 3i$

C. $2 + 5i$

D. $1 - 6i$

185.3. Tính $\overline{z_1 z_2 z_3} + z_2^2 z_3$

A. $11 + 45i$

B. $20 - 33i$

C. $20 + 35i$

D. $11 + 61i$

Hướng dẫn giải

CMPLX Math ▲ 1-3i → A 1-3i	CMPLX Math ▲ 2+i → B 2+i	CMPLX Math ▲ 3-4i → C 3-4i
---	---	---

185.1. Ta có:

$$z_1 + 2z_2 - \overline{z_3} = (1 - 3i) + 2(2 + i) - \overline{(3 - 4i)} = 1 - 3i + 4 + 2i - (3 + 4i) = 2 - 5i.$$

Vậy chọn đáp án C.

Dùng MTCT:

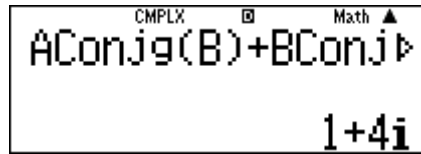
CMPLX Math ▲ A+2B-Conj(C) 2-5i

185.2. Ta có:

$$z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_3} = (1-3i)(2+i) + (2+i)(3-4i) = (1-3i)(2-i) + (2+i)(3+4i) \\ = 2-3-7i+6-4+11i = 1+4i.$$

Vậy chọn đáp án A.

Dùng MTCT:

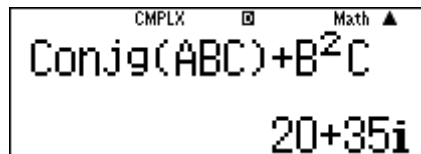


185.3. Ta có:

$$\overline{z_1 z_2 z_3} + z_2^2 \overline{z_3} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_3} + z_2^2 \overline{z_3} = (1+3i)(2-i)(3+4i) + (2+i)^2(3-4i) \\ = (2+3+5i)(3+4i) + (4-1+4i)(3-4i) \\ = (5+5i)(3+4i) + (3+4i)(3-4i) = 15-20+35i+9+16 = 20+35i.$$

Vậy chọn đáp án C.

Dùng MTCT



Câu 186. Tính lũy thừa $(1+i)^{2006}$ bằng

A. $2^{1003}i$

B. $-2^{1003}i$

C. $2^{2006}i$

D. $-2^{2006}i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1+i)^{2006} = \left[(1+i)^2\right]^{1003} = (2i)^{1003} = -2^{1003}i.$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 187. Tính lũy thừa $(2+3i)^3$ bằng

A. $-46+9i$

B. $-4+9i$

C. $4+19i$

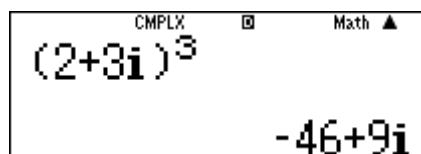
D. $6+12i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(2+3i)^3 = 2^3 + 3.2^2.3i + 3.2.(3i)^2 + (3i)^3 = -46+9i.$

Vậy chọn đáp án A

Dùng MTCT:



Câu 188. Tính lũy thừa $[(4+5i)-(4+3i)]^5$ bằng

A. $32i$

B. $9i$

C. $19i$

D. $12i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $[(4+5i)-(4+3i)]^5 = (2i)^5 = 32i.$

Vậy chọn đáp án A.

Dùng MTCT

CMPLX Math ▲
 $((4+5i)-(4+3i))^2$
 32i

Câu 189. Tính lũy thừa $(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^2$ bằng

- A. $-4+2\sqrt{3}i$ B. $-1-2\sqrt{6}i$ C. $-3+\sqrt{3}i$ D. $6+\sqrt{3}i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^2 = 2-3-2\sqrt{2}\sqrt{3}i = -1-2\sqrt{6}i$.

Vậy chọn đáp án B.

Dùng MTCT

CMPLX Math ▲
 $(\sqrt{2}-i\sqrt{3})^2$
 $-1-2\sqrt{6}i$

Câu 190. Tính lũy thừa $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ bằng

- A. 6 B. -4 C. 4 D. 1

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = 1 \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án D.

Dùng MTCT

CMPLX Math ▲
 $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
 1

Câu 191. Viết các số phức $z = \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{5}-i\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}$ dưới dạng $a+bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

- A. $\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{i\sqrt{5}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2i\sqrt{7}}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{5}-i\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}-i\sqrt{5}} = \frac{(1-i\sqrt{2})(\sqrt{5}+i\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-i\sqrt{3})(\sqrt{5}+i\sqrt{3})} + \frac{(\sqrt{2}+i)(\sqrt{3}+i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-i\sqrt{5})(\sqrt{3}+i\sqrt{5})} \\ &= \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{6}+i\sqrt{3}-i\sqrt{10}) + (\sqrt{6}-\sqrt{5}+i\sqrt{10}+i\sqrt{3})}{5+3} = \frac{2\sqrt{6}+2i\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án A.

Dùng MTCT

Câu 192. Viết các số phức $z = \frac{(7-8i)^{10}}{(8+7i)^{11}}$ dưới dạng $a+bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$)

A. $-\frac{4}{133} - \frac{7i}{133}$

B. $-\frac{8}{113} + \frac{7i}{113}$

C. $-\frac{4}{23} + \frac{7i}{23}$

D. $-\frac{4}{123} - \frac{5i}{123}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(7-8i)^{10}}{(8+7i)^{11}} = \left(\frac{7-8i}{8+7i} \right)^{10} \frac{1}{8+7i} = \left(\frac{(7-8i)(8-7i)}{(8+7i)(8-7i)} \right)^{10} \frac{8-7i}{(8+7i)(8-7i)} \\ &= \left(\frac{56+56i^2-49i-64i}{64+49} \right)^{10} \frac{8-7i}{49+64} = \left(-\frac{113i}{113} \right)^{10} \frac{8-7i}{113} \\ &= (-i)^{10} \frac{8-7i}{113} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^2 \frac{8-7i}{113} = -\frac{8}{113} + \frac{7i}{113}. \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án B.

Dùng MTCT

Câu 193. Tính $A = \frac{1}{2i} \left(i^7 - \frac{1}{i^7} \right)$

A. i

B. i

C. $-i$

D. -1

Hướng dẫn giải

Ta có: $i^7 = i^6 \cdot i = (i^2)^3 \cdot i = -i$

Do đó: $A = \frac{1}{2i} \left(i^7 - \frac{1}{i^7} \right) = \frac{1}{2i} \left(-i + \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{-i^2 + 1}{i} \right) = \frac{2}{-2} = -1.$

Vậy chọn đáp án D.

Dùng MTCT:

Câu 194. Tính $B = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{33} + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i};$

A. $13-3i$

B. $33-31i$

C. $13-32i$

D. $3-32i$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1+1} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$

Do đó: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33} = i^{33} = (i^2)^{16} \cdot i = i$

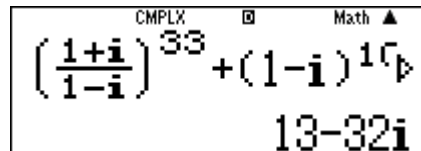
Ta lại có:

- $(1-i)^{10} = \left[(1-i)^2\right]^5 = (1+i^2-2i)^5 = (-2i)^5 = -32i$
- $(2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i} = 13 - i$

Vậy $B = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33} + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i} = i - 32i + 13 - i = 13 - 32i$

Vậy chọn đáp án C.

Dùng MTCT:



CMPLX Math
 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33} + (1-i)^{10}$
 13-32i

Câu 195. Tính $C = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{20}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức của cấp số nhân:

Ta có:

$$C = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{20} = u_1 \cdot \frac{1-q^{21}}{1-q}$$

$$= 1 \cdot \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^{21}}{-i}.$$

Ta có:

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$\Rightarrow (1+i)^{21} = (1+i)^{20} \cdot (1+i) = (2i)^{10} \cdot (1+i) = -2^{10} (1+i) = -2^{10} - i \cdot 2^{10}$$

$$\text{Do đó: } C = \frac{1+2^{10}+i \cdot 2^{10}}{-i} = -2^{10} + (1+2^{10})i.$$

Câu 196. Cặp số thực x, y thỏa mãn $2x+1+(1-2y)i=2-x+(3y-2)i$ là:

A. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{3}{5}$

B. $x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{5}$

C. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{5}$

D. $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{3}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$2x+1+(1-2y)i=2-x+(3y-2)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=2-x \\ 1-2y=3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=1 \\ 5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 197. Cặp số thực x, y thỏa mãn $4x+3+(3y-2)i=y+1+(x-3)i$ là:

A. $x=\frac{5}{11}, y=\frac{2}{11}$ B. $x=-\frac{5}{11}, y=\frac{2}{11}$ C. $x=\frac{5}{11}, y=-\frac{2}{11}$ D. $x=-\frac{5}{11}, y=-\frac{2}{11}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có:

$$4x+3+(3y-2)i=y+1+(x-3)i \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3=y+1 \\ 3y-2=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y=-2 \\ x-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{11} \\ y=\frac{2}{11} \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án B.

Cách 2: Thử trực tiếp các kết quả {Dùng MTCT}

Cách 3: $\boxed{\text{CALC}} \boxed{X=100} \boxed{Y=0,01}$

Câu 198. Cặp số thực x, y thỏa mãn $x(3+5i)+y(1-2i)^3=7+32i$ là:

A. $x=-6; y=1$ B. $x=-6; y=-1$ C. $x=6; y=1$ D. $x=6; y=-1$

Hướng dẫn giải

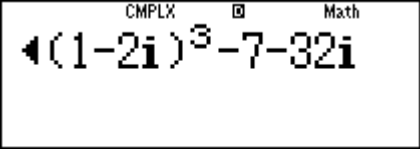
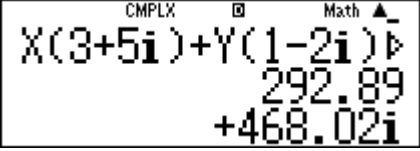
Cách 1: Ta có:

$$x(3+5i)+y(1-2i)^3=7+32i \Leftrightarrow 3x+5xi+y(-11+2i)=7+32i$$

$$\Leftrightarrow 3x-11y+(5x+2y)i=7+32i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-11y=7 \\ 5x+2y=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án C.

Cách 2: Dùng MTCT:

Bước 1: Nhập $X(3+5i)+Y(1-2i)^3-7-32i$	
Bước 2: Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ cho $X=100, Y=0,01$ Từ kết quả: 292,89 + 468,02i $2 \mid 92, \mid 89 + 4 \mid 68, \mid 02i$ $3x \quad -7 \quad -11y \quad 5x \quad -32 \quad 2y$ Ta có được hệ $\begin{cases} 3x-7-11y=0 \\ 5x-32+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$	

Câu 199. Cặp số thực x, y thỏa mãn $\frac{x+1}{1-i}=\frac{y-1}{1+i}$ là:

A. $x = -1; y = -1$

B. $x = -1; y = -1$

C. $x = \frac{338}{49}; y = \frac{61}{49}$

D. $x = -1; y = 1$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có:

$$\frac{x+1}{1-i} = \frac{y-1}{1+i} \Leftrightarrow (x+1)(1+i) = (y-1)(1-i)$$

$$\Leftrightarrow x+1+(x+1)i = y-1-(y-1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=y-1 \\ x+1=-y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án D.

Cách 2: Dùng MTCT

Câu 200. Các cặp số thực x, y thỏa mãn $\frac{1}{x-i} + \frac{y}{3-3i} = 2+3i$ là:

A. $(x, y) = \{(0; 12); (-1; 15)\}$

B. $(x, y) = \{(0; 2); (1; 5)\}$

C. $(x, y) = \{(10; 2); (10; 5)\}$

D. $(x, y) = \{(1; 2); (1; 15)\}$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\frac{1}{x-i} + \frac{y}{3-3i} = 2+3i \Leftrightarrow \frac{x+i}{(x-i)(x+i)} + \frac{y(1+i)}{3(1-i)(1+i)} = 2+3i \Leftrightarrow \frac{x+i}{x^2+1} + \frac{y}{6} + i\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{y}{6}\right) = 2+3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{6} = 2 \\ \frac{1}{x^2+1} + \frac{y}{6} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{x^2+1} = 1 \\ \frac{y}{6} = 3 - \frac{1}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x=0 \\ \frac{y}{6} = 3 - \frac{1}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=12 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=15 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 201. Các cặp số thực x, y thỏa mãn $(x+i)(1+yi) = (3+2i)x+1-4i$ là:

A. $(x, y) = \{(1; 1); (-1; 2)\}$

B. $(x, y) = \left\{(1; -2); \left(-\frac{5}{2}; 4\right)\right\}$

C. $(x, y) = \left\{\left(\frac{1}{2}; 2\right); (1; -3)\right\}$

D. $(x, y) = \left\{\left(1; \frac{1}{2}\right); \left(2; \frac{3}{2}\right)\right\}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$(x+i)(1+yi) = (3+2i)x+1-4i \Leftrightarrow x-y+(1+xy)i = 3x+1+(2x-4)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3x+1 \\ 1+xy=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ 1+x(-2x-1)=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ 2x^2+3x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{5}{2} \\ y=4 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 202. Tìm điều kiện cho 2 số thực x, y để $(x+iy)^2$ là số thực

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

Do đó, $(x+iy)^2$ là số thực khi $2xy=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 203. Tìm điều kiện cho 2 số thực x , và y để $(x+iy)^2$ là số ảo

- A. $\begin{cases} x=0 \\ 3x=y \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=0 \\ 3x^2=y^2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=0 \\ x=3y \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=0 \\ x^2=3y^2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$(x+iy)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot iy + 3x \cdot (iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$$

Do đó, $(x+iy)^3$ là số ảo khi

$$x^3 - 3xy^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 = 3y^2 \end{cases}$$

Câu 204. Tìm số thực m để bình phương của số phức $z = \frac{m+3i}{1-i}$ là số thực.

- A. $m = \pm 2$ B. $m = \pm 3$ C. $m = \pm 4$ D. $m = 5$

Hướng dẫn giải

Viết được $z^2 = \frac{-6m + (m^2 - 9)i}{2}$. Lập luận tìm được $m = \pm 3$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 205. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = iz - \bar{z}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z = 3 - 2i \Rightarrow \bar{z} = 3 + 2i$.

Khi đó: $w = i(3 - 2i) - (3 + 2i) = -1 + i$.

Vậy, phần thực là -1 , phần ảo là 1 .

Câu 206. Cho $z = 2 + 3i, (x, y \in \mathbb{R})$. Hãy viết dưới dạng đại số của $w = \frac{z^3 - z}{z - 1} + (\bar{z})^2 + \bar{z}$.

- A. $z = 6$ B. $z = -6$ C. $z = -6 + i$ D. $z = -6 - i$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$w = \frac{z^3 - z}{z - 1} + (\bar{z})^2 + \bar{z} = \frac{z(z^2 - 1)}{z - 1} + (\bar{z})^2 + \bar{z} = z(z + 1) + (\bar{z})^2 + \bar{z}$$

$$\Rightarrow w = z^2 + z + (\bar{z})^2 + \bar{z} = 2(a^2 - b^2) + 2a = -6$$

Vậy chọn đáp án B.

Dùng MTCT

Bước 1: Lưu $2 + 3i \rightarrow A$	
Bước 2: Tính $\frac{A^3 - A}{A - 1} + (\overline{A})^2 + \overline{A}$	

Câu 207. Cho $z = \frac{1+i}{1-i}$. Tính $|z^{2015}|$

- A. 1 B. $z = -1$ C. $z = -1 + i$ D. $z = -1 - i$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = i \Rightarrow z^{2016} = i^{2016} = 1$$

Do đó: $|z^{2016}| = 1$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 208. Tính tổng $S = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2012i^{2012}$.

- A. $-1006 + 1006i$ B. $1006 + 1006i$ C. $-1006 - 1006i$ D. $1006 - 1006i$

Hướng dẫn giải

Cách 1.

Ta có $iS = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + \dots + 2012i^{2013}$

$$\Rightarrow S - iS = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012} - 2012i^{2013}$$

Dãy số $i, i^2, i^3, \dots, i^{2012}$ là một cấp số nhân có công bội $q = i$ và có 2012 số hạng, suy ra:

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012} = i \cdot \frac{1 - i^{2012}}{1 - i} = 0$$

$$\text{Do đó: } S - iS = -2012i^{2013} = -2012i \Rightarrow S = \frac{-2012i}{1 - i} = 1006 - 1006i$$

Vậy chọn đáp án D.

Cách 2. dãy số $1, x, x^2, \dots, x^{2012}$ là một cấp số nhân gồm 2013 số hạng và có công bội bằng x .

$$\text{Xét } x \neq 1, x \neq 0 \text{ ta có: } 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2012} = \frac{1 - x^{2013}}{1 - x} \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2012x^{2011} = \frac{2012x^{2013} - 2013x^{2012} + 1}{(1 - x)^2} \quad (2)$$

Nhân hai vế của (2) cho x ta được:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2012x^{2012} = \frac{2012x^{2014} - 2013x^{2013} + x}{(1 - x)^2} \quad (3)$$

Thay $x=i$ vào (3) ta được:

$$S = i + 2i^2 + 3i^2 + \dots + 2012i^{2012} = \frac{2012i^{2014} - 2013i^{2013} + i}{(1-i)^2}$$

Với $i^{2014} = -1, i^{2013} = i$

Vậy $S = \frac{-2012 - 2012i}{-2i} = 1006 - 1006i.$

Câu 209. Cho α, β hai số phức liên hiệp thỏa mãn $\frac{\alpha}{\beta^2} \in \mathbb{R}$ và $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$. Tính $|\alpha|$.

A. $\sqrt{3}$

B. 3

C. 2

D. $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Đặt $\alpha = x + iy \Rightarrow \beta = x - iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Không giảm tính tổng quát, ta coi $y \geq 0$.

Vì $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$ nên $|2iy| = 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}$.

Do α, β hai số phức liên hiệp nên $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mà $\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\alpha^3}{(\alpha\beta)^2} \in \mathbb{R}$ do đó $\alpha^3 \in \mathbb{R}$. Nhưng ta

có $\alpha^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$ nên $\alpha^3 \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$3x^2y - y^3 = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 - y^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 1.$$

Vậy $|\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2.$

Câu 230. Tìm c biết a, b và c các số nguyên dương thỏa mãn: $c = (a + bi)^3 - 107i$.

A. 400

B. 312

C. 198

D. 123

Hướng dẫn giải

Ta có $c = (a + bi)^3 - 107i = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3 - 107)$. Nên c là số nguyên dương thì $3a^2b - b^3 - 107 = 0$. Hay $b(3a^2 - b^2) = 107$.

Vì $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và 107 là số nguyên tố nên xảy ra:

▪ $b = 107; 3a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{11450}{3} \notin \mathbb{Z}$ (loại).

▪ $b = 1; 3a^2 - b^2 = 107 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ (thỏa mãn). Vậy nên $c = a^3 - 3ab^2 = 6^3 - 3.6.1^2 = 198$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 231. Cho số phức z có phần ảo bằng 164 và với số nguyên dương n thỏa mãn $\frac{z}{z+n} = 4i$. Tìm n .

A. $n = 14$

B. $n = 149$

C. 697

D. 789

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + 164i$ ta có:

$$\frac{z}{z+n} = 4i \Leftrightarrow \frac{x+164i}{x+164i+n} = 4i \Leftrightarrow x+164i = -656 + 4(x+n)i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -656 \\ x+n = 41 \end{cases} \Rightarrow n = 697.$$

Vậy giá trị cần tìm của n là 697.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 232. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)}{1-i}$. Tìm mô đun của số phức $\bar{z} + iz$

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 5 D. $\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải

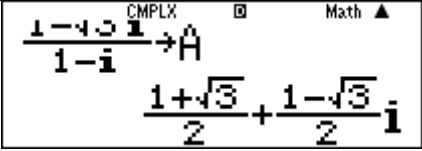
Từ $\bar{z}$ ta phải suy ra được z và thay vào biểu thức $\bar{z} + iz$ rồi tìm môđun:

$$\bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)}{1-i} = \frac{(1-\sqrt{3}i)(1+i)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Suy ra: } z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow iz = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

Do đó: $\bar{z} + iz = 1+i \Rightarrow |\bar{z} + iz| = \sqrt{2}$. Vậy chọn đáp án A.

Dùng MTCT:

Bước 1: Lưu $\frac{(1-\sqrt{3}i)}{1-i} \rightarrow A$	
Bước 2: Tính $ A + i\bar{A} $	

Lời bình: Nhận thấy rằng với số phức $z = a+bi$ bất kì ta đều có

$z + i\bar{z} = (1+i)(a+b)$ hay $\frac{z+i\bar{z}}{1+i} = a+b \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$. Về phương diện hình học thì $\frac{z+i\bar{z}}{1+i}$ luôn nằm trên trục Ox khi biểu diễn trong mặt phẳng phức.

Câu 233. Tìm số thực m biết: $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$ và $z\bar{z} = \frac{2-m}{2}$ (trong đó i là đơn vị ảo)

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$

Định hướng: Quan sát thấy z cho ở dạng thương hai số phức. Vì Vậy cần phải đơn giản z bằng cách nhân liên hiện ở mẫu. Từ $z \Rightarrow \bar{z}$. Thay z và $\bar{z}$ vào $z\bar{z} = \frac{2-m}{2}$ ta tìm được m

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)} = \frac{(i-m)(1-m^2-2mi)}{(1-m^2)^2+4m^2} = \frac{-m(1-m^2)+2m+i(1-m^2+2m^2)}{(1+m^2)^2}$$

$$= \frac{m(1+m^2)+i(1+m^2)}{(1+m^2)^2} = \frac{m}{1+m^2} + \frac{i}{1+m^2} \Rightarrow \bar{z} = \frac{m}{1+m^2} + \frac{i}{1+m^2}$$

Như vậy:

$$z\bar{z} = \frac{2-m}{2} \Rightarrow \frac{m^2+1}{(m^2+1)^2} = -\frac{1}{2}(m-2) \Leftrightarrow \frac{1}{1+m^2} = -\frac{1}{2}(m-2) \Leftrightarrow m^3-2m^2+m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 234. Tìm phần thực của số phức: $z=(1+i)^n, n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình:

$$\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3.$$

A. 6

B. -8

C. 8

D. 9

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n > 3, n \in \mathbb{N}$

Phương trình $\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3 \Leftrightarrow \log_4(n-3)(n+9)=3$

$$(n-3)(n+9)=4^3 \Leftrightarrow n^2+6n-9=0 \Leftrightarrow n=7(\text{do: } n > 3)$$

$$z=(1+i)^7=(1+i) \cdot \left[(1+i)^2\right]^3=(1+i) \cdot (2i)^3=(1+i) \cdot (-8i)=8-8i$$

Vậy phần thực của số phức z là 8.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 235. Cho số phức $z = \frac{m+3i}{1-i} (m \in \mathbb{R})$. Tìm m , biết số phức $w = z^2$ có môđun bằng 9.

A. $\begin{cases} m=-1 \\ m=1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m=3 \\ m=-1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m=3 \\ m=1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m=3 \\ m=-3 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$w = z^2 = \frac{m^2-9+6mi}{-2i} = -3m + \left(\frac{m^2-9}{2}\right)i, |w|=9 \Leftrightarrow \sqrt{9m^2 + \left(\frac{m^2-9}{2}\right)^2} = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{m^4+18m^2+81} = 9 \Leftrightarrow m^2-9=18 \Leftrightarrow m^2=9 \Leftrightarrow m=\pm 3$$

Vậy giá trị cần tìm là $m=\pm 3$

Câu 236. Cho số phức $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}, m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực k

sao cho tồn tại m để $|z-1| \geq k$

A. $k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

B. $k = \frac{\sqrt{5}+2}{2}$

C. $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. $k = \frac{\sqrt{5}-2}{2}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } z = \frac{i-m}{-i^2+mi-m^2} = \frac{-1}{i-m} \Rightarrow z-1 = \frac{1-m+i}{m-i}$$

$$|z-1| = \frac{|1-m+i|}{|m-i|} = \sqrt{\frac{m^2-2m+2}{m^2+1}} \Rightarrow |z-1| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ \frac{m^2-2m+2}{m^2+1} \geq k^2 \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số } f(m) = \frac{m^2-2m+2}{m^2+1}$$

$$\text{Ta có: } f'(m) = \frac{2(m^2-m+1)}{(m^2+1)^2} \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta có min } f(m) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Yêu cầu bài toán } k^2 \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow k \geq \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Vậy $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ là giá trị phải tìm.

Vậy chọn đáp án C.

CHỦ ĐỀ 2: BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN KIẾN QUAN

Loại 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức $z = x + y.i$ thỏa mãn điều kiện K cho trước ?

A – PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

- Bước 1. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức: $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.
- Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x; y)$
$Ax + By + C = 0$.	Là đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$.
$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases}$.	Là đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0 \end{cases}$.	Là hình tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
$R_1^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R_2^2$.	Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a; b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2 .
$y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$.	Là một parabol (P) có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ với $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c < 2a \end{cases}$.	Là một elíp có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự là $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}, (a > b > 0)$.
$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ với $\begin{cases} MF_1 - MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c > 2a \end{cases}$.	Là một hyperbol có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ với $a, b > 0$.
$MA = MB$.	Là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Nhóm 1: Nhóm đề cho trực tiếp

BT 1. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - 2i| = \sqrt{5}$ và điểm biểu diễn của z thuộc đường thẳng $d: 3x - y + 1 = 0$? **ĐS:** $z = 1 + 4i, z = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z , từ điều kiện $\Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 5$

Khi đó giải hệ pt : $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 5 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$ được nghiệm $(x;y)$ là $(1;4)$ và $\left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$

Vậy số phức cần tìm là : $z = 1 + 4i, z = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.

BT 2. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $(1-2i)z - \frac{2-i}{1+i} = (3-i)z$. Tìm tọa độ biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy ? ĐS: $M\left(\frac{1}{10}; \frac{7}{10}\right)$.

Từ biểu thức ta có : $(-2-i)z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \Leftrightarrow z = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$. Vậy $M\left(\frac{1}{10}; \frac{7}{10}\right)$.

BT 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z| = |\bar{z} - 2 + 3i|$? ĐS: $d: 4x + 6y - 13 = 0$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z , từ điều kiện $\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$

Rút gọn ta có tập hợp điểm M là : $4x + 6y - 13 = 0$

BT 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - 3 - 4i| = 2$? ĐS: $(C): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z , từ điều kiện $\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$. Vậy quỹ tích M là đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$.

BT 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - i| = |1 + iz|$? ĐS: $(C): x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$.

Từ giả thiết, ta có : $|z - i| = \sqrt{2}|z|$. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z , từ điều kiện

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2(x^2 + y^2)} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn : $(C): x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$.

BT 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left|\frac{z}{z-i}\right| = 3$? ĐS: $(C): x^2 + \left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$.

Từ giả thiết, ta có : $|z| = 3|z - i|$. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z , từ điều kiện $\Rightarrow$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 3\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow 8x^2 + 8y^2 - 18y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$.

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn : $(C): x^2 + \left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$.

BT 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z| \leq 2$. ĐS: $x^2 + y^2 \leq 4$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z , từ điều kiện $\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$

Vậy Quỹ tích M là hình tròn $(O; 2)$

BT 8. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $1 < |z-1| < 2$?

ĐS: $1 < (x-1)^2 + y^2 < 4$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z , từ điều kiện $\Rightarrow$

$$1 < \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 2 \Leftrightarrow 1 < (x-1)^2 + y^2 < 4$$

BT 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $\frac{z+i}{z-i}$ là số thuần ảo ? ĐS: $x^2 + y^2 = 1, (x \neq 0)$.

Cách 1 : Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z , Ta có :

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{x+iy+1+i}{x+iy-1-i} = \frac{(x+1)+i(y+1)}{(x-1)+i(y-1)} = \frac{(x+1)+i(y+1)[(x-1)-i(y-1)]}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2-1} + \frac{2x}{x^2+y^2-1}i$$

Để $\frac{z+i}{z-i}$ là số thuần ảo thì $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Vậy quỹ tích M là đường tròn

$$(C): x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Cách 2: Để $\frac{z+i}{z-i}$ là số thuần ảo thì $\frac{z+i}{z-i} + \overline{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} + \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} = 0$

$$\Leftrightarrow z+i \bar{z}+i + \bar{z}-i z-i = 0 \Leftrightarrow z.\bar{z}=1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

BT 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-i| + |z+i| = 4$? (Tiêu điểm nằm trên Oy ; nên sửa lại là:

$|z-1| + |z+1| = 4$ thì mới ra đúng kết quả) ĐS: $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z , $F_1(0; 1)$, $F_2(0; -1)$ là điểm biểu diễn cho số phức i và $-i$. Khi đó theo đề bài ta có : $MF_1 + MF_2 = 4 \Rightarrow$ quỹ tích M là đường Elip

có tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2 \Rightarrow c = 1$ và $2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$. Do Elip có

tiêu điểm nằm trên trục tung nên ta có PT : $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

BT 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$? ĐS: $P: y = \frac{x^2}{4}$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z , Ta có : $2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2|y+1|$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}. \text{ Vậy quỹ tích } M \text{ là đường Parabol : } y = \frac{x^2}{4}$$

BT 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$? ĐS: $H: y = \pm \frac{1}{x}$.

Từ điều kiện ta có : $|z - \bar{z}| \cdot |z + \bar{z}| = 4$. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z , Ta có :

$$2|y| \cdot 2|x| = 4 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{x}. \text{ Vậy quỹ tích điểm } M \text{ là đường Hypebol } H: y = \pm \frac{1}{x}.$$

BT 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 2|z+1|$? ĐS: $H : y = \frac{-2x-1}{2x}, (x > 0)$.

Từ điều kiện ta có : $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 2|z+1| \Leftrightarrow z + \bar{z} + i z - \bar{z} = 2|z+1|$. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z , Ta có : $2x - 2y = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Leftrightarrow x - y = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

Với $x \geq y$ thì $(x-y)^2 = (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow y = -\frac{2x+1}{x}$

BT 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z + \bar{z}| + (z + \bar{z})i = 2z$? ĐS: $y = x, x \geq 0$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z , Ta có : $2|x| + 2xi = 2(x + yi) \Leftrightarrow |x| + xi = x + yi$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = x \end{cases}$. Vậy tập hợp điểm M là nửa đường thẳng $y = x, x \geq 0$.

BT 15. Cho số phức $z = m + (m-3)i, (m \in \mathbb{R})$.

a) Tìm tham số m để biểu diễn số phức z nằm trên đường phân giác thứ hai $y = -x$?

Ta có điểm M biểu diễn cho số phức z là : $M(m; m-3)$. Để M nằm trên đường thẳng $y = -x \Leftrightarrow m-3 = -m \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

b) Tìm tham số m để biểu diễn số phức nằm trên đường hypebol $H : y = -\frac{2}{x}$?

Để M nằm trên đường hypebol $H : y = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow m-3 = -\frac{2}{m} \Leftrightarrow m = 1; m = 2$

c) Tìm tham số m để khoảng của điểm biểu diễn số phức đến gốc tọa độ là nhỏ nhất ?

Ta có : $OM^2 = m^2 + (m-3)^2 = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}$. Vậy để OM ngắn nhất thì $m = \frac{3}{2}$

BT 16. Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn lần lượt các số phức: $z_1 = \frac{4i}{i-1}, z_2 = (1-i)(1+2i)$ và $z_3 = \frac{2+6i}{3-i}$.

a) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông ?

Ta có : $z_1 = 2 - 2i; z_2 = 3 + i; z_3 = 2i$. Vậy $A(2; -2); B(3; 1); C(0; 2)$. Ta có :

$\overrightarrow{AB} = (1; 3); \overrightarrow{BC} = (-3; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B .

Cách 2 : Ta có : $AB = \sqrt{10}; AC = \sqrt{20}; BC = \sqrt{10} \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông cân tại B .

b) Tìm số phức biểu diễn điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông ?

Do tam giác ABC vuông cân tại B nên để $ABCD$ là hình vuông chỉ cần tìm điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Giả sử $D(x; y)$, ta có : $\overline{AB} = (1; 3); \overline{DC} = (-x; 2 - y)$

$$\text{vì } \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow D(-1; -1) \text{ hay } z = -1 - i.$$

Nhóm 2: Nhóm đề cho gián tiếp

BT 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện: $w = (1 - 2i)z + 3$, biết z là số phức thỏa: $|z + 2| = 5$? **ĐS:**
(C): $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 125$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của w , ta có : $x + yi = (1 - 2i)z + 3 \Leftrightarrow z = \frac{x - 3 + yi}{1 - 2i}$

Từ $|z + 2| = 5 \Leftrightarrow \left| \frac{x - 3 + yi}{1 - 2i} + 2 \right| = 5 \Leftrightarrow \left| \frac{x - 1 + y - 4i}{1 - 2i} \right| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2} = 5\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 125$. Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn:

(C): $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 125$.

BT 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện: $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$, biết z là số phức thỏa: $|z - 1| = 2$? **ĐS:**
(C): $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 16$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của w , ta có : $x + yi = (1 + \sqrt{3}i)z + 2 \Leftrightarrow z = \frac{x - 2 + yi}{1 + \sqrt{3}i}$

Từ $|z - 1| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{x - 2 + yi}{1 + \sqrt{3}i} - 1 \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{x - 3 + y - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \right| = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 16$

Vậy quỹ tích M là đường tròn (C): $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 16$.

BT 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện: $w = \bar{z} + 1 - i$, biết z là số phức thỏa: $|z - 1 + 2i| = 3$? **ĐS:**
(C): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của w , ta có :

$x + yi = \bar{z} + 1 - i \Leftrightarrow \bar{z} = x - 1 + (y + 1)i \Leftrightarrow z = x - 1 - (y + 1)i$.

Từ $|z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |x - 2 - y - 1i| = 3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

Vậy quỹ tích M là đường tròn (C): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

BT 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức w thỏa điều kiện: $w = 2z - i$, biết z là số phức thỏa: $|z - 1| = 2$? **ĐS:**
(C): $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của w , ta có : $x + yi = 2z - i \Leftrightarrow z = \frac{x}{2} + \frac{y + 1}{2}i$.

Từ $|z - 1| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{x}{2} - 1 + \frac{y + 1}{2}i \right| = 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$

Vậ quỹ tích M là đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$.

BT 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức ω thỏa điều kiện: $|\omega - iz + \bar{z}| = 2$, biết z là số phức $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{16(1+i)^5}$? **ĐS:** (C): $x^2 + y^2 = 4$.

$$\text{Ta có : } z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{16(1+i)^5} = \frac{1}{16} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} \right)^3 \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{1}{16} (2+2i) \cdot \frac{1}{2i} = \frac{1}{16} - \frac{1}{16}i.$$

Vậy $\omega - iz + \bar{z} = \omega - i\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16}i\right) + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}i = \omega$. Từ $|\omega - iz + \bar{z}| = 2 \Leftrightarrow |\omega| = 2$. Gọi

$M(x; y)$ là điểm biểu diễn của w , ta có : $x^2 + y^2 = 4$. Quỹ tích điểm M là đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$.

BT 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức ω thỏa điều kiện: $\omega = (1+2i)z + 1$, biết z là số phức thỏa: $|z+1|^2 = \frac{z\bar{z}}{2}$? **ĐS:** (C): $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 10$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của w , ta có : $x + yi = (1+2i)z + 1 \Leftrightarrow z = \frac{x-1+yi}{1+2i}$

$$\text{Từ giả thiết } \Rightarrow \left| \frac{x-1+yi}{1+2i} + 1 \right|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x-1+yi}{1+2i} \right) \left(\frac{x-1-yi}{1-2i} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x+(y+2)i}{1+2i} \right|^2 = \frac{1}{2} \frac{(x-1)^2 + y^2}{5} \Leftrightarrow \frac{x^2 + (y+2)^2}{5} = \frac{1}{2} \frac{(x-1)^2 + y^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2(y+2)^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 8y + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+4)^2 = 10$$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn : (C): $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 10$.

BT 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức ω thỏa điều kiện: $\omega = (1+i\sqrt{3})z + 2$, biết z là số phức thỏa: $|z-1| \leq 2$? **ĐS:** $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 16$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của w , ta có : $x + yi = (1+i\sqrt{3})z + 2 \Leftrightarrow z = \frac{x-2+yi}{1+i\sqrt{3}}$

$$\text{Từ } |z-1| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{x-2+yi}{1+i\sqrt{3}} - 1 \right| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{x-3+y-\sqrt{3}i}{1+i\sqrt{3}} \right| \leq 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 16$$

Vậy quỹ tích điểm M là hình tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$

BT 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức ω thỏa điều kiện: $\omega = (1+i)z + 1$, biết z là số phức thỏa: $|z-1| \leq 1$? **ĐS:** $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của w , ta có : $x + yi = (1+i)z + 1 \Leftrightarrow z = \frac{x-1+yi}{1+i}$

$$\text{Từ } |z-1| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x-1+yi}{1+i} - 1 \right| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x-2+y-i}{1+i} \right| \leq 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 2$$

Vậy quỹ tích điểm M là hình tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R = \sqrt{2}$

BT 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức ω thỏa điều kiện: $\omega = \bar{z} + 1 - i$, với số phức z thỏa mãn:

a) $|3z + i|^2 \leq z\bar{z} + 9$. ĐS: $x^2 + y^2 - 2x + \frac{5}{4}y + \frac{1}{4} \leq 0$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của w , ta có: $x + yi = \bar{z} + 1 - i \Leftrightarrow \bar{z} = x - 1 + (y + 1)i$

$$\Leftrightarrow z = x - 1 - (y + 1)i$$

Từ $|3z + i|^2 \leq z\bar{z} + 9 \Leftrightarrow |3[x - 1 - (y + 1)i] + i|^2 \leq [x - 1 - (y + 1)i] \cdot [x - 1 + (y + 1)i] + 9$

$$\Leftrightarrow |3(x - 1) - (3y + 2)i|^2 \leq (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 9 \Leftrightarrow 9(x - 1)^2 + (3y + 2)^2 \leq (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 8y^2 - 16x + 10y + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + \frac{5}{4}y + \frac{1}{4} \leq 0$$

Vậy quỹ tích điểm M là hình tròn $x^2 + y^2 - 2x + \frac{5}{4}y + \frac{1}{4} \leq 0$.

b) $|2z + i|^2 \leq 3z\bar{z} + 1$. ĐS: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \leq 0$.

$$|2z + i|^2 \leq 3z\bar{z} + 1 \Leftrightarrow |2[x - 1 - (y + 1)i] + i|^2 \leq 3[x - 1 - (y + 1)i] \cdot [x - 1 + (y + 1)i] + 1$$

$$\Leftrightarrow |2(x - 1) - (2y + 1)i|^2 \leq 3(x - 1)^2 + 3(y + 1)^2 + 1 \Leftrightarrow 4(x - 1)^2 + (2y + 1)^2 \leq 3(x - 1)^2 + 3(y + 1)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \leq 0$$

Vậy quỹ tích điểm M là hình tròn $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \leq 0$

Loại 2: Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, lớn nhất thỏa mãn tính chất K cho trước ?

A – PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

- Bước 1. Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z để được mối liên hệ giữa x và y .
- Bước 2. Dựa vào mối liên hệ giữa x và y ở bước 1, để tìm $|z|_{\min}$, $|z|_{\max}$?

Lưu ý

Thông thường với loại này, người ra đề hay cho tập hợp biểu diễn số phức z là một đường thẳng hoặc đường tròn. Khi đó, ta có hai hướng xử lý: một là sử dụng phương pháp hình học, hai là sử dụng phương pháp đại số (bất đẳng thức).

BT 26. Trong mặt phẳng phức, hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất ? Biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. ĐS: $|z|_{\min} = 2\sqrt{2}$ khi $z = 2 + 2i$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z , khi đó $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ.

Tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện

$$|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow x - 2^2 + y - 4^2 = x^2 + y - 2^2$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$$

Bài toán trở thành tìm điểm M trên đường thẳng (d): $x + y - 4 = 0$ để OM ngắn nhất. Khi đó M là hình chiếu của O trên (d). Gọi Δ là đường thẳng qua O vuông góc với (d). Ta có PT Δ là: $x - y = 0$. Vậy M là giao điểm của (d) và $\Delta \Rightarrow M(2; 2)$.

Vậy $z = 2 + 2i, |z|_{\min} = 2\sqrt{2}$

b) $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$. ĐS: $|z|_{\min} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ khi $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$.

Tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện: $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$ là đường thẳng (d):

$x - 2y - 3 = 0$. Khi đó M là hình chiếu của O lên (d). Gọi Δ là đường thẳng qua O vuông góc với (d). Ta có PT Δ là: $2x + y = 0$. Vậy M là giao điểm của (d) và Δ

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right). \text{ Vậy } z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i, |z|_{\min} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

c) $|iz - 3| = |z - 2 - i|$. ĐS: $|z|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ khi $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

Tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện: $|iz - 3| = |z - 2 - i|$ là đường thẳng (d):

$x + 2y + 1 = 0$. Khi đó M là hình chiếu của O lên (d). Gọi Δ là đường thẳng qua O vuông góc với (d). Ta có PT Δ là: $2x - y = 0$. Vậy M là giao điểm của (d) và Δ

$$\Rightarrow M\left(-\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}\right). \text{ Vậy } z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, |z|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

d) $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực. ĐS: $|z|_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ khi $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

Tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện: $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực là đường thẳng (d):

$2x + y - 2 = 0$. Khi đó M là hình chiếu của O lên (d). Gọi Δ là đường thẳng qua O vuông góc với (d). Ta có PT Δ là: $x - 2y = 0$. Vậy M là giao điểm của (d) và Δ

$$\Rightarrow M\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right). \text{ Vậy } z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i, |z|_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

e) $\left|\frac{z + 1 - 5i}{z + 3 - i}\right| = 1$. ĐS: $|z|_{\min} = \frac{\sqrt{40}}{5}$ khi $z = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$.

Từ giả thiết $\Leftrightarrow |z + 1 - 5i| = |\bar{z} + 3 - i|$. Tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện:

$|z + 1 - 5i| = |\bar{z} + 3 - i|$ là đường thẳng (d): $x + 3y - 4 = 0$. Khi đó M là hình chiếu của O lên (d). Gọi Δ là đường thẳng qua O vuông góc với (d). Ta có PT Δ là: $3x - y = 0$.

Vậy M là giao điểm của (d) và $\Delta \Rightarrow M\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$. Vậy $z = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i, |z|_{\min} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$.

BT 27. Trong mặt phẳng phức, hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, lớn nhất (nếu có)? Biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$. ĐS: $\begin{cases} |z|_{\min} = \sqrt{5} & \text{ khi } z = 1 + 2i \\ |z|_{\max} = 3\sqrt{5} & \text{ khi } z = 3 + 6i \end{cases}$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z , khi đó $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ.

Tập hợp điểm M là đường tròn: $(C): (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$ có tâm $I(2; 4)$. Bài toán trở thành tìm M là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C) . Phương trình đường thẳng OI là: $2x - y = 0$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \\ y = 2x \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 2)$ và $(3; 6)$

Vậy $\begin{cases} |z|_{\min} = \sqrt{5} & \text{ khi } z = 1 + 2i \\ |z|_{\max} = 3\sqrt{5} & \text{ khi } z = 3 + 6i \end{cases}$.

b) $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1$. ĐS: $\begin{cases} |z|_{\min} = 1 & \text{ khi } z = i \\ |z|_{\max} = 3 & \text{ khi } z = 3i \end{cases}$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z , khi đó $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ.

Tập hợp điểm M là đường tròn: $(C): x^2 + (y-2)^2 = 1$ có tâm $I(0; 2)$. Bài toán trở thành tìm M là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C) . Phương trình đường thẳng OI là: $x = 0$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ là: $(0; 1)$ và $(0; 3)$

Vậy $\begin{cases} |z|_{\min} = 1 & \text{ khi } z = i \\ |z|_{\max} = 3 & \text{ khi } z = 3i \end{cases}$.

c) $|z - 2 + 2i| = 2\sqrt{2}$. ĐS: $\begin{cases} |z|_{\min} = 0 & \text{ khi } z = 0, \\ |z|_{\max} = 4\sqrt{2} & \text{ khi } z = 4 - 4i \end{cases}$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z , khi đó $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ.

Tập hợp điểm M là đường tròn: $(C): (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$ có tâm $I(2; -2)$. Bài toán trở thành tìm M là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C) . Phương trình đường thẳng OI là: $x + y = 0$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8 \\ x + y = 0 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ là: $(0; 0)$ và $(4; -4)$

Vậy $\begin{cases} |z|_{\min} = 0 & \text{ khi } z = 0, \\ |z|_{\max} = 4\sqrt{2} & \text{ khi } z = 4 - 4i \end{cases}$.

d) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{|z - 3 + 4i| + 1}{2|z - 3 + 4i| + 8} \right) = 1$. ĐS: $\begin{cases} |z|_{\min} = 0 & \text{ khi } z = 0 \\ |z|_{\max} = 10 & \text{ khi } z = 6 - 8i \end{cases}$

Từ điều kiện ta có: $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{|z - 3 + 4i| + 1}{2|z - 3 + 4i| + 8} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z - 3 + 4i| + 1}{2|z - 3 + 4i| + 8} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow |z - 3 + 4i| = 5$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z , khi đó $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ.

Tập hợp điểm M là đường tròn : $(C): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ có tâm $I(3; -4)$. Bài toán trở thành tìm M là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C).
Phương trình đường thẳng OI là : $4x + 3y = 0$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ là : $(0; 0)$ và $(6; -8)$

Vậy $\begin{cases} |z|_{\min} = 0 \text{ khi } z = 0 \\ |z|_{\max} = 10 \text{ khi } z = 6 - 8i \end{cases}$.

e) $|z+1| = \left| \frac{z+\bar{z}}{2} + 3 \right|$. ĐS: $|z|_{\min} = 2$ khi $z = -2$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z , khi đó $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ.

Tập hợp điểm M là Parabol : $(P): y^2 = 4x + 8$. Ta có

$OM^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 4x + 8 = (x+2)^2 + 4 \geq 4$. Vậy $OM_{\min} = 2$ khi $x = -2; y = 0$

Vậy $|z|_{\min} = 2$ khi $z = -2$.

f) $|z+1+2i| = 1$. ĐS:

$$\begin{cases} |z|_{\min} = 6 - 2\sqrt{5} \text{ khi } z = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{2-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}i \\ |z|_{\max} = 6 + 2\sqrt{5} \text{ khi } z = \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{-2-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}i \end{cases}$$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z , khi đó $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ.

Tập hợp điểm M là đường tròn : $(C): (x+1)^2 + (y+2)^2 = 1$ có tâm $I(-1; -2)$. Bài toán trở thành tìm M là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C). Phương trình đường thẳng OI là : $2x - y = 0$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ là :

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}; \frac{2-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right); \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}; \frac{-2-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right)$$

Vậy $\begin{cases} |z|_{\min} = 6 - 2\sqrt{5} \text{ khi } z = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{2-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}i \\ |z|_{\max} = 6 + 2\sqrt{5} \text{ khi } z = \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{-2-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}i \end{cases}$.

BT 28. Hãy tìm số phức ω với $\omega = z - (3-2i)$ có môđun nhỏ nhất, trong đó số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-i| = |z+1|$? ĐS: $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức w .

Ta có $\omega = z - (3-2i) \Leftrightarrow z = w + 3 - 2i = x + 3 + y - 2i$

Từ giả thiết: $|z-i| = |z+1| \Leftrightarrow |x+3+y-3i| = |x+4+y-2i| \Leftrightarrow y = -x-1$

$$\text{Mà } |w| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } |w|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ khi } x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2} \text{ hay } w = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

BT 29. Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-1|=1$, tìm số phức z sao cho số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất ?
ĐS: $z = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z , $A(0;1)$ là điểm biểu diễn cho số phức i . Khi đó $|z-i|=MA$. Tập hợp điểm M thỏa mãn $|z-1|=1$ là đường tròn

$(C): (x-1)^2 + y^2 = 1$ có tâm $I(1;0)$. Bài toán trở thành: Tìm M trên đường tròn (C) sao cho AM ngắn nhất. Phương trình đường thẳng IA là: $x+y-1=0$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$

là: $M_1\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); M_2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ta có $AM_1 = 1+\sqrt{2}; AM_2 = \sqrt{2}-1$

$$\text{Vậy } z = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

BT 30. Cho các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-1+2i|=\sqrt{5}$. Tìm số phức w có môđun lớn nhất, biết rằng $w=z+1+i$?
ĐS: $w=4-2i$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức w .

Ta có: $z = (x-1) + (y-1)i$. Từ $|z-1+2i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$. Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn $C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ tâm $I(2;-1)$. Mà $|w|=OM$. Bài toán trở thành tìm M là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (C) . Phương trình đường thẳng OI là: $x+2y=0$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 \\ x+2y=0 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ là: $(0;0); (4;-2)$

$$\text{Vậy } w=4-2i.$$

BT 31. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện: $|2z+1|=|z+\bar{z}+3|$ sao cho số phức $w=z-8$ có môđun nhỏ nhất ?
ĐS: $z=7\pm 4i$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z . Tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $|2z+1|=|z+\bar{z}+3|$ là Parabol $(P): y^2 = 2x+2$. Ta có:

$$|w| = |z-8| = \sqrt{(x-8)^2 + y^2} = \sqrt{(x-8)^2 + 2x+2} = \sqrt{x^2 - 14x + 66} = \sqrt{(x-7)^2 + 17} \geq \sqrt{17}$$

$$\text{Vậy } |w|_{\min} = \sqrt{17} \text{ khi } x=7; y=\pm 4 \text{ hay } z=7\pm 4i.$$

BT 32. Cho số phức $z=x+2yi$, $(x; y \in \mathbb{R})$ thay đổi thỏa mãn $|z|=1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x-y$?
ĐS: $P_{\min} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ và $P_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Từ giả thiết ta có : $x^2 + 4y^2 = 1$. Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có :

$$(x-y)^2 \leq (x^2 + 4y^2) \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq x-y \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Vậy $P_{\min} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ và $P_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

BT 33. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho $|z-1-2i| = 2\sqrt{2}$, (*). Từ đó hãy tìm số phức z thỏa (*) để phần ảo của z bằng 4? ĐS: $\begin{cases} z = -1+4i \\ z = 3+4i \end{cases}$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z . Tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i| = 2\sqrt{2}$ là đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$. Số phức z thỏa mãn (*) để

phần ảo của z bằng 4 là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8 \\ y = 4 \end{cases}$ có nghiệm (x;y)

là $(-1;4);(3;4)$

Vậy $\begin{cases} z = -1+4i \\ z = 3+4i \end{cases}$.

CÁC BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A,B,C không thẳng hàng biểu diễn các số phức a,b,c. Gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ABC và D là điểm đối xứng của A qua G. Các điểm M,G,D lần lượt biểu diễn các số phức m,g,d.

a) Tính các số phức m, g, d theo a, b, c.

b) Nếu thêm giả thiết $|a|=|b|=|c|$, chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu và chỉ nếu $a+b+c=0$.

Giải

a) M là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}(a+b)$.

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow g = \frac{1}{3}(a+b+c)$.

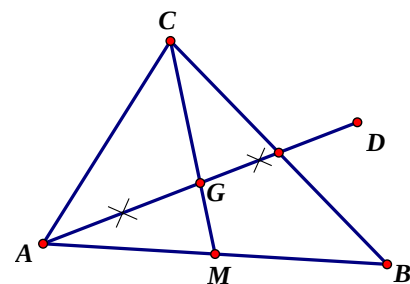
D là điểm đối xứng của A qua G $\Leftrightarrow G$ là trung điểm của AD

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow 2g = a + d \Leftrightarrow d = 2g - a$$

$$\Leftrightarrow d = 2 \cdot \frac{1}{3}(a+b+c) - a$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}a.$$



b) Giả thiết $|a|=|b|=|c| \Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Như vậy tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow O \equiv G \Leftrightarrow g = 0 \Leftrightarrow a+b+c=0$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD. Ba đỉnh A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $a=2-2i, b=-1+i, c=5+mi$ ($m \in \mathbb{R}$).

- a) Tìm số phức d (biểu diễn điểm D);
b) Định m sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật.

Giải

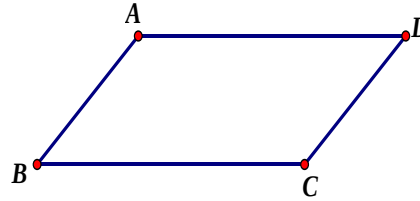
- a) $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow d - c = a - b$$

$$\Leftrightarrow d = a + c - b$$

$$\Leftrightarrow d = 2 - 2i + 5 + mi - (-1 + i)$$

$$\Leftrightarrow d = 8 + (m - 3)i.$$



- b) $ABCD$ là hình chữ nhật

$$\Leftrightarrow AC = BD \Leftrightarrow |c - a| = |d - b|$$

$$\Leftrightarrow |5 + mi - 2 + 2i| = |8 + (m - 3)i + 1 - i| \Leftrightarrow |3 + (m + 2)i| = |9 + (m - 4)i|$$

$$\Leftrightarrow |3 + (m + 2)i|^2 = |9 + (m - 4)i|^2 \Leftrightarrow 3^2 + (m + 2)^2 = 9^2 + (m - 4)^2$$

$$\Leftrightarrow 9 + m^2 + 4m + 4 = 81 + m^2 - 8m + 16 \Leftrightarrow 12m = 84$$

$$\Leftrightarrow m = 7.$$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm M, A, B lần lượt biểu diễn các số phức :

$$z, \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{3} \right) z \text{ và } \frac{i}{\sqrt{3}} z.$$

Chứng minh rằng:

- a) $\forall z \in \mathbb{C}$, tam giác OMA vuông tại M ;
b) $\forall z \in \mathbb{C}$, tam giác MAB là tam giác vuông;
c) $\forall z \in \mathbb{C}$, tứ giác $OMAB$ là hình chữ nhật.

Giải

a) Đặt $a = \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{3} \right) z$ và $b = \frac{i}{\sqrt{3}} z$.

Ta có: $OM = |z|$

$$OA = |a| = \left| \frac{3 + i\sqrt{3}}{3} \right| |z| = \left| 1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right| |z| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} |z| = \frac{2}{\sqrt{3}} |z|$$

$$MA = |a - z| = \left| \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) z - z \right| = \left| \frac{i}{\sqrt{3}} z \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} |z|.$$

Nhận thấy: $OM^2 + MA^2 = |z|^2 + \frac{1}{3}|z|^2 = \frac{4}{3}|z|^2 = OA^2, \forall z \in \mathbb{C}.$

Vậy tam giác OMA vuông tại M .

- b) Ta có:

$$MA = |a - z| = \left| \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) z - z \right| = \left| \frac{i}{\sqrt{3}} z \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} |z|$$

$$MB = |b - z| = \left| \frac{i}{\sqrt{3}} z - z \right| = \left| \frac{i}{\sqrt{3}} - 1 \right| |z| = |z| \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} |z|$$

$$AB = |b - a| = \left| \frac{i}{\sqrt{3}} z - \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) z \right| = |z|.$$

Ta thấy $MA^2 + AB^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^2 + |z|^2 = \frac{1}{3}|z|^2 + |z|^2 = MB^2$ đúng $\forall z \in \mathbb{C}$.

Vậy tam giác MAB vuông tại A với mọi $\forall z \in \mathbb{C}$.

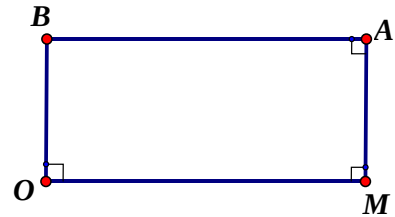
b) Xét tam giác MOB, ta có:

$$OB = |b| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}z\right| = \frac{|z|}{\sqrt{3}}; OM = |z| \text{ và } MB = |b - z| = \frac{2}{\sqrt{3}}|z|.$$

$$\text{Suy ra: } OM^2 + OB^2 = |z|^2 + \frac{4|z|^2}{3} = MB^2.$$

Vậy tam giác MOB vuông tại O với mọi $\forall z \in \mathbb{C}$.

Tứ giác OMAB có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.



Lưu ý:

- Ở trên ta sử dụng tính chất $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật

Ví dụ 4. Gọi A, B, C là ba điểm lần lượt biểu diễn các số phức

$$a = -1 - i, b = -i, c = 1 + ki, (k \in \mathbb{R}).$$

- Định k để ba điểm A, B, C thẳng hàng;
- Xét hàm số $w = f(z) = z^2$. Đặt $a' = f(a), b' = f(b), c' = f(c)$. Tính a', b', c'
- Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức a', b', c' . Định k để A', B', C' là ba điểm thẳng hàng;
- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt biểu diễn các số phức z, z' . Chứng minh rằng $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{z}{z'}$ là số ảo.

Áp dụng: Tính k để tam giác A'B'C' vuông tại A'.

Giải

a) **Định hướng:** Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \alpha \overrightarrow{BC} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow a - b = \alpha(c - b)$

$$\Leftrightarrow \frac{a - b}{c - b} = \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a - b}{c - b} \text{ là số thực.}$$

Như vậy, ta giải bài toán này như sau:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{a - b}{c - b} &= \frac{-1 - i - (-i)}{1 + ki - (-i)} = \frac{-1 - 2i}{1 + (k-1)i} = \frac{(-1 - 2i)(1 - (k-1)i)}{[1 + (k-1)i][1 - (k-1)i]} \\ &= \frac{-1 - 2i + (k-1)i - 2(k-1)}{1 + (k-1)^2} = \frac{1 - 2k + (k-3)i}{1 + (k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a - b}{c - b} \text{ là số thực } \Leftrightarrow k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = 3.$$

b) Ta có

$$a' = f(a) = a^2 = (-1-i)^2 = (1+i)^2 = 1+i^2+2i = 2i$$

$$b' = f(b) = b^2 = i^2 = -1$$

$$c' = f(c) = c^2 = (1+ki)^2 = 1-k^2+2ki.$$

c) **Định hướng**: Trước hết ta cần tìm điều kiện để ba điểm A', B', C' phân biệt $\Leftrightarrow a', b', c'$ đôi một khác nhau (*). Để giải (*) ta dùng phương pháp “phần bù”. Kết hợp điều kiện ba điểm A', B', C' thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{B'C'} = \alpha \overrightarrow{B'A'}, (\alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow c' - b' = \alpha(a' - b') \Leftrightarrow \frac{c' - b'}{a' - b'} \text{ là số thực.}$$

Từ đó ta có lời giải sau:

Hiển nhiên $a' \neq b'$.

$$\text{Ta có } a' = c' \Leftrightarrow 2i = 1 - k^2 + 2ki \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - k^2 = 0 \\ 2k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$$

Suy ra $a' \neq c' \Leftrightarrow k \neq 1$.

$$\text{Ta có } b' = c' \Leftrightarrow -1 = 1 - k^2 + 2ki \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 1 - k^2 \\ 2k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = \emptyset. \text{ Vậy } b' \neq c'.$$

Tóm lại 3 điểm A', B', C' phân biệt $\Leftrightarrow k \neq 1$.

Ta có

$$\frac{c' - b'}{a' - b'} = \frac{2 - k^2 + 2ki}{1 + 2i} = \frac{(2 - k^2 + 2ki)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{1}{5} [2 - k^2 + 4k + (-4 + 2k^2 + 2k)i]. \text{ Suy ra } \frac{c' - b'}{a' - b'} \text{ là số}$$

$$\text{thực} \Leftrightarrow 2k^2 + 2k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 1, k = -2 \Leftrightarrow k = -2 \text{ (vì } k \neq 1).$$

Vậy A', B', C' là 3 điểm phân biệt thẳng hàng $\Leftrightarrow k = -2$.

d) Đặt $z = x + iy, z' = x' + iy'$, và $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt biểu diễn số phức $z, z' \Rightarrow \vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$.

$$\text{Ta có } \frac{z}{z'} = \frac{x + iy}{x' + iy'} = \frac{(x + iy)(x' - iy')}{(x' + iy')(x' - iy')} = \frac{xx' + yy' + (x'y - y'x)i}{x'^2 + y'^2}.$$

$$\text{Như vậy } \frac{z}{z'} \text{ là số ảo } \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Xem tam giác $A'B'C'$ ta có $\overrightarrow{A'C'}$ biểu diễn các số phức $z = c' - a' = 1 - k^2 + (2k - 2)i$ và

$$z' = b' - a' = -1 - 2i$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} \text{ biểu diễn số phức } \frac{z}{z'} &= \frac{(1 - k^2) + (2k - 2)i}{-1 - 2i} = \frac{[(1 - k^2) + (2k - 2)i](-1 + 2i)}{(-1 - 2i)(-1 + 2i)} \\ &= \frac{1}{5} [-1 + k^2 - 2(2k - 2) + (2 - 2k^2 - 2k + 2)i]. \end{aligned}$$

Theo chứng minh trên: tam giác $A'B'C'$ vuông tại $A' \Leftrightarrow \overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \frac{z}{z'}$ là số ảo

$$\Leftrightarrow -1 + k^2 - 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ (loại)} \text{ và } k = 3 \Leftrightarrow k = 3.$$

Ví dụ 5. Cho số phức $z = m + (m - 3)i, m \in \mathbb{R}$

a) Tìm m để biểu diễn số phức nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ hai $y = -x$

b) Tìm m để biểu diễn số phức nằm trên Hyperbol $y = -\frac{2}{x}$

c) Tìm m để khoảng cách của điểm biểu diễn số phức đến gốc tọa độ nhỏ nhất.

Giải

a) Gọi $M(m; m-3)$ là điểm biểu diễn số phức $z = m + (m-3)i$

M nằm trên đường thẳng $y = -x \Leftrightarrow m-3 = -m \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

b) M nằm trên Hyperbol $y = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow m-3 = -\frac{2}{m}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

c) Ta có:

$$OM = \sqrt{m^2 + (m-3)^2} = \sqrt{2m^2 - 6m + 9} = \sqrt{2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}}$$

$$\Rightarrow OM_{\min} = \sqrt{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 6. Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $\frac{4i}{i-1}$; $(1-i)(1+2i)$; $\frac{2+6i}{3-i}$

a) Chứng minh ABC là tam giác vuông cân.

b) Tìm số phức biểu diễn bởi điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông.

Giải

a) Ta có

$$\frac{4i}{i-1} = \frac{4i(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = 2-2i \Rightarrow A(2;-2)$$

$$(1-i)(1+2i) = 3+i \Rightarrow B(3;1)$$

$$\frac{2+6i}{3-i} = 2i \Rightarrow C(0;2).$$

$$\text{Nhận thấy: } \begin{cases} BA = BC \\ AC^2 = AB^2 + BC^2 \end{cases} \Rightarrow ABC \text{ vuông cân tại B.}$$

b) Gọi D là đỉnh thứ tư của hình vuông ABCD

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (-1;-3) = (x_D; y_D - 2) \Leftrightarrow D(-1;-1).$$

Vậy D biểu diễn số phức $-1-i$.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng phức cho các điểm: O (gốc tọa độ), A điểm biểu diễn số 1, B điểm biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z' \neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz' . Chứng minh rằng: Tam giác OAB và tam giác OA'B' đồng dạng.

Giải

Vì z không phải là số thực nên các điểm O, A, B theo thứ tự biểu diễn các số $0, 1, z$ là các đỉnh của tam giác. Với $z' \neq 0$, xét các điểm A', B' theo thứ tự biểu diễn các số z', zz' thì ta có:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{|z'|}{1} = |z'|, \quad \frac{OB'}{OB} = \frac{|zz'|}{|z|} = |z'|, \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{|zz' - z'|}{|z - 1|} = \frac{|z'(z - 1)|}{|z - 1|} = |z'|$$

Vậy tam giác $OA'B'$ đồng dạng với tam giác OAB .

Lưu ý: Ở trên ta đã sử dụng các tính chất

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- Dựa vào định nghĩa tam giác đồng dạng

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k \text{ thì tam giác } OA'B' \text{ đồng dạng với tam giác } OAB.$$

Ví dụ 8. Biết A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số:

$$-1+i, \quad -1-i, \quad 2i, \quad 2-2i.$$

- a) Tìm các số z_1, z_2, z_3, z_4 theo thứ tự biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$.
- b) Tính $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_3}{z_4}$ và từ đó suy ra A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Tâm đường tròn biểu diễn số phức nào?

Giải

a) Ta có: $A(-1;1), B(-1;-1), C(0;2), D(2;-2)$

Lúc đó: $\overrightarrow{AC} = (1,1), \overrightarrow{AD} = (3;-3), \overrightarrow{BC} = (1,3), \overrightarrow{BD} = (3,-1)$

Do đó: $z_1 = 1+i, z_2 = 3-3i, z_3 = 1+3i, z_4 = 3-i$.

b) Ta có:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{3-3i} = \frac{1}{3}i \text{ là một số ảo nên } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ hay } AC \perp AD \quad (1)$$

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{1+3i}{3-i} = i \text{ là số ảo nên } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ hay } BC \perp BD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra A, B, C, D nội tiếp đường tròn đường kính CD . Do đó, tâm là trung điểm của CD nên nó biểu diễn số phức $\frac{2i+(2-2i)}{2} = 1$

Ví dụ 9. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau:
{Đường thẳng }

$$a) |z+i| = |z-i|; \quad b) \left| \frac{z+1-3i}{z-1+i} \right| = 1; \quad c) z_0 z + \overline{z_0 z} + 1 = 0 \text{ với } z_0 = 1-i.$$

Giải

a) **Cách 1.** Đặt $a = -i$ và $b = i$.

Gọi $A(0;-1)$ và $B(0;1)$ lần lượt biểu diễn các số phức a và b , suy ra

$$|z+i| = |z-a| = MA \text{ và } |z-i| = |z-b| = MB.$$

Ta có $|z+i|=|z-i| \Leftrightarrow MA=MB \Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực của AB, đó chính là trục Ox.

Vậy tập hợp các điểm M là trục Ox.

Cách 2. Đặt $z=x+yi, (x,y \in \mathbb{R})$

Lúc đó:

$$\begin{aligned} |z+i|=|z-i| &\Leftrightarrow |x+yi+i|=|x+yi-i| \Leftrightarrow |x+(y+1)i|=|x+(y-1)i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2 \\ &\Leftrightarrow 4y=0 \Leftrightarrow y=0. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là trục Ox.

b) **Cách 1.** Ta có:

$$\left| \frac{z+1-3i}{z-1+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z+1-3i|=|z-1+i|, (1)$$

Đặt $a=-1+3i$ biểu diễn bởi các điểm A(-1;3) và $b=1-i$ được biểu diễn bởi điểm B(1;-1). Ta có (1) $\Leftrightarrow |z-a|=|z-b| \Leftrightarrow MA=MB$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực đoạn AB.

Cách 2. Đặt $z=x+yi, (x,y \in \mathbb{R})$ Lúc đó:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z+1-3i}{z-1+i} \right| = 1 &\Leftrightarrow |z+1-3i|=|z-1+i| \Leftrightarrow |x+yi+1-3i|=|x+yi-1+i| \\ &\Leftrightarrow |x+1+(y-3)i|=|x-1+(y+1)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=(x-1)^2+(y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-6y+9=x^2-2x+1+y^2+2y+1 \\ &\Leftrightarrow 2x-6y+10=-2x+2y+2 \Leftrightarrow 4x-8y+8=0 \Leftrightarrow x-2y+2=0 \end{aligned}$$

Vậy tập điểm M là đường thẳng $x-2y+2=0$.

Lời bình: Ở trên ta đã sử dụng công thức $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. Phương trình đường thẳng

$x-2y+2=0$ chính là phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB.

c) Với $z_0=1-i$, đặt $z=x+iy, (x,y \in \mathbb{R})$, ta có:

$$z_0 \cdot z = (1-i)(x+iy) = x+y+(y-x)i; \quad \overline{z_0} \cdot z = x+y-(y-x)i.$$

$$\text{Như vậy } z_0 z + \overline{z_0} z + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(x+y)+1=0 \Leftrightarrow 2x+2y+1=0.$$

Tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $2x+2y+1=0$.

Ví dụ 10. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau: {Đường tròn }

a) $|z-(3-4i)|=2$;

b) $|z-i|=|(1+i)z|$

c) $|z|^2+2iz+2i^3\bar{z}=0$;

d) $|2iz-1|=\sqrt{5}$.

Giải

a) Đặt $z=x+yi, (x,y \in \mathbb{R})$. Lúc đó:

$$|z - (3 - 4i)| = 2 \Leftrightarrow |x + yi - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa đề bài là đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 2$.

b) Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Lúc đó:

$$|z - i| = |(1 + i)z| \Leftrightarrow |x + yi - i| = |(1 + i)(x + yi)| \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x - y) + (x + y)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - y)^2 + (x + y)^2} \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa đề bài là đường tròn tâm $I(0; -1)$ bán kính $R = \sqrt{2}$.

c) Ta có $|z|^2 + 2iz + 2i^3\bar{z} = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + 2iz - 2i\bar{z} = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + 2i(z - \bar{z}) = 0 \quad (1)$

Giả sử $z = x + yi$, thay vào (1) ta được:

$$x^2 + y^2 + 2i(x + iy - x + iy) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

Vậy tập hợp các điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0; 2)$, bán kính $R = 2$.

d) Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Suy ra:

$$|2iz - 1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2i(x + yi) - 1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |-2y - 1 + 2xi| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-2y - 1)^2 + (2x)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Vậy tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức đã cho là một đường tròn có tâm $I\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 11. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau: **{Elip}**: $|z - 1| + |z + 1| = 4$.

Giải

Đặt $a = 1$ và $b = -1$, lần lượt biểu diễn bởi các điểm $A(1; 0)$ và $B(-1; 0)$.

Ta có $|z - 1| + |z + 1| = 4 \Leftrightarrow |z - a| + |z - b| = 4 \Leftrightarrow MA + MB = 4$.

Vậy tập hợp các điểm M là elip (E) nhận A, B là hai tiêu điểm, có độ dài trục lớn là 4.

Ví dụ 4. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau: **{Ảo thực}**

a) $\frac{2z+1}{z-1}$ là số ảo; b) $\frac{z+1}{z-2i}, (z \neq 2i)$ là số thực.

Giải

a) Đặt $z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$. Với $z \neq 1$, ta có:

$$\frac{2z+1}{z-1} = \frac{2x+2yi+1}{x+iy-1} = \frac{(2x+1+2yi)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)} = \frac{(2x+1)(x-1)+2y^2+i[2y(x-1)-y(2x+1)]}{(x-1)^2+y^2}$$

$\frac{2z+1}{z-1}$ là số ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của $\frac{2z+1}{z-1}$ bị triệt tiêu

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-1)+2y^2=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1+2y^2=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{x}{2}+y^2-\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\right)+y^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16}.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C), tâm $I\left(\frac{1}{4};0\right)$ bán kính $R=\frac{3}{4}$, bỏ đi điểm A(1;0).

b) Đặt $z=x+iy$ ($x,y \in \mathbb{R}$). Với $z \neq 2i$, ta có:

$$\frac{z+1}{z-2i} = \frac{x+1+iy}{x+(y-2)i} = \frac{(x+1+iy)(x-(y-2)i)}{(x+(y-2)i)(x-(y-2)i)} = \frac{x(x+1)+y(y-2)+i[xy-(x+1)(y-2)]}{x^2+(y-2)^2}$$

$\frac{z+1}{z-2i}$ là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo bị triệt tiêu

$$\Leftrightarrow xy-(x+1)(y-2)=0 \Leftrightarrow xy-(xy-2x+y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-y+2=0 \Leftrightarrow y=2x+2.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $y=2x+2$, bỏ đi điểm A(0;2) vì $z \neq 2i$.

Ví dụ 12. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $z' = 2z+3-i$, với

$$|3z+i|^2 \leq z\bar{z}+9$$

Định hướng: Đặt $\begin{cases} z=a+bi \\ z'=x+yi \end{cases} (a,b,x,y \in \mathbb{R})$

$$\text{Khi đó } z' = 2z+3-i \Leftrightarrow x+yi = (2a+3)+(2b-1)i \Rightarrow \begin{cases} x=2a+3 \\ y=2b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{x-3}{2} \\ b=\frac{y+1}{2} \end{cases}$$

Bài toán yêu cầu tìm điểm biểu diễn z' nên cái sau cùng ta cần đưa về một biểu thức liên hệ x,y .

Trước hết, từ biểu thức $|3z+i|^2 \leq z\bar{z}+9$ ta biến đổi về bất đẳng thức theo a, b . Sau đó thế $a=\frac{x-3}{2}, b=\frac{y+1}{2}$ ta được biểu thức chứa x,y .

Giải

Đặt $\begin{cases} z=a+bi \\ z'=x+yi \end{cases} (a,b,x,y \in \mathbb{R})$

$$\text{Khi đó } z' = 2z+3-i \Leftrightarrow x+yi = (2a+3)+(2b-1)i \Rightarrow \begin{cases} x=2a+3 \\ y=2b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{x-3}{2} \\ b=\frac{y+1}{2} \end{cases}$$

Theo đề, ta có:

$$|3z+i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9 \Leftrightarrow 9a^2 + (3b+1)^2 \leq a^2 + b^2 + 9 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 3b - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 + \frac{3}{2}(y+1) - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 \leq \frac{73}{16}$$

Vậy quỹ tích biểu diễn số phức z là hình tròn có tâm $I\left(3; \frac{-7}{4}\right)$ và bán kính

$$R = \frac{\sqrt{73}}{4}.$$

Ví dụ 13. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Tìm tập hợp biểu diễn số phức $w=2z-i$.

Giải

Gọi $w=x+yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có: $w=2z-i \Leftrightarrow z = \frac{w+i}{2} \Leftrightarrow z = \frac{x}{2} + \frac{y+1}{2}i \Rightarrow z-1 = \frac{x-2}{2} + \frac{y+1}{2}i$

$$\text{Theo bài ra: } |z-1|=2 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(2;-1)$ bán kính

$$R=4.$$

Bình luận: Hầu hết các bài toán số phức đều làm theo cách tự nhiên như lời giải trên (gọi $w=x+yi$). Tuy nhiên các em cũng có thể tham khảo thêm cách sau:

$w=2z-i \Leftrightarrow w+i-2=2(z-1) \Leftrightarrow |w-(2-i)|=2|z-1|=4 \Rightarrow$ tập hợp các điểm w là đường tròn có tâm $(2;-1)$, bán kính 4 trong mặt phẳng phức.

Ví dụ 14. Hãy xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $1 < |z-i| < 2$. **{Hình vành khăn}**

Giải

Giả sử số phức z có dạng: $z=x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } |z-i| = |x+(y-1)i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\text{Do đó: } 1 < |z-i| < 2 \Leftrightarrow 1 < |z-i|^2 < 4 \Leftrightarrow 1 < x^2 + (y-1)^2 < 4$$

Gọi $(C_1), (C_2)$ là hai đường tròn tâm $I(0;1)$ và có bán kính lần lượt là $R_1=1, R_2=4$.

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là phần nằm giữa hai đường tròn $(C_1), (C_2)$.

Ví dụ 15. Tìm tập hợp điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$

Giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.

$$\text{Khi đó } 2|z-i| = |z-\bar{z}+2i| \Leftrightarrow 2|x+(y-1)i| = |2(y+1)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(y+1)^2} \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

Vậy tập hợp điểm M là parabol $(P): y = \frac{x^2}{4}$.

Ví dụ 16. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$

Giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) ta được:

$$z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z| \Leftrightarrow x + yi + 3x - 3yi = 2\sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{3x^2 + 3y^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ -2y = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ y^2 = 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z cần tìm là phần đường thẳng $y = -\sqrt{3}x$ với $x \geq 0$.

Ví dụ 17. Xác định tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) $\frac{z+i}{z-i}$ là số thực dương với $z \neq i$;

b) $z^2 = (\bar{z})^2$

c) $z^2 + 2z + 5 \in \mathbb{R}^+$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} > 1$.

Giải

a) Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $\frac{z+i}{z-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} = \frac{x^2 + y^2 - 1 + 2xi}{x^2 + (y-1)^2}$

$\frac{z+i}{z-i}$ là số thực dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |y| > 1 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm phải tìm là hai tia Ay và $A'y'$ trên trục tung trừ hai điểm $A(0;1)$ và $A'(0;-1)$.

b) Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có:

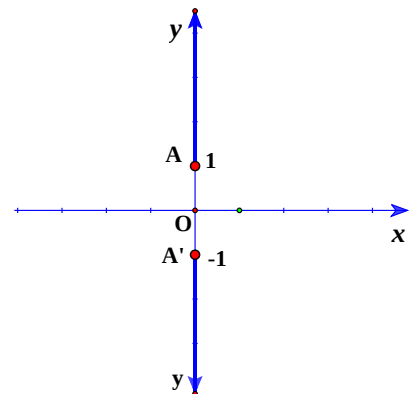
$$z^2 = (\bar{z})^2 \Leftrightarrow (x + yi)^2 = (x - yi)^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi$$

$$\Leftrightarrow 4xyi = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là các trục tọa độ.

c) Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$z^2 + 2z + 5 = (x + yi)^2 + 2(x + yi) + 5 = x^2 - y^2 + 2x + 5 + 2y(x + 1)i$$



$$\text{Để } z^2 + 2z + 5 \in \mathbb{R}^+ \text{ thì } \begin{cases} 2y(x+1)=0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2 + 2x + 5 > 0 \\ x=-1 \\ y^2 < 4 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa đề bài là $\begin{cases} x=-1 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$.

d) Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có:

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|+2}{4|z-2|-1} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow |z-2| > 7$$

$$\Leftrightarrow |x+yi-2| > 7 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 > 49$$

Vậy tập hợp cả các điểm thỏa mãn bài toán nằm ngoài hình tròn tâm $I(2;0)$, bán kính $R=7$.

Ví dụ 18. Gọi M và M' là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức z và

$z' = \frac{1}{z}, (z \neq 0)$. Đặt $z = x + iy$ và $z' = x' + iy', (x, y, x', y' \in \mathbb{R})$

a) Tính x', y' theo x, y và tính x, y theo x', y' .

b) Cho M di động trên đường tròn (C) tâm $A(-1;1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. Tìm tập hợp các điểm M' .

c) Cho M di động trên đường thẳng $d: y = x + 1$, tìm tập hợp các điểm M' .

Giải

$$\text{a) Ta có: } z' = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{z \cdot z} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{|z|^2} \Leftrightarrow x' + y'i = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Tương tự, ta có:

$$z' = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z'} \Leftrightarrow z = \frac{1}{z'} \Leftrightarrow z = \frac{z'}{z' \cdot z'} = \frac{z'}{|z'|^2} \Leftrightarrow x + iy = \frac{x' + iy'}{x'^2 + y'^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \end{cases}$$

b) Đường tròn (C) tâm $A(-1;1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$ có phương trình

$$(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0.$$

Điểm $M \in (C) \Leftrightarrow$ tọa độ $M(x; y)$ thỏa mãn phương trình:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + 2x - 2y}{x^2 + y^2} = 0 \quad (\text{Vì } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ do } z \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 2x' - 2y' + 1 = 0 \quad (\text{vì } \frac{x}{x^2 + y^2} = x' \text{ và } \frac{y}{x^2 + y^2} = y' \text{ theo kết quả của câu}$$

a))

Suy ra tọa độ của điểm $M'(x'; y')$ thỏa mãn phương trình $2x' - 2y' + 1 = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M' là đường thẳng có phương trình $2x - 2y + 1 = 0$.

c) Điểm M di động trên đường thẳng $d: y = x + 1$ nên tọa độ của $M(x; y)$ thỏa mãn

$$y = x + 1 \Leftrightarrow \frac{y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} + 1 \quad (\text{vì theo câu a ta có } y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \text{ và}$$

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}) \Leftrightarrow y' = x' + x'^2 + y'^2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + x' - y' = 0.$$

Suy ra tọa độ của $M'(x'; y')$ thỏa mãn phương trình: $x'^2 + y'^2 + x' - y' = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M' là đường tròn (C') có phương trình: $x^2 + y^2 + x - y = 0$.

Ví dụ 19. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện

$$a) \begin{cases} y - x \leq 1 \\ y \geq 2x^2 \end{cases}; \quad b) 1 < |z| \leq 2.$$

Hướng dẫn giải

a) Vẽ đường thẳng $d: y - x = 1$ và Parabol: $y = 2x^2$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y - x \leq 1 \\ y \geq 2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ y \geq 2x^2 \end{cases}.$$

Vậy tập hợp điểm M là phần giới hạn bởi đường thẳng d và (P) .

b) $1 < x^2 + y^2 \leq 4$. Vậy tập hợp điểm là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm O bán kính 1 và 2, không lấy đường bên trong.

Chú ý: Với câu c, giả sử đề bài thêm yêu cầu: tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $1 < |z| \leq 2$ và phần thực không âm thì

$$y_{\text{cbt}} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm O bán kính 1 và 2, chỉ lấy phần bên phải trục tung và không lấy bên trong.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phần thực là 2 là:

A. $x = -2$

B. $x = 2$

C. $x = 1$

D. $x = -1$

Hướng dẫn giải

Số phức z có phần thực là 2 nên $z = 2 + bi \Rightarrow M(2; b)$ là điểm biểu diễn của số phức z

Mà tập hợp các điểm $M(2; b)$ là đường thẳng $x = 2$ nên chọn B.

Câu 2. Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phần ảo bằng 3 là:

A. $x = 3$

B. $y = -3$

C. $y = 3$

D. $x = 2$

Hướng dẫn giải:

Số phức z có dạng $z = x + yi$. Theo giả thiết $y = 3$ nên tập hợp điểm biểu diễn z là đường thẳng $y = 3$

Câu 3. Trong mặt phẳng phức tìm tập hợp điểm $M(z)$ thỏa mãn $|z + 1 - i| \leq 3$

A. Đường thẳng $y = 3$

B. Đường thẳng $x = -3$

C. Đường thẳng $y + x = 3$

D. Hình tròn tâm $I(-1; 1)$, $R = 3$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt $z = x + yi \Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Ta có: $|z + 1 - i| \leq 3 \Leftrightarrow |x + 1 + y - 1i| \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} \leq 3$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 9 \Rightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn z là hình tròn tâm

$I(-1; 1)$, $R = 3$

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - (8 - 9i)| = 3$ là đường tròn có tọa độ tâm I và bán kính R lần lượt là:

A. $I(8; -9)$, $R = 3$

B. $I(8; 9)$, $R = 3$

C. $I(8; 9)$, $R = 3$

D. $I(-8; -9)$, $R = 3$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $z = x + yi \Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Ta có: $|z - (8 - 9i)| = 3 \Leftrightarrow |x - 8 + (y + 9)i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 8)^2 + (y + 9)^2} = 3$

$\Leftrightarrow (x - 8)^2 + (y + 9)^2 = 9 \Rightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn z là đường tròn tâm $I(8; -9)$, $R = 3$

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là một đường thẳng có phương trình:

A.

B. C.

D.

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + yi \Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Ta có : $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i| \Leftrightarrow 2|x+(y-1)i| = |2yi+2i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = |y+2|$
 $\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1 = y^2+4y+4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}$

Đề nghị sửa câu dẫn: thay đường thẳng thành parabol.

Câu 6. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z+2-3i}{z-4+i} \right| = 1$ là một đường thẳng có phương trình:

A. $3x - y - 1 = 0$

B.

C.

D.

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + yi \Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Ta có: $\left| \frac{z+2-3i}{z-4+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |x+2+ (y-3)i| = |x-4+ (-y+1)i|$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(1-y)^2} \Leftrightarrow 3x-y-1=0$

Câu 7. Tập nghiệm biểu diễn số phức z thỏa $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$ là:

A. Đường tròn

B. Điểm

C. Elip

D. Đường thẳng

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi \Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Ta có: $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |x+(y+1)i|$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow y=0$ nên tập hợp điểm biểu diễn z là đường thẳng.

Câu 8. Số phức $z = 2 + 3i$ có điểm biểu diễn là:

A. (2; 3)

B. (-2; -3)

C. (2; -3)

D. (-2; 3)

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 9. Điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{1}{2-3i}$ là:

- A. $2; -3$ **B.** $\left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right)$ C. $3; -2$ D. $4; -1$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $z = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{2-3i} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$ nên điểm biểu diễn z là $\left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right)$

Câu 10. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện số phức $|zi - (2+i)| = 2$ là :

- A. $3x + 4y - 2 = 0$ B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ D. $x + 2y - 1 = 0$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đặt $z = x + yi \Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Ta có: $|zi - (2+i)| = 2 \Leftrightarrow |x + yi \cdot i - 2 - i| = 2 \Leftrightarrow |-y - 2 + x - i| = 2$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(y+2)^2 + (x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

Câu 11. Cho số phức $z \neq 0$. Biết rằng số phức nghịch đảo của z bằng số phức liên hợp của nó. Trong các kết luận nào đúng:

- A. $z \in \mathbb{R}$ B. z là một số thuần ảo
C. $|z| = 1$ D. $|z| = 2$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Câu 12. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 1 + 5i$, $z_3 = 4 + i$. Số phức với điểm biểu diễn D sao cho tứ giác ABCD là một hình bình hành là:

- A. $2 + 3i$ **B.** $2 - i$ C. $2 + 3i$ D. $3 + 5i$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $A(-1;3), B(1;5), C(4;1)$

Gọi $D(x;y)$. Khi đó ABCD là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+1=4-x \\ 5-3=1-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Suy ra D là điểm biểu diễn cho số phức $z = 2 - i$

Câu 13. Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 . Khi đó độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ bằng:

- A. $|z_1| - |z_2|$ B. $|z_1| + |z_2|$ C. $|z_1 - z_2|$ D. $|z_1 + z_2|$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\text{Gọi } z_1 = a_1 + b_1i; z_2 = a_2 + b_2i \Rightarrow A(a_1; b_1), B(a_2; b_2) \Rightarrow AB = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} = |z_1 - z_2|$$

Câu 14. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z , biết $|3zi + 4| = \sqrt{2}$ là

- A. Điểm B. Đường thẳng C. Đường tròn D. Elip

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = x + yi \Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

$$\text{Ta có: } |3zi + 4| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |3x + yi + 4| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |4 - 3y + 3xi| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4 - 3y)^2 + (3x)^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn z là đường tròn.

Câu 15. Biết $|z - i| = |1 + i z|$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phương trình?

- A. $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$ B. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$
C. $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$ D. $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đặt $z = x + yi \Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Ta có:

$$|z - i| = |1 + i z| \Leftrightarrow |x + y - 1 + i| = |1 + i x + y i| \Leftrightarrow |x + y - 1 + i| = |x - y + y + x i|$$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$$

Câu 16. Số phức $z = 2 - 3i$ có điểm biểu diễn là:

- A. (2; 3) B. (-2; -3) C. (2; -3) D. (-2; 3)

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Vì $z = 2 - 3i$ nên z có điểm biểu diễn là (2; -3)

Câu 17. Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự là các điểm biểu diễn các số phức $\frac{4i}{i-1}$; $1-i$; $1+2i$; $\frac{2+6i}{3-i}$. Tam giác ABC

- A. Vuông B. Vuông cân C. Đều D. Cân

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Số phức } z_1 = \frac{4i}{i-1} = \frac{4i \cdot i+1}{i-1 \cdot i+1} = \frac{4i^2 + 4i}{-2} = 2 - 2i \text{ nên } z_1 \text{ có điểm biểu diễn là } A(2; -2).$$

$$\text{Số phức } z_2 = 1 - i \cdot 1 + 2i = 3 + i \text{ nên } z_2 \text{ có điểm biểu diễn là } B(3; 1).$$

$$\text{Số phức } z_3 = \frac{2+6i}{3-i} = \frac{(2+6i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = 2i \text{ nên } z_3 \text{ có điểm biểu diễn là } C(0; 2).$$

$$\overrightarrow{AB} = (1; 3) \Rightarrow AB = \sqrt{10}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC} = (-2; 4) \Rightarrow AC = \sqrt{20}$$

$$\overrightarrow{BC} = (-3; 1) \Rightarrow BC = \sqrt{10}$$

$$\text{Nhận thấy } \begin{cases} AB = BC \\ AB^2 + BC^2 = AC^2 \end{cases} \text{ nên tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } B.$$

Câu 18. Điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{1}{2-3i}$ là:

- A. (2; -3) B. $(\frac{2}{13}; \frac{3}{13})$ C. (3; -2) D. (4; -1)

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$z = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \text{ nên } z \text{ có điểm biểu diễn là } \left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right).$$

Câu 19. Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 . Khi đó độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ bằng:

- A. $|z_1| - |z_2|$ B. $|z_1| + |z_2|$ C. $|z_2 - z_1|$ D. $|z_2 + z_1|$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi số phức $z_1 = x_1 - y_1 i; z_2 = x_2 - y_2 i$

Khi đó điểm biểu diễn của số phức z_1 là $A(x_1; y_1)$, của số phức z_2 là $B(x_2; y_2)$.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |z_2 - z_1|$$

Câu 20. Trong mặt phẳng phức cho $\triangle ABC$. Biết rằng A, B lần lượt biểu diễn các số phức $z_1 = 2 - 2i$; $z_2 = -2 + 4i$. Khi đó, điểm C biểu diễn số phức nào sau đây để $\triangle ABC$ vuông tại C ?

- A. $z = 2 - 4i$ B. $z = -2 + 2i$ C. $z = 2 + 4i$ D. $z = 2 - 2i$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Theo phương pháp tự luận

$z_1 = 2 - 2i$ nên z_1 có điểm biểu diễn $A(2; -2)$.

$z_2 = -2 + 4i$ nên z_2 có điểm biểu diễn $B(-2; 4)$.

Gọi $C(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$.

Tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (2 - x)(-2 - x) + (-2 - y)(4 - y) = 0$.

Nhận thấy dữ kiện chưa đủ để giải toán.

Cách 2: Theo phương pháp trắc nghiệm.

Thay từng đáp án và chọn C.

Vì $z = 2 + 4i$ nên điểm biểu diễn của số phức z là $C(2; 4)$.

Nhận thấy $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ nên tam giác ABC vuông tại C .

Câu 21. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|zi - (2 + i)| = 2$ là

- A. $z + 1 - i = 4$ B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ D. $x + 2y - 1 = 0$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $z = x + yi$

Ta có:

$$\begin{aligned} |zi - (2 + i)| = 2 &\Leftrightarrow |(x + yi)i - (2 + i)| = 2 \Leftrightarrow |-y - 2 + (x - 1)i| = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(-y - 2)^2 + (x - 1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Câu 22. Biết $|z - i| = |(1 + i)z|$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phương trình?

A. $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$

B.

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$

C. $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$

D.

$x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $z = x + yi$

Ta có:

$$\begin{aligned} |z - i| &= |(1 + i)z| \Leftrightarrow |x + yi - i| = |1 + i| |x + yi| \Leftrightarrow |x + y - 1 + i| = |x - y + x + y + i| \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Câu 23. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức

$z_1 = -1 + 3i, z_2 = 1 + 5i, z_3 = 4 + i$. Số phức với điểm biểu diễn D sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành là:

A. $1 - 2i$

B. $2 - i$

C. $1 + 2i$

D. $-2 + i$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Các số phức $z_1 = -1 + 3i, z_2 = 1 + 5i, z_3 = 4 + i$ có điểm biểu diễn là

$A(-1; 3), B(1; 5), C(4; 1)$

Gọi $D(x, y)$ là điểm biểu diễn của số phức z sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành

$ABCD$ là một hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} (*)$

Mà $\overrightarrow{AB} = (2; 2); \overrightarrow{DC} = (4 - x; 1 - y)$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = 2 \\ 1 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy số phức $z = 2 - i$

Câu 24. Trên mặt phẳng tọa độ, cho số phức $z = x + yi$ $x, y \in \mathbb{R}$ các điểm biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng nhau qua

- A. trục Ox . B. trục Oy . C. gốc tọa độ O . D. đường thẳng $y = x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Số phức $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$ có điểm biểu diễn lần lượt là: (x, y) và $(x, -y)$

Ta thấy tập hợp các điểm biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng nhau qua trục Ox

Câu 25. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn là

- A. $(6; -7)$. B. $(6; 7)$. C. $(-6; 7)$. D. $(-6; -7)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vì $z = 6 + 7i$ nên số phức liên hợp là $\bar{z} = 6 - 7i$

Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn là $(6; -7)$.

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$. Số phức z có mô đun nhỏ nhất là:

- A. $\frac{-3}{5} - \frac{3}{10}i$ B. $\frac{-3}{5} + \frac{3}{10}i$ C. $\frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$ D. $\frac{3}{5} - \frac{3}{10}i$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Ta có :

$$\begin{aligned} |z - 1 + i| &= |\bar{z} + 1 - 2i| \Leftrightarrow |x + yi - 1 + i| = |x - yi + 1 - 2i| \\ \Leftrightarrow |x - 1 + y + 1i| &= |x + 1 - y + 2i| \Leftrightarrow x - 1^2 + y + 1^2 = x + 1^2 + y + 2^2 \\ \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 &= 0 \Leftrightarrow y = -2x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Lại có :

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{5x^2 + 6x + \frac{9}{4}} \\ &= \sqrt{5\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{9}{20}} \geq \sqrt{\frac{9}{20}} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi : $x = \frac{-3}{5}$

Với $x = \frac{-3}{5}$ thì $y = \frac{-3}{10}$. Vậy số phức cần tìm $z = \frac{-3}{5} - \frac{3}{10}i$.

Câu 27. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn: $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$ là:

A. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn

Gọi $z = x + yi$.

Ta có: $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow |z^2 + 1| = 2|z| \Leftrightarrow |x + yi|^2 + 1 = 2|x + yi|$
 $\Leftrightarrow$

Câu 28. Cho các số phức: $z_1 = 3i$; $z_2 = -1 - 3i$; $z_3 = -2 - 3i$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là các điểm biểu diễn tương ứng của 3 số phức đã cho trên mặt phẳng Oxy . Khi đó

$\max \left\{ \left| \vec{OA_1} \right|, \left| \vec{OA_2} \right|, \left| \vec{OA_3} \right| \right\}$ là

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{13}$

C. $\sqrt{10}$

D. 3

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$z_1 = 3i$; $z_2 = -1 - 3i$; $z_3 = -2 - 3i$, các điểm biểu diễn của 3 số phức đã cho lần lượt là

$A_1(0; 3), A_2(-1; -3), A_3(-2; -3)$.

Khi đó $|\vec{OA_1}| = 3, |\vec{OA_2}| = \sqrt{10}, |\vec{OA_3}| = \sqrt{13}$

Vậy $\max \left\{ \left| \vec{OA_1} \right|, \left| \vec{OA_2} \right|, \left| \vec{OA_3} \right| \right\} = \sqrt{13}$

Câu 29. Cho các số phức: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$; $z_2 = -2 + \sqrt{2}i$; $z_3 = -2 - \sqrt{3}i$. Điểm biểu diễn tương ứng của ba số phức trong mặt phẳng Oxy gần gốc tọa độ nhất có tọa độ là

- A. $1; \sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}; 1$ C. $-2; -\sqrt{3}$ D. $1; -\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -2 + \sqrt{2}i, z_3 = -2 - \sqrt{3}i$. Các điểm biểu diễn của 3 số phức đã cho lần lượt là $A(1; \sqrt{3}), B(-2; \sqrt{2}), C(-2; -\sqrt{3})$.

Ta có: $OA = 2, OB = \sqrt{6}, OC = \sqrt{7}$

Vậy điểm $A(1; \sqrt{3})$ gần gốc tọa độ nhất.

Câu 30. Biết điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy thuộc Elip:

$16x^2 + 25y^2 = 400$. Giá trị lớn nhất của mô đun số phức z là

- A. $\frac{\sqrt{391}}{4}$ B. 5 C. 25 D. $\frac{391}{16}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi số phức z có điểm biểu diễn là $A(x, y)$. Lại có $A(x, y)$ thuộc Elip: $16x^2 + 25y^2 = 400$

Nên $y^2 = 16 - \frac{16}{25}x^2, x^2 = 25 - \frac{25}{16}y^2$

Ta có: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - \frac{16}{25}x^2 + 16}$
 $\Leftrightarrow |z|^2 = \frac{9}{25}x^2 + 16$

Mà $x^2 = 25 - \frac{25}{16}y^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 25$.

Nên $|z|^2 \leq 25$ hay $|z| \leq 5$. Giá trị lớn nhất của số phức z bằng 5.

Câu 31. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 và số phức $k = x + iy$ trên mặt phẳng phức. Để tam giác MNP đều thì số phức k là:

- A. $k = 1 + \sqrt{27}$ hay $k = 1 - \sqrt{27}$ B. $k = 1 + \sqrt{27}i$ hay $k = 1 - \sqrt{27}i$
 C. $k = \sqrt{27} - i$ hay $k = \sqrt{27} + i$ D. Một đáp số khác.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$z^2 - 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + 3i \\ z_2 = 1 - 3i \end{cases}$$

Điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 và số phức $k = x + iy$ trên mặt phẳng phức là

$$M(1;3), N(1;-3), P(x;y)$$

Tam giác MNP đều nên ta có:

$$\begin{cases} MN^2 = MP^2 \\ MP^2 = NP^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 = (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 26 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 - \sqrt{17} \\ x = 1 + \sqrt{17} \end{cases}$$

Vậy $k = 1 + \sqrt{27}$ hay $k = 1 - \sqrt{27}$.

Câu 32. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $5 + 8i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $-5 + 8i$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- A. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục hoành.
- B. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục tung.
- C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O .
- D. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Hướng dẫn giải

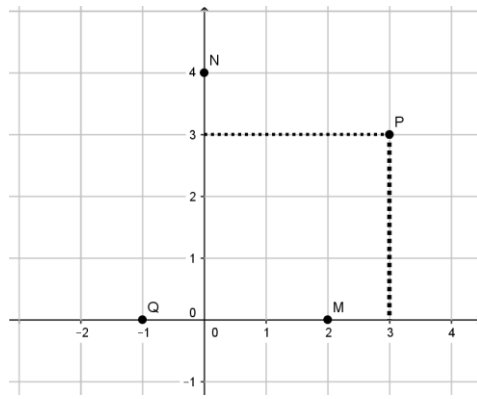
Chọn B

Điểm biểu diễn của số phức $5 + 8i$ là $A(5;8)$.

Điểm biểu diễn của số phức $-5 + 8i$ là $B(-5;8)$

Nhận thấy A, B đối xứng nhau qua trục tung.

Câu 33. Dựa vào hình vẽ trên, hãy cho biết điểm nào là điểm biểu diễn của số thuần ảo ?



A .M

B .N

C .P

D. Q

Hướng dẫn giải

Chọn B

Số thuần ảo là số có $x = 0$. Nhận thấy điểm $N(0; y)$ nên N là điểm biểu diễn số thuần ảo.

Câu 34. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $z = 2 + 5i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $z' = 2 - 5i$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục hoành

B. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua trục tung

C. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O

D. Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điểm biểu diễn của số phức $z = 2 + 5i$ là $A(2; 5)$.

Điểm biểu diễn của số phức $z' = 2 - 5i$ là $B(2; -5)$

Nhận thấy A,B đối xứng nhau qua trục hoành.

Đã sửa đề cho đúng đáp án

Câu 35. Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z + 1 - i| = |z + 3 - 2i|$ là:

A. Đường thẳng

B. Elip

C. Đoạn thẳng

D. Đường tròn

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$

$$\begin{aligned} |z + 1 - i| &= |z + 3 - 2i| \Leftrightarrow |x + 1 + y - 1i| = |x + 3 + y - 2i| \\ \Leftrightarrow x + 1^2 + y - 1^2 &= x + 3^2 + y - 2^2 \\ \Leftrightarrow 4x - 2y + 11 &= 0 \end{aligned}$$

Câu 36. Gọi A là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 + 2i$ và B là điểm biểu diễn của số phức $z' = 2 + 3i$. Tìm mệnh đề đúng của các mệnh đề sau:

- A. Hai điểm A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.
- B. Hai điểm A, B đối xứng nhau qua trục tung.
- C. Hai điểm A, B đối xứng nhau qua trục hoành.
- D. Hai điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điểm biểu diễn của số phức $z = 3 + 2i$ là $A(3;2)$ và điểm biểu diễn của số phức $z' = 2 + 3i$ là $B(2;3)$.

Nhận thấy A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

Câu 37. Giả sử $M(z)$ là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z . Tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn điều $|2 + z| = |i - z|$ là

- A.** Đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$
- B.** Đường thẳng $4x - 2y + 3 = 0$
- A.** Đường thẳng $x + 2y - 3 = 0$
- D.** Đường thẳng $x + 9y - 3 = 0$

Hướng dẫn giải

Cách 1. Đặt $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$. là số phức đã cho và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức

$$\text{Ta có } |z + 2| = |i - z| \Leftrightarrow |(x + 2) + yi| = |x + (y - 1)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0. \text{ Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường thẳng } 4x + 2y + 3 = 0$$

Vậy chọn đáp án A.

$$\textbf{Cách 2. } |z + 2| = |i - z| \Leftrightarrow |z - (-2)| = |i - z| (*)$$

Đặt $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$. là số phức đã cho và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức, Điểm A biểu diễn số -2 tức $A(-2; 0)$ và điểm B biểu diễn số phức i tức $B(0; 1)$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MA = MB$. Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường trung trực của AB:

$$4x + 2y + 3 = 0.$$

Câu 38. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2i| = |\bar{z} + 1 - i|$ là

A. Đường thẳng $x + y + 3 = 0$

B. Đường thẳng $x - 2y + 3 = 0$

A. Đường thẳng $x + 2y + 3 = 0$

D. Đường thẳng $x - y - 1 = 0$

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), điểm $M(x; y)$ biểu diễn z . Theo bài ra ta có:

$$|x + (y + 2)i| = |(x + 1) - (y + 1)i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4y + 4 = 2x + 2y + 2 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$$

Suy ra M thuộc đường thẳng có phương trình $x - y - 1 = 0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng có phương trình $x - y - 1 = 0$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 39. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $5|(1 - i)z + 3 - 2i| = |(1 - 7i)z + i|$ là

A. Đường thẳng

B. Đường tròn

A. Đường elip

D. Đường Parabol

Hướng dẫn giải

Nhận thấy $5|1 + i| = 5\sqrt{2} = |1 - 7i|$

Ta có $5|(1 - i)z + 3 - 2i| = |(1 - 7i)z + i|$

$$\Leftrightarrow |5(1 - i)| \cdot \left| z + \frac{3 - 2i}{5 + 5i} \right| = |1 - 7i| \cdot \left| z + \frac{i}{1 - 7i} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| z + \frac{3 - 2i}{5 + 5i} \right| = \left| z + \frac{i}{1 - 7i} \right| \Leftrightarrow \left| z + \frac{1}{10} - \frac{1}{2}i \right| = \left| z - \frac{7}{50} + \frac{1}{50}i \right|$$

Vậy tập hợp M là đường trung trực AB , với $A\left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{7}{50}; \frac{1}{50}\right)$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 40. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + \bar{z} + 3| = 4$ là

A. Hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}, x = -\frac{7}{2}$

B. Hai đường thẳng $x = -\frac{1}{2}, x = -\frac{7}{2}$

A. Hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}, x = \frac{7}{2}$

D. Hai đường thẳng $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Lúc đó:

$$|z + \bar{z} + 3| = 4 \Leftrightarrow |x + yi + x - yi + 3| = 4 \Leftrightarrow |2x + 3| = 4 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}; x = -\frac{7}{2}$ song song với trục tung.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 41. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - \bar{z} + 1 - i| = 2$ là

- A. Hai đường thẳng $y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ B. Hai đường thẳng $y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$
 A. Hai đường thẳng $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ D. Hai đường thẳng $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Lúc đó:

$$\begin{aligned} |z - \bar{z} + 1 - i| = 2 &\Leftrightarrow |x + yi - x + yi + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow |1 - (2y - 1)i| = 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + (2y - 1)^2} = 2 &\Leftrightarrow 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 4 \Leftrightarrow 4y^2 - 4y - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 1 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là hai đường thẳng $y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ song song với trục hoành.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 42. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z+1| = |z - \bar{z} - 2|$ là

- A. Hai đường thẳng $x=0, y=0$. B. Hai đường thẳng $x=0, y=-2$.
 C. Hai đường thẳng $x=0, x=-2$. D. Hai đường thẳng $x=2, y=-2$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Gọi } M(x; y) \text{ là điểm biểu diễn số phức } z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \text{ thỏa } 2|z+1| &= |z - \bar{z} - 2| \\ \Leftrightarrow 2|x + yi + 1| = |x + yi - (x - yi) - 2| &\Leftrightarrow 2|x + 1 + yi| = |-2 + 2yi| \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2y)^2} &\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là hai đường thẳng $x=0, x=-2$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 43. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + i| = 2$ là

- A. Đường thẳng $x - y - 2 = 0$ B. Đường tròn $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

C. Đường thẳng $x + y - 2 = 0$

D. Đường tròn tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Hướng dẫn giải

Xét hệ thức: $|z - 1 + i| = 2$ Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

Vậy, tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn hệ thức (1) là đường tròn tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 44. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{z}{z-1} \right| = 3$ là

A. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{18}{8}y - \frac{9}{8} = 0$

B. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{18}{8}y + \frac{9}{8} = 0$

C. Đường tròn $x^2 + y^2 + \frac{18}{8}y + \frac{9}{8} = 0$

D. Đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$ và bán kính

$R = \frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{Z})$. Ta có

$$\left| \frac{z}{z-1} \right| = 3 \Leftrightarrow |z| = 3|z-1| \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{18}{8}y + \frac{9}{8} = 0$$

Vậy, tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn hệ thức (1) là đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$

và bán kính $R = \frac{3}{8}$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 45. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 3 - 2i| = |2z + 1 - 2i|$ là

A. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{8}{3} = 0$

B. Đường tròn $x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0$

C. Đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0$

D. $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z + 3 - 2i| = |2z + 1 - 2i|$

$$\Leftrightarrow |(x+3) + (y-2)i| = |(2x+1) + (2y-2)i| \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = (2x+1)^2 + (2y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$$

Suy ra: Tập hợp các điểm biểu diễn z là phương trình đường tròn (C):

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{8}{3} = 0.$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 45. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|(1+i)z|$ là

A. Đường tròn $x^2+(y+1)^2=2$

B. Đường tròn $x^2+(y-1)^2=2$

C. Đường tròn $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

D. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi; (x,y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Suy ra } |z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow |(1+i)z|=|(1+i)(x+yi)|=\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2}$$

$$\text{Nên } |z-i|=|(1+i)z| \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2 \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn $x^2+(y+1)^2=2$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 47. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-4i|+|z+4i|=10$ là

A. Đường elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

B. Đường elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

C. Đường elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

D. Đường elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Hướng dẫn giải

Xét hệ thức: $|z-4i|+|z+4i|=10$

Đặt $z=x+yi, (x,y \in \mathbb{R})$. Lúc đó

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+(y+4)^2}=10 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

Vậy tập hợp điểm M là đường elip có hai tiêu điểm là $F_1(0;4); F_2(0;-4)$ và độ dài trục lớn là 16.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 48. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2|+|z+2|=5$ là

A. Đường tròn

B. Đường elip

C. Đường parabol

D. Đường thẳng

Hướng dẫn giải

Đặt $z=x+yi; (x,y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2|+|z+2|=5$

$$\Leftrightarrow |(x-2)+yi|+|(x+2)+yi|=5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=5 \quad (1)$$

Xét $A(2;0); B(-2;0); I(x;y) \Rightarrow IA+IB=5$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z chính là tập hợp các điểm I thỏa mãn

$$IA + IB = 5, \text{ đó chính là một elip có tiêu cự } c = \frac{AB}{2} = 2; a = \frac{IA + IB}{2} = \frac{5}{2}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 49. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|2 + z| > |z - 2|$ là

- A. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung
- B. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên trái trục tung
- C. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía trên trục hoành
- D. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía dưới trục hoành

Hướng dẫn giải

Xét hệ thực: $|2 + z| > |z - 2|$ (1). Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó: (3) $\Leftrightarrow 8x > 0$

Tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện (1) là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung, tức các điểm (x, y) mà $x > 0$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 50. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $1 \leq |z + 1 - i| \leq 2$ là

- A. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I(1; -1)$, bán kính 2
- B. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $A(-1; 1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2; 1
- C. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I(1; -1)$, bán kính 1
- D. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $I(1; -1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2; 1

Hướng dẫn giải

b) Xét hệ thực: $1 \leq |z + 1 - i| \leq 2$ (2). Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow 1 \leq (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4$

Vậy tập hợp những điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện (2) là hình vành khăn có tâm tại $A(-1; 1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2; 1

Vậy chọn đáp án B.

Câu 51. Tìm tất cả các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho $\frac{z+i}{z-i}$ là số thực.

- A. Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ
- B. Tập hợp điểm là trục hoành
- C. Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ bỏ đi điểm $A(0; 1)$

D. Tập hợp điểm là trục tung, bỏ đi $A(0;1)$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $\frac{z+i}{z-i} = \frac{x+(y+1)(1-y) + [x(y+1)-x(1-y)]i}{x^2+(1-y)^2}$

$\frac{z+i}{z-i}$ là số thực $\Leftrightarrow x(y+1)-x(1-y)=0 \Leftrightarrow xy=0$.

Mặt khác: $x^2+(y-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$ cả mặt phẳng phức bỏ đi điểm $(0;1)$

Tóm lại: $y \text{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ (x,y) \neq (0;1) \end{cases}$. Vậy các điểm của mặt phẳng phức cần tìm gồm hai

trục tọa độ bỏ đi điểm $A(0;1)$

Vậy chọn đáp án C

Câu 52. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u = \frac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$

B. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

C. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R=5$

D. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R=5$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Ta có:

$$u = \frac{z+2+3i}{z-i} = \frac{[x+2+(y+3)i][x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2+2x+2y-3+2(2x-y+1)i}{x^2+(y-1)^2}$$

$$u \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-3=0 \\ 2x-y+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=5 \\ (x,y) \neq (0;1) \\ (x,y) \neq (-2;-3) \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 53. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện $|x|+|y|=1$ là

A. Ba cạnh của tam giác

B. Bốn cạnh của hình vuông

C. Bốn cạnh của hình chữ nhật

D. Bốn cạnh của hình thoi

Hướng dẫn giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z.

$$\text{Ta có: } |x| + |y| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 & \text{khi } x \geq 0, y \geq 0 \\ x - y = 1 & \text{khi } x \geq 0, y \leq 0 \\ -x + y = 1 & \text{khi } x \leq 0, y \geq 0 \\ -x - y = 1 & \text{khi } x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là 4 cạnh của hình vuông.

Vậy chọn đáp án B

Câu 54. Gọi M và P lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z = x + iy, (x, y \in \mathbb{R})$ và $w = z^2$. Tìm tập hợp các điểm P trong các trường hợp sau đây:

Câu 54.1. M thuộc đường thẳng d: $y = 2x$

A. Đường thẳng (d'): $y = -\frac{4}{3}x$

B. Tia (d'): $y = -\frac{4}{3}x, x \leq 0$.

C. Đường thẳng (d'): $y = \frac{4}{3}x$

D. Tia (d'): $y = -\frac{4}{3}x, x > 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi$ và $w = u + vi (x, y, u, v \in \mathbb{R})$, ta có:

$$w = z^2 \Leftrightarrow u + vi = (x + yi)^2 \Leftrightarrow u + vi = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

M thuộc đường thẳng d: $y = 2x \Rightarrow$ tọa độ của điểm P thỏa mãn

$$\begin{cases} u = x^2 - 4x^2 \\ v = 2x(2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3x^2 \leq 0 \\ v = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3x^2 \leq 0 \\ v = -\frac{4}{3}u \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm P là tia (d'): $y = -\frac{4}{3}x, x \leq 0$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 54.2. M thuộc đường thẳng d: $y = x + 1$

A. Đường thẳng d': $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

B. Parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

C. Đường tròn $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{3}$

D. Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Hướng dẫn giải

M thuộc đường thẳng d: $y = x + 1 \Rightarrow$ tọa độ điểm P thỏa mãn

$$\begin{cases} u = x^2 - (x+1)^2 \\ v = 2x(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2x - 1 \\ v = 2x^2 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-u-1}{2} \\ v = 2\left(\frac{-u-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{-u-1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-u-1}{2} \\ v = \frac{1}{2}(u^2 + 2u + 1) - u - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-u-1}{2} \\ v = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm P là parabol có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 54.3. M thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$;

A. Đường thẳng $d': y = x + \frac{1}{3}$.

B. Parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$

C. Đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

D. Elip $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

Hướng dẫn giải

Ta có $|zz'| = |z| \cdot |z'|$. Suy ra $|z|^2 = |z \cdot z| = |z| \cdot |z| = |z|^2$.

M thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = |z^2| = |z|^2 = 1$

Vậy tập hợp các điểm P là đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 54.4. M thuộc hypebol (C): $y = \frac{1}{x} (x \neq 0)$.

A. Đường thẳng $d': x = 2$

B. Đường thẳng $d': y = -2$

C. Đường thẳng $d': y = 1$

D. Đường thẳng $d': y = 2$

Hướng dẫn giải

M thuộc hypebol (C): $y = \frac{1}{x} (x \neq 0)$. Suy ra tọa độ điểm P(u;v) thỏa mãn:

$$\begin{cases} u = x^2 - \frac{1}{x^2} \\ v = 2x \cdot \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - \frac{1}{x^2} \\ v = 2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm P là đường thẳng có phương trình $y = 2$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z+i}{z+1} + \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1}$ là số thuần ảo.

- A.** Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$
B. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$ trừ đi hai điểm $(-1; 0)$.
C. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{4}$
D. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính $R = \frac{1}{4}$ trừ đi hai điểm $(0; 1)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$ và điểm biểu diễn số phức z là $M(x; y)$.

$$\text{Ta có: } \frac{z+i}{z+1} + \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1} = \frac{2|z|^2 + z + \bar{z} + i(z + \bar{z}) + 2i}{|z|^2 + z + \bar{z} + 1} = \frac{2(x^2 + y^2) + 2x + 2(x+1)i}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\frac{z+i}{z+1} + \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1} \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 + y^2) + 2x = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ (x; y) \neq (-1; 0) \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ bỏ đi điểm $(-1; 0)$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 56. Tìm quỹ tích các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn cho số phức $w = iz + 1$, biết z là số phức thỏa mãn: $\left|(\bar{z} - 2i + 1)^3\right| = 8$.

- A.** Đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$
B. Đường tròn (C): $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 2$
C. Đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$
D. Đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } |z^3| = |z|^3 \text{ nên } \left|(\bar{z} - 2i + 1)^3\right| = 2^3 \Leftrightarrow \left|(\bar{z} - 2i + 1)\right| = 2 \quad (*)$$

Đặt $w = x + yi$

Ta lại có $w = iz + 1 \Leftrightarrow z = i - iw \Rightarrow \bar{z} = -i + i\bar{w}$. (*) trở thành:

$$\left|i\bar{w} - 3i + 1\right| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2 + (x-3)^2} = 2 \Leftrightarrow (y+1)^2 + (x-3)^2 = 4$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn w trên mặt phẳng phức là đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn: $w = \bar{z} + 2 + i$, biết z là số phức thỏa $|z - 1 + 2i| = 1$.

- A. Đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R = \sqrt{2}$
- B. Đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R = 2$
- C. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R = 1$
- D. Đường tròn tâm $I(3;3)$, bán kính $R = 1$.

Hướng dẫn giải

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số w trên hệ trục Oxy.

$$\bar{z} = w - 2 - i = x - 2 + (y - 1)i \Rightarrow z = x - 2 + (1 - y)i$$

$$|z - 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |x - 3 + (3 - y)i| = 1 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(3;3)$, bán kính $R = 1$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 58. Trong mặt phẳng phức Oxy, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w = (1 - 2i)z + 3$ biết z là số phức thỏa mãn: $|z + 2| = 5$.

- A. Đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R = \sqrt{5}$
- B. Đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R = 5$
- C. Đường tròn tâm $I(1;4)$ bán kính $R = 5\sqrt{5}$.
- D. Đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $R = 5$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết: $|z + 2| = 5 \Leftrightarrow \left| \frac{a - 1 + (b - 4)i}{1 - 2i} \right| = 5 \Leftrightarrow |a - 1 + (b - 4)i| = 5|1 - 2i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 4)^2} = 5\sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 4)^2 = 125$$

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn đề bài là đường tròn tâm $I(1;4)$ bán kính $R = 5\sqrt{5}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 59. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z' = (1 - i\sqrt{3})z - 2$ với $|z + 1| \leq 2$.

- A. Hình tròn tâm $I(-3; \sqrt{3})$, $R = 4$.
- B. Đường tròn tâm $I(-3; \sqrt{3})$, $R = 4$.
- C. Hình tròn tâm $I(1; -4)$ bán kính $R = 5$.
- D. Đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $R = 5$.

Hướng dẫn giải

Giả sử ta có $\begin{cases} z = a + bi & (a, b \in \mathbb{R}) \\ z' = x + yi & (x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$

Khi đó:

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z - 2 \Leftrightarrow x + yi = (1 - i\sqrt{3})(a + bi) - 2 \Leftrightarrow x + yi = a + b\sqrt{3} - 2 + (b - a\sqrt{3})i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b\sqrt{3} - 2 \\ y = b - a\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x - y\sqrt{3} + 2}{4} \\ b = \frac{\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Theo bài ra ta có:

$$|z + 1| \leq 2 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + b^2 \leq 4 \Leftrightarrow \left(\frac{x - y\sqrt{3} + 2}{4} + 1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3}}{4} \right)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (x - y\sqrt{3} + 6)^2 + (\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3})^2 \leq 64 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 24x - 8\sqrt{3}y - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2\sqrt{3}y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 \leq 16$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z' là hình tròn tâm $I(-3; \sqrt{3})$, $R = 4$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 60. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ biết rằng số phức z thỏa mãn $|z - 1| \leq 2$.

A. Hình tròn tâm $I(-3; \sqrt{3})$, $R = 4$.

B. Đường tròn tâm $I(3; 3)$ bán kính $R = 4$

C. Đường tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

D. Hình tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) và $w = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có: $|z - 1| \leq 2 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 \leq 4$ (*)

Từ

$$w = (1 + i\sqrt{3})z + 2 \Rightarrow x + yi = (1 + i\sqrt{3})(a + bi) + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b\sqrt{3} + 2 \\ y = \sqrt{3}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = a - 1 - b\sqrt{3} \\ y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(a - 1) + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 4[(a - 1)^2 + b^2] \leq 16 \text{ (Do (*))}$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hình tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 61. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z' = 2z + 3 - i$ với $|3z + i|^2 \leq z\bar{z} + 9$.

A. Hình tròn tâm $I(-3; \sqrt{3})$, $R = 4$.

B. Đường tròn tâm $I(3; 3)$ bán kính $R = 4$

C. Đường tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ bán kính $R = 4$.

D. Hình tròn tâm $I\left(3; -\frac{7}{4}\right)$, $R = \frac{\sqrt{73}}{4}$

Giải

Giả sử ta có $\begin{cases} z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \\ z' = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$

Khi đó $z' = 2x + 3 - i \Leftrightarrow x + yi = (2a + 3) + (2b - 1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a + 3 \\ y = 2b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x - 3}{2} \\ b = \frac{y + 1}{2} \end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$$|3z + i|^2 \leq z\bar{z} + 9 \Leftrightarrow 9a^2 + (3b + 1)^2 \leq a^2 + b^2 + 9 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 3b - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + \frac{3}{2}(y + 1) - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 \leq \frac{73}{16}$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z' là hình tròn tâm $I\left(3; -\frac{7}{4}\right)$, $R = \frac{\sqrt{73}}{4}$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 62 (Đề minh họa của bộ). Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 4$.

B. $r = 5$.

C. $r = 20$.

D. $r = 22$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Gọi } w = a + bi, \text{ ta có } w = a + bi = (3 + 4i)z + i \Leftrightarrow z = \frac{a + (b - 1)i}{3 + 4i} &= \frac{[a + (b - 1)i](3 - 4i)}{9 - 16i^2} \\ &= \frac{3a + 4b - 4}{25} + \frac{(3b - 4a - 3)}{25}i \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{(3a + 4b - 4)^2 + (3b - 4a - 3)^2}}{25} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } |z| = 4 \text{ nên } \Leftrightarrow (3a + 4b - 4)^2 + (3b - 4a - 3)^2 = 100^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b = 399$$

Theo giả thiết, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn nên ta có $a^2 + b^2 - 2b = 399 \Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = 400 \Rightarrow r = \sqrt{400} = 20$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 63 Gọi A, B theo thứ tự là các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn số z khác 0 và $z' = \frac{1+i}{2}z$. Lúc đó, tam giác OAB là tam giác gì

A. Tam giác cân

B. Tam giác đều

C. Tam giác vuông

D. Tam giác vuông cân

Hướng dẫn giải

Giả sử $z = x + yi$ thì ta có $A(x; y)$. Vì $z \neq 0$ nên $x^2 + y^2 > 0$.

$$\text{Ta có } z' = \frac{1+i}{2}z = \frac{1}{2}(1+i)(x + yi) = \frac{x - y}{2} + \frac{x + y}{2}i.$$

$$\text{Vậy B có tọa độ: } B\left(\frac{x - y}{2}; \frac{x + y}{2}\right)$$

Ta lại có: $OA^2 = x^2 + y^2$; $OB^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$

$AB^2 = \left(x - \frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} OB = AB \\ OA^2 = OB^2 + AB^2 \end{cases}$. Vậy tam giác OAB vuông cân tại B.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 64. Các điểm A, B, C và A', B', C' tương ứng biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 và z'_1, z'_2, z'_3 (trong đó A, B, C và A', B', C' không thẳng hàng). Hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm khi và chỉ khi

A. $z_1 + z_2 + z_3 = z'_1 + z'_2 + z'_3$

B. $|z_1| + |z_2| + |z_3| = |z'_1| + |z'_2| + |z'_3|$

C. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z'_1 + z'_2 + z'_3|$

D. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z'^2_1 + z'^2_2 + z'^2_3$

Hướng dẫn giải

Đặt

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 i \\ z_2 = x_2 + y_2 i \\ z_3 = x_3 + y_3 i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(x_1; y_1) \\ B(x_2; y_2) \\ C(x_3; y_3) \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Trọng tâm: $G\left(\frac{x'_1 + x'_2 + x'_3}{3}, \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3}{3}\right)$

Nếu $z_1 + z_2 + z_3 = z'_1 + z'_2 + z'_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x'_1 + x'_2 + x'_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 = y'_1 + y'_2 + y'_3 \end{cases} \Rightarrow G \equiv G'$

Vậy hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 65. Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $4 + (3 + \sqrt{3})i$; $2 + (3 + \sqrt{3})i$; $1 + 3i$; $3 + i$. Chọn khẳng định đúng

A. ABCD là hình bình hành

B. $AD = 2CB$

C. D là trọng tâm của tam giác ABC

D. Tứ giác ABCD nội tiếp được đường tròn

Hướng dẫn giải

Ta có: $A(4, 3 + \sqrt{3})$; $B(2, 3 + \sqrt{3})$; $C(1, 3)$; $D(3, 1)$.

Ta xét các mệnh đề:

- ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC}$. Nhận thấy $\overline{AB} = (-2; 0) \neq \overline{DC} = (2; -2)$.

Như vậy ta loại A

- $AD = \sqrt{(3-4)^2 + (1-3-\sqrt{3})^2} \approx 3,86$; $CB = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$AD \neq 2CB$. Như vậy ta loại B

- Ta thấy: $\frac{4+2+1}{3} = \frac{7}{3} \neq 3$

Suy ra: D không là trọng tâm của tam giác ABC

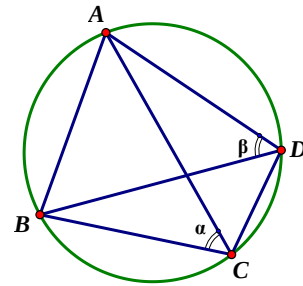
Vậy chọn đáp án D.

Lời bình: Để chứng minh D đúng ta chứng minh như sau:

$$\text{Đặt } \angle ACB = \alpha \text{ thì } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Đặt } \angle ADB = \beta \text{ thì } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = |\overrightarrow{DA}| |\overrightarrow{DB}| \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\alpha = \beta = 30^\circ \Rightarrow ABCD$ nội tiếp đường tròn



Chú ý: Cho hai đường thẳng a, b có vectơ chỉ phương là $\vec{a}, \vec{b}$. Gọi $\varphi; \alpha$ lần lượt là góc của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và hai đường thẳng a, b . Lúc đó:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}; \quad \cos \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|};$$

Chú ý: $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ; \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Câu 66. Cho ba điểm A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $a=1, b=-1+\alpha i$ và $c=b^2$.

Câu 66.1. Xác định α sao cho A, B, C là ba đỉnh của một tam giác

- A. $\alpha \neq 1$ B. $\alpha \neq -1$ C. $\alpha = \pm 1$ D. $\alpha \neq 0$

Câu 66.2. Khi A, B, C là ba đỉnh của tam giác. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

- A. Tam giác cân B. Tam giác đều
C. Tam giác vuông D. Tam giác vuông cân

Câu 66.3. Tìm số phức d biểu diễn bởi D sao cho ABCD là hình chữ nhật

- A. $d = 1 - \alpha^2 - \alpha i$ B. $d = -1 - \alpha^2 - \alpha i$ C. $d = -1 + \alpha^2 - \alpha i$ D. $d = -1 - \alpha^2 + \alpha i$.

Hướng dẫn giải

Câu 66.1. Ta có:

$$b - a = -2 + \alpha i \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; \alpha)$$

$$c - a = -\alpha^2 - 2\alpha i \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (-\alpha^2; -2\alpha)$$

$$c - b = 2 - \alpha^2 - 3\alpha i \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (2 - \alpha^2; -3\alpha)$$

Điều kiện là A, B, C phân biệt và không thẳng hàng $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 66.2. Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\alpha^2 - 2\alpha^2 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$. Vậy tam giác ABC vuông.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 66.3. $d = -1 - \alpha^2 - \alpha i$. Vậy chọn đáp án B

Câu 67. Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng theo thứ tự biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3 . Hỏi trọng tâm của tam giác ABC biểu diễn số phức nào?

A. $z_1 + z_2 + z_2$.

B. $-z_1 - z_2 - z_2$

C. $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_2)$

D. $-\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_2)$

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Vì $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ theo thứ tự biểu diễn z_1, z_2, z_2 nên G biểu diễn số phức $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 68. Xét ba điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi

$z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

A. $z_1 = z_2 = z_3$

B. $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

C. $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$

D. $z_1^2 = z_2^2 = z_3^2$

Hướng dẫn giải

Ba điểm A, B, C theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ nên ba điểm A, B, C thuộc đường tròn tâm O (O là gốc tọa độ). Tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi trọng tâm G của nó trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tức $G \equiv O$ hay $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Câu 69. Cho M, N là hai điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. Tam giác OMN là tam giác gì?

A. Tam giác cân

B. Tam giác đều

C. Tam giác vuông

D. Tam giác vuông cân

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Rightarrow \begin{cases} z_2^2 = z_1(z_2 - z_1) \\ z_1^2 = z_2(z_1 - z_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_2|^2 = |z_1||z_2 - z_1| \\ |z_1|^2 = |z_2||z_2 - z_1| \end{cases} \quad (*)$$

Vì $z_1, z_2 \neq 0$ nên $|z_1|, |z_2| \neq 0$

$$\text{Từ (*) ta có: } |z_2 - z_1| = \frac{|z_2|^2}{|z_1|} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|} \Rightarrow |z_1|^3 = |z_2|^3 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$$

$$\text{Do đó } |z_2 - z_1| = |z_1| = |z_2|$$

$$\text{Mà } OM = |z_1|; ON = |z_2|; MN = |z_2 - z_1|$$

Vậy tam giác OMN đều.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 70. Cho ba điểm A, B, C biểu diễn các số phức $a = 1 + i, b = a^2$ và $c = x - i, (x \in \mathbb{R})$.

Tìm x sao cho

Câu 70.1. Tam giác ABC vuông tại B

A. $x = -1$

B. $x = -2$

C. $x = -3$

D. $x = -5$

Câu 70.2. Tam giác ABC cân tại C

A. $x = -7$

B. $x = -2$

C. $x = -3$

D. $x = -5$

Hướng dẫn giải

Câu 70.1. Ta có: $a = 1 + i \Rightarrow A(1; 1)$

Mặt khác, theo đề thì $b = a^2 = (1 + i)^2 = 2i \Rightarrow B(0; 2)$

$c = x - i, (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow C(x; -1)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1), \overrightarrow{BC} = (x; -3)$

Để tam giác ABC vuông tại B thì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 70.2. Tam giác ABC cân tại C nên $|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 71. Cho $\vec{u}, \vec{v}$ là biểu diễn của hai số phức $1 + 3i$ và $3 - 2i$. Gọi $\vec{x}$ là biểu diễn của số phức $6 + 4i$. Hãy phân tích $\vec{x}$ qua $\vec{u}, \vec{v}$

A. $\vec{x} = -\frac{24}{11}\vec{u} - \frac{14}{11}\vec{v}$

B. $\vec{x} = \frac{24}{11}\vec{u} - \frac{14}{11}\vec{v}$

C. $\vec{x} = \frac{24}{11}\vec{u} + \frac{14}{11}\vec{v}$

D. $\vec{x} = -\frac{24}{11}\vec{u} + \frac{14}{11}\vec{v}$

Giải

Ta có $\vec{u} = (1; 3), \vec{v} = (3; 2), \vec{x} = (6; 4)$

Giả sử $\vec{x} = m\vec{u} + n\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} m + 3n = 6 \\ 3m - 2n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{24}{11} \\ n = \frac{14}{11} \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \frac{24}{11}\vec{u} + \frac{14}{11}\vec{v}$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 72. Tìm các điểm biểu diễn của số phức z biết điểm biểu diễn của các số phức z, z^2, z^3 lập thành

Câu 72.1. Tam giác vuông tại A

A. Quỹ tích của z là đường thẳng $x = -1$. B. Quỹ tích của z là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

C. Quỹ tích của z là đường elip $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$. D. Quỹ tích của z là Parabol $y = \frac{1}{2}x^2$

Câu 72.2. Tam giác vuông tại B

A. Quỹ tích của z là đường thẳng $x = 0$.

B. Quỹ tích của z là đường thẳng $y = 0$

C. Quỹ tích của z là đường thẳng $x = 0$, trừ gốc tọa độ

D. Quỹ tích của z là đường thẳng $y = 0$, trừ gốc tọa độ

Câu 72.3 Tam giác vuông tại C

A. Quỹ tích của z là đường thẳng $x = 2$

B. Quỹ tích của z là đường thẳng $y = 1$

C. Quỹ tích của z là đường tròn $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

D. Quỹ tích của z là hai đường thẳng $y=0, x=0$

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) và gọi A, B, C là các điểm biểu diễn tương ứng của z, z^2, z^3

Vì A, B, C tạo thành một tam giác nên phải có: $z \neq z^2 \neq z^3 \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ z \neq 1 \\ z \neq -1 \end{cases}$

Khi đó $AB = |z^2 - z|, BC = |z^3 - z^2|, AC = |z^3 - z|$.

Câu 72.1. Tam giá ABC vuông tại A ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$|z^2 - z|^2 + |z^3 - z|^2 = |z^3 - z^2|^2 \Leftrightarrow |z^2 - z|^2 + |z^2 - z|^2 \cdot |z + 1|^2 = |z|^2 \cdot |z^2 - z|^2$$

Do A, B, C là ba điểm phân biệt nên từ đẳng thức trên ta có:

$$1 + |z + 1|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow 2 + |z|^2 + z + \bar{z} = |z|^2 \Leftrightarrow z + \bar{z} = -2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Trong trường hợp này quỹ tích của z là đường thẳng

Vậy chọn đáp án A.

Lưu ý: Ta dễ dàng chứng minh được $|z + 1|^2 = |z|^2 + z + \bar{z} + 1$

Câu 72.2. Tam giá ABC vuông tại B hay $BA^2 + BC^2 = AC^2$

Tương tự như trên ta có quỹ tích của z là đường thẳng $x=0$ trừ gốc tọa độ.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 72.3. Tam giá ABC vuông tại C hay $CA^2 + CB^2 = AB^2$

Tương tự như trên ta có quỹ tích của z là đường tròn $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

Vậy chọn đáp án C.

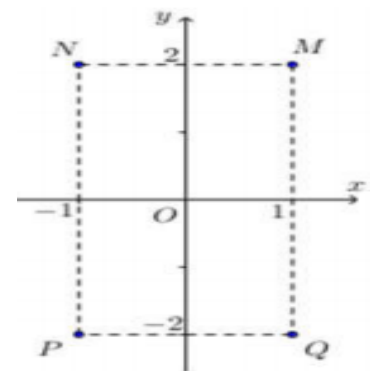
Câu 73. (Đề minh họa của bộ). Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 3-i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên ?

A. Điểm P.

B. Điểm Q.

C. Điểm M.

D. Điểm N.



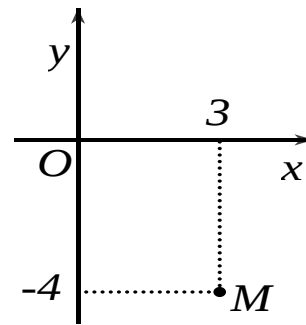
Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) Khi đó: $(1+i)z = 3-i \Leftrightarrow (x-y-3) + (x+y+1)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow Q(1; -2).$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 74. (Đề thử nghiệm lần 1 của bộ). Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .



- A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3 .
- B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
- C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
- D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

Hướng dẫn giải

Vậy chọn đáp án C.

CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

A – PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$, (*) với $a \neq 0$ có biệt số: $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (*) có nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta \neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai Δ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ hoặc } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Lưu ý

- Hệ thức Viét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ và $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.
- Căn bậc hai của số phức $z = x + yi$ là một số phức ω và tìm như sau:

+ Bước 1. Đặt $\omega = \sqrt{z} = \sqrt{x + yi} = a + bi$ với $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

+ Bước 2. Biến đổi:

$$\omega^2 = x + yi = (a + bi) \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = x + yi^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$$

+ Bước 3. Kết luận các căn bậc hai của số phức z là $\omega = \sqrt{z} = a + bi$.

Ta có thể làm tương tự đối với trường hợp căn bậc ba, căn bậc bốn. Ngoài cách tìm căn bậc hai của số phức như trên, ta có thể tách ghép đưa về số chính phương dựa vào hằng đẳng thức.

B- BÀI TẬP MẪU

BT 34. Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

a) $z = -5 + 12i$.

ĐS: $\omega = \sqrt{z} = \pm 2 \pm 3i$.

Cách1: giả sử: $z = -5 + 12i = a + bi^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{b} \\ \frac{36}{b^2} - b^2 = -5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ b^4 - 5b^2 - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3; a = 2 \\ b = -3; a = -2 \end{cases}$$

Suy ra z có 2 căn bậc hai là: $\omega = 2 + 3i; \omega = -2 - 3i$

Cách2 : Ta có $z = -5 + 12i = 4 + 12i - 9 = 4 + 12i + 9i^2 = 2 + 3i^2$

Suy ra z có 2 căn bậc hai là: $\omega = 2 + 3i; \omega = -2 - 3i$

b) $z = 8 + 6i$. ĐS: $\omega = \sqrt{z} = \pm 3 \pm i$.

Giả sử $z = 8 + 6i = (a + bi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 3 \\ a^2 - \frac{9}{a^2} = 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 3 \\ a^4 - 8a^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 3 \\ a^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3; b = 1 \\ a = -3; b = -1 \end{cases}$$

Suy ra z có hai căn bậc hai là: $\omega = 3 + i; \omega = -3 - i$

c) $z = 3 - 4i$. ĐS: $\omega = \sqrt{z} = \pm 2 \mp i$.

Giả sử $z = 3 - 4i = (a + bi)^2 (a, b \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -2 \\ a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = -2 \\ a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -2 \\ a^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2; b = -1 \\ a = -2; b = 1 \end{cases}$$

Suy ra z có hai căn bậc hai là $\omega = 2 - i; \omega = -2 + i$

d) $z = 33 - 56i$. ĐS: $\omega = \sqrt{z} = \pm 7 \mp 4i$.

Giả sử $z = 33 - 56i = (a + bi)^2 (a, b \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 33 \\ 2ab = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -28 \\ a^2 - \frac{784}{a^2} = 33 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = -28 \\ a^4 - 33a^2 - 784 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -28 \\ a^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7; b = -4 \\ a = -7; b = 4 \end{cases}$$

Suy ra z có hai căn bậc hai là: $\omega = 7 - 4i; \omega = -7 + 4i$

e) $z = 4 + 6\sqrt{5}i$. ĐS: $\omega = \sqrt{z} = \pm 3 \mp i\sqrt{5}$.

Giả sử $z = 4 + 6\sqrt{5}i = (a + bi)^2 (a, b \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 6\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 3\sqrt{5} \\ a^2 - \frac{45}{a^2} = 4 \end{cases}$

f) $z = -1 - 2\sqrt{6}i$. ĐS: $\omega = \sqrt{z} = \pm\sqrt{2} \mp i\sqrt{3}$.

$$\text{Giả sử } z = -1 - 2\sqrt{6}i = (a + bi)^2 \quad (a, b \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = -2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -\sqrt{6} \\ a^2 - \frac{6}{a^2} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = -\sqrt{6} \\ a^4 + a^2 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -\sqrt{6} \\ a^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2}; b = -\sqrt{3} \\ a = -\sqrt{2}; b = \sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra z có hai căn bậc hai là $\omega = \sqrt{2} - \sqrt{3}i; \omega = -\sqrt{2} + \sqrt{3}i$

BT 35. Tìm căn bậc ba của các số phức sau:

a) $z = -i.$

b) $z = -27.$

Hướng dẫn giải :

a) Giả sử $z = -i = (a + bi)^3 \quad (a, b \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow -i = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 0 \\ 3a^2b - b^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; b = 1 \\ a = \sqrt{3}b; 8b^3 = -1 \\ a = -\sqrt{3}b; 8b^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; b = 1 \\ b = -\frac{1}{2}; a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = -\frac{1}{2}; a = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Suy ra z có 3 căn bậc 3 là: $i; -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

b) Giả sử $z = -27 = (a + bi)^3 \quad (a, b \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow -27 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -27 = a^3 - 3ab^2 \\ 0 = 3a^2b - b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0; a^3 = -27 \\ b^2 = 3a^2; a^3 - 9a^3 = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0; a = -3 \\ b = \pm\sqrt{3}a; a = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0; a = -3 \\ a = \frac{3}{2}; b = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ a = \frac{3}{2}; b = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Suy ra z có 3 căn bậc 3 là: $-3; \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

c) $z = 2 + 2i.$

d) $z = 18 + 6i.$

Hướng dẫn giải :

c) Giả sử $z = 2 + 2i = (a + bi)^3 \quad (a, b \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow 2 + 2i = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a^3 - 3ab^2 \quad (1) \\ 2 = 3a^2b - b^3 \quad (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình ta được:

$$a^3 - 3ab^2 - 3a^2b + b^3 = 0 \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2 - 3ab) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = (2 \pm \sqrt{3})b \end{cases}$$

TH1: Nếu $a = -b$ thay vào (1) ta được: $a^3 - 3a^3 = 2 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow b = 1$

TH2: Nếu $a = (2 + \sqrt{3})b$ thay vào (2) ta được: $2 = 3(2 + \sqrt{3})^2 b^3 - b^3$

$$\Leftrightarrow 3(7 + 4\sqrt{3})b^3 - b^3 = 2 \Leftrightarrow (20 + 12\sqrt{3})b^3 = 2 \Leftrightarrow (10 + 6\sqrt{3})b^3 = 1 \Leftrightarrow (1 + \sqrt{3})^3 b^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

TH3: Nếu $a = (2 - \sqrt{3})b$ thay vào (2) ta được: $2 = 3(2 - \sqrt{3})^2 b^3 - b^3$

$$\Leftrightarrow 3(7 - 4\sqrt{3})b^3 - b^3 = 2 \Leftrightarrow (20 - 12\sqrt{3})b^3 = 2 \Leftrightarrow (10 - 6\sqrt{3})b^3 = 1 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{3})^3 b^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

Vậy z có 3 căn bậc 3 là: $1 - i; \frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}i; \frac{2 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} + \frac{1}{1 - \sqrt{3}}i$

BT 36. Giải các phương trình sau trên trường số phức $\mathbb{C}$:

a) $2x^2 - 5x + 4 = 0$ ĐS: $x_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i$.

Ta có: $\Delta = 5^2 - 4.2.4 = -7 = 7i^2$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

b) $x^2 - 4x + 7 = 0$ ĐS: $x_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{3}$.

Ta có $\Delta' = 2^2 - 7 = -3 = 3i^2$ nên PT có 2 nghiệm phân biệt $x = 2 \pm i\sqrt{3}$

c) $x^2 - 2x + 2 = 0$ ĐS: $x_{1,2} = 1 \pm i$.

Ta có $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$ nên PT có 2 nghiệm phân biệt $x = 1 \pm i$

d) $8z^2 - 4z + 1 = 0$ ĐS: $x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}i$.

Ta có $\Delta' = 2^2 - 8 = -4 = 4i^2$ nên PT có 2 nghiệm phân biệt

$$z = \frac{2 \pm 2i}{8} \Leftrightarrow z = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}i$$

e) $2z^2 - iz + 1 = 0$. ĐS: $z_1 = i, z_2 = -\frac{1}{2}i$.

Ta có $\Delta = i^2 - 4.2.1 = -9 = 9i^2$ nên PT có 2 nghiệm phân biệt

$$z = \frac{i \pm 3i}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = -\frac{1}{2}i \end{cases}$$

f) $(z - i)^2 + 4 = 0$. ĐS: $z_1 = 3i; z_2 = -i$.

Ta có: $(z-i)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (z-i)^2 = -4 \Leftrightarrow (z-i)^2 = 4i^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z-i = 2i \\ z-i = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3i \\ z = -i \end{cases}$

g) $z^4 + 7z^2 + 10 = 0.$

ĐS:

$z_{1,2} = \pm i\sqrt{2}, z_{3,4} = \pm i\sqrt{5}.$

Đặt $z^2 = t \Rightarrow t^2 + 7t + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = -2 \end{cases}$

Với $t = -5 \Rightarrow z^2 = -5 \Leftrightarrow z^2 = 5i^2 \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{5}$

Với $t = -2 \Rightarrow z^2 = -2 \Leftrightarrow z^2 = 2i^2 \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{2}$

h) $z^4 + z^2 - 6 = 0.$

ĐS:

$z_{1,2} = \pm\sqrt{2}, z_{3,4} = \pm i\sqrt{3}.$

Đặt $z^2 = t \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 = 2 \\ z^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{cases}$

i) $(z+i)^4 + 4z^2 = 0.$

ĐS:

$z = \pm 1 \vee z = (-2 \pm \sqrt{3})i.$

Ta có $(z+i)^4 + 4z^2 = 0 \Leftrightarrow (z+i)^4 - 4z^2i^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (z+i)^2 = 2iz \\ (z+i)^2 = -2iz \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 1 = 0 \\ z^2 + 4iz - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 1 \\ z = -2i \pm \sqrt{3}i \end{cases}$

BT 37. Giải các phương trình sau trên trường số phức $\mathbb{C}$:

a) $\frac{4z - 3 - 7i}{z - i} = z - 2i$

ĐS: $z_1 = 3 + i, z_2 = 1 + 2i.$

ĐK: $z \neq i$

PT $\Leftrightarrow 4z - 3 - 7i = (z-i)(z-2i) \Leftrightarrow z^2 - (4+3i)z + 1+7i = 0$

Ta có: $\Delta = (4+3i)^2 - 4(1+7i) = 16 + 24i - 9 - 4 - 28i = 3 - 4i = (2-i)^2$

Nên PT có hai nghiệm: $\begin{cases} z = \frac{4+3i-2+i}{2} = 1+2i \\ z = \frac{4+3i+2-i}{2} = 3+i \end{cases}$

b) $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0.$

ĐS: $z_1 = 1 - 2i; z_2 = 3i.$

Ta có: $\Delta = (1+i)^2 - 4(6+3i) = 2i - 24 - 12i = -24 - 10i = (1-5i)^2$

Suy ra PT có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} z = \frac{1+i+1-5i}{2} = 1-2i \\ z = \frac{1+i-1+5i}{2} = 3i \end{cases}$

c) $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$

ĐS:

$z_1 = -1 - 2i, z_2 = -2 - i.$

Ta có: $\Delta = 9(1+i)^2 - 4.5i = -2i = (1-i)^2$

Suy ra PT có hai nghiệm phân biệt
$$\begin{cases} z = \frac{-3(1+i)+1-i}{2} = -1-2i \\ z = \frac{-3(1+i)-1+i}{2} = -2-i \end{cases}$$

d) $z^2 + (1+i)z - 2 - i = 0.$

ĐS: $z_1 = 1 ; z_2 = -2 - i.$

Ta có: $a+b+c=1+1+i-2-i=0$

Suy ra PT có hai nghiệm phân biệt $z_1 = 1 ; z_2 = -2 - i.$

e) $z^2 - 8(1-i)z + 63 - 16i = 0.$

ĐS:

$z_1 = 5 - 12i, z_2 = 3 + 4i.$

Ta có: $\Delta' = 16(1-i)^2 - 63 + 16i = -63 - 16i = (1-8i)^2$

Suy ra PT có hai nghiệm phân biệt
$$\begin{cases} z = 4(1-i) - 1 + 8i = 3 + 4i \\ z = 4(1-i) + 1 - 8i = 5 - 12i \end{cases}$$

f) $(2-3i)z^2 + (4i-3)z + 1-i = 0.$

ĐS:

$z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i.$

Ta có $a+b+c=2-3i+4i-3+1-i=0$ nên PT có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = \frac{1-i}{2-3i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = \frac{5}{13} + \frac{1}{13}i \end{cases}$$

g) $2(1+i)z^2 - 4(2-4i)z - 5 - 3i = 0.$

ĐS:

$z_1 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

Ta có $\Delta' = 4(2-4i)^2 + 2(1+i)(5+3i) = -44 - 48i$

BT 38. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2 + 2z + 10 = 0$. Hãy tính

giá trị của biểu thức: $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$?

ĐS: $A = 20.$

Hướng dẫn giải:

Ta có $z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 + 3i = z_1 \\ z = -1 - 3i = z_2 \end{cases}$

$\Rightarrow A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 20$

BT 39. Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình: $2z^2 - 4z + 11 = 0$. Hãy

tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^{2012}}$?

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } 2z^2 - 4z + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2 + 3\sqrt{2}i}{2} = z_1 \\ z = \frac{2 - 3\sqrt{2}i}{2} = z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}i \\ z_2 = 1 - \frac{3}{\sqrt{2}}i \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^{2012}} = \frac{2 \cdot \left(1^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}{2^{2012}} = \frac{11}{2^{2012}}$$

BT 40. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $\frac{z-11}{z-2} = z-1$. Hãy tìm $\left| \frac{z-4i}{z+2i} \right|$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \frac{z-11}{z-2} = z-1 \quad z \neq 2 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + 3i \\ z = 2 - 3i \end{cases}$$

$$\text{Đặt } A = \left| \frac{z-4i}{z+2i} \right|$$

$$\text{TH1: Với } z = 2 + 3i \Rightarrow A = \left| \frac{2+3i-4i}{2-3i+2i} \right| = \left| \frac{2-i}{2-i} \right| = 1$$

$$\text{TH2: Với } z = 2 - 3i \Rightarrow A = \left| \frac{2-3i-4i}{2+3i+2i} \right| = \left| \frac{2-7i}{2+5i} \right| = \frac{|2-7i|}{|2+5i|} = \frac{\sqrt{53}}{\sqrt{29}}$$

BT 41. Tìm số phức z và ω thỏa: $z + \omega = 4 - i$ và $z^3 + \omega^3 = 7 + 28i$? ĐS:

$$\begin{cases} z = 3 + i \\ \omega = 1 - 2i \end{cases} \vee \begin{cases} z = 1 - 2i \\ \omega = 3 + i \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } z^3 + \omega^3 = 7 + 28i \Leftrightarrow z + \omega^3 - 3z\omega \quad z + \omega = 7 + 28i$$

$$\Leftrightarrow (4-i)^3 - 3z\omega(4-i) = 7 + 28i \Leftrightarrow 3z\omega(4-i) = 45 - 75i \Leftrightarrow z\omega = \frac{15-25i}{4-i}$$

$$\Leftrightarrow z\omega = \frac{(15-25i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = 5-5i$$

Suy ra z, ω là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2 - (4-i)t + 5-5i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3+i \\ t = 1-2i \end{cases}$$

Phương trình quy về phương trình bậc hai.

Trong giải phương trình bậc cao, nếu đề cho phương trình có một nghiệm thuần ảo, ta thế $z = bi$ vào phương trình và giải tìm $b \Rightarrow z = bi$. Do có nghiệm $z = bi$ nên chia Hoocner để đưa về phương trình bậc thấp hơn mà đã biết cách giải để tìm nghiệm còn lại. Còn nếu đề bài cho biết có 1 nghiệm thực. Khi đó cần đến khả năng nhẩm nghiệm của phương trình bậc cao (nếu có i thì ta sẽ nhẩm nghiệm sao cho triệt tiêu đi i).

BT 42. Giải các phương trình sau, biết rằng chúng có một nghiệm thuần ảo ?

a) $z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0.$ ĐS: $z = 2i \vee z = 1 \pm i\sqrt{3}.$

Hướng dẫn giải:

Giả sử nghiệm thuần ảo của PT là $z = bi$

$$\Rightarrow b^3 i^3 - 2(i+1)b^2 i^2 + 4(1+i)bi - 8i = 0 \Leftrightarrow -b^3 i + 2b^2 i + 2b^2 + 4bi - 4b - 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 - 4b = 0 \\ b^3 - 2b^2 - 4b + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 2$$

Suy ra PT có nghiệm $z = 2i$

$$PT \Leftrightarrow (z-2i)(z^2 - 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z^2 - 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = 1 \pm \sqrt{3}i \end{cases}$$

b) $z^3 + (1+i)z^2 + (3+i)z + 3i = 0.$ ĐS: $z = -i, z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{11}}{2}.$

Hướng dẫn giải:

Giả sử phương trình có nghiệm thuần ảo là $z = bi$

$$\Rightarrow b^3 i^3 + (1+i)b^2 i^2 + (3+i)bi + 3i = 0 \Leftrightarrow -b^3 i - b^2 - b^2 i + 3bi - b + 3i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^2 - b = 0 \\ -b^3 - b^2 + 3b + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = -1$$

Suy ra PT có nghiệm $z = -i$

$$Ta \text{ có } PT \Leftrightarrow (z+i)(z^2 + z + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ z^2 + z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i \\ z = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2} \end{cases}$$

c) $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0.$ ĐS: $z = 2i \vee z = -1 \pm 2i.$

Hướng dẫn giải:

Tương tự các câu trên.

BT 43. Giải các phương trình sau, biết rằng chúng có một nghiệm thực ?

a) $2z^3 - 5z^2 + 3z + 3 + (2z+1)i = 0.$ ĐS:

$$z = -\frac{1}{2}, z = 1+i, z = 2-i.$$

Phân tích: Do phương trình có nghiệm thực nên dự đoán nghiệm làm triệt tiêu i là $z = -\frac{1}{2}$. Dùng lược đồ Hoocne phân tích phương trình thành tích.

Hướng dẫn giải:

$$\text{PT} \Leftrightarrow (2z+1)(z^2-3z+3+i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ z^2-3z+3+i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{3 \pm (1-2i)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ z = 2-i \\ z = 1+i \end{cases}$$

b) $z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0.$

ĐS: $z = 1, z = i, z = 1 + i.$

Phân tích: Dự đoán nghiệm thực để khi thay vào phương trình làm mất i ta được nghiệm $z = 1$

Hướng dẫn giải:

$$\text{PT} \Leftrightarrow (z-1)(z^2-(1+2i)z+i-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z^2-(1+2i)z+i-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = i \\ z = 1+i \end{cases}$$

BT 44. Giải các phương trình sau trên trường số phức $\mathbb{C}$:

a) $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0.$

ĐS:

$$z = 1 \pm i \quad \vee \quad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i.$$

Hướng dẫn giải:

Vì phương trình không có nghiệm $z = 0$ nên chia hai vế của phương trình cho z^2 :

$$\text{PT} \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} - z + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Đặt } t = z - \frac{1}{z} \Rightarrow t^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} - 2$$

$$\text{PT trở thành: } t^2 + 2 - t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 2t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \Rightarrow z - \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \Leftrightarrow 2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1+i \\ z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \Rightarrow z - \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1-i \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$$

b) $(z-i)(z+2i)(z+4i)(z+7i) = 34.$

ĐS:

$$z = \pm 1 - 3i, \quad z = (-3 \pm 3\sqrt{2})i.$$

Hướng dẫn giải:

$$PT \Leftrightarrow (z^2 + 6iz + 7)(z^2 + 6iz - 8) = 34$$

$$\text{Đặt } t = z^2 + 6iz \text{ thì PT trở thành: } (t + 7)(t - 8) = 34 \Leftrightarrow t^2 - t - 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -9 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 10 \Rightarrow z^2 + 6iz - 10 = 0 \Leftrightarrow z = -3i \pm 1$$

$$\text{Với } t = -9 \Rightarrow z^2 + 6iz + 9 = 0 \Leftrightarrow z = -3i \pm 3\sqrt{2}i$$

c) $iz^3 + z^2 - 1 + 4iz - 2 = 0.$

ĐS:

$$z = 2 \vee z = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Hướng dẫn giải :

$$\text{Ta có } iz^3 + z^2 - 1 + 4iz - 2 = 0 \Leftrightarrow z - 2 - iz^2 + 1 + 2iz + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ iz^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2 \vee z = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

d) $z^3 - (2i - 1)z^2 + (3 - 2i)z + 3 = 0.$

ĐS: $z = -1, z = -i, z = 3i.$

Hướng dẫn giải:

$$PT \Leftrightarrow (z + 1)(z^2 - 2iz + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 2iz + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = -i \\ z = 3i \end{cases}$$

e) $4z^4 - 6 + 10iz^3 + 15i - 8z^2 + 6 + 10iz + 4 = 0.$

ĐS:

$$z = \left\{ -\frac{1}{2}; 2; 2i; \frac{i}{2} \right\}.$$

Hướng dẫn giải:

$$PT \Leftrightarrow (2z + 1)(z - 2)(2z^2 - 5iz - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ z = 2 \\ 2z^2 - 5iz - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ z = 2 \\ z = 2i \\ z = \frac{1}{2}i \end{cases}$$

f) $(z^2 + 3z + 2)(z^2 + 11z + 30) = 60.$

ĐS: $\begin{cases} z = 0, z = -7 \\ z = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases}.$

Hướng dẫn giải:

$$PT \Leftrightarrow (z + 1)(z + 2)(z + 5)(z + 6) = 60 \Leftrightarrow (z^2 + 7z + 6)(z^2 + 7z + 10) = 60$$

Đặt $t = z^2 + 7z$ phương trình trở thành:

$$(t+6)(t+10)=60 \Leftrightarrow t^2+16t=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-16 \end{cases}$$

$$\text{Với } t=0 \Rightarrow z^2+7z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ z=-7 \end{cases}$$

$$\text{Với } t=-16 \Leftrightarrow z^2+7z+16=0 \Leftrightarrow z=\frac{-7 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong tập hợp số phức, căn bậc hai của -4 là:

- A. $-2i$ B. $2i$ C. $\pm 2i$ D. -2

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $-4 = 4i^2 = (\pm 2i)^2$ nên căn bậc hai của -4 là $\pm 2i$

Câu 2. Căn bậc hai của số thực a âm là:

- A. $\sqrt{|a|}$ B. $-i\sqrt{|a|}$ C. $\pm i\sqrt{|a|}$ D. $i\sqrt{|a|}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có a âm nên $a = -|a| = |a|.i^2$ nên căn bậc hai của a là $\pm i\sqrt{|a|}$

Câu 3. Tìm số phức z có phần ảo khác 0, thỏa mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z.\bar{z} = 25$?

- A. $4 + 3i$ B. $4 - 3i$ C. $3 + 4i$ D. $3 - 4i$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} |z - (2 + i)| = \sqrt{10} \\ z.\bar{z} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 2 + (y - 1)i| = \sqrt{10} \\ z.\bar{z} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ x^2 + (10 - 2x)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ 5x^2 - 40x + 75 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 4 \\ x = 5; y = 0 \end{cases}. \text{ Do } z \text{ có phần ảo khác } 0 \text{ nên } z = 3 + 4i$$

Câu 4. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính

$$\mathbb{F} = |z_1| + |z_2|$$

- A. $2\sqrt{5}$ B. 10 C. 3 D. 6

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + 2i = z_1 \\ z = 1 - 2i = z_2 \end{cases}$.

Suy ra: $|z_1| + |z_2| = \sqrt{1+2^2} + \sqrt{1+(-2)^2} = 2\sqrt{5}$

Câu 5. Giải phương trình trên tập số phức: $2x^2 - 6x + 29 = 0$

A. $x = \frac{3+7i}{2}$

B. $x_1 = \frac{3+7i}{2}; x_2 = \frac{3-7i}{2}$

C. $x = \frac{3-7i}{2}$

D. $x = 3 \pm 7i$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $\Delta' = 3^2 - 2.29 = -49 = 49i^2$ nên phương trình có 2 nghiệm:

$$x_1 = \frac{3+7i}{2}; x_2 = \frac{3-7i}{2}$$

Câu 6. Giải phương trình: $x^2 - 4x + 5 = 0$

A. $x_1 = 2 + i; x_2 = 2 - i$

B. $x_1 = 24 + i; x_2 = 4 - i$

C. $x_1 = -1; x_2 = -5$

D. $x_1 = 5; x_2 = 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $\Delta' = 2^2 - 5 = -1 = i^2$ nên phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 2 + i; x_2 = 2 - i$

Câu 7. Tập hợp các nghiệm của phương trình $z = \frac{z}{z+i}$ là:

A. $0; 1-i$

B. 0

C. $1-i$

D. $0, 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Điều kiện: $z \neq -i$.

Phương trình $\Leftrightarrow z(z+i) = z \Leftrightarrow z(z+i-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 1-i \end{cases}$

Câu 8. Nghiệm của phương trình sau trên C: $z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0$

A. $z_1 = -1, z_2 = 5, z_3 = -2 - \sqrt{7}i, z_4 = -2 + \sqrt{7}i$

B. $z_1 = 1, z_2 = -5$

C. $z_1 = 1, z_2 = -5, z_3 = 2 + \sqrt{7}i, z_4 = 2 - \sqrt{7}i$
 $z_2 = 2 - \sqrt{7}i$

D. $z_1 = 2 + \sqrt{7}i,$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0 \Leftrightarrow (a + bi)^2 - 4(a - bi) - 5 = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 4a - 5 + (2ab + 4b)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 4a - 5 = 0 \\ 2ab + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0; a = -1 \\ b = 0; a = 5 \\ a = -2; b = \pm\sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow z = -1; z = 5; z = -2 - \sqrt{7}i; z = -2 + \sqrt{7}i$$

Câu 9. Giải phương trình sau trên $\mathbb{C}$: $z^4 - 9z^2 + 18z - 9 = 0$

A. $z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}, z_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}$

B. $z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}, z_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{4}$

C. $z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}, z_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{4}$

D. $z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{4}, z_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}i}{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có

$$z^4 - 9z^2 + 18z - 9 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 9(z-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 3(z-1) \\ z^2 = -3(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 3z + 3 = 0 \\ z^2 + 3z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2} \\ z = \frac{-3 \pm \sqrt{21}i}{2} \end{cases}$$

(xem lại các đáp án)

Câu 10. Nghiệm của phương trình sau trên $\mathbb{C}$: $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 16$

A. $\begin{cases} z_1 = -3i \\ z_2 = -\frac{1}{3}i \\ z_{3,4} = \frac{\pm 4 - 3i}{5} \end{cases}$

B. $\begin{cases} z_{1,2} = \pm 3i \\ z_{3,4} = \frac{\pm 4 - 3i}{5} \end{cases}$

C. $\begin{cases} z_{1,2} = \pm 3i \\ z_{3,4} = \frac{\pm 4 + 3i}{5} \end{cases}$

D. $\begin{cases} z_{1,2} = \pm \frac{1}{3}i \\ z_{3,4} = \frac{\pm 4 - 3i}{5} \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 16 \Leftrightarrow (z-i)^4 = 16(z+i)^4 \Leftrightarrow \begin{cases} (z-i)^2 = 4(z+i)^2 \\ (z-i)^2 = -4(z+i)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z-i = 2(z+i) \\ z-i = -2(z+i) \\ (z-i)^2 = 4i^2(z+i)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -3i \\ z = -\frac{1}{3}i \\ z-i = \pm 2i(z+i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3i \\ z = -\frac{1}{3}i \\ z = \frac{\pm 4 + 3i}{5} \end{cases}$$

Câu 11. Số nghiệm của phương trình $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$ trên trường số phức là:

- A.2 B.3 C.4 D.5

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có : } \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z+i}{z-i} = \pm 1 \\ \frac{z+i}{z-i} = \pm i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Câu 12. Nghiệm của phương trình sau trên C: $z^2 + 2|z| - 35 = 0$

- A. $z = \pm 5$ B. $z = 1 \pm i$ C. $z = \pm 5i$ D. $z = \pm \sqrt{5}i$

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } z^2 + 2|z| - 35 = 0 \Leftrightarrow (a+bi)^2 + 2\sqrt{a^2+b^2} - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2} - 35 = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; -b^2 + 2\sqrt{b^2} - 35 = 0 \text{ (VN)} \\ b = 0; a^2 + 2\sqrt{a^2} - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \pm 5 \end{cases} \Rightarrow z = \pm 5$$

Câu 13. Nghiệm của phương trình sau trên C: $(z+3)^4 + (z+5)^4 = 16$

A. $\begin{cases} z_1 = -3 \\ z_2 = -5 \\ z_{3,4} = -4 \pm 7i \end{cases}$

B. $\begin{cases} z_{1,2} = \pm 3 \\ z_{3,4} = -4 \pm 7i \end{cases}$

C. $\begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = 5 \\ z_{3,4} = -4 \pm \sqrt{7}i \end{cases}$

D. $\begin{cases} z_1 = -3 \\ z_2 = -5 \\ z_{3,4} = -4 \pm \sqrt{7}i \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = z + 4$ thì phương trình trở thành:

$$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 1 \\ t^2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 1 \\ t = \pm \sqrt{7}i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -3 \\ z = -5 \\ z = -4 \pm \sqrt{7}i \end{cases}$$

Câu 14. Tìm số phức z thỏa mãn $z^2 + 1 = -1 + 2\sqrt{3}i$?

A. $1 + \sqrt{3}i$ và $1 - \sqrt{3}i$

B. $1 + \sqrt{3}i$ và $-1 - \sqrt{3}i$

C. $-1 + \sqrt{3}i$ và $1 - \sqrt{3}i$

D. $1 - \sqrt{3}i$ và $-1 - \sqrt{3}i$

Hướng dẫn giải:

Ta có $z^2 + 1 = -1 + 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i = 1 + 2\sqrt{3}i + 3i^2$

$$\Leftrightarrow z^2 = (1 + \sqrt{3}i)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + \sqrt{3}i \\ z = -1 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

Câu 15. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính

$P = z_1^4 + z_2^4$

A. -14

B. 14

C. $-14i$

D. $14i$

Hướng dẫn giải:

Ta có $P = z_1^4 + z_2^4 = (z_1^2 + z_2^2)^2 - 2z_1^2 z_2^2 = \left[(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 \right]^2 - 2z_1^2 z_2^2$

$$= [2^2 - 2.5]^2 - 2.5^2 = -14 \text{ (theo định lý Viète)}$$

Câu 16. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình

$z^2 + 2z + 3 = 0$. Tọa độ điểm M biểu diễn số phức z_1 là:

A. $M(-1; 2)$

B. $M(-1; -2)$

C. $M(-1; -\sqrt{2})$

D. $M(-1; -\sqrt{2}i)$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^2 + 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 + \sqrt{2}i \\ z = -1 - \sqrt{2}i = z_1 \end{cases}$

Suy ra điểm biểu diễn số phức z_1 là: $M(-1; -\sqrt{2})$

Câu 17. Cho số phức z có phần ảo âm và thỏa mãn $z^2 - 3z + 5 = 0$. Tìm mô đun của số phức: $\omega = 2z - 3 + \sqrt{14}$

- A. 4 B. $\sqrt{17}$ C. $\sqrt{24}$ D. 5

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } z^2 - 3z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i \\ z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i \end{cases}$$

$$\text{Theo giả thiết } z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i \Rightarrow \omega = 2z - 3 + \sqrt{14} = 3 - \sqrt{11}i - 3 + \sqrt{14} = \sqrt{14} - \sqrt{11}i$$

$$\Rightarrow |\omega| = 5$$

Câu 18. Cho số phức $z = 3 + 4i$ và $\bar{z}$ là số phức liên hợp của z . Phương trình bậc hai nhận z và $\bar{z}$ làm nghiệm là:

- A. $z^2 - 6z + 25 = 0$ B. $z^2 + 6z - 25 = 0$ C. $z^2 - 6z + \frac{3}{2}i = 0$ D. $z^2 - 6z + \frac{1}{2} = 0$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z + \bar{z} = 6$ và $z \cdot \bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 25$ nên phương trình bậc hai nhận z và $\bar{z}$ làm nghiệm là: $z^2 - 6z + 25 = 0$

Câu 19. Trong $\mathbb{C}$, cho phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0 (a \neq 0)$. Gọi $\Delta = b^2 - 4ac$. Ta xét các mệnh đề:

- 1) Nếu Δ là số thực âm thì phương trình (*) vô nghiệm
 - 2) Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm số phân biệt
 - 3) Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có một nghiệm kép
- Trong các mệnh đề trên:

- A. Không có mệnh đề nào đúng B. Có một mệnh đề đúng
C. Có hai mệnh đề đúng D. Cả ba mệnh đề đều đúng

Hướng dẫn giải:

Phương trình bậc hai xét trên tập số phức luôn có nghiệm. Hơn nữa:

+) Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm số phân biệt

+) Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có một nghiệm kép

Nên trong 3 mệnh đề trên có 2 mệnh đề đúng.

Câu 20. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^2 + 4 = 0$ có nghiệm là:

A. $\begin{cases} z = 2i \\ z = -2i \end{cases}$

B. $\begin{cases} z = 1 + 2i \\ z = 1 - 2i \end{cases}$

C. $\begin{cases} z = 1 + i \\ z = 3 - 2i \end{cases}$

D. $\begin{cases} z = 5 + 2i \\ z = 3 - 5i \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 = 4i^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ z = -2i \end{cases}$

Câu 21. Trong C, phương trình $\frac{4}{z+1} = 1-i$ có nghiệm là:

A. $z = 2 - i$

B. $z = 3 + 2i$

C. $z = 5 - 3i$

D. $z = 1 + 2i$

Hướng dẫn giải:

Ta có

$$\frac{4}{z+1} = 1-i \Leftrightarrow z+1 = \frac{4}{1-i} \Leftrightarrow z = -1 + \frac{4}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = -1 + 2 \frac{1+i}{1-i} \Leftrightarrow z = 1 + 2i$$

Câu 22. Cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$. Nếu phương trình nhận $z = 1 + i$ làm một nghiệm thì b, c bằng $b, c \in R$:

A. $\begin{cases} b = 3 \\ c = 5 \end{cases}$

B. $\begin{cases} b = 1 \\ c = 5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} b = 4 \\ c = 5 \end{cases}$

D. $\begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Vì $z = 1 + i$ là nghiệm của phương trình nên $(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0$

$$\Leftrightarrow 2i + b + bi + c = 0 \Leftrightarrow (b+2)i + b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Câu 23. Cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Nếu $z = 1 + i, z = 2$ là hai nghiệm của phương trình thì a, b, c bằng $a, b, c \in R$

A. $\begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \\ c = -4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết: $\begin{cases} (1+i)^3 + a(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 \\ 2^3 + a.2^2 + b.2 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3i+3i^2+i^3+2ai+b+bi+c=0 \\ 4a+2b+c=-8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a+b+2)i + b + c - 2 = 0 \\ 4a+2b+c=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+2=0 \\ b+c-2=0 \\ 4a+2b+c=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=6 \\ c=-4 \end{cases}$$

Câu 24. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 9 = 0$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z_1 và z_2 trên mặt phẳng phức. Khi đó độ dài của MN là:

- A. $MN = 4$ B. $MN = 5$ C. $MN = -2\sqrt{5}$ D. $MN = 2\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } z^2 - 4z + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + \sqrt{5}i \\ z = 2 - \sqrt{5}i \end{cases} \Rightarrow M(2; \sqrt{5}), N(2; -\sqrt{5}) \Rightarrow MN = 2\sqrt{5}$$

Câu 25. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z + \frac{1}{z} = -1$. Giá trị của $P = z_1^3 + z_2^3$ là:

- A. $P = 0$ B. $P = 1$ C. $P = 2$ D. $P = 3$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Phương trình: } z + \frac{1}{z} = -1 (z \neq 0) \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

$$\text{Ta có: } P = z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 3z_1z_2 = 1^3 - 3.1.1 = -2$$

(xem lại các đáp án)

Câu 26. Biết số phức z thỏa phương trình $z + \frac{1}{z} = 1$. Giá trị của

$$P = z^{2016} + \frac{1}{z^{2016}} \text{ là:}$$

- A. $P = 0$ B. $P = 1$ C. $P = 2$ D. $P = 3$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Phương trình } z + \frac{1}{z} = 1 \quad z \neq 0 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow z = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$+) \text{ Với } z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow P = z^{2016} + \frac{1}{z^{2016}} = z^{2016} + z^{-2016}$$

$$P = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{2016} + \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{-2016} = 2$$

$$+) \text{ Với } z = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \text{ tính toán tương tự.}$$

Câu 27. Tập nghiệm của phương trình $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$ là:

- A. $\pm\sqrt{2}; \pm 2i$ B. $\pm\sqrt{2}i; \pm 2$ C. $\pm 2; \pm 4i$ D. $\pm 2; \pm 4i$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $z^4 - 2z^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 4 \\ z^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 2 \\ z = \pm \sqrt{2}i \end{cases}$

Câu 28. Tập nghiệm của phương trình $(z^2 + 9)(z^2 - z + 1) = 0$ là:

A. $\left\{ \pm 3; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right\}$ B. $\left\{ \pm 3; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \right\}$ C. $\left\{ \pm 3; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2} \right\}$ D. $\left\{ \pm 3i; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2} \right\}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $(z^2 + 9)(z^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -9 \\ z^2 - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 3i \\ z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

Câu 29. Nghiệm của phương trình $8z^2 - 4z + 1 = 0$ trên tập số phức là:

A. $z = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ và $z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ B. $z = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ và $z = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$
C. $z = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ và $z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ D. $z = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i$ và

$z = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\Delta' = 4 - 8 = -4 = 4i^2$ nên phương trình:

$8z^2 - 4z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm 2i}{8} \Leftrightarrow z = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}i$. Chọn C (xem lại đáp án B)

Câu 30. Nghiệm của phương trình $-3z^2 + 2z - 1 = 0$ trên tập số phức là:

A. $z = \frac{1 + \sqrt{2}i}{3}$ và $z = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$ B. $z = \frac{-1 + \sqrt{2}i}{3}$ và $z = \frac{-1 - \sqrt{2}i}{3}$
C. $z = \frac{1 + \sqrt{2}i}{6}$ và $z = \frac{1 - \sqrt{2}i}{6}$ D. $z = \frac{-1 + \sqrt{2}i}{6}$ và $z = \frac{-1 - \sqrt{2}i}{6}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $\Delta' = 1 - 3 = -2 = 2i^2$ nên phương trình $-3z^2 + 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{3}$

Câu 31. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $A = |z_1 + z_2|$ bằng.

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $2\sqrt{3}$

D. $\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình nên $z_1 + z_2 = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow A = |z_1 + z_2| = 2$

Câu 32. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 7 = 0$. Khi đó $A = z_1^2 + z_2^2$ bằng:

A. -11

B. 11

C. $-\frac{25}{4}$

D. $-\sqrt{3} + 7$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $A = z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{25}{4}$

Câu 33. Trên tập số phức, phương trình $z^3 - 8 = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 3

B. 2

C. 1

D. Vô nghiệm

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $z^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ z^2 + 2z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

Câu 34. Phương trình $z^2 + az + b = 0$ có nghiệm $z = 1 + 2i$. Tổng của a và b là

A. 3

B. 0

C. -3

D. -4

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Theo giả thiết:

$(1 + 2i)^2 + a(1 + 2i) + b = 0 \Leftrightarrow -3 + 4i + a + 2ai + b = 0 \Leftrightarrow (2a + 4)i + a + b - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4 = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$

Câu 35. Số nghiệm của phương trình $7z^2 + 3z + 2 = 0$ trên tập số phức là

A. 2

B. 1

C. 3

D. Vô nghiệm

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = -47 \neq 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 36. Phương trình $z^2 + z + 7 = 0$ có một nghiệm là $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

Nghiệm còn lại của phương trình là

A. $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

B. $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

C. $z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

D. $z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Do phương trình bậc 2 nếu có 2 nghiệm phức thì 2 nghiệm đó là 2 số phức liên hợp nên nghiệm còn lại của phương trình là: $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Dạng toán 4. Dạng lượng giác của số phức (tham khảo)

BT 45. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2 ?

ĐS: $z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{3}i + 1 \\ z = \sqrt{3}i - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ z = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \end{cases}$$

BT 46. Viết số phức z dưới dạng lượng giác, biết rằng: $|z - 1| = |z - i\sqrt{3}|$ và $i\bar{z}$ có 1 argumen bằng $\frac{\pi}{6}$?

ĐS: $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = a + bi \Rightarrow i\bar{z} = b + ai = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}i \right)$

Theo giả thiết $i\bar{z}$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{6}$ nên

$$\begin{cases} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \frac{\pi}{6} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 3a^2 \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Lại có

$$|z-1| = |z-i\sqrt{3}| \Leftrightarrow |a-1+bi| = |a+b-\sqrt{3}i| \Leftrightarrow a-1^2+b^2 = a^2+b-\sqrt{3}^2$$

$\Leftrightarrow a-\sqrt{3}b=-1 \Leftrightarrow a=\sqrt{3}b-1$ thay vào (1) ta được:

$$b^2 = 3(\sqrt{3}b-1)^2 \Leftrightarrow 8b^2-6\sqrt{3}b+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Với $b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

Với $b = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4} (ktm)$

BT 47. Tìm số phức z , biết rằng $|1-2z| = |i-2\bar{z}|$ và $\frac{z+3}{z-3}$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{4}$?

ĐS: $z = \frac{3+3\sqrt{3}}{2} - \frac{3+3\sqrt{3}}{2}i.$

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = a+bi$

Ta có: $|1-2z| = |i-2\bar{z}| \Leftrightarrow |1-2a-2bi| = |-2a+1+2bi|$

$$\Leftrightarrow (1-2a)^2 + 4b^2 = 4a^2 + (1+2b)^2 \Leftrightarrow b = -a \Rightarrow z = a-ai$$

Lại có: $\frac{z+3}{z-3} = \frac{a+3-ai}{a-3-ai} = \frac{(a+3-ai)(a-3+ai)}{(a-3)^2+a^2} = \frac{2a^2-9+6ai}{2a^2-6a+9}$

Theo giả thiết: $\begin{cases} \frac{2a^2-9}{2a^2-6a+9} = r \cos \frac{\pi}{4} \\ \frac{6a}{2a^2-6a+9} = r \sin \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 2a^2-9 > 0 \\ 2a^2-9 = 6a \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$

Vậy $z = \frac{3+3\sqrt{3}}{2} - \frac{3+3\sqrt{3}}{2}i.$

BT 48. Tìm số phức z , biết rằng $|z| = |2\bar{z} - \sqrt{3} + i|$ và $\frac{1+i}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{z}{1+\sqrt{3}i}$ có một argumen bằng $-\frac{\pi}{6}$?

ĐS: $z = \sqrt{3} + i, z = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} \cdot i.$

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) (r > 0)$

Ta có: $|z| = |2\bar{z} - \sqrt{3} + i| \Leftrightarrow |a + bi| = |2a - \sqrt{3} + 1 - 2bi|$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = (2a - \sqrt{3})^2 + (1 - 2b)^2 \Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 - 4\sqrt{3}a - 4b + 4 = 0 \quad (1)$

Lại có:

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{z}{1+\sqrt{3}i} &= \frac{1-\sqrt{3}i}{8} \cdot z = \frac{1}{2} r \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \cos \varphi + i \sin \varphi \\ &= \frac{1}{2} r \left(\cos \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right) \right) \end{aligned}$$

Theo giả thiết $\Rightarrow \varphi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ a = \sqrt{3}b \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được: $12b^2 - 16b + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{3} + i \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i \end{cases}$

BT 49. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-1| = |z-3|$ và một argument của $z-3$ bằng một argument của $z+3$ cộng với $\frac{\pi}{2}$?

ĐS: $z = 3 + i\sqrt{5}.$

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = a + bi$

Ta có $|z-1| = |z-3| \Leftrightarrow |a-1+bi| = |a-3+bi|$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = (a-3)^2 + b^2 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow z = 2 + bi$

Giả sử $z-3 = -1+bi = \sqrt{1+b^2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z+3 &= 5+bi = \sqrt{25+b^2} \left(\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} = -\frac{b}{\sqrt{25+b^2}} = -\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{5}{\sqrt{25+b^2}} = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{25+b^2} = b\sqrt{1+b^2} \\ b\sqrt{25+b^2} = 5\sqrt{1+b^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ 25+b^2 = b^4+b^2 \\ 25b^2+b^4 = 25+25b^2 \end{cases} &\Leftrightarrow b = \sqrt{5} \Rightarrow z = 2 + \sqrt{5}i \end{aligned}$$

BT 50. Cho số phức z thỏa mãn $|z| + 1 + i\sqrt{3} z = 3$. Hãy tìm môđun của số phức

$$w = z + z^2 + z^{123} ?$$

ĐS: $|w| = 2$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $z = a + bi$

Theo giả thiết $\sqrt{a^2+b^2} = (1+i\sqrt{3})(a+bi) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} + a - b\sqrt{3} = 3 \\ b = -a\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$w = z + z^2 + z^{123} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{123\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{123\pi}{3}\right)$$

$$w = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -1 - \sqrt{3}i \Rightarrow |w| = 2$$

BT 51. Tìm argumen âm lớn nhất của số phức $z = 1 + i\sqrt{3}^{10}$?

ĐS: $\varphi_{<0;\max} = -\frac{2\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $z = 1 + i\sqrt{3}^{10} = 2^{10} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{10} = 2^{10} \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3} \right)$

$$\Rightarrow z = 2^{10} \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

Vậy argumen âm lớn nhất của z là $-\frac{2\pi}{3}$

BT 52. Tìm số phức z thỏa $|z+3+i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ và có argumen dương nhỏ nhất ?

ĐS: $z = -3$.

.....

BT 53. Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn: $z = \left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3i} \right)^n$ là số thực ?

ĐS: $n = 6k, 1 \leq k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } z &= \left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3i} \right)^n = \left(\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \right)^n = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right)^n \\ &= \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6} \end{aligned}$$

Để z là số thực thì $\sin\frac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow n = 6k$

BT 54. Cho số phức $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}} \right)^n$ là số thực và số phức $z_2 = \left(\frac{5 - i}{2 - 3i} \right)^{n+2}$ là số ảo.

Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất ?

ĐS: $n = 12$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z_1 &= \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}} \right)^n = \left(\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \right)^n = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6} \\ z_2 &= \left(\frac{5 - i}{2 - 3i} \right)^{n+2} = \left(\frac{5 - i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} \right)^{n+2} = \left(\frac{5 - i}{13} \right)^{n+2} = 1 - i^{n+2} \\ &= (\sqrt{2})^{n+2} \left(\cos\left(-\frac{(n+2)\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{(n+2)\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

Theo giả thiết z_1 là số thực và z_2 là số ảo nên:

$$\begin{cases} \sin \frac{n\pi}{6} = 0 \\ \cos \left(-\frac{(n+2)\pi}{4} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6k \\ (n+2) = 2 + 4k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n = 12k$$

BT 55. Số phức z thỏa: $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tìm số phức $w = \left(\frac{1 + \sqrt{3} - z}{2 + z} \right)^7$?

ĐS: $w = -\frac{\sqrt{3} + 1}{32} \pm \frac{\sqrt{3} - 1}{32}i$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $z^2 - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{3}i$

Với $z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow w = \left(\frac{1 + \sqrt{3} - z}{2 + z} \right)^7 = \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}i}{3 + \sqrt{3}i} \right)^7 = \left(\frac{1 - i}{\sqrt{3} + i} \right)^7 = \left[\frac{\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} \right]^7$

$$w = \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{3} \right) \right) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

Với $z = 1 - \sqrt{3}i \Rightarrow w = \left(\frac{1 + \sqrt{3} - z}{2 + z} \right)^7 = \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i}{3 - \sqrt{3}i} \right)^7 = \dots$

BT 56. Cho số phức z thỏa: $2|z| + \sqrt{3}iz = 4 - z$. Tính $w = z^{2012} + \frac{1}{z^{2013}}$?

ĐS: $w = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Hướng dẫn giải:

.....

.....

BT 57. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau:

a) $z = (\sqrt{3} + i)^8$.

Ta có: $z = (\sqrt{3} + i)^8 = \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right]^8 = 2^8 \left(\cos \frac{8\pi}{6} + i \sin \frac{8\pi}{6} \right) = 2^8 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

Suy ra: Phần thực -2^7 còn phần ảo là $-2^7 \cdot \sqrt{3}$

b) $w = z^{2014} + \frac{1}{z^{2014}}$ biết $z + \frac{1}{z} = 1$.

Ta có: $z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}i$

Với $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow w = z^{2014} + \frac{1}{z^{2014}} = \cos \frac{2014\pi}{3} + i \sin \frac{2014\pi}{3} + \cos \frac{-2014\pi}{3} + i \sin \frac{-2014\pi}{3}$$

$$\Rightarrow w =$$

c) $z = \frac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^9}$

Ta có: $z = \frac{\sqrt{2}^{10} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{10}}{2^9 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^9} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2}}{\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6}} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{i}{-i} = -\frac{1}{16}$

d) $z = \frac{(1+i)^{2012}}{(\sqrt{3}+i)^{2011}}$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{2}^{2012} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{2012}}{2^{2011} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{2011}} = \frac{1}{2^{1005}} \cdot \frac{\left(\cos \frac{2012\pi}{4} + i \sin \frac{2012\pi}{4} \right)}{\cos \frac{2011\pi}{6} + i \sin \frac{2011\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2^{1005}} \cdot \frac{-1}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{1}{2^{1005}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \end{aligned}$$

Suy ra phần thực $\frac{\sqrt{3}}{2^{1006}}$, phần ảo $-\frac{1}{2^{1006}}$

