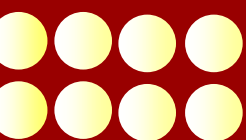
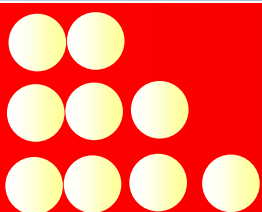
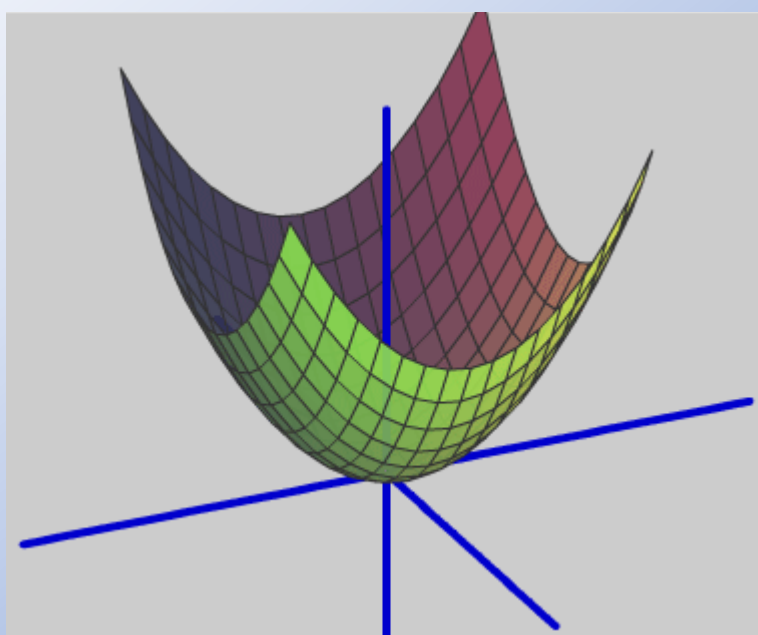


CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10



MÔN TOÁN

PHẦN I: ĐẠI SỐ



TÀI LIỆU CHƯA ĐĂNG KÝ BẢN QUYỀN
NÊN CHỈ ĐƯỢC LƯU HÀNH NỘI BỘ! KHÔNG ĐƯỢC PHÁT HÀNH.

KHÁI QUÁT KIẾN THỨC TẬP HỢP

1. Tập hợp số tự nhiên

Ký hiệu là: $\mathbb{N}$.

Phần tử của tập hợp:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots, n, \dots \}$$

Các ký hiệu khác:

Tập hợp số tự nhiên có số "0":

$$\mathbb{N}_0 = \{ 0, 1, 2, \dots, n, \dots \}$$

Tập hợp số tự nhiên không chứa số "0" là:

$$\mathbb{N}^* = \{ 1, 2, \dots, n, \dots \}.$$

Các tính chất của phép cộng các số tự nhiên:

Với a, b, c là các số tự nhiên, ta có:

(1) Tính chất giao hoán: $a + b = b + a$

(2) Tính chất kết hợp: $(a + b) + c = a + (b + c)$

(3) Tính đồng nhất khi cộng: $a + 0 = 0 + a = a$.

(4) Tính chất phân phối của phép cộng đối với phép nhân: $(b + c)a = b.a + c.a$

Các tính chất của phép nhân các số tự nhiên:

Với a, b, c là các số tự nhiên, ta có:

(1) Tính chất giao hoán: $a.b = b.a$

(2) Tính chất kết hợp: $(a.b).c = a.(b.c) = a.b.c$

(3) Tính đồng nhất khi nhân: $a.1 = 1.a = a$

(4) Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng: $a(b + c) = a.b + a.c$

2. Tập hợp số nguyên

Ký hiệu là: $\mathbb{Z}$.

Phần tử của tập hợp:

$$\mathbb{Z} = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots \}$$

Các ký hiệu khác:

Tập hợp các số nguyên âm là $-\mathbb{N} = \{ -1, -2, \dots, -n, \dots \}$

Tập hợp các số nguyên dương là $+\mathbb{N} = \{ +1, +2, \dots, +n, \dots \}$

Các phép toán trên số nguyên:

Toán Cộng	Toán Trừ	Toán Nhân	Toán Chia
$a + 0 = a$	$a - 0 = a$	$a \times 0 = 0$	$\frac{a}{0} = \infty$
$a + a = 2a$	$a - a = 0$	$a \times 1 = a$	$\frac{a}{1} = a$
$a + (-a) = 0$	$(a) - (-a) = 2a$	$a \times a = a^2$	$\frac{a}{a} = 1$
		$a \times \left(\frac{1}{a}\right) = 1$	$\frac{a}{-1} = -a$

3. Tập hợp số hữu tỷ

Ký hiệu là: $\mathbb{Q}$.

Phần tử của tập hợp:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n}, n \neq 0; m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Một số ký hiệu khác:

Tập hợp các số hữu tỷ không âm là $\mathbb{Q}_+$.

Tập hợp các số hữu tỷ dương là $\mathbb{Q}^*$.

Các cách biểu diễn số hữu tỷ:

Biểu diễn trong hệ thập phân và các hệ cơ số khác.

Số hữu tỉ có thể là số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Dãy các chữ số lặp lại trong biểu diễn thập phân của các số thập phân vô hạn tuần hoàn được gọi là chu kỳ.

Số các chữ số trong chu kỳ này có thể chứng minh được rằng không vượt qua giá trị tuyệt đối của b .

Biểu diễn bằng liên phân số.

Một số thực là số hữu tỷ khi và chỉ khi biểu diễn liên phân số của nó là hữu hạn.

4. Tập hợp số thực

Ký hiệu là: $\mathbb{R}$

Các ký hiệu khác:

Tập hợp số thực không âm là $\mathbb{R}_+$

Tập hợp các số thực dương là $\mathbb{R}^*$

Các phép toán trên tập số thực:

Phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia, phép lũy thừa, phép logarit.

5. Tập hợp số vô tỷ

Ký hiệu là: $\mathbb{I}$

Phần tử của tập hợp:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Trong toán học, số vô tỷ là số thực không phải là số hữu tỷ, nghĩa là không thể biểu diễn được

dưới dạng tỉ số $\frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên.

Ví dụ:

Số thập phân vô hạn có chu kỳ thay đổi: 0.1010010001000010000010000001...

Số $\sqrt{2} = 1,41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 24209\ 7...$

Số pi (π) = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679...

6. Các phép toán trên tập hợp:

a. Hợp của các tập hợp:

Định nghĩa: Hợp của tập hợp A và tập hợp B là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp A và B .

Ký hiệu: $A \cup B$

Phần tử của $A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

b. Giao của các tập hợp:

Định nghĩa: Giao của tập hợp A và tập hợp B là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc hai tập hợp A và B .

Ký hiệu: $A \cap B$

Phần tử của $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$

c. Hiệu của các tập hợp:

Định nghĩa: Hiệu của tập hợp A và tập hợp B là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập hợp B .

Ký hiệu: $A \setminus B$

Phần tử của $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$

d. Phần của các tập hợp:

Định nghĩa: Nếu $A \subset B$ thì $B \setminus A$ được gọi là phần bù của tập hợp A trong tập hợp B .

Ký hiệu: $C_A B$.

CHUYÊN ĐỀ 2 CĂN THỨC

1. Căn bậc hai:

Khái niệm: x được gọi là căn bậc hai của số không âm a
 $\Leftrightarrow x^2 = a$.

Kí hiệu: $x = \sqrt{a}$, với $a \geq 0$.

Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{A}$ là: $\sqrt{A}$ xác định $\Leftrightarrow A \geq 0$.

Ví dụ:

(1) Căn bậc hai của 25 là $\sqrt{25} = \pm 5$.

(2) Căn bậc hai của 12 là $\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$.

(3) Điều kiện để $\sqrt{x-2}$ có nghĩa là $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

(4) Tính $\sqrt{(x+3)^2}$.

Ta có: $\sqrt{(x+3)^2} = |x+3| = \pm(x+3)$

Hay

$$\sqrt{(x+3)^2} = x+3 \text{ và } \sqrt{(x+3)^2} = -(x+3) = -x-3$$

Các phép biến đổi căn thức

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}, \quad (A \geq 0; B \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}, \quad (A \geq 0; B > 0)$$

$$\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}, \quad (B \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{A \cdot B}, \quad (A \cdot B \geq 0; B \neq 0)$$

$$\frac{m}{A \pm \sqrt{B}} = \frac{m \cdot (A \mp \sqrt{B})}{A^2 - B}, \quad (B \geq 0; A^2 \neq B)$$

$$\frac{n}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{n \cdot (\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}, \quad (A \geq 0; B \geq 0; A \neq B)$$

$$\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = \sqrt{m \pm 2\sqrt{m \cdot n} + n} = \sqrt{(\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2} = |\sqrt{m} \pm \sqrt{n}|, \text{ (với } m, n \geq 0, \text{ với}$$

$$\begin{cases} m+n=A \\ m \cdot n=B \end{cases}$$

$$\sqrt{A^2} = |A|$$

Lưu ý: Với mọi số thực a , giá trị tuyệt đối của a .

Kí hiệu: $|a|$

Định nghĩa:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

Định nghĩa trên cho thấy, giá trị tuyệt đối của a là một số không âm.

2. Căn bậc ba:

Ký hiệu: Căn bậc ba của một biểu thức (hoặc một số) A là: $\sqrt[3]{A}$.

Ta có: $\sqrt[3]{A^3} = A$.

Ví dụ:

$$1) \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$2) \sqrt[3]{(x-2)^3} = x-2$$

3. Căn bậc cao:

Căn bậc chẵn: Với mọi số tự nhiên $m, n, k > 1$, ta có:

$$\sqrt[2k]{A^{2k}} = |A|.$$

$$\sqrt[2k]{A.B} = \sqrt[2k]{|A|} \cdot \sqrt[2k]{|B|}, \quad (A.B \geq 0)$$

$$\sqrt[2k]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[2k]{|A|}}{\sqrt[2k]{|B|}}, \quad (A.B \geq 0; B \neq 0)$$

$$\sqrt[2k]{A^{2k}.B} = |A| \cdot \sqrt[2k]{B}, \quad (B \geq 0)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[m.n]{A}, \quad (A \geq 0)$$

Ví dụ:

(1) Căn bậc 4 của 16 là $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = \pm 2$.

(2) Căn bậc 4 của $(x+2)^2$ là $\sqrt[4]{(x+2)^2} = \sqrt{x+2}, \quad (x+2 \geq 0)$.

Chú ý: $\sqrt[2k]{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$.

Căn bậc lẻ: Với mọi số tự nhiên $m, n, k > 1$, ta có:

$$\sqrt[2k+1]{A^{2k+1}} = A.$$

$$\sqrt[2k+1]{A.B} = \sqrt[2k+1]{A} \cdot \sqrt[2k+1]{B}$$

$$\sqrt[2k+1]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[2k+1]{A}}{\sqrt[2k+1]{B}}, \quad (B \neq 0)$$

$$\sqrt[2k+1]{A^{2k+1}.B} = A \cdot \sqrt[2k+1]{B}$$

Ví dụ:

(1) Căn bậc 3 của 27 là $\sqrt[3]{27} = 3$.

(2) Căn bậc 3 của $(4-x)^3$ là $\sqrt[3]{(4-x)^3} = 4-x$.

Chú ý: Đối với căn bậc lẻ thì biểu thức trong dấu căn không quy định dấu âm hoặc dương.

$$= (3^4 - 1)(3^4 + 1) \\ = 3^8 - 1$$

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Phân tích các hằng đẳng thức sau:

a) $(3x + 4)^2$ b) $(2x - 5)^2$ c) $49 - x^4$

Bài tập 2: Phân tích các hằng đẳng thức sau:

a) $(x + y + z)^3$ b) $(y - z + t)^3$
c) $8x^3 - 125$ b) $27y^3 + 64z^3$

Bài tập 3: Viết các biểu thức sau dưới dạng hằng đẳng thức:

a) $x^2 - 6x + 9$ b) $25 + 10x + x^2$
c) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$ d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

Bài tập 4: Viết các biểu thức sau dưới dạng hằng đẳng thức:

a) $x^2 + 10x + 26 + y^2 + 2y$ b) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + 1$
c) $x^2 - 6x + 5 - y^2 - 4y$ d) $4x^2 - 12x - y^2 + 2y + 1$

Bài tập 5: Rút gọn biểu thức:

a) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 - 3(x + 1)(x - 1)$

b) $5(x - 2)(x + 2) - \frac{1}{2}(6 - 8x)^2 + 17$

c) $(x + y)^3 + (x - y)^3$

d) $(x + y - z)^2 - (x - z)^3 - 2xy + 2yz$.

Bài tập 6: Cho $x + y = 7$. Tính giá trị của biểu thức: $M = (x + y)^3 + 2x^2 + 4xy + 2y^2$.

Bài tập 7: Cho $x - y = 7$. Tính giá trị của biểu thức: $A = x(x + 2) + y(y - 2) - 2xy + 37$.

Bài tập 8: Cho $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2(a + b + c)$. Chứng minh rằng: $a = b = c = 1$.

Bài tập 9: Chứng minh rằng: $(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$.

Từ đó hãy nêu những cách tính nhẩm bình phương của một số tự nhiên có tận cùng bằng chữ số 5.

Áp dụng để tính: 25^2 ; 35^2 ; 65^2 ; 75^2 .

Bài tập 10: Tính: $A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - 2004^2 + 2005^2$.

CHUYÊN ĐỀ 4

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

1. Kiến thức cần nhớ:

Phân tích đa thức thành nhân tử là một kiến thức thuộc chương trình Toán lớp 8. Đây là dạng toán tương đối phức tạp. Loại toán này thường được áp dụng rộng rãi trong các kỳ thi HSG, thi chuyên cấp, thi vào trường chuyên, ...

Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử:

Phương pháp 1: Dùng hằng đẳng thức đáng nhớ.

Phương pháp 2: Đặt nhân tử chung.

Phương pháp 3: Tách hạng tử.

Phương pháp 4: Phối hợp nhiều phương pháp.

Phương pháp 5: Thêm và bớt cùng một hạng tử.

Phương pháp 6: Đổi biến số.

Phương pháp 7: Xét giá trị riêng.

Phương pháp 8: Dùng hệ số bất định.

Phương pháp 9: Nhẩm nghiệm.

2. Phương pháp dùng hằng đẳng thức đáng nhớ

Phương pháp:

Nắm chắc 7 hằng đẳng thức đáng nhớ và các hằng đẳng thức nâng cao.

Nhận dạng hằng đẳng thức với các dạng biểu thức phức tạp.

Ví dụ:

Nếu ta biết hằng đẳng thức bình phương của một tổng là $(A + B)^2$ thì $[(A + C) + (B - C)]^2$ ta phải biết.

Hạ bậc lũy thừa của một biến hoặc một số và đưa về dạng hằng đẳng thức.

Thêm một chút tư duy, sáng tạo trong cách biến đổi xuất hiện hằng đẳng thức.

a) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $(x + y)^2 - (x - y)^2$ thành nhân tử.

Giải

$$\begin{aligned}(x + y)^2 - (x - y)^2 &= [(x + y) - (x - y)][(x + y) + (x - y)] \\&= (x + y - x + y)(x + y + x - y) \\&= 2y \cdot 2x = 4xy.\end{aligned}$$

Bài tập 2: Phân tích $a^6 - b^6$ thành nhân tử.

Giải

$$\begin{aligned}a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) \\&= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)\end{aligned}$$

Bài tập 3: Phân tích đa thức $x^{12} - y^4$ thành nhân tử.

Giải

$$x^{12} - y^4 = (x^6)^2 - (y^2)^2 = (x^6 + y^2)(x^6 - y^2) = (x^6 + y^2)(x^3 - y)(x^3 + y)$$

Bài tập 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 - 4x^3 + 4x - 1$

Giải

$$\begin{aligned}x^4 - 4x^3 + 4x - 1 &= (x^4 - 4x^3 + 4x^2) - (4x^2 - 4x + 1) \\&= x^2(x - 2)^2 - (2x - 1)^2 = [(x(x - 2) + 2x - 1)][x(x - 2) - (2x - 1)] \\&= (x^2 - 1)(x^2 - 4x + 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 - 4x + 1)\end{aligned}$$

Bài tập 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

Giải

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 &= (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)(x + 1) + (x + 1)^2 \\&= [(x^2 - 1) - (x + 1)]^2 = (x + 1)^2(x - 2)^2\end{aligned}$$

Bài tập 6: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $9x^2 - 4$

Giải

$$9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x - 2)(3x + 2)$$

Bài tập 7: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $8 - 27a^3b^6$

Giải

$$8 - 27a^3b^6 = 2^3 - (3ab^2)^3 = (2 - 3ab^2)(4 + 6ab^2 + 9a^2b^4)$$

Bài tập 8: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $25x^4 - 10x^2y + y^2$

Giải

$$25x^4 - 10x^2y + y^2 = (5x^2 - y)^2$$

Bài tập 9: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $a^{16} + a^8b^8 + b^{16}$

Giải

Ta có thể viết:

$$\begin{aligned} a^{16} + a^8b^8 + b^{16} &= a^{16} + 2a^8b^8 + b^{16} - a^8b^8 \\ &= (a^8 + b^8)^2 - (a^4b^4)^2 \\ &= (a^8 + b^8 - a^4b^4)(a^8 + b^8 + a^4b^4) \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} a^8 + b^8 + a^4b^4 &= (a^4 + b^4)^2 - (a^2b^2)^2 \\ &= (a^4 + b^4 - a^2b^2)(a^4 + b^4 + a^2b^2) \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + a^2b^2 &= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \\ &= (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab) \end{aligned}$$

Do đó, ta có:

$$a^{16} + a^8b^8 + b^{16} = (a^8 - a^4b^4 + b^8)(a^4 - a^2b^2 + b^4)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$$

Bài tập 10: Phân tích đa thức sau ra thừa số: $A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

Giải

Ta có thể viết:

$$\begin{aligned} A &= x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 \\ &= (x^4 + 3x^3 - x^2) + (3x^3 + 9x^2 - 3x) - x^2 - 3x + 1 \\ &= x^2(x^2 + 3x - 1) + 3x(x^2 + 3x - 1) - (x^2 + 3x - 1) \\ &= (x^2 + 3x - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = (x^2 + 3x - 1)^2$$

b) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $(x + y)^2 - 9x^2$

Bài tập 2: Phân tích đa thức $(2n + 5)^2 - 25$ thành nhân tử.

Bài tập 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $64 - 27a^3b^6$.

Bài tập 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4(x + 1)^2 - 25(x - 1)^4$

Bài tập 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $25(2x + 3)^2 - 10(4x^2 - 9) + (2x - 3)^2$

Bài tập 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

Bài tập 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 2x^2y + xy^2 - 9x$

Bài tập 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

Bài tập 9: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $A = (a + 1)(a + 3)(a + 5)(a + 7) + 15$

b) $B = 4x^2y^2(2x + y) + y^2z^2(z - y) - 4z^2x^2(2x + z)$

3. Phương pháp đặt nhân tử chung

Phương pháp:

Tìm nhân tử chung của các hệ số nếu có (ƯCLN của các hệ số) hoặc là những đơn, đa thức có mặt trong tất cả các hạng tử.

Phân tích mỗi hạng tử thành tích của nhân tử chung và một nhân tử khác hoặc nhân tử chung của các biến (mỗi biến chung lấy số mũ nhỏ nhất).

Nhằm đưa về dạng:

$$A.B + A.C = A(B + C).$$

$$A.B + A.C + A.D = A.(B + C + D).$$

Viết nhân tử chung ra ngoài dấu ngoặc, viết các nhân tử còn lại của mỗi hạng tử vào trong dấu ngoặc (kể cả dấu của chúng).

Lưu ý:

Đối với đa thức thì ta có cách biến đổi như sau:

Tìm nghiệm của đa thức (đối xứng thì có thể là -1 hoặc 1)

Đối với các đa thức bậc chẵn thì ta chia cho x^2 (với x^2 không là nghiệm của đa thức).

Đối với đa thức bậc lẻ thì ta nhằm nghiệm là thương của ước hạng tử có số mũ cao nhất và ước của hạng tử tự do. Rồi đưa đa thức về đa thức bậc lẻ và làm tương tự.

Ta có thể áp dụng thêm quy tắc đồng nhất hệ số (chú ý phải giải hệ phương trình hoặc cách khác để tìm các hệ số của các đa thức):

Ví dụ: Phân tích đa thức: $ax^2 + bx + c = (ax + d)(x + e)$

Một đa thức bậc hai có thể phân tích thành tích của hai đa thức bậc nhất.

Một đa thức bậc ba có thể phân tích thành tích của hai đa thức bậc nhất và bậc hai.

Các đa thức còn lại thì có thể phân tích tương tự.

Dạng chung:

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = (a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0) (a_q x^q + a_{q-1} x^{q-1} + \dots + a_1 x + a_0)$$

(Với $p + q = n$ và $p, q, n \in \mathbb{N}$)

a) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $14x^2 y - 21xy^2 + 28x^2 y^2$ thành nhân tử.

Giải

$$\begin{aligned} 14x^2 y - 21xy^2 + 28x^2 y^2 &= 7xy.2x - 7xy.3y + 7xy.4xy \\ &= 7xy.(2x - 3y + 4xy) \end{aligned}$$

Bài tập 2: Phân tích đa thức $10x(x - y) - 8y(y - x)$ thành nhân tử.

Giải

$$\begin{aligned} 10x(x - y) - 8y(y - x) &= 10x(x - y) + 8y(x - y) \\ &= 2(x - y).5x + 2(x - y).4y \\ &= 2(x - y)(5x + 4y) \end{aligned}$$

Bài tập 3: Phân tích đa thức $9x(x - y) - 10(y - x)^2$ thành nhân tử.

Giải

$$\begin{aligned} 9x(x - y) - 10(y - x)^2 &= 9x(x - y) - 10(x - y)^2 \\ &= (x - y)[9x - 10(x - y)] \\ &= (x - y)(10y - x) \end{aligned}$$

Bài tập 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $2x(y - z) + 5y(z - y)$

Giải

$$2x(y - z) + 5y(z - y) = 2(y - z) - 5y(y - z) = (y - z)(2 - 5y)$$

Bài tập 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^m + x^{m+3}$

Giải

$$x^m + x^{m+3} = x^m (x^3 + 1) = x^m (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

b) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $x^3 - 2x^2 + x$ thành nhân tử.

Bài tập 2: Phân tích đa thức $5x^2 y^3 - 25x^3 y^4 + 10x^3 y^3$ thành nhân tử.

Bài tập 3: Phân tích đa thức $5(x - y) - y(x - y)$ thành nhân tử.

Bài tập 4: Phân tích đa thức $15x^4 - 10x^2 y^2 + 5x^5 y^4$ thành nhân tử.

Bài tập 5: Phân tích đa thức $xt(z - y) - yt(y - z)$ thành nhân tử.

3. Phương pháp nhóm hạng tử

Phương pháp:

Dùng các tính chất giao hoán, kết hợp của phép cộng các đa thức, ta kết hợp những hạng tử của đa thức thành từng nhóm thích hợp, rồi dùng các phương pháp khác phân tích nhân tử theo từng nhóm và phân tích chung đối với các nhóm.

Lựa chọn các hạng tử “thích hợp” để thành lập nhóm nhằm làm xuất hiện một trong hai dạng sau hoặc là đặt nhân tử chung, hoặc là dùng hằng đẳng thức.

Thông thường ta dựa vào các mối quan hệ sau:

Quan hệ giữa các hệ số, giữa các biến của các hạng tử trong bài toán.

Thành lập nhóm dựa theo mối quan hệ đó, phải thoả mãn:

Mỗi nhóm đều phân tích được.

Sau khi phân tích đa thức thành nhân tử ở mỗi nhóm thì quá trình phân tích thành nhân tử phải tiếp tục thực hiện được nữa.

Dạng bài toán:

$$\begin{aligned} A.B + A.C + E.B + E.C &= (A.B + A.C) + (E.B + E.C) \\ &= A(B + C) + E(B + C) \\ &= (B + C)(A + E) \end{aligned}$$

a) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $x^2 - xy + x - y$ thành nhân tử.

Giải

$$x^2 - xy + x - y = (x^2 - xy) + (x - y)$$

$$= x(x - y) + 1.(x - y)$$

$$= (x - y)(x + 1)$$

Bài tập 2: Phân tích đa thức $x^2 - 2x + 1 - 4y^2$ thành nhân tử.

Giải

$$x^2 - 2x + 1 - 4y^2 = (x^2 - 2x + 1) - (2y)^2$$

$$= (x - 1)^2 - (2y)^2$$

$$= (x - 1 - 2y)(x - 1 + 2y)$$

Bài tập 3: Phân tích đa thức $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$ thành nhân tử.

Giải

$$x^2 - 2x - 4y^2 - 4y = (x^2 - 4y^2) + (-2x - 4y)$$

$$= (x + 2y)(x - 2y) - 2(x + 2y)$$

$$= (x + 2y)(x - 2y - 2)$$

Bài tập 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $P = x^4 + x^3 + 2(m-1)x^2 + mx + m^2$.

Giải

$$P = m^2 + m(2x^2 + x) + x^4 + x^3 - 2x^2$$

$$= m^2 + 2m\left(x^2 + \frac{x}{2}\right) + \left(x^4 + 2x^2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) - \frac{9x^2}{4}$$

$$= \left(m + x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2$$

$$= (m + x^2 + 2x)(m + x^2 - x)$$

Bài tập 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

Giải

$$2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = (2x^3 + 2x) - (3x^2 + 3)$$

$$= 2x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + 1)(2x - 3)$$

Bài tập 6: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 - 2xy + y^2 - 16$

Giải

$$x^2 - 2xy + y^2 - 16 = (x - y)^2 - 4^2$$

$$= (x - y - 4)(x - y + 4)$$

b) Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Phân tích đa thức $xy + xz + 3y + 3z$ thành nhân tử.

Bài tập 2: Phân tích đa thức $x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ thành nhân tử.

Bài tập 3: Phân tích đa thức $x^2y^2 + 1 - y^2 - x^2$ thành nhân tử.

Bài tập 4: Phân tích đa thức $a^3 + b^3 - a - b$ thành nhân tử.

Bài tập 5: Phân tích đa thức $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$ thành nhân tử.

4. Phương pháp tách hạng tử

Phương pháp:

Tách hạng tử thành nhiều hạng tử nhằm:

Làm xuất hiện hằng đẳng thức hiệu của hai bình phương hoặc hiệu của hai hạng tử là $a^n - b^n$.

Làm xuất hiện các hệ số ở mỗi hạng tử tỷ lệ với nhau, nhờ đó làm xuất hiện nhân tử chung.

Làm xuất hiện hằng đẳng thức và nhân tử chung.

Việc tách hạng tử thành nhiều hạng tử khác là nhằm làm xuất hiện các phương pháp đã học như: Đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm nhiều hạng tử là việc làm hết sức cần thiết đối với học sinh trong giải toán.

Chú ý:

Để phân tích đa thức dạng tam thức bậc hai: $ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) thành nhân tử.

Ta tách hạng tử: $bx = b_1x + b_2x$ sao cho $b_1b_2 = ac$

Đối với đa thức $f(x)$ có bậc từ ba trở lên, để làm xuất hiện các hệ số tỉ lệ, tùy theo đặc điểm của các hệ số mà ta có cách tách riêng cho phù hợp nhằm để vận dụng phương pháp nhóm hoặc hằng đẳng thức hoặc đặt nhân tử chung.

Phương pháp chung:

Bước 1: Tìm tích ac , rồi phân tích $a.c$ ra tích của hai thừa số nguyên bằng mọi cách:

$$a.c = a_1.c_1 = a_2.c_2 = a_3.c_3 = \dots = a_i.c_i = \dots$$

Bước 2: Chọn hai thừa số có tổng bằng b, chẳng hạn chọn tích:

$$a.c = a_i.c_i \text{ với } b = a_i + c_i$$

Bước 3: Tách $bx = a_ix + c_ix$.

Từ đó nhóm hai số hạng thích hợp để phân tích tiếp.

a) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $f(x) = 3x^2 - 8x + 4$ thành nhân tử.

Giải

Cách 1 (tách hạng tử $3x^2$)

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x + 4 &= 4x^2 - 8x + 4 - x^2 \\ &= (2x - 2)^2 - x^2 \\ &= (2x - 2 - x)(2x - 2 + x) \\ &= (x - 2)(3x - 2) \end{aligned}$$

Cách 2 (tách hạng tử : $-8x$)

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x + 4 &= 3x^2 - 6x - 2x + 4 \\ &= 3x(x - 2) - 2(x - 2) \\ &= (x - 2)(3x - 2) \end{aligned}$$

Cách 3 (tách hạng tử : 4)

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x + 4 &= 3x^2 - 12 - 8x + 16 \\ &= 3(x^2 - 2^2) - 8(x - 2) \\ &= 3(x - 2)(x + 2) - 8(x - 2) \\ &= (x - 2)(3x + 6 - 8) \\ &= (x - 2)(3x - 2) \end{aligned}$$

Bài tập 2: Phân tích đa thức $-6x^2 + 7x - 2$ thành nhân tử.

Giải

$$\begin{aligned} -6x^2 + 7x - 2 &= -6x^2 + 4x + 3x - 2 \\ &= (-6x^2 + 4x) + (3x - 2) \\ &= -2x(3x - 2) + (3x - 2) \\ &= (3x - 2)(-2x + 1) \end{aligned}$$

Bài tập 3: Phân tích đa thức sau ra thừa số: $n^3 - 7n + 6$

Giải

$$\begin{aligned} n^3 - 7n + 6 &= n^3 - n - 6n + 6 \\ &= n(n^2 - 1) - 6(n - 1) \\ &= n(n - 1)(n + 1) - 6(n - 1) \\ &= (n - 1)[n(n + 1) - 6] \\ &= (n - 1)(n^2 + n - 6) \\ &= (n - 1)(n^2 - 2n + 3n - 6) \\ &= (n - 1)(n(n - 2) + 3(n - 2)) \\ &= (n - 1)(n - 2)(n + 3) \end{aligned}$$

Bài tập 4: Phân tích đa thức $x^4 - 30x^2 + 31x - 30$ thành nhân tử.

Giải

Ta có cách tách như sau:

$$\begin{aligned} x^4 - 30x^2 + 31x - 30 &= x^4 + x - 30x^2 + 30x - 30 \\ &= x(x^3 + 1) - 30(x^2 - x + 1) \\ &= x(x + 1)(x^2 - x + 1) - 30(x^2 - x + 1) \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 30) \\ &= (x^2 - x + 1)(x - 5)(x + 6) \end{aligned}$$

Bài tập 5: Phân tích đa thức $A = 9x^2 - 10x + 1$ thành nhân tử.

Giải

Cách 1: Tách hạng tử "bậc nhất", làm xuất hiện hai tích có hai nhân tử chung:

$$\begin{aligned} A &= 9x^2 - 9x - x + 1 = (9x^2 - 9x) - (x - 1) \\ &= 9x(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(9x - 1) \end{aligned}$$

Cách 2: Tách hạng tử bậc hai thành:

$$\begin{aligned} A &= 10x^2 - 10x - x^2 + 1 \\ &= (10x^2 - 10x) - (x^2 - 1) = 10x(x - 1) - (x + 1)(x - 1) \\ &= (x - 1)[10x - (x + 1)] = (x - 1)(9x - 1). \end{aligned}$$

Bài tập 6: Phân tích đa thức $A = x^4 + x^2 + 1$ thành nhân tử:

Giải

$$A = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Bài tập 7: Phân tích đa thức $A = 2(x^2 + x - 5)^2 - 5(x^2 + x) + 28$ thành nhân tử:

Giải

$$\begin{aligned} A &= 2(x^2 + x - 5)^2 - 5(x^2 + x - 5) + 3 \\ &= 2(x^2 + x - 5)^2 - 2(x^2 + x - 5) - 3(x^2 + x - 5) + 3 \\ &= [2(x^2 + x - 5)^2 - 2(x^2 + x - 5)] - [3(x^2 + x - 5) - 3] \\ &= 2(x^2 + x - 5)[(x^2 + x - 5) - 1] - 3[(x^2 + x - 5) - 1] \\ &= (x^2 + x - 6)(2x^2 + 2x - 13) = (x - 2)(x + 3)(2x^2 + 2x - 13) \end{aligned}$$

Chú ý: Ta có thể đặt ẩn phụ: $y = x^2 + x - 5$. Khi đó $A = 2y^2 - 5y + 3$

Bài tập 8: Phân tích đa thức $f(x) = 3x^2 + 8x + 4$ thành nhân tử.

Hướng dẫn

Phân tích $ac = 12 = 3.4 = (-3).(-4) = 2.6 = (-2).(-6) = 1.12 = (-1).(-12)$

Tích của hai thừa số có tổng bằng $b = 8$ là tích $a.c = 2.6$ ($a.c = a_i.c_i$).

Tách $8x = 2x + 6x$ ($bx = a_ix + c_ix$)

Giải

Cách 1: Tách hạng tử bx .

$$\begin{aligned} 3x^2 + 8x + 4 &= 3x^2 + 2x + 6x + 4 = (3x^2 + 2x) + (6x + 4) \\ &= x(3x + 2) + 2(3x + 2) \\ &= (x + 2)(3x + 2) \end{aligned}$$

Cách 2 (tách hạng tử bậc hai ax^2)

Làm xuất hiện hiệu hai bình phương:

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x^2 + 8x + 4) - x^2 = (2x + 2)^2 - x^2 = (2x + 2 - x)(2x + 2 + x) \\ &= (x + 2)(3x + 2) \end{aligned}$$

Tách thành 4 số hạng rồi nhóm:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - x^2 + 8x + 4 = (4x^2 + 8x) - (x^2 - 4) = 4x(x + 2) - (x - 2)(x + 2) \\ &= (x + 2)(3x + 2) \end{aligned}$$

$$f(x) = (12x^2 + 8x) - (9x^2 - 4) = \dots = (x + 2)(3x + 2)$$

Cách 3 (tách hạng tử tự do "c")

Tách thành 4 số hạng rồi nhóm thành hai nhóm:

$$f(x) = 3x^2 + 8x + 16 - 12 = (3x^2 - 12) + (8x + 16) = \dots = (x + 2)(3x + 2)$$

Cách 4 (tách 2 số hạng, 3 số hạng)

$$f(x) = (3x^2 + 12x + 12) - (4x + 8) = 3(x + 2)^2 - 4(x + 2) = (x + 2)(3x - 2)$$

$$f(x) = (x^2 + 4x + 4) + (2x^2 + 4x) = \dots = (x + 2)(3x + 2)$$

Cách 5 (nhẩm nghiệm)

Chú ý: Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ có dạng $A^2 \pm 2AB + C$ thì ta tách như sau:

$$f(x) = A^2 \pm 2AB + B^2 - B^2 + C = (A \pm B)^2 - (B^2 - C)$$

Bài tập 9: Phân tích đa thức $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$ thành nhân tử.

Hướng dẫn

Ta thấy $4x^2 - 4x = (2x)^2 - 2.2x$. Từ đó ta cần thêm và bớt $1^2 = 1$ để xuất hiện hằng đẳng thức.

Giải

$$f(x) = (4x^2 - 4x + 1) - 4 = (2x - 1)^2 - 2^2 = (2x - 3)(2x + 1)$$

Bài tập 10: Phân tích đa thức $f(x) = 9x^2 + 12x - 5$ thành nhân tử.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Cách 1: } f(x) &= 9x^2 - 3x + 15x - 5 = (9x^2 - 3x) + (15x - 5) \\ &= 3x(3x - 1) + 5(3x - 1) \\ &= (3x - 1)(3x + 5) \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2: } f(x) = (9x^2 + 12x + 4) - 9 = (3x + 2)^2 - 3^2 = (3x - 1)(3x + 5)$$

Bài tập 11: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $2x^2 - 5xy + 2y^2$.

Giải

Phân tích đa thức này tương tự như phân tích đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ta tách hạng tử thứ 2:

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = (2x^2 - 4xy) - (xy - 2y^2) = 2x(x - 2y) - y(x - 2y).$$

b) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $x^2 - 5x + 6$ thành nhân tử.

Bài tập 2: Phân tích đa thức $3x^2 - 16x + 5$ thành nhân tử.

Bài tập 3: Phân tích đa thức $8x^2 + 30x + 7$ thành nhân tử.

Bài tập 4: Phân tích đa thức $6x^2 - 7x - 20$ thành nhân tử.

Bài tập 5: Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử.

5. Phương pháp phối hợp nhiều phương pháp

Phương pháp:

Là sự kết hợp giữa các phương pháp nhóm nhiều hạng tử, đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, tách hạng tử.

Biết kỹ thuật nhận biết dạng đề để biết cách áp dụng phương pháp nào.

a) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $x^4 - 9x^3 + x^2 - 9x$ thành nhân tử.

Giải

$$\begin{aligned} x^4 - 9x^3 + x^2 - 9x &= x(x^3 - 9x^2 + x - 9) \\ &= x[(x^3 - 9x^2) + (x - 9)] \\ &= x[x^2(x - 9) + 1.(x - 9)] \\ &= x(x - 9)(x^2 + 1) \end{aligned}$$

Bài tập 2: Phân tích đa thức $A = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ thành nhân tử.

Giải

$$\begin{aligned} A &= (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = [(x + y) + z]^3 - x^3 - y^3 - z^3 \\ &= (x + y)^3 + z^3 + 3z(x + y)(x + y + z) - x^3 - y^3 - z^3 \\ &= [(x + y)^3 - x^3 - y^3] + 3z(x + y)(x + y + z) \\ &= 3xy(x + y) + 3(x + y)(xz + yz + z^2) \\ &= 3(x + y)(xy + xz + yz + z^2) \\ &= 3(x + y)(y + z)(x + z) \end{aligned}$$

Bài tập 3: Phân tích đa thức $A = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ thành nhân tử:

Giải

Chú ý: Nếu: $m + n + p = 0$ thì $m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$.

Nhận thấy: $(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$ nên ta có ngay:

$$A = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a).$$

Bài tập 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $3xy^2 - 12xy + 12x$

Giải

$$3xy^2 - 12xy + 12x = 3x(y^2 - 4y + 4) = 3x(y - 2)^2$$

Bài tập 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$\begin{aligned} 3x^3y - 6x^2y - 3xy^3 - 6axy^2 - 3a^2xy + 3xy &= 3xy(x^2 - 2y - y^2 - 2ay - a^2 + 1) \\ &= 3xy[(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 2ay + a^2)] \\ &= 3xy[(x - 1)^2 - (y + a)^2] \\ &= 3xy[(x - 1) - (y + a)][(x - 1) + (y + a)] \\ &= 3xy(x - 1 - y - a)(x - 1 + y + a) \end{aligned}$$

b) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $x^3 + 6x^2 + 9x$ thành nhân tử.

Bài tập 2: Phân tích đa thức $A = 2x^2 - 3xy + y^2 - x - 1$ thành nhân tử:

Bài tập 3: Phân tích đa thức $A = 8x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x - 1$ thành nhân tử.

6. Phương pháp thêm và bớt một cùng một hạng tử:

Phương pháp:

Phương pháp thêm và bớt cùng một hạng tử nhằm sử dụng phương pháp nhóm để xuất hiện dạng đặt nhân tử chung hoặc dạng hằng đẳng thức.

Đối với phương pháp này muốn nắm chắc thì cách tốt nhất là làm thật nhiều bài tập, chứ không có dạng tổng quát.

Lưu ý: Đối với toán phân tích đa thức thành nhân tử "giảm dần số mũ của lũy thừa":

$$x^{3m+2} + x^{3m+1} + 1 \text{ thì đều chứa nhân tử } x^2 + x + 1.$$

Do đó khi phân tích thì phải chú ý làm xuất hiện dạng $x^2 + x + 1$ và các dấu "+" có thể thay bằng dấu "-".

a) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $x^4 + x^2 + 1$ thành nhân tử.

Phân tích:

Tách x^2 thành $2x^2 - x^2$: (làm xuất hiện hằng đẳng thức)

$$\text{Ta có } x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$$

Thêm x và bớt x: (làm xuất hiện hằng đẳng thức và đặt nhân tử chung)

Ta có $x^4 + x^2 + 1 = x^4 - x + x^2 + x + 1 = (x^4 - x) + (x^2 + x + 1)$

Giải

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 - x + x^2 + x + 1 \\ &= (x^4 - x) + (x^2 + x + 1) \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

Bài tập 2: Phân tích đa thức $x^5 + x^4 + 1$ thành nhân tử.

Cách 1: Thêm x^3 và bớt x^3 (làm xuất hiện hằng đẳng thức và đặt nhân tử chung)

Giải

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1 \\ &= (x^5 + x^4 + x^3) + (1 - x^3) \\ &= x^3(x^2 + x + 1) + (1 - x)(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) \end{aligned}$$

Cách 2: Thêm x^3, x^2, x và bớt x^3, x^2, x (làm xuất hiện đặt nhân tử chung)

Giải

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - x + 1 \\ &= (x^5 + x^4 + x^3) + (-x^3 - x^2 - x) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^3(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) \end{aligned}$$

Chú ý: Các đa thức có dạng $x^4 + x^2 + 1, x^5 + x + 1, x^5 + x^4 + 1, x^7 + x^5 + 1, \dots$; tổng quát những đa thức dạng $x^{3m+2} + x^{3n+1} + 1$ hoặc $x^3 - 1, x^6 - 1$ đều có chứa nhân tử $x^2 + x + 1$.

Bài tập 3: Phân tích đa thức $x^4 + 4$ thành nhân tử.

Gợi ý: Thêm $2x^2$ và bớt $2x^2$: (làm xuất hiện hằng đẳng thức)

Giải

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

Bài tập 4: Phân tích đa thức $x^4 + 16$ thành nhân tử.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Cách 1: } x^4 + 16 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } x^4 + 4 &= (x^4 + 2x^3 + 2x^2) - (2x^3 + 4x^2 + 4x) + (2x^2 + 4x + 4) \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

Bài tập 5: Phân tích đa thức $x^5 + x - 1$ thành nhân tử

Giải

$$\begin{aligned} \text{Cách 1: } x^5 + x - 1 &= x^5 - x^4 + x^3 + x^4 - x^3 + x^2 - x^2 + x - 1 \\ &= x^3(x^2 - x + 1) - x^2(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= (x^2 - x + 1)(x^3 - x^2 - 1). \end{aligned}$$

Cách 2: Thêm và bớt x^2 :

$$\begin{aligned} x^5 + x - 1 &= x^5 + x^2 - x^2 + x - 1 = x^2(x^3 + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= (x^2 - x + 1)[x^2(x + 1) - 1] = (x^2 - x + 1)(x^3 - x^2 - 1). \end{aligned}$$

Bài tập 6: Phân tích đa thức $x^7 + x + 1$ thành nhân tử.

Giải

$$\begin{aligned} x^7 + x^2 + 1 &= x^7 - x + x^2 + x + 1 = x(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 - x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

Lưu ý:

Các đa thức dạng $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ như $x^7 + x^2 + 1, x^4 + x^5 + 1$ đều chứa nhân tử là $x^2 + x + 1$.

Bài tập 7: Phân tích đa thức $4x^4 + 81$ thành nhân tử.

Giải

Ta thêm và bớt vào đa thức $4x^4 + 81$ hạng tử $36x^2$ ta có:

$$4x^4 + 81 = 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2 = (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9)$$

Nhận xét: Trong trường hợp này dùng cho đa thức có hai hạng tử.

Bài tập 8: Phân tích đa thức $x^5 + x - 1$ thành nhân tử.

Giải

Ta thêm bớt x^4, x^3, x^2 như sau:

$$\begin{aligned} x^5 + x - 1 &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x^4 - x^3 - x^2 + x - 1 \\ &= (x^5 - x^4 + x^3) + (x^4 - x^3 + x^2) - (x^2 - x + 1) \\ &= x^3(x^2 - x + 1) + x^2(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) \\ &= (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1) \end{aligned}$$

Bài tập 9: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = a^{10} + a^5 + 1$

Giải

$$\begin{aligned} A &= (a^{10} + a^9 + a^8) + (a^7 + a^6 + a^5) + (a^5 + a^4 + a^3) + (a^2 + a + 1) - (a^9 + a^8 + a^7) - (a^6 + a^5 + a^4) - (a^3 + a^2 + a) \\ &= a^8(a^2 + a + 1) + a^5(a^2 + a + 1) + a^3(a^2 + a + 1) - a^7(a^2 + a + 1) - a^4(a^2 + a + 1) - a(a^2 + a + 1) \end{aligned}$$

b) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $A = x^7 + x^2 + 1$ thành nhân tử.

Bài tập 2: Phân tích đa thức $A = x^5 + x^4 + 1$ thành nhân tử.

Bài tập 3: Phân tích đa thức $A = x^7 + x^5 + 1$ thành nhân tử.

Bài tập 4: Phân tích đa thức $A = x^8 + x^7 + 1$ thành nhân tử.

Bài tập 5: Phân tích đa thức $A = x^5 + x^1 - 1$ thành nhân tử.

7. Phương pháp đổi biến số (đặt ẩn số phụ):

Phương pháp:

Phương pháp này thường dùng để đưa một đa thức bậc cao về đa thức có bậc thấp hơn. Phương pháp này không có công thức tổng quát.

Trong phương pháp này, có trường hợp đặc biệt khi phân tích: Phân tích đa thức đối xứng thành nhân tử.

Lưu ý:

Cách giải một số phương trình.

Cần sử dụng thêm phương pháp thêm bớt hạng tử.

Khi phân tích đa thức đối xứng bậc chẵn thành nhân tử thì ta chia cho đa thức đó cho x^2 (hay là đặt x^2 làm nhân tử chung), nhóm hai hạng tử thích hợp rồi đặt ẩn phụ cho $x + \frac{1}{x}$.

Các đa thức đối xứng bậc lẻ luôn có nghiệm là -1 .

Phân tích đa thức đó thành hai nhân tử là $(x + 1)$ và nhân tử thứ 2 là đa thức đối xứng bậc chẵn.

Để phân tích hết đa thức thì phân tích đa thức thứ hai theo tổng quát đa thức đối xứng bậc chẵn.

Phương pháp này dùng để đơn giản hơn các biểu thức và đưa biểu thức về dạng gọn hơn.

a) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $A = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$ thành nhân tử.

Giải

(Đây là đa thức đối xứng bậc chẵn)

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của đa thức trên. Ta đặt x^2 làm nhân tử chung. Khi đó:

$$A = x^2 \left[x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 5 \right]$$

$$\text{Đặt: } y = x + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y^2 = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Lúc này:

$$\begin{aligned} A &= x^2(y^2 + 4y + 3) \\ &= x^2(y + 3)(y + 1) \\ &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 3 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Bài tập 2: Phân tích đa thức $x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x + 1$ thành nhân tử.

HD: Đây là đa thức đối xứng bậc lẻ. Ta đặt nhân tử $(x + 1)$ và nhân tử còn lại là đa thức bậc chẵn thì làm tương tự.

Bài tập 3: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$

Giải

Ta có: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 = (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = y$.

Đa thức đã cho có dạng:

$$\begin{aligned}(y - 12)(y + 12) + 128 &= y^2 - 16 \\ &= (y + 4)(y - 4) = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 8) \\ &= (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)\end{aligned}$$

Nhận xét: Nhờ phương pháp đổi biến ta đã đưa đa thức bậc 4 đối với x thành đa thức bậc 2 đối với y .

Bài tập 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$.

Giải

Cách 1. Giả sử $x \neq 0$. Ta viết đa thức dưới dạng:

$$A = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 6 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 7 \right)$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}A &= x^2(y^2 + 2 + 6y + 7) = x^2(y + 3)^2 = (xy + 3x)^2 \\ &= \left[x \left(x - \frac{1}{x} \right) + 3x \right]^2 = (x^2 + 3x - 1)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2.\end{aligned}$$

Dạng phân tích này cũng đúng với $x = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Cách 2. } A &= x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 9x^2 - 6x + 1 = x^4 + (6x^3 - 2x^2) + (9x^2 - 6x + 1) \\ &= x^4 + 2x^2(3x - 1) + (3x - 1)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2.\end{aligned}$$

b) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$

Bài tập 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$

Bài tập 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $(x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$

Bài tập 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 15$

Bài tập 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2$

8. Phương pháp xét giá trị riêng:

Phương pháp:

Trước hết ta xác định dạng các thừa số chứa biến của đa thức, rồi gán cho các biến các giá trị cụ thể để xác định thừa số còn lại.

Đối với các bài toán dạng này thì ta luôn nhận biết sự giống nhau về vai trò của các biến trong biểu thức.

Cách giải thường dùng là sử dụng phương pháp lý luận vai trò của một biến so với các biến còn lại.

a) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $P = x^2(y - x) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$

Giải

$$\text{Giả sử thay } x \text{ bởi } y \text{ thì } P = y^2(y - z) + y^2(z - y) = 0$$

Như vậy P chứa thừa số $x - y$.

Ta lại thấy nếu thay x bởi y , thay y bởi z , thay z bởi x thì P không đổi (ta nói đa thức P có thể hoán vị vòng quanh bởi các biến x, y, z). Do đó nếu P đã chứa thừa số $x - y$ thì cũng chứa thừa số $y - z, z - x$.

Vậy P phải có dạng: $P = k(x - y)(y - z)(z - x)$.

Ta thấy k phải là hằng số (không chứa biến) vì P có bậc 3 đối với tập hợp các biến x, y, z còn tích $(x - y)(y - z)(z - x)$ cũng có bậc ba đối với tập hợp các biến x, y, z . Vì đẳng thức:

$$x^2(y - x) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = k(x - y)(y - z)(z - x).$$

đúng với mọi x, y, z nên ta gán cho các biến x, y, z các giá trị riêng.

Chẳng hạn $x = 2, y = 1, z = 0$.

Ta được $k = -1$.

b) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$Q = a(b + c - a)^2 + b(c + a - b)^2 + c(a + b - c)^2 + (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

Bài tập 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$M = a(m - a)^2 + b(m - b)^2 + c(m - c)^2 - abc, \text{ với } 2m = a + b + c.$$

Bài tập 3: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$A = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$$

$$B = a(a + 2b)^3 - b(2a + b)^3.$$

$$C = ab(a + b) - bc(b + c) + ac(a - c)$$

$$D = (a + b)(a^2 - b^2) + (b + c)(b^2 - c^2) + (c + a)(c^2 - a^2)$$

$$E = a^3(c - b^2) + b^3(a - c^2) + c^3(b - a^2) + abc(abc - 1)$$

$$F = a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$$

$$G = a^2b^2(a - b) + b^2c^2(b - c) + a^2c^2(c - a)$$

$$H = a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$$

9. Phương pháp dùng hệ số bất định:

Phương pháp:

Giả sử đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có nghiệm m, n thì đa thức sẽ được viết lại:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n)$$

Sau đó đồng nhất hệ số cả hai vế của phương trình, tức là giải hệ phương trình hoặc nhằm để tìm hệ số thì ta sẽ tìm được các hệ số m, n .

a) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = 3x^2 + 4x + 1$

Giải

Giả sử a và b là hai nghiệm của đa thức trên. Khi đó, ta viết lại như sau:

$$3x^2 + 4x + 1 = 3(x - a)(x - b)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 3x^2 + x(-3b - 3a) + 3ab$$

Đồng nhất hệ số ta được:

$$\begin{cases} -3a - 3b = 4 \\ 1 = 3ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -\frac{4}{3} \\ ab = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A = 3x^2 + 4x + 1 = 3(x + 1)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x + 1)(3x + 1).$$

Bài tập 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1$

Giải

Nhận thấy đa thức trên không có nghiệm hữu tỷ. Do đó ta sẽ phân tích đa thức trên thành tích của hai đa thức bậc hai.

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + cx + 1)$$

Sử dụng phương pháp đồng nhất hệ số, ta có:

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 5x + 1)$$

Bài tập 3: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 - 3x^3 - x^2 - 7x + 2$.

Giải

Nhận thấy các số $\pm 1, \pm 2$ đều không là nghiệm của đa thức, nên C không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy, nếu đa thức C phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng.

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Đồng nhất các hệ số của đa thức này với đa thức đã cho, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + c = -3 \\ ac + b + d = -1 \\ ad + bc = -7 \\ bd = 2 \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được $(a; b; c; d) = (1; 2; -4; 1)$.

Vậy đa thức đã cho được phân tích thành: $(x^2 + x + 2)(x^2 - 4x + 1)$.

Đa thức này không phân tích thành nhân tử thêm được nữa.

Bài tập 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x - 3$

Giải

Ta lần lượt thử các nghiệm $\pm 1; \pm 3$ không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy đa thức trên phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (ad+bc)x + bd$$

$$= x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3.$$

Đồng nhất các hệ số ta được:

Xét $bd = 3$ với $b, d \in \mathbb{Z}, b \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Với $b = 3$ thì $d = 1$, hệ điều kiện trên trở thành

$$\begin{cases} a + c = -6 \\ ac = 8 \\ a + 3c = -14 \end{cases} \Rightarrow 2c = -14 - (-6) = -8.$$

Do đó $c = -4, a = -2$.

Vậy $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$.

b) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

Bài tập 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$C = 3x^2 + 22xy + 11x + 37y + 7y^2 + 10$$

$$D = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1$$

$$E = x^4 - 8x + 63$$

10. Phương pháp nhẩm nghiệm (thêm):

Phương pháp:

Định lí:

Nếu $f(x)$ có nghiệm $x = a$ thì $f(a) = 0$.

Khi đó, $f(x)$ có một nhân tử là $x - a$ và $f(x)$ có thể viết dưới dạng $f(x) = (x - a).q(x)$

Như vậy đa thức $f(x)$ sẽ có nhân tử là $(x - a)$.

Lúc đó tách các số hạng của $f(x)$ thành các nhóm, mỗi nhóm đều chứa nhân tử là $x - a$.

Lưu ý:

Phương pháp này chỉ áp dụng nhiều cho đa thức có hệ số nguyên:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Hệ quả 1: Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì $f(x)$ có một nghiệm là $x = 1$. Từ đó $f(x)$ có một nhân tử là $x - 1$.

Hệ quả 2: Nếu $f(x)$ có tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các lũy thừa bậc lẻ thì $f(x)$ có một nghiệm $x = -1$. Từ đó $f(x)$ có một nhân tử là $x + 1$.

Hệ quả 3: Nếu $f(x)$ có nghiệm nguyên $x = a$ và $f(1)$ và $f(-1)$ khác 0 thì $\frac{f(1)}{a-1}$ và $\frac{f(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên.

Người ta đã chứng minh nghiệm của đa thức:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Là nghiệm của hạng tử tự do a_0 .

Người ta cũng chứng minh được nghiệm của đa thức có dạng $x = \frac{p}{q}$, trong đó p là ước của a_0 và

q là ước của hạng tử cao nhất a_n .

a) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Phân tích đa thức $f(x) = x^3 + x^2 + 4$ thành nhân tử.

Giải

Lần lượt kiểm tra với $x = \pm 1, \pm 2, 4$, ta thấy $f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + 4 = 0$. Đa thức $f(x)$ có một nghiệm $x = -2$, do đó nó chứa một nhân tử là $x + 2$. Từ đó, ta tách như sau

Cách 1 : $f(x) = x^3 + 2x^2 - x^2 + 4 = (x^3 + 2x^2) - (x^2 - 4) = x^2(x + 2) - (x - 2)(x + 2)$

$$= (x + 2)(x^2 - x + 2).$$

Cách 2 : $f(x) = (x^3 + 8) + (x^2 - 4) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + (x - 2)(x + 2)$

$$= (x + 2)(x^2 - x + 2).$$

Cách 3 : $f(x) = (x^3 + 4x^2 + 4x) - (3x^2 + 6x) + (2x + 4)$

$$= x(x + 2)^2 - 3x(x + 2) + 2(x + 2) = (x + 2)(x^2 - x + 2).$$

Cách 4 : $f(x) = (x^3 - x^2 + 2x) + (2x^2 - 2x + 4) = x(x^2 - x + 2) + 2(x^2 - x + 2)$

$$= (x + 2)(x^2 - x + 2).$$

Bài tập 2: Phân tích đa thức $f(x) = 4x^3 - 13x^2 + 9x - 18$ thành nhân tử.

Giải

Các ước của 18 là $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

$f(1) = -18, f(-1) = -44$, nên ± 1 không phải là nghiệm của $f(x)$.

Dễ thấy không là số nguyên nên $-3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$ không là nghiệm của $f(x)$. Chỉ còn -2 và 3 .

Kiểm tra ta thấy 3 là nghiệm của $f(x)$. Do đó, ta tách các hạng tử như sau:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 - 12x^2 - x^2 + 3x + 6x - 18 \\ &= 4x^2(x - 3) - x(x - 3) + 6(x - 3) \\ &= (x - 3)(4x^2 - x + 6) \end{aligned}$$

Bài tập 3: Phân tích đa thức $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$ thành nhân tử.

Giải

Các ước của -5 là $\pm 1, \pm 5$. Thử trực tiếp ta thấy các số này không là nghiệm của $f(x)$. Như vậy

$f(x)$ không có nghiệm nguyên. Xét các số $\pm \frac{1}{3}; \pm \frac{5}{3}$, ta thấy $\frac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức.

Do đó đa thức có một nhân tử là $3x - 1$.

Ta phân tích như sau: $f(x) = (3x^3 - x^2) - (6x^2 - 2x) + (15x - 5) = (3x - 1)(x^2 - 2x + 5)$.

Bài tập 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

Giải

Nhận thấy đa thức có $1 + (-5) + 8 + (-4) = 0$ nên $x = 1$ là một nghiệm của đa thức.

Đa thức có một nhân tử là $x - 1$. Ta phân tích như sau :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 - x^2) - (4x^2 - 4x) + (4x - 4) = x^2(x - 1) - 4x(x - 1) + 4(x - 1) \\ &= (x - 1)(x - 2)^2 \end{aligned}$$

Bài tập 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$.

Giải

Nhận thấy, đa thức $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ có $1 + 3 = -5 + 9$ nên $x = -1$ là một nghiệm của đa thức.

Đa thức có một nhân tử là $x + 1$. Ta phân tích như sau :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 + x^2) - (6x^2 + 6x) + (9x + 9) = x^2(x + 1) - 6x(x + 1) + 9(x + 1) \\ &= (x + 1)(x - 3)^2 \end{aligned}$$

CHUYÊN ĐỀ 5 TẬP XÁC ĐỊNH

1) Kiến thức cơ bản:

Bài toán: Cho biểu thức: $y = f(x)$, với x là ẩn số.

Định nghĩa: Tập xác định của hàm số là tập hợp những giá trị làm cho biểu thức có nghĩa.

Kí hiệu: $D = \{x | f(x) \text{ có nghĩa (điều kiện)}\}$

2) Tập xác định của một số biểu thức:

Biểu thức: $A = \frac{f(x)}{g(x)}$ TXĐ: $D = \{x | g(x) \neq 0\}$

Biểu thức: $A = \sqrt{f(x)}$ TXĐ: $D = \{x | f(x) \geq 0\}$

Chú ý: Nếu $A = \sqrt[n]{f(x)}$ thì

Khi n là số lẻ, với mọi x đều thỏa mãn.

Khi n là số chẵn thì $f(x) \geq 0$.

Biểu thức: $A = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ có TXĐ: $D = \{x | g(x) > 0\}$

Biểu thức: $A = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$ (với $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$)

3. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Tìm tập xác định của biểu thức sau:

$$y = 3x^2 + 2x + 1$$

Giải

Điều kiện xác định $D = \mathbb{R}$.

Bài tập 2: Tìm tập xác định của biểu thức:

$$y = 3x^2 + x - 1 + \frac{1-x}{x+2}$$

Giải

Điều kiện xác định: $D = \{x | x + 2 \neq 0\} = \{x | x \neq -2\}$

Bài tập 3: Tìm tập xác định của biểu thức:

$$y = \sqrt{x-3} - \sqrt{x-1}$$

Giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$

Bài tập 4: Tìm điều kiện xác định của biểu thức:

$$A = \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{3}{x\sqrt{x+2}}$$

Giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x \neq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 0 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Bài tập 5: Tìm tập xác định của biểu thức:

$$T = \left(a\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} \right) \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} b \neq 0 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, b < 0 \\ a > 0, b > 0 \end{cases}$

4. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm tập xác định của biểu thức:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$$

Bài tập 2: Tìm tập xác định của biểu thức:

$$P = \frac{3x + 3}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Bài tập 3: Tìm tập xác định của biểu thức:

$$P = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

Bài tập 4: Tìm tập xác định của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} + \frac{x + 1}{x - 1}$$

Bài tập 5: Tìm tập xác định của biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 4\sqrt{x} + 4} \right) \cdot \frac{1}{x - 3}$$

CHUYÊN ĐỀ 6 RÚT GỌN BIỂU THỨC

1. Kiến thức cơ bản:

Dạng khai triển của một số biểu thức:

$$a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}), \text{ với } a, b \geq 0.$$

$$a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

$$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

$$a\sqrt{a} = \sqrt{a^3}, \text{ với } a \geq 0$$

$$a = \sqrt{a^2}, \text{ với } a \geq 0$$

Chú ý: Trước khi rút gọn phải tìm điều kiện xác định của biểu thức (nếu có).

$$\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} = \sqrt{A + \sqrt{B}}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$1 + \frac{1}{k^2 + 2k} = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

2) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = (a + 3)(a - 3)(a^2 + 6a + 9)(a^2 - 6a + 9)$$

Giải

$$A = (a^2 - 9)(a + 3)^2(a - 3)^2 = (a^2 - 9)^3 = a^6 - 27a^4 + 243a^2 - 729$$

Lưu ý: Bài toán này được đưa về dạng hằng đẳng thức.

Bài tập 2: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{(5\sqrt{3} + \sqrt{50})(5 - \sqrt{24})}{\sqrt{75} - 5\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + 1 \right)$$

Giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{(5\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{6})}{5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + 1 \right) \\ &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})(5 - 2\sqrt{6})}{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{2}}{3} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1 \\
 &= \frac{5((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1 \\
 &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

Lưu ý: Bài toán này sử dụng phương pháp đưa thừa số ra ngoài dấu căn và hằng đẳng thức $a^2 - b^2$.

Bài tập 3: Rút gọn biểu thức sau:

$$M = \frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$$

(Đề thi HSG miền Bắc năm 1997)

Giải

$$M = \frac{2^{19} \cdot 3^9 + 5 \cdot 3 \cdot 2^{18} \cdot 3^8}{2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^{10} + 4^{10} \cdot 3^{10}} = \frac{2^{19} \cdot 3^9 + 5 \cdot 2^{18} \cdot 3^9}{2^{19} \cdot 3^9 + 2^{20} \cdot 3^{10}} = \frac{2^{18} \cdot 3^9 (2 + 5)}{2^{18} \cdot 3^9 \cdot 2 (1 + 2 \cdot 3)} = \frac{1}{2}$$

Lưu ý: Bài toán này sử dụng phương pháp đưa về dạng chung của lũy thừa ở tử và mẫu.

Bài tập 4: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{(8x^6 - 27)}{4x^4 + 6x^2 + 9} : \frac{y^4 - 1}{y^3 + y^2 + y + 1}$$

Giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(2x^2)^3 - 3^3}{4x^4 + 6x^2 + 9} : \frac{(y-1)(y^3 + y^2 + y + 1)}{y^3 + y^2 + y + 1} \\
 &= \frac{(2x^2 - 3)(4x^4 + 6x^2 + 9)}{4x^4 + 6x^2 + 9} : (y-1) = \frac{2x^2 - 3}{y-1}
 \end{aligned}$$

Lưu ý: Bài toán này được đưa về dạng hằng đẳng thức.

Bài tập 5: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{4} \\
 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{4}
 \end{aligned}$$

Do đó, ta có:

$$A = \frac{\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2}{\frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{3}}{2}} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2}{\frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} = 1$$

Lưu ý: Nhận biết bài toán này là dạng $\sqrt{A^2} = |A|$ xuất hiện ở mẫu.

Bài tập 6: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$$

Giải

$$A = (\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{(4 + \sqrt{15})^2(4 - \sqrt{15})} = (\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 + \sqrt{15}}$$

Vì $\sqrt{10} - \sqrt{6} = \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3}) > 0$ nên ta có:

$$A = \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2(4 + \sqrt{15}) = \sqrt{2}(8 - 2\sqrt{15})(4 + \sqrt{15}) = \sqrt{4} = 2$$

Lưu ý: Bài toán này được đưa về dạng đúng của hằng đẳng thức.

Bài tập 7: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = 1978(1979^9 + 1979^8 + \dots + 1979 + 1980) - 1979^{20} +$$

Giải

$$A = (1979 - 1)(1979^{19} + 1979^{18} + \dots + 1979^2 + 1980) - 1979^{20} + 1$$

$$= (1979^{20} - 1) - 1979^{20} + 1$$

$$= 1979^{20} - 1 + 1979^{20} + 1 = 0$$

Lưu ý: Bài toán này được đưa về dạng đúng của hằng đẳng thức nâng cao: $a^n - b^n$.

Bài tập 8: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$$

Giải

Điều kiện xác định: $x \geq 0, x \neq 4; x \neq 9$. Ta có:

Mẫu thức chung là: $x - 5\sqrt{x} + 6 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)$

$$A = \frac{2\sqrt{x} - 9 - (x - 9) + (2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$$

Lưu ý: Nhân biết dạng bài toán này là phải quy đồng tìm mẫu thức chung. Sau đó tìm nhân tử chung của tử và mẫu.

Bài tập 9: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$$

Giải

Điều kiện: $x > 1$.

$$A = \left(\frac{\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - 1)^2}{x + 1 - x + 1}$$

$$= x + \sqrt{x^2 - 1}$$

Lưu ý: Bài toán này sử dụng cách quy đồng và rút gọn nhân tử chung (giống nhau) của tử và mẫu.

Bài tập 10: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{2y^2 + 5y + 2}{2y^3 + 9y^2 + 12y + 4}$$

(Đề thi HSG toàn quốc năm 1978)

Giải

Ta có tử thức:

$$2y^2 + 5y + 2 = (2y^2 + 4y) + (y + 2) = 2y(y + 2) + (y + 2) \\ = (y + 2)(2y + 1)$$

Ta có mẫu thức:

$$2y^3 + 9y^2 + 12y + 4 = (2y^3 + 4y^2) + (5y^2 + 10y) + (2y + 4) \\ = 2y^2(y + 2) + 5y(y + 2) + 2(y + 2) \\ = (y + 2)(2y^2 + 5y + 2) = (y + 2)^2(2y + 1)$$

$$\text{Vì } 2y^2 + 5y + 2 = (y + 2)(2y + 1)$$

Do đó điều kiện bài toán là: $y \neq -2; y \neq -\frac{1}{2}$

$$\text{Suy ra: } A = \frac{(y + 2)(2y + 1)}{(y + 2)^2(2y + 1)} = \frac{1}{y + 2}$$

Lưu ý: Bài toán này không thể đưa hằng đẳng thức mà cần phải phân tích tử và mẫu thức xuất hiện nhân tử chung.

Bài tập 11: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

Giải

Ta có:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = \sqrt{4 - (2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}})} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{4 - (2 + \sqrt{3})} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 1$$

Lưu ý: Bài toán này được hiểu là "căn chồng căn" thì ta phải giải quyết $\sqrt{A^2} = |A|$ từ trong ra ngoài để giảm dần bậc của căn thức.

Bài tập 12: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$$

Giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$A = \frac{(\sqrt{x} + 1 + x)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1 + x}{\sqrt{x}}$$

Lưu ý: Bài toán này nhận biết được ngay là phải quy đồng và tìm nhân tử chung của tử và mẫu.

Bài tập 13: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

Giải

$$A = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lưu ý: Bài toán này được đưa về dạng hằng đẳng thức và $\sqrt{A^2} = |A|$ sao cho xuất hiện nhân tử giống nhau của tử và mẫu.

Bài tập 14: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$$

Giải

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{6}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3(2-\sqrt{3})} = \sqrt{6}(\sqrt{3}+1)\sqrt{\frac{3(4-2\sqrt{3})}{2}} \\ &= \sqrt{6}(\sqrt{3}+1)\sqrt{\frac{3(\sqrt{3}-1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}} \\ &= 3(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 6 \end{aligned}$$

Lưu ý: Nhận biết được dạng toán $\sqrt{A^2} = |A|$ và sau đó đưa về dạng hằng đẳng thức.

Bài tập 15: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Giải

Điều kiện: $a > 0, b > 0, a \neq b$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\ &= (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b \end{aligned}$$

Bài tập 16: Rút gọn biểu thức sau:

$$P = 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \right) \text{ với } 0 \leq x \neq 1$$

Giải

$$\begin{aligned} P &= 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \right) \\ P &= 1 : \left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] \\ P &= 1 : \left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right] \\ P &= 1 : \left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right] \\ P &= 1 : \frac{x+2+(x-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ P &= 1 : \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ P &= 1 : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ P &= 1 : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Suy ra: $P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Lưu ý: Ta nhận biết ngay là sử dụng hằng đẳng thức $a^2 - b^2$ và $(a-b)^2$.

3) Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Cho biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3} - \frac{5}{a+\sqrt{a}-6} + \frac{1}{2-\sqrt{a}}$$

- a) Rút gọn P
b) Tìm giá trị của a để $P < 1$

Bài tập 2: Cho biểu thức:

$$P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6}\right)$$

- a) Rút gọn P
b) Tìm giá trị của x để $P < 0$.

Bài tập 3: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{3\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{3\sqrt{x} + 1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x - 1}\right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x} - 2}{3\sqrt{x} + 1}\right)$$

- a) Rút gọn P
b) Tìm các giá trị của x để $P = \frac{6}{5}$

Bài tập 4: Cho biểu thức:

$$P = \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{a + 1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a - 1}\right)$$

- a) Rút gọn P
b) Tìm giá trị của a để $P < 1$
c) Tìm giá trị của P nếu $a = 19 - 8\sqrt{3}$

Bài tập 5: Cho biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a}(1 - a)^2}{1 + a} : \left[\left(\frac{1 - \sqrt{a^3}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{a^3}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)\right]$$

- a) Rút gọn P
b) Xét dấu của biểu thức $M = a \cdot \left(P - \frac{1}{2}\right)$

Bài tập 6: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{2x} + 1} + \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2x} - 1} - 1\right) : \left(1 + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{2x} + 1} - \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2x} - 1}\right)$$

- a) Rút gọn P
b) Tính giá trị của P khi $x = \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2})$

Bài tập 7: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) : \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x + 1}\right)$$

- a) Rút gọn P
b) Tìm x để $P \leq 0$

Bài tập 8: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2a + 1}{\sqrt{a^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{a^3}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$$

- a) Rút gọn P
b) Xét dấu của biểu thức $P\sqrt{1 - a}$

Bài tập 9: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$$

- a) Rút gọn P
b) Tìm a để $P < 7 - 4\sqrt{3}$

Bài tập 10: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1 \right)$$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Bài tập 11: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} - 1 \right) : \left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \right)$$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để $P < 1$

Bài tập 12: Cho biểu thức:

$$P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P = \frac{1}{2}$

c) Chứng minh $P \leq \frac{2}{3}$

Bài tập 13: Cho biểu thức:

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+m} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-m} - \frac{m^2}{4x-4m^2}, \text{ (với } m > 0 \text{)}$$

a) Rút gọn P

b) Tính x theo m để $P = 0$.

c) Xác định các giá trị của m để giá trị x tìm được ở câu b thỏa mãn điều kiện $x > 1$.

Bài tập 14: Cho biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$$

a) Rút gọn P

b) Biết $a > 1$ Hãy so sánh P với |P|.

c) Tìm a để $P = 2$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài tập 15: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1 \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1 \right)$$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P nếu $a = 2 - \sqrt{3}$ và $b = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P nếu $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$

Bài tập 16: Cho biểu thức:

$$P = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right)$$

a) Rút gọn P

b) Với giá trị nào của a thì $P = 7$

c) Với giá trị nào của a thì $P > 6$

Bài tập 17: Cho biểu thức:

$$P = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$$

- a) Tìm điều kiện để P có nghĩa.
 b) Rút gọn P
 c) Tính giá trị của P khi $a = 2\sqrt{3}$ và $b = \sqrt{3}$

Bài tập 18: Cho biểu thức:

$$P = 1 + \left(\frac{2a + \sqrt{a} - 1}{1 - a} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{1 - a\sqrt{a}} \right) \frac{a - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}$$

- a) Rút gọn P
 b) Cho $P = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}$ tìm giá trị của a
 c) Chứng minh rằng $P > \frac{2}{3}$

Bài tập 19: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{3\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab} + b} - \frac{3a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) : \frac{(a-1) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{2a + 2\sqrt{ab} + 2b}$$

- a) Rút gọn P
 b) Tìm những giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên

Bài tập 20: $P = \left[\frac{a + 3\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} - \frac{a + \sqrt{a}}{a - 1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right)$ (với $0 \leq a \neq 1$)

- a) Rút gọn P.
 b) Tính giá trị của P khi $a = 4 - 2\sqrt{3}$.
 c) Tìm a sao cho $\frac{1}{P} > 1$.

CHUYÊN ĐỀ 7 CÁC PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC

1. Biến đổi biểu thức nguyên:

a. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp:

Ta biến đổi từ một vế của đẳng thức (áp dụng hằng đẳng thức) để chuyển thành biểu thức bằng vế còn lại.

Xét tính chất của một số biểu thức đặc biệt để đưa ra cách phân tích đúng theo yêu cầu bài toán.

Áp dụng biến đổi theo một vế trở thành vế còn lại hoặc hai vế cùng về một kết quả cụ thể.

b) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

b) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b)^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab] \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 &= [(a + b + c)^3 - a^3] - (b^3 + c^3) \\ &= (b + c)[(a + b + c)^2 + (a + b + c)a + a^2] - (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\ &= (b + c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ca) \\ &= 3(b + c)[a(a + b) + c(a + b)] \\ &= 3(a + b)(b + c)(c + a). \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài tập 2: Cho $x + y + z = 0$.

Chứng minh rằng: $10(x^7 + y^7 + z^7) = 7(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^5 + z^5)$

Giải

Từ $x + y + z = 0$.

Suy ra: $z = x(x + y)$. Ta có:

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 + z^5 &= x^5 + y^5 - (x + y)^5 \\ &= -5(x^4y + 2x^3y^2 + xy^4) \\ &= -5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) \\ &= -5xy[(x + y)(x^2 + y^2 - xy) + 2xy(x + y)] \\ &= -5xy(x + y)(x^2 + y^2 + xy) \quad (1) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + y^2 + (x + y)^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 + xy) \quad (2) \end{aligned}$$

mà

$$\begin{aligned} x^7 + y^7 + z^7 &= x^7 + y^7 - (x + y)^7 \\ &= -7(x^6y + 3x^5y^2 + 5x^4y^3 + 5x^3y^4 + 3x^2y^5 + xy^6) \\ &= -7xy(x + y)(x^2 + y^2 + xy) \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2) và (3) ta có điều phải chứng minh.

c) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

a) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

b) $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

Bài tập 2: Chứng minh các hằng đẳng thức sau:

a) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

b) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

Bài tập 3: Chứng minh rằng nếu các số a, b, c thỏa mãn:

$$a^4 + b^4 + (a - b)^4 = c^4 + d^4 + (c - d)^4 \text{ thì } a^2 + b^2 + (a - b)^2 = c^2 + d^2 + (c - d)^2$$

Bài tập 4: Cho $a^3 - 3ab^2 = 19$, $b^3 - 3a^2b = 98$. Tính $P = a^2 + b^2$.

Bài tập 5: Cho a, b là hai số thỏa mãn điều kiện: $a^2 - 3ab + 2b^2 + a - b = a^2 - 2ab + b^2 - 5a + 7b = 0$.

Chứng minh rằng: $ab - 12a + 15b = 0$.

Bài tập 6: Khai triển biểu thức: $a^4 + (a + b)^4$ thành dạng $2K + 1$ và phân tích K thành tích các thừa số.

Bài tập 7:

a) Chứng minh đẳng thức: $x + y + |x - y| = \max\{x, y\}$, với $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh đẳng thức: $\left| \frac{a+b}{ab} + \frac{a-b}{ab} - \frac{2}{c} \right| + \frac{a+b}{ab} + \left| \frac{a-b}{ab} \right| + \frac{2}{c} = 4 \max\left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right\}$

với $\forall a, b, c \neq 0$.

Bài tập 8: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho:

Đa thức $x^{3n+1} + x^{2n} + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Bài tập 9: Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$.

(Đề thi HSG tỉnh năm học 2005 - 2006)

Bài tập 10: Cho $a^2 - b^2 = 4c^2$. Chứng minh rằng: $(5a - 3b + 8c)(5a - 3b - 8c) = (3a - 5b)^2$.

2. Biến đổi hữu tỷ

a. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp:

Sử dụng các biến đổi thông thường để đưa đến kết luận theo yêu cầu bài toán.

Vận dụng giả thiết để chọn hướng giải nhanh và chính xác.

Đối với các bài toán có số mũ bậc n của các hạng tử, có thể sử dụng phương pháp quy nạp.

Lưu ý: Đây là kiến thức cần thiết để chứng minh các bất đẳng thức hay tìm GTLN, GTNN.

b) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $a + b + c = 0$; $a, b, c \neq 0$. Chứng minh đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 2: Chứng minh rằng nếu a, b, c khác nhau thì:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Giải

Biến đổi về trái:

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} &= \frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-a)-(b-c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a} + \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b} \\ &= \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} \end{aligned}$$

c) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $xyz = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$

Bài tập 2: Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{3b-d}, a, c \neq 0. \text{ Chứng minh rằng: } b^2 = d^2.$$

Bài tập 3: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$

- a) Cho $a = 1$. Tính b, c .
 b) Chứng minh rằng nếu a, b, c đôi một khác nhau thì $a^2b^2c^2 = 1$.
 c) Chứng minh rằng nếu a, b, c dương thì $a = b = c$.

Bài tập 4:

- a) Cho a, b, c thỏa $abc \neq 0$ và $ab + bc + ca = 0$. Tính $P = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.
 b) Cho a, b, c thỏa $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$ và $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$.
 Chứng minh rằng: $a = b = c$.

Bài tập 5: Cho $x > 0$ thỏa điều kiện: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^5 + \frac{1}{x^5}$.

Bài tập 6: Cho a, b, x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$ và $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{1}{(a+b)^{1003}}$.

Bài tập 7: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $b \neq c$ và $\frac{ac-b^2}{a-2b+c} = \frac{bd-c^2}{b-2c+d} = k$.

Chứng minh: $k = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}$.

Bài tập 8: Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau và khác 0, thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$.

Chứng minh rằng: $\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) = 9$.

Bài tập 9: Đơn giản biểu thức: $\frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3+b^3}\right) + \frac{1}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2+b^2}\right) + \frac{1}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a+b}\right)$

Bài tập 10: Chứng minh rằng nếu: $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ và x, y khác 0 thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Bài tập 11: Chứng minh rằng nếu: $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$ và x, y, z khác 0 thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Bài tập 12: Cho a, b , khác 0 thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

3. Biến đổi vô tỷ

a. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp:

Áp dụng hằng đẳng thức để biến đổi.

Một số bằng liên quan đến căn bậc n , có thể sử dụng phương pháp quy nạp để đưa đến kết luận theo yêu cầu bài toán.

Giống các bài toán rút gọn.

b) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Chứng minh đẳng thức: $\frac{\sqrt[4]{49+20\sqrt{60}} + \sqrt[4]{49-20\sqrt{60}}}{2} = \sqrt{3}$

Giải

$$\begin{aligned} VT(1) &= \frac{\sqrt[4]{49+20\sqrt{60}} + \sqrt[4]{49-20\sqrt{60}}}{2} = \frac{\sqrt[4]{(5+2\sqrt{6})^2} + \sqrt[4]{(5-2\sqrt{6})^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt[4]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4} + \sqrt[4]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4}}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Bài tập 2: Cho $a \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 - \sqrt{a}}{a^2 + \sqrt{a} + 1} - \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a^2 - \sqrt{a} + 1} + a + 1 = (\sqrt{a} - 1)^2$

Giải

Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ: $\sqrt{a} = x \geq 0$

c) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $a, b > 0$ và $c \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$

Bài tập 2: Chứng minh rằng các số sau là số nguyên:

a) $A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{3 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

b) $B = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{48}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{48}}{9}}$

Bài tập 3: Cho x là số nguyên. Chứng minh rằng nếu x không phải là số chính phương thì $\sqrt{x}$ là số vô tỉ.

Bài tập 4: Chứng minh rằng số $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} - \sqrt{6 - 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ là một nghiệm của phương trình $x^4 - 16x^2 + 32 = 0$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng nếu $\begin{cases} ax^3 = by^3 = cz^3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$ thì $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

Bài tập 6: Chứng minh rằng nếu $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b+c}$ thì với số nguyên dương lẻ n ta có $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a+b+c}$.

Bài tập 7: Cho $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = a$ Tính $S = x\sqrt{(1+y^2)} + y\sqrt{(1+x^2)}$.

Bài tập 8: Cho $a > 0$ và $4a^2 + a\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{\sqrt{a^4 + a + 1} - a^2} = \sqrt{2}$

CHUYÊN ĐỀ 7 CÁC PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC

1. Biến đổi biểu thức nguyên:

a. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp:

Ta biến đổi từ một vế của đẳng thức (áp dụng hằng đẳng thức) để chuyển thành biểu thức bằng vế còn lại.

Xét tính chất của một số biểu thức đặc biệt để đưa ra cách phân tích đúng theo yêu cầu bài toán.

Áp dụng biến đổi theo một vế trở thành vế còn lại hoặc hai vế cùng về một kết quả cụ thể.

b) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

b) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b)^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab] \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 &= [(a + b + c)^3 - a^3] - (b^3 + c^3) \\ &= (b + c)[(a + b + c)^2 + (a + b + c)a + a^2] - (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\ &= (b + c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ca) \\ &= 3(b + c)[a(a + b) + c(a + b)] \\ &= 3(a + b)(b + c)(c + a). \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài tập 2: Cho $x + y + z = 0$.

Chứng minh rằng: $10(x^7 + y^7 + z^7) = 7(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^5 + z^5)$

Giải

Từ $x + y + z = 0$.

Suy ra: $z = x(x + y)$. Ta có:

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 + z^5 &= x^5 + y^5 - (x + y)^5 \\ &= -5(x^4y + 2x^3y^2 + xy^4) \\ &= -5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) \\ &= -5xy[(x + y)(x^2 + y^2 - xy) + 2xy(x + y)] \\ &= -5xy(x + y)(x^2 + y^2 + xy) \quad (1) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + y^2 + (x + y)^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 + xy) \quad (2) \end{aligned}$$

mà

$$\begin{aligned} x^7 + y^7 + z^7 &= x^7 + y^7 - (x + y)^7 \\ &= -7(x^6y + 3x^5y^2 + 5x^4y^3 + 5x^3y^4 + 3x^2y^5 + xy^6) \\ &= -7xy(x + y)(x^2 + y^2 + xy) \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2) và (3) ta có điều phải chứng minh.

c) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

a) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

b) $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

Bài tập 2: Chứng minh các hằng đẳng thức sau:

a) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

b) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

Bài tập 3: Chứng minh rằng nếu các số a, b, c thỏa mãn:

$$a^4 + b^4 + (a - b)^4 = c^4 + d^4 + (c - d)^4 \text{ thì } a^2 + b^2 + (a - b)^2 = c^2 + d^2 + (c - d)^2$$

Bài tập 4: Cho $a^3 - 3ab^2 = 19$, $b^3 - 3a^2b = 98$. Tính $P = a^2 + b^2$.

Bài tập 5: Cho a, b là hai số thỏa mãn điều kiện: $a^2 - 3ab + 2b^2 + a - b = a^2 - 2ab + b^2 - 5a + 7b = 0$.

Chứng minh rằng: $ab - 12a + 15b = 0$.

Bài tập 6: Khai triển biểu thức: $a^4 + (a + b)^4$ thành dạng $2K + 1$ và phân tích K thành tích các thừa số.

Bài tập 7:

a) Chứng minh đẳng thức: $x + y + |x - y| = \max\{x, y\}$, với $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh đẳng thức: $\left| \frac{a+b}{ab} + \frac{a-b}{ab} - \frac{2}{c} \right| + \frac{a+b}{ab} + \left| \frac{a-b}{ab} \right| + \frac{2}{c} = 4 \max \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right\}$

với $\forall a, b, c \neq 0$.

Bài tập 8: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho:

Đa thức $x^{3n+1} + x^{2n} + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Bài tập 9: Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$.

(Đề thi HSG tỉnh năm học 2005 - 2006)

Bài tập 10: Cho $a^2 - b^2 = 4c^2$. Chứng minh rằng: $(5a - 3b + 8c)(5a - 3b - 8c) = (3a - 5b)^2$.

2. Biến đổi hữu tỷ

a. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp:

Sử dụng các biến đổi thông thường để đưa đến kết luận theo yêu cầu bài toán.

Vận dụng giả thiết để chọn hướng giải nhanh và chính xác.

Đối với các bài toán có số mũ bậc n của các hạng tử, có thể sử dụng phương pháp quy nạp.

Lưu ý: Đây là kiến thức cần thiết để chứng minh các bất đẳng thức hay tìm GTLN, GTNN.

b) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $a + b + c = 0$; $a, b, c \neq 0$. Chứng minh đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 2: Chứng minh rằng nếu a, b, c khác nhau thì:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Giải

Biến đổi về trái:

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} &= \frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-a)-(b-c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a} + \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b} \\ &= \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} \end{aligned}$$

c) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $xyz = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$

Bài tập 2: Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{3b-d}, a, c \neq 0. \text{ Chứng minh rằng: } b^2 = d^2.$$

Bài tập 3: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$

- a) Cho $a = 1$. Tính b, c .
 b) Chứng minh rằng nếu a, b, c đôi một khác nhau thì $a^2b^2c^2 = 1$.
 c) Chứng minh rằng nếu a, b, c dương thì $a = b = c$.

Bài tập 4:

- a) Cho a, b, c thỏa $abc \neq 0$ và $ab + bc + ca = 0$. Tính $P = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.
 b) Cho a, b, c thỏa $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$ và $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$.
 Chứng minh rằng: $a = b = c$.

Bài tập 5: Cho $x > 0$ thỏa điều kiện: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^5 + \frac{1}{x^5}$.

Bài tập 6: Cho a, b, x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$ và $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{1}{(a+b)^{1003}}$.

Bài tập 7: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $b \neq c$ và $\frac{ac-b^2}{a-2b+c} = \frac{bd-c^2}{b-2c+d} = k$.

Chứng minh: $k = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}$.

Bài tập 8: Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau và khác 0, thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$.

Chứng minh rằng: $\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) = 9$.

Bài tập 9: Đơn giản biểu thức: $\frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3+b^3}\right) + \frac{1}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2+b^2}\right) + \frac{1}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a+b}\right)$

Bài tập 10: Chứng minh rằng nếu: $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ và x, y khác 0 thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Bài tập 11: Chứng minh rằng nếu: $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$ và x, y, z khác 0 thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Bài tập 12: Cho a, b , khác 0 thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

3. Biến đổi vô tỷ

a. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp:

Áp dụng hằng đẳng thức để biến đổi.

Một số bằng liên quan đến căn bậc n , có thể sử dụng phương pháp quy nạp để đưa đến kết luận theo yêu cầu bài toán.

Giống các bài toán rút gọn.

b) Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Chứng minh đẳng thức: $\frac{\sqrt[4]{49+20\sqrt{60}} + \sqrt[4]{49-20\sqrt{60}}}{2} = \sqrt{3}$

Giải

$$\begin{aligned} VT(1) &= \frac{\sqrt[4]{49+20\sqrt{60}} + \sqrt[4]{49-20\sqrt{60}}}{2} = \frac{\sqrt[4]{(5+2\sqrt{6})^2} + \sqrt[4]{(5-2\sqrt{6})^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt[4]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4} + \sqrt[4]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4}}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Bài tập 2: Cho $a \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 - \sqrt{a}}{a^2 + \sqrt{a} + 1} - \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a^2 - \sqrt{a} + 1} + a + 1 = (\sqrt{a} - 1)^2$

Giải

Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ: $\sqrt{a} = x \geq 0$

c) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $a, b > 0$ và $c \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$

Bài tập 2: Chứng minh rằng các số sau là số nguyên:

a) $A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{3 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

b) $B = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{48}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{48}}{9}}$

Bài tập 3: Cho x là số nguyên. Chứng minh rằng nếu x không phải là số chính phương thì $\sqrt{x}$ là số vô tỉ.

Bài tập 4: Chứng minh rằng số $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} - \sqrt{6 - 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ là một nghiệm của phương trình $x^4 - 16x^2 + 32 = 0$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng nếu $\begin{cases} ax^3 = by^3 = cz^3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$ thì $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

Bài tập 6: Chứng minh rằng nếu $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b+c}$ thì với số nguyên dương lẻ n ta có $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a+b+c}$.

Bài tập 7: Cho $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = a$ Tính $S = x\sqrt{(1+y^2)} + y\sqrt{(1+x^2)}$.

Bài tập 8: Cho $a > 0$ và $4a^2 + a\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{\sqrt{a^4 + a + 1} - a^2} = \sqrt{2}$

CHUYÊN ĐỀ 9
TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp:

Thông thường để giải dạng toán này ta phải rút gọn trước. Sau đó thay các giá trị của biến vào và tính toán.

Áp dụng một số tính chất của các biểu thức, phân thức, hằng đẳng thức để phân tích bài toán.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Tính giá trị của biểu thức: $M = \sqrt{136} + \sqrt{7260}$

Giải

Ta có:

$$M = \sqrt{136} + \sqrt{7260} = \sqrt{11^2 + 2 \cdot 11 \cdot \sqrt{15} + (\sqrt{15})^2} = 11 + \sqrt{15}$$

Vậy: $M = 11 + \sqrt{15}$

Bài tập 2: Tính giá trị của biểu thức: $M = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vậy: $M = -2\sqrt{3}$

Bài tập 3: Tính giá trị của biểu thức: $N = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{1 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1} = 1 \end{aligned}$$

Vậy: $N = 1$

Bài tập 4: Tính giá trị của biểu thức: $Q = \sqrt{2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x}} + \sqrt{2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x}}$ tại $x = 4$:

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x}} + \sqrt{2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x}} \\ &= \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x(x - 1)}} + x + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x(x - 1)}} + x \\ &= (\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}) + (\sqrt{x} - \sqrt{x + 1}) = 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

Thay $x = 4$, ta được: $Q = 4$.

Bài tập 5: Tính giá trị của biểu thức: $M = \sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147}$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147} = \sqrt{16 \cdot 3} - 2\sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{36 \cdot 3} - \frac{1}{7}\sqrt{49 \cdot 3} \\ &= 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Bài tập 6: Tính giá trị của biểu thức: $S = \frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}(3x+1)} + x^2(3+x)}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x}$ tại $x = 10$.

Giải

Ta có:

$$S = \frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}(3x+1)+x^2(3+x)}}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{x})^3 + 3(\sqrt{x})^2 \cdot x + 3\sqrt{x} \cdot x^2 + x^3}}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{x}+x)^3}}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x} = \sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$$

Vậy: $S = 0$

Bài tập 7: Tính giá trị của biểu thức: $M = \sqrt[4]{\sqrt{x}+1} - 2\sqrt[8]{x} + 1$ (với $x > 1$), tại $x = 256$.

Giải

Ta có:

$$M = \sqrt[4]{\sqrt{x}+1} - 2\sqrt[8]{x} + 1 = \sqrt{\left(\sqrt[8]{x}-1\right)^2} + 1 = \sqrt[8]{x} - 1 + 1 = \sqrt[8]{x}$$

Vậy: $M = 2$.

c) Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho các số thực dương a và b thỏa mãn: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2004} + b^{2004}$.

Bài tập 2: Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $S = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}$.

Bài tập 3: Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Tính giá trị của biểu thức: $S = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Bài tập 4: Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tính giá trị của biểu thức: $A = a^4 + b^4 + c^4$.

Bài tập 5: Cho $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$B = (x-1)^{2007} + y^{2008} + (z+1)^{2009}$$

Bài tập 6: Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính giá trị của biểu thức: $C = a^2 + b^9 + c^{1945}$.

Bài tập 7: Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 1x + 20$ tại $x = 16$.

b) $B = x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x$ tại $x = 14$.

c) $C = x^{14} - 10x^{13} + 10x^{12} - 10x^{11} + \dots + 10x^2 - 10x + 10$ tại $x = 9$.

d) $D = x^{15} - 8x^{14} + 8x^{13} - 8x^{12} + \dots - 8x^2 + 8x - 5$ tại $x = 7$.

Bài tập 8: Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = x^3(x^2 - y^2) + y^2(x^3 - y^3)$ với $x = 2$; $|y| = 1$.

b) $B = M.N$ với $|x| = 2$. Biết rằng: $M = -2x^2 + 3x + 5$; $N = x^2 - x + 3$

Bài tập 9: Cho $a^3 - 3ab^2 = 19$ và $b^3 - 3a^2b = 98$. Hãy tính: $E = a^2 + b^2$.

Bài tập 10: Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{\frac{81}{121}} + \sqrt{\frac{1}{121}} + \sqrt{\frac{36}{81}} + \frac{1+\sqrt{14641}}{122} + \frac{1-\sqrt{14641}}{120}$

Đáp số: $A = \frac{52}{33}$

Bài tập 11: Tính giá trị của biểu thức: $N = \sqrt{243} + \sqrt{363} + \sqrt{\frac{1296}{3}} - \sqrt{3072}$

Bài tập 12: Tính giá trị của biểu thức: $Q = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}$, tại $x = 5$

Đáp số: $Q = \sqrt{5} + 1$

Bài tập 13: Tính giá trị của biểu thức sau: $T = \sqrt{72} - \sqrt{98} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

Đáp số: $T = 0$.

Bài tập 14: Cho biểu thức sau: $P = \frac{(\sqrt{5}+2)\left(\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}\right)}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$

Đáp số: $P = \frac{1}{3}$

Bài tập 15: Tính giá trị của biểu thức: $G = \left(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}\right)\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}$

Đáp số: $G = 0$.

Bài tập 16: Tính giá trị của biểu thức: $E = \left(\sqrt[3]{2} + 1\right)^3 \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}}$ Đáp số: $E = 1$.

Bài tập 17: Tính giá trị của biểu thức: $M = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$. Đáp số: $M = 2$

Bài tập 18: Tính giá trị của biểu thức: $L = \frac{\sqrt{4 + \sqrt[n]{x} + 4^2 \sqrt[n]{x}}}{\sqrt[n]{x} + 2} + \sqrt[2n]{x - 1}$ tại $x = 2$. Đáp số: $L = 2$.

Bài tập 19: Tính giá trị của biểu thức: $Q = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}}} + \frac{2}{\sqrt[n]{x}}$ tại $x = 2^n$. Đáp số: $Q = 3$.

Bài tập 20: Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \sqrt{\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{27} + 2} + \sqrt{\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{27} - 1}$ Đáp số: $A = 3$.

CHUYÊN ĐỀ 10
TÌM GIÁ TRỊ NGUYÊN CỦA BIỂU THỨC

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp:

Để tìm giá trị x nguyên sao cho biểu thức $\frac{A(x)}{B(x)}$ (trong đó A(x), B(x) là những đa thức) nhận giá

trị nguyên, ta làm như sau:

Biến đổi $\frac{A(x)}{B(x)} = P(x) + \frac{Q(x)}{B(x)}$, $\text{Deg } Q(x) < \text{Deg } B(x)$. Dẫn đến tìm số nguyên a sao cho Q(a)

chia hết cho B(a).

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Tìm số nguyên n sao cho biểu thức $\frac{2n+5}{n+2}$ là số nguyên.

Giải

Ta có: $\frac{2n+5}{n+2} = 2 + \frac{1}{n+2}$

Để biểu thức $\frac{2n+5}{n+2}$ là số nguyên thì $\frac{1}{n+2}$ phải là số nguyên. Vì 2 là số nguyên.

Do đó: n + 2 phải là ước của 1.

Suy ra:

$$n + 2 = 1 \Rightarrow n = -1.$$

$$n + 2 = -1 \Rightarrow n = -3.$$

Bài tập 2: Tìm số nguyên n sao cho biểu thức $\frac{n^6 + 6n + 10}{n + 3}$ là số nguyên.

Giải

Ta có: $\frac{n^2 + 6n + 11}{n + 3} = \frac{(n+3)^2 + 2}{n + 3} = n + 3 + \frac{2}{n + 3}$

Biểu thức trên có giá trị nguyên khi $\frac{2}{n + 3}$ là số nguyên.

Do đó: n + 3 phải là ước của 2.

Hay n + 3 = 2; n + 3 = -2; n + 3 = 1; n + 3 = -1

Vậy n = -1; -5; -2; -4.

Bài tập 3: Tìm số nguyên x sao cho biểu thức $\frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$ nhận giá trị nguyên.

Giải

Ta có: $\frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} = \frac{x^2(x^3 + 1) - (x^2 - 1)}{x^3 + 1} = x^2 - \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} = x^2 - \frac{x - 1}{x^2 - x + 1}$

Biểu thức $\frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$ nhận giá trị nguyên khi $\frac{x - 1}{x^2 - x + 1}$ nhận giá trị nguyên với x nguyên.

Suy ra: $\frac{x(x - 1)}{x^2 - x + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 - x + 1}$ cũng nhận giá trị nguyên.

(Vì một số nguyên thì nhân thêm một số nguyên x là một số nguyên).

Do đó:

Xét: $x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0$ hay x = 0 hoặc x = 1.

Xét: $x^2 - x + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$ (Phương trình này vô nghiệm).

Vậy giá trị x nguyên cần tìm là $x = 0$; 1 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 4: Tìm k nguyên dương lớn nhất để ta có số:

$$n = \frac{(k+1)^2}{k+23}$$

là một số nguyên dương.

Giải

Ta có thể viết:

$$n = \frac{(k+1)^2}{k+23} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k+23} = \frac{(k+23)(k-21) + 484}{k+23} = k - 21 + \frac{484}{k+23}, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

n là một số nguyên khi và chỉ khi $k+23$ là ước của 484, $k+23 > 23$

Ta có: $484 = 22^2 = 4 \cdot 121 = 44 \cdot 11$.

$$\Rightarrow \begin{cases} k+23 = 121 \\ k+23 = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 98 \\ k = 21 \end{cases}$$

Với $k = 98$, ta có: $n = 81$

Với $k = 21$, ta có $n = 11$.

Vậy có hai giá trị k nguyên dương thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $k = 98$ và $k = 21$.

Giá trị lớn nhất của k là 98.

Bài tập 5: Tìm số nguyên z sao cho $\frac{1}{2z} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{4z}$ là một số nguyên.

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2z} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{4z} = \frac{6+4+3}{12z} = \frac{13}{12z}$$

Để biểu thức trên là một số nguyên thì $\frac{13}{12z}$ phải là một số nguyên.

Hay $12z \mid 13$. Mà $13 = 12 \cdot z$ và $z \in \mathbb{Z}$. Nên không tồn tại vì $(12; 13) = 1$.

Vậy không tồn tại z sao cho $\frac{1}{2z} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{4z}$ là một số nguyên.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm số nguyên n sao cho biểu thức $3 - \frac{6n+1}{2n-1}$ là một số nguyên.

Bài tập 2: Tìm số nguyên âm n sao cho biểu thức $\frac{n^2 - 6n + 10}{2n + 9}$ là một số nguyên âm.

Bài tập 3: Tìm số nguyên k nhỏ nhất sao cho biểu thức $(2k+1) - \frac{3k^2 - 2k - 1}{3k-1}$ đạt giá trị nguyên.

Bài tập 4: Tìm số nguyên dương n sao cho biểu thức $\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-8}$ có giá trị nguyên.

Bài tập 5: Tìm số nguyên m sao cho biểu thức $\sqrt{\sqrt{m+1}} + \sqrt{\sqrt{m-1}}$ đạt giá trị nguyên.

Bài tập 6: Cho $a = x + \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$, là một số nguyên. Chứng minh rằng số $b = x^{2005} + \frac{1}{x^{2005}}$ là một số nguyên.

Bài tập 7: Cho x và y là hai số thực khác 0 sao cho các số: $a = x + \frac{1}{y}$; $b = y + \frac{1}{x}$ đều là số nguyên.

a) Chứng minh rằng số $c = x^2 y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$ cũng là một số nguyên.

b) Tìm mọi số nguyên dương x, y sao cho số $d = x^n y^n + \frac{1}{x^n y^n}$ là số nguyên.

CHUYÊN ĐỀ 10
TÌM GIÁ TRỊ NGUYÊN CỦA BIỂU THỨC

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp:

Để tìm giá trị x nguyên sao cho biểu thức $\frac{A(x)}{B(x)}$ (trong đó A(x), B(x) là những đa thức) nhận giá

trị nguyên, ta làm như sau:

Biến đổi $\frac{A(x)}{B(x)} = P(x) + \frac{Q(x)}{B(x)}$, $\text{Deg } Q(x) < \text{Deg } B(x)$. Dẫn đến tìm số nguyên a sao cho Q(a)

chia hết cho B(a).

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Tìm số nguyên n sao cho biểu thức $\frac{2n+5}{n+2}$ là số nguyên.

Giải

Ta có: $\frac{2n+5}{n+2} = 2 + \frac{1}{n+2}$

Để biểu thức $\frac{2n+5}{n+2}$ là số nguyên thì $\frac{1}{n+2}$ phải là số nguyên. Vì 2 là số nguyên.

Do đó: n + 2 phải là ước của 1.

Suy ra:

$$n + 2 = 1 \Rightarrow n = -1.$$

$$n + 2 = -1 \Rightarrow n = -3.$$

Bài tập 2: Tìm số nguyên n sao cho biểu thức $\frac{n^6+6n+10}{n+3}$ là số nguyên.

Giải

Ta có: $\frac{n^2+6n+11}{n+3} = \frac{(n+3)^2+2}{n+3} = n+3 + \frac{2}{n+3}$

Biểu thức trên có giá trị nguyên khi $\frac{2}{n+3}$ là số nguyên.

Do đó: n + 3 phải là ước của 2.

Hay n + 3 = 2; n + 3 = -2; n + 3 = 1; n + 3 = -1

Vậy n = -1; -5; -2; -4.

Bài tập 3: Tìm số nguyên x sao cho biểu thức $\frac{x^5+1}{x^3+1}$ nhận giá trị nguyên.

Giải

Ta có: $\frac{x^5+1}{x^3+1} = \frac{x^2(x^3+1)-(x^2-1)}{x^3+1} = x^2 - \frac{x^2-1}{x^3+1} = x^2 - \frac{x-1}{x^2-x+1}$

Biểu thức $\frac{x^5+1}{x^3+1}$ nhận giá trị nguyên khi $\frac{x-1}{x^2-x+1}$ nhận giá trị nguyên với x nguyên.

Suy ra: $\frac{x(x-1)}{x^2-x+1} = 1 - \frac{1}{x^2-x+1}$ cũng nhận giá trị nguyên.

(Vì một số nguyên thì nhân thêm một số nguyên x là một số nguyên).

Do đó:

Xét: $x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$ hay x = 0 hoặc x = 1.

Xét: $x^2 - x + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$ (Phương trình này vô nghiệm).

Vậy giá trị x nguyên cần tìm là $x = 0$; 1 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 4: Tìm k nguyên dương lớn nhất để ta có số:

$$n = \frac{(k+1)^2}{k+23}$$

là một số nguyên dương.

Giải

Ta có thể viết:

$$n = \frac{(k+1)^2}{k+23} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k+23} = \frac{(k+23)(k-21) + 484}{k+23} = k - 21 + \frac{484}{k+23}, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

n là một số nguyên khi và chỉ khi $k+23$ là ước của 484, $k+23 > 23$

Ta có: $484 = 22^2 = 4.121 = 44.11$.

$$\Rightarrow \begin{cases} k+23=121 \\ k+23=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=98 \\ k=21 \end{cases}$$

Với $k=98$, ta có: $n=81$

Với $k=21$, ta có $n=11$.

Vậy có hai giá trị k nguyên dương thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $k=98$ và $k=21$.

Giá trị lớn nhất của k là 98.

Bài tập 5: Tìm số nguyên z sao cho $\frac{1}{2z} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{4z}$ là một số nguyên.

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2z} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{4z} = \frac{6+4+3}{12z} = \frac{13}{12z}$$

Để biểu thức trên là một số nguyên thì $\frac{13}{12z}$ phải là một số nguyên.

Hay $12z \mid 13$. Mà $13 = 12.z$ và $z \in \mathbb{Z}$. Nên không tồn tại vì $(12; 13) = 1$.

Vậy không tồn tại z sao cho $\frac{1}{2z} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{4z}$ là một số nguyên.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm số nguyên n sao cho biểu thức $3 - \frac{6n+1}{2n-1}$ là một số nguyên.

Bài tập 2: Tìm số nguyên âm n sao cho biểu thức $\frac{n^2 - 6n + 10}{2n + 9}$ là một số nguyên âm.

Bài tập 3: Tìm số nguyên k nhỏ nhất sao cho biểu thức $(2k+1) - \frac{3k^2 - 2k - 1}{3k-1}$ đạt giá trị nguyên.

Bài tập 4: Tìm số nguyên dương n sao cho biểu thức $\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-8}$ có giá trị nguyên.

Bài tập 5: Tìm số nguyên m sao cho biểu thức $\sqrt{\sqrt{m+1}} + \sqrt{\sqrt{m-1}}$ đạt giá trị nguyên.

Bài tập 6: Cho $a = x + \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*,$ là một số nguyên. Chứng minh rằng số $b = x^{2005} + \frac{1}{x^{2005}}$ là một số nguyên.

Bài tập 7: Cho x và y là hai số thực khác 0 sao cho các số: $a = x + \frac{1}{y}; b = y + \frac{1}{x}$ đều là số nguyên.

a) Chứng minh rằng số $c = x^2 y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$ cũng là một số nguyên.

b) Tìm mọi số nguyên dương x, y sao cho số $d = x^n y^n + \frac{1}{x^n y^n}$ là số nguyên.

CHUYÊN ĐỀ 11

SO SÁNH MỘT SỐ VỚI CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Kiến thức cơ bản:

Giả sử phương trình bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , ($a \neq 0$).

Theo định lý Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Dạng toán:

Dạng 1: Tồn tại số α thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$.

Biến đổi: $x_1 - \alpha < 0 < x_2 - \alpha$.

Đặt: $x - \alpha = y \Rightarrow x = y + \alpha$.

Suy ra: $f(y) = a(y + \alpha)^2 + b(y + \alpha) + c = 0$ (*)

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) phải có hai nghiệm trái dấu.

$$\Leftrightarrow P < 0.$$

Dạng 2: Tồn tại số α thỏa mãn $\alpha < x_1 < x_2$.

Ta có: $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < \alpha - x_1 < \alpha - x_2$.

Đặt: $y = \alpha - x \Rightarrow x = \alpha - y$.

Suy ra: $f(y) = a(\alpha - y)^2 + b(\alpha - y) + c = 0$ (*)

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) phải có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

Hay có thể dùng cách khác

$$\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \end{cases}$$

Dạng 3: Tồn tại số α thỏa mãn $x_1 < x_2 < \alpha$.

Ta có: $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha < x_2 - \alpha < 0$

Đặt: $y = x - \alpha \Rightarrow x = y + \alpha$.

Khi đó ta có phương trình: $f(y) = a(y - \alpha)^2 + b(y - \alpha) + c = 0$ (*)

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) phải có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

Hay ta có thể dùng cách khác:

$$x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha < 0 \end{cases}$$

Dạng 4: Cho hai số: $\alpha < \beta$, $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$).

$$(1) \begin{cases} x_1 < \alpha < x_2 < \beta \\ \alpha < x_1 < \beta < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta) < 0$$

$$(2) \alpha < x_1 < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta \end{cases}$$

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Tìm m để phương trình: $(2m - 1)x^2 + (m^2 - 1)x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 1 < x_2$.

Giải

Đặt $f(x) = (2m - 1)x^2 + (m^2 - 1)x + m + 2$.

Từ giả thiết, ta có: $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$.

Đặt: $x - 1 = y \Rightarrow x = y + 1$.

Suy ra:

$$\begin{aligned} f(y) &= (2m - 1)(y + 1)^2 + (m^2 - 1)(y + 1) + m + 2 \\ &= (2m - 1)y^2 + (m^2 + 4m - 3)y + m^2 + 3m. \end{aligned}$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $f(y) = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$$\Leftrightarrow (2m - 1)(m^2 + 3m) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài tập 2: Tìm m để phương trình: $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $1 < x_1 < x_2$.

Giải

Ta có: $1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < 1 - x_1 < 1 - x_2$.

Đặt: $y = 1 - x \Rightarrow x = 1 - y$.

Suy ra:

$$f(y) = (1 - y)^2 - 3(1 - y) + 2m - 1 = 0$$

$$f(y) = y^2 - y + 2m - 3 = 0$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $f(y) = 0$ phải có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 1 > 0 \\ S = 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m < \frac{13}{8}.$$

Bài tập 3: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$.

Tìm giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn: $-2 < x_1 < x_2 < 4$.

Giải

Để phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn: $-2 < x_1 < x_2 < 4$

$$\begin{cases} -2 < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(-2) > 0 \\ \frac{S}{2} > -2 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(4) > 0 \\ \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3$$

Bài tập 4: Chứng minh rằng phương trình: $f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$, với $a < b < c$ luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $a < x_1 < b < x_2 < c$.

Giải

Nhận thấy rằng $f(x)$ là một tam thức bậc hai với hệ số x^2 là 3.

$$f(b) = (b - a)(b - c) < 0, \text{ vì } a < b < c.$$

$f(x)$ có hai nghiệm và $x_1 < b < x_2$.

$f(a) = (a - b)(a - c) > 0$, vì $a < b < c$ nên a nằm ngoài $[x_1; x_2]$ mà $a < b$ nên $a < x_1 < b < x_2$.

$f(c) = (c - a)(c - b) > 0$, nên c nằm ngoài $[x_1; x_2]$ mà $c > b$ nên $a < x_1 < b < x_2 < c$.

Bài tập 5: Biết $2a + 3b + 6c = 0$.

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Giải

Nếu $a = 0$ thì $3b + 6c = 0 \Leftrightarrow b \cdot \frac{1}{2} + c = 0$. Suy ra $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình và $\frac{1}{c} \in (0; 1)$.

Nếu $a \neq 0$ thì $2a + 3b + 6c = f(1) + f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Nhưng $f(0), f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ không thể đồng thời bằng 0. Vì nếu như vậy thì phương trình bậc hai sẽ

có 3 nghiệm phân biệt. Điều đó chứng tỏ, một trong ba biểu thức $f(0), f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ phải có hai

biểu thức trái dấu.

Vậy phương trình luôn có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm m để phương trình: $(m + 4)x^2 + (m^2 - m)x + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1 < -1 < x_2.$$

Bài tập 2: Tìm m để phương trình $(m + 1)x^2 - (2m - 1)x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$-2 \leq x_1 < x_2.$$

Bài tập 3: Cho phương trình: $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $1 < x_1 < x_2 < 6$.

Bài tập 4: Cho phương trình: $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $-1 < x_1 < x_2 < 1$.

Bài tập 5: Cho phương trình: $f(x) = x^2 - 2(m + 2)x + 6m + 1$.

a) Chứng minh phương trình trên có nghiệm với mọi m .

b) Đặt $x = t + 2$. Tính $f(x)$ theo t , từ đó tìm điều kiện đối với m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm lớn 2.

Bài tập 6: Cho phương trình bậc hai: $x^2 + 2(a + 3)x + 4(a + 3) = 0$.

a) Với giá trị nào của tham số a thì phương trình có nghiệm kép. Tính các nghiệm kép đó.

b) Xác định a để phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1.

Bài tập 7: Cho phương trình: $x^2 + 2(m - 1)x - (m + 1) = 0$.

a) Tìm giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 1 và một nghiệm lớn hơn 1.

b) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm nhỏ hơn 2.

Bài tập 8: Tìm m để phương trình: $x^2 - mx + m = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn: $x_1 \leq -2 \leq x_2$.

Bài tập 9: Tìm m để phương trình: $(m + 1)x^2 + mx + 3 = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 < -2 < 1 < x_2$.

Bài tập 10: Tìm m để phương trình: $x^2 - 2mx + m = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2 \in (-1; 3)$.

Bài tập 11: Tìm m để phương trình: $x^2 - 2x - 3m = 0$ thỏa mãn: $\frac{m}{2} \leq x_1 < 1 < x_2$.

CHUYÊN ĐỀ 11

SO SÁNH MỘT SỐ VỚI CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Kiến thức cơ bản:

Giả sử phương trình bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , ($a \neq 0$).

Theo định lý Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Dạng toán:

Dạng 1: Tồn tại số α thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$.

Biến đổi: $x_1 - \alpha < 0 < x_2 - \alpha$.

Đặt: $x - \alpha = y \Rightarrow x = y + \alpha$.

Suy ra: $f(y) = a(y + \alpha)^2 + b(y + \alpha) + c = 0$ (*)

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) phải có hai nghiệm trái dấu.

$$\Leftrightarrow P < 0.$$

Dạng 2: Tồn tại số α thỏa mãn $\alpha < x_1 < x_2$.

Ta có: $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < \alpha - x_1 < \alpha - x_2$.

Đặt: $y = \alpha - x \Rightarrow x = \alpha - y$.

Suy ra: $f(y) = a(\alpha - y)^2 + b(\alpha - y) + c = 0$ (*)

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) phải có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

Hay có thể dùng cách khác

$$\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \end{cases}$$

Dạng 3: Tồn tại số α thỏa mãn $x_1 < x_2 < \alpha$.

Ta có: $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow x_1 - \alpha < x_2 - \alpha < 0$

Đặt: $y = x - \alpha \Rightarrow x = y + \alpha$.

Khi đó ta có phương trình: $f(y) = a(y - \alpha)^2 + b(y - \alpha) + c = 0$ (*)

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) phải có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

Hay ta có thể dùng cách khác:

$$x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha < 0 \end{cases}$$

Dạng 4: Cho hai số: $\alpha < \beta$, $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$).

$$(1) \begin{cases} x_1 < \alpha < x_2 < \beta \\ \alpha < x_1 < \beta < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta) < 0$$

$$(2) \alpha < x_1 < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta \end{cases}$$

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Tìm m để phương trình: $(2m - 1)x^2 + (m^2 - 1)x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 1 < x_2$.

Giải

Đặt $f(x) = (2m - 1)x^2 + (m^2 - 1)x + m + 2$.

Từ giả thiết, ta có: $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$.

Đặt: $x - 1 = y \Rightarrow x = y + 1$.

Suy ra:

$$\begin{aligned} f(y) &= (2m - 1)(y + 1)^2 + (m^2 - 1)(y + 1) + m + 2 \\ &= (2m - 1)y^2 + (m^2 + 4m - 3)y + m^2 + 3m. \end{aligned}$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $f(y) = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$$\Leftrightarrow (2m - 1)(m^2 + 3m) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài tập 2: Tìm m để phương trình: $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $1 < x_1 < x_2$.

Giải

Ta có: $1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < 1 - x_1 < 1 - x_2$.

Đặt: $y = 1 - x \Rightarrow x = 1 - y$.

Suy ra:

$$f(y) = (1 - y)^2 - 3(1 - y) + 2m - 1 = 0$$

$$f(y) = y^2 - y + 2m - 3 = 0$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $f(y) = 0$ phải có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 1 > 0 \\ S = 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m < \frac{13}{8}.$$

Bài tập 3: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$.

Tìm giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn: $-2 < x_1 < x_2 < 4$.

Giải

Để phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn: $-2 < x_1 < x_2 < 4$

$$\begin{cases} -2 < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(-2) > 0 \\ \frac{S}{2} > -2 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(4) > 0 \\ \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3$$

Bài tập 4: Chứng minh rằng phương trình: $f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$, với $a < b < c$ luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $a < x_1 < b < x_2 < c$.

Giải

Nhận thấy rằng $f(x)$ là một tam thức bậc hai với hệ số x^2 là 3.

$$f(b) = (b - a)(b - c) < 0, \text{ vì } a < b < c.$$

$f(x)$ có hai nghiệm và $x_1 < b < x_2$.

$f(a) = (a - b)(a - c) > 0$, vì $a < b < c$ nên a nằm ngoài $[x_1; x_2]$ mà $a < b$ nên $a < x_1 < b < x_2$.

$f(c) = (c - a)(c - b) > 0$, nên c nằm ngoài $[x_1; x_2]$ mà $c > b$ nên $a < x_1 < b < x_2 < c$.

Bài tập 5: Biết $2a + 3b + 6c = 0$.

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Giải

Nếu $a = 0$ thì $3b + 6c = 0 \Leftrightarrow b \cdot \frac{1}{2} + c = 0$. Suy ra $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình và $\frac{1}{c} \in (0; 1)$.

Nếu $a \neq 0$ thì $2a + 3b + 6c = f(1) + f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Nhưng $f(0), f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ không thể đồng thời bằng 0. Vì nếu như vậy thì phương trình bậc hai sẽ

có 3 nghiệm phân biệt. Điều đó chứng tỏ, một trong ba biểu thức $f(0), f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ phải có hai

biểu thức trái dấu.

Vậy phương trình luôn có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm m để phương trình: $(m + 4)x^2 + (m^2 - m)x + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1 < -1 < x_2.$$

Bài tập 2: Tìm m để phương trình $(m + 1)x^2 - (2m - 1)x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$-2 \leq x_1 < x_2.$$

Bài tập 3: Cho phương trình: $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $1 < x_1 < x_2 < 6$.

Bài tập 4: Cho phương trình: $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $-1 < x_1 < x_2 < 1$.

Bài tập 5: Cho phương trình: $f(x) = x^2 - 2(m + 2)x + 6m + 1$.

a) Chứng minh phương trình trên có nghiệm với mọi m .

b) Đặt $x = t + 2$. Tính $f(x)$ theo t , từ đó tìm điều kiện đối với m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm lớn 2.

Bài tập 6: Cho phương trình bậc hai: $x^2 + 2(a + 3)x + 4(a + 3) = 0$.

a) Với giá trị nào của tham số a thì phương trình có nghiệm kép. Tính các nghiệm kép đó.

b) Xác định a để phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1.

Bài tập 7: Cho phương trình: $x^2 + 2(m - 1)x - (m + 1) = 0$.

a) Tìm giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 1 và một nghiệm lớn hơn 1.

b) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm nhỏ hơn 2.

Bài tập 8: Tìm m để phương trình: $x^2 - mx + m = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn: $x_1 \leq -2 \leq x_2$.

Bài tập 9: Tìm m để phương trình: $(m + 1)x^2 + mx + 3 = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 < -2 < 1 < x_2$.

Bài tập 10: Tìm m để phương trình: $x^2 - 2mx + m = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2 \in (-1; 3)$.

Bài tập 11: Tìm m để phương trình: $x^2 - 2x - 3m = 0$ thỏa mãn: $\frac{m}{2} \leq x_1 < 1 < x_2$.

CHUYÊN ĐỀ 13 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1. Kiến thức cơ bản:

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$.

Kí hiệu tập xác định của hàm số $f(x)$ là D .

Giá trị lớn nhất:

m được gọi là giá trị lớn nhất của $f(x)$ nếu:

$$f(x) \leq m, \text{ với mọi } x \in D$$

Kí hiệu: $m = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc giá trị lớn nhất của $y = m$.

Giá trị nhỏ nhất:

M được gọi là giá trị nhỏ nhất nếu:

$$f(x) \geq M, \text{ với mọi } x_0 \in D$$

Kí hiệu: $M = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc giá trị nhỏ nhất của $y = M$.

2. Bài tập áp dụng theo dạng toán:

Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức bậc hai.

Cho biểu thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$).

Ta có:

$$f(x) = m - (cx + d)^2 \text{ hoặc } f(x) = M + (ex + f)^2, \text{ với } m, M \text{ là hai số thực.}$$

Giá trị lớn nhất của $f(x)$:

$$\text{GTLN } f(x) = m, \text{ đạt được khi } cx + d = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{d}{c}.$$

Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$:

$$\text{GTNN } f(x) = M, \text{ đạt được khi } ex + f = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{f}{e}$$

Bài tập 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $y = 2x^2 + 6x + 10$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y &= 2x^2 + 6x + 10 \\ y &= 2(x^2 + 3x + 5) \\ y &= 2(x + 1.5)^2 + 2.5 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $y = 2.5$, đạt được khi $x + 1.5 = 0 \Leftrightarrow x = -1.5$.

Bài tập 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $y = 5 + 4x - 4x^2$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y &= 5 + 4x - 4x^2 \\ y &= 6 - (1 - 4x + 4x^2) \\ y &= 6 - (1 - 2x)^2 \leq 6 \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của $y = 6$, đạt được khi $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bài tập 3: Tìm giá trị của m, p sao cho: $P = m^2 - 4mp + 5p^2 + 10m - 22p + 28$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= m^2 - 4mp + 5p^2 + 10m - 22p + 28 \\ &= (m - 2p)^2 + (p - 1)^2 + 27 + 10(m - 2p) \end{aligned}$$

Đặt: $X = m - 2p$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= X^2 + 10X + (p - 1)^2 + 27 \\ &= (X + 5)^2 + (p - 1)^2 + 2. \end{aligned}$$

Ta thấy $(X + 5)^2 \geq 0$; $(p - 1)^2 \geq 0$, với mọi m, p .

Do đó: $P \geq 2$.

P đạt giá trị nhỏ nhất khi $X + 5 = 0$ và $p - 1 = 0$.

Giải hệ điều kiện trên ta được: $p = 1, m = -3$.

Suy ra: Giá trị nhỏ nhất của $P = 2$, với $p = 1, m = -3$

Vậy $p = 1$ và $m = -3$ là hai giá trị cần tìm.

Dạng 2: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức đại số bằng cách đưa về dạng $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$

~~hoặc $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức có bậc lớn hơn 0.~~

Bài tập 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 + 15x + 16}{3x}$.

Giải

Ta có $P = \frac{x^2 + 15x + 16}{3x} = \frac{(x-4)^2}{3x} + \frac{23}{3}$, với mọi $x > 0$

Vì $x > 0$ nên $\frac{(x-4)^2}{3x} + \frac{23}{3} \geq \frac{23}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{23}{3}$, đạt được khi $x = 4$.

Bài tập 5: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $P = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$.

Vì $\frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$ nên ta có: $P = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq 3 + \frac{1}{2} = 3,5$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P = 3,5$, đạt được khi $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bài tập 6: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2}$.

Giải

Ta có: $P = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2} = \frac{y^4 + 1}{(y^4 + 1)(x^2 + 2)} = \frac{1}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$, vì $x^2 + 2 \geq 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{2}$, đạt được khi $x = 0$ và $\forall y \in \mathbb{R}$.

Dạng 3: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức đại số bằng cách áp dụng bất đẳng thức Côsi.

Bất đẳng thức Cô si (Cauchy):

Với hai số thực không âm x, y, z, t , ta có:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

$$\frac{x+y+z+t}{4} \geq \sqrt[4]{xyzt}$$

Với mọi số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta có:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Đại lượng $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ được gọi là trung bình cộng của các số $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Đại lượng $x_1x_2...x_n$ được gọi là trung bình nhân của các số $x_1, x_2, ..., x_n$.

Bài tập 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{8x^2 + 2}{x}$, với $x > 0$.

Giải

Ta có: $P = \frac{8x^2 + 2}{x} = 8x + \frac{2}{x}$.

Ta thấy $8x$ và $\frac{2}{x}$ là hai đại lượng lấy giá trị dương.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương là $8x$ và $\frac{2}{x}$ ta có:

$$8x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{8x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{16} = 8.$$

Dấu bằng xảy ra khi: $8x = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 8$, đạt được khi $x = \frac{1}{2}$.

Bài tập 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2x + \frac{1}{8x}$, với $x > 0$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương: $2x$ và $\frac{1}{8x}$, ta có:

$$P = 2x + \frac{1}{8x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{8x}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1 \text{ hay } P \geq 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 1$, đạt được khi $2x = \frac{1}{8x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Dạng 4: Tìm GTLN, GTNN bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki (Bouniakovski) hay còn gọi là bất đẳng thức Cauchy - Schwarz (C - S).

Bất đẳng thức Bunhiakovski:

Cho hai dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

Bài tập 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + z^2$. Biết: $x + y + z = 1995$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakovski cho bộ ba số: $(1, 1, 1)$ và (x, y, z) ta có:

$$\begin{aligned} (x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1)^2 &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ \Leftrightarrow (x + y + z)^2 &\leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \\ \Leftrightarrow 1995^2 &\leq 3(x^2 + y^2 + z^2), \text{ vì } x + y + z = 1995. \end{aligned}$$

Từ đó, ta có: $P = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1995^2}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1995^2}{3}$, đạt được khi $\begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1995 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 665$.

Bài tập 10: Cho biểu thức: $P = |2x + 4y + \sqrt{5}z|$.

Trong đó x, y, z là các đại lượng thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 169$. Tìm giá trị lớn nhất của P .

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakovski cho bộ ba số: $(2, 4, \sqrt{5})$ và (x, y, z) , ta có:

$$(2x + 4y + \sqrt{5}z)^2 \leq \left[2^2 + 4^2 + (\sqrt{5})^2 \right] (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{Hay } P^2 \leq \left[2^2 + 4^2 + (\sqrt{5})^2 \right] (x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\text{vì } x^2 + y^2 + z^2 = 169 \text{ nên } P^2 \leq 25.169.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } P = 65, \text{ đạt được khi } \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{\sqrt{5}} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 169 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó tìm được: } x = \frac{26}{5}; -\frac{26}{5}, y = \frac{52}{5}; -\frac{52}{5}, z = \frac{13\sqrt{5}}{5}; -\frac{13\sqrt{5}}{5}.$$

* Lưu ý:

$$\text{- Giá trị lớn nhất của } A = \frac{a}{f(x)} \text{ (với } a \text{ là số dương)} \text{ là } \frac{a}{\text{GTNN của } f(x)}.$$

$$\text{- Giá trị nhỏ nhất của } B = \frac{b}{f(x)} \text{ (với } b \text{ là số dương)} \text{ là } \frac{b}{\text{GTLN của } f(x)}.$$

3. Bài tập áp dụng chung:

Bài tập 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = x^2 - 4x + 7$

b) $B = 4x^2 + 5x - 1$

c) $C = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2 - 30x + 9}$

Giải

a) Ta có: $A = x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3 \geq 3.$

Vậy GTNN của A là 3, đạt được khi $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

b) Ta có: $B = 4x^2 + 5x - 1 = \left(2x + \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{21}{4} \geq -\frac{21}{4}.$

Vậy GTNN của B là $-\frac{21}{4}$, đạt được $2x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}.$

c) Ta có:

$$C = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2 - 30x + 9} = \sqrt{(5x - 2)^2} + \sqrt{(5x - 3)^2}$$

$$\sqrt{(5x - 2)^2} \geq 0; \text{ đạt được khi } x = \frac{5}{2}.$$

Và

$$\sqrt{(5x - 3)^2} \geq 0; \text{ đạt được khi } x = \frac{5}{3}$$

Với $x = \frac{5}{2}$ hoặc $x = \frac{5}{3}$ thì GTNN của C = 0.

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$

Giải

$$P = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) - x + \sqrt{x} = \frac{1}{4} - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Do đó giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4}$ đạt khi $x = \frac{1}{4}.$

Bài tập 3: Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 5}$ có giá trị lớn nhất.

Giải

Ta có:

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 = (x - \sqrt{2})^2 + 3 \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 5} \leq \frac{1}{3}$$

Khi $x = \sqrt{2}$ thì biểu thức $\frac{1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 5}$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{3}$.

Bài tập 4: Với hai số không âm x và y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = x - 2\sqrt{xy} + 3y - 2\sqrt{x} + \frac{4009}{2}$$

Giải

Đặt: $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$, với $a, b \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= a^2 - 2ab + 3b^2 - 2a + 2004,5 \\ &= a^2 - 2(b+1)a + 3b^2 + 2004,5 \\ &= a^2 - 2(b+1)a + (b+1)^2 + 2b^2 - 2b + 2003,5 \\ &= (a - b - 1)^2 + 2\left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + 2003,5 - \frac{1}{2} \\ &= (a - b - 1)^2 + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2003 \geq 2003 \end{aligned}$$

Vì $(a - b - 1)^2 \geq 0$ và $\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall a, b$.

$$P = 2003 \text{ khi } \begin{cases} a = b + 1 \\ b - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy GTNN của $P = 2003$ đạt được khi $\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{3}{2} \\ \sqrt{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Bài tập 5: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\frac{6}{x^2 - 2x + 4}$.

Giải

Ta có: $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 \geq 3$.

$$\text{Do đó: } \frac{6}{x^2 - 2x + 4} \leq 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy GTLN của $\frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ là 3.

Bài tập 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{10}{-x^2 + 4x - 9}$.

Giải

Ta có: $-x^2 + 4x - 9 = -5 - (x - 2)^2 \leq -5$.

$$\text{Do đó: } \frac{10}{-x^2 + 4x - 9} \geq \frac{10}{-5} = -2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy GTNN của biểu thức $\frac{10}{-x^2 + 4x - 9}$ là -2.

Bài tập 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{8x^2 - 50x + 79}{x^2 - 6x + 9}$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{8x^2 - 50x + 79}{x^2 - 6x + 9} &= \frac{8(x^2 - 6x + 9) - 2(x - 3) + 1}{(x - 3)^2} \\ &= 8 - 2 \cdot \frac{1}{x - 3} + \left(\frac{1}{x - 3}\right)^2 = \left(\frac{1}{x - 3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{x - 3} + 1 + 7 \\ &= \left(\frac{1}{x - 3} - 1\right)^2 + 7 \geq 7 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{x - 3} - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy GTNN của biểu thức $\frac{8x^2 - 50x + 79}{x^2 - 6x + 9}$ là 7.

Bài tập 8: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{8x + 3}{4x^2 + 1}$.

Giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{8x + 3}{4x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow A(4x^2 + 1) &= 8x + 3 \\ \Leftrightarrow 4Ax^2 - 8x + A - 3 &= 0. \\ \text{Ta có: } \Delta &= 8^2 - 4 \cdot 4A \cdot (A - 3) = 0. \\ \Leftrightarrow A^2 - 3A - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow A = -1, A &= 4. \end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất của A là -1 đạt được khi $x = -1$ và giá trị lớn nhất của A là 4 đạt được khi $x = \frac{1}{4}$.

Bài tập 9: Cho hai số thực x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = x + y$.

Giải

$$\text{Ta có: } (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow M^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq M \leq \sqrt{2}$$

Suy ra Min $M = -\sqrt{2}$, đạt được khi $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài tập 10: Cho x, y, z là ba số không âm thỏa mãn: $xy + yz + zx = 100$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = xyz$.

Giải

$$\text{Ta có: } P \geq 0. \text{ Xét } 100 = xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx}$$

$$\Rightarrow 100 \geq 3\sqrt[3]{P^2} \Rightarrow \left(\frac{100}{3}\right)^3 \geq P^2$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{100}{3} \sqrt{\frac{100}{3}}$$

Suy ra: $\max P = \frac{100}{3} \sqrt{\frac{100}{3}}$, đạt được $xy = yz = zx$.

Bài tập 11: Cho biểu thức $y = x - \sqrt{x - 1993}$ (với $x > 1993$). Tìm giá trị nhỏ nhất của y.

Giải

Ta có: $y = (x - 1993) - \sqrt{x-1993} + 1993 = \left(\sqrt{x-1993} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7971}{4} \geq \frac{7971}{4}$

Suy ra: $\min y = \frac{7971}{4}$.

Bài tập 12: Cho a và b thỏa mãn $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = a^3 + b^3 + ab$.

Giải

Ta có: $E = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + ab = a^2 - ab + b^2 + ab = a^2 + b^2$

Ta lại có: $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

Suy ra: $\min E = \frac{1}{2}$, đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài tập 13: Cho biểu thức: $P = \sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}} + \sqrt{a+15-8\sqrt{a-1}}$, (với $a > 1$)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Giải

Ta có:

$$a + 3 - 4\sqrt{a-1} = (\sqrt{a-1} - 2)^2$$

$$a + 15 - 8\sqrt{a-1} = (\sqrt{a-1} - 4)^2$$

$$\Rightarrow P = |\sqrt{a-1} - 2| + |\sqrt{a-1} - 4| \geq |\sqrt{a-1} - 2 + 4 - \sqrt{a-1}| = 2$$

Suy ra: $\min P = 2$ đạt được khi $a = 1$.

Bài tập 14: Cho biểu thức: $Q = (x - ay)^2 + 6(x - ay) + x^2 + 16y^2 - 8xy + 2x - 8y + 10$.

Với x, y, a là các số nguyên. Tìm giá trị nhỏ nhất của Q.

Giải

Ta có: $Q = (x - ay + 3)^2 + (x - 4y)^2 + 2(x - 4y) + 1 = (x - ay + 3)^2 + (x - 4y + 1)^2 \geq 0$.

Suy ra: $\min Q = 0$, đạt được khi $x - ay + 3 = 0$ và $x - 4y + 1 = 0$.

Bài tập 15: Cho hai số dương x và y có tổng bằng 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{y^2}\right)$.

Giải

Biến đổi: $T = 1 + \frac{2}{xy}$

Mà: $1 = (x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{2}{xy} \geq 8 \Rightarrow T \geq 9$

Suy ra: Giá trị nhỏ nhất của $T = 9$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$

Bài tập 16: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \Rightarrow y_0$ là một giá trị của hàm số

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y_0 = \frac{x}{x^2 + 1}$ có 1 nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 y_0 + y_0 = x$ có 1 nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 y_0 - x + y_0 = 0$ có 1 nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 - 4y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $y = -\frac{1}{2}$, giá trị lớn nhất của $y = \frac{1}{2}$.

Bài tập 17: Xác định các tham số a, b sao cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

y_0 là một giá trị của hàm số $\Leftrightarrow$ phương trình $y_0 = \frac{ax+b}{x^2+1}$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y_0x^2 - ax + y_0 - b = 0$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ (1)

Nếu $y_0 = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow ax = -b$ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Nếu $y_0 \neq 0$ thì (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4(y_0 - b)y_0 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow -4y_0^2 + 4by_0 + a^2 \geq 0$$

Theo đề bài y_0 đạt giá trị lớn nhất là 4, giá trị nhỏ nhất là -1 nên phương trình $-4y_0^2 + 4by_0 + a^2$ phải có nghiệm là -1 và 4 (Do $-1 \cdot 4 = -4 < 0$).

Theo định lý Viét, ta có:
$$\begin{cases} \frac{-a^2}{4} = -4 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Vậy với $a = 4; b = 3$ hoặc $a = -4, b = 3$ thì $\min y = -1, \max y = 4$.

Bài tập 18: Cho $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|$.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán trường PTNK TP. HCM)

Giải

Ta xét 2 trường hợp, n chẵn và n lẻ.

Với n chẵn, đặt $n = 2k$. Ta có:

$$A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_k| + |a_{k+1} - x| + |a_{k+2} - x| + \dots + |a_{2k} - x|$$

$$\geq x - a_1 + x - a_2 + \dots + x - a_k + a_{k+1} - x + a_{k+2} - x + \dots + a_{2k} - x$$

$$= -a_1 - a_2 - \dots - a_k + a_{k+1} + \dots + a_{2k}.$$

Dấu bằng có thể xảy ra, chẳng hạn như $x = a_k$.

Với n chẵn, đặt $n = 2k$. Ta có:

$$A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_k| + |a_{k+1} - x| + |a_{k+2} - x| + |a_{k+3} - x| + \dots + |a_{2k+1} - x|$$

$$\geq x - a_1 + x - a_2 + \dots + x - a_k + a_{k+1} - x + a_{k+2} - x + a_{k+3} - x \dots + a_{2k+1} - x$$

$$= -a_1 - a_2 - \dots - a_k + a_{k+1} + a_{k+3} \dots + a_{2k+1}.$$

Dấu bằng có thể xảy ra, chẳng hạn như $x = a_{k+1}$.

Bài tập 19: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của: $P = (|a + 1| + |b + 1|) + (|a - 1| + |b + 1|)$

Giải

Theo bất đẳng thức Bouniakovski. Ta có:

$$1. |a + 1| + 1. |a - 1| \leq \sqrt{2[(a-1)^2 + (a-1)^2]} = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$1. |b + 1| + 1. |b - 1| \leq \sqrt{2[(b-1)^2 + (b-1)^2]} = 2\sqrt{b^2 + 1}$$

$$2. \sqrt{a^2 + 1} + 2. \sqrt{b^2 + 1} \leq \sqrt{8(a^2 + b^2 + 2)} = 2\sqrt{6}$$

Cộng các vế bất đẳng thức, ta được:

$$(|a + 1| + |b + 1|) + (|a - 1| + |b + 1|) \leq 2\sqrt{a^2 + 1} + 2\sqrt{b^2 + 1} \leq 2\sqrt{6}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $2\sqrt{6}$.

Bài tập 20: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x - 3| + |2x - 1|$

Giải

Áp dụng BĐT: $|x| + |y| \geq |x + y|$

Dấu "=" xảy ra khi $xy \geq 0$.

Suy ra: $A = |2x - 3| + |2x - 1| \geq |2x - 3 + 1 - 2x| = |-2| = 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $(2x - 3)(1 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Vậy Min $A = 2$ khi $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Bài tập 21: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = |x^2 + x + 3| + |x^2 + x - 6|$

Giải

Tương tự (Bài tập 3): Min $B = 9$ khi $-3 \leq x \leq 2$.

Bài tập 22: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4|$

Giải

Tương tự (Bài tập 4): Min $B = 4$ khi $2 \leq x \leq 3$.

Bài tập 23: Cho $a < b < c < d$. Tìm: Min $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$

HD: Tương tự (Bài tập 5), ta có: Min $f(x) = d + c - b - a$ đạt được khi $b \leq x \leq c$.

Bài tập 24: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất nếu có của các biểu thức sau:

a) $E = |x - 1| + |x - 3|$ b) $F = |2x - 1|^2 - 3|2x - 1| + 2$

Giải

a)

x	1	3
$x - 1$	- 0 + +	
$x - 3$	- - 0 +	

Khi $x < 1$: $E = 1 - x + 3 - x = 4 - 2x > 4 - 2.1 = 2$.

Khi $1 \leq x \leq 3$: $E = x - 1 + 3 - x = 2$.

Khi $x > 3$: $E = x - 1 + x - 3 = 2x - 4 > 2.3 - 4 = 2$.

Vậy min $E = 2$ khi $1 \leq x \leq 3$.

b) Đặt $t = |2x - 1| \geq 0$ khi đó $F = t^2 - 3t + 2 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}, \forall t$

Dấu "=" xảy ra khi $t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |2x - 1| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x - 1 = \pm \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Vậy min $F = -\frac{1}{4}$ khi $x = \frac{5}{4}$ hoặc $x = -\frac{1}{4}$.

Bài tập 25: (Áp dụng bất đẳng thức Cauchy)

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $Z = x^2y(4 - x - y)$

Trong đó $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán ĐHTH Hà Nội năm 1993)

Giải

Ta tìm GTLN.

Ta có: $x^2y(4 - x - y) = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y(4 - x - y)$.

Nhận thấy bộ 4 số $\frac{x}{2}; \frac{x}{2}; y; 4 - x - y$ có tổng là 4. Nhưng $4 - x - y$ nhận giá trị không âm, do đó

ta xét 2 trường hợp:

Xét $0 \leq x + y \leq 4$, ta có:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$Z = x^2y(4 - x - y) = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y(4 - x - y) \leq 4 \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y + 4 - x - y}{4} \right)^4 = 4$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2; y = 1$.

Xét $4 \leq x + y$, ta có: $Z \leq 0 < 4$.

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $Z \leq 4$.

Vậy $Z_{\max} = 4$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2, y = 1$.

Ta tìm GTNN.

Xét $4 \leq x + y \leq 6$.

Ta có: $x + y - 4 \leq 6 - 4 \leq 2$.

(1)

Áp dụng bất đẳng thức cho 3 số không âm $x; x; 2y$ ta có:

$$x^2y = \frac{x \cdot x \cdot 2y}{2} \leq \frac{\left(\frac{x + x + 2y}{3} \right)^3}{2} = \frac{\left(\frac{2(x + y)}{3} \right)^3}{2} \leq \frac{4^3}{2} = 32 \quad (2)$$

Suy ra: $-x^2y \geq -32$

Nhân các vế của bất đẳng thức trên với nhau ta được:

$$x^2y(4 - x - y) \geq x^2y \cdot 2 \geq -32 \cdot 2 = -64.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 4, y = 2$.

Xét $0 \leq x + y \leq 4$, ta có: $Z \geq 0 > -64$.

Vậy trong mọi trường hợp $Z \geq -64$. Suy ra $Z_{\min} = -64$.

Bài tập 26: (Áp dụng bất đẳng thức Bouniakovski)

a) Cho x, y thỏa: $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \quad (1)$

Chứng minh $x^2 + y^2 = 1. \quad (2)$

b) Từ (2) có thể suy ra (1) được hay không?

(Đề thi vào lớp 10 PT Năng Khiếu TP.HCM năm 1999)

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Bouniakovski cho hai bộ $(x, \sqrt{1-x^2})$ và $(\sqrt{1-y^2}, y)$ ta được:

$$x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} \cdot y \leq \sqrt{(x^2 + 1 - x^2)(1 - y^2 + y^2)}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \leq 1$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1-y^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1-y^2} = \frac{1-x^2}{y^2} = \frac{1-x^2+x^2}{1-y^2+y^2} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 - y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

b) Từ việc xét dấu bằng, chúng ta thấy ngay nếu $x, y, \geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow$ (2). Tuy nhiên ở đây do đề bài không cho x, y là các số thực dương nên ta dễ dàng chỉ ra trường hợp (2) $\nRightarrow$ 1. Chẳng hạn như $x = 0, y = -1$.

Bài tập 27: Cho $a, b, c \in [0; 1]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $f(a, b, c) = a + b + c - ab - ac - bc$.

(Chuyên đề Toán học số 7 - PTNK TP.HCM)

Giải

Ta sẽ chứng minh $f(a, b, c) \leq \max\{f(a, b, 0), f(a, b, 1)\}$.

Thật vậy:

Nếu $1 - a - b \geq 0$ thì

$$f(a, b, c) = a + b - ab + c(1 - a - b) \leq a + b - ab + (1 - a - b) = f(a, b, 1).$$

Nếu $1 - a - b \leq 0$ thì $f(a, b, c) = a + b - ab + c(1 - a - b) \leq a + b - ab = f(a, b, 0)$

Như vậy $f(a, b, c) \leq \max\{f(a, b, 1), f(a, b, 0)\}$

Ở đây ta có thể lý luận một cách tương tự như trên, để suy ra rằng:

$f(a, b, c) \leq \max\{f(0, 0, 0), f(0, 0, 1), f(0, 1, 1), f(1, 1, 1)\}$ và tính toán trực tiếp các giá trị trên để suy ra $f(a, b, c) \leq 1$. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn như $a = b = 0, c = 1$.

Hoặc là ta sẽ đánh giá $f(a, b, 1), f(a, b, 0)$.

$$f(a, b, 1) = 1 - ab \leq 1.$$

$$f(a, b, 0) = a + b - ab = (a - 1)(1 - b) + 1 \leq 1.$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn như $a = b = 0, c = 1$.

Vậy $\max f(a, b, c) = 1$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 0, c = 1$.

Bài tập 28: (Áp dụng bất đẳng thức Cauchy)

Cho $x > 0, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A =$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Giải

Vì $x > 0; y > 0$ nên $\frac{1}{x} > 0; \frac{1}{y} > 0; \sqrt{x} > 0; \sqrt{y} > 0$, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 4$$

Vận dụng bất đẳng thức Cauchy với hai số dương $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$, ta được:

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} \geq 2\sqrt{4} = 4.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 4$.

Vậy Min $A = 4$, đạt được khi $x = y = 4$.

Bài tập 29: (Áp dụng bất đẳng thức Bouniakovski)

Cho $a, b, c > 0$. Tìm min $P = \frac{5a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{3c}{a+b}$

Giải

$$P = \frac{5a}{b+c} + 5 + \frac{4b}{c+a} + 4 + \frac{3c}{a+b} + 3 - (5+4+3)$$

$$= (a+b+c) \left(\frac{5}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{3}{a+b} \right) - (5+4+3)$$

$$= \frac{1}{2} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{5}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{3}{a+b} \right) - (5+4+3)$$

$$\geq \frac{1}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{4} + \sqrt{3})^2 - (5+4+3)$$

(Theo bất đẳng thức bouniakovski)

$$\text{Vậy min } P = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{4} + \sqrt{3})^2 - (5+4+3) \text{ khi và chỉ khi } \frac{b+c}{\sqrt{5}} = \frac{a+c}{\sqrt{4}} = \frac{a+b}{\sqrt{3}}.$$

6. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm GTLN và GTNN của biểu thức:

a) $A = (3x - 1)(2 - x)$

b) $B = (2x + 1)(x + 2) - (4x^2 - 2x)$

c) $C = (5x + 2)(1 + 3x)$

d) $D = (4x + 3)(3x - 1)$

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $p = 2 - 5x^2 - y^2 - 4xy + 2x$.

ĐS: Max $P = 3$ khi $(x; y) = (1; -2)$

Bài tập 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x, y) = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 45$.

ĐS: $f(x, y) = (x - y - 6)^2 + 5y^2 + 9 \geq 9$.

Bài tập 4: Cho hai số x, y thỏa mãn đẳng thức: $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4$.

Xác định x, y để tích xy đạt giá trị nhỏ nhất.

HD: Thêm $4xy + 4x^2$ vào hai vế.

KQ: Tích xy đạt GTNN là $-\frac{1}{2}$ khi $x = \pm \frac{1}{2}; y = \pm 1$

Bài tập 5: Cho a là số cố định, còn x, y là những số biến thiên. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$.

ĐS: $A \geq 0$ khi $a \neq -4$, $A = \frac{9}{5}$ khi $a = -4$.

Bài tập 6: Cho biểu thức $P = x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + 3$. Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của P bằng 0.

Bài tập 7: Tìm giá trị lớn nhất $B = \frac{3x^2 + 14}{x^2 + 4}$

Bài tập 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2}$

Bài tập 9: Tìm giá trị lớn nhất của $f(x) = \frac{-6}{x - 3\sqrt{x} + 7}$

Bài tập 10: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1}$

Bài tập 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của phân thức $B = \frac{4x + 3}{x^2 + x + 1}$

Bài tập 12: Tìm cực trị các đa thức sau:

a) Tìm Min $A = 4x^2 - 4x + 6$

b) Tìm Max $B = -x + 3\sqrt{x} - 7$

c) Tìm Min và Max của $f(x) = x^2 - 4x + 6$ khi $x \in [-3; 4]$

Bài tập 13: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $f(x) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 6)$

Bài tập 14: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \left[\frac{12x(x - a)}{x^2 + 36} \right]^{\frac{3}{4}}$

ĐS: Max $y = \sqrt[4]{\left(6 + \sqrt{a^2 + 36}\right)^3}$

Bài tập 15: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$

ĐS: Max $y = 3 + 2\sqrt{2}$, Min $y = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài tập 16: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $y = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}$

ĐS: Max $y = \frac{9}{7}$ khi $x = -3$; Min $y =$ khi $x = 1$.

Bài tập 17: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$, $x > 0$

ĐS: Min $f(x) = 2$, với $x > 0$.

Bài tập 18: Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{2 - \sqrt{3 - x^2}}$

Bài tập 19: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$, với $0 < x < 1$.

Bài tập 20: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của:

a) $A = 2x + \sqrt{5-x^2}$ b) $B = x(99 + \sqrt{101-x^2})$

Bài tập 21: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{3x^2 + 14x + 15}{x^2 + 4x + 4}$.

ĐS: $\text{Max } A = 4$, đạt được khi $x = -4$.

Bài tập 22: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{1}{9x^2 - 12x + 11}$ b) $B = \frac{5}{4x^2 - 4x + 21}$

Bài tập 23: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{-4x^2 + 20x - 29}$ b) $B = \frac{7}{-25x^2 + 10x - 12}$

Bài tập 24: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ với $x \neq 1$ b) $B = \frac{11x^2 - 70x + 112}{x^2 + 9 - 6x}$, với $x \neq 3$.

Bài tập 25: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^2 + 10x + 20}{x^2 + 6x + 9}$, với $x \neq -3$ b) $B = \frac{x^2 + 4x - 14}{x^2 - 2x + 1}$, với $x \neq 1$.

Bài tập 26: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{4x + 3}{x^2 + 1}$ b) $B = \frac{2x^2 - 2x + 9}{x^2 + 2x + 5}$.

Bài tập 27: Bài toán vui.

Xuân, Hạ, Thu, Đông là bốn bạn học rất giỏi Toán của lớp 9A.

Xuân đọc các bạn:

Cho biểu thức $1:2:3: \dots : 2004:2005$. Hãy viết thêm dấu ngoặc để biểu thức mới có kết quả:

a) Nhỏ nhất b) Lớn nhất.

Vừa nghe xong câu đố.

Hạ đã nói rằng: Thêm dấu ngoặc như sau sẽ được kết quả nhỏ nhất

$(1:2:3: \dots : 2004) : 2005$

Thu tiếp lời: Thêm dấu ngoặc như sau sẽ được kết quả lớn nhất

$1:(2:3: \dots : 2004:2005)$

Và Đông sẽ nói gì các bạn biết không?

ĐS: Có lẽ Đông sẽ nói: Cả Hạ và Thu đều đúng.

Bài tập 28: Cho $a + b = 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = a^3 + b^3$.

ĐS: $\text{Min } M = \frac{1}{4}$, đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài tập 29: Cho $a^3 + b^3 = 2$. Tính giá trị lớn nhất của $N = a + b$.

ĐS: $\text{Max } N = 2$, đạt được khi $a = b = 1$.

Bài tập 30: Cho biểu thức $M = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 2001$. Với giá trị nào của a và b thì M đạt giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

ĐS: $\text{Min } M = 1998$, đạt được khi $a = b = 1$.

Bài tập 31: Tìm GTLN của biểu thức: $A = x^2\sqrt{9-x^2}$

Bài tập 32: Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + z^4$

Đáp số: $\text{min } P = \frac{1}{3}$, đạt được khi $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài tập 33: Cho ba số dương x, y, z có tổng bằng 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x}$

Đáp số: $\text{min } Q = \frac{1}{2}$.

Bài tập 34: Cho hai số dương $a \geq b$, x và y là hai biến thoả mãn: $x \geq a, x + y \geq a + b$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = x^2 + y^2$.

Đáp số: $\min S = a^2 + b^2$.

Bài tập 35: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $E = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$

Đáp số: $\min E = 2$, đạt được khi $x = 0$.

Bài tập 36: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $y = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$

Đáp số: $\max y = 7$, đạt được khi $x = -2$.

Bài tập 37: Tìm giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số: $y = -x^2 - 2ax + 2$ trên tập $D = [1, 3]$ có giá trị bằng 5.

Đáp số: $a = -2$ hoặc $a = -\sqrt{3}$

Bài tập 38: Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn: $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c \leq 3 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2}$

Đáp số: $\max A = \frac{3}{2}$, đạt được khi $a = b = c = 1$.

Bài tập 39: Cho ba số a, b, c là các số không âm thỏa mãn đồng thời $3a + 2c = 51$ và $c + 5b = 21$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a + b + c$.

Đáp số: $\max P = 24$, đạt được khi $b = 0, c = 21, a = 3$.

Bài tập 40: Cho hai số thực x, y thỏa mãn hệ thức: $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4$.

Xác định x, y để tích xy đạt giá trị nhỏ nhất.

(Đề thi tuyển sinh chọn HSG lớp 9 tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2003-2004)

Đáp số: $\min xy = -\frac{1}{2}$ khi $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right); \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

Bài tập 41: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y - 82$

(Đề thi tuyển sinh THPT Chuyên Lê Hồng Phong năm học 2004-2005)

Đáp số: $\min P = 2m$, đạt được khi $(x, y) = \left(4, \frac{16}{3}\right)$.

Bài tập 42: Tìm giá trị nhỏ nhất $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

Bài tập 43: Tìm GTNN của: $A = 3^x + 3^y$ với $x + y = 4$.

Bài tập 44: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

a) $a = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

b) $B = \frac{x+1}{x^2+1}$

Bài tập 45: Cho các số thực $x, y, z \in [1; 2]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{|2-xy|}{z(x+y)} + \frac{|2-yz|}{x(y+z)} = \frac{|2-zx|}{y(z+x)}$

Bài tập 46: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức sau, biết $x \in [-2; 3]$.

a) $A = |2x + 1| + 3$

b) $B = |x + 1| + |2x - 1|$

c) $C = |x^2 - 2x|$

Bài tập 47: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |x - 1| + |x - 3|$.

ĐS: $\min A = 3$.

Bài tập 48: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\left| \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)^2} \right|$

Bài tập 49: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} \right|$

Bài tập 50: Tìm giá trị lớn nhất của $A = |x - y|$, biết $x^2 + 4y^2 = 1$.

Bài tập 51: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $A = \left| x - \sqrt{2} \right| + \left| y - 1 \right|$ với $|x| + |y| = 5$.

Bài tập 52: Tìm GTLN của: $A = |x - y|$, biết $x^2 + 4y^2 = 1$.

Bài tập 53: Cho a, b, c là các số thực phân biệt. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \left| \frac{a}{b-c} \right| + \left| \frac{b}{c-a} \right| + \left| \frac{c}{a-b} \right|$$

ĐS: $\min A = 2$.

Bài tập 54: Cho các số thực x, y, z khác nhau đôi một. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{x^3 - y^3}{(x-y)^3} + \frac{y^3 - z^3}{(y-z)^3} + \frac{z^3 - x^3}{(z-x)^3}$$

Bài tập 55: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$B = (x^2 + y^2 + z^2) \left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right]$$

Trong đó x, y, z là các số thực phân biệt.

Bài tập 56: Cho $x + y = 2$. Tính giá trị nhỏ nhất của $S = x^2 + y^2$.

Bài tập 57: Cho $a, b, > 0$ và $3a + 5b = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của tích $P = ab$.

Bài tập 58: (Áp dụng bất đẳng thức Cauchy)

Cho x, y thỏa: $x^2 + y^2 = 4 + xy$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$Q = x^2 + y^2.$$

(Đề thi HSG lớp 9 TP.HCM năm 1995)

Bài tập 59: (Áp dụng bất đẳng thức Cauchy)

Cho $a, b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1}$$

(Đề kiểm tra lớp 9 Chuyên Toán TP.HCM năm 1994)

Bài tập 60: (Áp dụng bất đẳng thức Cauchy)

Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$S = \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \left(1 - \frac{1}{y^2} \right), \text{ biết } \begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

(Đề thi vào lớp 10 PTTH Chuyên Lê Hồng Phong TP.HCM năm 1994)

Bài tập 61: (Áp dụng bất đẳng thức Cauchy)

Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9, bảng B toàn quốc năm 1994)

Bài tập 62: (Áp dụng bất đẳng thức Cauchy)

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c} \right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a+c} \right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{c}{a+b} \right)^2} \geq \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

(Trích từ tạp chí toán học và tuổi trẻ)

Bài tập 63: (Áp dụng bất đẳng thức Cauchy)

Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^2y$, với các điều kiện $x, y > 0$ và $2x + xy = 4$.

Bài tập 64: (Áp dụng bất đẳng thức Cauchy)

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, với $x, y, z > 0$.

Bài tập 65: (Áp dụng bất đẳng thức Bouniakovski)

Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{2a+b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a}$$

ĐS: $\min P = 1$.

Bài tập 66: (Áp dụng bất đẳng thức Bouniakovski)

Cho $a, b, c, d > 0$ và $ab + bc + cd + da = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c}$$

ĐS: $\min P = \frac{1}{3}$.

(Trích ra từ đề thi HSG khối PTCT - ĐHSPT Hà Nội năm 1995)

Bài tập 67: (Áp dụng bất đẳng thức Bouniakovski)

Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{a^3}{a+2b+3c} + \frac{b^3}{b+2c+3a} + \frac{c^3}{c+2a+3b}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 - 4 lần 6 năm 2000)

Bài tập 68: (Áp dụng phương pháp tiếp cận dấu bằng của bất đẳng thức)

Cho $a, b, c \in [1, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

(Chọn lọc từ tạp chí Toán học và tuổi trẻ)

ĐS: $\max A = 10$.

Bài tập 69: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = x^2 + y^2$.

Biết rằng: $x^2(x^2 + 2y^2 - 3) + (y^2 - 2)^2 = 1$.

Bài tập 70: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của:

$A = |x - \sqrt{x}| + |y - 1|$, với $|x| + |y| = 5$.

Bài tập 71: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^4 + y^4 + z^4$, biết rằng: $xy + yz + zx = 1$.

Bài tập 72: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của: $A = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.

Bài tập 73: Tìm giá trị lớn nhất của: $M = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, với $a, b > 0$ và $a + b \leq 1$.

Bài tập 74: Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = \frac{(x+a)(x+b)}{x}$

Bài tập 75: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = 2x + 3y$, biết $2x^2 + 3y^2 \leq 5$.

Bài tập 76: Tìm GTNN của $A = x + y$, biết $x, y > 0$ thỏa mãn $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ (a và b là hai số dương).

Bài tập 77: Tìm GTNN của $A = (x+y)(y+z)$, với $x, y, z > 0$, $xyz(x+y+z) = 1$.

Bài tập 78: Tìm GTNN của $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ với $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$.

Bài tập 79: Tìm GTNN của $A = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$, biết $x, y, z > 0$, $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

Bài tập 80: Tìm GTLN của:

a) $A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, với $a, b > 0$, $a + b \leq 1$.

b) $B = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 + (\sqrt{a} + \sqrt{c})^4 + (\sqrt{a} + \sqrt{d})^4 + (\sqrt{b} + \sqrt{c})^4 + (\sqrt{b} + \sqrt{d})^4 + (\sqrt{c} + \sqrt{d})^4$

với $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d = 1$.

Bài tập 81: (Áp dụng phương pháp tiếp cận dấu bằng của bất đẳng thức)

Cho $a, b, c \in [1, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc}$$

Bài tập 82: Tìm GTNN của: $A = \frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b}$, với $b+c \geq a+d$; $b, c > 0$; $a, d \geq 0$.

Bài tập 83: (Áp dụng phương pháp tiếp cận dấu bằng của bất đẳng thức)

Cho $a, b, c, d, e \in [0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - d) + d(1 - a).$$

Bài tập 84: Tìm GTNN, GTLN của $A = x^3 + y^3$, biết $x, y \geq 0; x^2 + y^2 = 1$.

Bài tập 85: Tìm GTNN, GTLN của $A = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$, biết $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

Bài tập 86: (Áp dụng phương pháp tiếp cận dấu bằng của bất đẳng thức)

Cho $x, y, z \in [1, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$C = \frac{xy}{xz + yz} + \frac{xz}{xy + yz} + \frac{yz}{xy + xz}$$

Bài tập 87: Cho $x + y = 15$. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức: $B = \sqrt{x-4} + \sqrt{y-3}$

ĐS:

Min $B = \sqrt{8}$, khi và chỉ khi $x = 4, y = 11$ hoặc $x = 12, y = 3$.

Max $B = 4$ khi và chỉ khi $x = 8, y = 7$.

Bài tập 88: Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = a$.

Tìm GTLN của biểu thức $A = xy + yz + zx$.

Tìm GTNN của biểu thức $B = x^2 + y^2 + z^2$

ĐS: Min $A = \text{Max } A = \frac{a^2}{3}$

Bài tập 89: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z \geq 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}}$.

ĐS: Min $P = 6$, khi $x = y = z = 4$.

Bài 90: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$

ĐS: Min $A = 8$.

Bài tập 91: Cho x, y thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$ và $x > 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = x^2 y^3$.

ĐS: Max $B = \frac{108}{3125}$

Bài tập 92: Tìm GTNN của $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$, với x, y, z là các số dương và

a) $x + y + z = 1$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ĐS: a) Min $A = 1$, khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

b) Min $A = \sqrt{3}$, với $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài tập 93: Tìm GTLN của biểu thức $A = \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1}$

Với a, b, c là các số dương và $abc = 1$.

ĐS: Max $A = 1$, khi $a = b = c = 1$.

Bài tập 94: Tìm GTNN và GTLN của biểu thức:

$$A = x + y + z + xy + yz + zx, \text{ biết rằng } x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

ĐS: Min $A = -2$, khi $x = y = -1, z = 1$.

Bài tập 95: Cho a, b, c . Tìm min $P = \frac{a+3c}{a+b} + \frac{c+3b}{b+c} + \frac{4b}{c+a}$.

ĐS: Min $P = 6$, khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài tập 96: Tìm giá trị nhỏ nhất các biểu thức sau:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

b) $y = \sqrt{\frac{x^2}{4} - \frac{x}{6} + 1}$

c) $y = 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

d) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10} - 3$

e) $y = \sqrt{\frac{x^2}{9} + 2x + 10}$

f) $y = \frac{-3}{\sqrt{\frac{x^2}{8} - 2x + 17}}$

Bài tập 97: Tìm giá trị nhỏ nhất các biểu thức sau:

a) $y = \frac{x^2}{4} + x - 1$

b) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = 1 - \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

c) $g(x, y) = 3(x - y)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2$

d) $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x - 3}}$

e) $y = x^2 - 6x + 10$

f) $A = \frac{x^2 - 2x + 2005}{x^2}$

Bài tập 98: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}}$ với $a, b, c > 0$ và $a + b + c \geq 3$

b) $Y = \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x - 2}}$

Bài tập 99: Cho x, y, z là những số thực và thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm GTNN của $A = 2xy + yz + zx$.

Bài tập 100: Tìm giá trị lớn nhất các biểu thức sau:

a) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 2}$

b) $y = 2 - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$

c) $y = -2x^2 + x - 1$

d) $y = \frac{x + 1}{x^3 - x^2 + 2x + 4}$

e) $A = \sqrt{4x - x^3} + \sqrt{x + x^3}$. Với $0 \leq x \leq 2$

f) $B = \frac{3x^2 + 9x + 17}{3x^2 + 9x + 7}$

g) $A = -(x - 1)^2 + 2|x - 1| + 3$

h) $y = \frac{x^2 - 6x + 11}{x^2 - 6x + 10}$

Bài tập 101: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = \sqrt{9 - x^2}$

b) $B = \sqrt{x} - x$

c) $y = \frac{-x}{2} + x + 1$

d) $M = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

CHUYÊN ĐỀ 14 PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương trình bậc nhất 1 ẩn:

1.1. Kiến thức cơ bản:

Phương trình bậc nhất một ẩn số có dạng: $ax + b = 0$, (trong đó a, b là hệ số; x là ẩn số)

Dạng 1: Phương trình bậc nhất một ẩn có dạng: $ax + b =$

Cách giải:

Nếu $a \neq 0$:

$$ax + b = 0$$

$$\Leftrightarrow ax = -b$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

Nếu $a = 0$:

Phương trình trở thành $0.x + b = 0$.

Nếu $b \neq 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu $b = 0$ thì phương trình đã cho có vô số nghiệm.

Dạng 2: Phương trình bậc nhất có dạng đa thức: $f(x) = g(x)$

Cách giải:

Bước 1: Nếu trong phương trình có các biểu thức chứa dấu ngoặc thì ta phải thực hiện quy tắc bỏ dấu ngoặc.

Bước 2: Thu gọn các đơn thức đồng dạng.

Bước 3: Giải phương trình dạng: $ax + b = 0$.

1.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình sau: $-5x + 3 = 2x - 4$

Giải

$$-5x + 3 = 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow -5x - 2x = -4 - 3$$

$$\Leftrightarrow -7x = -7$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

Bài tập 2: Giải phương trình: $8x - 3 = 5x + 12$

Giải

$$8x - 3 = 5x + 12$$

$$\Leftrightarrow 8x - 5x = 12 + 3$$

$$\Leftrightarrow 3x = 15$$

$$\Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{5\}$.

Bài tập 3: Giải phương trình: $\frac{x-3}{4} - \frac{5-2x}{6} = \frac{x}{2} + \frac{5}{12}$

Giải

$$\frac{x-3}{4} - \frac{5-2x}{6} = \frac{x}{2} + \frac{5}{12}$$

$$MSC = 12.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-3)}{12} - \frac{2(5-2x)}{12} = \frac{6x}{12} + \frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-3) - 2(5-2x) = 6x + 5$$

$$\Leftrightarrow 3x - 9 - 10 + 4x = 6x + 5$$

$$\Leftrightarrow x = 24.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{24\}$.

Bài tập 4: Giải phương trình: $4x - 3(x - 2) = 4 - x$

Giải

$$4x - 3(x - 2) = 4 - x$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3x + 6 = 4 - x$$

$$\Leftrightarrow 2x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1\}$.

Bài tập 5: Giải phương trình: $5 - (x - 6) = 4.(3 - 2x)$

Giải

$$5 - (x - 6) = 4(3 - 2x)$$

$$\Leftrightarrow 5 - x + 6 = 12 - 8x$$

$$\Leftrightarrow 7x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{1}{7}\right\}$.

Bài tập 6: Giải phương trình: $3(2x - 1) + 5 = 2x + 10$

Giải

$$3(2x - 1) + 5 = 2x + 10$$

$$\Leftrightarrow 6x - 3 + 5 = 2x + 10$$

$$\Leftrightarrow 4x = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

Bài tập 7: Giải phương trình: $3x^2 + 6x = 0$

Giải

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 3x = 0 \text{ hoặc } x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; -2\}$.

Bài tập 8: Giải phương trình: $\frac{3x-5}{5} - \frac{x}{4} = \frac{1}{20}$

Giải

$$MSC = 20.$$

$$\frac{3x-5}{5} - \frac{x}{4} = \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(3x-5)}{20} - \frac{5x}{20} = \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow 4(3x-5) - 5x = 1$$

$$\Leftrightarrow 12x - 20 - 5x = 1$$

$$\Leftrightarrow 7x = 21$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$.

Bài tập 9: Giải phương trình: $6(x - 1) - 4 = 2(x + 2) - 2$

Giải

$$6(x - 1) - 4 = 2(x + 2) - 2$$

$$\Leftrightarrow 6x - 6 - 4 = 2x + 4 - 2$$

$$\Leftrightarrow 4x = 12$$

$$\Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{3\}$.

Bài tập 10: Giải phương trình: $\frac{x-1}{3} + 2 = 5 - \frac{2x}{4}$

Giải

MSC = 12.

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{3} + 2 &= 5 - \frac{2x}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{12} + \frac{24}{12} &= \frac{60}{12} - \frac{6x}{12} \\ \Leftrightarrow 4(x-1) + 24 &= 60 - 6x \\ \Leftrightarrow 4x - 4 + 24 &= 60 - 6x \\ \Leftrightarrow 10x &= 40 \\ \Leftrightarrow x &= 4\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

Bài tập 11: Giải phương trình: $\frac{x-305}{1700} + \frac{x-307}{1698} + \frac{x-309}{1696} + \frac{x-401}{1694} = 4$

Giải

(Ta sử dụng phương pháp nhân tử hóa)

Phương trình trên tương đương:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x-305}{1700} - 1\right) + \left(\frac{x-307}{1698} - 1\right) + \left(\frac{x-309}{1696} - 1\right) + \left(\frac{x-401}{1694} - 1\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-2005}{1700} + \frac{x-2005}{1698} + \frac{x-2005}{1696} + \frac{x-2005}{1694} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2005.\end{aligned}$$

Vì $\frac{1}{1700} + \frac{1}{1698} + \frac{1}{1696} + \frac{1}{1694} > 0$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2005\}$.

1.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Với giá trị nào của a, b thì phương trình: $a^4 - (x+1)a^2 + x - b = 0$ có nghiệm đúng với mọi x .

Bài tập 2: Với giá trị nào của m thì phương trình sau:

$$\frac{x-m}{x+1} = \frac{x-2}{x-1}$$

có nghiệm.

Bài tập 3: Giải và biện luận phương trình sau: $m^2x + 2 = x + 2m$

Bài tập 4: Giải các phương trình sau:

a) $3x - 1 = 4x + 2$

b) $5 - 7x = 6 - 8x$

c) $\frac{1}{2}x - 11 = \frac{2}{3}x - 12$

d) $\frac{3}{4} - \frac{4}{5}x = \frac{5}{4} - \frac{3}{5}x$

Bài tập 5: Giải và biện luận phương trình sau: $6mx + 2 - m = 4x + 2m$

Bài tập 6: Cho phương trình với ẩn số x : $(m+1)x - 3 = 2m - 5$.

Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm là $x = -2$.

Bài tập 7: Giải các phương trình sau: $\frac{10x+3}{12} = 1 + \frac{6+8x}{9}$

Bài tập 8: Giải các phương trình sau:

a) $2(3x+1) - 3(x+2) = 5x - 8$

b) $3(2x-3) - 9x = 2(7x+10) + 5$

c) $(x+5)(2x-1) = (2x-3)(x+1)$

d) $\frac{2(x-4)}{3} - \frac{9x-2}{4} = \frac{3x+1}{2} + \frac{3x-1}{6}$

Bài tập 9: Tìm các giá trị của m để phương trình $m^2x = x + m - 1$ nhận mọi giá trị của x làm nghiệm?

Bài tập 10: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+1}{35} + \frac{x+3}{33} = \frac{x+5}{31} + \frac{x+7}{29}$

b) $\frac{100-x}{55} + \frac{98-x}{57} + \frac{96-x}{59} + \frac{94-x}{57} + 4 = 0$

c) $\frac{x+1}{9} + \frac{x+2}{8} = \frac{x+3}{7} + \frac{x+4}{6}$

d) $\frac{x+10}{9} + \frac{x+10}{8} = \frac{x+10}{7} + \frac{x+10}{6}$

HD: Sử dụng phương pháp nhân tử hóa.

2. Phương trình tích:

2.1. Kiến thức cơ bản:

Dạng phương trình: $A(x).B(x) = 0$; $A(x).B(x).C(x) = 0$

trong đó $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ là các biểu thức.

Cách giải:

$$A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{cases};$$

$$A(x).B(x).C(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \\ C(x) = 0 \end{cases}$$

$$A(x).B(x).C(x)... = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \\ C(x) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình là hợp tất cả các nghiệm của các phương trình: $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$,

2.2. Bài tập áp dụng:

Dạng 1: Sử dụng công thức: $A(x).B(x) = 0$ trực tiếp.

Bài tập 1: Giải phương trình: $(2x - 3)(3x + 4) = 0$ (1)

Giải

Phương trình (1) tương đương với: $2x - 3 = 0$ hoặc $3x + 4 = 0$

$$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{3}{2}; -\frac{4}{3} \right\}$.

Dạng 2: Sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử. Sau đó sử dụng công thức $A(x).B(x) = 0$.

Bài tập 2: Giải phương trình: $(2x - 3)(x + 5) - (x + 5)(x - 6) = 0$

Giải

Ta có:

$$(2x - 3)(x + 5) - (x + 5)(x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)[(2x - 3) - (x - 6)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 5 = 0 \text{ hoặc } x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ hoặc } x = -3.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-5; -3\}$.

Bài tập 3: Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Giải

Ta có:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^3 - (x - 1)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ hoặc } x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 0, x = 3.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 0; 3\}$

Bài tập 4: Giải phương trình: $(3x - 2)(4x + 5) = 0$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}(3x - 2)(4x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x - 2 &= 0 \text{ hoặc } 4x + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{5}{4} \right\}$

Bài tập 5: Giải phương trình: $2x(x - 3) + 5(x - 3) = 0$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}2x(x - 3) + 5(x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3)(2x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 3 &= 0 \text{ hoặc } 2x + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \text{ hoặc } x = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Vậy phương trình tập nghiệm $S = \left\{ 3; -\frac{5}{2} \right\}$

Bài tập 6: Giải phương trình sau: $(5x + 3)(2x - 1) = (4x + 2)(2x - 1)$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}(5x + 3)(2x - 1) &= (4x + 2)(2x - 1) \\ \Leftrightarrow (5x + 3)(2x - 1) - (4x + 2)(2x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)[(5x + 3) - (4x + 2)] &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)[5x + 3 - 4x - 2] &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{2}; -1 \right\}$

2.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------|
| a) $(2x + 1)(x - 3) = 0$ | b) $12x(3x - 9) = 0$ |
| c) $3x(x - 1) + 2(1 - x) = 0$ | d) $x^2 + 5x + 6 = 0$ |

Bài tập 2: Giải các phương trình sau: $(2x - 1)(x^2 - 3x + 7) = 0$

Bài tập 3: Giải các phương trình sau: $(x - 5)^2 - (x^2 - 4x + 4) = 0$

Bài tập 4: Giải các phương trình sau: $x(5 - 2x) + 2x(x - 1) = 15$

Bài tập 5: Giải các phương trình sau:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| a) $x(x - 5) - 4x + 20 = 0$ | b) $(x - 3)^2 = x(x - 9)$ |
|-----------------------------|---------------------------|

Bài tập 6: Giải phương trình sau:

- | | |
|------------------|------------------------|
| a) $x^5 - x = 0$ | b) $x^3 - x^2 + x = 0$ |
|------------------|------------------------|

Bài tập 7: Giải phương trình sau: $(x + 1)^2 = 4(x^2 - 2x + 1)$

Bài tập 8: Giải các phương trình sau:

- | | |
|------------------------------|---|
| a) $(x - 1)(x - 2) = 10 - x$ | b) $x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$ |
|------------------------------|---|

Bài tập 9: Giải các phương trình sau:

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------|
| a) $(2x + 1)(x + 4) = (x - 1)(x - 4)$ | b) $x^2 + (x + 2)^2 = 4$ |
|---------------------------------------|--------------------------|

Bài tập 10: Giải phương trình sau: $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 42$

Bài tập 11: Giải phương trình sau: $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$

Bài tập 12: Giải phương trình sau: $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$

Bài tập 13: Giải phương trình sau: $(x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) = 2$

3. Phương trình chứa ẩn ở mẫu:

3.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu: Tìm mẫu thức chung.

Bước 3: Giải phương trình.

Bước 4: Đối chiếu nghiệm tìm được với điều kiện của bài toán để kết luận nghiệm của phương trình.

3.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình sau: $\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{x(2x-3)} = \frac{5}{x}$

Giải

$$\text{Điều kiện xác định (ĐKXĐ): } \begin{cases} 2x-3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Mẫu thức chung (MTC)} = x(2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x(2x-3)} - \frac{3}{x(2x-3)} = \frac{5(2x-3)}{x(2x-3)}$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 5(2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 10x - 15$$

$$\Leftrightarrow 9x = 12$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

Bài tập 2: Giải phương trình sau: $\frac{x+2}{x-2} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

Giải

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{MTC} = x(x - 2)$$

$$\frac{x+2}{x-2} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+2)}{x(x-2)} + \frac{x-2}{x(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) + x - 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + x - 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \{1; 4\}.$$

Bài tập 3: Giải phương trình sau: $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-5}{x^2-9}$ (1)

Giải

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x-3 \neq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\text{MTC} = (x-3)(x+3)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x-5}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3) + x + 3 = 2x - 5$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 + x + 3 = 2x - 5$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2\}$

Bài tập 4: Giải phương trình sau: $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-2} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)}$

Giải

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{MTC} = (x+1)(x-2)$$

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-2} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)} - \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) - 2(x+1) = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2x - 2 = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -4x = 3$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

Bài tập 5: Giải phương trình sau: $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{6x-1}{(x-1)(x-2)}$

Giải

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{MTC} = x(x-1)(x-2)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{6x-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x} + \frac{2x(x-2)}{x-1} + \frac{3x(x-1)}{x-2} = \frac{x(6x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) + 2x(x-2) + 3x(x-1) = x(6x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + 2x^2 - 4x + 3x^2 - 3x = 6x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 10x = 6x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow 10x = x$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài tập 6: Giải phương trình sau: $\frac{x}{x^2+3x+1} + \frac{2x}{3x^2+5x+3} = -1$

Giải

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x^2 + 3x + 1 \neq 0 \\ 3x^2 + 5x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Ta chia cả tử và mẫu của các phân thức trong phương trình cho $x \neq 0$.

Ta có:

$$\frac{x}{x^2 + 3x + 1} + \frac{2x}{3x^2 + 5x + 3} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x + 3 + \frac{1}{x}} + \frac{2}{3x + 5 + \frac{3}{x}} = -1$$

Đặt: $y = x + \frac{1}{x}$, $|y| \geq 2$, ta thu được:

$$\frac{1}{y + 3} + \frac{2}{3y + 5} = -1$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 + 19y + 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = -\frac{13}{3} \end{cases}$$

Với $y = -2$ thì $x = -1$

Với $y = -\frac{13}{3}$ thì $x = \frac{-13 \pm \sqrt{133}}{6}$

Các nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện của phương trình.

Bài tập 7: Giải phương trình sau: $\frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2(x+1)} = \frac{2x}{(x+1)(x-3)}$

Giải

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{MTC} = 2(x+1)(x-3)$$

$$\frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2(x+1)} = \frac{2x}{(x+1)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot (x+1)}{2(x+1)(x-3)} + \frac{x \cdot (x-3)}{2(x+1)(x-3)} = \frac{2x \cdot 2}{2(x+1)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x+1) + x \cdot (x-3) = 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + x^2 - 3x = 4x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot (x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 0$ (vì $x = 3$ không thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{0\}$.

3.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x} + \frac{3}{x+1} + \frac{5}{x+2} = \frac{9x-1}{x(x+2)}$

b) $\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x+4} = \frac{4}{x^2-16}$

c) $\frac{3}{6-x} + \frac{5}{x+6} = \frac{3x-2}{x^2-36}$

d) $\frac{7}{2x-1} + \frac{2}{x+3} = \frac{4-3x}{(2x-1)(x+3)}$

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{15}{x+5} + \frac{10}{5x+1} = \frac{7x}{(x+5)(10x+2)}$$

$$b) \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x}$$

$$c) \frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x+1} = 2$$

$$d) \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{4}$$

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$$

$$b) \frac{1}{x-2} + 1 = \frac{5-x}{x-2}$$

Bài tập 4: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{40}{x+2} - \frac{24}{x+2} = \frac{19}{3}$$

$$b) \frac{x+3}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{x^2-4x+24}{x^2-4}$$

$$c) \frac{x-3}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{x^2-7x}{x^2-1}$$

$$d) \frac{14}{x^2-9} + \frac{4-x}{3+x} = \frac{7}{x+3} - \frac{1}{3-x}$$

Bài tập 5: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

$$b) \frac{8}{x^2+4} + \frac{20}{x^2+16} = 3 - \frac{14}{x^2+10}$$

$$c) \frac{x+1}{x^2+2x} + \frac{x+6}{x^2+12x+35} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+5}{x^2+10x+24}$$

$$d) \frac{6-2x}{\sqrt{5-x}} + \frac{6+2x}{\sqrt{5+x}} = \frac{8}{3}$$

Bài tập 6: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2} + 1$$

$$b) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$c) \frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 1$$

$$d) \frac{3}{1-4x} + \frac{8+6x}{16x^2-1} = \frac{2}{4x+1}$$

Bài tập 7: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{2x}{3x^2-x+2} - \frac{7x}{3x^2+5x+2} = 1$$

$$b) x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 12$$

Bài tập 8: Giải các phương trình sau:

$$a) 20 \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2 - 5 \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 + 48 \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$$

$$b) \frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{4x}{x^2-12x+15}$$

Bài tập 9: Giải các phương trình sau:

$$a) x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$$

$$b) x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15$$

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

$$a) \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^2 + \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^2 - \frac{5x^2-4}{2x^2-1} = 0$$

$$b) \frac{x(8-x)}{x-1} \left(x - \frac{8-x}{x-1} \right) = 15$$

4. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

4.1. Kiến thức cơ bản:

Định nghĩa: Giá trị tuyệt đối của số a, kí hiệu là |a|, được định nghĩa như sau:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

Ví dụ: |5| = 5, |0| = 0, |-3,5| = 3,5.

Theo định nghĩa trên, ta có thể bỏ giá trị tuyệt đối tùy theo giá trị của biểu thức ở trong dấu giá trị tuyệt đối là âm hay không âm.

Chú ý: $|a| = |-a|$, với mọi số thực a .

Tính chất:

$$|x| \geq 0, |x|^2 = x^2$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - b| \leq |a| - |b|$$

$$|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \geq 0$$

$$|a - b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \leq 0$$

Định lý:

Định lý 1: Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

Định lý 2: Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A > B \Leftrightarrow A^2 > B^2$

Cách giải:

Dạng 1: $|A| = |B| \Leftrightarrow A^2 = B^2$, $|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$

Dạng 2:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 = B^2 \end{cases}$$

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases}$$

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \\ A < 0 \\ -A = B \end{cases}$$

Dạng 3: Áp dụng đối với phương trình có nhiều biểu thức bậc nhất chứa dấu giá trị tuyệt đối.

i) Lập bảng xét dấu.

ii) Giải phương trình trong từng khoảng xác định để tìm nghiệm.

4.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = |x - 3| + x - 2$ khi $x \geq 3$;

b) $B = 4x + 5 + |-2x|$ khi $x \geq 0$.

Giải

a) Khi $x \geq 3$, ta có $x - 3 \geq 0$ nên $|x - 3| = x - 3$.

Vậy $A = x - 3 + x - 2 = 2x - 5$.

b) Khi $x \geq 0$, ta có $-2x \leq 0$ nên $|-2x| = -(-2x) = 2x$.

Vậy $B = 4x + 5 + 2x = 6x + 5$.

Bài tập 2: Giải phương trình: $|3x| = x + 4$.

Giải

Ta có:

$|3x| = 3x$ khi $3x \geq 0$ hay $x \geq 0$;

$|3x| = -3x$ khi $3x < 0$ hay $x < 0$.

Xét $x \geq 0$:

Phương trình đã cho trở thành:

$$3x = x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Xét $x < 0$:

Phương trình đã cho trở thành:

$$-3x = x + 4$$

$$\Leftrightarrow -4x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-1; 2\}$.

Bài tập 3: Giải phương trình: $|x - 3| = 9 - 2x$.

Giải

Ta có:

$$|x - 3| = x - 3 \text{ khi } x - 3 \geq 0 \text{ hay } x \geq 3;$$

$$|x - 3| = -(x - 3) \text{ khi } x - 3 < 0 \text{ hay } x < 3.$$

Xét $x \geq 3$:

Phương trình đã cho trở thành:

$$x - 3 = 9 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 3x = 9 + 3$$

$$\Leftrightarrow 3x = 12$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Với $x < 3$:

Phương trình đã cho trở thành:

$$-(x - 3) = 9 - 2x$$

$$\Leftrightarrow -x + 3 = 9 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{4\}$.

Bài tập 4: Giải phương trình sau: $|2x + 1| = x - 3$

Giải

Ta có:

$$|2x + 1| = 2x + 1 \text{ khi } 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$|2x + 1| = -(2x + 1) \text{ khi } 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

Xét $x \geq -\frac{1}{2}$:

Phương trình đã cho trở thành:

$$2x + 1 = x - 3,$$

$$\Leftrightarrow 2x - x = -3 - 1$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Xét $x < -\frac{1}{2}$:

Phương trình đã cho trở thành:

$$-2x - 1 = x - 3,$$

$$\Leftrightarrow -2x - x = -3 + 1$$

$$\Leftrightarrow -3x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài tập 5: Giải phương trình sau: $|x + 3| = 3x - 1$

Giải

Ta có:

$$|x + 3| = x + 3 \text{ khi } x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$$

$$|x + 3| = -(x + 3) \text{ khi } x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$$

Xét $x \geq -3$:

Phương trình đã cho trở thành:

$$x + 3 = 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow x - 3x = -1 - 3$$

$$\Leftrightarrow -2x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Xét $x < -3$:

$$-x - 3 = 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow -x - 3x = -1 + 3$$

$$\Leftrightarrow -4x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

Bài tập 6: Giải phương trình sau: $|2x-1| = 3+5x$

Giải

$$|2x-1| = 2x-1 \text{ nếu } 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$|2x-1| = 2x-1 \text{ nếu } 2x-1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Xét $x \geq \frac{1}{2}$:

Phương trình đã cho trở thành:

$$2x-1 = 3+5x$$

$$\Leftrightarrow -3x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Xét $x < \frac{1}{2}$:

Phương trình đã cho trở thành:

$$1-2x = 3+5x$$

$$\Leftrightarrow -2x-5x = 3-1$$

$$\Leftrightarrow -7x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{7} \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{-\frac{2}{7}\right\}$

Bài tập 7: Giải phương trình sau: $|x+1|+|x+2|+|x+3|=3$.

Giải

Ta có bảng xét dấu:

x	-3	-2	-1	
x+1	- ↓	- ↓	- 0	+
x+2	- ↓	- 0	+	↓
x+3	- 0	+	↓	+

Xét $x \leq -3$:

Phương trình trở thành:

$$-(x+1)-(x+2)-(x+3)=3$$

$$\Leftrightarrow -3x-6=3$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Xét $-3 < x \leq -2$:

Phương trình trở thành:

$$-(x+1)-(x+2)+(x+3)=3$$

$$\Leftrightarrow -x=3$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Xét $-2 < x \leq -1$:

Phương trình trở thành:

$$-(x+1)+x+2x+3=3$$

$$\Leftrightarrow x+4=3$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Xét $x > -1$:

Phương trình trở thành:

$$x+1+x+2+x+3=3$$

$$\Leftrightarrow 3x=-3$$

$\Leftrightarrow x = -1$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-1; -3\}$

4.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải phương trình sau: $x^2 - |x - 2| - 8 = 0$

Bài tập 2: Giải phương trình sau: $|1 - 2x| - |x + 1| = x + 2$

a) $|2x + 1| = |x - 1| + 2$

b) $|2x - 4| + x - 3 = |2x - 1|$

c) $|x - 3| + |11 - x| = 8$

d) $|x - 2| - 2|x + 1| + x - 1 = 0$

e) $\frac{|x + 3|}{9} - \frac{|x - 4|}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x + 5}{36}$

f) $|3x - 1| + 2|x - 1| = |5x + 3|$

g) $4|x + 1| - |x - 2| - 3|x + 2| = 0$

i) $|x + 1| + 3|x - 1| = x + 2 + |x| + 2|x - 2|$

Bài tập 3: Giải phương trình sau: $\left| \frac{x + 2}{x - 2} \right| = 2$

Bài tập 4: Giải phương trình sau: $x^2 + \frac{1}{x^2} - 10 = 2 \left| x - \frac{1}{x} \right|$

Bài tập 5: Giải phương trình sau: $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 1} + \frac{|2x - 4|}{x - 1} - 3 = 0$

Bài tập 6: Giải phương trình sau: $|x^2 - x - 2| = |x^2 + 2x|$

Bài tập 7: Giải phương trình sau: $|2x^2 - 3x - 2| + 2x^2 + 8x + 3 = 0$.

Bài tập 8: Giải phương trình sau: $|x^2 - 4x + 3| + x + 3$

Bài tập 9: Giải phương trình sau: $|2x - 3| = \frac{1}{x}$

Bài tập 10: Giải phương trình sau: $\frac{|2x + 4|}{\sqrt{x^2 + 1}} = 2$

Bài tập 11: Giải phương trình sau: $\frac{|3x + 1|}{\sqrt{10(x^2 + 1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài tập 12: Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 2x + 1$

Bài tập 13: Giải phương trình sau: $|x - 2| + |x - 3| = 4$

Bài tập 14: Giải phương trình sau: $\frac{3}{|x - 4| - 1} = |x + 3|$

Bài tập 15: Giải phương trình sau: $|x + 4| = 2x - 5$

Bài tập 16: Giải phương trình sau: $\frac{x - 1}{x + 1} = |x - 1|(x + 1)$

Bài tập 17: Giải phương trình sau: $\frac{|x - 4|}{2} + \frac{|x - 3|}{3} = \frac{|x - 2|}{6}$

Bài tập 18: Giải phương trình sau: $|x + 1| + |x + 2| - |x + 3| + |x + 4| = 1$

Bài tập 19: Giải phương trình sau: $|x - 4| + \frac{|x - 3|}{|x + 4|} = |x - 3|$

Bài tập 20: Giải phương trình sau: $\frac{x + 5}{|x - 1|} + \frac{x + 3}{|x + 1|} = \frac{4}{|x^2 - 1|}$

5. Phương trình bậc hai một ẩn:

5.1. Kiến thức cơ bản:

Dạng 1: Dạng tổng quát: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

trong đó a, b, c là các hệ số, x là ẩn số.

Cách giải:

Bước 1: Tính biệt thức: $\Delta = b^2 - 4ac$. (hoặc tính $\Delta' = b'^2 - ac$, với $b = 2b'$)

Bước 2: Lấy nghiệm của phương trình bậc hai theo Δ :

Nếu $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm.

Nếu $\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}, \left(x = -\frac{b'}{a}\right)$

Nếu $\Delta > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \left(x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\right)$$

Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm:

Cho phương trình bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$

Phương trình trên có nghiệm nếu một trong các trường hợp sau xảy ra:

- i) $ac \leq 0$
- 2i) $\exists \alpha \in \mathbb{R}: af(\alpha) \leq 0.$
- 3i) $\Delta \geq 0$
- 4i) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: f(\alpha)f(\beta) \leq 0.$

Trường hợp đặc biệt:

Nếu các hệ số của phương trình thỏa mãn: $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm là

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}.$$

Nếu các hệ số của phương trình thỏa mãn: $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm là

$$x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}.$$

5.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 10x + 8 = 0$

b) $4x^2 - 8x = 0$

Giải

a) $3x^2 - 10x + 8 = 0$

Ta có: $\Delta = (-10)^2 - 4.3.8 = 4 > 0.$

Suy ra: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-(-10) + 2}{2.3} = 2 \text{ và } x_2 = \frac{-(-10) - 2}{2.3} = \frac{4}{3}.$$

b) $4x^2 - 8x = 0$

Cách 1:

Ta có: $\Delta = (-8)^2 - 4.4.0 = 64 > 0.$

Suy ra: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-(-8) + 8}{2.4} = 2 \text{ và } x_2 = \frac{-(-8) - 8}{2.4} = 0.$$

Cách 2:

$$4x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 - 18 = 0$

b) $3x^2 + 7x + 4 = 0$

Giải

a) $2x^2 - 18 = 0$

Cách 1:

Ta có: $\Delta = 0 - 4.2.(-18) = 144 > 0$

Suy ra: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{144} = 12.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{0+12}{2.2} = 3 \text{ và } x_2 = \frac{-12}{2.2} = -3.$$

Cách 2:

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+3)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=3 \end{cases}$$

b) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

Ta có: Tổng các hệ số: $3 - 7 + 4 = 0$

Suy ra: Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{4}{3}.$$

6. Ứng dụng định lý VI - ET đối với phương trình bậc hai.

6.1. Kiến thức cơ bản:

Định lý (thuận):

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1 và x_2 thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

(S, P lần lượt là tổng và tích của hai nghiệm)

Định lý (đảo):

Nếu hai số x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = S$ và $x_1 x_2 = P$, ($S^2 \geq 4P$) thì x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$X^2 - SX + P = 0.$$

Chú ý: Nếu ký hiệu: $S_n = x_1^n + x_2^n$:

$$S_1 = x_1 + x_2 = S$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$$

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$$

$$S_4 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = S_2^2 - 2P^2$$

$$S_5 = x_1^5 + x_2^5 = (x_1^3 + x_2^3)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) = S_3 S_2 - P^2 S_1$$

$$S_6 = x_1^6 + x_2^6 = (x_1^3 + x_2^3)^2 - 2x_1^3 x_2^3 = S_3^2 - 2P^3$$

$$S_7 = x_1^7 + x_2^7 = (x_1^4 + x_2^4)(x_1^3 + x_2^3) - x_1^3 x_2^3 (x_1 + x_2) = S_4 S_3 - P^3 S_1$$

$$S_8 = x_1^8 + x_2^8 = (x_1^4 + x_2^4)^2 - 2x_1^4 x_2^4 = S_4^2 - 2P^4$$

$$S_9 = x_1^9 + x_2^9 = (x_1^5 + x_2^5)(x_1^4 + x_2^4) - x_1^4 x_2^4 (x_1 + x_2) = S_5 S_4 - P^4 S_1$$

$$S_{10} = x_1^{10} + x_2^{10} = (x_1^5 + x_2^5)^2 - 2x_1^5 x_2^5 = S_5^2 - 2P^5$$

và

$$A = |x_1 - x_2| \Rightarrow A = \sqrt{S^2 - 4P}$$

$$B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

$$C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$$

$$D = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = S^2 - 4P$$

$$E = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$$

Hệ quả 1:

Phương trình bậc hai $x^2 - x - 1 = 0$ có tính chất:

$$S_{n+2} = S_{n+1} + S_n \text{ và } S_{m+n} = S_m \cdot S_n + (-1)^n S_{m-n},$$

trong đó $S_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ là hai nghiệm của phương trình.

Hệ quả 2:

Phương trình bậc hai $x^2 - px - q = 0$, $(p^2 + 4q > 0)$ có tính chất:

$$S_{n+2} = pS_{n+1} + qS_n$$

trong đó $S_n = x_1^n + x_2^n$, x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Hệ quả 3:

Phương trình bậc hai $x^2 - px + 1 = 0$, $(p^2 - 4 > 0)$ có tính chất:

$$S_{n+2} = pS_{n+1} - S_n \text{ và } S_{m+n} = S_m \cdot S_n - S_{m-n}$$

trong đó $S_n = x_1^n + x_2^n$, x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

6.2. Bài tập áp dụng:

Các dạng bài tập sử dụng định lý Vi-et:

Dạng 1:

(1) Tìm tham số khi biết hệ thức liên hệ giữa các nghiệm:

- Hệ thức đối xứng.

- Hệ thức không đối xứng.

(2) Tính giá trị của biểu thức nghiệm theo tham số.

(3) Tìm hệ thức độc lập giữa các nghiệm của phương trình không phụ vào tham số.

(4) Lập phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm của phương trình.

Bài tập 1: Cho phương trình bậc hai ẩn x , tham số m : $x^2 + mx + m + 3 = 0$ (1)

a) Giải phương trình với $m = -2$.

b) Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình. Tính $x_1^2 + x_2^2$; $x_1^3 + x_2^3$ theo m .

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

d) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $2x_1 + 3x_2 = 5$.

e) Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1 = -3$. Tính nghiệm còn lại.

f) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

g) Lập hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào giá trị của m .

Giải

a) Thay $m = -2$ vào phương trình (1) ta có phương trình:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

Vậy với $m = -2$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) Phương trình: $x^2 + mx + m + 3 = 0$ (1)

Ta có: $\Delta = m^2 - 4(m+3) = m^2 - 4m - 12$

Phương trình có nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m & (a) \\ x_1 x_2 = m + 3 & (b) \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-m)^2 - 2(m+3) = m^2 - 2m - 6$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = (-m)^3 - 3(m+3)(-m) = -m^3 + 3m^2 + 9m$$

c) Phương trình có nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

Khi đó:

$$x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 2m - 6$$

Do đó:

$$x_1^2 + x_2^2 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 6 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$\Delta'_{(m)} = (-1)^2 - 1 \cdot (-15) = 1 + 15 = 16 > 0;$$

$$\sqrt{\Delta'_{(m)}} = 4$$

Suy ra: Phương trình có hai nghiệm:

$$m_1 = \frac{1+4}{1} = 5; \quad m_2 = \frac{1-4}{1} = -3$$

Kiểm tra:

Với $m = 5 \Rightarrow \Delta = -7 < 0$ (loại).

Với $m = -3 \Rightarrow \Delta = 9 > 0$ (thỏa mãn).

Vậy với $m = -3$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

d) Phương trình có nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m & (a) \\ x_1 x_2 = m + 3 & (b) \end{cases}$

Hệ thức: $2x_1 + 3x_2 = 5$ (c)

Từ (a) và (c) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -3m \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3m - 5 \\ x_2 = -m - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3m - 5 \\ x_2 = 2m + 5 \end{cases}$$

Thay $\begin{cases} x_1 = -3m - 5 \\ x_2 = 2m + 5 \end{cases}$ vào (b) ta có phương trình:

$$\begin{aligned} (-3m - 5)(2m + 5) &= m + 3 \\ \Leftrightarrow -6m^2 - 15m - 10m - 25 &= m + 3 \\ \Leftrightarrow -6m^2 - 26m - 28 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3m^2 + 13m + 14 &= 0 \\ \Delta_{(m)} &= 13^2 - 4.3.14 = 1 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-13+1}{2.3} = -2 \\ m_2 &= \frac{-13-1}{2.3} = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Kiểm tra:

Với $m = -2 \Rightarrow \Delta = 0$ (thỏa mãn).

Với $m = -\frac{7}{3} \Rightarrow \Delta = \frac{25}{9} > 0$ (thỏa mãn).

Vậy với $m = -2$; $m = -\frac{7}{3}$ phương trình có hai nghiệm x_1 ; x_2 thỏa mãn: $2x_1 + 3x_2 = 5$.

e) Phương trình (1) có nghiệm $x_1 = -3$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (-3)^2 + m.(-3) + m + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2m + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= 6 \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -m \\ \Leftrightarrow x_2 &= -m - x_1 \\ \Leftrightarrow x_2 &= -6 - (-3) \\ \Leftrightarrow x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Vậy với $m = 6$ thì phương trình có nghiệm: $x_1 = x_2 = -3$.

f) Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow ac &< 0 \\ \Leftrightarrow 1.(m + 3) &< 0 \\ \Leftrightarrow m + 3 &< 0 \\ \Leftrightarrow m &< -3 \end{aligned}$$

Vậy với $m < -3$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu.

g) Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1 ; x_2 .

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x_1 - x_2 \\ m = x_1 x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = x_1 x_2 - 3$$

Bài tập 2: Cho phương trình bậc hai:

$$x^2 - 2mx + 4m - 3 = 0, (m \text{ là tham số}).$$

- a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 .
 b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.
 c) Tìm m thỏa mãn biểu thức: $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

Giải

a) Ta có: $\Delta' = m^2 - 4m + 3$.

Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 0 \\ m-3 \leq 0 \\ m-3 \geq 0 \\ m-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

b) Theo định lý Viét, ta có:

$$S = x_1 + x_2 = 2m \quad (1)$$

$$P = x_1 x_2 = 4m - 3 \quad (2)$$

Từ (1), ta có: $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ thay vào (2) ta được:

$$\Rightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 + 3 = 0$$

Chú ý:

- Đề bài yêu cầu tìm hệ thức không phụ thuộc vào m, ta thường tính m theo S rồi thay vào biểu thức chứa P.

- Đề bài có thể yêu cầu chúng ta viết hệ thức "độc lập" với "m" thì ta cũng làm giống như vậy.

c) Với điều kiện có hai nghiệm phương trình.

Theo định lý Vi-et, ta có:

$$S = x_1 + x_2 = 2m$$

$$P = x_1 x_2 = 4m - 3$$

Suy ra:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 - 8m + 6$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện, ta được giá trị $m = 0$.

* Chú ý: Ta thường mắc sai lầm ở dạng bài toán này là khi tìm được giá trị của m là không so sánh với điều kiện của bài toán, để kết luận giá trị m chính xác nhất.

Bài tập 3: Cho $x_1 = 3$; $x_2 = 2$ lập một phương trình bậc hai chứa hai nghiệm trên.

Giải

Theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 5 \\ P = x_1 x_2 = 6 \end{cases}$$

Vậy x_1 ; x_2 là hai nghiệm của phương trình có dạng:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Bài tập 4: Cho p và q là hai nghiệm của phương trình $3x^2 + 7x + 4 = 0$. Không giải phương trình,

hãy lập một phương trình có các hệ số nguyên và có hai nghiệm là $\frac{p}{q-1}$ và $\frac{q}{p-1}$.

Giải

$$\text{Áp dụng định lý Viét, ta có: } \begin{cases} p + q = -\frac{7}{3} \\ pq = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vì $\frac{p}{q-1}$ và $\frac{q}{p-1}$ là hai nghiệm của phương trình nên ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p}{q-1} + \frac{q}{p-1} = \frac{p(p-1) + q(q-1)}{(q-1)(p-1)} = \frac{(p+q)^2 - 2pq - (p+q)}{pq - (p+q) + 1} \\ \frac{p}{q-1} \cdot \frac{q}{p-1} = \frac{pq}{pq - (p+q) + 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{3} + \frac{7}{3}}{\frac{4}{3} + \frac{7}{3} + 1} = \frac{\frac{46}{9}}{\frac{42}{9}} = \frac{23}{21} \\ \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3} + \frac{7}{3} + 1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{14}{3}} = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Khi đó, phương trình viết được có các hệ số $x^2 - \frac{23}{21}x + \frac{2}{7} = 0$ Hay $21x^2 - 23x + 6 = 0$.

Vậy phương trình lập được với các hệ số nguyên là $21x^2 - 23x + 6 = 0$.

Bài tập 5: Cho phương trình: $x^2 - 3x + 2 = 0$, có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Không giải phương trình trên, hãy lập phương trình bậc 2 có ẩn là y thỏa mãn: $y_1 = x_2 + \frac{1}{x_1}$ và

$$y_2 = x_1 + \frac{1}{x_2}$$

Giải

Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$S = y_1 + y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} + x_1 + \frac{1}{x_2} = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$P = y_1 y_2 = \left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 x_2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_1 x_2} = 2 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Vậy phương trình cần lập có dạng: $y^2 - Sy + P = 0$ hay $y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 9 = 0$

Bài tập 6: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) và số thực $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

Chứng minh rằng điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 mà nghiệm này gấp k lần nghiệm kia là $kb^2 = (k+1)^2 ac$.

Giải

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 , mà $x_1 = kx_2$.

Theo định lý Viét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx_2 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ kx_2 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k+1)x_2 = -\frac{b}{a} \\ kx_2^2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a(k+1)} \Rightarrow k\left(-\frac{b}{a(k+1)}\right)^2 = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{kb^2}{a^2(k+1)^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow kb^2 = (k+1)^2 ac.$$

Cách khác: Ta có thể kiểm tra điều kiện có hai nghiệm của phương trình dựa vào yêu cầu chứng minh.

Bài tập 7: (Đề thi chuyên ngoại ngữ Hà Nội năm 1996 - 1997)

Tìm a và b để hai phương trình: $x^2 - (a+3b)x - 6 = 0$ và $x^2 - (2a+b)x - 3a = 0$ tương đương.

Giải

Nhận xét: Phương trình thứ nhất luôn có nghiệm vì $\Delta = (a + 3b)^2 + 24 > 0$.

Giả sử hai phương trình tương đương và có chung tập nghiệm là $\{x_1; x_2\}$.

Áp dụng định lý Viét cho phương trình thứ nhất, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a + 3b \\ x_1 x_2 = -6 \end{cases}$$

Áp dụng định lý Viét cho phương trình thứ hai, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a + b \\ x_1 x_2 = -3a \end{cases}$$

Từ hai hệ phương trình trên, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a + b = a + 3b \\ -3a = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Đảo lại: Khi $a = 2$ và $b = 1$ thì hai phương trình trở thành: $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Do đó hai phương trình đã cho tương đương nhau.

Vậy $a = 2$ và $b = 1$.

Chú ý:

Ta sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ để tìm tham số thỏa mãn phương trình có tính chất T nào đó.

Cách giải:

Điều kiện cần: Giả sử tính chất T được thỏa mãn, sử dụng tính chất T để tìm ra các giá trị có thể nhận được của tham số.

Điều kiện đủ: Đảo lại, thử lại các giá trị vừa tìm được của tham số vào phương trình để chọn ra các tham số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 8: Cho phương trình: $x^2 - (m + 2)x + (2m - 1) = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$. Hãy lập hệ thức liên hệ giữa $x_1; x_2$ độc lập đối với m .

Giải

Ta có: $\Delta = (m + 2)^2 - 4(2m - 1) = m^2 - 4m + 8 = (m - 2)^2 + 4 > 0$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 .

Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 x_2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x_1 + x_2 - 2 & (1) \\ m = \frac{x_1 x_2 + 1}{2} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$x_1 + x_2 - 2 = \frac{x_1 x_2 + 1}{2} \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 - 5 = 0$$

Dạng 2: Xét dấu các nghiệm số của phương trình bậc hai.

(1) Phương trình bậc hai có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0, (\Delta' \geq 0) \end{cases}$$

(2) Phương trình bậc hai có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0, (\Delta' \geq 0) \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

(3) Phương trình bậc hai có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0, (\Delta' \geq 0) \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

(4) Phương trình bậc hai có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $P < 0$.

(5) Phương trình bậc hai có hai nghiệm trái dấu thỏa mãn $\{x_1 < 0; x_2 > 0 \mid |x_1| > |x_2|\}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0, (\Delta' \geq 0) \\ S < 0 \\ P < 0 \end{cases}$$

(6) Phương trình bậc hai có hai nghiệm trái dấu thỏa mãn $\{x_1 < 0; x_2 > 0 \mid |x_1| < |x_2|\}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0, (\Delta' \geq 0) \\ S > 0 \\ P < 0 \end{cases}$$

Bài tập 9: Xác định tham số m sao cho phương trình: $2x^2 - (3m+1)x + m^2 - m - 6 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

Giải

Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \Delta = (3m+1)^2 - 4.2.(m^2 - m - 6) \geq 0 \\ P = \frac{m^2 - m - 6}{2} < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \Delta = (m-7)^2 \geq 0 \forall m \\ P = (m-3)(m+2) < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &-2 < m < 3 \end{aligned}$$

Vậy với $-2 < m < 3$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Bài tập 10: Cho phương trình:

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 4m + 3 = 0, \text{ (với } m \text{ là tham số)}$$

- Tìm m để phương trình có nghiệm.
- Tìm hệ thức độc lập với m .
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm âm.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương.

Giải

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} \Delta' \geq 0 &\Leftrightarrow (m+1)^2 - m^2 + 4m - 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 6m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b) Theo định lý Vi-ét, ta có:

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ P &= x_1 x_2 = m^2 - 4m + 3 \end{aligned}$$

Suy ra:

$$4x_1x_2 = (x_1 + x_2 - 2)^2 - 8(x_1 + x_2 - 2) + 12$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 32 = 0$$

c) Phương trình có hai nghiệm trái dấu

$$P = x_1x_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 < 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 3) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Kết hợp với điều kiện: $m \geq \frac{1}{3} \vee (1 < m < 3) \Leftrightarrow 1 < m < 3.$

d) Phương trình có hai nghiệm cùng dấu:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m < 1 \cup m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$$

e) Phương trình có hai nghiệm âm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m < -1 \\ m < 1 \cap m > 3 \end{cases}$$

Không tồn tại giá trị của m.

f) Phương trình có hai nghiệm dương:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m > -1 \\ m < 1 \cup m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < m < 1 \\ m > 3 \end{cases}$$

Bài tập 11: Tìm m để phương trình: $x^2 - 2mx + 16 = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 1.

Giải

Đặt: $x = X + 1$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$(X + 1)^2 - 2m(X + 1) + 16 = 0$$

hay

$$X^2 + 2(1 - m)X - 2m + 17 = 0 \quad (1)$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm lớn hơn 1 thì phương trình (1) có hai nghiệm dương:

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16 \geq 0 \\ 2(m - 1) > 0 \\ -2m + 17 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \geq 16 \\ m > 1 \\ m < \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m < \frac{17}{2}$$

Chú ý: Để so sánh nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) với một số k cho trước, ta dùng phương pháp đặt ẩn phụ $x = X + k$ và xét dấu các nghiệm của phương trình:

$$a(X + k)^2 + b(X + k) + c = 0.$$

Dạng 3: Tìm hai số khi biết và tích của chúng.

Cách giải:

Bước 1: Gọi hai số cần tìm là x và y.

$$\text{Tính: } S = x + y = a; P = x.y = b$$

Bước 2: Khi đó x và y là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0$$

Bước 3: Giải phương trình trên, tìm x; y.

Bài tập 12: Tìm hai số a, b biết tổng $S = a + b = -3$ và tích $P = ab = -4$.

Giải

$$\text{Đặt: } S = a + b = -3 \text{ và } P = ab = -4$$

Khi đó: a và b là hai nghiệm của phương trình: $x^2 + 3x - 4 = 0$

Giải phương trình trên ta được: $x_1 = 1$ và $x_2 = -4$

Vậy hai số a và b cần tìm là $a = 1$ và $b = -4$; $a = -4$ và $b = 1$.

Bài tập 13: Tìm 2 số a và b biết

1) $a + b = 9$ và $a^2 + b^2 = 41$

2) $a - b = 5$ và $ab = 36$

3) $a^2 + b^2 = 61$ và $ab = 30$

Giải

1) Áp dụng hệ thức VI- ÉT, ta có:

$$a + b = 9 \Rightarrow (a + b)^2 = 81 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 81$$

$$ab = \frac{81 - (a^2 + b^2)}{2} = 20$$

Khi đó: a, b là nghiệm của phương trình có dạng: $x^2 - 9x + 20 = 0$

Phương trình trên có hai nghiệm là $x = 4$; $x = 5$.

Vậy hai số a và b cần tìm là $a = 4$ và $b = 5$; $a = 5$ và $b = 4$.

2) Ta có:

$$ab = 36.$$

Do đó cần tìm tổng : $a + b$

Cách 1: Đặt $c = -b$,

$$\text{Ta có: } a + c = 5 \text{ và } a.c = -36$$

Khi đó: a, c là nghiệm của phương trình: $x^2 - 5x - 36 = 0$

Phương trình trên có hai nghiệm là $x = 9$; $x = -4$.

Vậy hai số a và b cần tìm là $a = 9$; $c = -4$; $b = 4$ và $a = -4$; $c = 9$; $b = -9$.

Cách 2: Từ

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab = 169$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 = 13^2 \Rightarrow \begin{cases} a + b = -13 \\ a + b = 13 \end{cases}$$

Với $a + b = -13$ và $ab = 36$.

$$\text{Khi đó a, b là nghiệm của phương trình: } x^2 + 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -9 \end{cases}$$

Vậy $a = -4$; $b = -9$.

Với $a + b = 13$ và $ab = 36$.

$$\text{Khi đó a, b là nghiệm của phương trình: } x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 9 \end{cases}$$

Vậy $a = 9$; $b = 4$

3) Ta có: $ab = 30$, do đó cần tìm $a + b$:

$$\text{Từ: } a^2 + b^2 = 61 \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 61 + 2.30 = 121 = 11^2 \Rightarrow \begin{cases} a + b = -11 \\ a + b = 11 \end{cases}$$

Nếu $a + b = -11$ và $ab = 30$.

$$\text{Khi đó a, b là hai nghiệm của phương trình: } x^2 + 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

Vậy $a = -5$ và $b = -6$; $a = -6$ và $b = -5$

Nếu $a + b = 11$ và $ab = 30$.

$$\text{Khi đó a, b là hai nghiệm của phương trình: } x^2 - 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

Vậy $a = 5$ và $b = 6$; $a = 6$ và $b = 5$.

6.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $2x^2 + 7x + 5 = 0$

c) $3x^2 - 27 = 0$

d) $4x^2 + 12 = 0$

e) $12x^2 - 10x = 0$

f) $-6x^2 - 5x + 1 = 0$

Bài tập 2: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

Bài tập 3: Cho phương trình: $x^2 + px - 5 = 0$ có nghiệm $x_1; x_2$.

Hãy lập phương trình có hai nghiệm là hai số được cho trong mỗi trường hợp sau:

a) $-x_1$ và $-x_2$

b) x_1^2 và x_2^2

Bài tập 4: Chứng minh rằng nếu tích một nghiệm của phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$ với một nghiệm nào đó của phương trình $x^2 + bx + 1 = 0$ thì

$$\frac{4}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 2$$

Bài tập 5: Cho phương trình: $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$

a) Tìm nghiệm (x; y) của phương trình thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 10$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình trên.

Bài tập 6: Cho phương trình: $(x + k - 3)[x^2 + 2(k + 3)x + 3k - 9] = 0$

a) Giải phương trình khi $k = 3$.

b) Tìm các giá trị của k để phương trình (1) có hai nghiệm dương và một nghiệm âm.

Bài tập 7: Cho phương trình ẩn x, tham số t: $x^2 - 2(t - 1)x + t^2 - 3 = 0$

a) Tìm t để phương trình đã cho có nghiệm.

b) Tìm t để phương trình đã cho có hai nghiệm sao cho tổng hai nghiệm bằng tích hai nghiệm.

Bài tập 8: Cho phương trình bậc hai ẩn x, tham số m: $mx^2 - 5x - (m + 5) = 0$

a) Giải phương trình trên khi $m = 5$.

b) Chứng tỏ rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

c) Trong trường hợp phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Hãy tính theo m giá trị của biểu thức $A = -16x_1x_2 - 3(x_1^2 + x_2^2)$. Tìm m để $A = 0$.

Bài tập 9: Cho phương trình ẩn x, tham số m: $(m + 3)x^2 - 2(m^2 + 3m)x + m^3 + 12 = 0$

a) Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho $x_1^2 + x_2^2$ là một số nguyên.

Bài tập 10: Cho phương trình bậc hai ẩn x, m là tham số: $x^2 - 2(m - 3)x + 2m - 7 = 0$

a) Chứng tỏ rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là $x_1; x_2$. Hãy tìm m để $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = m$

Bài tập 11: Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2x - m^2 = 0$ có các nghiệm $x_1; x_2$. Hãy lập phương trình bậc hai có các nghiệm $y_1; y_2$ sao cho:

a) $y_1 = x_1 - 3$ và $y_2 = x_2 - 3$

b) $y_1 = 2x_1 - 1$ và $y_2 = 2x_2 - 1$

Bài tập 12: Cho phương trình bậc hai ẩn x, m là tham số: $x^2 - 3mx + 3m - 4 = 0$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt?

b) Hãy tìm m để phương trình đã cho có một nghiệm $x_1 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

Khi đó hãy tìm nghiệm x_2 của phương trình đó

Bài tập 13: Cho phương trình: $x^2 - 5x - 1 = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$. Hãy lập phương trình bậc hai có ẩn y thỏa mãn $y_1 = x_1^4$ và $y_2 = x_2^4$.

Bài tập 14: Cho phương trình bậc hai ẩn x, m là tham số: $x^2 - 2x + m = 0$

a) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

b) Chứng minh rằng với mọi m phương trình đã cho không thể có hai nghiệm cùng là số âm.

c) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 - 2x_2 = 5$.

Bài tập 15: Cho hai phương trình bậc hai ẩn x (a là tham số):

$$x^2 - 3x - a - 2 = 0 \text{ và } x^2 + ax + 1 = 0$$

- a) Giải các phương trình trên trong trường hợp $a = -1$.
 b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a trong hai phương trình trên luôn có ít nhất một trong hai phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 16: Cho phương trình bậc hai ẩn x (m, n là các tham số):

$$x^2 + (m+n)x - (m^2 + n^2) = 0$$

- a) Giải phương trình trên khi $m = n = 1$.
 b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, n thì phương trình đã cho luôn có nghiệm.
 c) Tìm m, n để phương trình đã cho tương đương với phương trình: $x^2 - x - 5 = 0$.

Bài tập 17: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 5 = 0$

- a) Giải phương trình khi $m = \frac{5}{2}$
 b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Bài tập 18: Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3m + 2 = 0$

- a) Tìm các giá trị của m để phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
 b) Tìm giá trị của m thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 12$ (trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình).

Bài tập 19: Cho hai phương trình: $x^2 - 3x + 2m + 6 = 0$ và $x^2 + x - 2m - 10 = 0$

- a) Giải hai phương trình trên với $m = -3$.
 b) Tìm các giá trị của m để hai phương trình trên có nghiệm chung.
 c) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

Bài tập 20:

- a) Chứng minh rằng: Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

- b) Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 4 và tích của chúng - 5.
 c) Tìm số nguyên a để phương trình $x^2 - ax + a^2 - 7 = 0$ có nghiệm.

Bài tập 21: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$, (m là tham số)

- 1) Giải phương trình trên với $m = 1$.
 2) Tìm các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm trái dấu.
 3) Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Tính theo m giá trị của biểu thức:

$$A = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1).$$

Bài tập 22: Cho phương trình: $2x^2 + mx + m - 3 = 0$, (m là tham số)

- 1) Giải phương trình trên khi $m = -1$.
 2) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .
 3) Tìm các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

Bài tập 23: Cho phương trình: $x^2 - 2x - 1 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 .

Tính giá trị của biểu thức : $S = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.

Bài tập 25: Cho phương trình $x^2 - 6x + m = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 26: Cho phương trình $x^2 - 2(k+3)x + 2k - 1 = 0$.

- a) Giải phương trình khi $k = \frac{1}{2}$
 b) Tìm k để phương trình có một nghiệm là và tìm nghiệm còn lại nếu có.
 c) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2 với mọi k .

Bài tập 27: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 28: Tìm m để phương trình $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$ tương đương với phương trình $x^2 - (m^2 + m - 4)x + 1 = 0$.

Bài tập 29: Tìm m để hai phương trình $x^2 + 3x + 2m = 0$ và $x^2 + 6x + 5m = 0$ có nghiệm xen kẽ nhau.

Bài tập 30: Cho phương trình: $m\sqrt{2x} - (\sqrt{2} - 1)^2 = \sqrt{2} - x + m^2$

- Giải phương trình khi $m = \sqrt{2} + 1$
- Tìm m để phương trình có nghiệm $x = 3 - \sqrt{2}$
- Tìm m để phương trình có nghiệm dương duy nhất

Bài tập 31: Cho phương trình: $(m - 4)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$

- Tìm m để phương trình có nghiệm $x = \sqrt{2}$. Tìm nghiệm còn lại
- Tìm m để phương trình 2 có nghiệm phân biệt

Bài tập 32: Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$

- Tìm m để phương trình 2 có nghiệm trái dấu
- Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

Bài tập 33: Tìm m để phương trình:

- $x^2 - x + 2(m - 1) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt
- $4x^2 + 2x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt
- $(m^2 + 1)x^2 - 2(m + 1)x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu

Bài tập 34: Cho phương trình: $x^2 - (a - 1)x - a^2 + a - 2 = 0$

Chứng minh rằng phương trình trên có 2 nghiệm trái dấu với mọi a

Bài tập 35: Cho b và c là hai số thoả mãn hệ thức: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau phải có nghiệm.

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + cx + b = 0$$

Bài tập 36: Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm số chung:

$$2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0 \quad (1)$$

$$4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0 \quad (2)$$

Bài tập 37: Cho phương trình: $2x^2 - 2mx + m^2 - 2 = 0$

- Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt
- Giả sử phương trình có hai nghiệm không âm, tìm nghiệm dương lớn nhất của phương trình

Bài tập 38: Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 5 = 0$

- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm với mọi m
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu. Khi đó hai nghiệm mang dấu gì?

Bài tập 39: Cho $f(x) = x^2 - 2(m + 2)x + 6m + 1$

- CMR phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm với mọi m
- Đặt $x = t + 2$. Tính $f(x)$ theo t , từ đó tìm điều kiện đối với m để phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm lớn hơn 2

Bài tập 40: Cho phương trình: $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$

- CMR phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m
- Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $1 < x_1 < x_2 < 6$.

Bài tập 41: Cho phương trình: $x_2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 sao cho chúng không phụ thuộc vào m .

Đáp số: $2x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 17 = 0$

Bài tập 42: Cho phương trình: $(m - 1)x^2 - 2mx + - 4 = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$. Lập hệ thức liên hệ giữa $x_1; x_2$ không phụ thuộc vào m .

Đáp số: $3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 - 8 = 0$

Bài tập 43: Cho phương trình: $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0$. Tìm m để hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức: $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$.

Đáp số: $m = 2$.

Bài tập 44:

(1) Cho phương trình: $mx^2 + 2(m - 4)x + m + 7 = 0$. Tìm m để hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $x_1 - 2x_2 = 0$.

Đáp số: $m = 1$; $m = -128$.

(2) Cho phương trình: $x^2 + (m - 1)x + 5m - 6 = 0$. Tìm m để hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $4x_1 + 3x_2 = 1$.

Đáp số: $m = 0$; $m = 1$.

(3) Cho phương trình: $3x^2 - (3m - 2)x - (3m + 1) = 0$. Tìm m để hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $3x_1 - 5x_2 = 6$.

Đáp số: $\begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{32}{15} \end{cases}$

7. Phương trình bậc ba.

7.1. Dạng tổng quát: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ($a \neq 0$)

7.1.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Nhẩm một nghiệm của phương trình. Giả sử nghiệm đó là $x = x_0$

Thông thường thường nghiệm của nhẩm được là $x_0 = \frac{p}{q}$ (trong đó p là ước của d, q là ước của a).

Bước 2: Sử dụng phép chia đa thức hoặc sử dụng sơ đồ HOOCNE để phân tích về trái thành nhân tử và đưa phương trình (1) về dạng tích số:

Sơ đồ hooner:

	a	b	c	d
x_0	A	B	C	0 (số 0)

Trong đó: $a = A$, $x_0.A + b = B$, $x_0.B + c = C$, $x_0.C + d = 0$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ Ax^2 + Bx + C = 0 \end{cases}$$

Bước 3: Giải phương trình.

Lưu ý:

Định lý Bezu (Bơ - du): Đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = x_0$ khi và chỉ khi $P(x)$ chia hết cho $x - x_0$.

7.1.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

Giải

Ta nhẩm được ước của (-1) là -1 và 1. Thử $x = -1$ thỏa mãn.

Phương trình được viết lại là:

$$(x^3 + 1) - 2x(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x = -1$; $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 2: Giải phương trình sau: $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$

Giải

Nhận thấy $x = 2$ (ước của 10) là nghiệm của phương trình nên:

$$x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài tập 3: Giải phương trình: $4x^3 - 3x - 9 = 0$

Giải

Ta có: $x = \frac{3}{2}$ (3 là ước của $d = 9$, 2 là ước của 4) là nghiệm của phương trình.

Khi đó phương trình trở thành: $(2x - 3)(2x^2 + 3x + 3)$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (vì phương trình $2x^2 + 3x + 3 = 0$ vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$.

Bài tập 4: Giải phương trình: $x^3 + 7x^2 + 6x = 0$.

Giải

Ta có:

$$x^3 + 7x^2 + 6x = 0.$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 7x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 7x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x = 0$; $x = -1$; $x = -6$.

7.2. Phương trình bậc ba đối xứng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ($a \neq 0$)

7.2.1. Kiến thức cơ bản:

Dạng phương trình: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ($a \neq 0$)

Nếu $a + b + c + d = 0 \rightarrow x = 1$ là nghiệm

Nếu $a - b + c - d = 0 \rightarrow x = -1$ là nghiệm

7.2.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Giải

Nhận thấy tổng các hệ số cộng lại bằng 0 nên phương trình có nghiệm $x = 1$.

Sử dụng sơ đồ hooner, ta có:

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	0

Phương trình được viết lại là:

$$(x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Bài tập 2: Giải phương trình: $2x^3 - 4x^2 - 13x - 7 = 0$

Giải

Các hệ số: $a - b + c - d = 0$ nên phương trình có nghiệm $x = -1$.

Sử dụng sơ đồ hooner, ta có:

	2	-4	-13	-7
-1	2	-6	-7	0

Phương trình được viết lại là:

$$(x + 1)(2x^2 - 6x - 7)$$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x = -1$, $x = \frac{3 + \sqrt{23}}{2}$; $x = \frac{3 - \sqrt{23}}{2}$.

Bài tập 3: Giải phương trình: $2x^2 - 10x^2 - 5x + 7 = 0$

Giải

Ta có: Các hệ số: $2 - (-10) + (-5) - (7) = 0$

$x = -1$ là nghiệm của phương trình:

Sơ đồ Hooner:

	2	-10	-5	7
--	---	-----	----	---

-1	2	-12	7	0
----	---	-----	---	---

Phương trình trở thành:

$$(x + 1)(2x^2 - 12x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 12x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{6 + \sqrt{22}}{2} \\ x = \frac{6 - \sqrt{22}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x = -1$; $x = \frac{6 + \sqrt{22}}{2}$; $x = \frac{6 - \sqrt{22}}{2}$.

7.3. Phương trình có hệ số đối xứng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ($a \neq 0$)

7.3.1. Kiến thức cơ bản:

Dạng phương trình: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ($a \neq 0$) được gọi là có hệ số đối xứng nếu $a = c$, $d = d$. Khi đó: Ta có $x = -1$ luôn là nghiệm của phương trình.

7.3.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình sau: $3x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0$

Giải

Ta có $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

Sử dụng sơ đồ hooner, ta có:

	3	5	5	3
-1	3	2	3	0

Phương trình được viết lại là:

$$(x + 1)(3x^2 + 2x + 3)$$

(Vì phương trình $3x^2 + 2x + 3 = 0$ vô nghiệm)

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x = -1$.

7.4. Phương trình bậc ba hồi quy: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ($a, d \neq 0$, $ac^3 = db^3$)

Từ điều kiện ta thấy nếu $c = 0$ thì $b = 0 \Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm $x = \sqrt[3]{\frac{-d}{a}}$

Nếu $c \neq 0$ thì $b \neq 0$, điều kiện $\Leftrightarrow \frac{d}{a} = \left(\frac{c}{b}\right)^3$

Đặt: $\frac{c}{b} = -t$ thì $c = -bt$ và $d = -at^3$.

Khi đó phương trình trở thành $ax^3 + bx^2 - btx - at^3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - t)[ax^2 + (at + b)x + at^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ ax^2 + (at + b)x + at^2 = 0 \end{cases}$$

Vậy $x = -\frac{c}{b}$ là một nghiệm của phương trình. Nếu $\Delta = (at + b)^2 - 4a^2 \geq 0$ thì phương trình có

thêm các nghiệm $x = \frac{-(at + b) \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

7.5. Bài tập tự luyện chung:

Bài tập 1: Giải phương trình sau: $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$

Bài tập 2: Giải phương trình sau: $x^3 + x^2 - x + 2 = 4x - 1$

Bài tập 3: Giải phương trình sau: $2x^3 + 7x^2 - 28x + 12 = 0$

Bài tập 4: Cho các phương trình sau:

- a) $x^3 - 3x^2 + 2 = mx + m - 2$
- b) $x^3 - (2m + 1)x^2 + mx + m = 0$
- c) $x^3 - 2(m + 1)x^2 + (7m - 2)x + 4 - 6m = 0$
- d) $mx^3 - (m - 4)x^2 + (4 + m)x - m = 0$
- e) $x^3 + (1 - m)x^2 - 3mx + 2m^2 = 0$

Với giá trị nào của m thì các phương trình trên có ba nghiệm phân biệt.

Bài tập 5: Cho phương trình: $x^3 + 3mx^2 - 3x - 3m + 2 = 0$.

Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ đạt GTLN.

Bài tập 6: Giải phương trình sau: $3x^3 + 6x^2 - 4x = 0$

Bài tập 7: Giải phương trình sau: $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$

Bài tập 8: Giải phương trình sau: $(x + 1)^3 - x + 1 = (x - 1)(x - 2)$

Bài tập 9: Giải phương trình sau: $(5x^2 + 3x + 2)^2 = (4x^2 - 3x - 2)^2$

Bài tập 10: Giải phương trình sau: $8x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$

Bài tập 11: Định m để phương trình: $x^3 - 2x^2(4m^2 + 3m - 3)x + 2m(m + 3) = 0$

có 3 nghiệm phân biệt.

Bài tập 12: Giải phương trình: $x^3 - 12x + 16 = 0$.

Bài tập 13: Cho phương trình: $x^3 + (m - 1)x^2 - 3mx + 2m - 4 = 0$

- a) Chứng tỏ phương trình có một nghiệm không phụ thuộc m
- b) Tìm m để tập nghiệm của phương trình đã cho có đúng hai giá trị.

Bài tập 14: Cho phương trình: $x^3 + (m + 1)x^2 + 2(m - 2)x - 3m + 2 = 0$

- a) Định m để phương trình có 3 nghiệm dương phân biệt.
- b) Với những giá trị nào của m thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

Bài tập 15: Chứng minh rằng phương trình: $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$ có ít nhất 1 một nghiệm thực.

8. Phương trình bậc bốn:

8.1. Phương trình bậc bốn tổng quát: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, (a \neq 0)$

8.1.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Cách 1: Đưa về dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = f(x).g(x)$, ($f(x), g(x)$ là các đa thức bậc hai)

Sử dụng phương pháp đồng nhất hệ số để tìm hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$.

Cách 2: Thử nhẩm nghiệm $x = \frac{p}{q}$, với p, q lần lượt là ước của e và a .

8.1.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$ (1)

Giải

Phân tích: $x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)$ (2)

trong đó p, q, r, s là các hệ số nguyên chưa xác định).

Đồng nhất các hệ số của những số hạng cùng bậc hai về của đồng nhất thức ta có phương trình sau:

$$\begin{cases} p + r = -4 \\ s + q + pr = -10 \\ ps + qr = 37 \\ qs = -14 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp thế, ta được:

$p = -5; q = 2; r = 1; s = -7$.

Thay các giá trị p, q, r, s vào phương trình (1), ta có:

$$x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7)$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$(x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7) = 0$$

Giải phương trình tích này, ta được bốn nghiệm là:

$$x_1 = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}; x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

8.2. Phương trình trùng phương:

8.2.1. Kiến thức cơ bản:

Dạng phương trình: $ax^4 + bx^2 + c = 0, (a \neq 0)$ (1)

Cách giải:

Bước 1: Đặt: $t = x^2, (t \geq 0)$

Bước 2: Khi đó phương trình được viết lại là:

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (2)$$

Bước 3: Xét nghiệm của phương trình

Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì phương trình (1) cũng vô nghiệm.

Nếu phương trình (2) có nghiệm kép dương thì phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau.

Nếu phương trình (2) có nghiệm kép âm thì phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu phương trình (2) có hai nghiệm đều âm thì phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm âm và một nghiệm

dương thì phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau.

Nếu phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt đều dương thì phương trình (1) có hai cặp nghiệm đối nhau từng đôi một.

Quy tắc Đề các:

Nếu phương trình có bao nhiêu lần đổi dấu thì có bấy nhiêu nghiệm dương (nếu phương trình có nghiệm).

8.2.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Giải

Đặt: $x^2 = t \geq 0$.

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 5t - 36 = 0$

Giải phương trình bậc 2 này ta được hai nghiệm $t = 9$ và $t = -4$ (loại)

Xét với $t = 9 \Leftrightarrow x = 3$ và $x = -3$.

Suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 3$ và $x = -3$.

Bài tập 2: Giải phương trình: $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

Giải

Đặt: $x^2 = t \geq 0$.

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 20t + 64 = 0$

Giải phương trình này ta được hai nghiệm: $t = 4$ và $t = 16$.

Với $t = 4$ suy ra $x = 2$ và $x = -2$

Với $t = 16$ suy ra $x = 4$ và $x = -4$

Suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm

Bài tập 3: Cho phương trình: $x^4 - 2x^2 + 1 - m^2 = 0$.

Tìm giá trị m để phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = -1$.

Giải

Ta có: $x = 1$ là nghiệm, thay vào phương trình $\Leftrightarrow m = 0$

Ta có: $x = -1$ là nghiệm, thay vào phương trình $\Leftrightarrow m = 0$.

Bài tập 4: Cho phương trình: $x^4 + mx^2 - 1 = 0, (m \text{ là tham số})$

Tìm giá trị m để phương trình có nghiệm.

Giải

Nhận thấy hai hệ số $a.c = -1$ là số âm nên phương trình có nghiệm.

Bài tập 5: Giải phương trình: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Giải

Đặt: $t = x^2 \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 10t + 9 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm là $t = 1$ và $t = 9$.

Với $t = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1$.

Với $t = 9 \Rightarrow x = 3, x = -3$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x = -1, x = 1, x = 3, x = -3$.

Bài tập 6: Giải phương trình: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Giải

Nhận thấy tổng các hệ số cộng lại bằng 0 nên phương trình có nghiệm $x^2 = -1$ và $x^2 = 4$

Với $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ và $x = -2$

8.3. Dạng 3: Phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$.

8.3.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Xét $x = 0$ có là nghiệm của phương trình hay không, nếu có thì nhận một nghiệm.

Bước 2: Xét $x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$ax^2 + bx + c \pm \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + c = 0 \quad (*)$$

Đặt: $t = x + \frac{1}{x}$, điều kiện: $|t| \geq 2$.

Suy ra: $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \pm 2$

Thay vào phương trình (*), ta được phương trình:

$$a(t^2 \pm 2) + b.t + c = 0$$

Quy về phương trình bậc hai theo ẩn t ta được nghiệm t (nếu có), rồi từ nghiệm t ta suy ra nghiệm x (nếu có).

Bước 3: Thử lại và kết luận nghiệm.

8.3.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$

Giải

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Chia cả hai vế của phương trình cho x^2 , ta được: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$

Đặt: $t = \left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = t^2 - 2$

Khi đó phương trình viết lại là: $t^2 + 5t - 14 = 0$

giải phương trình này ta được $t = 2$, $t = -7$.

Với $t = 2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Với } t = -7 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) = -7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm

Bài tập 2: Giải phương trình: $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

Giải

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 4$$

Đặt: $t = x + \frac{1}{x}$ (điều kiện: $|t| \geq \sqrt{2}$)

phương trình tương đương với

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Xét } t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Xét } t = 3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là $x = 1$; $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

8.4. Dạng phương trình: $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$, ($c > 0$) (*)

8.4.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

$$\text{Đặt: } x = y - \frac{a+b}{2}.$$

Khi đó phương trình (*) trở thành: $\left(y + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(y - \frac{a-b}{2}\right)^4 = c$.

Đặt: $\alpha = \frac{a-b}{2}$ để được phương trình gọn hơn:

$$(y + \alpha)^4 + (y - \alpha)^4 = c \Leftrightarrow [(y + \alpha)^2 + (y - \alpha)^2]^2 - 2(y + \alpha)^2(y - \alpha)^2 = c.$$

$$\Leftrightarrow (2y^2 + 2\alpha^2)^2 - 2(y^2 - \alpha^2)^2 = c$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2\alpha^2 + 2\alpha^4 - c = 0.$$

Đây là phương trình trùng phương, đã có cách giải.

Lưu ý:

Giải phương trình trên ta được nghiệm y rồi suy ra nghiệm x cần tìm, chú ý phải thử lại để được nghiệm đúng.

8.4.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $(x + 3)^4 + (x + 1)^4 = 706$

Giải

$$\text{Đặt: } t = x + \frac{3+1}{2} \Rightarrow x = t - 2$$

Phương trình viết lại là:

$$(t + 1)^4 + (t - 1)^4 = 706$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 352 = 0$$

Giải phương trình này ta được $t^2 = 16$ và $t^2 = -22$ (loại)

$$\text{Với } t^2 = 16 \Leftrightarrow t = \pm 4.$$

$$\text{Xét } t = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Xét } t = -4 \Leftrightarrow x = -6.$$

Bài tập 2: Giải phương trình: $(x + 1)^4 + x^4 = 1$

Giải

$$\text{Đặt: } t = x - \frac{1}{2}$$

Phương trình viết lại là:

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 16t^4 + 24t^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = \frac{1}{4} \\ t^2 = -\frac{7}{4} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{2}$

Xét: $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Xét: $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$

Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x = 1$ và $x = 0$.

Bài tập 3: Giải phương trình sau: $(x - 2004)^4 + (x - 2006)^4 = 2$

Giải

Đặt $x = y + \frac{2004 + 2006}{2} = y + 2005$.

Giải phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2005$.

Bài tập 4: Giải phương trình sau: $(2x - 1)^4 + (2x - 3)^4 = 2$.

Giải

Đặt $x = y + \frac{1+3}{2} = y + 2$.

Giải phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Bài tập 5: Giải phương trình sau: $(4x + 3)^4 + (4x - 7)^4 = 14642$

Giải

Đặt: $x = y - \frac{3-7}{2} = y + 2$.

Giải phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

8.5. Dạng phương trình: $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = r$, (với $a + b = c + d$)

8.5.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Phương trình viết lại là:

$$[x^2 + (a + b)x + ab].[x^2 + (c + d)x + cd] = r$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + (a + b)x + ab].[x^2 + (a + b)x + cd] = r$$

Đặt: $t = x^2 + (a+b)x$

Khi đó phương trình trở thành

$$(t + ab)(t + cd) = r$$

$$\Leftrightarrow t^2 + (ab + cd)t + abcd - r = 0.$$

Bước 2: Giải phương trình bậc hai này theo ẩn t ta được nghiệm t (nếu có), rồi từ nghiệm t suy ra nghiệm x cần tìm (nếu có).

Bước 3: Thử lại và kết luận nghiệm.

8.5.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình sau: $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 120$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 120 \quad (2)$$

Đặt: $t = x^2 + 5x$.

Phương trình (2) trở thành:

$$(t + 4)(t + 6) = 120$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 10t - 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = -16 \end{cases}$$

Với $t = 6 \Rightarrow x^2 + 5x = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}$$

Với $t = -16 \Rightarrow x^2 + 5x = -16 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 16 = 0$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1; -6\}$.

Bài tập 2: Giải phương trình sau: $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = 9$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) = 9 \quad (2)$$

Đặt: $t = x^2 + 8x$.

Phương trình (2) trở thành

$$(t + 7)(t + 15) = 9$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 22t + 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -6 \\ t = -16 \end{cases}$$

Với $t = -6 \Rightarrow x^2 + 5x = -6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Với $t = -16 \Rightarrow x^2 + 5x = -16 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 16 = 0$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2; 3\}$.

Bài tập 3: Giải phương trình sau: $x(x - 2)(x + 1)(x + 3) = 72$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + x)(x^2 + x - 6) = 72 \quad (2)$$

Đặt: $t = x^2 + x$.

Phương trình (2) trở thành;

$$t(t - 6) = 72$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 6t - 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 12 \\ t = -6 \end{cases}$$

Với $t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$$

Với $t = -6 \Rightarrow x^2 + x = -6 \Leftrightarrow x^2 + x + 6 = 0$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-4; 3\}$.

Bài tập 4: Giải phương trình sau: $(x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) = 297$

Giải

Để ý thấy $(-1) + 5 = (-3) + 7$ cho nên ta biến đổi lại như sau:

$$\text{Phương trình: } \Leftrightarrow (x - 1)(x + 5)(x - 3)(x + 7) = 297$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 21) = 297$$

Đặt: $y = x^2 + 4x$. Khi đó phương trình trở thành:

$$(y - 5)(y - 21) = 297$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 26y - 192 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 32; y_2 = -6.$$

Tìm y theo x ta có nghiệm của phương trình.

Bài tập 5: Giải phương trình: $(x^2 + x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$

Giải

Phương trình viết lại là

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$$

$$\Leftrightarrow [(x + 1)(x + 4)] \cdot [(x + 2)(x + 3)] = 24$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24 \quad (1)$$

$$\text{Đặt: } t = x^2 + 5x + 4.$$

Phương trình (1) trở thành: $t(t+2) = 24$.

Giải phương trình này ta được: $t = 4$ và $t = -6$.

Với $t = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 4 \Leftrightarrow x = 0, x = -5$.

Với $t = -6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = -6$ phương trình vô nghiệm.

8.6. Dạng phương trình: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = rx^2$, (với $a.b = c.d$)

8.6.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Phương trình viết lại là

$$[x^2 + (a+b)x + ab].[x^2 + (c+d)x + cd] = rx^2$$

Xét $x=0$ xem có là nghiệm của phương trình không.

Bước 2: Với $x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho x^2 , ta được:

$$\left[x + (a+b) + \frac{ab}{x} \right] \cdot \left[x + (c+d) + \frac{cd}{x} \right] = r$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x + \frac{ab}{x} \right) + a+b \right] \cdot \left[\left(x + \frac{ab}{x} \right) + c+d \right] = r, \quad (\text{do } a.b = c.d)$$

Đặt: $t = x + \frac{ab}{x}$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$(t+a+b)(t+c+d) = r.$$

$$\Leftrightarrow t^2 + (a+b+c+d)t + (a+b)(c+d) - r = 0.$$

Bước 3: Giải phương trình để tìm nghiệm t (nếu có), rồi từ nghiệm t ta suy ra nghiệm x (nếu có).

8.6.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình sau: $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 18) = 168x^2$. (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x} + 7 \right) \left(x + \frac{6}{x} + 5 \right) = 168$$

Đặt: $y = x + \frac{6}{x}$.

$$\Leftrightarrow (y+7)(y+5) = 168$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 12y - 133 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ y = -19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{6}{x} = 7 \\ x + \frac{6}{x} = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, x = 6 \\ x = \frac{-19 \pm \sqrt{337}}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 1; 6; \frac{-19 - \sqrt{337}}{2}; \frac{-19 + \sqrt{337}}{2} \right\}$

8.7. Dạng phương trình hồi quy: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, ($a \neq 0$) trong đó $ad^2 = eb^2$
(*)

8.7.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải

Nếu $b = 0$ thì $d = 0$ phương trình trở thành phương trình trùng phương:

$$ax^4 + cx^2 + e = 0$$

Nếu $b \neq 0$ thì $d \neq 0$, điều kiện $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b} \right)^2$

Đặt: $\frac{d}{b} = t$ thì $e = at^2$ và $d = bt$ thì phương trình (*) trở thành:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0. \quad (**)$$

Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (**) nên ta chia 2 vế của phương trình (**) cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$ax^2 + bx + c \cdot \frac{bt}{x} + \frac{at^2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{t^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{t}{x}\right) + c = 0 \quad (***)$$

Đặt: $x + \frac{t}{x} = y$ (điều kiện: $y^2 \geq 4t$),

Suy ra: $x^2 + \frac{t^2}{x^2} + 2t = y^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{t^2}{x^2} = y^2 - 2t$

Phương trình (**) trở thành: $ay^2 + by + c - 2at = 0$ là phương trình bậc hai theo y ,
Ta sẽ tìm được nghiệm y , rồi suy ra x .

8.7.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình sau: $2x^4 - 21x^3 + 34x^2 + 105x + 50 = 0$

Giải

Đặt: $x - \frac{5}{x} = y$ ta thu được phương trình: $2y^2 - 21y + 54 = 0$ có nghiệm $y_1 = 6, y_2 = \frac{9}{2}$.

Với $y_1 = 6$ thì ta thu được các nghiệm $x_1 = 3 + \sqrt{14}, x_2 = 3 - \sqrt{14}$.

Với $y_2 = \frac{9}{2}$ thì ta thu được các nghiệm $x_3 = \frac{9 + \sqrt{161}}{4}, x_4 = \frac{9 - \sqrt{161}}{4}$.

Bài tập 2: Giải phương trình: $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (1)$

Giải

Ta có: $x \neq 0$ không là nghiệm của phương trình (1).

Chia hai vế của phương trình cho x^2 thì ta có phương trình tương đương:

$$2x^2 + 3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

Hay

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$$

Đặt: $y = x + \frac{1}{x}$ thì $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Phương trình (1) trở thành:

$$2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0$$

Hay

$$2y^2 + 3y - 20 = 0$$

Phương trình này có nghiệm là $y_1 = -4; y_2 = \frac{5}{2}$.

Vi vậy $x + \frac{1}{x} = -4$ và $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

Tức là: $x^2 + 4x + 1 = 0$ và $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Giải các phương trình trên ta tìm được nghiệm của phương trình (1) là:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}; x_3 = \frac{1}{2}; x_4 = 2.$$

8.8. Đưa về dạng phương trình bậc bốn về dạng cơ bản:

Bài tập 1: Giải phương trình: $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0 \quad (1)$

Giải

Phương trình (1) được viết thành:

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$$

hay

$$x^4 - (2a + 6)x^2 + 4x + a^2 + 2a = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) là phương trình bậc bốn đối với x (chưa có cách giải cụ thể)

Ta có thể viết phương trình (1) dưới dạng:

$$a^2 - 2(x^2 - 1)a + x^4 - 6x^2 + 4x = 0 \quad (3)$$

và xem (3) là phương trình bậc hai đối với a.

Với phương trình này, ta tìm được a theo x:

$$a_{1,2} = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + 6x^2 - 4x}$$

$$= x^2 - 1 \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$$

$$= x^2 - 1 \pm (2x - 1)$$

Giải phương trình bậc hai đối với x:

$$x^2 + 2x - a - 2 = 0 \quad (4)$$

và

$$x^2 - 2x - a = 0 \quad (5)$$

Ta tìm được nghiệm của phương trình (1) theo a.

Điều kiện để phương trình (4) có nghiệm là $3 + a \geq 0$ và các nghiệm của phương trình (4) là:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3 + a}$$

Điều kiện để phương trình (5) có nghiệm là $1 + a \geq 0$ và các nghiệm của phương trình (5) là:

$$x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1 + a}$$

Bài tập 2: Giải phương trình: $x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$ (1)

Giải

Phương trình (1) được viết dưới dạng:

$$x^4 - x^3 - x^2 - (4x^2 - 4x - 4) = 0$$

$$x^2(x^2 - x - 1) - 4(x^2 - x - 1) = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - x - 1) = 0$$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm là:

$$x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; x_4 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Bài tập 3: Giải phương trình: $32x^4 - 48x^3 - 10x^2 + 21x + 5 = 0$ (1)

Giải

Ta viết (1) dưới dạng:

$$2(16x^4 - 24x^3 + 9x^2) - 7(4x^2 - 3x) + 5 = 0$$

Đặt: $y = 4x^2 - 3x$ thì (1) trở thành

$$2y^2 - 7y + 5 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm: $y_1 = 1$ và $y_2 = \frac{5}{2}$.

Xét $y = 1$ thì $4x^2 - 3x - 1 = 0$

Xét $y = \frac{5}{2}$ thì $8x^2 - 6x - 5 = 0$

Từ đó ta có nghiệm của phương trình (1).

8.9. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho phương trình

$$x^4 + 2mx + 4 = 0$$

Tìm giá trị của m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32$$

(Đề thi vào lớp 10 ĐH KHTN, ĐH QG Hà Nội Năm 2003-2004)

Đáp số: $m = -\sqrt{6}$.

Bài tập 2: Tìm điều kiện của a và b để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt.

$$x^4 - 2(a^2 + b^2 - 1)x^2 + (a^2 - b^2 + 1) - 4a^2 = 0$$

Đáp số: $\begin{cases} a = b + 1 \\ b = a + 1 \end{cases}$

Bài tập 3: Cho phương trình: $x^4 - 2x^2 + m^2 = 0$. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài tập 4: Cho phương trình: $2x^4 - (m + 1)x^2 + (m - 1)^2 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm đối nhau.

Bài tập 5: Cho phương trình: $(2m + 1)x^4 - 3x^2 + 4m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt.

Bài tập 6: Giải phương trình sau: $36x^4 + 13x^2 + 1 = 0$

Bài tập 7: Giải phương trình sau: $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$

Bài tập 8: Giải phương trình sau: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Bài tập 9: Giải phương trình sau: $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$

Bài tập 10: Giải phương trình sau: $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

Bài tập 11: Giải phương trình: $8x^4 - 5x^3 + mx^2 + 5x + 8 = 0$.

a) Giải phương trình khi $m = -16$.

b) Tìm m để phương trình vô nghiệm

Đáp số:

a) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \frac{5 + \sqrt{281}}{16}, x_4 = \frac{5 - \sqrt{281}}{16}$

b) $m \leq \frac{-487}{32}$

Bài tập 12: Giải phương trình sau:

a) $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$

b) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$

c) $x^4 - 3x^3 + 3x - 1 = 0$

d) $x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 6x + 4 = 0$.

Bài tập 13: $(x^2 - (m + 1)x + m)(x^2 - (n - 1)x - n) = 0$

Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 14: Tìm m để phương trình $(2x + 3m)^4 + (2x + 4m)^4 = 17m^4$ có ít nhất hai nghiệm.

Bài tập 15: Giải phương trình sau:

a) $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 2$

b) $(2x + 1)^4 + (2x + 3)^4 = 82$

c) $(3x + 3)^4 + (3x + 5)^4 = 4$

d) $(x + 2)^4 + (x + 8)^4 = 272$

Bài tập 16: Giải phương trình sau:

a) $(x + \sqrt{2})^4 + (x + 1)^4 = 33 + 12\sqrt{2}$

b) $(x + 1)^4 = 2(x^4 + 1)$

Bài tập 17: Giải phương trình

$$(4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) = 4$$

Đáp số: $x = \frac{-11 + 2\sqrt{51}}{24}; x = \frac{-11 - 2\sqrt{51}}{24}$.

Bài tập 18: Giải các phương trình sau:

a) $(x + 1)(x + 5)(x + 10)(x + 2) = 750$

b) $(2x + 1)(2x + 3)(2x + 5)(2x + 7) = 169$

c) $(x + 3)(x + 5)(x + 7)(x + 9) = 121$

d) $(3x + 1)(3x + 2)(3x + 4)(x + 1) = \frac{64}{3}$

Bài tập 19: Giải các phương trình sau:

a) $(2x + 1)(x + 1)(2x + 3)(x + 2) = \frac{25}{64}$

b) $(5x + 3)(5x + 6)(5x + 9)(5x + 12) = 81$

c) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 3$

d) $(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 330$

e) $(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 3x + 2) = 3$

Bài tập 20: Giải phương trình: $4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) = 3x^2$

(Đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa, TPHCM năm 203-2004 và THPT Chuyên DHSP năm 2006-2007)

Đáp số: $x = -8, x = -\frac{15}{2}, x = \frac{-35 + \sqrt{265}}{4}, x = \frac{-35 - \sqrt{265}}{4}$.

Bài tập 21: Giải các phương trình sau:

a) $(x + 2)(x + 4)(x + 4)(x + 8) = x^2$

b) $(2x + 1)(2x + 3)(2x + 5)(2x + 15) = x^2$

c) $(4x^2 - 4x + 1)(x^2 - 4x + 4) = x^2$

d) $4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) = 3x^2$

9. Phương trình vô tỉ

9.1. Dạng 1: $\sqrt{A} = B$

9.1.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

Sau khi tìm nghiệm của bài toán xong rồi phải thử lại để tránh sự sai sót và có nghiệm chính xác nhất.

9.1.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} = 2x - 2$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 5 = (2x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x - 1)(2x - 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Suy ra phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{9}{2}$.

Bài tập 2: Giải phương trình: $\sqrt{(x^2 - 1)^2} + 1 = 2\sqrt{x^2 - 1}$

Giải

Điều kiện: $x \leq -1$ V $x \geq 1$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$(\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Bài tập 3: Giải phương trình sau: $\sqrt{2x + 5} - \sqrt{3x - 5} = 2$ (1)

Giải

Ta có phương trình tương đương:

$$\sqrt{2x + 5} = 2 + \sqrt{3x - 5}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ 3x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-5}{2} \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

Bình phương hai vế của (1) ta được:

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= 4 + 3x - 5 + 4\sqrt{3x - 5} \Leftrightarrow 4\sqrt{3x - 5} = -x + 6 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ 16(3x - 5) = x^2 - 12x + 36 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2 - 60x + 116 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 58(\text{loại}) \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện bài toán thì $x = 2$ (nhận)

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{2\}$

Bài tập 4: Giải phương trình: $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 10} = \sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 5}$

Giải

Điều kiện: $x \geq -1$.

Bình phương hai vế, phương trình trở thành:

$$2x + 11 + 2\sqrt{x^2 + 11x + 10} = 2x + 7 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 10}$$

$$\Leftrightarrow 2 + \sqrt{x^2 + 11x + 10} = \sqrt{x^2 + 7x + 10}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 11x + 14 + 4\sqrt{x^2 + 11x + 10} = x^2 + 7x + 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 11x + 10} = -x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 11x + 10 = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 9x = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

Lưu ý: Đối với các bài toán dạng này, bình phương hai vế chỉ sử dụng khi hai vế đều không âm.

9.2. Dạng 2: $\sqrt{a.f(x) + b} + \sqrt{c.f(x) + d} = 0$

9.2.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Tìm điều kiện nếu có.

Bước 2: Đặt $t = f(x)$

Khi đó phương trình trở thành

$$\sqrt{at + b} + \sqrt{ct + d} = 0$$

Bình phương hai vế lên và đưa về dạng:

$$\sqrt{g(x)} = h(x)$$

Dạng này quy về dạng cơ bản để giải phương trình.

Thử lại kết quả.

9.2.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 3x + 6} + \sqrt{2x^2 + 6x + 5} - 9 = 0$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + 3x + 6 \geq 0 \\ 4x^2 + 6x + 5 \geq 0 \end{cases} \text{ đúng với mọi } x.$$

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{(x^2 + 3x) + 6} + \sqrt{2(x^2 + 3x) + 5} - 9 = 0$$

$$\text{Đặt: } t = x^2 + 3x. \text{ điều kiện: } t \geq -\frac{9}{8}$$

Ta có:

$$\sqrt{t + 6} + \sqrt{2t + 5} = 9$$

$$\Leftrightarrow 3t + 11 + \sqrt{(1+6)(2t+5)} = 81, \quad \left(-\frac{9}{8} \leq t \leq \frac{70}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2t^2 + 17t + 10} = 70 - 3t$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 488t + 4780 = 0$$

Giải phương trình này ta được hai nghiệm: $t = 478$ (loại) và $t = 10$

$$\text{Với } t = 10 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 10 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

Giải phương trình này ra ta được hai nghiệm $x = 2$ và $x = -5$.

Bài tập 2: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}} + \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}} = 1$

Giải

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + 1}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + 1}} + 1 = 1 \quad (*)$$

Đặt: $t = 1 + \frac{1}{x^2 + 1} > 0$

Phương trình (*) trở thành:

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+1} = 1$$

Giải phương trình này vô nghiệm

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

9.3. Dạng 3: $a.f(x) + b = \sqrt{c.f(x) + d}$

9.3.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Đặt: $t = \sqrt{c.f(x) + d}$. Điều kiện: $t \geq 0$.

Suy ra: $\frac{t^2 - d}{c} = f(x)$

Bước 2: Biến đổi phương trình:

$$a\left(\frac{t^2 - d}{c}\right) + b = t$$

$$\Leftrightarrow at^2 - ct - ad + bc = 0.$$

Bước 3: Giải phương trình bậc hai này theo (t).

Thử lại kết quả.

9.3.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $x^2 + 2x = \sqrt{2x^2 + 4x + 8} + 20$

Giải

Đặt: $t = \sqrt{2x^2 + 4x + 8} \geq \sqrt{6}$

Khi đó phương trình viết lại là: $t^2 - 2t - 48 = 0$

Giải phương trình này ta được hai nghiệm $t = 8$ và $t = -6$ (loại)

Với $t = 8 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 4x + 8} = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 28 = 0$

Giải phương trình này ta được: $x = -1 - \sqrt{29}$ và $x = -1 + \sqrt{29}$.

9.4. Dạng 4: $a\sqrt{(bx+c)} + d\sqrt{(ex+g)} + \sqrt{(bx+c)(ex+g)} + h(x) = 0$

9.4.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Tìm điều kiện bài toán.

Đặt: $t = a\sqrt{(bx+c)} + d\sqrt{(ex+g)}$

Bước 2: Bình phương hai vế lên ta được:

$$\sqrt{(bx+c)(ex+g)} = \frac{t^2 - (a^2b + d^2e)x - (a^2c + d^2g)}{2}$$

Bước 3: Đưa phương trình về dạng:

$$At^2 + Bt + C = 0.$$

Bước 4: Giải phương trình và tìm nghiệm t rồi suy ra nghiệm x nhưng chú ý thử lại để tránh sai sót.

9.4.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \geq 1 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$

Đặt: $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} \geq 0$.

$$t^2 = 2x + 2 + 2\sqrt{(x-1)(x+3)}$$

Suy ra: $2\sqrt{(x-1)(x+3)} = t^2 - 2x - 2$

Phương trình đã cho trở thành:

$$t + t^2 - 2x - 2 = 4 - 2x$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm là $t = 2$; $t = -3$ (loại).

Xét $t = 2$ thì $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 3} = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 = (1 - x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 4x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Bài tập 2: Giải phương trình: $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

Giải

Ta có:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2 = 1 + 2\sqrt{x-x^2}$$

Đặt: $t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$, ($t \geq 0$)

Suy ra: $\sqrt{x-x^2} = \frac{t^2-1}{2}$

Phương trình trở thành:

$$1 + \frac{t^2-1}{2} = t$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Với $t = 1$, ta có phương trình:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Với $t = 2$, ta có phương trình:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-x^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{9}{4} = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$; $x = 1$.

9.5. Dạng 5: $a\sqrt{\frac{bx+m}{cx+n}} + d\sqrt{\frac{cx+n}{bx+m}} + e = 0, (a \neq 0)$

9.5.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Tìm điều kiện bài toán. Đặt: $t = \sqrt{\frac{bx+m}{cx+n}} > 0$,

Khi đó: $\sqrt{\frac{cx+n}{bx+m}} = \frac{1}{t}$

Phương trình viết lại là $at + b\frac{1}{t} + c = 0$.

Bước 2: Quy phương trình về dạng: $at^2 + ct + b = 0$.

Bước 3: Giải phương trình.

Lưu ý: Thử lại kết quả.

9.5.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ \frac{x-1}{x+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > -1 \end{cases}$$

Đặt: $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{t}$

Phương trình viết lại là:

$$t^2 - 3t - 2 = 0$$

Giải phương trình này ta được hai nghiệm: $t = 2$ và $t = -\frac{1}{2}$ (loại)

Với $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 4x-4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.

9.6. Dạng 6: $a\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} + b\sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)} = c$

9.6.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Tìm điều kiện bài toán: $g(x) \geq 0$

Đặt: $t = \sqrt{g(x)} \geq 0$. (Điều kiện của t)

Rút x theo t.

Bước 2: Giải phương trình theo t.

Bước 3: Thử lại kết quả.

9.6.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1$

Giải

Đặt: $t = \sqrt{x-2} \geq 0$

Suy ra: $x = t^2 + 2$.

Phương trình trở thành:

$$\sqrt{t^2 - 4t + 4} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |t-2| + |t-3| = 1$$

Ta có bảng xét dấu:

t	2	4
t - 2	- 0 +	+
t - 4	-	- 0 +

Xét: $t < 2$.

$$|t-2| + |t-3| = 1$$

$$\Leftrightarrow -(t-2) - (t-4) = 1$$

$$\Leftrightarrow -t + 2 - t + 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow -2t + 6 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2t = 5$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5}{2} > 2 \text{ (loại)}$$

Xét: $2 < t < 4$.

$$|t-2| + |t-4| = 1$$

$$\Leftrightarrow t-2 - (t-4) = 1$$

$$\Leftrightarrow t-2 - t + 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1 \text{ (vô lí)}$$

Xét: $t > 4$

$$|t-2| + |t-4| = 1$$

$$\Leftrightarrow t-2 + t-4 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2t - 6 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2t = 7$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{7}{2} < 4 \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài tập 2: Giải phương trình: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2$

Giải

Nhận thấy: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 1$

Đặt: $t = \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} > 0$

Khi đó phương trình trở thành:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Với $t = 1$, ta có phương trình:

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

9.7. Dạng 7: $\alpha u + \beta v = \sqrt{mu^2 + nv^2}$, với α, β, m, n là những hằng số.

9.7.1. Kiến thức cơ bản:

Phương trình dạng này thường khó "nhận biết" hơn các dạng trên.

Cách giải:

Đặt ẩn số phụ u và v .

Lập phương trình theo u, v

Giải phương trình tìm nghiệm u theo v (hoặc v theo u).

(lưu ý: Hai vế phải không âm)

9.7.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $x^2 + 3\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^4-x^2+1}$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x^2 \\ v = \sqrt{x^2-1} \end{cases}$$

Điều kiện: $u, v \geq 0$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$u + 3v = \sqrt{u^2 - v^2}$$

$$\Leftrightarrow (u + 3v)^2 = u^2 - v^2$$

$$\Leftrightarrow 2v(5v + 3u) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = -\frac{3}{5}u \text{ (loại)} \end{cases}$$

Xét $v = 0$ thì $\sqrt{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1; x = -1$.

Bài tập 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

Giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế ta được:

$$\sqrt{(x^2 + 2x)(2x - 1)} = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 + 2x)(2x - 1)} = (x^2 + 2x) - (2x - 1)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x^2 + 2x \\ v = 2x - 1 \end{cases}$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$uv = u^2 - v^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}v \text{ (loại)} \\ u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}v \end{cases}$$

Xét $u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}v$ ta có phương trình:

$$x^2 + 2x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(2x - 1) \Leftrightarrow 2x^2 + (2 - 2\sqrt{5})x + 1 + \sqrt{5} = 0$$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

9.8. Đưa phương trình vô tỉ phức tạp về dạng phương trình cơ bản:

Bài tập 1: Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3(x^2 - x - 1)} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \leq -\sqrt{2} \\ x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Nhận thấy: $(3x^2 - 5x + 1) - 3(x^2 - x - 1) = -2(x - 2)$

Và $x^2 - 2 - (x^2 - 3x + 4) = 3(x - 2)$

Ta có phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{3(x^2 - x - 1)} &= \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4} \\ \Leftrightarrow \frac{-2(x - 2)}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{3(x^2 - x - 1)}} &= \frac{3(x - 2)}{\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left[\frac{2}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{3(x^2 - x - 1)}} + \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Vì } \frac{2}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1} + \sqrt{3(x^2 - x - 1)}} + \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} > 0$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Bài tập 2: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x^2+3x+2}$

Giải

Ta có phương trình tương đương:

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x+1} \sqrt[3]{x+2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+1} - 1)(\sqrt[3]{x+2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$; $x = -1$.

Bài tập 3: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2+x}$

Giải

$x = 0$: không phải là nghiệm của phương trình.

$x \neq 0$: Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[3]{x}$, ta được:

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} + \sqrt[3]{x} = 1 + \sqrt[3]{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1 \right) (\sqrt[3]{x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1 \\ \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Bài tập 4: Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}$

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq \sqrt{3}$.

Phương trình đã cho tương đương:

$$x^3 + \sqrt{3}x^2 + x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{10}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}} \text{ (thỏa mãn bài toán)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 5: Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$

Giải

Điều kiện: $x \geq 5$.

Chuyển vế, bình phương ta được:

$$\sqrt{5x^2+14x+9} = 5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}$$

Nhận xét:

Không tồn tại số α, β để: $2x^2 - 5x + 2 = \alpha(x^2 - x - 20) + \beta(x + 1)$

Ta có: $(x^2 - x - 20)(x + 1) = (x + 4)(x - 5)(x + 1) = (x + 4)(x^2 - 4x - 5)$

Phương trình được viết lại là: $2(x^2 - 4x - 5) + 3(x + 4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x + 4)}$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x^2 - 4x - 5 \\ v = x + 4 \end{cases}$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$2u + 3v = 5\sqrt{uv} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = \frac{9}{4}v \end{cases}$$

Xét $u = v$ ta có phương trình:

$$x^2 - 4x - 5 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{61}}{2} \end{cases} \text{ (loại)}$$

Xét $u = \frac{9}{4}v$ ta có phương trình:

$$x^2 - 4x - 5 = \frac{9}{4}(x + 4) \Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{-7}{4} \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 8$; $x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$.

9.9. Bài tập tự luyện.

Bài tập 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt[3]{x-1} - 2m\sqrt[3]{x-2} = (8-4m)\sqrt[6]{(x-1)(x-2)}$$

Đáp số: $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Bài tập 2: Giải phương trình: $\sqrt[100]{\frac{1}{x-1}} + 2\sqrt[100]{\frac{1}{x-2}} = 3\sqrt[2002]{\frac{1}{x^2-3x+2}}$

Đáp số: $x = \frac{2-2^{2002}}{1-2^{2002}}$

Bài tập 3: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x-1}} = 3+x$

Đáp số: $x = -3, x = -2$

Bài tập 4: Giải phương trình: $x + y + z + 4 = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-3} + 6\sqrt{z-5}$

Đáp số: $x = 2; x = 7; x = 14.$

Bài tập 5: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{2x+3}{2-x}} + \sqrt{\frac{x+3}{3-x}} = 1$

Đáp số: Vô nghiệm

Bài tập 6: Giải các phương trình sau:

- $\sqrt{x^2+5x+1} = 2x-1$
- $\sqrt{2x+3} + \sqrt{5-8x} = \sqrt{4x+7}$
- $x^2 + x + 6\sqrt{x+2} = 18$
- $2\sqrt{1-x^3} = x^3 + 2 \quad (1)$

(Đề thi HSG tỉnh Kiên Giang năm học 2005 - 2006)

Bài tập 7: Giải các phương trình sau: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2 \quad (1)$

(Đề thi HSG Tỉnh Kiên Giang năm học 2007 - 2008)

- $\sqrt{x^2-4x+3} = 4x-x^2$
- $\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x-1} = 4$
- $\sqrt{x^2-2x-3} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x-3}$

Bài tập 8: Giải các phương trình sau:

- $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0$

b) $2x^2 + 2\sqrt{3x} - 3 = 0$

c) $\sqrt[3]{x^3+2} + \sqrt[3]{\frac{1}{x^3+2}} = 2$

Bài tập 9: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x+3}}+2=\frac{x+1}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=5$

c) $\sqrt{x-5}-\frac{x-14}{3+\sqrt{x-5}}=3$

d) $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x-1}}=3+x$

e) $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0$

f) $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=1$

h) $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

i) $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

Đáp số:

h) $x=1-\sqrt{2}; x=2+\sqrt{3}$.

i) $x=\frac{11-\sqrt{17}}{2}$

Bài tập 10: Giải các phương trình sau:

a) $3x^2+6x+20=\sqrt{x^2+2x+8}$

b) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$

c) $\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{7-\sqrt{x}}=4$.

Bài tập 11: Giải các phương trình sau:

a) $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$

b) $\sqrt{2-x^2}=(2-\sqrt{x})^2$

c) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$

d) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{17-x}=3$

e) $x^2+\sqrt{x+2006}=2006$

Đáp số:

a) $x=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}; x=2$

b) $x=1$. (Đặt: $u=\sqrt{x}; v=2-\sqrt{x}$)

c) $x=-2$

d) $x=1; x=16$. (Đặt: $u=\sqrt[4]{x}; v=\sqrt[4]{17-x}$)

e) $x=0$.

10. Phương trình mũ:

10.1. Kiến thức cơ bản:

Định nghĩa:

$$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số } a} \quad (n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 1, a \in \mathbb{R})$$

$a^1 = a$, mọi a

$a^0 = 1$, mọi $a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 1, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \left(r = \frac{m}{n}, a > 0; m, n \in \mathbb{N}\right)$

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, (a > 0; m, n \in \mathbb{N})$

Trong biểu thức a^n , thì a gọi là cơ số, n gọi là số mũ (lũy thừa).

Tính chất:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Chú ý:

0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

Lũy thừa với số mũ nguyên có đầy đủ tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên dương.

10.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $3^{2x} - (2^x + 9) \cdot 3^x + 9 \cdot 2^x = 0$

Giải

Đặt: $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó phương trình tương đương với:

$$t^2 - (2^x + 9) \cdot t + 9 \cdot 2^x = 0$$

Tính biệt thức δ , ta có:

$$\delta = (2^x + 9)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2^x = (2^x - 9)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = 2^x \end{cases}$$

Với $t = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$

Với $t = 2^x \Leftrightarrow 3^x = 2^x \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 0$; $x = 2$.

10.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a) $9^{x+1} = 27^{2x+1}$

b) $2^{x^2-3x+2} = 4$

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a) $3^{2x+8} - 4 \cdot 3^{x+5} + 27 = 0$

b) $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$

c) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$

d) $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$

e) $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$

f) $2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 14^x + 7 \cdot 7^{2x} = 0$

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a) $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$

b) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$

c) $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$

d) $25^x + 10^x = 2^{2x+1}$

e) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 6$

f) $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$

Đáp số: a) $x = \pm 1$, b) $x = 0$, c) $x = 0$, d) $x = 0$, e) $x = \pm 2$, f) $x = 0$.

Bài tập 4: Giải các phương trình sau:

a) $8 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x = 24 + 6^x$

b) $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$

c) $12 \cdot 3^x + 3 \cdot 15^x - 5^{x+1} = 20$.

11. Giải phương trình bằng cách đánh giá trình chất hai vế.

11.1. Kiến thức cơ bản:

Định lý 1: Với $A \geq 0, B \geq 0$ thì $A + B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

Định lý 2: Với A, B bất kỳ thì $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

Định lý 3: Với $A \leq K$ và $B \geq K$ (K là hằng số) thì $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = K \\ B = K \end{cases}$

Hay $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq a \\ g(x) \leq a \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) = a$

Lưu ý:

(i) Ta có thể biến đổi phương trình thành dạng tổng các bình phương:

$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + \dots + f_n^2(x) = 0$$

Khi đó $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0$

Nghiệm của phương trình là nghiệm chung của $f_i(x) = 0, i = \overline{1, n}$

(ii) Một số tính chất cơ bản thường dùng:

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq x \Rightarrow x^n \geq x, \forall n \in \mathbb{N}.$$

11.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình sau: $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$.

Giải

Phương trình trên tương đương với:

$$\sqrt{3(x+1)+4} + \sqrt{5(x+1)+9} = 5 - (x+1)^2$$

Nhận xét:

$$\begin{cases} \sqrt{3(x+1)+4} + \sqrt{5(x+1)+9} \geq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5 \\ 5 - (x+1)^2 \leq 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

Bài tập 2: Giải phương trình sau: $x^4 - x^2 + 3x + 5 - 2\sqrt{x+2} = 0$

Giải

Điều kiện: $x \geq -2$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x^2 + 2x + 1) + (x^4 - 2x^2 + 1) + (x + 2 - 2\sqrt{x+2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (x^2 - 1)^2 + (\sqrt{x+2} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

Bài tập 3: Giải phương trình sau: $\sqrt{5-x^6} - \sqrt[3]{3x^4-2} = 1$

Giải

Điều kiện: $-\sqrt[6]{5} \leq x \leq \sqrt[6]{5}$

Phương trình tương đương với $\sqrt{5-x^6} = \sqrt[3]{3x^4-2} + 1$

Ta thấy phương trình có nghiệm $|x| = 1$, nghĩa là $x = \pm 1$.

Khi $|x| > 1$

$$\begin{cases} \sqrt{5-x^6} < \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt[3]{3x^4-2} + 1 > \sqrt[4]{1} + 1 = 2 \end{cases}$$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Khi $|x| < 1$

$$\begin{cases} \sqrt{5-x^6} > \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt[3]{3x^4-2} + 1 < \sqrt[4]{1} + 1 = 2 \end{cases}$$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$; $x = -1$.

Bài tập 4: Giải phương trình sau: $\sqrt{1-x^2} + \sqrt[4]{x^2+x+1} + \sqrt[6]{1-x} = 1$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x^2+x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cup x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1$$

Đặt: $a = \sqrt{1-x^2}$, $b = \sqrt[4]{x^2+x+1}$, $c = \sqrt[6]{1-x}$, thì ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^4+c^6=1 \Rightarrow 0 \leq a, b, c \leq 1 \\ a, b, c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \leq a \\ b^4 \leq b \\ c^6 \leq c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = a^2 + b^4 + c^6 \leq a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b^4 = b \\ c^6 = c \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta tìm được $a = b = c = 0$.

Từ đó ta tìm được $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Bài tập 5: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} = 0$ (1)

Giải

Điều kiện: $x < 2$

Với phương trình dạng này ta thường dự đoán nghiệm là các giá trị của x mà biểu thức dưới căn nhận giá trị là một số chính phương. Nhận thấy nghiệm của (1) phải lớn hơn * Bằng cách thử ta

thấy rằng (1) có một nghiệm là $x = \frac{3}{2}$.

Ta chứng minh nghiệm đó là duy nhất của (1).

Thật vậy:

$$\text{Xét } x < \frac{3}{2} \text{ ta có } \sqrt{\frac{6}{3-x}} < 2 \text{ và } \sqrt{\frac{8}{2-x}} < 4$$

$$\text{Do đó } \sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} < 6.$$

Suy ra (1) không có nghiệm trong $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$

$$\text{Xét } \frac{3}{2} < x < 2, \text{ chứng minh tương tự ta có: } \sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} > 6$$

Suy ra (1) không có nghiệm trong $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

Vậy (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$

Ta thấy giải phương trình bằng cách đánh giá này thì điều quan trọng là phải đoán được nghiệm của nó. Để đoán nghiệm ta nên chỉ ra khoảng chứa nghiệm và xét trường hợp đặc biệt để tìm ra nghiệm trong đó.

(Trích từ báo THPT số 346)

Bài tập 6: Giải phương trình sau: $3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(1 + \sqrt{1 + x + x^2}) = 0$ (1)

Giải

Ta có phương trình tương đương:

$$\Leftrightarrow 3x(2 + \sqrt{(3x)^2 + 3}) + (2x + 1)(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(2 + \sqrt{(3x)^2 + 3}) = -(2x + 1)(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3})$$

Nhận thấy nếu $3x = -(2x + 1) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$ thì các biểu thức trong dấu căn ở hai vế bằng nhau.

Vậy $x = -\frac{1}{5}$ là một nghiệm của (1). Hơn nữa, nghiệm của (1) nằm trong khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Ta chứng minh $x = -\frac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất của (1).

Xét $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{5}$, ta có $3x < -2x - 1 < 0$

$$\Leftrightarrow (3x)^2 > (2x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 + \sqrt{(3x)^2 + 3} > 2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3}.$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} 3x(2 + \sqrt{(3x)^2 + 3}) &> -(2x + 1)(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3}) \\ \Leftrightarrow 3x(2 + \sqrt{(3x)^2 + 3}) + (2x + 1)(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3}) &> 0 \end{aligned}$$

Vậy (1) không có nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right)$.

Chứng minh tương tự ta cũng đi đến (1) không có nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{1}{5}; 0\right)$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = -\frac{1}{5}$.

(Trích từ báo THPT số 346)

Bài tập 7: Giải phương trình sau: $\sqrt{1 + \sqrt{2x - x^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{2x - x^2}} = 2(x - 1)^4(2x^2 - 4x + 1)$ (1)

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 2$.

Đặt: $t = (x - 1)^2$, ta có: $0 \leq t \leq 1$.

Phương trình (1) trở thành: $\sqrt{1 + \sqrt{1 - t}} + \sqrt{1 - \sqrt{1 - t}} = 2t^2(2t - 1)$

Nhận thấy $2t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2}$

Bình phương hai vế và rút gọn ta được:

$$1 + \sqrt{t} = 2t^4(2t - 1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3\sqrt{t}} = 2(2t - 1)^2$$

Vì $t \leq 1$ nên $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3\sqrt{t}} \geq 2$

Từ đó suy ra: $t = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Bài tập 8: Giải phương trình sau: $\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4)$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq 1 \cup x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Gọi vế trái và vế phải của (1) thứ tự là A và B.

Áp dụng BĐT Bunhiacovski cho hai bộ số $(1, 1, -x)$ và $(\sqrt{3x^2-1}, \sqrt{x^2-x}, \sqrt{x^2+1})$.

Ta có: $A \leq \sqrt{(x^2+2)(5x^2-x)}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Do $x \geq 1 \cup x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $5x^2 - x > 0$.

Có nghiệm trong khoảng $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Áp dụng BĐT CauChy, ta có:

$$B = \frac{1}{2\sqrt{2}}[5x^2-x+2(x^2+2)] \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)} = \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$ và $x = \frac{4}{3}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -1$; $x = \frac{4}{3}$.

Bài tập 9: Giải phương trình sau:

$$\sqrt{13x^2-6x+10} + \sqrt{5x^2-13x+\frac{17}{2}} + \sqrt{17x^2-48x+36} = \frac{1}{2}(36x-8x^2-21) \quad (1)$$

Giải

Gọi vế trái và vế phải của (1) theo thứ tự là C và D. Ta có:

$$C = \sqrt{(3x+1)^2 + (2x-3)^2} + \sqrt{\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{x^2 + (4x-6)^2}$$

$$\geq |3x+1| + \left|2x-\frac{5}{2}\right| + |x|$$

$$\geq \left|3x+1+2x-\frac{5}{2}+x\right| = \left|6x-\frac{3}{2}\right| \geq 6x-\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{3}{2}$.

Mặt khác :

$$D = \frac{1}{2}[12x-3-2(4x^2-12x+9)] = \frac{1}{2}[12x-3-2(2x-3)^2] \leq \frac{1}{2}(12x-3) = 6x-\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{3}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

11.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải phương trình sau: $x^2 + 3x + 3 = \sqrt{2x+3}$

Bài tập 2: Giải phương trình sau: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}$

Bài tập 3: Giải phương trình sau: $x^2 - \sqrt{x + 5} = 5$

Bài tập 4: Giải phương trình sau: $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$

(Đề thi OLYMPIC 30/4/2007)

Bài tập 5: Giải phương trình sau: $x^2 - \sqrt{x + 5} = 5$

Bài tập 6: Giải phương trình sau: $\sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} = 1$

Bài tập 7: Giải phương trình sau: $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 4$

Bài tập 8: Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

Bài tập 9: Giải phương trình sau: $(x + 2)\sqrt{x + 1} = 2x + 1$

Bài tập 10: Giải phương trình sau: $\sqrt{(x + 2)(2x - 1)} - 3\sqrt{x + 6} = 4 - \sqrt{(x + 6)(2x - 1)} + 3\sqrt{x + 2}$

Bài tập 11: Giải phương trình sau: $32x^2 - 4x + 1 = \sqrt{4x(8x + 1)}$

Bài tập 12: Giải phương trình sau: $x^2 + \sqrt{x + 1} = 1$

(Đề thi HSG tỉnh Kiên Giang năm học 2006 - 2007)

12. Giải phương trình bằng cách sử dụng tính đơn điệu của hàm số:

12.1. Kiến thức cơ bản:

Định nghĩa: Cho hàm số: $y = f(x)$.

$f(x)$ đồng biến (tăng) trên $(a; b)$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

$f(x)$ nghịch biến (giảm) trên $(a; b)$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

$f(x)$ đồng biến hay nghịch biến trên $(a; b)$ gọi là đơn điệu trên $(a; b)$.

Ta thường sử dụng các tính chất sau:

Tính chất:

Nếu $f(x)$ liên tục và đơn điệu trên $(a; b)$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$, với mọi $u, v \in (a; b)$.

Bổ đề bổ trợ:

(1) Nếu $f(x)$ liên tục và đơn điệu trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm $x_0 \in (a; b)$.

(2) Nếu $f(x), g(x)$ liên tục và đơn điệu ngược chiều trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(a; b)$.

Cách giải:

Từ tính đồng biến, nghịch biến của hàm số dễ dàng suy ra kết quả sau:

i) Xét phương trình $f(x) = m$ trên miền xác định D . Nếu $f(x)$ là hàm số luôn luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D , mà phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên D , thì phương trình đó có nghiệm duy nhất trên D .

ii) Xét phương trình $f(x) = g(x)$ trên D . Nếu $f(x)$ là hàm số đồng biến trên D , còn $g(x)$ là hàm số nghịch biến trên D , thì nó cũng có nghiệm duy nhất trên D .

Từ kết quả này cho phép áp dụng để giải một phương trình đặc biệt. Lược đồ chung của phương pháp này như sau:

Bước 1: Quy phương trình về một trong hai dạng trên (đồng biến hoặc nghịch biến)

Bước 2: Chỉ ra một nghiệm của phương trình $x = x_0$.

Bước 3: Dựa và tính duy nhất, kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

12.2. Bài tập áp dụng:

Giải phương trình sau: $2^x = 3 - x$.

Giải

Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình. Bằng đồ thị chúng ta có thể kiểm chứng nghiệm này là duy nhất.

Thật vậy, với $x > 1$, ta có: $2^x > 2^1 = 2$ và $3 - x < 3 - 1 = 2$.

Từ đó suy ra, $2^x > 3 - x$, nghĩa là các giá trị $x > 1$ không thể là nghiệm của phương trình.

Lập luận tương tự với $x < 1$.

Ta có $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

Lưu ý: Xét thấy 2^x là hàm tăng và $3 - x$ là hàm giảm nên tồn tại x_0 nếu có sẽ thỏa mãn $2^x = 3 - x$.

12.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải các phương trình sau: $3^x + 4^x = 5^x$

Bài tập 2: Giải các phương trình sau: $2^x = 1 + 3^{\frac{x}{2}}$

Bài tập 3: Giải các phương trình sau: $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2x + 1$.

**CHUYÊN ĐỀ 15
HỆ PHƯƠNG TRÌNH**

1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

1.1. Kiến thức cơ bản:

Dạng hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Cách giải:

Cách 1: Dùng phương pháp thế:

Bước 1: Từ phương trình (1), ta có:

$$a_1x = c_1 - b_1y \Rightarrow x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1} \quad (3)$$

Bước 2: Thay vào phương trình (2), ta được:

$$\begin{aligned} a_2 \cdot \frac{c_1 - b_1y}{a_1} + b_2y &= c_2 \\ \Leftrightarrow a_2c_1 - a_2b_1y + a_1b_2y &= a_1c_2 \\ \Leftrightarrow y(a_1b_2 - a_2b_1) &= a_1c_2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1c_2} \end{aligned}$$

Từ đó, thay vào (3) để tìm ra x.

Với giá trị của x tìm được thay vào (3) để tìm giá trị của x.

$$\begin{aligned} x &= \frac{c_1 - b_1 \left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1c_2} \right)}{a_1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{ab'c - a'bc' - abc' + a'bc}{a(ab' - a'b)} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \end{aligned}$$

Cách 2: Giải bằng phương pháp cộng đại số

Bước 1: Nhân các vế của phương trình với một số thích hợp sao cho 1 hệ số nào đó của 1 ẩn ở hai phương trình là đối nhau.

Bước 2: Cộng hai phương trình với nhau để quy hệ phương trình về phương trình bậc nhất một ẩn, rồi giải tìm ra một ẩn.

Bước 3: Thay vào một trong hai phương trình để tìm nghiệm còn lại.

Cách 3: Phương pháp sử dụng định thức Cramer:

Định thức của hệ: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1;$

Định thức của x: $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1;$

Định thức của y: $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$

Biện luận nghiệm:

Nếu $D \neq 0$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ và } y = \frac{D_y}{D}$$

Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $D = D_x = D_y = 0$ có ba trường hợp:

$a = a' = b = b'$ và $(c \neq 0$ hoặc $c' \neq 0)$: hệ phương trình vô nghiệm.

$a = a' = b = b'$ và $c = c' = 0$: hệ phương trình có vô số nghiệm.

a, a', b', b' không cùng triệt tiêu: hệ có vô số nghiệm.

Các dạng toán thường gặp đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

Dạng 1: Giải hệ phương trình.

Dạng 2: Tìm giá trị của tham số (m) để hệ phương trình có nghiệm duy nhất, vô nghiệm, có vô số nghiệm.

Dạng 3: Tìm giá trị của tham số (m) sao cho nghiệm của hệ thỏa mãn biểu thức cho trước.

Thông thường ta phải giải hệ theo tham số m để tìm $x(m), y(m)$.

Sau đó thay vào biểu thức để tìm giá trị m cần tìm.

1.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 & (1) \\ 2x + 3y = 3 & (2) \end{cases}$$

Giải

Bằng phương pháp rút thế.

Từ phương trình (1), suy ra: $x = 1 - 2y$

Thay vào phương trình (2), ta được:

$$2(1 - 2y) + 3y = 3$$

$$\Leftrightarrow 2 - 4y + 3y = 3$$

$$\Leftrightarrow y = -1$$

$$\text{Với } y = -1 \Rightarrow x = 3$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (3, -1)$.

Bài tập 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 2 \end{cases}$$

Tìm giá trị m để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq \pm 1.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m \neq 1; m \neq -1$.

Bài tập 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 3my = 4 \\ x + ny = 1 \end{cases}$$

Tìm giá trị m và n để hệ phương trình có nghiệm $x = 2$ và $y = -1$.

Giải

Thay $x = 2$ và $y = -1$ vào hệ phương trình ta có:

$$\begin{cases} 4 - 3m = 4 \\ 2 - n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy $m = 0; n = 1$ là hai giá trị cần tìm.

Bài tập 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Giải

$$\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3} \quad (2)$$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2), ta được:

$$x - y = -1$$

$$\Leftrightarrow x = y - 1$$

Thay vào phương trình (2) ta có:

$$y = 1 \Rightarrow x = 0$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (0, 1)$

Bài tập 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + py = 5 \\ qx + 5y = 14 \end{cases}$$

Tìm giá trị p và q để hệ phương trình có nghiệm $(1, 2)$.

Giải

Thay nghiệm $(x; y) = (1, 2)$ vào phương trình, ta được:

$$\begin{cases} 1 + 2q = 5 \\ p + 10 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2q = 4 \\ p = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ p = 4 \end{cases}$$

Vậy $q = 2$; $p = 4$ là hai giá trị cần tìm

Bài tập 6: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ 2x + (m + 1)y = 4 \end{cases}$$

Tìm giá trị m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x > 1$ và $y < 2$.

Giải

Giải hệ phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x = \frac{1 - 3m}{1 - m} \\ y = \frac{2}{1 - m} \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x > 1$ và $y < 2$

$$\begin{cases} \frac{1 - 3m}{1 - m} > 1 \\ \frac{2}{1 - m} < 2 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > -1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m > 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $(m > 1) \vee (-1 < m < 2)$.

Bài tập 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} px + 2y = 4 \\ 3x + 3y = q \end{cases}$$

Tìm giá trị p và q để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Giải

Hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{p}{3} = \frac{2}{3} = \frac{4}{q}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p}{3} = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{4}{q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 6 \end{cases}$$

Vậy $p = 2$; $q = 6$ là hai giá trị cần tìm.

Bài tập 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$$

Xác định giá trị m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn hệ thức:

$$x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}$$

Giải

Áp dụng công thức CRAMER, ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3 > 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & m \end{vmatrix} = 2m + 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5m - 6$$

Hệ có nghiệm $x = \frac{2m+5}{m^2+3}$ và $y = \frac{5m-6}{m^2+3}$

Để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện khi:

$$\begin{aligned} \frac{2m+5}{m^2+3} + \frac{5m-6}{m^2+3} &= 1 - \frac{m^2}{m^2+3} \\ \Leftrightarrow \frac{7m-1}{m^2+3} &= \frac{3}{m^2+3} \\ \Leftrightarrow 7m &= 4 \Leftrightarrow m = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Bài tập 9: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$$

Định m là số nguyên dương sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) là số nguyên.

Giải

Giải hệ phương trình có nghiệm: $x = \frac{m-1}{m+2} = 1 - \frac{3}{m+2}$ và $y = \frac{2m+1}{m+2} = 2 - \frac{3}{m+2}$

Để thấy rằng m + 2 phải là ước của 3:

$$\begin{cases} m+2=1 \\ m+2=-1 \\ m+2=3 \\ m+2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=-3 \\ m=1 > 0 \\ m=-5 \end{cases}$$

Chỉ có m = 1 thỏa mãn

Bài tập 10: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + (m-1)y = m+1 \\ (m+1)x + y = 3 \end{cases}$$

Tìm giá trị m để hệ phương trình có nghiệm.

Giải

Áp dụng công thức CRAMER, ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & m-1 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - m^2$$

Để hệ phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow D \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - m^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Vậy đáp án là B.

Bài tập 11: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} qx + y = 2 \\ 3x + 2y = p \end{cases}$$

Tìm giá trị của p và q để hệ phương trình có nghiệm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải

Để hệ phương trình có nghiệm với $\forall a \in \mathbb{R}$, tức là hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{q}{3} = \frac{1}{2} = \frac{2}{p}$$

Giải ra ta được $p = 4$ và $q = \frac{3}{2}$

Bài tập 12: Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} (m-1)x - y = m+1 \\ x + (m+1)y = -2m \end{cases} \quad (\text{với } m \neq 0)$$

Giải

Áp dụng công thức CRAMER, ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & -1 \\ -2m & m+1 \end{vmatrix} = m^2 + 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m-1 & m+1 \\ 1 & -2m \end{vmatrix} = -2m^2 + m - 1$$

$\Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y)

$$\begin{cases} x = \frac{m^2 + 1}{m^2} \\ y = \frac{-2m^2 + m - 1}{m^2} \end{cases}$$

Bài tập 13: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y = m \\ 2x + 3y = m + 1 \end{cases}$$

Giá trị m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x < y$ là

Giải

Áp dụng công thức CRAMER, ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m & 2 \\ m+1 & 3 \end{vmatrix} = m - 2,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & m+1 \end{vmatrix} = 1 - m$$

$\Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y)

$$\begin{cases} x = 2 - m \\ y = m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Mà } x < y \Leftrightarrow 2 - m < m - 1 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$$

Bài tập 14: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y = 2^{2003} \\ x - y = -2^{2001} \end{cases}$$

Giải

$$\text{Hệ phương trình } \begin{cases} 2x + y = 2^{2003} & (1) \\ x - y = -2^{2001} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy phương trình (1) + (2) } \Rightarrow x = 2^{2001}$$

$$\text{Thay vào (1) ta được: } y = 2^{2002}$$

$$\Rightarrow \text{hệ có nghiệm duy nhất } (x, y) = (2^{2001}, 2^{2002})$$

Bài tập 15: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x - my = n \\ x + y = p \end{cases}$$

Tìm giá trị m , n và p để hệ có vô số nghiệm.

Giải

Áp dụng công thức CRAMER, ta có:

$$D = 1 + m,$$

$$D_x = n + mp,$$

$$D_y = p - n$$

Để hệ phương trình có vô số nghiệm

$$D = D_x = D_y = 0$$

$$\begin{cases} m + 1 = 0 \\ n + mp = 0 \\ p - n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = p \\ n = p \end{cases}$$

Bài tập 16: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ 2x + my = 1 \end{cases}$$

Tìm giá trị m để hàm số có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x + y = 1$.

Giải

Áp dụng công thức CRAMER, ta có:

$$D = m^2 - 4,$$

$$D_x = m - 2,$$

$$D_y = m - 2$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

Và thỏa mãn $x + y = 1$

$$\frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+2} = 1 \Leftrightarrow m = 0.$$

Bài tập 17: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{1000}x + \frac{1}{1001}y = 2 \\ x + y = 2001 \end{cases}$$

Giải

Sử dụng phương pháp thế, ta giải phương trình.

Phương trình có nghiệm là $(x, y) = (1000, 1001)$.

Bài tập 18: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (m+1)x - y = m+1 \\ x + (m-1)y = 2 \end{cases}$$

Tìm giá trị m để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Áp dụng công thức CRAMER, ta có:

$$D = m^2,$$

$$D_x = m^2 + 1,$$

$$D_y = m + 1$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$\begin{cases} m^2 \neq 0 \\ \frac{m^2 + 1}{m^2} + \frac{m + 1}{m^2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8} \end{cases}$$

Vậy $bx + y$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{7}{8}$ khi $\frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Bài tập 19: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + 2my = 1 \\ x + my = -m \end{cases} \quad (m > 0)$$

Tìm giá trị m để hệ có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x > y + 2$.

Giải

Áp dụng công thức CRAMER, ta có:

$$D = m^2 - 2m,$$

$$D_x = m + 2m^2,$$

$$D_y = -m^2 - 1$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq 2$ và $m \neq 0$.

Với $x > y + 2$

$$\frac{m + 2m^2}{m^2 - 2m} > \frac{-m^2 - 1}{m^2 - 2m} + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 + 5m + 1}{m^2 - 2m} > 0$$

$$\Leftrightarrow m > 2$$

Bài tập 20: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2m - 3)x + y = 4m^2 - 7 \\ 2x - (2m + 3)y = 0 \end{cases}$$

Tìm giá trị m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là

Giải

Giải hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2m + 3, 4)$

Ta có: $x^2 + y^2 = (2m + 3)^2 + 4^2 \geq 16$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là 16 đạt được khi $m = -\frac{3}{2}$.

Bài tập 21: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2mx + m^2y = 3 \\ 2x + my = 3 \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình:

a) Có vô số nghiệm.

b) Vô nghiệm.

Giải

a) Hệ có vô số nghiệm khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \frac{2m}{2} = \frac{m^2}{m} = \frac{3}{3} \Leftrightarrow m = m = 1 \Leftrightarrow m = 1$

b) Hệ vô nghiệm khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \frac{2m}{2} = \frac{m^2}{m} \neq \frac{3}{3} \Leftrightarrow m = m \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 1$

1.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + 2y = 2 \\ x + (m + 1)y = 1 \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) .

Đáp số: $m \neq 1$ và $m \neq -2$

Bài tập 2: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6ax + (2 - a)y = 3 \\ (a - 1)x - ay = 2 \end{cases}$$

Bài tập 3: Giải hệ phương trình theo tham số a .

$$\begin{cases} ax - y = -1 \\ ax + y = 2(a^3 + a^2 + a) + 1 \end{cases}$$

$$\text{Đáp số: } \begin{cases} x = a^2 + a + 1 \\ y = a^3 + a^2 + a \end{cases}$$

Bài tập 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{3x+3y}{x-y} = 7 \\ \frac{5x-y}{y-x} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Đáp số: Vô nghiệm.

Bài tập 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} |x| + y = 1 \\ x + |y| = -2 \end{cases}$$

Đáp số: Vô nghiệm.

Bài tập 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{7} + \frac{2x+y}{17} = 7 \\ \frac{4x+y}{5} + \frac{y-7}{19} = 15 \end{cases}$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 1990-1991 Ban B)

Bài tập 7: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 3 \end{cases}$$

(Đề thi HSG TPHCM 1991-1992 vòng 1)

Bài tập 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx - y = m \\ x + my = 1 \end{cases}$$

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm (x, y) sao cho tích $P = x.y$ đạt giá trị lớn nhất.

Đáp số: Không tồn tại m .

Bài tập 9: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} m^2x + (m+1)^2y = 1 \\ (m-1)x + my = 3 \end{cases}$$

Bài tập 10: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{2mx-y}{2} + \frac{mx+y}{4} = 6 \\ \frac{x+2my}{4} + \frac{m+y}{2} = 4 \end{cases}$$

Bài tập 11: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 2 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $a = 2$.

b) Với giá trị nào của a thì hệ có nghiệm duy nhất.

Bài tập 12: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - my = m \\ mx - 9y = m + 6 \end{cases}$$

Tìm m để hệ:

a) Vô nghiệm.

b) Có vô số nghiệm.

Bài tập 13: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + (m-1)y = 2 \\ (m+1)x - y = m+1 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = \frac{1}{2}$.

b) Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x > y$.

Bài tập 14: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ mx + 3y = m \end{cases}$$

a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Tìm m để hệ có vô số nghiệm.

Bài tập 15: Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x + (m-4)y = 1-4m \\ mx - y = m \end{cases}$$

2. Hệ phương trình dạng: (Gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai)

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ mx^2 + nxy + py^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Với a, b, c, m, n, p là các hằng số thực.

2.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Từ phương trình (1) rút x theo y hoặc rút y theo x rồi thế vào phương trình (2).

Bước 2: Giải (2) rồi suy ra x hoặc y (phụ thuộc cách rút).

Bước 3: Thay giá trị tìm được vào phương trình (1) để suy ra giá trị của ẩn còn lại.

2.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra: $y = 2x - 5$ thế vào phương trình (2) ta được phương trình:

$$7x^2 - 25x + 25 = 0$$

Giải phương trình này, ta được: $x = \frac{10}{7}$; $x = \frac{15}{7}$.

Suy ra hệ phương trình có hai cặp nghiệm (x; y) là $\left(\frac{10}{7}; -\frac{15}{7}\right)$ và $\left(\frac{15}{7}; -\frac{5}{7}\right)$.

Bài tập 2: Giải các phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y - 4 = 0 \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 & (1) \\ x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra: $x = 4 - 2y$ thế vào (2) ta được:

$$9y^2 - 24y + 20 = 9$$

Phương trình này vô nghiệm, suy ra hệ vô nghiệm.

Bài tập 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ x^2 + 3y^2 = 8 \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 5 & (1) \\ x^2 + 3y^2 = 8 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra: $x = \frac{5+4y}{2}$ thế vào (2) ta được

$$\begin{aligned} 28y^2 + 40y - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-5+\sqrt{7}}{7} \\ y = \frac{-5-\sqrt{7}}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra:

Với $y = \frac{-5+\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = \frac{15+4\sqrt{7}}{14}$

Với $y = \frac{-5-\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = \frac{15+4\sqrt{7}}{7}$

Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm (x; y) là $\left(\frac{15+4\sqrt{7}}{14}; \frac{-5+\sqrt{7}}{7}\right)$ và $\left(\frac{15+4\sqrt{7}}{7}; \frac{-5-\sqrt{7}}{7}\right)$.

Bài tập 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3y^2 + 5x^2 - 7xy = 9 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} 3y^2 + 5x^2 - 7xy = 9 & (1) \\ x - 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x = 5 + 3y$ thế vào (2) ta được

$$\begin{aligned} 27y^2 + 15y + 116 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-25+\sqrt{697}}{54} \\ y = \frac{-115+\sqrt{697}}{54} \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra hệ có nghiệm

$$\begin{cases} y = \frac{-25+\sqrt{697}}{18} \\ y = \frac{-115+\sqrt{697}}{54} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y = \frac{-25-\sqrt{697}}{18} \\ y = \frac{-115-\sqrt{697}}{54} \end{cases}$$

Bài tập 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy - 2y^2 + x^2 = -8 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} xy - 2y^2 + x^2 = -8 & (1) \\ x + 3y = 4 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x = 4 - 3y$ thế vào (2) ta được phương trình

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Suy ra hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Bài tập 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x^2 - 3xy + 5y^2 = 16 \end{cases}$$

Giải

Ta có hệ phương trình tương đương:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 2x^2 - 3x(3 - x) + 5(3 - x)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 2x^2 - 9x + 3x^2 + 45 - 30x + 5x^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 10x^2 - 39x + 29 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{29}{10} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{29}{10} \\ y = \frac{1}{10} \end{cases} \end{cases}$$

2.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x^2 + 3xy - y^2 + 18 = 0 \end{cases}$	c) $\begin{cases} (x + y + 2)(2x + 2y - 1) = 0 \\ 3x^2 - 32y^2 + 5 = 0 \end{cases}$
d) $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$	e) $\begin{cases} 4x + 9y = 6 \\ 3x^2 + 6xy - x + 3y = 0 \end{cases}$	f) $\begin{cases} 2x^2 + x + y + 1 = 0 \\ x^2 + 12x + 2y + 10 = 0 \end{cases}$
g) $\begin{cases} (x + 2y + 1)(x + 2y + 2) = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$	h) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 164 \end{cases}$	i) $\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Bài tập 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ x + 2y = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

- a) Giải hệ phương trình với $m = 4$
 b) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m .

Bài tập 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Bài tập 4: Tìm m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + mx + my - m - 1 = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

có 2 cặp nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thỏa mãn $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4$.

Bài tập 5: Tìm m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 = 144 \\ x - y = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

có nghiệm duy nhất.

Bài tập 6: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Xác định các giá trị của a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ x + ay - a = 0 \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình khi $a = 1$.

b) Tìm a để hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

c) Gọi $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ là các nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Chứng minh rằng: $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leq 1$

Bài tập 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9 \\ 2x - y = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 0$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

Bài tập 9: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = m \\ 3x + 5y = 13 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 13$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

Bài tập 10: Gọi $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \\ x + y = 2a - 1 \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

Tìm a để $P = xy$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 11: Gọi $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2 - 2 \\ x + y = a + 1 \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

Tìm a để $P = xy$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 12: Gọi $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + 4a \\ x + y = 2a + 1 \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

Tìm a để $P = xy$ đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

Bài tập 13: Tìm k để hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = k \end{cases} \quad (k \text{ là tham số})$$

có nghiệm duy nhất.

Bài tập 14: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = m \\ (x+1)y^2 + xy = m(y+2) \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 4$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình có nhiều hơn hai nghiệm.

Bài tập 15: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ x + my - m = 0 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

c) Gọi $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ là các nghiệm của hệ đã cho.

Chứng minh rằng: $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq 1$

Bài tập 16: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Tìm giá trị của m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Đáp số: $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

Bài tập 17: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ x + ny = n \end{cases} \quad (n \text{ là tham số})$$

Tìm n để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Đáp số: $0 < n < \frac{4}{3}$

Bài tập 18: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 = 144 \\ x - y = a \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất.

Đáp số: $m = \pm\sqrt{7}$

Bài tập 19: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ mx - y = 3m - 4 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm kép.

Đáp số: $m = -\frac{3}{4}$

Bài tập 20: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Đáp số: $(1, -3); \left(\frac{18}{7}; \frac{1}{7}\right)$

Bài tập 21: Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x^2 - 5xy + y^2 = -23 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x^2 + 3xy - 5y^2 = -4 \end{cases} \end{array}$$

3. Hệ phương trình đối xứng loại I:

3.1. Kiến thức cơ bản:

Hệ phương trình loại I theo ẩn x và y : Là hệ phương trình mà khi ta đổi vai trò của các ẩn x và y thì hệ phương trình vẫn không thay đổi.

Dạng hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{Với} \quad \begin{cases} f(x, y) = f(y, x) \\ g(x, y) = g(y, x) \end{cases}$$

Hệ phương trình ở dạng thu gọn:

Đặt $S = x + y$; $P = x.y$ thì hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} f(S, P) = 0 \\ g(S, P) = 0 \end{cases} \quad \text{Điều kiện: } S^2 \geq 4P$$

(Với S và P là tổng và tích hai nghiệm)

Cách giải:

Bước 1: Đặt: $S = x + y$, $P = x.y$ và x, y chính là nghiệm của phương trình

Điều kiện: $S^2 \geq 4P$

Bước 2: Xác định S và P .

Khi đó S và P là nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - SX + P = 0,$$

Bước 3: Giải phương trình bậc hai theo ẩn X .

Có giá trị X thì suy ra x, y .

3.2. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x - y = 5 \\ x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 6 \end{cases}$$

Giải

Ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} (x^2 - y^2) + (x - y) = 5 \\ (x^2 - y^2)(x - y) = 6 \end{cases}$$

Đặt: $u = x^2 - y^2$ và $t = x - y$

Hệ phương trình được đưa về dạng:

$$\begin{cases} u + t = 5 \\ ut = 6 \end{cases}$$

Suy ra u và t là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - 5X + 6 = 0$

Giải ra, ta được: $X_1 = 2$; $X_2 = 3$.

Xét hai trường hợp:

$$\text{Nếu } u = 2, t = 3 \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) = 2 \\ (x - y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y) = \frac{2}{3} \\ (x - y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{6} \\ y = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } u = 3, t = 2 \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) = 3 \\ (x - y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$$

Giải

Đặt: $S = x + y$ và $P = xy$, ($S^2 \geq 4P$);

$$\text{Ta có hệ} \begin{cases} S^2 - P = 4 & (1) \\ S + P = 2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Leftrightarrow P = 2 - S \text{ thế vào (1) ta có: } S^2 + S - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = -3 \\ S_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta có; } \begin{cases} S_1 = -3 \\ P_1 = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S_2 = 2 \\ P_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 5 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm}$$

$$\text{Với } \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này có hai cặp nghiệm (x; y) là (2; 0) và (0; 2).

Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm (x; y) là (2; 0) và (0; 2).

Bài tập 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x + y = 19 \\ x^2y + xy^2 = 84 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình được đưa về dạng:

$$\begin{cases} xy + (x + y) = 19 \\ xy(x + y) = 84 \end{cases}$$

Đặt: $S = x + y$; $P = xy$, $S^2 \geq 4P$.

Khi đó S và P là hai nghiệm của phương trình

$$X^2 - 19X + 84 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = 7 \text{ hoặc } X_2 = 12$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 7 \end{cases}$$

có nghiệm

$$\begin{cases} x = 6 + \sqrt{42} \\ y = 6 - \sqrt{42} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 6 - \sqrt{42} \\ y = 6 + \sqrt{42} \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

có nghiệm

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn cặp nghiệm (x; y) là:

$$\begin{cases} x = 6 + \sqrt{42} \\ y = 6 - \sqrt{42} \end{cases}; \begin{cases} x = 6 - \sqrt{42} \\ y = 6 + \sqrt{42} \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}; \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Bài tập 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + y + x = 5 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Ta có hệ phương trình đương đương: } \begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + y + x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x + y) = 6 \\ xy + (x + y) = 5 \end{cases}$$

Đặt: $xy = t$, $x + y = u$, ($u^2 \geq 4t$)

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} u + t = 5 \\ ut = 6 \end{cases}$$

Vậy u và t là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 5X + 6 = 0$$

có hai nghiệm $X_1 = 2; X_2 = 3$.

Ta có các hệ:

$$\text{Hệ 1: } \begin{cases} u = 2 \\ t = 3 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn, vì: } u^2 < 4t)$$

$$\text{Hệ 2: } \begin{cases} u = 3 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Khi đó x, y là hai nghiệm của phương trình

$$X^2 - 3X + 2 = 0$$

Suy ra: $X = 1, X = 2$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Bài tập 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 2 \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Giải

Ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} y^2 + (-x^2) = 2 \\ y^2 \cdot (-x^2) = -3 \\ xy < 0 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Từ (1) và (2) chứng tỏ y^2 và $-x^2$ là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 2X - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = -1, X = 3$$

Do đó: $y^2 = 3$ và $-x^2 = -1 \Leftrightarrow y^2 = 3$ và $x^2 = 1$.

Ngoài ra $xy < 0$ nên nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Bài tập 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^4 + y^4 = 97 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Giải

Ta biến đổi phương trình (2) của hệ:

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = 97$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 97$$

$$\Leftrightarrow [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = 97$$

Thay $x + y = 5$ vào phương trình trên ta được:

$$(25 - 2xy)^2 - 2(xy)^2 = 97$$

$$\Leftrightarrow 625 - 100xy + 2(xy)^2 = 97$$

$$\Leftrightarrow 2(xy)^2 - 100xy + 528 = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy)^2 - 50xy + 264 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \\ xy = 44 \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình trên, ta được: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 44 \end{cases} \quad (5^2 < 4.44) \text{ hệ phương trình này vô nghiệm.}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai cặp nghiệm là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bài tập 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Tìm giá trị m để hệ phương trình vô nghiệm.

Giải

Biến đổi hệ phương trình, ta được:

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = m \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = \frac{36 - m}{2} \end{cases}$$

Khi đó x và y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 6t + \frac{36 - m}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 12t + 36 - m = 0$$

Để hệ phương trình vô nghiệm thì phương trình:

$$2t^2 - 12t + 36 - m = 0$$

vô nghiệm

Ta có điều kiện vô nghiệm:

$$\Delta' < 0$$

$$\Leftrightarrow m - 18 < 0$$

$$\Leftrightarrow m < 18.$$

Bài tập 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x - y - xy = 3 \end{cases}$$

Giải

Nhận thấy hệ phương trình không đối xứng nên biến đổi đưa về hệ đối xứng.

Đặt: $t = -y$, khi đó ta có:

$$\begin{cases} x^2 - xt + t^2 = 1 \\ x + t + xt = 3 \end{cases}$$

Đặt: $S = x + t$ và $P = xt$, ($S^2 \geq 4P$)

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} S^2 - 3P = 1 & (1) \\ S + P = 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra: $P = 3 - S$ thay vào (1), ta được:

$$S^2 + 3S - 10 = 0$$

Giải ra: $S = -5$; $S = 2$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} S = -5 \\ P = 8 \end{cases}$ (Vì $(-5)^2 < 4.8$ hệ này vô nghiệm)

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + t = 2 \\ xt = 1 \end{cases}$

Khi đó x và t là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 2X + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow x = t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có 1 cặp nghiệm $(x; y)$ là $(1, -1)$.

Bài tập 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{16}{3} \end{cases}$$

Giải

Biến đổi hệ phương trình, ta được:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - \frac{25}{6}xy = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Đặt: $S = x + y = 5$ và $P = xy = 6$, (điều kiện $S^2 \geq 4P$)

Khi đó x và y là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 5X + 6 = 0$$

Giải phương trình trên, ta được: $X_1 = 2$; $X_2 = 3$.

Ta có hai cặp nghiệm $(x; y)$ là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai cặp nghiệm là $(2, 3)$ và $(3, 2)$.

Bài tập 10: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy(x+y) = -2 \\ x^3 + y^3 = 7 \end{cases}$$

Giải

Ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} xy(x+y) = -2 \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 7 \end{cases}$$

Đặt: $S = x + y$; $P = xy$.

Do đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} P.S = -2 \\ S^3 - 3PS = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PS = -2 \\ S^3 - 3.(-2) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PS = -2 \\ S^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - X - 2 = 0$

Giải phương trình trên ta được $X_1 = -1$; $X_2 = 2$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai cặp nghiệm $(x; y)$ là $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

3.3. Bài tập tự luyện:

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = 5 \\ x + y + x^2 + y^2 = 42 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) = 3 \\ (1-x)(1-y) = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ (xy + 8)(x + y) = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + xy = \frac{7}{2} \\ xy(x + y) = \frac{5}{2} \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^3 + y^3 = 26 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x + y = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 2(x + y)^2 - xy = 1 \\ x^2y + xy^2 = 0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2 \end{cases}$

$$q) \begin{cases} x^5 + y^5 = 1 \\ x^9 + y^9 = x^4 + y^4 \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$

$$s) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy = \frac{7}{2} \\ 2(x+y) = 3xy \end{cases}$$

$$t) \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4 \end{cases}$$

$$u) \begin{cases} x(x+2)(2x+y) = 9 \\ x^2 + 4x + y = 6 \end{cases}$$

$$v) \begin{cases} (x+y)(1 + \frac{1}{xy}) = 5 \\ (x^2 + y^2)(1 + \frac{1}{x^2y^2}) = 49 \end{cases}$$

$$w) \begin{cases} (x-y)(x^2 - y^2) = 3 \\ (x+y)(x^2 + y^2) = 15 \end{cases}$$

$$y) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3} \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$z) \begin{cases} (x+y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

Bài tập 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + xy + y = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$.

b) Tìm m để hệ có ít nhất một nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0$ và $y > 0$.

Bài tập 3: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $F = xy + 2(x + y)$.

Bài tập 4: Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2(m+1) \\ 2xy + x + y = 2(m+2) \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Bài tập 5: Tìm m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + xy + y = m \\ x^2y + xy^2 = 3m - 8 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

có nghiệm.

Bài tập 6: Gọi $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

Xác định a để xy đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(a+1) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình với $a = 2$.

b) Các giá trị của a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình với $m = 26$.

b) Tìm giá trị m sao cho hệ phương trình vô nghiệm.

c) Tìm giá trị m sao cho hệ phương trình có nghiệm.

d) Tìm giá trị m sao cho hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

e) Tìm giá trị m sao cho hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 9: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + xy = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = 3m - 5 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

- a) Giải hệ phương trình với $m = 26$
 b) Tìm giá trị m sao cho hệ phương trình vô nghiệm
 c) Tìm giá trị m sao cho hệ phương trình có nghiệm
 d) Tìm giá trị m sao cho hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất
 e) Tìm giá trị m sao cho hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Bài tập 10: Tìm m để các hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x + 1)(y + 1) = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Bài tập 11: Cho các hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = m^2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

- a) Giải hệ phương trình với $m = 12$.
 b) Tìm giá trị m sao cho hệ phương trình có nghiệm

Bài tập 12: Giải biện luận các hệ phương trình sau theo tham số a, m :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a \\ x + y = 8 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{y-1} = 4 \\ x + y = 3a \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = m \\ 2y + \sqrt{x-1} = m \end{cases} \end{array}$$

Bài tập 13: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4m \\ 2xy + 1 = 2m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Tìm m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Đáp số: $a = \frac{1}{4}$

Bài tập 14: Giải hệ phương trình theo ẩn x và y với tham số $a \geq 0$.

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 2a \\ x + y + xy = a^2 + 2a \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

(Đề thi tuyển chọn đội tuyển Toán 9, Thanh Hoá năm 1995-1996)

Đáp số: $(x, y) = (a, a)$

Bài tập 15: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên.

Đáp số: $(x, y) = (1, 1)$

Bài tập 16: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a \\ x + y = 8 \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

Tìm a để hệ phương trình có nghiệm kép dương.

Đáp số: $a = 2$.

Bài tập 17: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 97 \\ xy(x^2 + y^2) = 78 \end{cases}$$

Hướng dẫn: Đặt: $x^2 + y^2 = S$ và $xy = P$.

Bài tập 18: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 12 \\ x^2y + y^2x = 16 \end{cases}$$

Đáp số: $(x, y) = (2, 2); (2, -4); (-4, 2)$

Bài tập 19: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

Đáp số: $(1, 2); (-1, -2); (2, 1); (-2, -1)$

Bài tập 20: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + xy + y = m + 1 \\ xy(x + y) = m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Tìm m để hệ có nghiệm (x, y) thỏa điều kiện $x > 0$ và $y > 0$.

Đáp số: $0 < m \leq \frac{1}{4}$ hay $a \geq 2$.

Bài tập 21: Giải hệ phương trình theo ẩn x và y .

$$\begin{cases} x + y = m + n \\ x^3 + y^3 = m^3 + n^3 \end{cases} \quad (m, n \text{ là các tham số})$$

Đáp số: $(x, y) = (m, n); (n, m)$

Bài tập 22: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2(1 + k) \end{cases} \quad (k \text{ là tham số})$$

Tìm k để hệ phương trình có đúng hai nghiệm.

Đáp số: $k = 0$.

4. Hệ phương trình đối xứng loại II:

4.1. Kiến thức cơ bản:

Hệ phương trình đối xứng loại II theo ẩn x và y là hệ phương trình mà khi ta đổi vai trò của x cho y thì hai phương trình của hệ sẽ hoán đổi cho nhau.

Dạng phương trình

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0 \end{cases}$$

Cách giải:

Bước 1: Cộng hoặc trừ hai vế của hai phương trình để đưa hệ phương trình về phương trình tích và lập hệ phương trình :

Đưa về dạng $\begin{cases} f(x, y) - f(y, x) = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x, y) + f(y, x) = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$

$$(x - y).f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

Bước 2: Giải hệ phương trình vừa lập được.

Bước 3: Xét nghiệm của hệ phương trình là nghiệm của từng phương trong hệ ở bước 1.

4.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 3y \\ y^2 + 1 = 3x \end{cases}$$

(Đề thi giải thưởng Lương Thế Vinh, Quận 1 TP HCM: 2-4-1994)

Giải

Hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 & + & 1 \\ y^2 & + & 1 \end{cases}$$

Trừ (1) và (2), ta có:

$$x^2 - y^2 = 3y - 3x$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y - 3) = 0$$

Vậy hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 3y \\ (x - y)(x + y - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 3y \\ (x - y)(x + y - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 3y \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 3y \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 1 = 3y \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 1 = 3y \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$$

Giải

Trừ hai phương trình của hệ trên, ta được:

$$3x^2 - 3y^2 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(3x + 3y - 1) = 0$$

Ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ (x - y)(3x + 3y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Bài tập 3: Giải phương trình:

$$\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$$

Giải

Trừ hai phương trình cho nhau ta được:

$$x^3 - y^3 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ x = y \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ x = y \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Bài tập 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ xy^2 + 2 = x^2 \end{cases}$$

Giải

Trừ hai phương trình ta được phương trình:

$$(x - y)(xy + x + y) = 0$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ x = y \\ xy + x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ x = y \\ xy + x + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ xy + x + y = 0 \end{cases}$$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

Bài tập 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ x + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Giải

Trừ hai vế của phương trình ta được PT:

$$(x - y)(x + y - 1) = 0$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ x = y \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ x = y \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 = xy + y = 1 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}^+$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(-1; -1), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), (t; 2t)$ với $t \in \mathbb{R}^+$

Bài tập 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \frac{x}{y} \\ y - 3x = 4 \frac{y}{x} \end{cases}$$

Giải

Trừ từng vế của hệ phương trình ta được:

$$(x^2 - y^2) = -4(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -4 - x \end{cases}$$

Xét $x = y$, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -2$$

Xét $y = -4 - x$, hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} y = -4 - x \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -2$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm (x, y) là $(-2, -2)$

Bài tập 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + m \\ y = x^2 - x + m \end{cases}$$

Tìm giá trị m để hệ có nghiệm.

Giải

Trừ từng vế của phương trình, ta được:

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x + m = 0 \end{cases} \quad \text{(I) hoặc} \quad \begin{cases} x = -y \\ x^2 + m = 0 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Để hệ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \text{(I) có nghiệm} \\ \text{(II) có nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(I)} \geq 0 \\ \Delta_{(II)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \geq 0 \\ -m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

Suy ra hệ có nghiệm khi $m \leq 1$.

Bài tập 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy = mx + y \\ y^2 + 2xy = my + x \end{cases}$$

Tìm giá trị m để hệ có nghiệm $x = y$.

Giải

Trừ từng vế của hai phương trình, ta được:

$$x^2 - y^2 = (m - 1)(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x + y - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = m - 1 - x \end{cases}$$

Với $x = y$ khi đó ta có:

$$3x^2 = (m + 1)x$$

Phương trình này luôn luôn có nghiệm với mọi m .

Bài tập 9: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(3 - 4y^2) = m(3 - 4m^2) \\ y(3 - 4x^2) = m(3 - 4m^2) \end{cases} \quad (x \neq y)$$

Tìm giá trị m để hệ vô nghiệm.

Giải

Trừ từng vế của hai phương trình, ta được:

$$(x - y)(3 + 4xy) = 0 \Leftrightarrow xy = -\frac{3}{4} \quad (\text{vì } x \neq y)$$

Thay vào hệ phương trình ta được

$$t^2 - \frac{1}{3}m(3 - 4m^2)t - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Delta = m^2(3 - 4m^2)^2 + 27 > 0$$

Suy ra phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

Suy ra không tồn tại m để hệ vô nghiệm.

Bài tập 10: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x + y - \frac{m^3}{x^2} = 0 \\ 7y + -\frac{m^3}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Tìm giá trị a để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải

Để hệ có nghiệm duy nhất thì $x = y$.

Vì $x = y$ nên ta có phương trình

$$8x^3 = m^3 \Leftrightarrow x = y = \frac{m}{2}$$

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất khi $a \neq 0$.

Bài tập 11: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 = 4y \\ y^2 - 2y + 5 = 4x \end{cases}$$

Giải

Ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} (x^2 - y^2) - 2(x - y) = -4(x - y) \\ x^2 - 2x + 5 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y + 2) = 0 \\ x^2 - 2x + 5 = 4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - 2x + 5 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 5 = 4y \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - 2x + 5 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1; x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 5 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 - x \\ x^2 + 2x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 - x \\ (x+1)^2 + 12 = 0 \end{cases}$

Hệ phương trình này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai cặp nghiệm $(x; y)$ là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$

4.3. Bài tập tự luyện:

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5 \\ 2y = x^2 - 4x + 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^2 = 13x + 4y \\ x^2 = 13y + 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = y^2 - 2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3 = 5x + y \\ y^3 = 5y + x \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 20 \\ x^4 + y^2 = 20 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x + y = \frac{1}{x^2} \\ 3y + x = \frac{1}{y^2} \end{cases}$

h) $\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$

Bài tập 2: Tìm m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 2y + m = 0 \\ y^2 - 2x + m = 0 \end{cases}$$

có nghiệm

Bài tập 3: Tìm các giá trị của tham số m để các hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + mx \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + my \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 + xy \\ (y - m)x + (2m - 3)y = m \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) \\ xy + y^2 = m(x - 1) \end{cases}$

Bài tập 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(3 - 4y^2) = m(3 - 4m^2) \\ y(3 - 4x^2) = m(3 - 4m^2) \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

1) Giải hệ phương trình với $m = 1$.

2) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

3) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = \frac{2y}{1 - y^2} \\ y = \frac{2x}{1 - x^2} \end{cases}$$

Hướng dẫn: Biến đổi, rồi lấy hai vế trừ nhau.

Bài tập 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x + y = \frac{8}{y^2} \\ 7y + x = \frac{8}{x^2} \end{cases}$$

Đáp số: (1; 1)

Bài tập 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ y^2x + 2 = x^2 \end{cases}$$

Đáp số: $(-1, -1); (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}); (-1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2});$
 $\left(1 - \sqrt{5}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2 - \sqrt{5}}\right); \left(1 + \sqrt{5}, \frac{-\sqrt{5} - 1}{2 + \sqrt{5}}\right)$

Bài tập 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) \\ xy + y^2 = m(x - 1) \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Đáp số: $m = 8$.

Bài tập 9: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ y^3 = x^2 + 7y^2 - my \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Đáp số: $m > 16$.

Bài tập 10: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{\sqrt{y}} = 2 \\ y + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \end{cases}$$

(Đề thi vào lớp 10 Trường ĐH Vinh năm học 2005 - 2006)

Đáp số: $(1, 1); \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$

Bài tập 11: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \sqrt{y + 5} = 1 \\ y + \sqrt{x + 5} = 1 \end{cases}$$

(Đề thi tốt nghiệp THCS và xét tuyển vào THPT Chuyên Lê Quý Đôn năm học 2004-2005)

Đáp số: $(-1, -1); (4, 4); (-1, 3); (4, -2)$

Bài tập 12: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + 6 = 9y \\ 3y^2 - 2y + 6 = 9x \end{cases}$$

Bài tập 13: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x^2 - 2x + 3 = 6y \\ 5y^2 - 2y + 3 = 6x \end{cases}$$

Bài tập 14: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y = 12 \\ 2y^2 + 3x = 12 \end{cases}$$

Bài tập 13: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2 \end{cases}$$

Bài tập 15: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0 \\ y^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài tập 16: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 5 = 3y \\ y^2 - 3y + 5 = 3x \end{cases}$$

Bài tập 17: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \sqrt{y+5} = 1 \\ y + \sqrt{x+5} = 1 \end{cases}$$

5. Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai:

5.1. Kiến thức cơ bản:

Dạng hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cxy + d = 0 \\ a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d' = 0 \end{cases}$$

Cách giải:

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cxy + d = 0 & (1) \\ a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d' = 0 & (2) \end{cases}$$

Bước 1:

Xét $x = 0$ hoặc $y = 0$ có nghiệm hay không.

Bước 2: Xét $x \neq 0$ hoặc $y \neq 0$.

Đặt: $x = ty$ hoặc $y = tx$

Ta có hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} ax^2 + bt^2y^2 + ctx = -d & (3) \\ a'x^2 + b't^2y^2 + c'tx^2 = -d' & (4) \end{cases}$$

Chia (3) cho (4) ta được phương trình bậc hai theo ẩn t :

$$\frac{a + bt^2 + ct}{a' + b't^2 + c't} = \frac{d}{d'}$$

Ta đưa về phương trình bậc hai theo ẩn t rồi tiến hành giải

5.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 13 \\ x^2 + 4xy - 2y^2 = -6 \end{cases}$$

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán 31.7.1994)

Giải

Xét $x = 0$, ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} 3y^2 = 13 \\ -2y^2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow 5y^2 = 18$$

hệ phương trình này vô nghiệm.

Xét $x \neq 0$, đặt $y = tx$.

Ta có hệ phương trình tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 2x^2 - tx^2 + 3t^2x^2 = 13 \\ x^2 + 4tx^2 - 2t^2x^2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(2 - t + 3t^2) = 13 & (1) \\ x^2(1 + 4t - 2t^2) = -6 & (2) \end{cases}$$

Chia (1) cho (2) của hệ phương trình trên, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{2-t+3t^2}{1+4t-2t^2} &= \frac{13}{-6} \\ \Leftrightarrow \frac{3t^2-t+2}{2t^2-4t-1} &= \frac{13}{6} \\ \Leftrightarrow 6(3t^2-t+2) &= 13(2t^2-4t-1) \\ \Leftrightarrow 18t^2-6t+12 &= 26t^2-52t-13 \\ \Leftrightarrow 8t^2-46t-25 &= 0 \end{aligned}$$

Lập hệ phương trình tương đương:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4xy-2y^2=-6 \\ 8t^2-46t-25=0 \\ y=tx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4xy-2y^2=-6 \\ t_1=-\frac{1}{2} \\ t_2=\frac{25}{4} \\ y=tx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ x^2+4xy-2y^2=-6 \\ x=\frac{4}{25}y \\ x^2+4xy-2y^2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1; y_1=1 \\ x_2=2; y_2=-1 \\ x_3=\frac{4}{\sqrt{139}}; y=\frac{25}{\sqrt{139}} \\ x_4=\frac{-4}{\sqrt{139}}; y=\frac{-25}{\sqrt{139}} \end{cases}$$

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x^2+y^2)=10y & (1) \\ 2y(x^2-y^2)=3x & (2) \end{cases}$$

Giải

Xét $x=0 \Rightarrow y=0$;

Ta có: $(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm.

Xét $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$. Chia phương trình (2) cho phương trình (1)

$$\frac{2y}{x} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{3}{10} \cdot \frac{x}{y}$$

$$\text{Đặt: } \frac{x}{y} = t \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{t}$$

Ta có phương trình:

$$\frac{2}{t} \cdot \frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{3}{10} t$$

$$\Leftrightarrow 3t^4-17t^2+20=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=\frac{20}{3} \end{cases}$$

Với $t=-1 \Rightarrow x=-y$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x(x^2+y^2)=10y \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=-10 \\ x=-y \end{cases}$$

hệ phương trình này vô nghiệm.

$$\text{Với } t=\frac{20}{3} \Rightarrow x=\frac{20}{3}y.$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) = 10y \\ x = \frac{20}{3}y \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được (x; y) là $\begin{cases} x = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{818}} \\ y = 3\sqrt{\frac{3}{818}} \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{818}} \\ y = -\sqrt{\frac{3}{818}} \end{cases}.$

Bài tập 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 & (1) \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 & (2) \end{cases}$$

Giải

Nhân phương trình (1) với 13 rồi cộng với phương trình (2):

Ta có phương trình:

$$16x^2 - 40xy + 16y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \text{ với } x = ty \text{ (x, y} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow t_1 = 2; t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2y \text{ hoặc } y = 2x.$$

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ x = 2y \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ y = 2x \end{cases}$$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 & (3) \\ x = 2y & (4) \end{cases}$

Thế (4) vào (3) ta được:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 & (5) \\ y = 2x & (6) \end{cases}$

Thế (6) vào (5) ta được

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Bài tập 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy = 4 \\ x^2 - 4xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Giải

Nhân phương trình thứ hai với 4 rồi trừ cho phương trình đầu:

$$4x^2 - 13xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 13t + 3 = 0, x = ty.$$

$$\Leftrightarrow x = 3y \text{ hoặc } y = 4x.$$

Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} x = 3y \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = 4x \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$

Xét hệ $\begin{cases} x = 3y \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm

Xét hệ $\begin{cases} y = 4x \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Bài tập 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

Giải

Xét $x = 0$, suy ra: $y = 0$. Hệ này có nghiệm $(x; y) = (0, 0)$

Xét $y \neq 0$.

Đặt: $x = ty$. Ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} 3t^2y^2 - 8ty^2 + 4y^2 = 0 \\ 5t^2y^2 - 7ty^2 - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2(3t^2 - 8t + 4) = 0 \\ y^2(5t^2 - 7t - 6) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - 8t + 4 = 0 \\ 5t^2 - 7t - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 2$$

Với $t = 2 \Rightarrow x = 2y$.

Xét hệ $\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$

Bài tập 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 2y^2 = 7 \\ x^2 + 6xy - 3y^2 = -8 \end{cases} \quad (I)$$

Giải

Xét $y = 0$ thì hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 7 \\ x^2 = -8 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Xét $y \neq 0$. Đặt $x = ty$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3t^2y^2 - 2ty^2 + 2y^2 = 7 \\ t^2y^2 + 6ty^2 - 3y^2 = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2(3t^2 - 2t + 2) = 7 \\ y^2(t^2 + 6t - 3) = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3t^2 - 2t + 2}{7} = \frac{t^2 + 6t - 3}{-8} (= \frac{1}{y^2})$$

$$\Leftrightarrow -24t^2 + 16t - 16 = 7t^2 + 42t - 21$$

$$\Leftrightarrow 31t^2 + 26t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1; t = \frac{5}{31}$$

Với $t = -1$ thì $7y^2 = 7 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -1$

Hệ có nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Với $t = \frac{5}{31}$ thì $\frac{1687}{31^2}y^2 = 7 \Leftrightarrow y^2 = \frac{31^2}{\sqrt{241^2}} \Leftrightarrow y = \frac{31}{\sqrt{241}}$

hoặc $y = -\frac{31}{\sqrt{241}}$

Hệ có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{5}{\sqrt{241}} \\ y = \frac{31}{\sqrt{241}} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -\frac{5}{\sqrt{241}} \\ y = -\frac{31}{\sqrt{241}} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm là:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{5}{\sqrt{241}} \\ y = \frac{31}{\sqrt{241}} \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{5}{\sqrt{241}} \\ y = -\frac{31}{\sqrt{241}} \end{cases}$$

5.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 4y^2 = -3 \\ 9y^2 + 11xy - 8x^2 = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \\ x|x| + y|y| = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$

Bài tập 2: Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m:

a) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 17 \\ x^2 - xy + 4y^2 = m \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ 2x^2 + 4xy - 2y^2 = m \end{cases}$

Bài tập 3: Chứng tỏ rằng hệ dưới đây có nghiệm với mọi tham số m:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = m \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$$

Bài tập 4: Tìm m để hệ sau có 4 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x^2 + (m+1)xy + (m+2)y^2 = m-1 \\ x^2 + (m-1)xy + (2m+5)y^2 = m+1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Bài tập 5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = k^2 \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases} \quad (k \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ với $k = 1$.

b) Chứng minh rằng hệ có nghiệm với mọi giá trị của k.

Bài tập 6: Chứng tỏ rằng với mọi $m \in \mathbb{R}$, phương trình sau luôn có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = m \\ -2xy + y^2 = 4 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Bài tập 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 15 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8 \end{cases}$$

Đáp số: $\left(-\frac{11}{\sqrt{14}}, \frac{11}{\sqrt{14}}\right); \left(\frac{11}{\sqrt{14}}, -\frac{11}{\sqrt{14}}\right); (2, 1); (-2, -1)$

Bài tập 8: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$$

Đáp số: $\left(-\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{14}}\right); \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{8}{\sqrt{14}}\right); (-1, 2); (1, -2)$

Bài tập 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x - y = 5 \\ x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 6 \end{cases}$$

Đáp số: $\left(\frac{11}{6}, -\frac{7}{6}\right); \left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

Bài tập 10: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 + x^2y^2 - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

(Đề thi HSG TP HCM 19 - 12 - 1995 vòng 1)

Đáp số: $(-1, 1)$

Bài tập 11: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 13 \\ x^2 + 4xy - 2y = -6 \end{cases}$$

Bài tập 13: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = 4 \\ 2x^2 + 3xy + 5y^2 = 10 \end{cases}$$

Bài tập 14: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 12 \\ 2x^2 + 4xy + y^2 = 14 \end{cases}$$

Bài tập 15: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 12 \\ 2x^2 + xy - 3y^2 = 6 \end{cases}$$

6. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn:

6.1. Kiến thức cơ bản:

Phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là:

$$ax + by + cz = d$$

trong đó x, y, z là ba ẩn; a, b, c, d là các hệ số và a, b, c không đồng thời bằng 0.

Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ số còn lại là các hệ số. Mỗi bộ ba số (x_0, y_0, z_0) là nghiệm đúng của cả ba phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (4).

Cách giải:

Cách 1: Có thể giải bằng phương pháp rút thế. Chọn một phương trình có hệ số gọn nhất để rút ra và thay vào các phương trình còn lại.

Cách 2: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.

Cách 3: Giải hệ phương trình bằng phương pháp định thức cấp 3 SARRUS.

Tính định thức

Định thức của hệ:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Khai triển theo phương pháp SARRUS

$$\text{đấu} + \left\{ \begin{matrix} a_3 b_2 c_1 \\ a_1 b_3 c_2 \\ a_2 b_1 c_3 \end{matrix} \right\} \text{đấu} - \left\{ \begin{matrix} a_1 b_2 c_3 \\ a_2 b_3 c_1 \\ a_3 b_1 c_2 \end{matrix} \right\}$$

Định thức của x:

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Định thức của y:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Định thức của z:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Khi $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất tính bởi công thức CRAMER

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \\ z = \frac{D_z}{D} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm (x, y, z) .

6.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = \frac{1}{2} \\ 2x + 3y + 5z = -2 \\ -4x - 7y + z = -4 \end{cases} \quad (1)$$

Giải

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất của hệ (1) với -2 rồi cộng vào phương trình thứ hai theo từng vế tương ứng, nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 4 rồi cộng vào phương trình thứ ba theo từng vế tương ứng được hệ phương trình (đã khử ẩn x ở hai phương trình cuối).

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = \frac{1}{2} \\ -y + z = -3 \\ y + 9z = -2 \end{cases}$$

Tiếp tục cộng hai vế tương ứng của phương trình thứ hai và phương trình thứ ba của hệ mới nhận được, ta được hệ phương trình tương đương dạng tam giác

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = \frac{1}{2} \\ -y + z = -3 \\ 10z = -5 \end{cases}$$

Ta dễ dàng giải ra được

$$z = -\frac{1}{2}; y = \frac{5}{2}; x = -\frac{7}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình $(x; y; z) = \left(-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 8 \\ x + 3y + 9z = 27 \end{cases}$$

(Đề thi lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TPHCM 1990-1991 Ban A)

Giải

Ta có:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ x + 2y + 4z = 8 & (2) \\ x + 3y + 9z = 27 & (3) \end{cases}$$

Lấy phương trình (2) - (1) $\Leftrightarrow y + 3z = 7$

Lấy phương trình (3) - (2) $\Leftrightarrow y + 5z = 19$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y + 3z = 7 \\ y + 5z = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -11 \\ z = 6 \end{cases}$

Thay vào hệ phương trình đã cho ta có: $x = 6$.

$\Rightarrow$ Nghiệm của hệ phương trình là $(x, y, z) = (6, -11, 6)$

Bài tập 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{3}{2x+y} + x = 2 \\ 2y - 3z = 4 \\ \frac{2}{2x+y} - y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Giải

Ta có:
$$\begin{cases} \frac{3}{2x+y} + x = 2 & (1) \\ 2y - 3z = 4 & (2) \\ \frac{2}{2x+y} - y = \frac{3}{2} & (3) \end{cases}$$

Đặt: $t = \frac{3}{2x+y}$ thế vào (1) và (3) ta được:

$$\begin{cases} 3t - 3z = 4 \\ 3y + 2z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Suy ra phương trình có nghiệm $(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right)$

Bài tập 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ y + z - x = 3 \end{cases}$$

Giải

Ta có:
$$\begin{cases} x - y + z = 7 & (1) \\ x + y - z = 1 & (2) \\ y + z - x = 3 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) ta có $x = 4$

Lấy (2) + (3) ta có $y = 2$

Lấy (1) + (3) ta có $z = 5$

Suy ra hệ có nghiệm $(x, y, z) = (4, 2, 5)$

Bài tập 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 3 \\ x + 5y + 5z = 5 \end{cases}$$

Giải

Ta có:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 & (1) \\ x + 3y + 4z = 3 & (2) \\ x + 5y + 5z = 5 & (3) \end{cases}$$

Lấy (2) - (1) ta được: $y + z = 2$

Lấy (3) - (2) ta được: $2y + z = 2$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -5$$

Suy ra hệ có nghiệm $(x, y, z) = (-5, 0, 2)$

Bài tập 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^2 \\ x + by + b^2z = b^2 \\ x + cy + c^2z = c^2 \end{cases}$$

Giải

Ta có:
$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^2 & (1) \\ x + by + b^2z = b^2 & (2) \\ x + cy + c^2z = c^2 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) ta được: $(a - b)y + (a^2 - b^2)z = a^2 - b^2$

$$\Leftrightarrow y + (a + b)z = a + b \quad (4)$$

Lấy (2) - (3) ta được: $(b - c)y + (b^2 - c^2)z = b^2 - c^2$

$$\Leftrightarrow y + (b + c)z = b + c \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có:

$$(a - c)z = a - c$$

$$\Rightarrow z = 1 \Rightarrow y = 0, \Rightarrow x = 0.$$

Suy ra hệ có nghiệm $(x, y, z) = (0, 0, 1)$

Bài tập 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Giải

Ta có:
$$\begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ x - y + z = 2 & (2) \\ x + y - z = 0 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) ta có: $y = 2$

Lấy (2) + (3) ta có: $x = 1$

Lấy (1) - (3) ta có: $z = 3$

Suy ra hệ có nghiệm $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

Bài tập 8: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x + 3y + 4z = 8 \end{cases}$$

Giải

Ta có:
$$\begin{cases} x + y + z = 3 & (1) \\ x + 2y + 3z = 6 & (2) \\ x + 3y + 4z = 8 & (3) \end{cases}$$

Lấy (2) - (1) ta có: $y + 2z = 3$ (4)

Lấy (3) - (2) ta có: $y + z = 2$ (5)

Từ (4) và (5) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y + 2z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Suy ra hệ có nghiệm $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

Bài tập 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 2x + 3y + 4z = 12 \\ 3x + 4y + 5z = 16 \end{cases}$$

Giải

Giải bằng phương pháp cộng đại số.

Suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(x, y, z) = (1, 2, 1)$.

Bài tập 10: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ x + y + mz = 3 \end{cases}$$

Tìm giá trị m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq 1$$

Bài tập 11: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + my + z = 3 \\ x + y + m^2z = 4 \end{cases}$$

Tìm giá trị m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2(m+1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq \pm 1$$

Bài tập 12: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{3}{x+y} = 1 \\ \frac{4}{x+z} = 1 \\ \frac{5}{y+z} = 1 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình được viết lại là:

$$\begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ y + z = & (2) \\ z + x = 5 & (3) \end{cases}$$

Lấy (2) - (1) ta có: $z - x = 2$

Kết hợp với (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} z + x = 4 \\ z - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 2$$

Thay vào hệ phương trình có nghiệm $y = 2$.

Suy ra hệ có nghiệm $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

Bài tập 13: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = z + x \\ z = x + y \end{cases}$$

Giải

Nhận thấy vai trò x, y, z là giống nhau, do đó nếu có nghiệm thì $x = y = z$.

Thật vậy: $x = 2x \Rightarrow x = 0$

$$\Rightarrow x = y = z = 0.$$

Suy ra hệ có nghiệm $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

Bài tập 14: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + x = 3 \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ y + z = 2 & (2) \\ z + x = 3 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) + (3) ta có: $x = 1$.

Thay vào hệ phương trình, suy ra: $y = 0, z = 2$.

Suy ra hệ có nghiệm $(x, y, z) = (1, 0, 2)$

Bài tập 15: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 2 & (1) \\ x = z & (2) \\ x + y + z = 7 & (3) \end{cases}$$

Giải

$$(3) \Leftrightarrow y + 2x = 7$$

$$(1) \Leftrightarrow x + y = 2$$

$$\text{Lấy } (3) + (1) \Leftrightarrow x = 3$$

Thay vào hệ phương trình

Suy ra hệ có nghiệm $(x, y, z) = (3, 1, 3)$

Bài tập 16: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Lấy } (3) - (2) \Leftrightarrow y = 1$$

$$\text{Thay vào phương trình } (1) \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Thay vào phương trình } (2) \Leftrightarrow z = 1$$

$$\text{Suy ra: } (x, y, z) = (2, 1, 1)$$

6.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 + m + m^2 + m^3 \\ x + 2y + z = 4 + m + 2m^2 + m^3 \\ x + y + 3z = 5 + m + m^2 + 3m^3 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Đáp số: Mọi $m \in \mathbb{R}$.

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 28 \\ 2x + y + 3z = 26 \\ 3x + 2y + z = 20 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y; z) = (2, 4, 6)$

Bài tập 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mxy + z = m^3 + m + 1 \\ x - my + z = 4 - m \\ m^2x + y + z = 2m^2 - 1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Giá trị m để hệ phương trình có nghiệm (x, y, z) thỏa mãn: $x + y + z = 6$.

Đáp số: $m = 0$.

Bài tập 4: Cho hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = 1 \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Đáp số: $a \neq 1$ và $a \neq -2$.

Bài tập 5: Giải và biện luận phương trình sau theo tham số a .

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a \\ ax + a^2y + a^3z = a^2 \\ a^2x + a^3y + a^4z = a^3 \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

Đáp số: Vô nghiệm.

Bài tập 6: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{a}y + \sqrt{b}z = \sqrt{a} \\ x + \sqrt{b} + \sqrt{a}z = \sqrt{b} \\ x + y + (1 - \sqrt{a} - \sqrt{b})z = 1 \end{cases} \quad (a, b \text{ là hằng số})$$

Đáp số: $(x; y; z) = (0, 1, 0)$.

Bài tập 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = m \\ x - y - m = m^2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x, y, z) đều là số nguyên

Đáp số: $m = 2k + 1, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài tập 8: Tìm m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + my + m^2z = 1 \\ x + m^2y + m^3z = m \\ x + m^3y + m^4z = m^2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

có nghiệm x, y, z thoả mãn: $x + y + mz = 3$

Đáp số: Không tồn tại m .

Bài tập 9: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} -nx - y - z = 1 \\ -x - n^2y - z = 2 \\ -x - y + n^3z = 3 \end{cases} \quad (n \text{ là tham số})$$

Tìm n để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 10: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1+m)x + (1+2m)y + (1+3m)z = 1 \\ -x - 2y - 3z = 2 \\ -3x - 4y + 5z = 3 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Tìm m để hệ phương trình vô nghiệm.

Đáp số: $m = 0$.

7. Hệ phương trình hoán vị vòng quanh:

7.1. Kiến thức cơ bản:

Xét hệ phương trình ba ẩn dạng:

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases} \quad (f \text{ là hàm số})$$

Dựa vào tính chất của hàm số $f(x)$ (ví dụ: Tính đồng biến, nghịch biến, ...) để chứng minh $x = y = z$.

Giải phương trình $f(x)$, từ đó tìm ra nghiệm của hệ đã cho.

7.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x, y, z \geq 0$.

Đưa hệ phương trình về dạng:
$$\begin{cases} x = \sqrt{y} + 1 \\ y = \sqrt{z} + 1 \\ z = \sqrt{x} + 1 \end{cases}$$

Do vai trò bình đẳng trong hoán vị vòng quanh của x, y, z trong hệ trên, nên có thể giả sử:

$$x = \min\{x, y, z\}$$

Vì $x \leq y, x \leq z$ nên $\sqrt{y} + 1 \leq \sqrt{z} + 1; \sqrt{y} + 1 \leq \sqrt{x} + 1$ hay $y \leq z; y \leq x$.

Tức là $y = \min\{x, y, z\} = x$.

Suy ra $x = y = z$.

Từ đó ta được phương trình:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = x - 1 \\ \Rightarrow x &= (x - 1)^2, (x \geq 1) \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 &\Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, (x \geq 1) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)$.

Bài tập 2: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases}$$

Giải

Do vai trò bình đẳng trong hoán vị vòng quanh của x, y, z trong hệ trên, nên có thể giả sử:

$$x = \max\{x, y, z\}$$

Vì $y \leq x$ nên

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 &\leq x \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + x - 5 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 5) &\leq 0 \end{aligned}$$

Vì $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 > 0$ nên $x \leq 1$

Mà $z \leq x$ nên $z \leq 1$.

Lập luận ngược lại quá trình trên ta được

$$\begin{aligned} (z - 1)(z^2 + 4z + 5) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow z^3 + 3z^2 + 2z - 5 &\leq z \Leftrightarrow x \leq z. \end{aligned}$$

Do đó: $x = z$.

Suy ra: $x = y = z$.

Từ đó, ta được phương trình:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

Bài tập 3: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình đã cho được viết lại như sau:

$$\begin{cases} y^3 = 6x^2 + 12x - 8 \\ z^3 = 6y^2 + 12y - 8 \\ x^3 = 6z^2 + 12z - 8 \end{cases}$$

Vì $y^3 = 6(x-1)^2 + 2 \geq 2$ nên $y \geq \sqrt[3]{2}$

Tương tự $z, x \geq \sqrt[3]{2}$.

Xét hàm số: $f(t) = 6t^2 + 12t - 8, t \geq \sqrt[3]{2}$.

Tương tự như bài tập 3, ta chứng minh được hàm f đồng biến.

Hệ đã cho được viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases} y^3 = f(x) \\ z^3 = f(y) \\ x^3 = f(z) \end{cases}$$

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $x \geq y$.

Vì f là hàm đồng biến nên $f(x) \geq f(y)$ hay $y^3 \geq z^3$. Do đó $y \geq z$.

Suy ra $f(y) \geq f(z)$ hay $z^3 \geq x^3$. Do đó $z \geq x$.

Khi đó: $x \geq y \geq z \geq x$.

Suy ra: $x = y = z$.

Từ đó ta được phương trình:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Trường hợp 2: $x < y$.

Chứng minh tương tự, ta được $x < y < z < x$ (loại)

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y; z) = (2; 2; 2)$.

Bài tập 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + x^2 + x - 2 = y \\ y^3 + y^2 + y - 2 = z \\ z^3 + z^2 + z - 2 = x \end{cases} \quad (3)$$

Giải

Ta có thể nhận xét bài toán này giống như lời giải bài tập 2. Tuy nhiên ta có thể giải theo một cách khác bằng cách xét hàm số sau:

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + t^2 + t - 2, t \in \mathbb{R}$.

Thật vậy, với hai số t_1, t_2 bất kỳ, ta có:

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = t_1^2 + t_2^2 + t_1 t_2 + t_1 + t_2 + 1 = \frac{1}{2} \left((t_1 + t_2)^2 + (t_1 + 1)^2 + (t_2 + 1)^2 \right) > 0$$

Hệ đã cho được viết dưới dạng

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f(y) \\ x = f(z) \end{cases}$$

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $x \geq y$.

Vì f là hàm đồng biến nên $f(x) \geq f(y)$ hay $y \geq z$.

Suy ra $f(y) \geq f(z)$ hay $z \geq x$.

Khi đó: $x \geq y \geq z \geq x$

Suy ra: $x = y = z$.

Từ đó ta được phương trình:

$$x^3 + x^2 + x - 2 = x \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ (Vì } x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0 \text{)}$$

Trường hợp 2: $x < y$.

Chứng minh tương tự, ta có: $x < y < z < x$ (loại)

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

7.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{6}{5} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{4}{3} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{12}{7} \end{cases}$$

Bài tập 2: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x(y-z) = -4 \\ y(z-x) = 9 \\ z(x+y) = 1 \end{cases}$$

Bài tập 3: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = \frac{24}{5} \\ \frac{xyz}{y+z} = \frac{24}{5} \\ \frac{xyz}{x+z} = 4 \end{cases}$$

Bài tập 4: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x+1 = y^3 + y^2 + y \\ 2y+1 = z^3 + z^2 + z \\ 2z+1 = x^3 + x^2 + x \end{cases}$$

Bài tập 5: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+t=3 \\ t+p=4 \\ p+q=5 \\ q+r=6 \\ r+x=7 \end{cases}$$

Bài tập 6: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ y^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \\ z^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \end{cases}$$

Bài tập 7: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^4 - 16y + 8 = 0 \\ y^4 - 16z + 8 = 0 \\ z^4 - 16x + 8 = 0 \end{cases}$$

Bài tập 8: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{4z - 1} \\ y + z = \sqrt{4x - 1} \\ z + x = \sqrt{4y - 1} \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 16
GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Cách giải:

Cách giải bài toán bằng cách lập phương trình: Gồm 3 bước:

Bước 1: Lập phương trình.

Chọn ẩn và tìm điều kiện cho ẩn (chọn ẩn là các đại lượng bài toán yêu cầu)

Biểu diễn các đại lượng khác qua ẩn.

Lập phương trình.

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Nhận định kết quả.

Đối chiếu với điều kiện bài toán.

Nếu kết quả có chứa tham số thì phải biện luận.

Các dạng toán cơ bản:

Dạng 1: Dạng toán chuyển động.

Dạng 2: Dạng toán liên quan tới các kiến thức hình học.

Dạng 3: Dạng toán công việc làm chung, làm riêng.

Dạng 4: Dạng toán chảy chung, chảy riêng của vòi nước.

Dạng 5: Dạng toán tìm số.

Dạng 6: Dạng toán sử dụng các kiến thức vật lý, hoá học.

Dạng 7: Bài toán dân số, phần trăm.

1. Dạng 1: Toán chuyển động:

1.1. Kiến thức cơ bản:

Bài toán chuyển động thường gặp: Chuyển động cùng chiều, ngược chiều, chuyển động trên dòng sông, ...

Cách giải:

Gọi s , t , v : Lần lượt là quãng đường, thời gian, vận tốc.

Quãng đường: $s = v.t$.

Vận tốc: $v = \frac{s}{t}$.

Thời gian: $t = \frac{s}{v}$.

Các dạng cơ bản:

(1) Chuyển động cùng chiều:

Hai xe chuyển động cùng chiều trên cùng một quãng đường, đến khi gặp nhau:

Quãng đường xe 1 đi = Quãng đường xe 2 đi.

Nếu hai xe cùng xuất phát, mà ô tô 1 đến trước ô tô 2 là t giờ:

Thời gian xe 2 đi - Thời gian xe 1 đi = t

(2) Chuyển động ngược chiều:

Hai xe chuyển động ngược chiều trên cùng một quãng đường đến chỗ gặp nhau:

Quãng đường xe 1 đi + Quãng đường xe 2 đi = s

(3) Chuyển động trên dòng nước:

$v_{\text{xuôi dòng}} = v_{\text{riêng}} + v_{\text{nước}}$

$v_{\text{ngược dòng}} = v_{\text{riêng}} - v_{\text{nước}}$

(4) Chuyển động trên cùng một đường tròn:

Hai vật xuất phát từ một điểm sau thời gian t thì gặp nhau:

Chuyển động cùng chiều:

Độ dài s của đường tròn: $s = t(v_1 - v_2)$, (với v_1, v_2 là vận tốc của hai vật, $v_1 > v_2$)

Chuyển động ngược chiều:

Độ dài s của đường tròn: $s = t(v_1 + v_2)$, (với v_1, v_2 là vận tốc của hai vật)

1.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Từ hai điểm A và B cách nhau 24 km. Hai ô tô xuất phát từ A và B cùng một lúc và sau đó gặp nhau. Sau 16 phút khởi hành thì ô tô thứ nhất gặp ô tô chạy ngược chiều. Nhưng sau 4 phút, ô tô thứ hai gặp ô tô thứ nhất. Xác định vận tốc của xe xuất phát từ A.

Giải

Gọi khoảng cách đi từ A đến chỗ gặp nhau là: $x(m)$ ($0 < x < 24$).

Khoảng cách từ B đến chỗ gặp nhau là: $24 - x (m)$.

Vận tốc của xe đi từ A là $\frac{15x}{4}$ (vì 16 phút = $\frac{4}{15}$ giờ)

Vận tốc của xe đi từ B là $15.(24 - x)$ (vì 4 phút = $\frac{1}{15}$ giờ)

Thời gian hai xe gặp nhau là

$$\frac{(24 - x)4}{15x} \text{ và } \frac{x}{15(24 - x)}$$

Ta có phương trình:

$$\frac{(24 - x)4}{15x} = \frac{x}{15(24 - x)}$$

$$\Leftrightarrow (x - 16)(x - 48) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = 48 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy vận tốc xe đi từ A là 60km/h.

Bài tập 2: Hai máy bay bay cùng một lúc bay đến một điểm cách đó 1600km. Vận tốc của một trong hai máy bay nhỏ hơn máy bay kia là 80km cho nên đến địa điểm muộn hơn 1 giờ. Tìm vận tốc của máy bay bay nhanh.

Giải

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc của máy bay bay nhanh hơn, ($x > 80$).

Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1600}{x - 80} &= \frac{1600}{x} + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 80x - 128000 &= 0 \\ \begin{cases} x = 400 \\ x = -320 \end{cases} &\text{ (loại)} \end{aligned}$$

Suy ra vận tốc máy bay bay nhanh hơn là 400km/h.

Bài tập 3: Một Ô tô đi từ A đến B cùng một lúc, Ô tô thứ hai đi từ B về A với vận tốc bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc Ô tô thứ nhất. Sau 5 giờ chúng gặp nhau. Hỏi mỗi Ô tô đi cả quãng đường AB mất bao lâu.

Giải

Gọi thời gian ô tô đi từ A đến B là $x (h)$, (điều kiện: $x > 0$);

Ta có vận tốc Ô tô đi từ A đến B là: $\frac{AB}{x} (km/h)$;

Vận tốc Ô tô đi từ B về A là: $\frac{2}{3} \cdot \frac{AB}{x} (km/h)$;

Sau 5 giờ Ô tô đi từ A đến B đi được quãng đường là $5 \cdot \frac{AB}{x} (km)$;

Sau 5 giờ Ô tô đi từ B đến A đi được quãng đường là $5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{AB}{x} (km)$;

Vì sau 5 giờ chúng gặp nhau do đó ta có phương trình:

$$5 \cdot \frac{AB}{x} + 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{AB}{x} = AB$$

Giải phương trình ta được: $x = \frac{25}{3}$.

Vậy thời gian Ô tô đi từ A đến B là $\frac{25}{3}$, thời gian Ô tô đi từ B đến A là $\frac{25}{2}$.

Bài tập 4: Một Ô tô du lịch đi từ A đến C. Cùng lúc từ địa điểm B nằm trên đoạn AC có một Ô tô vận tải cùng đi đến C. Sau 5 giờ hai Ô tô gặp nhau tại C. Hỏi Ô tô du lịch đi từ A đến B mất bao lâu, biết rằng vận tốc của Ô tô tải bằng $\frac{3}{5}$ vận tốc của Ô tô du lịch.

Giải

Gọi thời gian ô tô du lịch đi từ A đến B là x (h), (Điều kiện: $0 < x < 5$).

Ta có thời gian ô tô du lịch đi từ B đến C là $(5 - x)$ (h).

Vận tốc xe ô tô du lịch là: $\frac{BC}{5-x}$ (km/h).

Ta có vận tốc xe tải là: $\frac{BC}{5}$ (km/h).

Vì vận tốc của Ô tô tải bằng $\frac{3}{5}$ vận tốc của Ô tô du lịch, nên ta có phương trình:

$$\frac{BC}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{BC}{5-x}$$

Giải phương trình ta được: $x = 2$.

Vậy Ô tô du lịch đi từ A đến B mất 2 giờ.

Bài tập 5: Đường sông từ thành phố A đến thành phố B ngắn hơn đường bộ 10 km để đi từ thành phố A đến thành phố B Ca nô đi hết 3 giờ 20 phút Ô tô đi hết 2 giờ. Vận tốc Ca nô kém vận tốc Ô tô 17 km/h. Tính vận tốc của Ca nô.

Giải

Gọi vận tốc của ca nô là x (km/h). (Điều kiện: $x > 0$).

Ta có vận tốc của Ô tô là $x + 17$ (km/h).

Ta có chiều dài quãng đường sông AB là: $\frac{10}{3}x$ (km);

chiều dài quãng đường bộ AB là: $2(x + 17)$ (km).

Vì đường sông từ thành phố A đến thành phố B ngắn hơn đường bộ 10 km do đó ta có phương trình:

$$2(x + 17) - \frac{10}{3}x = 10$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 18$ (km/h).

Vậy vận tốc của Ca nô là: 18 km/h.

Bài tập 6: Một người đi xe đạp từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 50 km. Sau đó 1 giờ 30 phút một người đi xe máy cũng đi từ A và đến B sớm hơn 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng vận tốc xe máy gấp 2,5 lần vận tốc xe đạp.

Giải

Gọi vận tốc của người đi xe đạp là x (km/h), (Điều kiện: $x > 0$).

Ta có vận tốc của người đi xe máy là $2,5x$ (km/h).

Thời gian người đi xe đạp đi từ A đến B là $\frac{50}{x}$ (h);

Thời gian người đi xe máy đi từ A đến B là $\frac{50}{2,5x}$ (h).

Vì người đi xe máy đi sau 1 giờ 30 phút và đến B sớm hơn 1 giờ so với người đi xe đạp do đó ta có phương trình:

$$\frac{50}{x} - \frac{50}{2,5x} = 2,5$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 12$ (km/h).

Vậy vận tốc của người đi xe đạp là 12 km/h, vận tốc của người đi xe máy là 30 km/h.

Bài tập 7: Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc trung bình 30 km/h. Khi đến B người đó nghỉ 20 phút rồi quay trở về A với vận tốc trung bình 25 km/h. Tính quãng đường AB, biết thời gian cả đi và về là 5 giờ 50 phút.

Giải

Gọi chiều dài của quãng đường AB là x (km), (Điều kiện: $x > 0$).

Thời gian người đi xe máy đi từ A đến B là $\frac{x}{30}$ (h);

Thời gian người đi xe máy đi từ B đến A là $\frac{x}{25}$ (h)

Vì người đi xe máy nghỉ tại B 20 phút và tổng thời gian cả đi và về là 5 giờ 50 phút do đó ta có phương trình:

$$\frac{x}{30} + \frac{x}{25} + \frac{1}{3} = 5\frac{5}{6}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 75$ (km/h).

Vậy độ dài quãng đường AB là 75 km/h.

Bài tập 8: Một Ô tô dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc trung bình 40 km/h. Lúc đầu ô tô đi với vận tốc đó, khi còn 60 km nữa thì được nửa quãng đường AB, người lái xe tăng thêm vận tốc 10 km/h trên quãng đường còn lại, do đó Ô tô đến B sớm hơn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB.

Giải

Gọi chiều dài của quãng đường AB là x (km), (Điều kiện: $x > 0$).

(Ta chỉ xét quãng đường BC khi vận tốc thay đổi)

Ta có thời gian dự định đi hết quãng đường BC là $\frac{\frac{x}{2} + 60}{40}$ (h)

Thời gian Ô tô thực đi trên quãng đường BC sau khi tăng vận tốc thêm 10 km/h là: $\frac{\frac{x}{2} + 60}{50}$

Vì sau khi người lái xe tăng thêm vận tốc 10 km/h trên quãng đường còn lại, do đó Ô tô đến B sớm hơn 1 giờ so với dự định do đó ta có phương trình:

$$\frac{\frac{x}{2} + 60}{40} - \frac{\frac{x}{2} + 60}{50} = 1$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 280$ km.

Vậy quãng đường AB dài 280 km.

Bài tập 9: Một Ô tô dự định đi từ A đến B trong thời gian nhất định nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

Giải

Gọi chiều dài của quãng đường AB là x (km), (Điều kiện: $x > 0$).

Thời gian xe chạy với vận tốc 35 km/h là $\frac{x}{35}$ (h); Thời gian xe chạy với vận tốc 50 km/h là $\frac{x}{50}$ (h).

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{x}{35} - 2 = \frac{x}{50} + 1$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 350$ km.

Vậy thời gian dự định là $\frac{350}{35} - 2 = 8$ (giờ), quãng đường AB là 350 km.

Bài tập 10: Một chiếc thuyền khởi hành từ bến sông A, sau 5 giờ 20 phút một ca nô chạy từ bến sông A đuổi theo và gặp thuyền cách bến A 20 km. Hỏi vận tốc của thuyền, biết rằng ca nô chạy nhanh hơn thuyền 12 km/h.

Giải

Gọi vận tốc của thuyền là x (km/h), (Điều kiện: $x > 0$).

Ta có vận tốc của ca nô là $x + 12$ (km/h).

Thời gian thuyền đi hết quãng đường 20 km là: $\frac{20}{x}$ (h).

Thời gian Ca nô đi hết quãng đường 20 km là: $\frac{20}{x+12}$ (h).

Vì sau 5 giờ 20 phút một Ca nô chạy từ bến sông A đuổi theo và gặp thuyền cách bến A 20 km, do đó ta có phương trình:

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{x+12} = \frac{16}{3}$$

Giải phương trình: $x^2 + 12x - 45 = 0$.

Ta được $x = 3$ (km/h).

Vậy vận tốc của Ca nô là 15 km/h.

Bài tập 11: Quãng đường AB dài 270 km. Hai Ô tô khởi hành cùng một lúc đi từ A đến B. Ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn Ô tô thứ hai 12 km/h, nên đến trước Ô tô thứ hai 40 phút. Tính vận tốc của mỗi Ô tô.

Giải

Gọi vận tốc của Ô tô thứ nhất là x (km/h), (Điều kiện: $x > 12$)

Ta có vận tốc của Ô tô thứ hai là $x - 12$ (km/h).

Thời gian Ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là: $\frac{270}{x}$ (h).

Thời gian Ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB là: $\frac{270}{x-12}$ (h).

Vì hai Ô tô cùng xuất phát và Ô tô thứ nhất đến B trước Ô tô thứ hai là 40 P nên ta có phương trình:

$$\frac{270}{x-12} - \frac{270}{x} = \frac{2}{3}$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 6 + 12\sqrt{34}$.

Vậy vận tốc của Ô tô thứ nhất $6 + 12\sqrt{34}$ km/h, Ô tô thứ hai là $12\sqrt{34} - 6$ km/h.

Bài tập 12: Một tàu thủy chạy trên một khúc sông dài 80 km, cả đi và về mất 8 giờ 20 phút. Tính vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Giải

Gọi vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng là x (km/h), (Điều kiện: $x > 4$).

Vận tốc tàu thủy khi đi xuôi dòng: $x + 4$ (km/h).

Vận tốc tàu thủy khi đi ngược dòng: $x - 4$ (km/h).

Thời gian tàu thủy đi xuôi dòng là: $\frac{80}{x+4}$ (h), Thời gian Tàu thủy đi ngược dòng là: $\frac{80}{x-4}$ (h).

Vì tổng thời gian cả xuôi dòng và ngược dòng là 8 giờ 20 phút do đó ta có phương trình:

$$\frac{80}{x+4} + \frac{80}{x-4} = \frac{25}{3}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 20$ (km/h).

Vậy vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng là: 20 km/h.

Bài tập 13: Hai Ca nô khởi hành cùng một lúc và chạy từ bến sông A đến bến sông B Ca nô I chạy với vận tốc 20 km/h, Ca nô II chạy với vận tốc 24 km/h. Trên đường đi Ca nô II dừng lại 40 phút, sau đó tiếp tục chạy với vận tốc như cũ. Tính chiều dài quãng sông AB, biết rằng hai Ca nô đến B cùng một lúc.

Giải

Gọi chiều dài quãng sông A B là x (km), (Điều kiện: $x > 0$).

Ta có thời gian Canô I chạy từ A đến B là: $\frac{x}{20}$ (h),

Ta có thời gian Canô II chạy từ A đến B là: $\frac{x}{24}$ (h).

Trên đường đi Ca nô II dừng lại 40 phút và cùng đến B do đó ta có phương trình:

$$\frac{x}{20} - \frac{x}{24} = \frac{2}{3}$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 80$ km.

Vậy quãng đường AB là 80km.

Bài tập 14: Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ địa điểm A đến địa điểm B dài 240 km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai 12 km/h nên đến địa điểm B trước ô tô thứ hai là 100 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Giải

Gọi vận tốc của ô tô thứ hai là x (km/h), (Điều kiện: $x > 0$).

Ta có vận tốc của ô tô thứ nhất là $x + 12$ km/h.

Thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB là: $\frac{240}{x}$ (h).

Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là: $\frac{240}{x+12}$ (h).

Vì ô tô thứ nhất đến địa điểm B trước ô tô thứ hai là 100 phút do đó ta có phương trình:

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+12} = \frac{5}{3}$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 36$ km/h.

Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất 48 km/h, ô tô thứ hai là 36 km/h.

Bài tập 15: Một Ca nô xuôi dòng 42 km rồi ngược dòng trở lại 20 km hết tổng cộng 5 giờ. Biết vận tốc của dòng chảy là 2 km/h. Tính vận tốc của Ca nô lúc dòng nước yên lặng.

Giải

Gọi vận tốc của Ca nô khi nước yên lặng là x (km/h), (Điều kiện: $x > 2$).

Vận tốc Ca nô khi đi xuôi dòng: $x + 2$ (km/h).

Vận tốc Ca nô khi đi ngược dòng: $x - 2$ (km/h).

Thời gian Ca nô đi xuôi dòng là: $\frac{42}{x+2}$ (h).

Thời gian Ca nô đi ngược dòng là: $\frac{20}{x-2}$ (h).

Vì tổng thời gian cả xuôi dòng và ngược dòng là 5 giờ do đó ta có phương trình:

$$\frac{42}{x+2} + \frac{20}{x-2} = 5.$$

Giải phương trình: $5x^2 - 62x + 24 = 0$.

Ta được: $x = 12$ (km/h).

Vậy vận tốc Ca nô khi nước yên lặng là: 12 km/h.

1.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Một ô tô và xe máy xuất phát cùng một lúc, đi từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 180 km. Vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 10 km/h, nên ô tô đã đến B trước xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Bài tập 2: Hai người đi xe máy khởi hành cùng một lúc từ A đến B dài 75 km. Người thứ nhất mỗi giờ đi nhanh hơn người thứ hai 5 km/h nên đến B sớm hơn người thứ hai 10 phút. Tính vận tốc của mỗi người.

Bài tập 3: Khoảng cách giữa 2 thành phố A và B là 180 km. một ô tô đi từ A đến B, nghỉ 90 phút ở B rồi lại từ B về A. Thời gian từ lúc đi đến lúc trở về A là 10 giờ. Biết vận tốc lúc về kém vận tốc lúc đi là 5 km/h. Tính vận tốc lúc đi của ô tô.

Bài tập 4: Hai ô tô khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai 10 km nên đến B trước ô tô thứ hai là $\frac{2}{5}$ giờ. Tính vận tốc của mỗi xe.

Bài tập 5: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 108 km. Cùng lúc đó một ô tô khởi hành từ B đến A với vận tốc hơn xe đạp 18 km/h. Sau khi 2 xe gặp nhau, xe đạp phải đi mất 4 giờ nữa mới tới B. Tính vận tốc mỗi xe?

Bài tập 6: Một ô tô đi trên quãng đường dài 520 km. Khi đi được 240 km thì ô tô tăng vận tốc thêm 10 km/h và đi hết quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của ô tô, biết thời gian đi hết quãng đường là 8 giờ.

Bài tập 7: Một người dự định đi từ A đến B cách nhau 36 km trong một thời gian nhất định. Đi được nửa đường, người đó nghỉ 18 phút nên để đến B đúng hẹn phải tăng vận tốc 2 km/h. Tính vận tốc ban đầu.

Bài tập 8: Một chiếc thuyền khởi hành từ bến sông A. Sau đó 5 giờ 20 phút, một ca nô cũng khởi hành từ A đuổi theo và gặp thuyền cách bến A 20 km. Tìm Vận tốc của thuyền, biết vận tốc ca nô nhanh hơn thuyền là 12 km/h.

Bài tập 9: Một ô tô dự định đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Khi còn cách trung điểm quãng đường 60 km thì xe tăng vận tốc thêm 10 km/h nên đã đến B sớm hơn dự định là 1 giờ. Tính quãng đường AB.

Bài tập 10: Một canô xuôi dòng 30 km rồi ngược dòng 36 km. Vận tốc canô xuôi dòng lớn hơn vận tốc canô ngược dòng 3km/h. Tính vận tốc canô lúc ngược dòng. Biết rằng thời gian canô lúc ngược dòng lâu hơn thời gian xuôi dòng 1 giờ.

Bài tập 11: Quãng đường Hải Dương – Thái Nguyên dài 150km. Một ô tô đi từ Hải Dương đến Thái Nguyên rồi nghỉ ở Thái Nguyên 4 giờ 30 phút, sau đó trở về Hải Dương hết tất cả 10 giờ. Tính vận tốc của ô tô lúc đi. Biết vận tốc lúc về nhanh hơn vận tốc lúc đi 10km/h.

Bài tập 12: Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km; cùng lúc đó, cũng từ A về B một bè nửa trôi với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè nửa tại địa điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của ca nô.

Bài tập 13: Một chiếc thuyền đi trên dòng sông dài 50 km. Tổng thời gian xuôi dòng và ngược dòng là 4 giờ 10 phút. Tính vận tốc thực của thuyền, biết rằng một chiếc bè thả nổi phải mất 10 giờ mới xuôi hết dòng sông.

Bài tập 14: Hai canô cùng khởi hành một lúc và chạy từ bến A đến bến B. Canô I chạy với vận tốc 20 km/h, canô II chạy với vận tốc 24km/h. Trên đường đi, canô II dừng lại 40 phút, sau đó tiếp tục chạy với vận tốc như cũ. Tính chiều dài khúc sông AB, biết rằng 2 canô đến bến B cùng một lúc.

Bài tập 15: Hai người đi xe máy cùng khởi hành một lúc từ Hà Nội và Hải Dương ngược chiều nhau, sau 40 phút họ gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng vận tốc người đi từ HN hơn vận tốc người đi từ HD là 10km/h và quãng đường Hà Nội - Hải Dương dài 60km.

Bài tập 16: Hai người đi xe đạp cùng xuất phát một lúc đi từ A đến B dài 30 km, vận tốc của họ hơn kém nhau 3 km/h nên đến B sớm muộn hơn nhau 30 phút. Tính vận tốc của mỗi người.

Bài tập 17: Một người đi từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 78 km. sau đó 1 giờ người thứ hai đi từ tỉnh B đến tỉnh A hai người gặp nhau tại địa điểm C cách B 36 km. Tính thời gian mỗi người đã đi từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau, biết vận tốc người thứ hai lớn hơn vận tốc người thứ nhất là 4 km/h.

Bài tập 18: Quãng đường AB dài 120 km. Hai Ô tô khởi hành cùng một lúc đi từ A đến B, Ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn Ô tô thứ hai là 10 km/h nên đến B trước Ô tô thứ hai 24 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Bài tập 19: Một người dự định đi từ A đến B với thời gian đã định. Nếu người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h thì đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Nếu người đó giảm vận tốc đi 10 km/h thì đến B muộn hơn dự định 2 giờ. Tính vận tốc, thời gian dự định đi và độ dài quãng đường AB.

Bài tập 20: Một Ca nô xuôi dòng 1 km và ngược dòng 1km hết tất cả 3,5 phút. Nếu Ca nô xuôi 20 km và ngược 15 km thì hết 1 giờ. Tính vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của Ca nô.

Bài tập 21: Bạn Hà dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian đã định. Sau khi 1 giờ, Hà nghỉ 10 phút, do đó để đến B đúng hạn Hà phải tăng vận tốc thêm 6 km/h. Tính vận tốc lúc đầu của Hà.

Bài tập 22: Hai người đi xe đạp khởi hành cùng lúc từ A và B cách nhau 60 km và đi đến C. Hướng chuyển động của họ vuông góc với nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Tính vận tốc mỗi người, biết vận tốc người đi từ A nhỏ hơn vận tốc người đi từ B là 6 km/h.

2. Dạng 2: Dạng toán liên quan đến kiến thức hình học:

2.1. Kiến thức cơ bản:

Gọi C: Chu vi, S: Diện tích.

Hình chữ nhật:

Tính chu vi hình chữ nhật: $C = (a + b).2$, (với a, b là chiều dài, chiều rộng)

Tính diện tích hình chữ nhật: $S = a.b$

Hình vuông:

Tính chu vi hình vuông: $C = 4a$ (a: Độ dài cạnh hình vuông)

Tính diện tích hình chữ nhật: $S = a^2$.

Tam giác:

Nửa chu vi: $S = \frac{a+b+c}{2}$

Chu vi tam giác: $C = a + b + c$, (với a, b, c : Lần lượt là độ dài ba cạnh của tam giác)

Diện tích tam giác: $S = \frac{1}{2}a.h_a$, (a : Chiều cao, h_a : Cạnh đáy tương ứng với cạnh a)

Độ dài cạnh huyền: $c^2 = a^2 + b^2$, (c : Cạnh huyền; a, b : Lần lượt là các cạnh góc vuông)

Số đường chéo của một đa giác $\frac{n(n-3)}{2}$, (n : Số đỉnh).

2.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Mỗi cạnh của hình vuông được tăng thêm 2cm. Trong lúc đo diện tích của nó tăng thêm 16cm^2 . Chiều dài của mỗi cạnh hình vuông trước khi chưa tăng là bao nhiêu?

Giải

Gọi x là chiều dài cạnh hình vuông khi chưa tăng, $x(\text{cm})$, (Điều kiện: $x > 0$).

Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= x^2 + 16 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 &= x^2 + 16 \\ \Leftrightarrow 4x &= 12 \Leftrightarrow x = 3\end{aligned}$$

Suy ra chiều dài mỗi cạnh hình vuông khi chưa tăng là 3cm.

Bài tập 2: Tìm hai cạnh của một tam giác vuông biết cạnh huyền bằng 13 cm và tổng hai cạnh góc vuông bằng 17.

Giải

Gọi cạnh góc vuông thứ nhất của tam giác là x (cm), (Điều kiện: $0 < x < 17$).

Ta có cạnh góc vuông còn lại là: $(17 - x)$ (cm).

Vì cạnh huyền của tam giác vuông là 13 do đó ta có phương trình:

$$x^2 + (17 - x)^2 = 13^2$$

Giải phương trình: $x^2 - 17x + 60 = 0$.

Ta được: $x_1 = 12, x_2 = 5$.

Vậy độ dài các cạnh góc vuông lần lượt là 12 cm, 5 cm.

Bài tập 3: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất vườn) rộng 2 m, diện tích còn lại để trồng trọt là 4256 m^2 . Tính kích thước (các cạnh) của khu vườn đó

Giải

Gọi một cạnh của khu vườn là x , (m), (Điều kiện: $x < 140$).

Ta có cạnh còn lại của khu vườn là: $(140 - x)$.

Do lối xung quanh vườn rộng 2 m nên các kích thước các cạnh còn lại để trồng trọt là:

$(x - 4), (140 - x - 4)$ (m)

Vì diện tích còn lại để trồng trọt là 4256 m^2 do đó ta có phương trình:

$$(x - 4)(140 - x - 4) = 4256$$

Giải phương trình: $x^2 - 140x + 4800 = 0$.

Ta được $x_1 = 80, x_2 = 60$.

Vậy các cạnh của khu vườn hình chữ nhật là 80m, 60m.

Bài tập 4: Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 5m. Hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 1m. Tính các cạnh góc vuông của tam giác.

Giải

Gọi cạnh góc vuông thứ nhất là x (m), (Điều kiện: $5 > x > 0$)

Cạnh góc vuông thứ hai là $x + 1$ (m)

Áp dụng định lý Pi-Ta-Go ta có phương trình:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 5^2$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 3$.

Vậy kích thước các cạnh góc vuông của tam giác vuông là 3m và 4m.

Bài tập 5: Một hình chữ nhật có chiều rộng bé hơn chiều dài là 4 m và diện tích là 320m^2 . Tìm chiều dài, chiều rộng của mảnh đất.

Giải

Gọi chiều rộng của mảnh đất là x (m), (Điều kiện: $x > 0$).

Chiều dài của mảnh đất là $x + 4$.

Vì diện tích của mảnh đất là 320m^2 nên ta có phương trình:

$$x(x + 4) = 320$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 16$.

Vậy chiều dài là 16m, chiều rộng là 20m.

Bài tập 6: Một hình chữ nhật có chu vi 120m, diện tích 800m^2 . Tính các kích thước của hình chữ nhật.

Giải

Gọi $x(\text{m})$ là số đo chiều dài hình chữ nhật.

Nửa chu vi hình chữ nhật là $120:2 = 60 (\text{m})$

Số đo chiều rộng hình chữ nhật là: $60 - x (\text{m})$

Điều kiện: $0 < x < 60$.

Diện tích hình chữ nhật là 800m^2 .

Ta có phương trình:

$$x(60 - x) = 800$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 40 (\text{m})$, $x = 20 (\text{m})$.

Vậy chiều dài là 40 (m), chiều rộng là 20 (m).

2.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Một hình chữ nhật có diện tích 300 m^2 . Nếu giảm chiều rộng đi 3m và tăng chiều dài lên 5m thì ta được HCN mới bằng diện tích HCN ban đầu. Tính chu vi HCN ban đầu.

Bài tập 2: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 50 m và diện tích 100 m^2 Tính các cạnh của khu vườn ấy.

Bài tập 3: Một khu vườn hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{5}$ chiều dài và có diện tích bằng 360m^2 . Tính chu vi của khu vườn ấy.

Bài tập 3: Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng $\frac{7}{4}$ chiều rộng và có diện tích bằng 1792m^2 . Tính chu vi khu vườn ấy.

Bài tập 4: Tính các kích thước của hình chữ nhật có diện tích 40cm^2 , biết rằng nếu tăng mỗi kích thước thêm 3 cm thì diện tích tăng thêm 48cm^2 .

Bài tập 5: Một hình chữ nhật có đường chéo bằng 13 m, chiều dài hơn chiều rộng 7m. Tính diện tích hình chữ nhật đó?

Bài tập 6: Một thửa ruộng hình chữ nhật có chu vi là 250m. Tính diện tích của thửa ruộng biết rằng chiều dài giảm 3 lần và chiều rộng tăng 2 lần thì chu vi thửa ruộng không thay đổi

Bài tập 7: Một đa giác lồi có tất cả 35 đường chéo. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu đỉnh?

Bài tập 8: Một cái sân hình tam giác có diện tích 180m^2 . Tính cạnh đáy của sân biết rằng nếu tăng cạnh đáy 4m và giảm chiều cao tương ứng 1 m thì diện tích không đổi?

Bài tập 9: Một miếng đất hình thang cân có chiều cao là 35m hai đáy lần lượt bằng 30m và 50m người ta làm hai đoạn đường có cùng chiều rộng. Các tim đường lần lượt là đường trung bình của hình thang và đoạn thẳng nối hai trung điểm của hai đáy. Tính chiều rộng đoạn đường đó biết rằng diện tích phần làm đường bằng $\frac{1}{4}$ diện tích hình thang.

3. Dạng 3: Toán năng suất.

3.1. Kiến thức cơ bản:

Năng suất làm việc là phần công việc làm được trong một đơn vị thời gian.

Công thức:

$$A = N.T$$

Trong đó: A: Khối lượng công việc.

N: Năng suất làm việc.

T: Thời gian làm việc.

Tổng năng suất riêng bằng năng suất chung khi cùng làm.

Biết năng suất làm việc, thời gian hoàn thành, lượng công việc để áp dụng hợp lý.

Năng suất lao động tăng thêm = $(100\% + \text{mức năng suất } \%)$. quy định công việc.

3.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Một đội máy kéo dự định mỗi ngày cày 40 ha. Khi thực hiện mỗi ngày cày được 52 ha, vì vậy đội không những cày xong trước thời hạn 2 ngày mà còn cày thêm được 4 ha nữa. Tính diện tích thửa ruộng mà đội phải cày theo kế hoạch.

Giải

Gọi diện tích mà đội phải cày theo kế hoạch là x , (ha), (Điều kiện: $x > 0$).

Thời gian đội dự định cày là: $\frac{x}{40}$ (giờ).

Diện tích mà đội thực cày là: $(x + 4)$, (ha).

Thời gian mà đội thực cày là: $\frac{x+4}{52}$ (giờ).

Vì khi thực hiện đội đã cày xong trước thời hạn 2 ngày do đó ta có phương trình:

$$\frac{x}{40} - \frac{x+4}{52} = 2.$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 360$.

Vậy diện tích mà đội dự định cày theo kế hoạch là: 360 ha.

Bài tập 2: Hai tổ công nhân làm chung trong 12 giờ sẽ hoàn thành một công việc đã định. Họ làm chung với nhau trong 4 giờ thì tổ thứ nhất được điều đi làm công việc khác, tổ thứ hai làm một mình phần công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi tổ thứ hai nếu làm một mình thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc.

Giải

Gọi thời gian tổ hai làm một mình hoàn thành công việc là x , (giờ), (Điều kiện: $x > 12$).

Trong 1 giờ tổ hai làm được khối lượng công việc: $\frac{1}{x}$ (KLCV).

Sau 4 giờ hai tổ đã làm chung được khối lượng công việc là: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (KLCV).

Phần công việc còn lại tổ hai phải làm là: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (KLCV).

Vì tổ hai hoàn thành khối lượng công việc còn lại trong 10 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{2}{3} : x = 10.$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 15$.

Vậy thời gian tổ hai làm một mình hoàn thành khối lượng công việc là: 15 giờ.

Bài tập 3: Một đội công nhân hoàn thành một công việc với mức 420 ngày công. Hãy tính số công nhân của đội, biết rằng nếu đội tăng thêm 5 người thì số ngày để hoàn thành công việc sẽ giảm đi 7 ngày.

Giải

Gọi số công nhân của đội là x , (người), (Điều kiện: $x > 0$, nguyên dương).

Số ngày hoàn thành công việc với x người là: $\frac{420}{x}$ (ngày).

Số công nhân sau khi tăng 5 người là: $x + 5$.

Số ngày hoàn thành công việc với $x + 5$ người là: $\frac{420}{x+5}$ (ngày).

Vì nếu đội tăng thêm 5 người thì số ngày để hoàn thành công việc sẽ giảm đi 7 ngày do đó ta có phương trình:

$$\frac{420}{x} - \frac{420}{x+5} = 7.$$

Giải phương trình trên, ta được: $x_1 = 15$; $x_2 = -20$ (loại).

Vậy số công nhân của đội là 15 người.

Bài tập 4: Hai thợ cùng đào một con mương sau 2 giờ 55 phút thì xong công việc. Nếu họ làm riêng thì đội 1 hoàn thành công việc nhanh hơn đội 2 là 2 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu giờ thì xong công việc.

Giải

Gọi thời gian đội 1 làm một mình xong công việc là x (giờ), (Điều kiện: $x > 0$).

Gọi thời gian đội 2 làm một mình xong công việc là $x + 2$ (giờ).

Mỗi giờ đội 1 làm được $\frac{1}{x}$ công việc

Mỗi giờ đội 1 làm được $\frac{1}{x+2}$ công việc

Vì cả hai đội cùng làm nên sau 2 giờ 55 phút $= 2\frac{11}{12} = \frac{35}{12}$ (giờ) xong.

Trong 1 giờ cả hai đội làm được $\frac{12}{35}$ công việc.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 5$ giờ.

Vậy đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 5 giờ, đội thứ hai hoàn thành công việc trong 7 giờ.

Bài tập 5: Hai thợ cùng đào một con mương thì sau 2 giờ 55 phút thì xong việc. Nếu họ làm riêng thì đội 1 hoàn thành công việc nhanh hơn đội 2 là 2 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu giờ thì xong công việc?

Giải

Gọi thời gian đội 1 làm một mình xong công việc là x , ($x > 0$; giờ)

Gọi thời gian đội 2 làm một mình xong công việc là $x + 2$ (giờ)

Mỗi giờ đội 1 làm được $\frac{1}{x}$ công việc

Mỗi giờ đội 2 làm được $\frac{1}{x+2}$ công việc

Vì cả hai đội thì sau 2 giờ 55 phút $= 2\frac{11}{12} = \frac{35}{12}$ (giờ) xong.

Trong 1 giờ cả hai đội làm được $\frac{12}{35}$ công việc

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 5$ (giờ)

Vậy đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 5 giờ. Đội hai hoàn thành công việc trong 7 giờ.

3.3. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Hai người cùng làm chung một công việc mất 3 giờ. Người thứ nhất làm đến nửa công việc người thứ hai làm nốt cho hoàn thành cả thấy hết 8 giờ. Nếu mỗi người làm riêng thì mất mấy giờ?

Bài tập 2: Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó?

Bài tập 3: Có hai đội công nhân, mỗi đội phải sử 10km đường. Thời gian đội I làm nhiều hơn đội II là 1 ngày. Trong một ngày mỗi đội làm được bao nhiêu km đường. Biết rằng cả hai đội làm được 4,5km đường trong một ngày.

Bài tập 4: Hai đội thủy lợi, tổng cộng có 25 người đào một con mương. Đội I đào được $45m^3$ đất, đội II đào được $40m^3$ đất. Biết rằng mỗi công nhân đội II đào nhiều hơn mỗi công nhân đội I là $1m^3$. Tính số đất mỗi công nhân đội I đào được.

Bài tập 5: An và Bình cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 20 phút thì xong. Nếu An làm trong 5 giờ và Bình làm trong 6 giờ thì cả hai người làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình làm công việc đó thì trong mấy giờ xong.

Bài tập 6: Hai lớp 9A và 9B cùng tu sửa khu vườn thực nghiệm của nhà trường trong 4 ngày xong. Nếu mỗi lớp tu sửa một mình muốn hành thành công việc ấy thì lớp 9A cần ít thời gian hơn lớp 9B là 6 ngày. Hỏi mỗi lớp làm một mình thì trong bao lâu hoàn thành công việc.

Bài tập 7: Hai tổ sản xuất nhận chung một công việc. Nếu làm chung trong 4 giờ thì hoàn thành $\frac{2}{3}$ công việc. Nếu để mỗi tổ làm riêng thì tổ 1 làm xong công việc trước tổ 2 là 5 giờ. Hỏi mỗi tổ làm một mình thì trong bao lâu xong công việc.

Bài tập 8: Hai tổ cùng được giao làm một việc. Nếu cùng làm chung thì hoàn thành trong 15 giờ. Nếu tổ 1 làm trong 5 giờ, tổ 2 làm trong 3 giờ thì làm được 30% công việc. Hỏi nếu làm một mình mỗi tổ cần làm trong bao lâu mới hoàn thành công việc.

Bài tập 9: Hai người làm chung một công việc thì xong trong 5 giờ 50'. Sau khi cả hai người cùng làm được 5 giờ. Người thứ nhất phải đi làm việc khác, nên người kia làm tiếp 2 giờ nữa mới xong công việc. Hỏi nếu làm một mình mỗi người làm trong bao lâu thì xong.

Bài tập 10: Hai người thợ cùng làm một công việc, nếu làm riêng mỗi người nửa công việc thì tổng cộng số giờ làm việc là 12 giờ 30 phút. Nếu hai người làm chung thì hai người chỉ làm trong 6 giờ thì xong công việc. Hỏi mỗi người làm riêng thì mất bao lâu xong việc.

Bài tập 11: Một tổ công nhân phải làm 144 dụng cụ do 3 công nhân chuyển đi làm việc khác nên mỗi người còn lại phải làm thêm 4 dụng cụ. Tính số công nhân của tổ lúc đầu (năng suất mỗi người như nhau).

Bài tập 12: Một máy kéo dự định mỗi ngày cày 40 ha. Khi thực hiện mỗi ngày đội máy kéo cày được 52 ha. Vì vậy đội không những đã cày xong trước thời hạn 2 ngày mà còn cày thêm được 4 ha nữa. Tính diện tích thửa ruộng mà đội phải cày theo kế hoạch đã định.

Bài tập 13: Một tổ dệt khăn mặt, mỗi ngày theo kế hoạch phải dệt 500 chiếc, nhưng thực tế mỗi ngày đã dệt thêm được 60 chiếc, cho nên chẳng những đã hoàn thành kế hoạch trước 3 ngày mà còn dệt thêm được 1200 khăn mặt so với kế hoạch. Tìm số khăn mặt phải dệt theo kế hoạch lúc đầu.

Bài tập 14: Một tổ sản xuất có kế hoạch sản xuất 720 sản phẩm theo năng suất dự kiến. Thời gian làm theo năng suất tăng 10 sản phẩm mỗi ngày kém 4 ngày so với thời gian làm theo năng suất giảm đi 20 sản phẩm mỗi ngày (tăng, giảm so với năng suất dự kiến). Tính năng suất dự kiến theo kế hoạch.

Bài tập 15: Một tàu đánh cá dự định trung bình mỗi ngày đánh bắt được 30 tấn cá. Nhưng thực tế mỗi ngày đánh bắt thêm được 8 tấn nên chẳng những đã hoàn thành kế hoạch sớm được 2 ngày mà còn đánh bắt vượt mức 20 tấn. Hỏi số tấn cá dự định đánh bắt theo kế hoạch là bao nhiêu?

Bài tập 16: Theo kế hoạch, một tổ công nhân phải sản xuất 360 sản phẩm. Đến khi làm việc, do phải điều 3 công nhân đi làm việc khác nên mỗi công nhân còn lại phải làm nhiều hơn dự định là 4 sản phẩm. Hỏi lúc đầu tổ có bao nhiêu công nhân? Biết rằng năng suất lao động của mỗi công nhân là như nhau.

4. Dạng 4: Dạng toán chảy chung, chảy riêng của vòi nước:

4.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Bước 1: Tìm lượng nước chảy chung của hai vòi.

Lượng nước chảy riêng của mỗi vòi vào bể hoàn thành.

Lập phương trình lượng nước.

Bước 2: Thời gian hai vòi chảy đầy bể.

Thời gian chảy riêng hoàn thành của mỗi vòi.

Lập phương trình thời gian chảy đầy bể.

Bước 3: Giải hệ phương trình.

4.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Một Máy bơm muốn bơm đầy nước vào một bể chứa trong một thời gian quy định thì mỗi giờ phải bơm được 10m^3 . Sau khi bơm được $\frac{1}{3}$ dung tích bể chứa, người công nhân vận hành cho máy bơm công suất lớn hơn mỗi giờ bơm được 15 m^3 . Do đó bể được bơm đầy trước 48 phút so với thời gian quy định. Tính dung tích của bể chứa.

Giải

Gọi dung tích của bể chứa là x , (m^3), (Điều kiện: $x > 0$).

Ta có thời gian dự định để bơm đầy bể là: $\frac{x}{10}$ (giờ).

Thời gian để bơm $\frac{1}{3}$ bể với công suất $10 m^3/s$ là: $\frac{x}{30}$ (giờ).

Thời gian để bơm $\frac{2}{3}$ bể còn lại với công suất $15 m^3/s$ là: $\frac{2x}{45}$.

Do công suất tăng khi bơm $\frac{2}{3}$ bể còn lại nên thời gian bơm đầy trước 48 phút so với quy định do đó ta có phương trình:

$$\frac{x}{10} - \left(\frac{x}{30} + \frac{2x}{45} \right) = \frac{4}{5}$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 36$.

Vậy dung tích bể chứa là $36m^3$.

Bài tập 2: Nếu hai vòi nước cùng chảy vào bể thì sau 4 giờ bể đầy. Nếu mỗi vòi chảy một mình thì phải chảy trong bao lâu mới đầy bể? Biết rằng nếu chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể sớm hơn vòi thứ hai 6 giờ.

Giải

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể là x (giờ), (Điều kiện: $x > 0$).

Thời gian vòi thứ hai chảy đầy bể là $x + 6$.

Trong một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể.

Trong một giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x+6}$ bể.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 6$.

Vậy vòi thứ nhất chảy 6 giờ, vòi thứ hai chảy 12 giờ thì đầy bể.

Bài tập 3: Có hai vòi nước, vòi I chảy đầy bể trong 1,5 giờ, vòi II chảy đầy bể trong 2 giờ. Người ta cho vòi I chảy trong một thời gian, rồi khóa lại và cho vòi II chảy tiếp, tổng cộng trong 1,8 giờ thì đầy bể. Hỏi mỗi vòi đã chảy trong bao lâu?

Giải

Vòi I chảy riêng làm đầy bể trong $1,5 = \frac{3}{2}$ giờ thì trong 1 giờ chảy vào được $\frac{2}{3}$ bể.

Vòi II chảy riêng làm đầy bể trong 2 giờ thì trong 1 giờ chảy vào được $\frac{1}{2}$ bể.

Gọi thời gian mà vòi I đã chảy là x giờ ($0 < x < 1,8$), thời gian vòi II đã chảy là $1,8 - x$ giờ.

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}(1,8 - x) = 1$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 0,6$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy vòi I chảy trong 0,6 giờ, vòi II chảy trong 1,2 giờ.

Bài tập 4: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 2 giờ 55 phút sẽ đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất chảy nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy trong bao lâu mới đầy bể.

Giải

Gọi thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là x giờ, ($x > 2$)

Vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là $x - 2$ giờ.

Ta có: 2 giờ 55 phút = $\frac{35}{12}$ giờ.

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{12}{35}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 7$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong 5 giờ, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong 7 giờ.

4.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Hai vòi nước cùng chảy vào bể thì sau 1 giờ 20 thì bể đầy. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ 2 chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì bao nhiêu lâu mới đầy bể.

Bài tập 2: Hai vòi nước nếu cùng chảy thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 10 giờ thì đầy bể. Hỏi nếu vòi thứ hai chảy một mình thì trong bao lâu đầy bể.

Bài tập 3: Hai vòi nước cùng chảy vào 1 bể thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể, mỗi giờ lượng nước của vòi 1 chảy bằng $1\frac{1}{2}$ lượng nước ở vòi 2. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu đầy bể.

Bài tập 4: Hai vùi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước trong 4 giờ 48 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vùi 1 trong 3 giờ và vùi 2 trong 4 giờ thỡ được $\frac{3}{4}$ bể nước. Hỏi mỗi vùi chảy một mĩnh thỡ trong bao lâu mới đầy bể.

5. Dạng 5: Toán tìm số:

5.1. Kiến thức cơ bản:

Cách viết số trong hệ thập phân của số tự nhiên:

Số có hai chữ số: $\overline{ab} = 10a + b$

Số có ba chữ số: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$

Số có ba chữ số: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$

Quan hệ chia hết và chia có dư:

Số a chia b được c và có số dư là r, được viết: $a = b.c + r$.

Nếu a chia hết cho b thì số dư $r = 0$.

Nếu a không chia hết cho b thì số dư $r \neq 0$.

5.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Một số của một phân số lớn hơn tử số của nó là 3 đơn vị. Nếu tăng cả tử và mẫu của nó thêm 1 đơn vị thì được một phân số mới bằng $\frac{1}{2}$ phân số đã cho. Tìm phân số đó?

Giải

Gọi tử số của phân số đó là x, (Điều kiện: $x \neq 3$)

Mẫu số của phân số đó là $x + 3$.

Nếu tăng cả tử và mẫu thêm 1 đơn vị thì

Tử số là $x + 1$

Mẫu số là $x + 3 + 1 = x + 4$

Được phân số mới bằng $\frac{1}{2}$ ta có phương trình:

$$\frac{x+1}{x+4} = \frac{1}{2}$$

Giải phương trình trên ta được: $x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phân số cần tìm là $\frac{2}{5}$.

Bài tập 2: Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương của nó là 85.

Giải

Gọi số bé là x , ($x \in \mathbb{N}$). Số tự nhiên kế sau là $x + 1$.

Vì tổng các bình phương của nó là 85 nên ta có phương trình:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 85$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 85 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 84 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 42 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.(-42) = 169 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$$

Phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{-1+13}{2} = 6 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$x_2 = \frac{-1-13}{2} = -7 \text{ (loại)}$$

Vậy hai số phải tìm là 6 và 7.

Bài tập 3: Tìm số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng tổng các chữ số là 11. Nếu đổi chỗ hai chữ số, hàng chục và hàng đơn vị thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

Giải

Gọi chữ số hàng đơn vị là x , (Điều kiện: $0 < x \leq 9$).

Chữ số hàng chục là $11 - x$.

Vì đổi chỗ hai chữ số, hàng chục và hàng đơn vị thì số đó tăng thêm 27 đơn vị nên ta có phương trình:

$$10x + 11 - x = 10(11 - x) + x + 27$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 7$.

Vậy số cần tìm là 47.

Bài tập 4: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 và số đó lớn hơn tổng các bình phương các chữ số của nó là 1.

Giải

Gọi chữ số đơn vị là x , ($0 \leq x \leq 7$).

Chữ số hàng chục là $x + 2$.

Vì số cần tìm lớn hơn tổng các bình phương các chữ số của nó là 1 nên ta có phương trình:

$$10(x + 2) + x = (x + 2)^2 + x^2 + 1$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 5$.

Vậy số cần tìm là 75.

Bài tập 5: Tìm hai số khi biết tổng là 12 và tổng bình phương của chúng bằng 90. Hai số đó là.

Giải

Gọi số thứ nhất là x ($x \in \mathbb{N}$, $x < 12$)

Số thứ hai là $12 - x$.

Theo bài ra ta có: $x^2 + (12 - x)^2 = 90$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 9 \end{cases}$$

Vậy hai số cần tìm là 3 và 9.

5.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục là 4 và nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì ta nhận được số mới bằng $\frac{17}{5}$ số ban đầu.

Bài tập 2: Tìm số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 và nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì ta nhận được số mới bằng $\frac{4}{7}$ số ban đầu.

Bài tập 3: Cho một số có hai chữ số, tổng của hai chữ số bằng 11. Nếu thay đổi theo thứ tự ngược lại được một số mới lớn hơn số lúc đầu 27 đơn vị. Tìm số đã cho.

Bài tập 4: Một số có hai chữ số lớn gấp 3 lần tổng các chữ số của nó, còn bình phương của tổng các chữ số gấp 3 lần số đã cho. Tìm số đó.

Bài tập 5: Dem một số có hai chữ số nhân với tổng các chữ số của nó thì được 405. Nếu lấy số được viết bởi hai chữ số ấy nhưng theo thứ tự ngược lại nhân với tổng các chữ số của nó thì được 486. Tìm số đó.

Bài tập 6: Tích của 2 số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm 2 số đó.

Bài tập 7: Dem một số nhân với 3 rồi trừ đi 7 thì được 50. Hỏi số đó là bao nhiêu?

Bài tập 8: Tổng hai số bằng 51. Tìm hai số đó biết rằng $\frac{2}{5}$ số thứ nhất thì bằng $\frac{1}{6}$ số thứ hai.

Bài tập 9: Tìm số tự nhiên có 2 chữ số, biết rằng số đó bằng lập phương của số tạo bởi chữ số hàng vạn và chữ số hàng nghìn của số đã cho theo thứ tự đó.

Bài tập 10: Tìm hai số hơn kém nhau 5 đơn vị và tích của chúng bằng 150.

6. Dạng 6: Toán sử dụng các kiến thức vật lý, hóa học:

6.1. Kiến thức cơ bản:

Tính khối lượng riêng của vật:

$$D = \frac{m}{V}$$

D: Khối lượng riêng, m: Khối lượng, V: Thể tích.

Công thức tính thành phần phần trăm của chất có trong dung dịch:

$$C\% = \frac{m_{ct}}{m_{dd}} \cdot 100\%$$

C%: Nồng độ phần trăm, m_{ct} : Khối lượng chất tan, m_{dd} : Khối lượng dung dịch.

6.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Người ta trộn 8g chất lỏng này với 6g chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn nó là $0,2\text{g/cm}^3$ để được hỗn hợp có khối lượng riêng $0,7\text{g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Giải

Gọi khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là $x (\text{g/cm}^3)$, (Điều kiện: $x > 0,2$)

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $x - 0,2 (\text{g/cm}^3)$.

Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\frac{8}{x} (\text{cm}^3)$

Thể tích của chất lỏng thứ hai là $\frac{6}{x - 0,2} (\text{cm}^3)$

Thể tích của hỗn hợp là $\frac{8}{x} + \frac{6}{x + 0,2} (\text{cm}^3)$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x + 0,2} = \frac{14}{0,7}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 0,8$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là $0,8 (\text{g/cm}^3)$

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $0,6 (\text{g/cm}^3)$.

Bài tập 2: Biết rằng 200g một dung dịch chứa 50g muối. Hỏi phải pha thêm bao nhiêu gam nước vào dung dịch đó để được một dung dịch chứa 20% muối?

Giải

Gọi x là lượng nước cần pha thêm vào dung dịch đã cho ($x > 0$, g)

Khi đó lượng dung dịch nước là $200 + x$.

Nồng độ dung dịch là $\frac{50}{200 + x}$

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{50}{200 + x} = \frac{20}{100}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 100$.

Vậy lượng nước cần pha thêm là 100g.

Bài tập 3: Người ta pha 3kg nước nóng ở nhiệt độ 90°C và 2kg nước lạnh ở nhiệt độ 20°C . Hỏi nhiệt độ nước sau khi pha là bao nhiêu.

Giải

Gọi nhiệt độ cuối cùng của nước sau khi pha là $x^{\circ}\text{C}$, ($x > 0$)

Khi đó nhiệt lượng tỏa ra là: $3c(90 - x)$ kilocalo, (với c là nhiệt dung riêng của nước)

Nhiệt lượng hấp thụ là: $2c(x - 20)$ kilocalo.

Do nhiệt lượng thu được bằng nhiệt lượng tỏa ra, ta có phương trình:

$$3c(90 - x) = 2c(x - 20)$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 62^{\circ}\text{C}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nhiệt độ của nước sau khi pha là 62°C .

Bài tập 4: Khi trộn 8g chất lỏng M với 6g chất lỏng N có khối lượng riêng nhỏ hơn 200kg/m^3 thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng 700kg/m^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Giải

Gọi khối lượng riêng của chất lỏng M là $x\text{ kg/m}^3$, ($x > 200$)

Khối lượng riêng của chất lỏng N là $x - 200\text{ kg/m}^3$

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x - 200} = \frac{14}{700}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 800$.

Vậy khối lượng riêng của M là 800 kg/m^3 và khối lượng riêng của N là 600 kg/m^3 .

Bài tập 5: Người ta hòa lẫn 4kg chất lỏng I với 3kg chất lỏng II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700kg/m^3 . Biết rằng khối lượng riêng của chất lỏng I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng II là 200kg/m^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Giải

Gọi khối lượng riêng của chất lỏng I là $x\text{ kg/m}^3$, ($x > 200$)

Khối lượng riêng của chất lỏng II là $x - 200\text{ kg/m}^3$.

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$\frac{4}{x} + \frac{3}{x - 200} = \frac{7}{700}$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 800$.

Vậy khối lượng riêng của chất lỏng I là 800 kg/m^3 , khối lượng riêng của chất lỏng II là 600 kg/m^3 .

6.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho 200g dung dịch có nồng độ 10%. Phải pha thêm vào dung dịch đó bao nhiêu gam nước để dung dịch lúc sau có nồng độ là 8%.

Bài tập 2: Hai dung dịch có khối lượng tổng cộng bằng 220kg. Lượng muối trong dung dịch I là 5kg, lượng muối trong dung dịch II là 4,8kg. Biết nồng độ muối trong dung dịch I nhiều hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 1%. Tính khối lượng mỗi dung dịch nói trên.

Bài tập 3: Vào thế kỷ III trước công nguyên, vua xứ Xi-ra-cut giao cho Ac-si-met kiểm tra chiếc mũ bằng vàng của nhà vua có bị pha thêm bạc hay không. Chiếc mũ có trọng lượng 5niuton (theo đơn vị hiện nay), nhúng trong nước thì trọng lượng giảm 0,3 niuton. Biết rằng khi cân trong nước, vàng giảm $\frac{1}{20}$ trọng lượng, bạc giảm $\frac{1}{10}$ trọng lượng. Hỏi chiếc mũ chứa bao nhiêu gam vàng, bao nhiêu gam bạc?

7. Dạng 7: Toán dân số, phần trăm:

7.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Gọi a là số dân được biết trước.

Khi đó:

Nếu tăng dân số thêm b% thì ta có số dân sau khi tăng là: $a + ab\%$.

Nếu giảm dân số b% thì ta có số dân sau khi giảm là: $a - ab\%$.

Gọi x là số tiền được gửi cố định, với lãi suất gửi số tiền x là y%/ tháng và không thay đổi lãi suất.

Khi đó:

Số tiền tính được trong một tháng là: $x + x.y\%$

Số tiền tính được trong hai tháng là: $x + (x + x.y\%).y\%$

Tương tự như vậy, ta tính được số tiền gửi trong một năm.

7.2. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Bà An gửi vào quỹ tiết kiệm x nghìn đồng với lãi suất mỗi tháng là a% (a là một số cho trước) và lãi tháng này được tính gộp vào vốn cho tháng sau.

1) Hãy viết biểu thức biểu thị :

Số tiền lãi sau tháng thứ nhất;

Số tiền (cả gốc lẫn lãi) có được sau tháng thứ nhất;

Tổng số tiền lãi có được sau tháng thứ hai.

2) Nếu lãi suất là 1,2% (tức là $a = 1,2$) và sau 2 tháng tổng số tiền lãi là 48,288 nghìn đồng, thì lúc đầu bà An đã gửi bao nhiêu tiền tiết kiệm?

Giải

1) Số tiền lãi sau một tháng gửi với lãi suất a% với tiền gửi x nghìn đồng là ax. Số tiền có được (cả gốc lẫn lãi) sau tháng thứ nhất : $x + ax = x(1 + a)$ nghìn đồng.

Số tiền lại sau hai tháng là : $L = ax + ax(1 + a) = x(a^2 + 2a)$

2) Thay $a = 1,2\%$ là $L = 48,288$ ta được :

$$x \left(\frac{144}{1000000} + \frac{24}{1000} \right) = 48,288$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 2000000$ đồng

Bài tập 2: Năm ngoái, tổng dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu. Năm nay, dân số của tỉnh A tăng thêm 1,1%, còn dân số của tỉnh B tăng thêm 1,2%. Tuy vậy, số dân của tỉnh A năm nay vẫn nhiều hơn tỉnh B là 807 200 người. tính số dân năm ngoái của mỗi tỉnh.

Giải

Gọi tổng số dân của tỉnh A trong năm ngoái là x (người), (Điều kiện: $0 < x < 4000000$)

Số dân của tỉnh B trong năm ngoái là $4000000 - x$.

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$x + 1,1\%x = 4000000 - x + 1,2\%(4000000 - x) + 807200$$

Giải phương trình trên ta được: $x = 2400000$.

Vậy dân số tỉnh A là 2400000, dân số tỉnh B là 1600000.

Bài tập 3: Dân số hiện nay của một phường là 41618 người. Cách đây 2 năm dân số của phường là 40000 người. Hỏi trung bình mỗi năm dân số tăng bao nhiêu phần trăm?

Giải

Gọi số phần trăm dân số tăng mỗi năm là $x\%$ ($x > 0$).

Dân số cách đây 2 năm là 40000 người thì dân số cách đây một năm là:

$$40000 + \frac{x}{100} 40000 = 40000 + 400x$$

Hiện nay là năm thứ hai nên dân số tăng thêm $x\%$, tức là dân số hiện nay là:

$$40000 + 400x + \frac{x}{100} (40000 + 400x) = 4x^2 + 800x + 40000$$

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$4x^2 + 800x + 40000 = 41618 \text{ hay } x^2 + 200x - 404 = 0$$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 2$.

Vậy dân số tăng hằng năm là 2%.

7.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu người. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2%, còn tỉnh B tăng 1,1%. Tổng số dân của cả hai tỉnh năm nay là 4045000 người. Tính số dân của mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay.

Bài tập 2: Trong tháng giêng hai tổ sản xuất được 720 chi tiết máy. Trong tháng 2, tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt mức 12% nên sản xuất được 819 chi tiết máy. Tính xem trong tháng giêng, mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

Bài tập 3: Giá 1 mét vải là 16 ngàn đồng được hạ xuống vài phần trăm. Sau một thời gian giá 1 mét vải lại hạ xuống cũng một số phần trăm như vậy và trở thành 9 ngàn đồng. Không biết mỗi lần giá vải hạ xuống như vậy là bao nhiêu phần trăm.

Bài tập 4: Hai tổ công nhân được giao mỗi tuần sản xuất được 980 đôi giày. Để lập thành tích chào mừng, tuần vừa qua tổ 1 vượt mức 8%, tổ 2 vượt mức 10%. So với kế hoạch được giao nên cả 2 tổ sản xuất được 1068 đôi. Hỏi định mức được giao của mỗi tổ là bao nhiêu đôi giày.

Bài tập 5: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch là bao nhiêu?

Bài tập 6: Dân số của một thành phố hiện nay là 408040 người. Hàng năm dân số tăng 1%. Hỏi hai năm trước dân số thành phố là bao nhiêu?

CHUYÊN ĐỀ 17

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Cách giải:

Cách giải bài toán bằng cách lập phương trình: Gồm 3 bước:

Bước 1: Lập hệ phương trình.

Chọn ẩn và tìm điều kiện cho ẩn (chọn ẩn là các đại lượng bài toán yêu cầu)

Biểu diễn các đại lượng khác qua ẩn.

Lập hệ phương trình.

Bước 2: Giải hệ phương trình.

Bước 3: Nhận định kết quả.

Đối chiếu với điều kiện bài toán.

Nếu kết quả có chứa tham số thì phải biện luận.

Các dạng toán cơ bản:

Dạng 1: Dạng toán chuyển động.

Dạng 2: Dạng toán liên quan tới các kiến thức hình học.

Dạng 3: Dạng toán công việc làm chung, làm riêng.

Dạng 4: Dạng toán chảy chung, chảy riêng của vòi nước.

Dạng 5: Dạng toán tìm số.

Dạng 6: Dạng toán sử dụng các kiến thức vật lý, hoá học.

Dạng 7: Bài toán dân số, phần trăm.

1. Dạng 1: Bài toán chuyển động:

1.1. Kiến thức cơ bản:

Bài toán chuyển động thường gặp: Chuyển động cùng chiều, ngược chiều, chuyển động trên dòng sông, ...

Gọi s , t , v : Lần lượt là quãng đường, thời gian, vận tốc.

Quãng đường: $s = v.t$.

Vận tốc: $v = \frac{s}{t}$.

Thời gian: $t = \frac{s}{v}$.

Các dạng cơ bản:

(1) Chuyển động cùng chiều:

Hai xe chuyển động cùng chiều trên cùng một quãng đường, đến khi gặp nhau:

Quãng đường xe 1 đi = Quãng đường xe 2 đi.

Nếu hai xe cùng xuất phát, mà ô tô 1 đến trước ô tô 2 là t giờ:

Thời gian xe 2 đi - Thời gian xe 1 đi = t

(2) Chuyển động ngược chiều:

Hai xe chuyển động ngược chiều trên cùng một quãng đường đến chỗ gặp nhau:

Quãng đường xe 1 đi + Quãng đường xe 2 đi = s

(3) Chuyển động trên dòng nước:

$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{riêng}} + V_{\text{nước}}$

$V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{riêng}} - V_{\text{nước}}$

(4) Chuyển động trên cùng một đường tròn:

Hai vật xuất phát từ một điểm sau thời gian t thì gặp nhau:

Chuyển động cùng chiều:

Độ dài s của đường tròn: $s = t(v_1 - v_2)$, (với v_1, v_2 là vận tốc của hai vật, $v_1 > v_2$)

Chuyển động ngược chiều:

Độ dài s của đường tròn: $s = t(v_1 + v_2)$, (với v_1, v_2 là vận tốc của hai vật)

1.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Hai xe cùng khởi hành một lúc với hai vận tốc khác nhau. Biết rằng vận tốc xe 1 lớn hơn xe 2 là 10 km/h. Nếu lấy tổng vận tốc hai xe so với chiếc xe 3 chạy với vận tốc 70km/h thì bằng nhau. Hỏi vận tốc mỗi xe là bao nhiêu?

Giải

Gọi vận tốc xe 1 là x km/h và vận tốc xe 2 là y km/h, (điều kiện: $0 < x, y < 70$)

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy vận tốc xe 1 là 40km/h, vận tốc xe 2 là 30km/h.

Bài tập 2: Tìm vận tốc và chiều dài của 1 đoàn tàu hoả biết đoàn tàu ấy chạy ngang qua văn phòng ga từ đầu máy đến hết toa cuối cùng mất 7 giây. Cho biết sân ga dài 378m và thời gian kể từ khi đầu máy bắt đầu vào sân ga cho đến khi toa cuối cùng rời khỏi sân ga là 25 giây.

Giải

Gọi $x(\text{m/s})$ là vận tốc của đoàn tàu khi vào sân ga ($x > 0$)

Gọi $y(\text{m})$ là chiều dài của đoàn tàu ($y > 0$)

Tàu chạy ngang văn phòng ga mất 7 giây nghĩa là với vận tốc $x(\text{m/s})$ tàu chạy quãng đường $y(\text{m})$ mất 7 giây. Ta có phương trình: $y = 7x$ (1)

Khi đầu máy bắt đầu vào sân ga dài 378m cho đến khi toa cuối cùng rời khỏi sân ga mất 25 giây nghĩa là với vận tốc $x(\text{m/s})$ tàu chạy quãng đường: $y + 378(\text{m})$ mất 25 giây.

Ta có phương trình: $y + 378 = 25x$ (2)

Ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} y = 7x \\ y + 378 = 25x \end{cases}$$

Giải ra ta có: $x = 21$; $y = 147$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy vận tốc của đoàn tàu là 21m/s, chiều dài của đoàn tàu là 147m.

Bài tập 3: Một chiếc thuyền xuôi, ngược dòng trên khúc sông dài 40km hết 4h30 phút. Biết thời gian thuyền xuôi dòng 5km bằng thời gian thuyền ngược dòng 4km. Tính vận tốc dòng nước?

Giải

Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc của thuyền khi nước yên lặng.

Gọi $y(\text{km/h})$ là vận tốc dòng nước ($x, y > 0$)

Vì thời gian thuyền xuôi dòng 5km bằng thời gian thuyền ngược dòng 4km nên ta có phương

trình:
$$\frac{5}{x + y} = \frac{4}{x - y} \quad (1)$$

Vì chiếc thuyền xuôi, ngược dòng trên khúc sông dài 40km hết 4h30 phút $= \frac{9}{2}$ giờ nên ta có

phương trình:
$$\frac{40}{x + y} + \frac{40}{x - y} = \frac{9}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{5}{x + y} = \frac{4}{x - y} \\ \frac{40}{x + y} + \frac{40}{x - y} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Giải ra ta có: $x = 18$; $y = 2$.

Vậy vận tốc dòng nước là 2 km/h

Bài tập 4: Trên một đường tròn chu vi 1,2 m, ta lấy 1 điểm cố định A. Hai điểm chuyển động M, N chạy trên đường tròn, cùng khởi hành từ A với vận tốc không đổi. Nếu chúng di chuyển trái chiều nhau thì chúng gặp nhau sau mỗi 15 giây. Nếu chúng di chuyển cùng chiều nhau thì điểm M sẽ vượt N đúng 1 vòng sau 60 giây. Tìm vận tốc mỗi điểm M, N?

Giải

Gọi $x(\text{m/s})$ là vận tốc của điểm M

Gọi $y(\text{m/s})$ là vận tốc của điểm N ($x > y > 0$)

Khi chúng di chuyển trái chiều nhau, chúng gặp nhau sau mỗi 15 giây nên ta có phương trình:

$$15x + 15y = 1,2 \quad (1)$$

Khi M, N di chuyển cùng chiều nhau thì điểm M sẽ vượt N đúng 1 vòng sau 60 giây nên ta có phương trình: $60x - 60y = 1$ (2)

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 15x + 15y = 1,2 \\ 60x - 60y = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $x = 0,05$; $y = 0,03$ (thỏa mãn điều kiện)

Vận tốc điểm M là 0,05m/s và vận tốc điểm N là 0,03m/s.

Bài tập 5: Một chiếc mô tô và ô tô cùng đi từ M đến K với vận tốc khác nhau. Vận tốc mô tô là 62 km/h còn vận tốc ô tô là 55 km/h. Để 2 xe đến đích cùng 1 lúc người ta đã cho ô tô chạy trước 1 thời gian. Nhưng vì 1 lí do đặc biệt nên khi chạy được $\frac{2}{3}$ quãng đường ô tô buộc phải chạy với vận tốc 27,5 km/h. Vì vậy khi còn cách K 124km thì mô tô đuổi kịp ô tô. Tính khoảng cách từ M đến N.

Giải

Gọi khoảng cách MK là x (km), (Điều kiện: $x > 0$)

Gọi thời gian dự định ô tô đi trước mô tô là y (giờ)

Theo bài ra, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x}{62} + y = \frac{x}{55} \\ \frac{\frac{2}{3}x}{65} + \frac{\frac{x}{3} - 124}{27,5} = y + \frac{x - 124}{62} \end{cases}$$

Giải hệ này ta rút ra: $x = 514\text{km}$; $y = 1\frac{94}{1705}$ (h)

1.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Hai xe cùng xuất phát từ 2 địa điểm A và B cách nhau 130 km và sau 2 giờ thì gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe biết xe chạy từ A có vận tốc lớn hơn xe đi từ B là 5km/h.

Đáp số: Vận tốc xe đi từ A là 17, 5km/h và vận tốc xe đi từ B là 1, 5km/h.

Bài tập 2: Hai ô tô khởi hành cùng lúc từ hai địa điểm A và B cách nhau 60 km/h và sau 1 giờ thì gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng xe đi từ A có vận tốc bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc xe đi từ B.

Đáp số: Vận tốc xe đi từ A là 24 và vận tốc xe đi từ B là 36.

Bài tập 3: Cùng một lúc, một chiếc ô tô khởi hành từ địa điểm A và một chiếc xe mô tô khởi hành từ địa điểm B đi ngược chiều nhau. Tìm vận tốc của mỗi xe biết rằng sau khi gặp nhau mô tô chạy thêm 2 giờ 12 phút thì tới A và ô tô chạy thêm 1 giờ 12 phút thì tới B và cách A 180km.

Đáp số: Vận tốc của ô tô là 60 km/h và vận tốc của xe mô tô là 40km/h.

Bài tập 4: Hai vật thể I và II chuyển động trên cùng một đường tròn. Nếu cả hai chuyển động cùng chiều thì sau mỗi khoảng thời gian 56 phút chúng lại gặp nhau 1 lần. Nếu cả hai chuyển động cũng với vận tốc cũ nhưng ngược chiều nhau thì sau mỗi khoảng thời gian 8 phút thì chúng lại gặp nhau 1 lần. Người ta còn thấy rằng khi khoảng cách giữa chúng là 40m thì sau đó 24 giây chúng chỉ còn cách nhau 26m. Tìm vận tốc (m/phút) của mỗi vật thể, biết rằng trong khoảng thời gian 24 giây nói trên chúng không gặp nhau.

(Đề thi HSG Toán 9 toàn quốc năm 1975 - 1976)

Đáp số: Vận tốc vật I và vật II lần lượt là x và y thì $x = 20$, $y = 15$ và $x = 140$, $y = 105$.

Bài tập 5: Một ca nô dự định đi từ A đến B trong một thời gian đã định, Nếu vận tốc ca nô tăng 3km/h thì ca nô đến nơi sớm hơn 2 giờ. Nếu vận tốc ca nô giảm 3km/h thì ca nô đến nơi chậm 3 giờ. Tính chiều khúc sông AB?

2. Dạng 2: Bài toán liên quan đến kiến thức hình học:

2.1. Kiến thức cơ bản:

Hình chữ nhật:

Gọi a, b là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật.

Gọi S, C là diện tích, chu vi của hình chữ nhật.

Tính chu vi hình chữ nhật: $C = 2(a + b)$

Tính diện tích hình chữ nhật: $S = ab$

Hình vuông:

Gọi a độ dài cạnh của hình vuông.

Gọi S, C là diện tích, chu vi của hình vuông.

Tính chu vi hình vuông: $C = 4a$

Tính diện tích hình vuông: $S = a^2$.

2.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có hiệu chiều dài và chiều rộng là 6m. Nếu tăng mỗi chiều lên 2m thì diện tích sẽ tăng 64m^2 . Hỏi kích thước mỗi chiều là bao nhiêu.

Giải

Gọi x và y lần lượt là chiều rộng và chiều dài ($0 < x, y < 30$; x và y tính bằng m)

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - x = 6 \\ (x + 2)(y + 2) - xy = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 6 \\ x + y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \end{cases}$$

Suy ra:

+ Chiều dài là 18m.

+ Chiều rộng là 12m.

Bài tập 2: Một hình chữ nhật có chu vi là 14cm và chiều dài lớn hơn chiều rộng 1cm. Hỏi độ dài mỗi cạnh là bao nhiêu.

Giải

Gọi a và b lần lượt là chiều dài và chiều rộng (điều kiện: a, b > 0, tính bằng cm)

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (a + b) \cdot 2 = 14 \\ a = b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Bài tập 3: Một mảnh đất hình chữ nhật có tổng chiều dài và chiều rộng là 12m. Nếu thêm chiều dài 2m và chiều rộng 3m thì chiều dài hơn chiều rộng 5m. Tìm độ dài của mỗi chiều.

Giải

Gọi m và n lần lượt là chiều dài và chiều rộng của mảnh đất (điều kiện: m, n > 0, tính bằng m).

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} m + n = 12 \\ (m + 3) - (n + 2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ n = 4 \end{cases}$$

Bài tập 4: Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng lên 36cm^2 , và nếu một cạnh giảm đi 2cm, cạnh kia giảm đi 4cm thì diện tích của tam giác giảm đi 26cm^2 .

Giải

Gọi độ dài cạnh góc vuông thứ nhất là a (cm), ($a > 0$).

Độ dài cạnh góc vuông thứ hai là b (cm), ($b > 0$).

Khi tăng mỗi cạnh lên 3cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng lên 36cm^2 nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{2}(a + 3)(b + 3) = \frac{1}{2}ab + 36 \quad (1)$$

Khi một cạnh giảm đi 2cm, cạnh kia giảm đi 4cm thì diện tích của tam giác giảm đi 26cm^2 nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{2}(a - 2)(b - 4) = \frac{1}{2}ab - 26 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = 21 \\ 2a + b = 30 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $a = 9$; $b = 12$

Vậy độ dài hai cạnh góc vuông là 9cm và 12 cm.

Bài tập 5: Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 360m^2 . Nếu tăng chiều rộng 2m và giảm chiều dài 6m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính chu vi của mảnh đất lúc đầu.

Giải

Gọi chiều rộng là a(m), ($a > 0$)

Chiều dài là b(m), ($b > 0$)

Mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 360m^2 , ta có phương trình:

$$ab = 360 \quad (1)$$

Khi tăng chiều rộng 2m và giảm chiều dài 6m thì diện tích mảnh đất không đổi, ta có phương trình:

$$(a + 2)(b - 6) = ab \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ab = 360 \\ (a+2)(b-6) = ab \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được: $a = 10$; $b = 36$.

Vậy chiều rộng là 10m, chiều dài là 36m.

2.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 720m^2 , nếu tăng chiều dài thêm 6m và giảm chiều rộng đi 4m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính các kích thước của mảnh vườn.

(Đề thi vào lớp 10 THPT, tỉnh Thái Bình năm 2005-2006)

Đáp số: chiều dài là 30m và chiều rộng là 24m.

Bài tập 2: Một hình chữ nhật có chu vi là $2a$, a là độ dài cho trước. Nếu ta thêm vào chiều dài 10dm và tăng chiều rộng 15dm thì diện tích tăng thêm 630dm^2 . Tính các kích thước cũ hình chữ nhật.

Đáp số: x và y thứ tự là chiều dài và chiều rộng:

$$x = 240 - 2a, y = 3a - 240. \quad (80 < a < 120)$$

Bài tập 3: Một vườn hình chữ nhật có chu vi 450m. Nếu giảm chiều dài đi $\frac{1}{5}$ chiều dài cũ, tăng chiều rộng thêm $\frac{1}{4}$ chiều rộng cũ thì chu vi vườn không đổi. Tính chiều dài, chiều rộng của khu vườn.

Bài tập 4: Tính các kích thước của hình chữ nhật, biết rằng nếu tăng chiều dài 3m, giảm chiều rộng 2m thì diện tích không đổi. Nếu giảm chiều dài 3m, tăng chiều rộng 3m thì diện tích không đổi.

Bài tập 5: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 124m. Nếu tăng chiều dài 5m và tăng chiều rộng 3m thì diện tích sẽ tăng 225m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

3. Dạng 3: Toán năng suất làm việc:

3.1. Kiến thức cơ bản:

Năng suất làm việc là phần công việc làm được trong một đơn vị thời gian.

Công thức:

$$A = N.T$$

Trong đó: A: Khối lượng công việc.

N: Năng suất làm việc.

T: Thời gian làm việc.

Tổng năng suất riêng bằng năng suất chung khi cùng làm.

Biết năng suất làm việc, thời gian hoàn thành, lượng công việc để áp dụng hợp lý.

Năng suất lao động tăng thêm $= (100\% + \text{mức năng suất } \%). \text{quy định công việc}$.

3.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ, người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

Giải

Ta có $25\% = \frac{1}{4}$.

Gọi thời gian một mình người thứ nhất hoàn thành công việc là $x (x > 0; \text{giờ})$

Gọi thời gian một mình người thứ hai hoàn thành công việc là $y (y > 0; \text{giờ})$

Trong một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc

Trong một giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Hai người cùng làm thì xong trong 16 giờ. Vậy trong 1 giờ cả hai người cùng làm được $\frac{1}{16}$ công việc.

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \quad (1)$

Người thứ nhất làm trong 3 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì $25\% = \frac{1}{4}$ công việc. Ta có

phương trình $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{y} = \frac{1}{16} \end{cases}$$

Giải ra ra được: $x = 24$; $y = 48$.

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong 24 giờ. Người thứ hai hoàn thành công việc trong 48 giờ.

Bài tập 2: Hai người thợ cùng sơn cửa cho một ngôi nhà thì 2 ngày xong việc. Nếu người thứ nhất làm trong 4 ngày rồi nghỉ người thứ hai làm tiếp trong 1 ngày nữa thì xong việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc?

Giải

Gọi thời gian để một mình người thứ nhất hoàn thành công việc là x ($x > 2$; ngày)

Gọi thời gian để một mình người thứ hai hoàn thành công việc là y ($x > 2$; ngày)

Trong một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc

Trong một ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc

Cả hai người làm xong trong 2 ngày nên trong 1 ngày cả hai người làm được $\frac{1}{2}$ công việc. Từ đó

ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Người thứ nhất làm trong 4 ngày rồi người thứ hai làm trong 1 ngày thì xong công việc ta có phương trình:

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thoả mãn đk)}$$

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc trong 6 ngày. Người thứ hai làm một mình xong công việc trong 3 ngày.

Bài tập 3: Hai đội công nhân cùng làm một đoạn đường trong 24 ngày thì xong công việc. Mỗi ngày, phần việc của đội A làm nhiều gấp rưỡi đội B. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao lâu?

Giải

Gọi x (ngày) là thời gian để đội A làm riêng hoàn thành công việc,

Gọi y (ngày) là thời gian để đội B làm riêng hoàn thành công việc, ($x, y > 24$).

Mỗi ngày đội A là được $\frac{1}{x}$ công việc.

Mỗi ngày đội B là được $\frac{1}{y}$ công việc.

Vì mỗi ngày, phần việc của đội A làm nhiều gấp rưỡi đội B nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} \quad (1)$$

Hai đội cùng làm chung thì trong 24 ngày làm xong công việc, nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 40$; $y = 60$.

Vậy đội A làm riêng thì trong 40 ngày sẽ xong công việc, đội B làm riêng sẽ làm xong công việc trong 60 ngày.

Bài tập 4: Hai đội xây dựng làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Nhưng làm chung được 8 ngày thì đội I được điều động đi làm việc khác. Tuy chỉ còn một mình đội II làm việc, do cải tiến cách làm năng suất của đội hai tăng gấp đôi, nên họ đã làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi năng suất ban đầu, nếu mỗi đội làm một mình thì phải trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên.

Giải

Gọi thời gian để đội I làm một mình xong công việc là x (ngày), ($x > 12$)

Gọi thời gian để đội II làm một mình xong công việc là y (ngày), ($y > 12$)

Mỗi ngày đội I là được $\frac{1}{x}$ công việc.

Mỗi ngày đội II là được $\frac{1}{y}$ công việc.

Hai đội cùng làm thì hoàn thành công việc trong 12 ngày và làm được ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \quad (1)$$

Hai đội cùng làm trong 8 ngày được $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ công việc. Do cải tiến nên đội II đã làm tăng gấp đôi

và được $\frac{2}{y}$ công việc và hoàn thành công trong 3,5 ngày. Ta có phương trình:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{y} \cdot \frac{7}{2} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ y = 21 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 28$; $y = 21$.

Vậy đội I làm một mình xong công việc trong 28 ngày, đội II làm một mình xong công việc trong 21 ngày.

Bài tập 5: Hai thợ xây cùng xây một bức tường thì trong 7 giờ 12 phút là xong công việc. Nếu người thứ nhất xây trong 5 giờ, người thứ hai xây trong 6 giờ thì cả hai người xây được $\frac{3}{4}$ bức tường. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi thợ xây phải mất bao lâu mới xây xong bức tường.

Giải

Gọi thời gian để người thợ thứ nhất một mình làm xong công việc là x (giờ), ($x > 0$)

Gọi thời gian để người thợ thứ hai một mình làm xong công việc là y (giờ), ($y > 0$)

Trong một giờ người thứ nhất xây được $\frac{1}{x}$ công việc.

Trong một giờ người thứ hai xây được $\frac{1}{y}$ công việc.

Cả hai người cùng làm thì trong một giờ xây được $\frac{36}{5}$ công việc, nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{36}{5} \quad (1)$$

Người thứ nhất xây trong 5 giờ được $\frac{5}{x}$ bức tường.

Người thứ hai xây trong 6 giờ được $\frac{6}{y}$ bức tường

Vì cả hai xây được $\frac{3}{4}$ bức tường, nên ta có phương trình:

$$\frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{36}{5} \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 12$; $y = 18$.

Vậy người thợ thứ nhất một mình xây xong bức tường trong 12 giờ, người thợ thứ hai một mình xây xong bức tường trong 18 giờ.

3.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Hai người thợ quét vôi cùng làm chung thì sau 12 giờ xong công việc. Sau khi làm chung 8 giờ thì một người phải đi làm việc khác nên người còn lại phải làm nốt trong 5 giờ nữa mới xong. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm mấy giờ mới xong.

Bài tập 2: Hai người thợ cùng làm một công việc thì xong trong 18 giờ. Nếu người thứ nhất làm trong 4 giờ, người thứ hai làm trong 7 giờ thì được $\frac{1}{3}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì mất bao lâu sẽ xong công việc?

Bài tập 3: Để hoàn thành một công việc hai tổ phải làm trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác. Tổ một đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì bao lâu xong công việc đó?

Bài tập 4: Hai đội công nhân cùng đào một con mương. Nếu họ cùng làm thì trong 2 ngày sẽ xong công việc. Nếu làm riêng thì đội hai hoàn thành công việc nhanh hơn đội một là 3 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong công việc?

Bài tập 5: Hai chiếc bình rỗng giống nhau có cùng dung tích là 375 lít. Ậ mỗi bình có một vòi nước chảy vào và dung lượng nước chảy trong một giờ là như nhau. Người ta mở cho hai vòi cùng chảy vào bình nhưng sau 2 giờ thì khoá vòi thứ hai lại và sau 45 phút mới tiếp tục mở lại. Để hai bình cùng đầy một lúc người ta phải tăng dung lượng vòi thứ hai thêm 25 lít/giờ. Tính xem mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được bao nhiêu lít nước.

Bài tập 6: Hải và Sơn cùng làm một công việc trong 7 giờ 20 phút thì xong. Nếu Hải làm trong 5 giờ và Sơn làm trong 6 giờ thì cả hai làm được $\frac{3}{4}$ khối lượng công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong.

4. Dạng 4: Toán chảy chung, chảy riêng của vòi nước:

4.1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải

Bước 1: Tìm lượng nước chảy chung của hai vòi.

Lượng nước chảy riêng của mỗi vòi vào bể hoàn thành.

Lập phương trình lượng nước.

Bước 2: Thời gian hai vòi chảy đầy bể.

Thời gian chảy riêng hoàn thành của mỗi vòi.

Lập phương trình thời gian chảy đầy bể.

Bước 3: Giải hệ phương trình.

4.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Hai vòi nước chảy chung vào một bể thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Mỗi giờ lượng nước của vòi I chảy được bằng $1\frac{1}{2}$ lượng nước chảy được của vòi II. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu đầy bể.

Giải

Gọi thời gian để vòi I chảy một mình đầy bể là x , (giờ), $x > \frac{24}{5}$.

Gọi thời gian để vòi II chảy một mình đầy bể là y , (giờ), $y > \frac{24}{5}$.

Trong 1 giờ vòi I và vòi II chảy được lượng nước tương ứng là: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ (bể).

Vì hai vòi cùng chảy sau $\frac{24}{5}$ thì đầy bể do đó ta có phương trình (1): $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$

Vì trong 1 giờ lượng nước chảy được của vòi I bằng $\frac{2}{3}$ lượng nước chảy được của vòi II do đó ta

có phương trình (2): $\frac{1}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y}$

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $\begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases}$

Vậy vòi I chảy một mình đầy bể trong 8 giờ, Vòi II chảy một mình đầy bể trong 12 giờ.

Bài tập 2: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể sau 1 giờ 20 phút thì đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì bao lâu mới đầy bể.

Giải

Gọi thời gian để Vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x , (phút), $x > 80$.

Gọi thời gian để Vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là y , (phút), $y > 80$.

Công suất tính theo phút của Vòi thứ nhất là: $\frac{1}{x}$ (bể), vòi thứ hai là $\frac{1}{y}$ (bể).

Vì hai vòi cùng chảy sau 1 giờ 20 phút = 80 Phút, thì đầy bể do đó ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{80} \quad (1)$$

Sau 10 phút Vòi 1 chảy được: $10 \cdot \frac{1}{x}$ (bể).

Sau 12 phút Vòi 2 chảy được: $12 \cdot \frac{1}{y}$ (bể)

Vì nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể do

đó ta có phương trình: $\frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15} \quad (2)$

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{80} \\ \frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $x = 120$ phút, $y = 240$ phút.

Vậy thời gian vòi 1 chảy đầy bể là 120 phút, vòi 2 là 240 phút.

Bài tập 3: Hai vòi nước cùng chảy thì sau 5 giờ 50 phút sẽ đầy bể, Nếu để hai vòi cùng chảy trong 5 giờ rồi khoá vòi thứ nhất lại thì vòi thứ hai phải chảy trong 2 giờ nữa mới đầy bể. Tính xem nếu để mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

Giải

Gọi thời gian để vòi 1 chảy đầy bể là x (giờ), ($x > 0$)

Gọi thời gian để vòi 2 chảy đầy bể là y (giờ), ($y > 0$)

Trong 1 giờ, vòi 1 chảy được $\frac{1}{x}$ bể và vòi 2 chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Ta có: 5 giờ 50 phút = $5 + \frac{50}{60} = \frac{35}{6}$ giờ.

Theo bài ra, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{6}{35} \\ 5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 10$ và $y = 14$.

Vậy vòi 1 chảy một mình trong 10 giờ đầy bể, vòi 2 chảy một mình trong 14 giờ đầy bể.

Bài tập 4: Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước trong 4 giờ 48 phút sẽ đầy bể.

Nếu mở vòi thứ nhất trong 3 giờ và vòi thứ hai trong 4 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể nước. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu thì mới đầy bể?

Giải

Gọi thời gian để vòi 1 chảy đầy bể là x (giờ), ($x > 0$)

Gọi thời gian để vòi 2 chảy đầy bể là y (giờ), ($y > 0$)

Trong 1 giờ, vòi 1 chảy được $\frac{1}{x}$ bể và vòi 2 chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Ta có: 4 giờ 48 phút = $4 + \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$ giờ.

Theo bài ra, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 12$ và $y = 8$.

Vậy vòi 1 chảy một mình trong 12 giờ đầy bể, vòi 2 chảy một mình trong 8 giờ đầy bể.

Bài tập 5: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn thì sau $\frac{24}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ

mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu mới đầy bể?

Giải

Gọi x và y là thời gian vòi I và Vòi II chảy một mình đầy bể ($0 < x, y < \frac{24}{5}$)

Trong 1 giờ 1 chảy được $\frac{1}{x}$ bể

Trong 1 giờ 2 chảy được $\frac{1}{y}$ bể

Trong 1 giờ, cả 2 vòi chảy được $\frac{5}{24}$ bể

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$ (1)

Trong 9 giờ vòi I chảy được $\frac{9}{x}$ bể

Trong $\frac{6}{5}$ giờ vòi II chảy được $\frac{6}{5y}$ bể

Ta có phương trình: $\frac{9}{x} + \frac{6}{5y} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{9}{x} + \frac{6}{5y} = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $y = \frac{312}{35}$ giờ

Vậy nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau $\frac{312}{35}$ giờ giờ đầy bể.

4.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Có hai vòi nước chảy vào bể chứa hình hộp chữ nhật có chiều cao 2m. Nếu mở cả hai vòi cùng chảy thì sau 12 giờ bể đầy. Người ta mở cả hai vòi cho chảy trong 4 giờ thì khoá vòi thứ hai lại và để vòi thứ nhất chảy tiếp thì trong 14 giờ nữa mới đầy bể.

a) Hỏi nếu để chảy một mình thì mỗi vòi chảy bao nhiêu lâu mới đầy bể ?

b) Biết mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được 8000 lít và đầy bể là hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 6m và chiều cao của bể là 2m. Tính kích thước của bể ?

Bài tập 2: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể lớn thì sau 10 sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 6 giờ và vòi thứ hai chảy trong 3 giờ thì bể chỉ đầy được $\frac{2}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi nếu chảy một mình thì phải mất bao lâu mới đầy bể.

5. Dạng 5: Toán tìm số:

5.1. Kiến thức cơ bản:

Cách viết số trong hệ thập phân của số tự nhiên:

Số có hai chữ số: $\overline{ab} = 10a + b$

Số có ba chữ số: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$

Số có ba chữ số: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$

Quan hệ chia hết và chia có dư:

Số a chia cho b bằng c và có số dư là r , được viết lại là: $a = b.c + r$.

Nếu a chia hết cho b thì số dư $r = 0$.

Nếu a không chia hết cho b thì số dư $r \neq 0$.

5.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho một số tự nhiên, nếu cộng số đó với 2 và nhân với chính số đó thì được kết quả là 48. Tìm số đó.

Giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là n ($0 < n < 48$).

Theo bài ra ta có:

$$n(n+2) = 48$$

$$\Leftrightarrow n = -8(\text{loại}) \text{ và } n = 6.$$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 6.

Bài tập 2: Tìm số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng tổng của hai chữ số bằng 12. Chữ số hàng đơn vị bằng 3 lần chữ số hàng chục. Số đó là.

Giải

Điều kiện: $0 < a, b < 9$; a và b là số tự nhiên.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9 \end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 39.

Bài tập 3: Tìm hai số tự nhiên, biết tổng của chúng bằng 1006 và lấy số lớn chia số nhỏ thì được thương là 2 và số dư 124

Giải

Gọi x là số lớn và y là số nhỏ. Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}, x > y$.

Tổng hai số: $x + y = 1006$

Phép chia có dư: $x = 2y + 124 \Leftrightarrow x - 2y = 124$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 1006 \\ x - 2y = 124 \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được: $x = 712$; $y = 294$.

Vậy số lớn là 712, số bé là 294.

Bài tập 4: Tổng các chữ số của 1 số có hai chữ số là 9. Nếu thêm vào số đó 63 đơn vị thì số thu được cũng viết bằng hai chữ số đó nhưng theo thứ tự ngược lại. Hãy tìm số đó?

Giải

Gọi chữ số hàng chục là x ($0 < x \leq 9, x \in \mathbb{N}$)

Chữ số hàng đơn vị là y , ($0 < y \leq 9, y \in \mathbb{N}$)

Vì tổng 2 chữ số là 9 ta có $x + y = 9$ (1)

Số đó là $\overline{xy} = 10x + y$

Số viết ngược lại là $\overline{yx} = 10y + x$

Vì thêm vào số đó 63 đơn vị thì được số viết theo thứ tự ngược lại ta có

$$\overline{xy} + 63 = \overline{yx}$$

$$\Leftrightarrow 10x + y + 63 = 10y + x$$

$$\Leftrightarrow 9x - 9y = -63 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 9 \\ 9x - 9y = -63 \end{cases}$

Giải hệ trên, ta được: $x = 1$; $y = 8$.

Vậy số phải tìm là 18.

Bài tập 5: Tìm tất cả các số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị nhỏ hơn chữ số hàng chục là 2 và tích của hai chữ số đó của nó luôn lớn hơn tổng hai chữ số của nó là 34.

Giải

Gọi chữ số phải tìm là $\overline{ab}$; $0 \leq a, b \leq 9, a \neq 0$.

Vì chữ số hàng đơn vị nhỏ hơn chữ số hàng chục là 2 do đó ta có phương trình:

$$a - b = 2 \quad (1)$$

Vì tích của hai chữ số đó của nó luôn lớn hơn tổng hai chữ số của nó là 34, do đó ta có phương trình:

$$a.b - (a + b) = 34 \quad (2)$$

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a \cdot b - (a + b) = 34 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $a = 8; b = 6$

Vậy số phải tìm là 86.

Bài tập 6: Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần, nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được một số theo thứ tự ngược lại với số đã cho.

Giải

Gọi chữ số phải tìm là $\overline{xy}$; x, y nguyên dương, ($0 \leq x, y \leq 9, x \neq 0$).

Vì tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần do đó ta có phương trình: $6(x + y) = \overline{xy}$.

Vì nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được một số theo thứ tự ngược lại với số đã cho do đó ta có phương trình: $\overline{xy} + 25 = \overline{yx}$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 6(x + y) = \overline{xy} \\ \overline{xy} + 25 = \overline{yx} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy số phải tìm là 54.

5.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tổng chữ số hàng chục và hai lần chữ số hàng đơn vị của một số có hai chữ số là 18. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được một số lớn hơn ban đầu là 54. Tìm số ban đầu.

Bài tập 2: Tìm số có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị gấp ba chữ số hàng chục và khi chia số đó cho tổng các chữ số thì được thương là 3 và dư 3.

Bài tập 3: Tổng hai số bằng 51. Tìm hai số đó biết rằng $\frac{2}{5}$ số thứ nhất thì bằng $\frac{1}{6}$ số thứ hai.

Bài tập 4: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng các chữ số của nó là 7. Nếu đổi chỗ hai chữ số hàng đơn vị và hàng chục cho nhau thì số đó giảm đi 45 đơn vị.

Bài tập 5: Tìm hai số hơn kém nhau 5 đơn vị và tích của chúng bằng 150.

Bài tập 6: Tìm số tự nhiên có 2 chữ số. Biết rằng số đó bằng lập phương của số tạo bởi chữ số hàng vạn và chữ số hàng nghìn của số đã cho theo thứ tự đó.

Bài tập 7: Tổng của hai chữ số hàng đơn vị và 2 lần chữ số hàng chục của một số có hai chữ số bằng 10. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được số mới nhỏ hơn số ban đầu là 18 đơn vị. Tìm số ban đầu?

6. Dạng 6: Toán sử dụng kiến thức vật lý, hóa học:

6.1. Kiến thức cơ bản:

Tính khối lượng riêng của vật:

$$D = \frac{m}{V}$$

D: Khối lượng riêng, m: Khối lượng, V: Thể tích.

Công thức tính thành phần phần trăm của chất có trong dung dịch:

$$C\% = \frac{m_{ct}}{m_{dd}} \cdot 100\%$$

C%: Nồng độ phần trăm, m_{ct} : Khối lượng chất tan, m_{dd} : Khối lượng dung dịch.

6.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Một dung dịch chứa 30% axit nitric (tính theo thể tích) và một dung dịch khác chứa 55% axit nitric. Cần phải trộn thêm bao nhiêu lít dung dịch loại 1 và loại 2 để được 100 lít dung dịch 50% axit nitric?

Giải

Gọi x, y theo thứ tự là số lít dung dịch loại 1 và 2 ($x, y > 0$)

Lượng axit nitric chứa trong dung dịch loại 1 là $\frac{30}{100}x$ và loại 2 là $\frac{55}{100}y$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{30}{100}x + \frac{55}{100}y = 50 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được: $x = 20$; $y = 80$

Vậy số lít dung dịch loại 1 là 20 lít, số lít dung dịch loại 2 là 80 lít.

Bài tập 2: Một hợp kim gồm đồng và kẽm có khối lượng 124,5 gam. Tính khối lượng đồng và kẽm trong hợp kim, biết rằng khối lượng riêng của đồng là 8900 kg/m^3 , của kẽm là 7100 kg/m^3 và của hợp kim là 8300 kg/m^3 .

Giải

Gọi x , y là lần lượt là khối lượng của đồng và kẽm có trong hợp kim.

Điều kiện: $0 < x, y < 124,5$.

Vì khối lượng của đồng và kẽm là 124,5gam nên ta có phương trình:

$$x + y = 124,5 \quad (1)$$

Thể tích của đồng và kẽm cũng là thể tích của hợp kim, ta có phương trình:

$$\frac{x}{8900} + \frac{y}{7100} = \frac{124,5}{8300} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 124,5 \\ \frac{x}{8900} + \frac{y}{7100} = \frac{124,5}{8300} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 89$, $y = 35,5$.

Vậy khối lượng của đồng là 89 gam, của kẽm là 35,5 gam.

6.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Một vật có khối lượng 124g và thể tích 15 cm^3 là hợp kim của đồng và kẽm. Tính xem trong đó có bao nhiêu gam đồng và bao nhiêu gam kẽm, biết rằng cứ 89g đồng thì có thể tích là 10 cm^3 và 7g kẽm có thể tích là 1 cm^3 .

Bài tập 2: Người ta hoà lẫn 7kg chất lỏng I với 5 kg chất lỏng II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng 60 kg/m^3 . Biết khối lượng riêng của chất lỏng I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng II là 200 kg/m^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

7. Dạng 7: Toán dân số, phần trăm:

7.1 Kiến thức cơ bản:

Gọi a là số dân được biết trước.

Khi đó:

Nếu tăng dân số thêm $b\%$ thì ta có số dân sau khi tăng là: $a + ab\%$.

Nếu giảm dân số $b\%$ thì ta có số dân sau khi giảm là: $a - ab\%$.

Gọi x là số tiền được gửi cố định, với lãi suất gửi số tiền x là $y\%$ / tháng và không thay đổi lãi suất.

Khi đó:

Số tiền tính được trong một tháng là: $x + x.y\%$

Số tiền tính được trong hai tháng là: $x + (x + x.y\%).y\%$

Tương tự như vậy, ta tính được số tiền gửi trong một năm.

7.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 720 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 12% so với năm ngoái. Do đó cả hai đơn vị thu hoạch được 819 tấn thóc. Hỏi năm ngoái mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc?

Giải

Gọi x (tấn) là số tấn thóc thu hoạch được năm ngoái của đơn vị 1, ($x > 0$)

Gọi y (tấn) là số tấn thóc thu hoạch được năm ngoái của đơn vị 2, ($y > 0$)

Năm ngoái cả hai đội thu hoạch được 720 (tấn) ta có phương trình:

$$x + y = 720 \quad (1)$$

Năm nay đội 1 thu hoạch được 115% (tấn) thóc, đội 2 thu hoạch được 112% (tấn) thóc, tổng 2 đội thu hoạch được 819(tấn) ta có phương trình:

$$115\% x + 112\% y = 819 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 720 \\ \frac{115}{100}x + \frac{112}{100}y = 819 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 420$; $y = 300$.

Vậy đơn vị 1 thu hoạch được 420 tấn thóc, đơn vị 2 thu được 300 tấn thóc.

Bài tập 2: Bài tập 1: Hai tổ sản xuất phải hoàn thành 90 sản phẩm. Tổ I vượt mức 15% kế hoạch của tổ. Tổ II vượt mức 12% kế hoạch của tổ. Do đó, cả hai tổ làm được 102 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ phải làm bao nhiêu sản phẩm.

Giải

Gọi số sản phẩm phải làm theo kế hoạch của tổ I là x , ($x > 0$)

Gọi số sản phẩm phải làm theo kế hoạch của tổ II là y , ($y > 0$)

Số sản phẩm của hai tổ phải hoàn thành là:

$$x + y = 90 \quad (1)$$

Vì tổ I vượt mức 15% kế hoạch của tổ và tổ II vượt mức 12% kế hoạch của tổ. Do đó, cả hai tổ làm được 102 sản phẩm.

Ta có phương trình:

$$x + 15\%x + y + 12\%y = 102 \text{ hay } \frac{15}{100}x + \frac{12}{100}y = 12 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ \frac{15}{100}x + \frac{12}{100}y = 12 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 40$; $y = 50$.

Vậy tổ I làm được 40 sản phẩm, tổ II làm được 50 sản phẩm.

Bài tập 3: Hai đội công nhân được giao cùng thực hiện một kế hoạch là trong một tháng được 300 dụng cụ. Trong 3 tuần đầu, đội I làm được 90% số dụng cụ được giao, đội II làm được 60% số dụng cụ được giao và cả hai đội làm được 80% kế hoạch đã đề ra. Tính số dụng cụ mỗi đội được giao ?(1 tháng bằng 30 ngày)

Giải

Gọi số dụng cụ đội 1 được giao là x , số dụng cụ đội 2 được giao là y , ($x, y > 0$)

Ta có phương trình: $x + y = 300$ (1)

Số dụng cụ đội 1 làm được trong 3 tuần là $0,9x$

Số dụng cụ đội 2 làm được trong 3 tuần là $0,6y$

Số dụng cụ 2 đội làm được là $80\% = 240$

Ta có phương trình: $0,9x + 0,6y = 240$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 0,9x + 0,6y = 240 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 200$; $y = 100$.

Vậy số dụng cụ đội 1 làm được là 200, số dụng cụ đội 2 làm được là 100.

Bài tập 4: Trong tháng đầu hai tổ công nhân sản xuất được 800 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai tổ vượt mức 15%, tổ II sản xuất vượt mức 20%, do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi rằng trong tháng đầu, mỗi tổ công nhân sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

Giải

Gọi số chi tiết sản xuất được trong tháng đầu của Tổ I là x (x nguyên dương), $0 < x < 800$.

Gọi số chi tiết sản xuất được trong tháng đầu của Tổ II là y (y nguyên dương), $0 < y < 800$.

Vì trong tháng đầu hai tổ sản xuất được 800 chi tiết máy do đó ta có phương trình:

$$x + y = 800 \quad (1)$$

Vì trong tháng thứ hai Tổ I vượt mức 15%, Tổ II sản xuất vượt mức 12%, cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy do đó ta có phương trình là:

$$x + \frac{15x}{100} + y + \frac{20x}{100} = 945 \Leftrightarrow \frac{115}{100}x + \frac{112}{100}y = 945 \quad (2)$$

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 800 \\ \frac{115}{100}x + \frac{112}{100}y = 945 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $x = 300$, $y = 500$.

Vậy trong tháng đầu tổ I sản xuất được 300 chi tiết máy, tổ II sản xuất được 500 chi tiết máy.

Bài tập 5: Năm ngoái dân số của hai tỉnh A và B là 4 triệu người. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2 % còn tỉnh B tăng 1,1 %, tổng dân số của hai tỉnh năm nay là 4 045 000 người. Tính dân số của mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay.

Giải

Gọi dân số năm ngoái của tỉnh A là x (x nguyên dương), $x < 4$ triệu.

Gọi dân số năm ngoái của tỉnh B là y (y nguyên dương), $y < 4$ triệu

Vì dân số năm ngoái của hai tỉnh năm ngoái là 4 triệu do đó ta có phương trình:

$$x + y = 4 \quad (1)$$

Vì dân số năm nay của tỉnh A năm nay tăng 1,2%, tỉnh B tăng 1,1 % do đó ta có phương trình là:

$$\frac{1,2x}{100} + \frac{1,1y}{100} = 0,045 \quad (2)$$

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1,2x}{100} + \frac{1,1y}{100} = 0,045 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $x = 1012000$; $y = 3033000$.

Vậy dân số của tỉnh A năm nay là 1 012 000 người, tỉnh B là 3 033 000 người.

7.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Hai trường A và B của một thị trấn có 210 học sinh thi đỗ vào lớp 10, với tỉ lệ trúng tuyển 84%. Tính riêng thì trường A đỗ 80%, trường B đỗ 90%. Tính xem mỗi trường có bao nhiêu học sinh lớp 9 dự thi.

Bài tập 2: Theo kế hoạch hai tổ phải làm 110 sản phẩm. Khi thực hiện tổ 1 tăng năng suất 14%, tổ 2 tăng 10% nên đã làm được 123 sản phẩm. Tính số sản phẩm theo kế hoạch của mỗi tổ?

Bài tập 3: Hai số tiền được gửi tiết kiệm. Số tiền thứ nhất được gửi trong 9 tháng với lãi suất 6% một năm (12 tháng). Số tiền thứ hai được gửi trong 7 tháng với lãi suất 5% một năm (12 tháng); sau thời gian gửi tiết kiệm, số tiền lãi phát sinh bằng nhau. Tổng hai số tiền kể cả tiền lãi là 9210500 đồng. Hỏi hai số tiền đó là bao nhiêu?

Bài tập 4: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch?

Bài tập 5: Trong tháng đầu hai tổ công nhân sản xuất được 300 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai tổ I sản xuất vượt mức 15%, tổ II sản xuất vượt mức 20% do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 352 chi tiết máy. Hỏi rằng trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

CHUYÊN ĐỀ 18
BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH:

Bất phương trình một ẩn là một mệnh đề chứa biến x so sánh hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ trên số thực $\mathbb{R}$ là một trong các dạng sau:

$$f(x) < g(x), f(x) > g(x), f(x) \leq g(x), f(x) \geq g(x)$$

Tập hợp tất cả các nghiệm của bất phương trình được gọi là tập nghiệm của bất phương trình hay còn có thể gọi là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ: Giải bất phương trình: $4x + 2 > 0$.

Bất phương trình trên có nghiệm đúng với mọi số thực $x > -\frac{1}{2}$ hay $x > \frac{1}{2}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $\{x \in \mathbb{R} | x > -0,5\} = (0,5; \infty)$

1. Bất phương trình bậc nhất một ẩn:

1.1. Kiến thức cơ bản:

Dạng bất phương trình: $ax + b > 0$ (hoặc $<, \leq, \geq$), với $a \neq 0$.

Giải và biện luận dạng: $ax + b > 0$.

$$ax + b > 0$$

$$\Leftrightarrow ax > -b.$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}.$$

Nếu $a > 0$ thì $x > -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$

Nếu $a < 0$ thì $x < -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$

Nếu $a = 0$ thì $0x < -b$.

Do đó:

Khi $b > 0$ thì bất phương trình thỏa với mọi x hay $S = \mathbb{R}$.

Khi $b < 0$ thì bất phương trình vô nghiệm hay $S = \Phi$.

Chú ý:

Điều kiện cần để $ax + b > 0$ vô nghiệm với mọi x là $a = 0$ và $b \leq 0$.

Điều kiện để $ax + b > 0$ có nghiệm là $a \neq 0$, hay $a = 0, b > 0$.

Lưu ý: Ta có thể viết: $x > -\frac{b}{a} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\right\} = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$

Ta có thể viết: $x < -\frac{b}{a} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\right\} = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$

Sử dụng một trong hai cách viết trên đều đúng.

- Dấu của nhị thức bậc nhất:

Dạng nhị thức: $f(x) = ax + b, (b \neq 0)$

Bảng xét dấu của nhị thức:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a

1.1. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $(x + 3)(x + 4) > 0$

b) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{8} > \frac{3}{8}$

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} & 3(4x+1) - 2(5x+2) \leq 4(x+1) \\ \Leftrightarrow & 12x + 3 - 10x - 4 \leq 4x + 4 \\ \Leftrightarrow & -2x \leq 5 \\ \Leftrightarrow & x \geq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{5}{2}; +\infty \right)$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{3x-1}{4} - \frac{3(x-2)}{8} - 1 \geq \frac{5-3x}{2} \\ \Leftrightarrow & 2(3x-1) - 3(x-2) - 8 \geq 4(5-3x) \\ \Leftrightarrow & 6x - 1 - 3x + 6 - 8 \geq 20 - 12x \\ \Leftrightarrow & 15x \geq 23 \\ \Leftrightarrow & x \geq \frac{23}{15} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{23}{15}; +\infty \right)$.

Bài tập 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $3x - 5 > 2(x-1) - x$
b) $(x+2)^2 - (x-2)^2 \geq 2 - 8x$

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} & 3x - 5 > 2(x-1) - x \\ \Leftrightarrow & 3x - 5 > 2x - 1 - x \\ \Leftrightarrow & 2x > 4 \\ \Leftrightarrow & x > 2 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (2; +\infty)$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} & (x+2)^2 - (x-2)^2 \geq 2 - 8x \\ \Leftrightarrow & 8x \geq 2 - 8x \\ \Leftrightarrow & 16x \geq 2 \\ \Leftrightarrow & x \geq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{8}; +\infty \right)$

Bài tập 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $1+x - \frac{x-3}{4} \geq \frac{x+1}{4} - \frac{x-2}{3}$
b) $x^2 - 4x \geq 0$

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} & 1+x - \frac{x-3}{4} \geq \frac{x+1}{4} - \frac{x-2}{3} \\ \Leftrightarrow & 12 + 12x - 3x + 9 \geq 3x + 3 - 4x + 8 \\ \Leftrightarrow & 10x \geq -10 \\ \Leftrightarrow & x \geq -1 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1; +\infty)$

b) Ta có:

$$x^2 - 4x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0 \cup x \geq 4$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Bài tập 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

b) $\frac{(3x-2)^2}{3} - \frac{(2x+1)^2}{2} \leq x(x+1)$

Giải

a) Ta có:

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; 3]$.

b) Ta có:

$$\frac{(3x-2)^2}{3} - \frac{(2x+1)^2}{2} \leq x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(3x-2)^2 - 3(2x+1)^2 \leq 6x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 18x^2 - 24x + 8 - 12x^2 - 12x - 3 \leq 6x^2 + 6x$$

$$\Leftrightarrow -42x \leq -5$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{42}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{5}{42}; +\infty \right)$.

Bài tập 5: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{x+2}{3} - x + 1 > x + 3$

b) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} \geq 1 + \frac{x}{2}$

Giải

a) Ta có:

$$\frac{x+2}{3} - x + 1 > x + 3$$

$$\Leftrightarrow x + 2 - 3x + 3 > 3x + 9$$

$$\Leftrightarrow 5x < -4$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{4}{5}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{4}{5} \right)$

b) Ta có:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} \geq 1 + \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6x + 6 + 4x + 8 + 3x + 9 \geq 12 + 6x$$

$$\Leftrightarrow 7x \geq -11$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{11}{7}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{11}{7}; +\infty \right)$.

Bài tập 6: Giải và biện luận các bất phương trình:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 0$$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		Cùng dấu với a	0	Cùng dấu với a	

$$\Delta > 0$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		Cùng dấu với a	0	Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a	

Định lý tam thức: Cho tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$)

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

Bất phương trình tích:

Đưa bất phương trình đã cho về dạng: $P(x) < 0$; $P(x) \leq 0$; $P(x) > 0$; $P(x) \geq 0$.

Trong đó $P(x)$ là tích các biểu thức có bậc cao nhất là bậc hai.

Lập bảng xét dấu về trái rồi chọn miền nghiệm.

Bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức:

Đặt điều kiện xác định.

Đưa bất phương trình đã cho về dạng

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0; \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0; \frac{P(x)}{Q(x)} > 0; \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0.$$

Trong đó: Tử thức, mẫu thức là có bậc cao nhất là bậc hai.

2.1. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải bất phương trình sau: $-5x^2 + 4x + 12 < 0$.

Giải

Đặt: $f(x) = -5x^2 + 4x + 12$.

Giải phương trình $f(x) = 0$, có hai nghiệm là $x = -\frac{6}{5}$ và $x = 2$.

Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{6}{5}$	2	$+\infty$	
f(x)	-	0	+	0	-

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -\frac{6}{5}) \cup (2; +\infty)$.

Bài tập 2: Giải bất phương trình: $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0$

Giải

Giải phương trình:

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	2	4	7	$+\infty$
Vết trái	+		- 0	+		- 0 +

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1) \cup (2; 4) \cup (7; +\infty)$.

Bài tập 3: Giải bất phương trình: $16x^2 + 40x + 25 \geq 0$.

Giải

Đặt: $f(x) = 16x^2 + 40x + 25$.

Giải phương trình $f(x) = 0$, có một nghiệm là $x = -\frac{5}{4}$.

Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$
f(x)	+	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

Bài tập 4: Giải bất phương trình: $(2x+1)(x^2+x-30) \geq 0$.

Giải

Đặt: $f(x) = (2x+1)(x^2+x-30)$.

Giải phương trình $f(x) = 0$, có ba nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$; $x = 5$ và $x = -6$.

Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-6	$-\frac{1}{2}$	5	$+\infty$		
f(x)	-	0	+	0	-	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-6; -\frac{1}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

Bài tập 5: Giải bất phương trình: $\frac{6x}{2x^2-5x+3} - \frac{x}{2x^2-5x+3} \leq 0$.

Giải

Đặt: $f(x) = \frac{6x}{2x^2-5x+3} - \frac{x}{2x^2-5x+3} = \frac{5x}{2x^2-5x+3}$.

Giải các phương trình:

$5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$2x^2 - 5x + 3 = 0$, có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -\frac{3}{2}$

Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$+\infty$		
f(x)	-		+	0	-		+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup [0; 1)$.

2.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$

b) $x^2 - x - 6 \leq 0$

c) $x^4 - 3x^2 \leq 0$

Bài tập 2: Giải các bất phương trình sau: $(x-3)(x^2+x-6) > (x-2)(x^2+5x+4)$

Bài tập 3: Giải các bất phương trình sau: $\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1$.

Bài tập 4: Giải các bất phương trình sau: $\frac{1}{x^2-5x+4} < \frac{1}{x^2-7x+10}$.

3. Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối:

3.1. Kiến thức cơ bản:

Để giải bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Định nghĩa:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Tính chất:

$$|x| \geq 0, |x|^2 = x^2$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

$$|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \geq 0$$

$$|a - b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \leq 0$$

Các định lý cơ bản:

Định lý 1: Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

Định lý 2: Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A > B \Leftrightarrow A^2 > B^2$

Các dạng bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối:

$$|A| > |B| \Leftrightarrow A^2 > B^2$$

$$|A| > |B| \Leftrightarrow (A - B)(A + B) > 0$$

$$|A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A^2 < B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ -B < A < B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A < B \\ A < 0 \\ -A < B \end{cases}$$

$$|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ B \geq 0 \\ A^2 > B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ B \geq 0 \\ A < -B \vee A > B \end{cases}$$

Các cách giải bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối:

Phương pháp biến đổi cơ bản.

Phương pháp chia khoảng hoặc lập bảng giá trị.

3.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải các bất phương trình sau: $|7 - 4x| \leq |2x + 5|$

Giải

Lập bảng xét dấu giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$
$ 7 - 4x $		+	+	0
$ 2x + 5 $		-	0	+

Xét $x < -\frac{5}{2}$, ta có:

$$|7 - 4x| \leq |2x + 5|$$

$$\Leftrightarrow 7 - 4x \leq -(2x + 5)$$

$$\Leftrightarrow 7 - 4x \leq -2x - 5$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq -12$$

$$\Leftrightarrow x \geq 6.$$

$$\text{Kết hợp điều kiện là } \begin{cases} x < -\frac{5}{2} \\ x \geq 6 \end{cases}$$

Suy ra, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \Phi$.

Xét $-\frac{5}{2} < x < \frac{7}{4}$, ta có:

$$\begin{aligned} |7 - 4x| &\leq |2x + 5| \\ \Leftrightarrow 7 - 4x &\leq 2x + 5 \\ \Leftrightarrow 7 - 4x &\leq 2x + 5 \\ \Leftrightarrow -2x &\leq -2 \\ \Leftrightarrow x &\geq 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện là $\begin{cases} -\frac{5}{2} < x < \frac{7}{4} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{7}{4}$.

Suy ra, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[1; \frac{7}{4}\right)$.

Xét $x > \frac{7}{4}$, ta có:

$$\begin{aligned} |7 - 4x| &\leq |2x + 5| \\ \Leftrightarrow -(7 - 4x) &\leq 2x + 5 \\ \Leftrightarrow -7 + 4x &\leq 2x + 5 \\ \Leftrightarrow 2x &\leq 12 \\ \Leftrightarrow x &\leq 6 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện là $\begin{cases} x > \frac{7}{4} \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{4} < x \leq 6$.

Suy ra, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{7}{4}; 6\right]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[1; \frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 6\right] = [1; 6]$

Bài tập 2: Giải các bất phương trình sau: $|4 - x| < |3 - 2x| + |x + 1|$

Giải

Lập bảng xét dấu giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
$ 4 - x $	+	+	+	0	-
$ 3 - 2x $	+	+	0	-	-
$x + 1$	-	0	+	+	+

Xét $x < -1$, ta có:

$$\begin{aligned} |4 - x| &< |3 - 2x| + |x + 1| \\ \Leftrightarrow 4 - x &< 3 - 2x - (x + 1) \\ \Leftrightarrow 4 - x &< 3 - 2x - x - 1 \\ \Leftrightarrow 2x &< -2 \\ \Leftrightarrow x &< -1 \end{aligned}$$

Suy ra, tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1)$

Xét $-1 < x < \frac{3}{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} |4 - x| &< |3 - 2x| + |x + 1| \\ \Leftrightarrow 4 - x &< 3 - 2x + x + 1 \\ \Leftrightarrow 4 - x &< 3 - 2x + x + 1 \\ \Leftrightarrow 4 &< 4 \end{aligned}$$

Suy ra, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \Phi$.

Xét $\frac{3}{2} < x < 4$, ta có:

$$\begin{aligned} |4 - x| &< |3 - 2x| + |x + 1| \\ \Leftrightarrow 4 - x &< -(3 - 2x) + x + 1 \\ \Leftrightarrow 4 - x &< -3 + 2x + x + 1 \\ \Leftrightarrow -4x &< -6 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện là $\begin{cases} \frac{3}{2} < x < 4 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < 4$

Suy ra, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{3}{2}; 4\right)$.

Xét $x > 4$, ta có:

$$\begin{aligned} |4 - x| &< |3 - 2x| + |x + 1| \\ \Leftrightarrow -(4 - x) &< -(3 - 2x) + x + 1 \\ \Leftrightarrow -4 + x &< -3 + 2x + x + 1 \\ \Leftrightarrow -2x &< 2 \\ \Leftrightarrow x &> -1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện là $\begin{cases} x < 4 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$

Suy ra, tập nghiệm của bất phương trình là $S = (4; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; 4\right) \cup (4; +\infty)$.

Bài tập 3: Giải các bất phương trình sau: $\frac{|3-x|}{|x+5|} < 2$

Giải

Lập bảng xét dấu giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$
$ 3 - x $	+	+	0	-
$ x + 5 $	-	0	+	+

Xét $x < -5$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{|3-x|}{|x+5|} &< 2 \\ \Leftrightarrow \frac{3-x}{-(x+5)} &< 2 \Leftrightarrow \frac{3-x}{-x-5} - 2 < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3-x}{-x-5} - \frac{2(x+5)}{-x-5} &< 0 \Leftrightarrow \frac{3-x+2x+10}{-x-5} < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x+13}{x+5} &> 0 \end{aligned}$$

Vì $x < -5$ nên $x + 13 < 0 \Leftrightarrow x < -13$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -13)$.

Xét $-5 < x < 3$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{|3-x|}{|x+5|} &< 2 \\ \Leftrightarrow \frac{3-x}{x+5} &< 2 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x+5} - 2 < 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{x+5} - \frac{2(x+5)}{x+5} < 0 \Leftrightarrow \frac{3-x-2x-10}{x+5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+7}{x+5} > 0$$

Vì $x > -5$ nên $3x + 7 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{3}$.

Kết hợp với điều kiện là $\begin{cases} -5 < x < 3 \\ x > -\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{3} < x < 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{7}{3}; 3\right)$.

Xét $x > 3$, ta có:

$$\frac{|3-x|}{|x+5|} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(3-x)}{x+5} < 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+5} - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+5} - \frac{2(x+5)}{x+5} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3-2x-10}{x+5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+13}{x+5} > 0$$

Vì $x > 3$ nên $\frac{x+13}{x+5} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

3.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $x^2 + |5x - 4| - 1 \leq |3x - 2|$

Bài tập 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $2x^2 - |5x - 3| < 0$

Bài tập 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $|x^2 - 1| - 2x < 0$

c) $|x - 3| - |x + 1| < 2$

Bài tập 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $|2 - 3x^2| - |6 - x^2| = 0$

Bài tập 5: Giải các bất phương trình sau:

a) $|x^2 - 3x + 1| \leq x^3 + x^2 - 1$

Bài tập 6: Giải các bất phương trình sau:

a) $|x^2 - 3x + 2| + x^2 > 2x$

c) $\frac{2x-5}{|x-3|} + 1 > 0$

b) $|2x^2 + x - 1| > |x + 1|$

b) $x - 8 > |x^2 + 3x - 4|$

b) $|x^2 + 4x + 3| > |x^2 - 4x - 5|$

b) $2|x| - |x - 3| = 3$

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{|x|+1} \geq \frac{1}{|x|-1}$

b) $\left| \frac{x^2 - 4x}{x^2 + x + 2} \right| \leq 1$

d) $\frac{|x-2|}{x^2 - 5x + 6} \geq 3$

4. Bất phương trình vô tỉ:

4.1. Kiến thức cơ bản:

Định lý:

Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A > B \Leftrightarrow A^2 > B^2$

Với A, B bất kỳ thì $A > B \Leftrightarrow A^3 > B^3$.

Tính chất:

$$\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \\ B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$$

Khi giải bất phương trình dạng này, ta giải tương tự như phương trình vô tỷ. Sự khác nhau ở đây là dấu $<, >, \leq, \geq$ và dấu $=$.

Có hai phương pháp cơ bản:

Phương pháp chia khoảng.

Phương pháp nâng lên lũy thừa.

Phương pháp đặt ẩn số phụ.

Phương pháp nhân lượng liên hợp.

Phương pháp đánh giá hai vế.

4.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x-1} < 3$

Giải

Ta có:

$$\sqrt{2x-1} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 5$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2}; 5 \right)$.

Bài tập 2: Giải bất phương trình sau: $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{3-x}$

Giải

Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+2 \geq 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2}; 3 \right]$.

Bài tập 3: Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} < x$ (1)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Xét $-1 \leq x \leq 0$

Khi đó, ta có bất phương trình tương đương:

$$-x \leq \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} < x \quad (2)$$

Do $-1 \leq x \leq 0$ nên hai vế của (2) không âm, ta bình phương hai vế:

$$x^2 \leq 1 - x + 1 + x - 2\sqrt{1 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2 - x^2 \geq 2\sqrt{1 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4x^2 + x^4 \geq 4 - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 \geq 0$$

Bất phương trình đúng với mọi x thỏa mãn $-1 \leq x \leq 0$.

Suy ra, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1; 0)$

Xét $0 < x \leq 1$

Ta có:

$$1 + x \geq 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \geq 0.$$

Ta có bất phương trình tương đương:

$$1 + x + 1 - x - 2\sqrt{1 - x^2} \leq x^2$$

$$\Leftrightarrow 2 - x^2 \leq 2\sqrt{1 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4x^2 + x^4 \leq 4 - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Nghiệm này không thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1; 0)$

Bài tập 4: Giải bất phương trình: $\sqrt{8x-5} \leq 5$.

Giải

Ta có:

$$\sqrt{8x-5} \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-5 > 0 \\ 8x-5 \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{8} \\ 8x \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{8} \\ x \leq \frac{15}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{8} < x \leq \frac{15}{4}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{5}{8}; \frac{15}{4}\right]$.

Bài tập 5: Giải bất phương trình: $(x-3)\sqrt{x-4} \leq x^2-9$ (1)

Giải

Điều kiện: $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2$.

Khi đó, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x-3)(\sqrt{x^2-4} - x - 3) \leq 0 \quad (2)$$

Xét phương trình: $\sqrt{x^2-4} - x - 3 = 0$.

Khi đó ta có:

$$\sqrt{x^2-4} - x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} = x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-4 = x^2+6x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -\frac{13}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{13}{6}$$

Xét dấu của vế trái của (2) ta có:

x	$-\infty$	$-\frac{13}{6}$	-2	2	3	$+\infty$
-----	-----------	-----------------	------	-----	-----	-----------

$$(x-3)(\sqrt{x^2-4}-x-3) \quad | \quad - \quad 0 \quad + \quad | \quad // // // // // // // // \quad | \quad + \quad 0 \quad -$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{13}{6}\right] \cup [3; +\infty)$.

Bài tập 6: Giải bất phương trình: $x\sqrt{10-x^2} \leq x^2-6$ (1)

Giải

Điều kiện: $10-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 10 \geq x^2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{10}$.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x\sqrt{10-x^2} - x^2 + 6 \leq 0 \quad (2)$$

Xét phương trình:

$$x\sqrt{10-x^2} - x^2 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{10-x^2} = x^2 - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-6) \geq 0 \\ x^2(10-x^2) = x^4 - 12x^2 + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{6} \leq x \leq 0, x \geq \sqrt{6} \\ x^4 - 11x^2 + 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{6} \leq x \leq 0, x \geq \sqrt{6} \\ x^2 = 9, x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{6} \leq x \leq 0, x \geq \sqrt{6} \\ x = \pm 3, x = \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Xét dấu vế trái của (2) ta có:

x	$-\infty$	$-\sqrt{10}$	$-\sqrt{2}$	3	$\sqrt{10}$	$+\infty$			
$x\sqrt{10-x^2} - x^2 + 6$	////////	0	-		+		-	0	////////

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-\sqrt{10}; -\sqrt{2}] \cup [3; \sqrt{10}]$.

Bài tập 7: Giải bất phương trình: $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} > x-2$ (1)

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1 \quad (2).$$

Nhân hai vế của bất phương trình (1) với $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} > 0$.

Ta có:

$$4(x-1) - (x+2) > (x-2)(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}) \Leftrightarrow 3(x-2)(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} - 3) < 0 \quad (3)$$

Xét phương trình

$$2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1) + x+2 + 4\sqrt{(x-1)(x+2)} = 9$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+x+2} = 11-5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11-5x \geq 0 \\ 16(x^2+x-2) = 121-110x+25x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{11}{5} \\ 9x^2 - 126x + 153 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{11}{5} \\ x^2 - 14x + 17 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{11}{5} \\ x = 7 \pm 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Xét dấu vế trái của (3), ta có:

x	$-\infty$	1	$7-4\sqrt{2}$	2	$+\infty$
---	-----------	---	---------------	---	-----------

$$3(x-2)(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}-3) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline // // // // // // // & | & + & | & - & | & + \\ \hline \end{array}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (7-4\sqrt{2}; 2)$.

Bài tập 8: Giải bất phương trình sau: $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}+4x\sqrt{2x} \leq x^3+10$ (1).

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (x^3-4x\sqrt{2x}+8)+(2-\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}) \geq 0.$$

$$\text{Mà } (x^3-4x\sqrt{2x}+8) = (x\sqrt{x}-2\sqrt{2})^2 \geq 0, \forall x \in [1, 3]$$

và

$$(1^2+1^2)((\sqrt{x-1})^2+(\sqrt{3-x})^2) \geq (\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x})^2$$

$$\Rightarrow 4 \geq (\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x})^2$$

$$\Rightarrow 2-\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x} \geq 0$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1; 3]$.

Bài tập 9: Giải bất phương trình sau: $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x} \geq 2-x^2$ (2).

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 1+2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Ta có: $2-x^2 > 0$.

$$(2) \Leftrightarrow 1-2x+1+2x+2\sqrt{1-4x^2} \geq (2-x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2-2\sqrt{1-4x^2}+x^4-4x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-4x^2-2\sqrt{1-4x^2}+1+x^4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1-4x^2}-1)^2+x^4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-4x^2}-1=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x=0$.

4.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải bất phương trình: $\sqrt{3x-2} > 5$

Đáp số: $S = (9; +\infty)$

Bài tập 2: Giải bất phương trình: $\sqrt{5x+3}-\sqrt{2x-1} > 0$

Đáp số: $S = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Bài tập 3: Giải bất phương trình: $\sqrt{x-3} < 2x-1$

Đáp số: $S = [3; +\infty)$

Bài tập 4: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-x+1} \leq x+3$

Đáp số: $S = \left[-\frac{8}{7}; +\infty\right)$

Bài tập 5: Giải bất phương trình: $\sqrt{3x-2} > 4x-3$

Đáp số: $S = \left[\frac{2}{3}; 1\right)$

Bài tập 6: Giải bất phương trình: $\sqrt{3x^2 + x - 4} \geq x + 1$

Đáp số: $S = \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$

Bài tập 7: Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$

Đáp số: $S = (0; 10)$

Bài tập 8: Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{-3x^2 + x + 4}}{x} < 2$

Đáp số: $S = \left(\frac{9}{7}; -\frac{4}{3}\right] \cup [-1; 0)$

Bài tập 9: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

Đáp số: $S = [4; +\infty) \cup [1]$

Bài tập 10: Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}\sqrt{x-1} > \frac{3}{2}$

Đáp số: Vô nghiệm.

II. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH:

1. Kiến thức cơ bản:

Cách giải:

Thông thường ta giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của nghiệm từng bất phương trình của hệ với nhau.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 4x + 1 \geq 5 - 2x \\ x - 2 \leq 3x - 3 \end{cases}$$

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam và Chu Văn An Hà Nội năm học 2006 - 2007)

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} 4x + 1 \geq 5 - 2x \\ x - 2 \leq 3x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4 \geq 0 \\ -2x + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Bài tập 2: Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \leq 0 \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \cup x \geq 4 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Bài tập 3: Tìm số nguyên x, y, thỏa mãn hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt{2x} \cdot y^2 - z^4 \geq 7 \\ \sqrt{-x^2y^2 + 8xy + 9} - \sqrt{x^2 - 4} \geq 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \end{cases}$$

(Đề thi chọn HSG lớp 9 tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2006 - 2007)

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{2x} \cdot y^2 - z^4 \geq 7 & (1) \\ \sqrt{-x^2y^2 + 8xy + 9} - \sqrt{x^2 - 4} \geq 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) & (2) \end{cases}$$

Từ điều kiện:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Ta có: $\sqrt{-x^2y^2 + 8xy + 9} = \sqrt{25 - (xy - 4)^2} \leq 5$ nên $\sqrt{-x^2y^2 + 8xy + 9} - \sqrt{x^2 - 4} \leq 5$.

Nếu $x \geq 3$ thì $2 \left(x + \frac{1}{x} \right) > 6$ nên bất phương trình (2) vô nghiệm.

Suy ra: $2 \leq x < 3$.

Do x nguyên nên x chỉ có thể nhận giá trị là 2.

Thay x = 2 vào (2) ta tìm được y = 2.

Thay x = y = 2 vào (1) ta tìm được $-1 \leq z \leq 1$ mà z nguyên nên $z \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy hệ bất phương trình trên có ba nghiệm (x; y; z) là (2; 2; -1), (2; 2; 0), (2; 2; 1).

Bài tập 4: Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0 \\ y + |x - 1| - 2 < 0 \end{cases}$$

Giải

Từ bất phương trình: $y + |x - 1| - 2 < 0$.

Suy ra: $y < 2$.

Kết hợp với $y + |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0$.

Ta có:

$$\begin{aligned} |x^2 - 2x| &< y + \frac{1}{2} < \frac{5}{2} \\ \Rightarrow -\frac{5}{2} &< x^2 - 2x < \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Do x nguyên, suy ra: $x \in \{0; 1; 2\}$.

Thay vào hệ bất phương trình ta tìm được ba cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn là (0; 0); (1; 1), (2; 0).

Bài tập 5: Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+2 > 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -2 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2}; 3 \right]$.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 5x-2 > 4x+5 \\ 5x-4 < x+2 \end{cases}$$

Bài tập 2: Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x+1 > 3x+4 \\ 5x+3 \geq 8x-9 \end{cases}$$

Bài tập 3: Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{5x+2}{3} \geq 4-x \\ \frac{6-5x}{13} < 3x+1 \end{cases}$$

Bài tập 4: Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} (1-x)^2 > 5+3x+x^2 \\ (x+2)^2 < x^3+6x^2-7 \end{cases}$$

Bài tập 5: Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x+3 \\ \frac{3x+8}{4} > 2x-5 \end{cases}$$

Bài tập 6: Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 6x+\frac{5}{7} < 4x+7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases}$$

Bài tập 7: Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 15x-2 > 2x+\frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases}$$

Bài tập 8: Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x-1 \leq 2x-3 \\ 3x < x+5 \\ \frac{5-3x}{2} \leq x-3 \end{cases}$$

Bài tập 9: Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x - 2y + 8 \geq 0 \\ x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \leq 0 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$$

Tìm m để hệ bất phương trình có nghiệm.

Hướng dẫn: Các bạn nên dùng đồ thị để biện luận là chính xác nhất và hay hơn giải hệ.

Bài tập 10: Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{2xy + m} \geq 1 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 11: Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \\ x - y + m = 0 \end{cases}$$

Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 12: Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \leq 2 \\ x - y - a = 0 \end{cases}$$

Tìm a để hệ có nghiệm.

CHUYÊN ĐỀ 19 BẤT ĐẲNG THỨC

Kiến thức chung:

Bất đẳng thức (tiếng Anh: Inequality) là quan hệ thứ tự giữa hai đối tượng.

Ký hiệu:

$a < b$ có nghĩa là a nhỏ hơn b.

$a > b$ có nghĩa là a lớn hơn b.

Những quan hệ nói trên được gọi là bất đẳng thức nghiêm ngặt.

Ngoài ra ta còn có:

$a \leq b$ có nghĩa là a nhỏ hơn hoặc bằng b.

$a \geq b$ có nghĩa là a lớn hơn hoặc bằng b.

Các ký hiệu a, b ở hai vế của một bất đẳng thức có thể là các biểu thức của các biến.

Nếu một bất đẳng thức đúng với mọi giá trị của tất cả các biến có mặt trong bất đẳng thức, thì bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức tuyệt đối hay không điều kiện.

Nếu một bất đẳng thức chỉ đúng với một số giá trị nào đó của các biến, với các giá trị khác thì nó bị đổi chiều hay không còn đúng nữa thì nó được gọi là một bất đẳng thức có điều kiện.

Một bất đẳng thức đúng vẫn còn đúng nếu cả hai vế của nó được thêm vào hoặc bớt đi cùng một giá trị, hay nếu cả hai vế của nó được nhân hay chia với cùng một số dương. Một bất đẳng thức sẽ bị đảo chiều nếu cả hai vế của nó được nhân hay chia bởi một số âm.

Ba bài toán thường gặp trên các bất đẳng thức là

(1) Chứng minh bất đẳng thức đúng với trị giá trị của các biến thuộc một tập hợp cho trước. Đó là chứng minh bất đẳng thức.

(2) Tìm tập các giá trị của các biến để bất đẳng thức đúng. Đó là bài toán giải bất phương trình.

(3) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức một hay nhiều biến.

M được gọi là giá trị nhỏ nhất của biểu thức P thì ta viết:

$$P \geq M.$$

m được gọi là giá trị lớn nhất của biểu thức P thì ta viết:

$$P \leq m.$$

1. Chứng minh bất đẳng thức bằng định nghĩa:

1.1. Kiến thức cơ bản:

Để chứng minh $A > B$, ta chứng minh $A - B > 0$.

Sử dụng hằng đẳng thức $A^2 \geq 0$.

Tính chất:

Giả sử tồn tại các biểu thức a, b và c , khi đó:

Tính chất 1: Nếu $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases}$ thì $a > c$.

Tính chất 2: Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$

Hệ quả 1: Nếu $a > b$ thì $a - c > b - c$

Hệ quả 2: Nếu $a + c > b$ thì $a > b - c$

Tính chất 3: Nếu $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases}$ thì $a + c > b + d$

Tính chất 4: Nếu $a > b$ thì $\begin{cases} ac > bc \text{ khi } c > 0 \\ ac < bc \text{ khi } c < 0 \end{cases}$

Hệ quả 3: Nếu $a > b$ thì $-a < -b$

Hệ quả 4: Nếu $a < b$ thì $\begin{cases} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ khi } c > 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ khi } c < 0 \end{cases}$

Tính chất 5: Nếu $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases}$ thì $ac > bd$

Tính chất 6: Nếu $a > b > 0$ thì $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Tính chất 7: Nếu $a > b > 0, n \in \mathbb{N}^*$ thì $a^n > b^n$

Tính chất 8: Nếu $a > b > 0, n \in \mathbb{N}^*$ thì $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Hệ quả 5: Nếu a và b là hai số dương thì:

$$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

Nếu a và b là hai số không âm thì:

$$a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$$

1.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho ba số a, b, c bất kì. Chứng minh các bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Chứng minh

Ta có:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0. \text{ (luôn luôn đúng)}$$

Bài tập 2: Cho ba số a, b, c bất kỳ. Chứng minh các bất đẳng thức: $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$

Chứng minh

Ta có:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 \geq 0. \text{ (luôn luôn đúng)}$$

Bài tập 3: Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$, với mọi $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{a^2}{4} - ab + b^2 + \frac{a^2}{4} - ac + c^2 + \frac{a^2}{4} - ad + d^2 + \frac{a^2}{4} - ae + e^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0. \text{ (luôn luôn đúng)}$$

Bài tập 4: Cho ba số $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $abc = 1$ và $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

1) Chứng minh rằng: $(a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0$.

2) Chứng minh rằng: Luôn tồn tại một trong ba số a, b, c nhỏ hơn 1.

Chứng minh

1) Ta có:

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow abc - ab - bc - ac + a + b + c > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + (a + b + c) - (ab + bc + ca) > 0 \quad (1)$$

Và

$$a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow a + b + c > \frac{ab + bc + ac}{abc}$$

$$\Leftrightarrow a + b + c > ab + bc + ac \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có điều phải chứng minh.

2) Giả sử tồn tại cả ba số a, b, c luôn lớn hơn 1.

Suy ra: $abc > 1$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Nếu đồng thời xảy ra: $a = b = c = 1$ thì $abc = 1$.

Nhưng $(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0$. Mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy luôn luôn tồn tại một số trong ba số a, b, c nhỏ hơn 1.

Bài tập 5: Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 \geq ab$.

Chứng minh

Ta có:

$$a^2 + b^2 - ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2\right) + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0. \text{ Đúng với mọi } a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vì } \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0; \quad \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 = 0 \text{ và } \frac{3}{4}b^2 = 0.$$

Suy ra: $a = b = 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Lưu ý: Bài toán tổng quát: Chứng minh: $(a^n)^2 + (b^n)^2 \geq |a^n b^n|$.

Bài tập 6: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 < a \leq b \leq c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$$

Chứng minh

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} = \frac{1}{abc} (a^2c + ab^2 + bc^2 - b^2c - ba^2 - ac^2) \\ &= \frac{1}{abc} [(a^2c - b^2c) + (b^2a - a^2b) + (c^2b - ac^2)] \\ &= \frac{1}{abc} [(c(a - b)(a + b) + ab(a - b) - c^2(a - b))] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{abc}(a-b)[c(a+b)-ab-c^2]$$

$$= \frac{1}{abc}(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0, \text{ (Vì } 0 < a \leq b \leq c)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$ hoặc $b = c$ hoặc $a = c$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 7: Cho $a \leq b \leq c$ và $x \leq y \leq z$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{ax+by}{2}$

Chứng minh

Ta có:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{ax+by}{2} = \frac{1}{4}(ax+ay+by+bx-2ax-2by)$$

$$= \frac{1}{4}[(ay-ax) + (bx-by)]$$

$$= \frac{1}{4}(x-y)(b-a) \leq 0, \text{ (do } x \leq y \text{ và } a \leq b)$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$ hoặc $a = b$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Bài tập 8: Cho a, b, c, d, e là các số thực. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$.

Chứng minh

Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b+c+d+e)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae$$

$$= \frac{1}{4}(4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 - 4ab - 4ac - 4ad - 4ae)$$

$$= \frac{1}{4}[(a^2 + 4b^2 + 4ab) + (a^2 + c^2 + 4ac) + (a^2 + 4d^2 + 4ad) + (a^2 + 4e^2 + 4ae)]$$

$$= \frac{1}{4}[(a+2b)^2 + (a+2c)^2 + (a+2d)^2 + (a+2e)^2] \geq 0$$

$$\text{Do } (a+2b)^2 \geq 0; (a+2c)^2 \geq 0; (a+2d)^2 \geq 0 \text{ và } (a+2e)^2 \geq 0$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } b = c = d = e = \frac{a}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 9: Chứng minh bất đẳng thức: $(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)$.

Chứng minh

Ta có:

$$(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)$$

$$\Leftrightarrow (a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) - (a^8 + b^8)(a^4 + b^4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^{12} + a^{10}b^2 + a^2b^{10} + b^{12} - a^{12} - a^8b^4 - a^4b^8 - b^{12} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^{10}b^2 - a^8b^4) + (a^2b^{10} - a^4b^8) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^8b^2(a^2 - b^2) - a^2b^8(a^2 - b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2(a^2 - b^2)(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2(a^2 - b^2)^2(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 0, \text{ đúng với mọi } a, b$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \text{ hoặc } a = -b \text{ và } a = 0 \text{ hoặc } b = 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 10: Cho $a \geq c \geq 0$ và $b \geq c$. Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.

Chứng minh

Ta có:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \right)^2 \leq (\sqrt{ab})^2$$

$$\Leftrightarrow c(a-c) + c(b-c) + 2\sqrt{c(a-c)} \cdot \sqrt{c(b-c)} \leq ab$$

$$\Leftrightarrow (a-c)(b-c) - 2c\sqrt{a-c} \cdot \sqrt{b-c} + c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{(a-c)} \sqrt{(b-c)} - c \right]^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức đúng với mọi giá trị của a, b, c .

Bài tập 11: Cho a, b, c là ba số dương.

Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{3}{ab} + \frac{3}{bc} + \frac{3}{ca} \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)^2$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc}$$

Do $a, b, c > 0$ và $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Suy ra:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{8(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Hay

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{4(a+b) + 4(b+c) + 4(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq \frac{8}{(b+c)(c+a)} + \frac{8}{(a+b)(c+a)} + \frac{8}{(a+b)(b+c)} \quad (1)$$

Trong (1) dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Mặt khác, ta có:

$$(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$$

$$(b+c)^2 \geq 4bc \Rightarrow \frac{1}{bc} \geq \frac{4}{(b+c)^2}$$

$$(c+a)^2 \geq 4ca \Rightarrow \frac{1}{ca} \geq \frac{4}{(c+a)^2}$$

Suy ra:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{4}{(b+c)^2} + \frac{4}{(c+a)^2} \quad (2)$$

Trong (2) dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Từ (1) và (2) Ta có $\frac{3}{ab} + \frac{3}{bc} + \frac{3}{ca} \geq \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Bài tập 12: Cho a, b, c là ba số dương và $abc = 1$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1$.

Chứng minh

Do $0 \leq a \leq b \leq c$.

Suy ra: $(a-b)^2(a+b) \geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

$$\Leftrightarrow (a - b)(a + b)(a - b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a - b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 1 \geq a^2b + ab^2 + abc$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 1 \geq ab(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)} = \frac{c}{a + b + c} \cdot \left(\text{Do } abc = 1 \Rightarrow \frac{1}{ab} = c \right)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{b^3 + c^3 + 1} \leq \frac{1}{bc(a + b + c)} = \frac{a}{a + b + c}$$

$$\frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq \frac{1}{ca(a + b + c)} = \frac{b}{a + b + c}$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài tập 13: Với $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Chứng minh

a) Xét hiệu:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$$

$$= (x - y + z)^2 \geq 0, \text{ đúng với mọi } x, y, z \in \mathbb{R}$$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ đúng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$

Dấu bằng xảy ra khi $x + y = z$

b) Xét hiệu:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$$

$$= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài tập 14: Cho $abc = 1$ và $a^3 > 36$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$.

Chứng minh

Xét hiệu:

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$$

$$= \left(\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab - ac + 2bc \right) + \frac{a^2}{12} - 3bc = \left(\frac{a}{2} - b - c \right)^2 + \frac{a^3 - 36abc}{12a} > 0$$

(Vì $abc = 1$ và $a^3 > 36$)

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 15: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2(y + z)}{yz} + \frac{y^2(z + x)}{zx} + \frac{z^2(x + y)}{xy}$

Giải

Ta có : $P = \frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y}$

Mà $x^2 + y^2 - xy \geq xy$, với mọi x, y .

Nên $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$, với mọi $x, y > 0$.

Hay

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq (x + y), \text{ với mọi } x, y > 0.$$

Tương tự: Với mọi $x, y > 0$.

$$\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{y} \geq (y + z);$$

$$\frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{z} \geq (z + x)$$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên, ta có:

$$P \geq 2(x + y + z) = 2, \text{ (do } x + y + z = 1)$$

$$\text{Suy ra: } P = 2 \text{ khi } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2.

Bài tập 16: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của } P = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

Giải

Ta có:

$$P^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} + 2$$

Mà

$$\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} \geq 2y^2,$$

$$\frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} \geq 2z^2,$$

$$\frac{z^2 x^2}{y^2} + \frac{x^2 y^2}{z^2} \geq 2x^2.$$

Nên

$$P^2 = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} + 2 \geq 3.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{3}$.

1.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Chứng minh bất đẳng thức sau: $4x^2 + y^2 \geq 4xy$.

Bài tập 2: Chứng minh bất đẳng thức sau: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Bài tập 3: Chứng minh bất đẳng thức sau: $(x + y)(x^3 + y^3)(x^7 + y^7) \leq 4(x^{11} + y^{11})$.

Bài tập 4: Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{x^{1996} + y^{1996} + z^{1996}}{x^{1995} + y^{1995} + z^{1995}} \geq \frac{x + y + z}{3}$

Bài tập 5: Cho a, b, c là ba số dương.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $a^3 + b^3 + c^3 \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$.

Bài tập 6: Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$1) \frac{a^8 + b^8 + c^8}{(abc)^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$2) \frac{a^3 b}{c} + \frac{b^3 c}{a} + \frac{c^3 a}{b} + \frac{a^3 c}{b} + \frac{b^3 a}{c} + \frac{c^3 b}{a} \geq 6abc$$

Bài tập 7: Cho $0 \leq x, y, z \leq 1$. Chứng minh rằng:

1) $0 \leq x + y + z - xy - yz - zx \leq 1$

2) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 + x^2y + y^2z + z^2x$

3) $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{zx+1} + \frac{z}{xy+1} \leq 2$

Bài tập 8: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, có chu vi bằng 2.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$.

Bài tập 9: Chứng minh với mọi $x, y > \sqrt{2}$. Ta có: $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 > x^2 + y^2$.

Bài tập 10: Cho a, b, c là ba số tùy ý thuộc đoạn $[0, 1]$. Chứng minh rằng:

1) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

2) $2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) \leq 3$

Bài tập 11: Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

b) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

Bài tập 12: Cho m, n, p, q là các số thực. Chứng minh rằng:

$$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + 1 \geq m(n + p + q + 1)$$

Bài tập 13: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

Bài tập 14: Cho $x, y \neq 0$. Chứng minh: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

Bài tập 15: Chứng minh rằng nếu $0 < x \leq y \leq z$ thì ta có: $y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{y}(x + z) \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)(x + z)$.

Bài tập 16: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \leq 3\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}\right)$$

Bài tập 17: Cho x, y, z là các số dương. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z)$$

Bài tập 18: Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng: $abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \geq 0$.

2. Chứng minh bất đẳng thức dựa vào tính chất của tỉ số:

2.1. Kiến thức cơ bản:

Với ba số dương a, b, c , ta có:

Nếu $\frac{a}{b} \leq 1$ thì $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+c}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

Nếu $\frac{a}{b} \geq 1$ thì $\frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+c}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

Nếu $b, d > 0$ và $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$. Dấu bằng xảy ra khi $ad = bc$

2.2. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác:

Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

Chứng minh

Do a, b, c là ba cạnh của tam giác nên ta có: $a, b, c > 0$

và $a + b > c; b + c > a; c + a > b$.

Ta có:

$$a + b > c \Rightarrow \frac{c}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{c+c}{a+b+c} = \frac{2c}{a+b+c} \Rightarrow \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$b + c > a \Rightarrow \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a+a}{a+b+c} = \frac{2a}{a+b+c} \Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$$

$$c + a > b \Rightarrow \frac{b}{c+a} < 1 \Rightarrow \frac{b+b}{a+b+c} = \frac{2b}{a+b+c} \Rightarrow \frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2$$

và

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

Vì $a, b, c > 0$.

Vậy $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$ (điều phải chứng minh)

Nhận xét: Bài toán trên sử dụng tính chất: Với ba số dương a, b, c

Nếu $\frac{a}{b} \leq 1$ thì $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+c}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

Bài tập 2: Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$.

Chứng minh

Ta chứng minh: $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1}$

Do $a, b > 0$ ta có:

$$\frac{a}{a+1} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+1} < \frac{a+b}{a+b+1}$$

$$\frac{b}{b+1} < 1 \Rightarrow \frac{b}{b+1} < \frac{a+b}{a+b+1}$$

Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} < \frac{2(a+b)}{a+b+1} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1} \quad (1)$$

Ta chứng minh: $\frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$

Do $a, b > 0$, ta có:

$$\frac{a}{a+1} > \frac{a}{a+b+1}$$

và

$$\frac{b}{b+1} > \frac{b}{a+b+1}$$

Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \quad (\text{điều phải chứng minh})$$

Bài tập 3: Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

Chứng minh

Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức, ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$

Mặt khác :

$$\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d} \quad (3)$$

Tương tự ta có

$$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d} \quad (4)$$

$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{b+c}{a+b+c+d} \quad (5)$$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d} \quad (6)$$

cộng vế với vế của (3), (4), (5), (6) ta có:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 4: Cho $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $b, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}.$$

Chứng minh

$$\text{Từ } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2} = \frac{c}{d}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 5: Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$ nằm giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của

$\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}$ ở đó a_i, b_i là các số dương $i = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh

Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}$ thứ tự là m và M

Khi đó ta có $m \leq \frac{a_i}{b_i} \leq M, i=1,2,\dots,n$

Suy ra:

$$mb_i \leq a_i \leq b_i M.$$

Do $b_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$

Lần lượt cho $i = 1, 2, \dots, n$ rồi cộng các vế lại với nhau ta được:

$$m(b_1 + b_2 + \dots + b_n) < a_1 + a_2 + \dots + a_n < M(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} < M.$$

Do $(b_1 + b_2 + \dots + b_n) > 0$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 6: Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$$

Chứng minh

Vì $a, b, c, d > 0$ nên ta có:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} < \frac{b+c}{b+c+d} < \frac{b+c+a}{a+b+c+d} \quad (2)$$

$$\frac{c+d}{a+b+c+d} < \frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d} \quad (3)$$

$$\frac{d+a}{a+b+c+d} < \frac{d+a}{d+a+b} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d} \quad (4)$$

Cộng các vế của 4 bất đẳng thức trên ta có:

$$2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Chứng minh rằng: $\frac{2}{3} < \frac{2+4+6+\dots+2004}{3+5+7+\dots+2005} < \frac{2004}{2005}$

Bài tập 2: Cho a, b là các số dương thỏa mãn $ab=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2a+2} + \frac{1}{2b+2} < \frac{a+b}{1+a+b} < \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} - \frac{1}{2a+2}$

Bài tập 3: Cho $\frac{x}{y} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{m}{n}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y} \leq \frac{x+2004a+2005m}{y+2004b+2005n} \leq \frac{m}{n}$.

3. Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp phản chứng:

3.1. Kiến thức cơ bản:

Giả thiết chứng minh:

Giả sử điều cần chứng minh nào đó là đúng. Ta vận dụng giả thiết đúng để chứng minh là điều vô lý.

Giả sử bất đẳng thức đó sai và kết hợp với các giả thiết để suy ra điều vô lý, điều vô lý có thể là điều trái với giả thiết, có thể là điều trái ngược nhau.

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.

Giả sử ta phải chứng minh luận đề “ $p \Rightarrow q$ ”

Muốn chứng minh $p \Rightarrow q$ (với p : giả thiết đúng, q : kết luận đúng) phép chứng minh được thực hiện như sau:

Giả sử không có q (hoặc q sai) suy ra điều vô lý hoặc p sai.

Vậy phải có q (hay q đúng)

Như vậy để phủ định luận đề ta ghép tất cả giả thiết của luận đề với phủ định kết luận của nó.

Ta thường dùng 5 hình thức chứng minh phản chứng sau:

A - Dùng mệnh đề phản đảo: “ $P \Rightarrow Q$ ”

B - Phủ định rồi suy trái giả thiết

C - Phủ định rồi suy trái với điều đúng

D - Phủ định rồi suy ra 2 điều trái ngược nhau

E - Phủ định rồi suy ra kết luận.

3.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $0 < a, b, c < 1$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai:

$$a(1-b) > 0,25; b(1-c) > 0,25; c(1-a) > 0,25$$

Chứng minh

Giả sử cả ba bất đẳng thức: $a(1-b) > 0,25; b(1-c) > 0,25; c(1-a) > 0,25$ đều đúng.

Khi đó: $a(1-b)b(1-c)c(1-a) > 0,25^3$ (1)

Mặt khác, ta có:

$$a(1-a) = a - a^2 = 0,25 - (a^2 - 2.a.0,5 + 0,25) = 0,25 - (a - 0,5)^2 \leq 0,25$$

Hay

$$a(1-a) \leq 0,25$$

Tương tự, ta có:

$$b(1-b) \leq 0,25 \text{ và } c(1-c) \leq 0,25$$

Nhân vế với vế của ba bất đẳng thức cuối cùng ta được:

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) < 0,25^3 \quad (2)$$

Ta nhận thấy (1) mâu thuẫn với (2).

Suy ra, điều giả sử trên là sai.

Vậy trong các bất đẳng thức sau: $a(1-b) > 0,25; b(1-c) > 0,25; c(1-a) > 0,25$ có ít nhất một bất đẳng thức sai.

Bài tập 2: Chứng minh rằng không có ba số x, y, z mà có thể thỏa mãn đồng thời ba bất đẳng thức sau: $|x| < |y-z|, |y| < |x-z|, |z| < |y-x|$

Chứng minh

Giả sử: Cả ba bất đẳng thức trên không có bất đẳng thức nào sai. Nghĩa là cả ba bất đẳng thức đó đều đúng.

Khi đó, ta có:

$$|x| < |y-z| \Leftrightarrow x^2 < (y-z)^2 \Leftrightarrow x^2 - (y-z)^2 < 0 \Leftrightarrow (x-y+z)(x+y-z) < 0$$

$$|y| < |x-z| \Leftrightarrow y^2 < (x-z)^2 \Leftrightarrow y^2 - (x-z)^2 < 0 \Leftrightarrow (y-x+z)(y+x-z) < 0$$

$$|z| < |y-x| \Leftrightarrow z^2 < (y-x)^2 \Leftrightarrow z^2 - (y-x)^2 < 0 \Leftrightarrow (z-y+x)(z+y-x) < 0$$

Nhân vế với vế của ba bất đẳng thức cuối cùng ta được:

$$[(y-x+z)(y+x-z)(x-y+z)]^2 < 0 \text{ vô lý.}$$

Vậy không có ba số x, y, z nào thỏa mãn đồng thời ba bất đẳng thức:

$$|x| < |y-z|, |y| < |x-z|, |z| < |y-x|$$

Bài tập 3: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a+b+c > 0 \\ ab+bc+ca > 0 \\ abc > 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $a, b, c > 0$ (1)

Chứng minh

Giả sử (1) không đúng.

Suy ra, có ít nhất một trong các số $a, b, c \leq 0$.

Không mất tính tổng quát: Giả sử $a \leq 0$.

Do $abc > 0$ nên $bc < 0$

Xét trường hợp $a \leq 0, b > 0, c < 0$. Suy ra: $a + c < 0$

Từ giả thiết, ta có: $b > -a - c$.

Suy ra:

$$b(a + c) < -(a + c)^2$$

$$\Rightarrow ac + b(a + c) < ac - (a + c)^2$$

$$\Leftrightarrow ac + b(a + c) < -(-ac + a^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow ac + ba + bc < -(a - 0,5c)^2 - 0,75c^2 \leq 0$$

Điều này trái giả thiết: $ab + bc + ca > 0$.

Tương tự, đối với trường hợp $A \leq 0, b < 0, c > 0$.

Ta cũng suy ra điều vô lý.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 4: Chứng minh rằng: Tổng của một phân số dương với nghịch đảo của nó không nhỏ hơn 2.

Chứng minh

Giả sử phản chứng $\frac{a}{b} > 0$.

Ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} < 0 \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{ab} < 0$$

Điều này vô lý. Suy ra: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Vậy tổng của một phân số dương với nghịch đảo của nó không nhỏ hơn 2.

Bài tập 5: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c > 0, ab + bc + ac > 0, abc > 0$.

Chứng minh rằng: $a > 0, b > 0, c > 0$.

Chứng minh

Giả sử $a \leq 0$.

Từ $abc > 0 \Rightarrow a \neq 0$.

Do đó: $a < 0$.

Mà $abc > 0$ và $a < 0$. Suy ra: $cb < 0$

Từ $ab + bc + ca > 0 \Rightarrow a(b + c) > -bc > 0$

Vì $a < 0$ mà $a(b + c) > 0 \Rightarrow b + c < 0$

$a < 0$ và $b + c < 0$.

Suy ra: $a + b + c < 0$, trái giả thiết $a + b + c > 0$.

Vậy $a > 0$ tương tự ta có $b > 0, c > 0$.

Bài tập 6: Cho 4 số a, b, c, d thỏa mãn điều kiện: $ac \geq 2.(b+d)$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai: $a^2 < 4b$ và $c^2 < 4d$.

Chứng minh

Giả sử 2 bất đẳng thức: $a^2 < 4b$ và $c^2 < 4d$ đều đúng.

Khi đó cộng các vế ta được:

$$a^2 + c^2 < 4b + 4d$$

$$\Leftrightarrow a^2 + c^2 < 4(b + d) \quad (1)$$

Theo giả thiết, ta có:

$$4(b+d) \leq 2ac \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $a^2 + c^2 < 2ac$ hay $(a - c)^2 < 0$ (vô lý)

Vậy trong 2 bất đẳng thức $a^2 < 4b$ và $c^2 < 4d$ có ít nhất một các bất đẳng thức sai.

Bài tập 7: Chứng minh rằng không tồn tại các số a, b, c đồng thời thỏa mãn ba bất đẳng thức sau:

$$|a| < |b - c| \quad (1)$$

$$|b| < |c - a| \quad (2)$$

$$|c| < |a - b| \quad (3)$$

Chứng minh

Giả sử tồn tại các số a, b, c đồng thời thỏa mãn (1),(2),(3). Khi đó:

$$|a| < |b - c| \Leftrightarrow (b - c)^2 > a^2 \Leftrightarrow -(a + b - c)(a - b + c) > 0$$

$$|b| < |c - a| \Leftrightarrow (c - a)^2 > b^2 \Leftrightarrow -(-a + b + c)(a + b - c) > 0$$

$$|c| < |a - b| \Leftrightarrow (b - c)^2 > a^2 \Leftrightarrow -(a + b - c)(-a + b + c) > 0$$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$-[(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)]^2 > 0$$

Điều này vô lý.

Vậy bài toán được chứng minh

3.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho ba số dương nhỏ hơn 2 a, b, c . Chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai: $a(2 - b) > 1$; $b(2 - c) > 1$; $c(2 - a) > 1$.

Bài tập 2: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$S = (a - 1 + b^{-1})(b - 1 + c^{-1})(c - 1 + a^{-1}) \leq 1$$

Bài tập 3: Cho $a + b + 2cd$. Chứng minh rằng có ít nhất một bất đẳng thức sau là đúng:

$$c^2 > a, d^2 > b$$

Bài tập 4: Cho a, b, c, x, y, z là các số thực thỏa mãn:
$$\begin{cases} a > 0 \\ (b-1)^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng trong các bất đẳng thức sau có ít nhất một bất đẳng thức là sai:

$$ax^2 + bx + c \leq y; ay^2 + by + c \leq z; az^2 + bz + c \leq x$$

4. Bất đẳng thức tam giác:

4.1. Kiến thức cơ bản:

Gọi $a, b, c > 0$ lần lượt là độ dài ba cạnh của một tam giác. Khi đó, ta có:

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|c - a| < b < c + a$$

$$|a - b| < c < a + b$$

Gọi P là nửa chu vi của tam giác.

Gọi S là diện tích của tam giác.

$$P - a > 0; P - b > 0; P - c > 0$$

$$2S \leq ab; 2S \leq bc; 2S \leq ac.$$

và

$$a^2 \leq b^2 + c^2 \text{ nếu } \hat{A} \leq 90^\circ$$

4.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh trong một tam giác. Chứng minh rằng: $(a + b + c)^2 \leq 9bc$.

Biết $a \leq b \leq c$.

Chứng minh

Ta có: $a + b + c \leq 2b + c$.

Do $a \leq b$. Ta đi chứng minh:

$$(2b + c)^2 \leq 9bc \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 + 4bc + c^2 \leq 9bc$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 - 5bc + c^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 - 4bc - bc + c^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4b(b - c) - c(b - c) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (b - c)(4b - c) \leq 0 \quad (2)$$

Ta thấy:

$$b \leq c \Rightarrow b - c \leq 0 \text{ và } 4b - c \geq a + b - c + 2b \geq 0$$

Bất đẳng thức (2) là đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 2: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Hãy chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Chứng minh

Do a, b, c là độ dài ba cạnh trong một tam giác

Nên

$$0 < a < b + c \Leftrightarrow a^2 < ab + ac$$

Tương tự, ta có:

$$b^2 < ba + bc \text{ và } c^2 < ca + cb$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức cuối cùng ta được:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 3: Cho a, c, b là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$$

Chứng minh

Ta có:

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 - a^3 - b^3 - c^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow a[(b - c)^2 - a^2] + b[(c - a)^2 - b^2] + c[(a - b)^2 - c^2] > 0$$

$$\Leftrightarrow a(b - c - a)(b - c + a) + b(c - a - b)(c - a + b) + c(a - b - c)(a - b + c) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - c)(ab - ac - a^2 - bc - b^2 + ab + ac + bc + c^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - c)(c^2 - a^2 - b^2 + 2ab) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - c)(c - a + b)(c + a - b) > 0$$

Điều này luôn đúng. Vì a, b, c là độ dài ba cạnh trong một tam giác.

Vậy a, c, b là độ dài ba cạnh của tam giác thì $a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$.

Bài tập 4: Chứng minh rằng trong tam giác ABC có : $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}} \quad (1)$$

và

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{1}{2}(b+c-a+c+a-b) = c$$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq \frac{1}{2}(c+a-b+a+b-c) = a$$

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq \frac{1}{2}(a+b-c+b+c-a) = b$$

Nhân các vế của 3 bất đẳng thức trên, ta được:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$$

$$\Rightarrow \frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \geq 1$$

Kết hợp với chứng minh (1), suy ra:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c hay ABC là đều .

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 5: Cho a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác.

Chứng minh rằng: $abc > (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$

Chứng minh

Ta có:

$$a > |b - c| \Rightarrow a^2 > a^2 - (b - c)^2 > 0$$

$$b > |a - c| \Rightarrow b^2 > b^2 - (c - a)^2 > 0$$

$$c > |a - b| \Rightarrow c^2 > c^2 - (a - b)^2 > 0$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức ta được:

$$a^2b^2c^2 > [a^2 - (b - c)^2][b^2 - (c - a)^2][c^2 - (a - b)^2]$$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2 > (a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2$$

$$\Rightarrow abc > (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Tam giác có độ dài ba cạnh a, b, c thỏa mãn điều kiện trên là tam giác đều.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 6: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

ở đây a, b, c là độ dài ba cạnh, p là nửa chu vi của tam giác.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a)(p-b)} = \frac{4}{c} \quad (1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $p - a = p - b \Leftrightarrow a = b$.

Tương tự, ta có:

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a} \quad (2)$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b} \quad (3)$$

Dấu bằng trong hai bất đẳng thức trên xảy ra khi $a = b; b = c$.

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên, ta có:

$$2\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \geq 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Tam giác có độ dài ba cạnh như trên là tam giác đều.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

4.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) > 2abc + a^3 + b^3 + c^3$$

Bài tập 2: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) < 3abc + a^3 + b^3 + c^3$$

Bài tập 3: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác chứng minh rằng:

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 > 0$$

Bài tập 4: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác.

Chứng minh rằng: $\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| \leq \frac{1}{8}.$

Bài tập 5: Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và diện tích là S . Gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng: $S_{\triangle ABE} \leq 0,25S$.

Bài tập 6: Cho a, b, c là chiều dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$.

5. Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp làm trội:

5.1. Kiến thức cơ bản:

Dùng các tính chất của bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tính được:

Tổng hữu hạn.

Tích hữu hạn.

Gọi

$$\text{Tổng: } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_n - a_{n+1})$$

$$\text{Tích: } T = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_2 a_3 \dots a_{n+1}}$$

5.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho các số tự nhiên phân biệt: $u_1, u_2, \dots, u_n$ khác nhau và lớn hơn 1.

Chứng minh rằng: $\left(1 - \frac{1}{u_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{u_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{u_n^2}\right) > 0,5$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát:

Giả sử:

$$2 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_n$$

$$\Rightarrow u_i > i + 1$$

(Do các u_i phân biệt)

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{u_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{u_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{u_n^2}\right) > \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{1}{u_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{u_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{u_n^2}\right) > \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{1}{u_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{u_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{u_n^2}\right) > \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{1}{u_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{u_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{u_n^2}\right) > \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{1}{u_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{u_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{u_n^2}\right) > \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1)} \cdot \frac{3 \cdot 4 \dots (n+2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1)} \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{1}{u_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{u_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{u_n^2}\right) > \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} > 0,5 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left(1 - \frac{1}{u_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{u_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{u_n^2}\right) > 0,5$$

Bài tập 2: Với mọi số tự nhiên $n > 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2}$$

Chứng minh

$$\text{Ta có: } \frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}, \text{ với } k = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Bài tập 3: Chứng minh rằng: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$, với n là số nguyên.

Chứng minh

$$\text{Ta có: } \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

Khi cho $k = 1, \dots, n$, ta có:

$$1 > 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

.....

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 4: Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2, \forall n \in \mathbb{Z}$

Chứng minh

Ta có: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Cho $k = 1, \dots, n$, ta có:

$$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

.....

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

Vậy $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2.$

Bài tập 5: Chứng minh rằng với $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta có: $\frac{1.3.5.7... (2n-1)}{2.4.6.8... (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{2n-1}{2n} = \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{(2n)^2}} \leq \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{(2n)^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}$$

Lần lượt thay $n = 1, 2, 3, \dots$, rồi nhân vế với vế của các bất đẳng thức đó ta được:

$$\frac{1.3.5.7... (2n-1)}{2.4.6.8... (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Bài tập 6: Cho $h_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$. Chứng minh rằng với $\forall n$ là các số nguyên dương ta có:

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{3h_2^2} + \frac{1}{5h_3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)h_n^2} < 2$$

Chứng minh

Với $\forall n$ là các số nguyên dương, ta có:

$$\frac{1}{(2n-1)h_k^2} = \frac{1}{(2k-1)\left(h_{k-1} + \frac{1}{2n-1}\right)h_k} < \frac{1}{h_{k-1}} - \frac{1}{h_k}$$

$$\text{Vì } h_k = h_{k-1} + \frac{1}{2n-1}.$$

Suy ra:

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{3h_2^2} + \frac{1}{5h_3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)h_n^2} < 1 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) + \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{h_{k-1}} - \frac{1}{h_k} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{3h_2^2} + \frac{1}{5h_3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)h_n^2} < 1 + \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{3h_2^2} + \frac{1}{5h_3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)h_n^2} < 1 + \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{3h_2^2} + \frac{1}{5h_3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)h_n^2} < 1 + \frac{1}{h_1} = 2$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{3h_2^2} + \frac{1}{5h_3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)h_n^2} < 2$$

Bài tập 7: Chứng minh rằng: $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{(n+k)^2}} < \frac{kn + n + 1}{n}.$

Chứng minh

Chứng minh với ba số x, y, z thoả mãn: $x + y + z = 0$.

Ta có:

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} = \left| \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right|.$$

Thật vậy: Xét

$$\begin{aligned} \left(\left| \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right| \right)^2 &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2 \left(\frac{x+y+z}{xyz} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} &= \left| \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right| \end{aligned}$$

Từ chứng minh trên: Với $x = 1, y = n, z = -(n+1)$

Ta có:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} < \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{(n+k)^2}} < \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} < \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} < k + 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} < \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} < k + 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} < \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} < \frac{kn + n + 1}{n}$$

5.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{100} > 1$

b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1$, n nguyên dương.

Bài tập 2: Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} < 1$

b) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$

Bài tập 3: Chứng minh: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$. Trong đó $n, k \in \mathbf{N}^*$ và $a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$

6. Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp quy nạp:

6.1 Kiến thức cơ bản:

Để chứng minh bất đẳng thức đúng với $n > n_0$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra bất đẳng thức đúng với $n = n_0$

Bước 2: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$. (giả thiết quy nạp)

Bước 3: Chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Bước 4: Kết luận bất đẳng thức đúng với mọi $n > n_0$.

6.2 Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Chứng minh rằng: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}; n > 1$

Chứng minh

Với $n = 2$ ta có $1 + \frac{1}{4} < 2 - \frac{1}{2}$ (đúng).

Suy ra: Bất đẳng thức đúng với $n = 2$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$.

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy khi $n = k + 1$ thì

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

Theo giả thiết quy nạp:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1+1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow k(k+2) < (k+1)^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k < k^2 + 2k + 1 \text{ (đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 2: Cho $n \in \mathbf{N}$ và $a + b > 0$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$

Chứng minh

Với $n = 1$. Bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$.

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, với $n = k + 1$, ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} &\leq \frac{a^{k+1}}{2} + \frac{b^{k+1}}{2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \cdot \frac{a+b}{2} &\leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{4} &\leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} - \frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a^k - b^k) \cdot (a - b) &\geq 0 \end{aligned}$$

Ta chứng minh $(a^k - b^k) \cdot (a - b) \geq 0$.

Giả sử $a \geq b$ và giả thiết cho:

$$a \geq -b \Leftrightarrow a \geq |b| \Leftrightarrow a^k \geq |b|^k \geq b^k \Rightarrow (a^k - b^k) \cdot (a - b) \geq 0$$

Giả sử $a < b$ và theo giả thiết cho:

$$-a < b \Leftrightarrow |a|^k < b^k \Leftrightarrow a^k < b^k \Leftrightarrow (a^k - b^k) \cdot (a - b) \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức luôn đúng.

Bài tập 3: Cho $a \geq -1$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng: $(1+a)^n \geq 1+na$

Chứng minh

Với $n = 1$: Bất đẳng thức luôn đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \in \mathbb{N}$.

Tức là: $(1+a)^k \geq 1+ka$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Ta cần chứng minh: $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$

$$\text{Ta có: } (1+a)^{k+1} = (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka) \geq 1+(k+1)a + ka^2 \geq 1+(k+1)a$$

Suy ra: Bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp: $(1+a)^n \geq 1+na$, $\forall n > 1$

Bài tập 4: Cho $1 \leq n \in \mathbb{N}$ và $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ thoả mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng: $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \geq \frac{1}{2}$.

Chứng minh

Với $n = 1$ thì $a_1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1-a_1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ Bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$.

$$\text{Tức là: } (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_k) \geq \frac{1}{2}$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy:

$$\begin{aligned} &(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_{k+1}) \\ &= (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_{k-1})[1-(a_k + a_{k+1}) + a_k a_{k+1}] \geq (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_{k-1})[1-(a_k + a_{k+1})] \end{aligned}$$

$$\text{Vì } a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + (a_k + a_{k+1}) \leq \frac{1}{2}$$

Suy ra: Bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp: $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \geq \frac{1}{2}$

Bài tập 5: Cho $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh rằng: $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$

Chứng minh

Với $n = 1$: Bất đẳng thức luôn đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, ($k \in \mathbb{N}$).

Tức là: $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2)$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{k+1}b_{k+1})^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k+1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{k+1}^2) \quad (1)$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) + (a_1^2 + \dots + a_k^2)b_{k+1}^2 + a_{k+1}^2(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 \\ & \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k)^2 + 2a_1b_1a_{k+1}b_{k+1} + 2a_2b_2a_{k+1}b_{k+1} + \dots + 2a_kb_ka_{k+1}b_{k+1} + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 \\ & \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k)^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k)a_{k+1}b_{k+1} + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 \\ & \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{k+1}b_{k+1})^2 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 6: Với giá trị nào của số tự nhiên n bất đẳng thức sau đúng: $2^n \geq 2n + 1$

Chứng minh

Với

$n = 0$ suy ra $2^0 > 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Bất đẳng thức sai.

$n = 1$ suy ra $2^1 > 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Bất đẳng thức sai.

$n = 2$ suy ra $4 > 5$. Bất đẳng thức sai.

$n = 3$ suy ra $8 > 7$. Bất đẳng thức đúng.

$n = 4$ suy ra $16 > 9$. Bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k > 2$, tức là $2^k > 2k + 1$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.

Thật vậy ta có:

$$\begin{aligned} & 2^k \geq 2 \text{ với mọi } k \geq 1 \text{ theo giả thiết quy nạp } 2^k + 2^k > 2k + 1 + 2 \\ & \Rightarrow 2^{k+1} > 2(k+1) + 1. \end{aligned}$$

Suy ra: Bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Vậy $2^n > 2n + 1$ với mọi $n > 2$.

Bài tập 7: Chứng minh rằng: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n, \forall n \in \mathbb{N}, n > 2$.

Chứng minh

Với $n = 3$. Bất đẳng thức trở thành $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3$. Bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là: $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < k$. Bất đẳng thức đúng.

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là: $\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} < k + 1$.

Thật vậy, ta có:

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right) < k \left(1 + \frac{1}{k}\right) = k + 1.$$

Suy ra: Bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Vậy bất đẳng thức trên đúng với mọi n .

Bài tập 8: Chứng minh rằng: $\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

Chứng minh

Khi $n = 1$, thì bất đẳng thức trở thành: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là: $\frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ (1)

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là: $\frac{1.3.5...(2k-1)(2k+1)}{2.4.6...2k(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$

Thật vậy, ta có:

$$\frac{(2k+1)}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}} \quad (2)$$

Nhân hai bất đẳng thức (1) và (2), ta được:

$$\frac{1.3.5...(2k-1)(2k+1)}{2.4.6...2k(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}} = \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

Vậy bất đẳng thức đúng $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

6.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1}{x_2 + x_n} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_4 + x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_{n-2}} + \frac{x_n}{x_1 + x_{n-1}} \geq 2, n \geq 4$$

Bài tập 2: Chứng minh với mọi số nguyên dương n , ta có: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Bài tập 3: Chứng minh rằng mọi: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n} < \frac{3}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 4: Cho n số dương nghiệm đúng thỏa mãn $a_1 \cdot a_2 \dots a_n = 1$.

Chứng minh rằng: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.



Augustin Louis Cauchy
(đôi khi tên họ được viết Cô-si)
(21/8/1789 - 23/5/1857)
Là một nhà toán học người Pháp.

7. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI (CAUCHY)

7.1. Kiến thức cơ bản:

Bất đẳng thức Cô si cho hai số không âm:

Cho hai số a, b không âm ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bất đẳng thức Cô si cho ba số không âm:

Cho ba số a, b, c không âm, ta có:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bất đẳng thức Cô si cho n số không âm:

Cho n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ số không âm, ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Hệ quả:

Hệ quả 1: $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \geq 4ab$, với $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Hệ quả 2: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, với $a, b > 0$.

Hệ quả 3: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, với $a, b > 0$.

7.2. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Chứng minh: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$, $\forall a, b, c \neq 0$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương, ta có:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2}} = 2\left|\frac{a}{c}\right| \geq \frac{2a}{c}$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{2b}{a}$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{2c}{b}$$

Cộng các vế tương ứng của các bất đẳng thức trên, ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) \geq \frac{3}{2} \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right)$$

(Tập chí Toán học & Tuổi trẻ 6/2003)

Chứng minh

Với $\forall a, b, c > 0$, ta có:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b);$$

$$b^3 + c^3 \geq bc(b + c);$$

$$c^3 + a^3 \geq ca(c + a)$$

Cộng các vế của bất đẳng thức trên với nhau, ta được:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, ta có:

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{c^3}} = \frac{3}{abc} \quad (2)$$

Nhân các vế tương ứng của (1) và (2), ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 3: Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng: $3a^3 + 72b^3 \geq 18ab^2$.

Chứng minh

Do $a, b \geq 0$. Suy ra: $3a^3, 9b^3, 8b^3 \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, cho ba số không âm: $3a^3, 9b^3, 8b^3$

$$\text{Ta có: } 3a^3 + 9b^3 + 8b^3 \geq 3 \sqrt[3]{3a^3 \cdot 9b^3 \cdot 8b^3} = 18ab^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $3a^3 = 9b^3 = 8b^3 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Bài tập 4: Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng: $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$.

Chứng minh

Nhận thấy: $a = b + (a - b)$. Do $a > b$. Suy ra: $a - b > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho ba số không âm: $b, a - b, \frac{1}{b(a-b)}$.

Ta có:

$$a + \frac{1}{b(a-b)} = b + (a-b) \geq 3 \cdot 3 \sqrt[3]{b(a-b) \cdot \frac{1}{b(a-b)}} = 3$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi $b = a - b = \frac{1}{b(a-b)}$

Giải ra, ta được: $a = 2$ và $b = 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 5: Cho $a > b > 0$. Chứng minh: $a + \frac{1}{b(a-b)^2} \geq 2\sqrt{2}$.

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho bốn số dương, ta có:

$$a + \frac{1}{b(a-b)^2} = b + \frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} + \frac{1}{b(a-b)^2} \geq 4 \sqrt[4]{b \cdot \frac{a-b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot \frac{1}{b(a-b)^2}} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 6: Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh: $\frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{d^5} + \frac{d^2}{a^5} \geq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 5 số dương, ta có:

$$\frac{a^2}{b^5} + \frac{a^2}{b^5} + \frac{a^2}{b^5} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{b^{15}}} = \frac{5}{b^3}$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2}{b^5} \geq \frac{5}{b^3} - \frac{2}{a^3}$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{3b^2}{c^5} \geq \frac{5}{c^3} - \frac{2}{b^3}$$

$$\frac{3c^2}{d^5} \geq \frac{5}{d^3} - \frac{2}{c^3}$$

$$\frac{3d^2}{a^5} \geq \frac{5}{a^3} - \frac{2}{d^3}$$

Cộng vế với nhau của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$3\left(\frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{d^5} + \frac{d^2}{a^5}\right) \geq \left(\frac{5}{a^3} - \frac{2}{a^3}\right) + \left(\frac{5}{b^3} - \frac{2}{b^3}\right) + \left(\frac{5}{c^3} - \frac{2}{c^3}\right) + \left(\frac{5}{d^3} - \frac{2}{d^3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{d^5} + \frac{d^2}{a^5}\right) \geq 3\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{d^5} + \frac{d^2}{a^5} \geq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 7: Cho $a, b \geq 0$ và p, q là các số hữu tỉ dương, thỏa mãn: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Chứng minh

Vì p, q là các số hữu tỉ nên $\frac{1}{p}; \frac{1}{q}$ cũng là các số hữu tỉ.

Do đó, từ giả thiết tồn tại các số tự nhiên m, n, k sao cho $\frac{1}{p} = \frac{m}{k}; \frac{1}{q} = \frac{n}{k}$ và $m + n = k$.

Khi đó:

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{k} a^{\frac{k}{m}} + \frac{n}{k} b^{\frac{k}{n}} \geq ab$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\frac{m}{k} a^{\frac{k}{m}} + \frac{n}{k} b^{\frac{k}{n}} = \frac{\left(\underbrace{a^{\frac{k}{m}} + a^{\frac{k}{m}} + \dots + a^{\frac{k}{m}}}_{m \text{ hạng tử } a^{\frac{k}{m}}} + \underbrace{b^{\frac{k}{n}} + b^{\frac{k}{n}} + \dots + b^{\frac{k}{n}}}_{n \text{ hạng tử } b^{\frac{k}{n}}} \right)}{k} \geq \sqrt[k]{a^{\frac{k}{m}} \dots a^{\frac{k}{m}} \cdot b^{\frac{k}{n}} \dots b^{\frac{k}{n}}} = ab$$

(với $m + n = k$)

Vậy $\frac{m}{k} a^{\frac{k}{m}} + \frac{n}{k} b^{\frac{k}{n}} \geq ab$. Dấu bằng xảy ra khi $a^{\frac{k}{m}} = b^{\frac{k}{n}} \Leftrightarrow \sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{b}$.

Bài tập 8: Cho các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn điều kiện: $0 < a \leq a_i \leq b$, với $i = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh rằng: $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq \frac{n^2(a^2 + b^2)}{2ab}$

Chứng minh

Từ giả thiết, ta có: $0 < a \leq a_i \leq b$.

Suy ra:

$$a_i^2 - (a + b)a_i + ab \leq 0, \text{ với } i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\Leftrightarrow a_i^2 + ab \leq (a + b)a_i$$

$$\Leftrightarrow a_i + \frac{ab}{a_i} \leq a + b$$

Vì $a_i > 0$, với $i = 1, 2, \dots, n$.

Lần lượt cho $i = 1, 2, 3, \dots, n$ rồi cộng các vế lại với nhau ta được.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \left(\frac{ab}{a_1} + \frac{ab}{a_2} + \dots + \frac{ab}{a_n} \right) \leq n(a + b) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, cho hai số dương, ta được:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \left(\frac{ab}{a_1} + \frac{ab}{a_2} + \dots + \frac{ab}{a_n} \right) \geq 2\sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{ab}{a_1} + \frac{ab}{a_2} + \dots + \frac{ab}{a_n} \right)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$2\sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{ab}{a_1} + \frac{ab}{a_2} + \dots + \frac{ab}{a_n} \right)} \leq n(a + b)$$

$$\Leftrightarrow 4(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{ab}{a_1} + \frac{ab}{a_2} + \dots + \frac{ab}{a_n} \right) \leq n^2(a + b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq \frac{n^2(a + b)^2}{4ab}$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq \frac{n^2(a^2 + b^2)}{2ab}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Lưu ý: Bài toán trên có sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số là: $(1; a)$ và $(1; b)$.

$$(a + b)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) = 2(a^2 + b^2)$$

Bài tập 9: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ac} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{a + b + c}{2abc}$.

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{2}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{a\sqrt{bc}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} \right)$$

Tương tự:

$$\frac{2}{b^2 + ac} \leq \frac{1}{b\sqrt{ac}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ab} \right) \Rightarrow \frac{2}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{c\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a^2 + bc} + \frac{2}{b^2 + ac} + \frac{2}{c^2 + ab} \leq \frac{a + b + c}{2abc}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 10: Cho các số thực $x, y, z > 0$. Chứng minh:

$$16xyz(x + y + z) \leq 3\sqrt{(x + y)^4(y + z)^4(z + x)^4}$$

Chứng minh

Đặt: $A = (x + y)(y + z)(z + x)$

Khi đó: $A = xy(x + y + z) + yz(x + y + z) + xz^2 + zx^2$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 8 số dương.

Trong đó có ba số $\frac{1}{3}xy(x + y + z)$, ba số $\frac{1}{3}yz(x + y + z)$, xz^2 và zx^2 .

Ta có:

$$\begin{aligned}(x + y)(y + z)(z + x) &\geq 8\sqrt[3]{\frac{(xyz)^6(x + y + z)^6}{3^6}} \\ \Leftrightarrow (x + y)^4(y + z)^4(z + x)^4 &\geq 8^4 \sqrt{\frac{(xyz)^6(x + y + z)^6}{3^6}} \\ \Leftrightarrow (x + y)^4(y + z)^4(z + x)^4 &\geq 8^4 \frac{(xyz)^3(x + y + z)^3}{3^3} \\ \Leftrightarrow 16(xyz)(x + y + z) &\leq 3\sqrt[3]{(x + y)^4(y + z)^4(z + x)^4}\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài tập 11: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$\frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{1+y} \cdot \frac{1+y}{4}} = x$$

$$\frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{y^2}{1+z} \cdot \frac{1+z}{4}} = y$$

$$\frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z^2}{1+x} \cdot \frac{1+x}{4}} = z$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4}\right) + \left(\frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4}\right) + \left(\frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4}\right) &\geq (x + y + z) \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} &\geq -\frac{3}{4} - \frac{x+y+z}{4} + (x + y + z) \\ &\geq \frac{3(x + y + z)}{4} - \frac{3}{4} \\ &\geq \frac{3}{4} \cdot 3\sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Vì $xyz = 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài tập 12: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$.

Chứng minh: $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$.

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cô- si cho ba số dương, ta có:

$$\begin{aligned}1 + x^3 + y^3 &\geq 3\sqrt[3]{1 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3xy \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} &\geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}\end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}$$

$$\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} \quad (1)$$

Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} &\geq 3\sqrt{3} \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 13: Chứng minh rằng với mọi x, y, z dương và $x + y + z = 1$ thì $xy + yz + zx > \frac{18xyz}{2 + xyz}$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$2 = x + y + z + x + y + z \geq 6\sqrt[3]{xyz}$$

Và

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$$

Nhận vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2(xy + yz + zx) \geq 18xyz \quad (1)$$

Mặt khác, ta có:

$$xyz(xy + yz + zx) > 0 \quad (2)$$

Cộng bất đẳng thức (1) và (2), ta được:

$$(xy + yz + zx)(2 + xyz) > 18xyz$$

$$\text{Suy ra: } xy + yz + zx > \frac{18xyz}{2 + xyz} \quad (\text{vì } 2 + xyz > 0)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 14: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số dương, ta có:

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 4\sqrt[4]{x^2yz} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{1}{x^2yz}} = 16$$

Suy ra:

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{4}{3}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 15: Cho n số dương: $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

Chứng minh rằng: $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$.

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy hai số 1 và $a_i, i=1,2,3,\dots,n$.

Ta có:

$$(1 + a_1) \geq 2\sqrt{a_1}$$

.....

$$(1 + a_2) \geq 2\sqrt{a_2}$$

$$(1 + a_n) \geq 2\sqrt{a_n}$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq \underbrace{2 \cdot 2 \dots 2}_{n \text{ số } 2} \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Vì $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$$

Dấu bằng xảy ra khi $1 = a_1, 1 = a_2, \dots, 1 = a_n$.

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 16: Cho ba số dương a, b, c và thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của $Q = abc$.

Giải

Ta có:

$$\frac{1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}$$

Tương tự

$$\frac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{ca}{(1+c)(1+a)}}$$

$$\frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$$

Nhân các bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{1+b} \cdot \frac{1}{1+c} \geq 8 \frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

Hay

$$abc \leq \frac{1}{8}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $Q = \frac{1}{8}$.

Bài tập 17: Cho a, b, c dương và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^2+3}}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, ta có:

$$\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}} + \frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}} + \frac{b^2+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^6}{64}} = \frac{3a^2}{4} \quad (1)$$

$$\frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}} + \frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}} + \frac{c^2+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^6}{64}} = \frac{3b^2}{4} \quad (2)$$

$$\frac{c^3}{2\sqrt{a^2+3}} + \frac{c^3}{2\sqrt{a^2+3}} + \frac{a^2+3}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^6}{64}} = \frac{3c^2}{4} \quad (3)$$

Cộng các từng vế với nhau của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$P + \frac{a^2+b^2+c^2+9}{16} \geq \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) \quad (4)$$

(Vì $a^2 + b^2 + c^2 = 3$)

Từ (4), suy ra: $P \geq \frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{3}{2}$.

Bài tập 18: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{4a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{4b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{4c^3}{(1+a)(1+b)}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, ta có:

$$\frac{4a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{2} + \frac{1+c}{2} \geq a$$

$$\frac{4b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{1+c}{2} + \frac{1+a}{2} \geq b$$

$$\frac{4c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{2} + \frac{1+b}{2} \geq c$$

Cộng các vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$P = \frac{4a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{4b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{4c^3}{(1+a)(1+b)} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 3$.

7.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh: $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64$.

Bài tập 2: Cho $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d + e = 1$.

Chứng minh: $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right)\left(\frac{1}{d} - 1\right)\left(\frac{1}{e} - 1\right) \geq 1024$

Bài tập 3: Với a, b, c là ba số dương bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$(1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3) \geq (1 + ab^2)(1 + bc^2)(1 + ca^2)$$

Bài tập 4: Chứng minh rằng: Với số thực dương bất kỳ, ta luôn có $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} \leq 1 + a$.

Bài tập 5: Cho $\triangle ABC$ có ba cạnh là a, b, c và p là nửa chu vi.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Bài tập 6: Chứng minh rằng với mọi $x, y > 0$, ta có: $(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 256$.

Bài tập 7: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a} \leq 3$

Bài tập 8: Chứng minh rằng nếu $0 \leq y \leq x \leq 1$ thì $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}$.

Bài tập 9: Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z \leq 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}$.

Bài tập 10: Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = \frac{3}{4}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt[3]{x+3y} + \sqrt[3]{y+3z} + \sqrt[3]{z+3x}$

Đáp số: $\text{Max } P = 3$.

Bài tập 11: Cho $x, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{(x+y)^3}{xy^2}$.

Đáp số: $\text{Min } Q = \frac{27}{4}$.

Bài tập 12: Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy}$.

Đáp số: $\text{Min } P = 4 + 2\sqrt{3}$.



Viktor Yakovlevich Bunyakovsky

(Tiếng Nga: Виктор Яковлевич Буняковский)

(04/12/1804 - 12/12/1889)

Sinh ra tại Bar, Ukraina. Mất tại: Sankt Petersburg)

Là một nhà toán học người Nga.

8. BẤT ĐẲNG THỨC BUNYACOVSKY

8.1. Kiến thức cơ bản:

Với hai dãy số thực tùy ý $a_1; a_2; \dots, a_n$ và $b_1; b_2; \dots, b_n$ ta luôn có:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Chứng minh

Đặt:

$$\begin{cases} a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \\ b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \end{cases}$$

Nếu $a = 0$ hay $b = 0$: Bất đẳng thức luôn đúng.

Nếu $a, b > 0$:

Đặt: $\alpha_i = \frac{a_i}{a}, \beta_i = \frac{b_i}{b}, (i = 1, 2, \dots, n)$

Khi đó: $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2$

Mặt khác: $|\alpha_i\beta_i| \leq \frac{1}{2}(\alpha_i^2 + \beta_i^2)$

Suy ra:

$$|\alpha_1\beta_1| + |\alpha_2\beta_2| + \dots + |\alpha_n\beta_n| \leq \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) + \frac{1}{2}(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2) \leq 1$$

$$\Rightarrow |a_1b_1| + |a_2b_2| + \dots + |a_nb_n| \leq a.b$$

Ta có: $|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq |a_1b_1| + |a_2b_2| + \dots + |a_nb_n|$

Suy ra: $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i = \beta_i \ (\forall i = 1, 2, \dots, n) \\ \alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n \text{ cùng dấu} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

8.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho ba số x, y, z thỏa mãn: $x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \leq \frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng: $x + y + z \leq 4$.

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 3 bộ số: $(1; x), (1; y), (1; z)$, ta được:

$$(x + y + z)^2 \leq (1 + 1 + 1)(x^2 + y^2 + z^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2) \quad (1)$$

Theo giả thiết:

$$\begin{aligned} x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) &\leq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) &\leq \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\frac{1}{3}(x + y + z)^2 - (x + y + z) \leq \frac{3}{4}.$$

Đặt: $S = x + y + z$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}S^2 - S &\leq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow (S + 1)(S - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow -1 \leq S &\leq 4. \end{aligned}$$

Suy ra: $x + y + z \leq 4$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{4}{3}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 2: Chứng minh bất đẳng thức Nettbits với ba biến a, b, c là các số dương.

Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức bunyakovski (Cauchy-Schwarz), ta được.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ab} + \frac{c^2}{ac+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 3: Cho 4 số a, b, c, d bất kỳ chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

Mà

$$\begin{aligned} (a+c)^2 + (b+d)^2 &= a^2 + b^2 + 2(ac+bd) + c^2 + d^2 \leq (a^2 + b^2) + 2\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} + c^2 + d^2 \\ \Rightarrow \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} &\leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 4: Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

Xét cặp số $(1, 1, 1)$ và (a, b, c) , ta có:

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (1.a + 1.b + 1.c)^2$$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài tập 5: Cho a, b, c là các số thực, thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, cho hai bộ 3 số $(1, 1, 1)$ và (a, b, c) :

Ta có:

$$(1.a + 1.b + 1.c)^2 \leq (1+1+1).(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \leq 3.(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}, \text{ (vì } a + b + c = 1)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 6: Cho $x \in [0; 1]$. Chứng minh: $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}}$.

Tìm x để dấu đẳng thức xảy ra?

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski cho hai bộ số $(1; 1)$ và $(\sqrt{x}; \sqrt{1-x})$, ta được:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2}\sqrt{x+(1-x)} = \sqrt{2} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski cho hai bộ số $(1; 1)$ và $(\sqrt[4]{x}; \sqrt[4]{1-x})$, ta được:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} \leq \sqrt{2}.\sqrt{2} = \sqrt{2\sqrt{2}} \quad (2)$$

Cộng các vế tương ứng của (1) và (2), ta được:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x \in [0; 1] \\ \sqrt{x} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{1-x} \end{cases}$$

Bài tập 7: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq 1$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski cho hai bộ số $(\sqrt{a}; \sqrt{b})$ và $(\sqrt{c}; \sqrt{a})$, ta có:

$$\begin{aligned} (\sqrt{ac} + \sqrt{ab})^2 &\leq (a+b)(c+a) \\ \Rightarrow \sqrt{ac} + \sqrt{ab} &\leq \sqrt{(a+b)(c+a)} \\ \Rightarrow a + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} &\leq a + \sqrt{(a+b)(c+a)} \\ \Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(c+a)}} &\leq \frac{a}{a + \sqrt{ac} + \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (1) \end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (2)$$

$$\frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (3)$$

Cộng các vế tương ứng của (1), (2) và (3), ta được:

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài tập 8: Với a, b, c là ba số dương thỏa mãn đẳng thức: $ab + bc + ca = abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}$.

Chứng minh

Nhân hai vế của bất đẳng thức với abc , ta được:

$$c\sqrt{b^2 + 2a^2} + a\sqrt{c^2 + 2b^2} + b\sqrt{a^2 + 2c^2} \geq \sqrt{3}abc$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{b^2c^2 + 2a^2c^2} + \sqrt{a^2c^2 + 2a^2b^2} + \sqrt{a^2b^2 + 2b^2c^2} \geq \sqrt{3}abc$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski, ta có:

$$\sqrt{b^2c^2 + 2a^2c^2} = \sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ac)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(bc + ca + ca) = \frac{\sqrt{3}}{3}(bc + 2ca) \quad (1)$$

Tương tự, ta có:

$$\sqrt{a^2c^2 + 2a^2b^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}(ac + 2ab) \quad (2)$$

$$\sqrt{a^2b^2 + 2b^2c^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}(ab + 2bc) \quad (3)$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\sqrt{b^2c^2 + 2a^2c^2} + \sqrt{a^2c^2 + 2a^2b^2} + \sqrt{a^2b^2 + 2b^2c^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}ab + \sqrt{3}bc + \sqrt{3}ca) = \sqrt{3}(ab + bc + ca)$$

Hay

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 9: Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $x + y + z \leq 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$.

Chứng minh

$$\text{Gọi } S = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski cho hai bộ số $(1; 9)$ và $\left(x; \frac{1}{x}\right)$, ta có:

$$x + \frac{9}{x} \leq \sqrt{1+81} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{82} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \quad (1)$$

Tương tự, ta có:

$$y + \frac{9}{y} \leq \sqrt{82} \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} \quad (2)$$

$$z + \frac{9}{z} \leq \sqrt{82} \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) theo vế, ta có:

$$S \cdot \sqrt{82} \geq x + y + z + 9 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Hay

$$\begin{aligned} S.\sqrt{82} &\geq 81(x+y+z) + 9\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 80(x+y+z) \\ &\geq 2.9.3.\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} - 80 \\ &\geq 162 - 80 = 82. \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} &\geq \sqrt{82} \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

8.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $a, b, c > 0$ và $p = \frac{a+b+c}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$$

Bài tập 2: Cho n số bất kỳ $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

Bài tập 3: Cho a, b, c khác 0. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

Bài tập 4: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh trong một tam giác.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a(2b+2c-a)} + \frac{1}{b(2c+2a-b)} + \frac{1}{c(2a+2b-c)} \geq 1$.

Bài tập 5: Cho $ax - by \geq m$. Chứng minh rằng: $ax^2 + by^2 \geq \frac{m^2}{a+b}$.

Bài tập 6: Giả sử phương trình: $x^2 + ax + b = 0$ có nghiệm $x = t$. Chứng minh rằng: $t < 1 + a^2 + b^2$.

Bài tập 7: Chứng minh: $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}$, với mọi số thực dương $a, b, c \geq 1$.

Bài tập 8: Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh: $\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)[(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)]} \leq \frac{3+\sqrt{3}}{18}$.

Bài tập 9: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.

Bài tập 10: Cho $x, y > 0$ và $x^2 + y^2 \leq x + y$. Chứng minh: $x + 3y \leq 2 + \sqrt{5}$.



Karl Hermann Amandus Schwarz

(25/1/1843 - 30/11/1921)

Là một nhà toán học người Đức.

9. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY - SCHWARZ (C - S)

9.1. Kiến thức cơ bản:

Với hai dãy số thực: $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_m)$, ta có:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_m^2}{b_m} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_m}$$

Bất đẳng thức này còn có tên gọi là Engel hay Cauchy - Schwarz (C - S).

9.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho a, b, c là các số dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} + \frac{ab}{a+b+2c} \leq \frac{a+b+c}{4}.$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức CAUCHY - SCHWARZ cho hai bộ số $\left(1; \frac{1}{a}\right), \left(1; \frac{1}{b}\right)$ ta có:

$$\text{Ta có: } \frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

sử dụng nhận xét sau để giải bài toán trên:

$$\frac{bc}{b+c+2a} = \frac{bc}{4} \cdot \frac{4}{(a+b)+(a+c)} \leq \frac{bc}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} \right)$$

$$\frac{ca}{c+a+2b} = \frac{ca}{4} \cdot \frac{4}{(a+b)+(b+c)} \leq \frac{ca}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{ca}{a+b} + \frac{ca}{b+c} \right)$$

$$\frac{ab}{a+b+2c} = \frac{ab}{4} \cdot \frac{4}{(a+c)+(b+c)} \leq \frac{ab}{4} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} \right)$$

Cộng các vế của bất đẳng thức với nhau, ta được:

$$\frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} + \frac{ab}{a+b+2c} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 2: Cho a, b, c là các số dương, thỏa mãn: $a + b + c = 3$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Chứng minh

Nhận xét:

$$\left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}\right) + \left(\frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{b^2+a^2}\right) + \left(\frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) = 3$$

Phân tích: $4a^2 + b^2 + c^2 = 2a^2 + (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được phân tích sau

$$\frac{9}{4a^2 + b^2 + c^2} = \frac{(a+b+c)^2}{2a^2 + (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2)} \leq \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2}$$

$$\frac{9}{a^2 + 4b^2 + c^2} = \frac{(a+b+c)^2}{2b^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2)} \leq \frac{b^2}{2b^2} + \frac{a^2}{b^2 + a^2} + \frac{c^2}{b^2 + c^2}$$

$$\frac{9}{a^2 + b^2 + 4c^2} = \frac{(a+b+c)^2}{2c^2 + (c^2 + b^2) + (c^2 + a^2)} \leq \frac{c^2}{2c^2} + \frac{b^2}{c^2 + b^2} + \frac{a^2}{c^2 + a^2}$$

Cộng các vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$9\left(\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2}\right) \leq \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{1}{2}$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 3: Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta đều có bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+a)(2b+c)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}$$

Chứng minh

Ta chú ý đến đẳng thức $(2a+b)(2a+c) = (2a^2 + bc) + a(a+b+c) + a(a+b+c)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được:

$$\frac{9}{(2a+b)(2a+c)} \leq \frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{a(a+b+c)} + \frac{1}{a(a+b+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2a}{a+b+c} \right)$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{(2b+a)(2b+c)} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{2b}{b+a+c} \right)$$

$$\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{c^2}{2c^2 + ab} + \frac{2c}{c+a+b} \right)$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+a)(2b+c)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} + 2 \right)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \leq 1$$

Thật vậy ta có:

$$\sum \frac{a^2}{2a^2 + bc} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + 2 \sum \frac{a^2}{2a^2 + bc} \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \sum \frac{bc}{2a^2 + bc}$$

Nhưng mà theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\sum \frac{bc}{2a^2 + bc} = \sum \frac{(bc)^2}{2a^2 bc + (bc)^2} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{\sum (ab)^2 + 2 \sum a^2 bc} = 1$$

Ta được điều phải chứng minh.

Bất đẳng thức đã cho được minh hoàn toàn.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài tập 4: Cho a, b, c là 3 số thực không âm và có nhiều nhất 1 số bằng 0. Khi đó, ta có:

$$\frac{a^2}{3a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{3b^2 + (a+c)^2} + \frac{c^2}{3c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{2}$$

Chứng minh

Ta phân tích: $3a^2 + (b+c)^2 = (2a^2 + 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2)$

Từ đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được

$$\frac{a^2}{3a^2 + (b+c)^2} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{4}{(2a^2 + 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2)} \leq \frac{a^2}{4} \left(\frac{1}{2a^2 + 2bc} + \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$$

Tương tự ta có:

$$\sum \frac{a^2}{3a^2 + (b+c)^2} \leq \frac{1}{4} \left(\sum \frac{a^2}{2a^2 + 2bc} + \sum \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{2a^2 + bc} + 1 \right)$$

Ta cần chứng minh: $\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \leq 1$

Đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) = (t, t, 0)$, $(t \in \mathbb{R})$ và các hoán vị.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài tập 5: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \geq 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq \frac{3}{2}$.

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}$$

Mặt khác:

$$x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

nên ta có:

$$\frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z + x+y+z} = \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}$$

Vì $x + y + z \geq 3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 6: Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$.

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài tập 7: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^3}{2x+3y+5z} + \frac{y^3}{2y+3z+5x} + \frac{z^3}{2z+3x+5y} \geq \frac{1}{30}$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\frac{x^4}{x(2x+3y+5z)} + \frac{y^4}{y(2y+3z+5x)} + \frac{z^4}{z(2z+3x+5y)} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 8(xy + yz + zx)}$$

Vì $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ nên

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 8(xy + yz + zx)} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{10(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{10} \geq \frac{1}{30}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 8: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} = \frac{a^4}{a^3b^2c^2} + \frac{b^4}{b^3c^2a^2} + \frac{c^4}{c^3a^2b^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\frac{a^4}{a^3b^2c^2} + \frac{b^4}{b^3c^2a^2} + \frac{c^4}{c^3a^2b^2} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2c^2(a+b+c)} = \frac{(3abc)^2}{a^2b^2c^2(a+b+c)} = \frac{9}{a+b+c}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 9: Cho ba số thực dương a, b, c .

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a} \geq a+b+c$.

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a} = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{c+a}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$= \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{c+a} \geq \frac{[2(a+b+c)]^2}{4(a+b+c)} = a+b+c$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

9.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{a+3b-c} + \frac{c}{-a+b+3c} \geq 1$

Bài tập 2: (Nebits) Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Bài tập 3: (Croatia 2004) Cho ba số thực dương a, b, c .

Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4}$.

Bài tập 4: (Rumani) Cho ba số thực dương a, b, c .

Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)}$.

Bài tập 5: (Vase) Cho ba số thực a, b, c không âm và hai trong ba số không đồng thời bằng 0.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{4b^2 + c^2 + a^2} + \frac{1}{4c^2 + a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2(a^2 + b^2 + c^2)} + \frac{1}{ab + bc + ca}$

Bài tập 6: Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{(3b+5c)^3} + \frac{b}{(3c+5a)^3} + \frac{c}{(3a+5b)^3} \geq \frac{9}{512}$.

10. BẤT ĐẲNG THỨC NESBIT

10.1. Kiến thức cơ bản:

Trong toán học, bất đẳng thức Nesbitt là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Shapiro khi số phân tử là 3.

Với mọi $a, b, c > 0$, ta luôn có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Cách chứng minh đơn giản: Cộng thêm 3 vào hai vế của phương trình.

Chứng minh

Đặt:

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

$$Q = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

$$R = \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$$

Ta có: $R + Q = 3$

$$P + R = \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+b}{a+b} \geq 3$$

$$P + Q = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3$$

Từ đó: $P \geq \frac{3}{2}$.



Pafnuty Lvovich Chebyshev

(Tiếng Nga: Пафну́тий Льво́вич Чебы́шев,

IPA: [pəfˈnutʲɪj ˈlʲvovʲɪtɕ tɕɪbʲɪˈsof])

(Ngày sinh: 16/5/1821 – 08/12/1894)

là nhà toán học nổi tiếng người Nga

và là người sáng tạo ra bất đẳng thức cộng **Chebyshev**.

11. BẤT ĐẲNG THỨC TRÊ - BƯ - SÉP

Bất đẳng thức cộng Chebyshev, được đặt theo tên nhà toán học Pafnuty Chebyshev, được phát biểu rằng:

11.1. Kiến thức cơ bản:

Cho hai dãy số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

(1) Nếu cả hai dãy cùng tăng hoặc cùng giảm, tức là:

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$$

thì

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}.$$

(2) Nếu một dãy tăng, một dãy giảm, tức là:

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$$

thì

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}.$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$

Chứng minh

Bất đẳng thức cộng Chebyshev được chứng minh bằng cách dùng qui tắc sắp xếp bất đẳng thức. Giả sử ta có hai chuỗi số được cho như sau

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n.$$

và

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$$

Vậy thì, theo qui tắc sắp xếp bất đẳng thức, ta có

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

là giá trị lớn nhất có thể sắp xếp được từ hai chuỗi số trên.

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_2 + \dots + a_n b_1$$

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_3 + \dots + a_n b_2$$

$$a_1b_1 + \dots + a_nb_n \geq a_1b_n + \dots + a_nb_{n-1}$$

Cộng vế theo vế, ta có:

$$n(a_1b_1 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)$$

chia cả hai vế cho n^2 , ta nhận được:

$$\frac{(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)}{n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n} \cdot \frac{(b_1 + \dots + b_n)}{n}. \text{ (Điều chứng minh)}$$

11.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $a > b > c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}.$$

Chứng minh

Do a, b, c đối xứng.

Giả sử: $a \geq b \geq c$ nên $\frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{c+a} \geq \frac{c}{a+b}$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy giảm $(a^2; b^2; c^2)$ và $\left(\frac{a}{b+c}; \frac{b}{c+a}; \frac{c}{a+b}\right)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \right) \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Vì $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (bất đẳng thức Nesbitt)

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$.

Bài tập 2: Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{c^2 + a + b} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{a^2 + b + c} \leq 1$$

Chứng minh

Nhận thấy:

$$\frac{1}{c^2 + a + b} - \frac{1}{3} = \frac{1}{c^2 + 3 - c} - \frac{1}{3} = \frac{3 - c^2 - 3 + c}{3(c^2 - c + 3)} = \frac{c(1-c)}{3(c^2 - c + 3)}$$

Ta có:

$$\frac{1}{c^2 + a + b} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{a^2 + b + c} = \frac{c(1-c)}{3(c^2 - c + 3)} + \frac{b(1-b)}{3(b^2 - b + 3)} + \frac{a(1-a)}{3(a^2 - a + 3)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c(c-1)}{3(c^2 - c + 3)} + \frac{b(b-1)}{3(b^2 - b + 3)} + \frac{a(a-1)}{3(a^2 - a + 3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}} + \frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}} + \frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}} \geq 0$$

Vì a, b, c có vai trò như nhau.

Giả sử: $a \geq b \geq c \Leftrightarrow a - 1 \geq b - 1 \geq c - 1$.

Mặt khác: $a + b + c = 3$ nên $ab, bc, ca \leq 3$.

$$\frac{1}{a-1+\frac{3}{a}} \geq \frac{1}{b-1+\frac{3}{b}} \geq \frac{1}{c-1+\frac{3}{c}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy $(a - 1; b - 1; c - 1)$ và

$$\left(\frac{1}{a-1+\frac{3}{a}}; \frac{1}{b-1+\frac{3}{b}}; \frac{1}{c-1+\frac{3}{c}} \right)$$

Ta có:

$$\frac{1}{3} \left[(a-1) \cdot \left(\frac{1}{a-1+\frac{3}{a}} \right) + (b-1) \cdot \left(\frac{1}{b-1+\frac{3}{b}} \right) + (c-1) \cdot \left(\frac{1}{c-1+\frac{3}{c}} \right) \right] \geq \frac{1}{3} (a-1+b-1+c-1) \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a-1+\frac{3}{a}} + \frac{1}{b-1+\frac{3}{b}} + \frac{1}{c-1+\frac{3}{c}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}} + \frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}} + \frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}} \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

11.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+8bc} + \sqrt{b^2+8ca} + \sqrt{c^2+8ac} \leq 3(a+b+c)$

Hướng dẫn

$$3a - \sqrt{a^2+8bc} = \frac{8(a^2-bc)(b+c)}{(3a+\sqrt{a^2+8bc})(b+c)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev với tổng các tử số bằng 0.

Bài tập 2: Cho các số thực dương a, b, c, d tổng bằng 4.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{11+a^2} + \frac{1}{11+b^2} + \frac{1}{11+c^2} + \frac{1}{11+d^2} \leq \frac{1}{3}$

Hướng dẫn

$$\frac{1}{11+a^2} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} (a-1) \frac{a+1}{11+a^2}$$

Bài tập 3: Cho n số $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng mọi số tự nhiên m , ta có:

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^m$$

Bài tập 4: Chứng minh rằng bất đẳng thức Nesbitt 3 biến bằng cách sử dụng bất đẳng thức Chebyshev.



Daniel Bernoulli

Sinh ngày: 08/2/1700 tại Groningen, Hà Lan.

Mất ngày: 08/3/1782 tại Basel, Thụy sĩ.

Ông là một nhà toán học Thụy sĩ - Hà Lan

và là một trong số nhiều nhà toán học nổi tiếng trong gia đình **Bernoulli**.

Ông được nhớ đến nhờ những ứng dụng của ông ấy về toán học đối với cơ học, đặc biệt là cơ học chất lỏng, cũng như việc đi tiên phong trong xác suất và thống kê.

Chữ ký

Daniel Bernoulli

12. BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

12.1. Kiến thức cơ bản:

Với mọi $r \in \mathbb{Z}^+$ và với mọi số thực $x > -1$:

$$(1+x)^r \geq 1+rx$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $r = 1$.

Nếu số mũ r là chẵn, thì bất đẳng thức này đúng với mọi số thực x .

Bất đẳng thức này trở thành bất đẳng thức nghiêm ngặt như sau:

Với mọi số nguyên $r \geq 2$ và với mọi [số thực](#) $x \geq -1$ với $x \neq 0$.

$$(1+x)^r > 1+rx$$

Chứng minh

Khi $r = 0$, bất đẳng thức trở thành $(1+x)^0 > 1+0x$ tức là $1 \geq 1$ mà rõ ràng đúng.

Bây giờ giả sử bất đẳng thức đúng với $r = k$:

$$(1+x)^k > 1+kx$$

Cần chứng minh:

$$(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$$

Thật vậy, $(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx)$ (vì theo giả thiết $1+x \geq 0$)

$$1 = kx + x + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x, \text{ (vì } kx^2 \geq 0)$$

Suy ra: Bất đẳng thức đúng với $r = k+1$.

Theo nguyên lý quy nạp, chúng ta suy ra bất đẳng thức đúng với mọi $r \geq 0$.

Số mũ r có thể tổng quát hoá thành số thực bất kỳ như sau: nếu $x > -1$, thì

$$(1+x)^r \geq 1+rx$$

với $r \leq 0$ hay $r \geq 1$, và

$$(1+x)^r \leq 1+rx$$

với $0 \leq r \leq 1$.

Một lần nữa, bất đẳng thức này trở thành bất đẳng thức nghiêm ngặt nếu $x \geq -1$ và $1 \leq r$ thuộc tập số tự nhiên.

12.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Chứng minh rằng: $a^b + b^a > 1, \forall a, b > 0$.

Chứng minh

Nếu $a \geq 1$ hay $b \geq 1$ thì bất đẳng thức luôn đúng

Nếu $0 < a, b < 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bernouli:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^b = \left(1 + \frac{1-a}{a}\right)^b < 1 + \frac{b(1-a)}{a} < \frac{a+b}{a} \Rightarrow a^b > \frac{a}{a+b}.$$

Chứng minh tương tự: $b^a > \frac{b}{a+b}$.

Vậy $a^b + b^a > 1$.

Bài tập 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5$$

Chứng minh

Ta có bất đẳng thức tương đương:

$$\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5 \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernouli:

$$\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5 = \left(1 + \frac{b+c-2a}{a+b+c}\right)^5 \geq 1 + \frac{5(b+c-2a)}{a+b+c} \quad (2)$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5 \geq 1 + \frac{5(c+a-2b)}{a+b+c} \quad (3)$$

$$\left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5 \geq 1 + \frac{5(a+b-2c)}{a+b+c} \quad (4)$$

Cộng (2), (3), (4) về theo về ta có:

$$\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^5 + \left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^5 \geq 3$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**CHUYÊN ĐỀ 20
TOÁN SUY LUẬN LOGIC**

Trong cuộc sống đôi khi ta gặp những bài toán vui mà khi giải nó ta chỉ cần vận dụng một cách linh hoạt các suy luận chính xác, sáng tạo, chặt chẽ. Dạng toán này rất phong phú, đa dạng và không có một dạng cụ thể nào. Thông thường để suy luận gọn gàng người ta thành lập bảng logic. Sau đây là một số bài toán luyện suy luận logic sơ cấp, mời các bạn tham khảo.

Cách giải chung:

Bước 1: Phiên dịch đề bài từ ngôn ngữ đời thường sang ngôn ngữ của logic mệnh đề:

 Tìm xem bài toán được tạo thành từ những mệnh đề nào.

 Diễn đạt các điều kiện (đã cho và phải tìm) trong bài toán bằng ngôn ngữ của logic mệnh đề.

Bước 2: Phân tích mối liên hệ giữa điều kiện đã cho với kết luận của bài toán bằng ngôn ngữ của logic mệnh đề.

Bước 3: Dùng các phương pháp suy luận logic dẫn dắt từ các điều kiện đã cho tới kết luận của bài toán.

1. Phương pháp lập bảng.

1.1. Kiến thức cơ bản:

Các bài toán giải bằng phương pháp lập bảng thường xuất hiện hai nhóm đối tượng (chẳng hạn tên người và nghề nghiệp, hoặc vận động viên và giải thưởng, hoặc tên sách và màu bìa, ...).

Khi giải, ta thiết lập 1 bảng gồm các hàng và các cột. Các cột ta liệt kê các đối tượng thuộc nhóm thứ nhất, còn các hàng ta liệt kê các đối tượng thuộc nhóm thứ hai.

Dựa vào điều kiện trong đề bài ta loại bỏ dần (ghi số 0) các ô (là giao của mỗi hàng và mỗi cột). Những ô còn lại (không bị loại bỏ) là kết quả của bài toán.

1.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Trong 1 buổi học nữ công ba bạn Cúc, Đào, Hồng làm 3 bông hoa cúc, đào, hồng. Bạn làm hoa hồng nói với Cúc : Thế là trong chúng ta chẳng ai làm loại hoa trùng với tên mình cả! Hỏi ai đã làm hoa nào?

Phân tích:

Với bài toán này, chúng ta cần tìm ra xem ai làm hoa gì... Cần chú ý 1 số dữ kiện quan trọng của đề bài:

- “Bạn làm hoa hồng nói với Cúc”: điều này có nghĩa là bạn Cúc không làm hoa hồng. Vì trái lại nếu Cúc làm hoa hồng thì hóa ra Cúc nói với Cúc???

- “Thế là trong chúng ta chẳng ai làm loại hoa trùng tên với mình cả” => Cúc không làm hoa cúc, Đào không làm hoa đào và Hồng cũng không làm hoa hồng.

Từ đó ta đi lập bảng và xét các khả năng...

Giải

Vì “bạn làm hoa hồng nói với Cúc” nên Cúc không làm hoa hồng. Vì không ai làm giống tên mình nên Cúc không làm hoa cúc, Đào không làm hoa đào, Hồng không làm hoa hồng.

Ta lập bảng với hàng ngang đầu tiên là tên các loại hoa, cột đầu tiên là tên các bạn. Nếu bạn Cúc không làm hoa cúc thì ta điền “không” ở ô tương ứng.

Như vậy ở ô bạn Cúc – hoa cúc ta điền “không”. Bạn Đào – hoa đào điền “không”, bạn Hồng – hoa hồng ta điền “không”. Theo lý luận ở trên thì bạn Cúc không làm hoa hồng nên ô Cúc- hồng điền “không”. Đến đây ta thấy bạn Cúc chỉ có thể làm hoa đào và hoa hồng chỉ có thể được làm bởi bạn Đào. Từ đó suy ra bạn Hồng làm hoa cúc.

	Cúc	Đào	Hồng
Cúc	không	có	không
Đào		không	có
Hồng	có		không

Nhìn vào bảng ta thấy: Cúc làm hoa đào

Đào làm hoa hồng

Hồng làm hoa cúc.

Bài tập 2: Ba người thợ hàn, thợ tiện, thợ điện đang ngồi trò chuyện trong giờ giải lao. Người thợ hàn nhận xét :

Ba ta làm nghề trùng với tên của 3 chúng ta nhưng không ai làm nghề trùng với tên của mình cả.

Bác Điện hướng ứng : Bác nói đúng.

Em cho biết tên và nghề nghiệp của mỗi người thợ đó.

Phân tích:

Bài này ChuTieu cũng lưu ý với các cháu là chúng ta cần đọc kỹ đề bài. Dữ kiện đề bài là Bác Điện hướng ứng “bác nói đúng” là rất quan trọng, từ đây ta suy ra bác Điện không làm thợ hàn.

Giải

Ta có bảng sau:

Tên \ Nghề	Hàn	Tiện	Điện
Hàn	0		x
Tiện	x	0	
Điện	0	x	0

Bác điện hướng ứng lời bác thợ hàn nên bác Điện không làm thợ hàn

Bác Điện làm thợ tiện.

Bác Hàn phải làm thợ điện.

Bác Điện phải làm thợ hàn.

Bài tập 3: Năm người thợ tên là: Da, Điện, Hàn, Tiện và Sơn làm 5 nghề khác nhau trùng với tên của tên của 5 người đó nhưng không có ai tên trùng với nghề của mình. Tên của bác thợ da trùng với nghề của anh vợ mình và vợ bác chỉ có 2 anh em. Bác Tiện không làm thợ sơn mà lại là em rể của bác thợ hàn. Bác thợ sơn và bác thợ da là 2 anh em cùng họ. Em cho biết bác da và bác tiện làm nghề gì?

Phân tích:

Bài này các cháu cũng chú ý đến những dữ kiện của đề bài. Đề bài cho rất nhiều dữ liệu, nhưng nếu để ý chúng ta sẽ không bị rối. Ví dụ: bác Tiện không làm thợ sơn mà lại là em rể bác thợ hàn, điều này chứng tỏ bác Tiện không làm thợ sơn mà cũng không làm thợ hàn (vì anh rể bác ấy là thợ hàn rồi) Tương tự các dữ liệu khác, các cháu chú ý phân tích.

Hơn nữa, ở bài này, chú ý rằng đề bài chỉ hỏi bác Tiện và bác Da làm nghề gì, nên ta hãy tập trung phân tích xoay quanh hai bác này nhé.

Giải

Tên \ Nghề	Da	Điện	Hàn	Tiện	Sơn
da	0			0	
điện	0	0		x	
hàn	x		0	0	
tiện				0	
sơn	0			0	0

Bác Tiện không làm thợ sơn. Bác Tiện là em rể của bác thợ hàn nên bác Tiện không làm thợ hàn
 P Bác Tiện chỉ có thể là thợ da hoặc thợ điện.

Nếu bác Tiện làm thợ da thì bác Da là thợ điện. Như vậy bác Tiện vừa là em rể của bác thợ tiện vừa là em rể của bác thợ hàn mà vợ bác Tiện chỉ có 2 anh em. Điều này vô lí.

Bác Tiện là thợ điện

Bác Da và bác thợ sơn là 2 anh em cùng họ nên bác Da không phải là thợ sơn. Theo lập luận trên bác Da không là thợ tiện. Vậy Bác Da là thợ hàn.

Bài tập 4: Trên bàn là 3 cuốn sách giáo khoa: Văn, Toán và Địa lí được bọc 3 màu khác nhau: Xanh, đỏ, vàng. Cho biết cuốn bọc bìa màu đỏ đặt giữa 2 cuốn Văn và Địa lí, cuốn Địa lí và cuốn màu xanh mua cùng 1 ngày. Bạn hãy xác định mỗi cuốn sách đã bọc bìa màu gì?

Giải

Ta có bảng sau:

Tên sách \ Màu bìa	Văn	Toán	Địa
Xanh	x1	2	03
đỏ	04	x5	06

vàng	7	8	x9
------	---	---	----

Theo đề bài “Cuốn bìa màu đỏ đặt giữa 2 cuốn Văn và Địa lí”. Vậy cuốn sách Văn và Địa lí đều không đặt màu đỏ cho nên cuốn toán phải bọc màu đỏ. Ta ghi số 0 vào ô 4 và 6, đánh dấu x vào ô 5. Mặt khác, “Cuốn Địa lí và cuốn màu xanh mua cùng ngày”. Điều đó có nghĩa rằng cuốn Địa lí không bọc màu xanh. Ta ghi số 0 vào ô 3.

- Nhìn vào cột thứ 4 ta thấy cuốn địa lí không bọc màu xanh, cũng không bọc màu đỏ. Vậy cuốn Địa lí bọc màu vàng. Ta đánh dấu x vào ô 9.

- Nhìn vào cột 2 và ô 9 ta thấy cuốn Văn không bọc màu đỏ, cũng không bọc màu vàng. Vậy cuốn Văn bọc màu xanh. Ta đánh dấu x vào ô 1.

Kết luận: Cuốn Văn bọc màu xanh, cuốn Toán bọc màu đỏ, cuốn Địa lí bọc màu vàng.

Bài tập 5: Trong một bảng đấu loại bóng đá có 4 đội A, B, C, D. Người ta đưa ra 3 dự đoán:

a) Đội A nhì, đội B nhất.

b) Đội B nhì, đội D ba.

c) Đội C nhì, đội D tư.

Kết quả dự đoán này đều có một ý đúng, một ý sai. Hãy xác định thứ tự của mỗi đội?

Giải

Ta ghi ba dự đoán vào ba dòng trong bảng sau:

Thứ tự Dự đoán	1	2	3	4
a	B	A		
b		B	D	
c		C		D

Vì có nhiều dự đoán đề cập đến đội về nhì nên ta xét đội nào về nhì.

Giả sử đội A về nhì là đúng thì các đội B về nhì là sai, do đó đội D về thứ ba (theo b) và về thứ tư (theo c), vô lí.

Vậy đội A về nhì là sai, do đó theo a thì đội B về nhất. Đội B về nhì là sai nên theo b thì đội D về thứ ba. Đội D về thứ tư là sai nên theo c thì đội C về thứ nhì. Còn đội A về thứ tư.

1.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giờ Văn cô giáo trả bài kiểm tra. Bốn bạn Tuấn, Hùng, Lan, Quân ngồi cùng bàn đều đạt điểm 8 trở lên. Giờ ra chơi Phương hỏi điểm của 4 bạn, Tuấn trả lời :

- Lan không đạt điểm 10, mình và Quân không đạt điểm 9 còn Hùng không đạt điểm 8.

Hùng thì nói :

- Mình không đạt điểm 10, Lan không đạt điểm 9 còn Tuấn và Quân đều không đạt điểm 8.

Bạn hãy cho biết mỗi người đã đạt mấy điểm?

Bài tập 2: ở 3 góc vườn trồng cây cảnh của ông nội trồng 4 khóm hoa cúc, huệ, hồng và đơn. Biết rằng hai góc vườn phía tây và phía bắc không trồng huệ. Khóm huệ trồng giữa khóm cúc và góc vườn phía nam, còn khóm đơn thì trồng giữa khóm hồng và góc vườn phía bắc.

Bạn hãy cho biết mỗi góc vườn ông nội đã trồng hoa gì?

Bài tập 3: Ba thầy giáo dạy 3 môn văn, toán, lí trò chuyện với nhau. Thầy dạy lí nhận xét : “Ba chúng mình có tên trùng với 3 môn chúng ta dạy, nhưng không ai có tên trùng với môn mình dạy”. Thầy dạy toán hướng ứng : “Anh nói đúng”.

Em hãy cho biết mỗi thầy dạy môn gì?

Bài tập 4: Trong đêm dạ hội ngoại ngữ, 3 cô giáo dạy tiếng Nga, tiếng Anh và tiếng Nhật được giao phụ trách. Cô Nga nói với các em : “Ba cô dạy 3 thứ tiếng trùng với tên của các cô, nhưng chỉ có 1 cô có tên trùng với thứ tiếng mình dạy”. Cô dạy tiếng Nhật nói thêm : “Cô Nga đã nói đúng” rồi chỉ vào cô Nga nói tiếp : “Rất tiếc cô tên là Nga mà lại không dạy tiếng Nga”. Em hãy cho biết mỗi cô giáo đã dạy tiếng gì?

Bài tập 5: Ba thầy giáo dạy các môn như sau: Văn, Sử, Hoá. Trong đó chỉ có 1 thầy có tên trùng với môn mình dạy. Hỏi mỗi thầy dạy môn gì? Biết thầy dạy môn hoá ít tuổi hơn thầy dạy văn, sử.

Bài tập 6: Trong một cuộc đua xe đạp. 4 vận động viên An, Bình, Cường, Dũng đã đạt bốn giải đầu tiên.

Trong các câu sau đây, mỗi câu chỉ đúng về một vận động viên:

a) Bình giải nhất, Dũng giải nhì.

b) Bình giải nhì, Cường giải ba.

c) An giải nhì, Cường giải tư.

Hãy xác định giải của từng vận động viên?

Bài tập 7: Bốn bạn nữ Mỹ, Mận, Mai, Mơ đang ở trong một căn phòng của kí túc xá. Một cô sửa áo, một cô đang chải đầu, một cô đang viết thư, và một cô đang đọc sách.

Biết thêm rằng:

+ Mỹ không sửa áo và không đọc sách

+ Mận không viết thư và không và không sửa áo

+ Nếu Mỹ không viết thư thì Mơ không sửa áo.

+ Mai không đọc sách và không sửa áo.

Hãy nói chính xác mỗi cô đang làm gì trong phòng?

2. Phương pháp lựa chọn tình huống:

2.1. Kiến thức cơ bản:

Đây là dạng toán rất dễ nhận biết. Vì trong đề bài ta sẽ nhận thấy được các yêu cầu đúng hoặc sai, thỏa mãn hay không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta luôn đặt các vấn đề của bài toán theo phương pháp phản chứng (giả sử ... vấn đề bài toán ... là đúng ... hoặc sai).

2.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Trong kì thi HS giỏi tỉnh có 4 bạn Phương, Dương, Hiếu, Hằng tham gia. Được hỏi quê mỗi người ở đâu ta nhận được các câu trả lời sau:

Phương: Dương ở Thăng Long còn tôi ở Quang Trung

Dương: Tôi cũng ở Quang Trung còn Hiếu ở Thăng Long

Hiếu: Không, tôi ở Phúc Thành còn Hằng ở Hiệp Hoà

Hằng: Trong các câu trả lời trên đều có 1 phần đúng 1 phần sai.

Em hãy xác định quê của mỗi bạn.

Giải

Vì trong mỗi câu trả lời đều có 1 phần đúng và 1 phần sai nên có các trường hợp:

- Giả sử Dương ở Thăng Long là đúng $\Rightarrow$ Phương ở Quang Trung là sai

$\Rightarrow$ Hiếu ở Thăng Long là đúng

Điều này vô lí vì Dương và Hiếu cùng ở Thăng Long.

Giả sử Dương ở Thăng Long là sai $\Rightarrow$ Phương ở Quang Trung và do đó Dương ở Quang Trung là sai $\Rightarrow$ Hiếu ở Thăng Long

Hiếu ở Phúc Thành là sai $\Rightarrow$ Hằng ở Hiệp Hoà

Còn lại $\Rightarrow$ Dương ở Phúc Thành.

Bài tập 2: Năm bạn Anh, Bình, Cúc, Doan, An quê ở 5 tỉnh: Bắc Ninh, Hà Tây, Cần Thơ, Nghệ An, Tiền Giang. Khi được hỏi quê ở tỉnh nào, các bạn trả lời như sau:

Anh: Tôi quê ở Bắc Ninh còn Doan ở Nghệ An

Bình: Tôi cũng quê ở Bắc Ninh còn Cúc ở Tiền Giang

Cúc: Tôi cũng quê ở Bắc Ninh còn Doan ở Hà Tây

Doan: Tôi quê ở Nghệ An còn An ở Cần Thơ

An: Tôi quê ở Cần Thơ còn Anh ở Hà Tây

Nếu mỗi câu trả lời đều có 1 phần đúng và 1 phần sai thì quê mỗi bạn ở đâu?

Giải

Vì mỗi câu trả lời có 1 phần đúng và 1 phần sai nên có các trường hợp :

- Nếu Anh ở Bắc Ninh là đúng $\Rightarrow$ Doan không ở Nghệ An. $\Rightarrow$ Bình và Cúc ở Bắc Ninh là sai $\Rightarrow$ Cúc ở Tiền Giang và Doan ở Hà Tây.

Doan ở Nghệ An là sai $\Rightarrow$ An ở Cần Thơ và Anh ở Hà Tây là sai.

Còn bạn Bình ở Nghệ An (Vì 4 bạn quê ở 4 tỉnh rồi)

- Nếu Anh ở Bắc Ninh là sai $\Rightarrow$ Doan ở Nghệ An

Doan ở Hà Tây là sai $\Rightarrow$ Cúc ở Bắc Ninh. Từ đó Bình ở Bắc Ninh phải sai

$\Rightarrow$ Cúc ở Tiền Giang

Điều này vô lí vì Cúc vừa ở Bắc Ninh vừa ở Tiền Giang (loại).

Vậy : Anh ở Bắc Ninh; Cúc ở Tiền Giang; Doan ở Hà Tây; An ở Cần Thơ và Bình ở Nghệ An.

Bài tập 3: Cúp Tiger 98 có 4 đội lọt vào vòng bán kết: Việt Nam, Singapor, Thái Lan và Indônêxia. Trước khi vào đấu vòng bán kết ba bạn Dũng, Quang, Tuấn dự đoán như sau:

Dũng: Singapor nhì, còn Thái Lan ba.

Quang: Việt Nam nhì, còn Thái Lan tư.

Tuấn : Singapor nhất và Indônêxia nhì.

Kết quả mỗi bạm dự đoán đúng một đội và sai một đội. Hỏi mỗi đội đã đạt giải mấy?

Giải

- Nếu Singapor đạt giải nhì thì Singapor không đạt giải nhất. Vậy theo Tuấn thì Indônêxia đạt giải nhì. Điều này vô lý, vì hai đội đều đạt giải nhì.

- Nếu Singapor không đạt giải nhì thì theo Dũng, Thái Lan đạt giải ba. Như vậy Thái Lan không đạt giải tư. Theo Quang, Việt Nam đạt giải nhì. Thế thì Indônêxia không đạt giải nhì. Vậy theo Tuấn, Singapor đạt giải nhất, cuối cùng còn đội Indônêxia đạt giải tư.

Kết luận: Thứ tự giải của các đội trong cúp Tiger 98 là:

Nhất: Singapor; Nhì: Việt Nam.

Ba: Thái Lan; Tư: Indônêxia

Bài tập 4: Gia đình Lan có 5 người: Ông nội, bố, mẹ, Lan và em Hoàng. Sáng chủ nhật cả nhà thích đi xem xiếc nhưng chỉ mua được 2 vé. Mọi người trong gia đình đề xuất 5 ý kiến: Hoàng và Lan đi

Bố và mẹ đi

Ông và bố đi

Mẹ và Hoàng đi

Hoàng và bố đi.

Cuối cùng mọi người đồng ý với đề nghị của Lan vì theo đề nghị đó thì mỗi đề nghị của 4 người còn lại trong gia đình đều được thoả mãn 1 phần. Bạn hãy cho biết ai đi xem xiếc hôm đó.

Giải

Ta nhận xét:

- Nếu chọn đề nghị thứ nhất thì đề nghị thứ hai bị bác bỏ hoàn toàn. Vậy không thể chọn đề nghị thứ nhất.

- Nếu chọn đề nghị thứ hai thì đề nghị thứ nhất bị bác bỏ hoàn toàn. Vậy không thể chọn đề nghị thứ hai.

- Nếu chọn đề nghị thứ ba thì đề nghị thứ tư bị bác bỏ hoàn toàn. Vậy không thể chọn đề nghị thứ ba.

- Nếu chọn đề nghị thứ tư thì đề nghị thứ ba bị bác bỏ hoàn toàn. Vậy không thể chọn đề nghị thứ tư.

- Nếu chọn đề nghị thứ năm thì cả 4 đề nghị trên đều thoả mãn một phần và bác bỏ một phần. Vậy sáng hôm đó Hoàng và bố đi xem xiếc.

2.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Trong 1 cuộc chạy thi 4 bạn An, Bình, Cường, Dũng đạt 4 giải : nhất, nhì, ba, tư. Khi được hỏi : Bạn Dũng đạt giải mấy thì 4 bạn trả lời :

An : Tôi nhì, Bình nhất.

Bình : Tôi cũng nhì, Dũng ba.

Cường : Tôi mới nhì, Dũng tư.

Dũng : 3 bạn nói có 1 ý đúng 1 ý sai.

Em cho biết mỗi bạn đạt mấy?

Bài tập 2: Tổ toán của 1 trường phổ thông trung học có 5 người : Thầy Hùng, thầy Quân, cô Vân, cô Hạnh và cô Cúc. Kỳ nghỉ hè cả tổ được 2 phiếu đi nghỉ mát. Mọi người đều nhường nhau, thầy hiệu trưởng đề nghị mỗi người đề xuất 1 ý kiến. Kết quả như sau :

(1) Thầy Hùng và thầy Quân đi.

(2) Thầy Hùng và cô Vân đi

(3) Thầy Quân và cô Hạnh đi.

(4) Cô Cúc và cô Hạnh đi.

(5) Thầy Hùng và cô Hạnh đi.

Cuối cùng thầy hiệu trưởng quyết định chọn đề nghị của cô Cúc, vì theo đề nghị đó thì mỗi đề nghị đều thoả mãn 1 phần và bác bỏ 1 phần.

Bạn hãy cho biết ai đã đi nghỉ mát trong kỳ nghỉ hè đó?

Bài tập 3: Ba bạn Quân, Hùng và Mạnh vừa đạt giải nhất, nhì và ba trong kỳ thi toán quốc tế. Biết rằng:

(1) Không có học sinh trường chuyên nào đạt giải cao hơn Quân.

(2) Nếu Quân đạt giải thấp hơn một bạn nào đó thì Quân không phải là học sinh trường chuyên.

(3) Chỉ có đúng 1 bạn không phải là học sinh trường chuyên

(4) Nếu Hùng và Mạnh đạt giải nhì thì mạnh đạt giải cao hơn bạn quê ở

Hải Phòng.

Bạn hãy cho biết mỗi bạn đã đạt giải nào? bạn nào không học trường chuyên và bạn nào quê ở Hải Phòng.

Bài tập 4: Thầy Nghiêm được nhà trường cử đưa 4 học sinh Lê, Huy, Hoàng, Tiến đi thi đấu điền kinh. Kết quả có 3 em đạt giải nhất, nhì, ba và 1 em không đạt giải. Khi về trường mọi người hỏi kết quả các em trả lời như sau :

Lê : Mình đạt giải nhì hoặc ba.

Huy : Mình đạt giải nhất.

Hoàng : Mình đạt giải nhất.

Tiến : Mình không đạt giải.

Nghe xong thầy Nghiêm mỉm cười và nói : “Chỉ có 3 bạn nói thật, còn 1 bạn đã nói đùa”.

Bạn hãy cho biết học sinh nào đã nói đùa, ai đạt giải nhất và ai không đạt giải.

Bài tập 5: Cúp Euro 96 có 4 đội lọt vào vòng bán kết : Đức, Cộng hoà Séc, Anh và Pháp. Trước khi thi đấu 3 bạn Hùng, Trung và Đức dự đoán như sau :

Hùng : Đức nhất và Pháp nhì

Trung : Đức nhì và Anh ba

Đức : Cộng hoà Séc nhì và Anh tư.

Kết quả mỗi bàn dự đoán một đội đúng, một đội sai. Hỏi mỗi đội đã đạt giải mấy?

Bài tập 6: Ba cô bạn gái là Thanh, Xuân và Diệp đi chơi với nhau. Diệp bỗng có một nhận xét độc đáo nói với cô bạn mặc áo màu xanh: "vui thật, trong chúng ta có 1 người mặc áo màu trắng, một người mặc áo màu đen và một người mặc áo màu xanh nhưng các chữ đầu của màu áo lại chẳng trùng với chữ đầu tên của chúng mình". Vậy ai mặc áo màu gì?

Đáp số: Thanh - Đen, Xuân - Trắng, Diệp - Xanh.

Bài tập 7: Trên đường đi học về 3 bạn Lan, Minh, Nghĩa nói chuyện với nhau về bài kiểm tra toán vừa làm xong:

Lan nói: "Kì này chắc mình không đạt 10 điểm"

Minh nói: "Bài làm của mình rất tốt, thế nào mình cũng đạt 10 điểm"

Nghĩa nói: "Mình làm cũng được nhưng chắc điểm của mình không phải là 9"

Đến hôm thầy giáo trả bài kiểm tra số điểm của 3 bạn là 10; 9; 7 và các bạn thấy rằng chỉ 1 trong 3 người đoán đúng số điểm của mình.

Tính số điểm của mỗi bạn.

Đáp số: Nghĩa nói đúng:

Lan - 10

Minh - 9

Nghĩa - 7

3. Phương pháp sử dụng biểu đồ VEN:

3.1. Kiến thức cơ bản:

Trong khi giải bài toán, người ta thường dùng những đường cong kín để mô tả mối quan hệ giữa các đại lượng trong bài toán. Nhờ sự mô tả này mà ta giải được bài toán 1 cách thuận lợi. Những đường cong như thế gọi là biểu đồ ven.

3.2. Bài tập áp dụng:

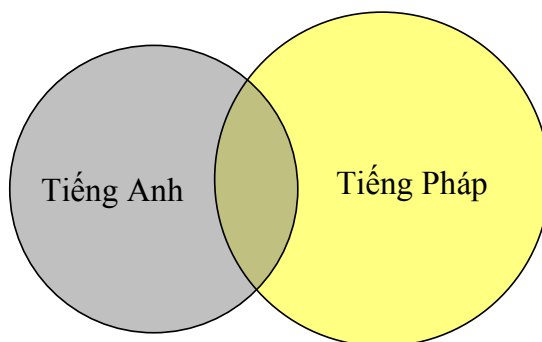
Bài tập 1: Để phục vụ cho hội nghị quốc tế, ban tổ chức đã huy động 30 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 25 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó 12 cán bộ phiên dịch được cả 2 thứ tiếng Anh và Pháp. Hỏi:

a) Ban tổ chức đã huy động tất cả bao nhiêu cán bộ phiên dịch cho hội nghị đó.

b) Có bao nhiêu cán bộ chỉ dịch được tiếng Anh, chỉ dịch được tiếng Pháp?

Giải

Số lượng cán bộ phiên dịch được ban tổ chức huy động cho hội nghị ta mô tả bằng sơ đồ ven.



Nhìn vào sơ đồ ta có :

Số cán bộ chỉ phiên dịch được tiếng Anh là :

$$30 - 12 = 18 \text{ (người)}$$

Số cán bộ chỉ phiên dịch được tiếng Pháp là :

$$25 - 12 = 13 \text{ (người)}$$

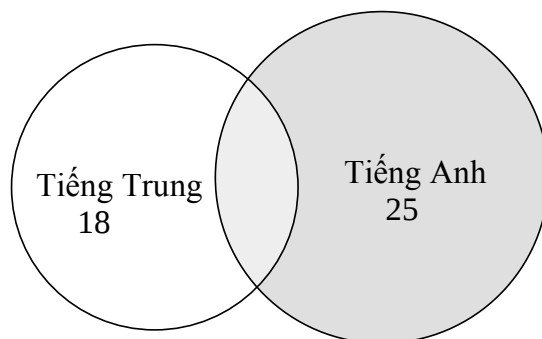
Số cán bộ phiên dịch được ban tổ chức huy động là :

$$30 + 13 = 43 \text{ (người)}$$

Đáp số : 43; 18; 13 người.

Bài tập 2: Lớp 9A có 30 em tham gia dạ hội tiếng Anh và tiếng Trung. Trong đó có 25 em nói được tiếng Anh và 18 em nói được tiếng trung. Hỏi có bao nhiêu bạn nói được cả 2 thứ tiếng?

Giải



Các em lớp 9A tham gia dạ hội được mô tả bằng sơ đồ ven.

Số học sinh chỉ nói được tiếng Trung là: $30 - 25 = 5 \text{ (em)}$

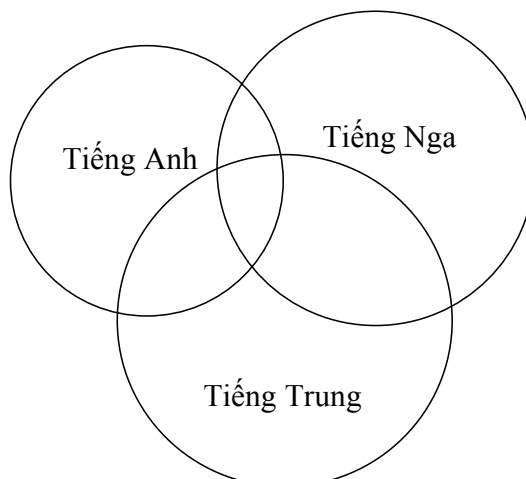
Số học sinh chỉ nói được tiếng Anh là: $30 - 18 = 12 \text{ (em)}$

Số em nói được cả 2 thứ tiếng là: $30 - (5 + 12) = 13 \text{ (em)}$

Đáp số: 13 em.

Bài tập 3: Có 200 học sinh trường chuyên ngữ tham gia dạ hội tiếng Nga, Trung và Anh. Có 60 bạn chỉ nói được tiếng Anh, 80 bạn nói được tiếng Nga, 90 bạn nói được tiếng Trung. Có 20 bạn nói được 2 thứ tiếng Nga và Trung. Hỏi có bao nhiêu bạn nói được 3 thứ tiếng?

Giải



Số học sinh nói được tiếng Nga học tiếng Trung là:

$$200 - 60 = 140 \text{ (bạn)}$$

Số học sinh nói được 2 thứ tiếng Nga và Trung là:

$$(90 + 80) - 140 = 30 \text{ (bạn)}$$

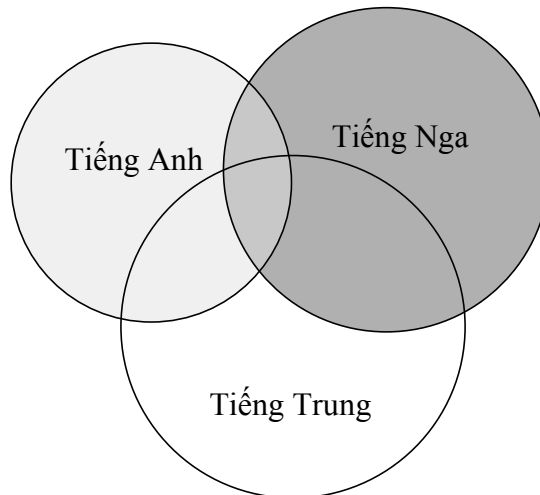
Số học sinh nói được cả 3 thứ tiếng là:

$$30 - 20 = 10 \text{ (bạn)}$$

Đáp số: 10 bạn.

Bài tập 4: Trong 1 hội nghị có 100 đại biểu tham dự, mỗi đại biểu nói được một hoặc hai trong ba thứ tiếng: Nga, Anh hoặc Pháp. Có 39 đại biểu chỉ nói được tiếng Anh, 35 đại biểu nói được tiếng Pháp, 8 đại biểu nói được cả tiếng Anh và tiếng Nga. Hỏi có bao nhiêu đại biểu chỉ nói được tiếng Nga?

Giải



Số đại biểu nói được tiếng Pháp hoặc Nga là:

$$100 - 39 = 61 \text{ (đại biểu)}$$

Số đại biểu nói được tiếng Nga nhưng không nói được tiếng Pháp là:

$$61 - 35 = 26 \text{ (đại biểu)}$$

Số đại biểu chỉ nói được tiếng Nga là:

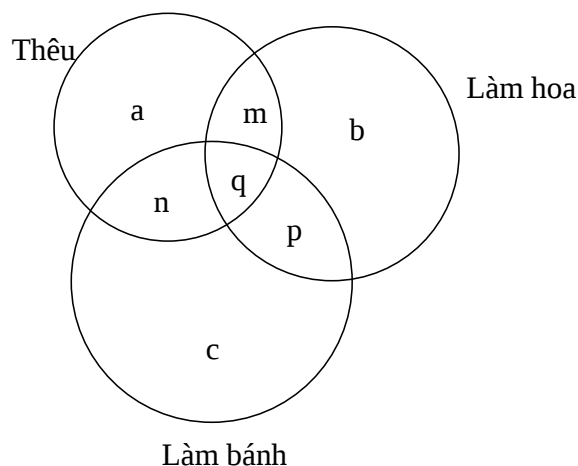
$$26 - 8 = 18 \text{ (đại biểu)}$$

Đáp số: 18 đại biểu.

Bài tập 5: Trong một lớp học, tất cả nữ sinh đều tham gia các nhóm học nữ công gia chánh gồm: Thêu, làm hoa, làm bánh. Biết rằng có 7 bạn học thêu, 6 bạn học làm hoa, 5 bạn học làm bánh, 4 bạn vừa học thêu vừa học làm hoa, 3 bạn vừa học thêu vừa học làm bánh, 2 bạn vừa học làm hoa vừa học làm bánh, 1 bạn vừa học cả ba nhóm. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu nữ sinh?

Giải

Ta vẽ vòng tròn giao nhau để biểu diễn số nữ sinh học các nhóm thêu, làm hoa, làm bánh. Giao nhau của hai, ba vòng tròn biểu diễn số người tham gia hai, ba nhóm. Ba vòng tròn này chia nhau thành các phần a, b, c, m, n, p, q kí hiệu như hình vẽ.



Theo đề bài, ta có:

$$a + m + n + p = 7 \quad (1)$$

$$b + m + p + q = 6 \quad (2)$$

$$c + n + p + q = 5 \quad (3)$$

$$m + q = 4 \quad (4)$$

$$n + q = 3 \quad (5)$$

$$p + q = 2 \quad (6)$$

$$q = 1 \quad (7)$$

$$\text{Từ (6) và (7), ta có: } p = 1 \quad (8)$$

$$\text{Từ (8), (4) và (2), suy ra: } b = 1.$$

$$\text{Từ (8), (5) và (3), suy ra: } c = 1.$$

Vậy tổng số nữ sinh của lớp học đó là: $a + m + n + q + b + c + p = 7 + 1 + 1 + 1 = 10$.

Bài tập 6: Người ta điều tra trong một lớp học có 40 học sinh thì thấy có 30 học sinh thích Toán, 25 học sinh thích Văn, 2 học sinh không thích cả Toán và Văn. Hỏi có nhiều học sinh thích cả hai môn Văn và Toán?

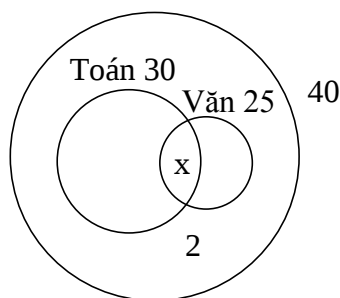
Giải

Biểu thị các dữ kiện trong đề bài như trên hình vẽ.

Gọi số học sinh thích cả hai môn Văn và Toán là x .

Thì số học sinh thích Văn mà không thích Toán là $25 - x$.

Ta có: $30 + (25 - x) + 2 = 40$.



Do đó $x = 17$. Vậy có 17 học sinh thích cả hai môn Văn và Toán.

3.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Lớp 5A có 15 bạn đăng kí học ngoại khoá môn Văn, 12 bạn đăng kí học ngoại khoá môn Toán, trong đó có 7 bạn đăng kí học cả Văn và Toán. Hỏi

a) Có bao nhiêu bạn đăng kí học Văn hoặc Toán?

b) Có bao nhiêu bạn chỉ đăng kí học Văn? chỉ đăng kí học Toán?

Bài tập 2: Trên 1 hội nghị các đại biểu sử dụng một hoặc hai trong 3 thứ tiếng : Nga, Anh hoặc Pháp. Có 30 đại biểu nói được tiếng Pháp, 35 đại biểu chỉ nói được tiếng Anh, 20 đại biểu chỉ nói được tiếng Nga và 15 đại biểu nói được cả tiếng Anh và tiếng Nga. Hỏi hội nghị đó có bao nhiêu đại biểu tham dự?

Bài tập 3: Bốn mươi em học sinh của trường X dự thi 3 môn : ném tạ, chạy và đá cầu. Trong đội có 8 em chỉ thi ném tạ, 20 em thi chạy và 18 em thi đá cầu. Hỏi có bao nhiêu em vừa thi chạy vừa thi đá cầu?

Bài tập 4: Đội tuyển thi học sinh giỏi của tỉnh X có 25 em thi Văn và 27 em thi toán, trong đó có 18 em vừa thi Văn vừa thi toán. Hỏi đội tuyển học sinh giỏi 2 môn Văn và Toán của tỉnh X có bao nhiêu em?

Bài tập 5: Trong một cuộc hội thảo, mỗi người tham gia đều biết ít nhất một trong ba ngoại ngữ Anh, Pháp, Nga. Biết rằng có 21 người biết tiếng Anh, 19 người biết tiếng Pháp, 17 người biết Nga, 13 người biết cả tiếng Anh và Pháp, 12 người biết cả tiếng Anh và Nga, 11 người biết cả tiếng Pháp và tiếng Nga, 10 người biết cả ba thứ tiếng. Tính số người tham dự hội thảo.

Bài tập 6: Một lớp học có 90% học sinh thích bóng đá, 60% thích bóng chuyền. Hỏi có ít nhất bao nhiêu phần trăm học sinh của lớp thích cả hai môn?

4. Phương pháp suy luận đơn giản:

4.1. Kiến thức cơ bản:

Suy luận đơn giản là phép suy luận không đúng công cụ của logic mệnh đề.

4.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Trong 1 ngôi đền có 3 vị thần ngồi cạnh nhau. Thần thật thà (luôn luôn nói thật); Thần dối trá (luôn nói dối); Thần khôn ngoan (lúc nói thật, lúc nói dối). Một nhà toán học hỏi 1 vị thần bên trái : Ai ngồi cạnh ngài?

- Thần thật thà.

Nhà toán học hỏi người ở giữa:

- Ngài là ai?

- Là thần khôn ngoan.

Nhà toán học hỏi người bên phải

- Ai ngồi cạnh ngài?

- Thần dối trá.

Hãy xác định tên của các vị thần.

Giải

Cả 3 câu hỏi của nhà toán học đều nhằm xác định 1 thông tin: Thần ngồi giữa là thần gì? Kết quả có 3 câu trả lời khác nhau.

Ta thấy thần ngồi bên trái không phải là thần thật thà vì ngài nói người ngồi giữa là thần thật thà.

Thần ngồi giữa cũng không phải là thần thật thà vì ngài nói: Tôi là thần khôn ngoan $\Rightarrow$ Thần ngồi bên phải là thần thật thà $\Rightarrow$ ở giữa là thần dối trá.

$\Rightarrow$ ở bên trái là thần khôn ngoan.

Bài tập 2: Một hôm anh Quang mang quyển Album ra giới thiệu với mọi người. Cường chỉ vào đàn ông trong ảnh và hỏi anh Quang: Người đàn ông này có quan hệ thế nào với anh? Anh Quang bèn trả lời: Bà nội của chị gái vợ anh ấy là chị gái của bà nội vợ anh tôi.

Bạn cho biết anh Quang và người đàn ông ấy quan hệ với nhau như thế nào?

Giải

Bà nội của chị gái vợ anh ấy cũng chính là bà nội của vợ anh ấy. Bà nội của vợ anh ấy là chị gái của bà nội vợ anh Quang. Vợ anh ấy và vợ anh Quang là chị em con dì con già. Do vậy anh Quang và người đàn ông ấy là 2 anh em rể họ.

Bài tập 3: Có 1 thùng đựng 12 lít dầu hoả. Bằng 1 can 9 lít và 1 can 5 lít làm thế nào để lấy ra được 6 lít dầu từ thùng đó:

Giải

Lần	Can 9 lít	Can 5 lít	Thùng 12 lít
1	0	5	7
2	5	0	7
3	5	5	2
4	9	1	2
5	0	1	11
6	1	0	11
7	1	5	6

Bài tập 4: Ở 1 xã X có 2 làng: Dân làng A chuyên nói thật, còn dân làng B chuyên nói dối. Dân 2 làng thường qua lại thăm nhau. Một chàng thanh niên nọ về thăm bạn ở làng A. Vừa bước vào xã X, đang ngỡ ngàng chưa biết đây là làng nào, chàng thanh niên gặp ngay một cô gái và anh ta hỏi người này một câu. Sau khi nghe trả lời chàng thanh niên bèn quay ra (vì biết chắc mình đang ở làng B) và sang tìm bạn ở làng bên cạnh.

Bạn hãy cho biết câu hỏi đó thế nào và câu trả lời đó ra sao mà chàng thanh niên lại khẳng định chắc chắn như vậy

Phân tích:

Để nghe xong câu trả lời người thanh niên đó có thể khẳng định mình đang đứng trong làng A hay làng B thì anh ta phải nghĩ ra 1 câu hỏi sao cho câu trả lời của cô gái chỉ phụ thuộc vào họ đang đứng trong làng nào. Cụ thể hơn: cần đặt câu hỏi để cô gái trả lời là “phải”, nếu họ đang đứng trong làng A và “không phải”, nếu họ đang đứng trong làng B.

Giải

Câu hỏi của người thanh niên đó là: “Có phải chị người làng này không?”

Trường hợp 1: Họ đang đứng trong làng A: Nếu cô gái là người làng A thì câu trả lời là “phải” (vì dân làng A chuyên nói thật); Nếu cô gái là người làng B thì câu trả lời cũng là “phải” (vì dân làng đó nói dối).

Trường hợp 2: Họ đang đứng trong làng B: Nếu cô gái là người làng A thì câu trả lời là: “không phải”; Nếu cô gái là người làng B thì câu trả lời cũng là: “không phải”.

Như vậy, Nếu họ đang đứng trong làng A thì câu trả lời chỉ có thể là “phải”, còn nếu họ đang đứng trong làng B thì câu trả lời chỉ có thể là “không phải”.

Người thanh niên quyết định quay ra, vì anh đã nghe câu trả lời là “không phải”.

Bài tập 5:

Tính đến năm 1994, dân số ở thủ đô Hà Nội là 2052116 người. Biết rằng trên đầu mỗi người có không quá 100000 sợi tóc. Chứng minh rằng ở Hà Nội ít ra cũng có 20 người có cùng số sợi tóc.

Giải

Ta chia số dân ở Hà Nội theo số sợi tóc từ 0 đến 100000 tức là thành 100001 nhóm. Nếu mỗi nhóm có không quá 19 người thì tổng số dân chỉ là: $19 \cdot 100001 = 1900019 < 2052116$. Vậy ít nhất phải có một số nhóm có 20 người tức là ít ra cũng có 20 người có cùng một số sợi tóc.

Bài tập 6: Bài toán của Einstein:

1. Có 5 ngôi nhà, mỗi nhà một màu khác nhau.
2. Trong mỗi nhà có một người ở, mỗi người có quốc tịch khác nhau.
3. Mỗi người thích uống một loại nước khác nhau, mỗi người hút một loại thuốc lá khác nhau và nuôi một loài vật khác nhau trong nhà của mình.

Câu hỏi đặt ra là: Ai nuôi cá?

Biết rằng:

- a. Người Anh sống trong nhà màu đỏ.
- b. Người Thụy điển nuôi chó.
- c. Người Đan mạch thích uống chè.
- d. Người Đức hút thuốc lá nhãn Rothmanns.
- e. Người Na uy sống trong ngôi nhà đầu tiên.
- f. Người sống trong nhà xanh thích uống cà phê.
- g. Người hút thuốc lá Winfield thích uống bia.
- h. Người sống trong nhà vàng hút thuốc lá Dunhill.
- i. Người hút thuốc lá Pall Mall nuôi vẹt trong nhà của mình.
- j. Người sống trong ngôi nhà ở chính giữa thích uống sữa.
- k. Người hút thuốc lá Marlboro sống bên cạnh người nuôi mèo.
- l. Người hàng xóm của người hút Marlboro quen uống nước.
- m. Người hút thuốc lá Dunhill sống bên cạnh người nuôi ngựa.
- n. Ngôi nhà của người Na uy nằm bên cạnh nhà màu tím.
- o. Ngôi nhà màu xanh nằm kế và bên trái (phía trước) nhà màu trắng.

Giải

Quốc tịch	Màu nhà	Số nhà	Loại thuốc	Nước uống	Vật nuôi
Na uy	Vàng	1	Dunhill	Khoáng	Mèo
Đan Mạch	Tím	2	Malboro	Chè	Ngựa
Anh	Đỏ	3	PallMall	Sữa	Vẹt
Đức	Xanh lá	4	Rothmans	Cà phê	Cá
Thụy Điển	Trắng	5	Winfield	Bia	Chó

Người Đức nuôi cá. Vì:

(1) Na uy sống trong ngôi nhà đầu tiên, bên cạnh ngôi nhà tím.

⇒ Ngôi nhà tím ở vị trí thứ hai.

(2) Người sống trong ngôi nhà xanh lá uống cà phê, ở bên trái ngôi nhà trắng. Mà người sống trong ngôi nhà giữa thích uống sữa.

⇒ Nhà xanh lá không thể ở giữa và cũng không thể ở vị trí thứ 5 vì bên phải còn ngôi nhà trắng

⇒ nhà xanh lá ở vị trí thứ 4, trắng ở vị trí thứ 5.

(3) Người Anh sống trong ngôi nhà đỏ.

⇒ Ngôi nhà đỏ không thể ở vị trí thứ 1 mà ở vị trí giữa.

⇒ Ngôi nhà màu vàng ở vị trí đầu.

⇒ Thứ tự 5 ngôi nhà: vàng, tím, đỏ, xanh lá, trắng.

(4) Người Anh ở giữa

⇒ người anh uống sữa.

(5) Người ở nhà màu vàng hút thuốc lá Dunhill

⇒ Người Naury hút Dunhill.

(6) Người hút thuốc Winfield thích uống bia.

⇒ Không thể là người anh (uống sữa), không thể là người Naury (hút Dunhill), không thể là Đan mạch (uống chè), không thể là Đức (hút Rothmanns).

⇒ đó là người Thụy Điển (uống bia và hút Winfield)

(7) Ngôi nhà màu xanh lá uống cà phê mà Naury sống trong ngôi nhà vàng, Anh uống sữa, Thụy Điển uống bia, Đan mạch uống chè

⇒ Đức uống cà phê, sống trong nhà xanh lá ⇒ Naury uống nước khoáng.

(8) Người hút Marlboro có người hàng xóm uống nước khoáng mà Naury uống nước khoáng sống trong ngôi nhà 1 cạnh tím

⇒ người hút Marlboro ở ngôi nhà tím.

(9) Người Đức hút Rothmanns, Thụy điển hút Winfield, Naury sống trong nhà vàng, Anh sống trong nhà giữa

⇒ Đan mạch sống trong nhà tím, hút Marlboro, Anh hút PallMall và nuôi vẹt.

⇒ Naury sống trong nhà vàng, Đan mạch - tím, anh - đỏ, Đức - xanh lá, Thụy Điển - trắng.

(10) Người nuôi ngựa sống cạnh người hút Dunhill (Naury, nhà vàng)

⇒ Đan mạch nuôi ngựa.

(11) Người hút Marlboro (Đan mạch) sống cạnh người nuôi mèo mà Anh nuôi vẹt.

⇒ Naury nuôi mèo. Thụy điển nuôi chó.

⇒ người Đức nuôi cá

Chú ý: Bài Toán này còn sử dụng tốt phương pháp loại trừ và thử chọn.

Bài tập 7: Có 7 bi đỏ, 5 bi xanh để trong một hộp. Không nhìn vào hộp, hãy lấy ra ít nhất bao nhiêu bi thì chắc chắn có 2 bi đỏ, 3 bi xanh?

Giải

- Để lấy chắc chắn ít nhất 02 viên bi đỏ bạn phải lấy ít nhất 7 viên. (5 xanh + 02 đỏ, đây là trường hợp ít viên bi đỏ nhất, các trường hợp khác số bi đỏ có thể lớn hơn 2).

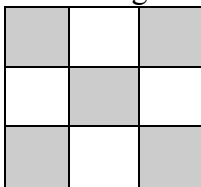
- Để lấy chắc chắn ít nhất 03 viên bi xanh bạn phải lấy ít nhất 10 viên. (7 đỏ + 3 xanh, đây là trường hợp ít bi xanh nhất, các trường hợp khác bi xanh có thể lớn hơn 03).

Vậy để lấy chắc chắn 02 đỏ, 03 xanh bạn phải lấy ít nhất 10 viên (hợp của hai tập hợp). (khi đó bi xanh chắc chắn ≥ 03 , bi đỏ > 02).

4.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Trong 1 can có 16 lít xăng, làm thế nào để chia số xăng đó thành 2 phần bằng nhau, nếu chỉ có thêm 1 can 11 lít và 1 can 6 lít để không?

Bài tập 2: Người ta xếp các số 1, 2, 3, ..., 9 vào các ô của hình vuông 3 x 3 sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng nhau.



a) Hãy tìm một cách xếp như vậy.

b) Chứng minh rằng với mọi cách xếp như vậy, số được xếp vào ô trung tâm của hình vuông luôn có giá trị không đổi.

Bài tập 3: Năm vận động viên Tuấn, Tú, Kỳ, Anh, Hợp chạy thi. Kết quả không có 2 bạn nào về đích cùng 1 lúc. Tuấn về đích trước Tú nhưng sau Hợp. Còn Hợp và Kỳ không về đích liền kề nhau. Anh không về đích liền kề với Hợp, Tuấn và Kỳ.

Bạn hãy xác định thứ tự về đích của 5 vận động viên nói trên.

Bài tập 4: Hoàng đế nước nọ mở cuộc thi tài để kén phò mã. Giai đoạn cuối của cuộc thi, hoàng đế chọn được 3 chàng trai đều thông minh. Nhà vua đang phân vân không biết chọn ai thì công chúa đưa ra 1 sáng kiến : Lấy 5 chiếc mũ, 3 chiếc màu đỏ và 2 chiếc màu vàng để ở trên bàn rồi

giao hẹn : “Bây giờ cả 3 chàng đều bịt mắt lại, tôi đội lên đầu mỗi người 1 chiếc mũ và 2 mũ còn lại tôi sẽ cất đi. Khi bỏ băng bịt mắt ra , ai là người đầu tiên nói đúng mình đang đội mũ gì thì sẽ được kén làm phò mã”

Vừa bỏ băng bịt mắt, 3 chàng trai im lặng quan sát lẫn nhau, lát sau hoàng tử nước Bỉ nói to lên rằng :” Tôi đội mũ màu đỏ” . Thế là chàng được công chúa kén làm chồng.

Bạn hãy cho biết hoàng tử nước Bỉ đã suy luận như thế nào?

Bài tập 5: Lớp 12A cử 3 bạn Hạnh, Đức, Vinh đi thi học sinh giỏi 6 môn Văn, Toán, Lí, Hoá, Sinh vật và Ngoại ngữ cấp thành phố, mỗi bạn dự thi 2 môn. Nhà trường cho biết về các em như sau :

- (1) Hai bạn thi Văn và Sinh vật là người cùng phố.
- (2) Hạnh là học sinh trẻ nhất trong đội tuyển.
- (3) Bạn Đức, bạn dự thi môn Lí và bạn thi Sinh vật thường học nhóm với nhau.
- (4) Bạn dự thi môn Lí nhiều tuổi hơn bạn thi môn Toán.
- (5) Bạn thi Ngoại ngữ, bạn thi Toán và Hạnh thường đạt kết quả cao trong các vòng thi tuyển.

Bạn hãy xác định mỗi học sinh đã được cử đi dự thi những môn gì?

Bài tập 6: ở 1 doanh nghiệp nọ người ta cần chọn 4 người vào hội đồng quản trị (HĐQT) với các chức vụ : chủ tịch, phó chủ tịch, kế toán và thủ quỹ. Sáu người được đề cử lựa chọn vào các chức vụ trên là : Đốc, Sửu, Hùng, Vinh Mạnh và Đức.

Khi tìm hiểu, các đề cử viên có những nguyện vọng sau :

- (1) Đốc không muốn vào HĐQT nếu không có Sửu. Nhưng dù có Sửu anh cũng không muốn làm phó chủ tịch.
- (2) Sửu không muốn nhận chức phó chủ tịch và thư kí.
- (3) Hùng không muốn cộng tác với Sửu, nếu Đức không tham gia.
- (4) Nếu trong HĐQT có Vinh hoặc Đức thì Mạnh kiên quyết không tham gia HĐQT
- (5) Vinh cũng từ chối,nếu HĐQT có mặt cả Đốc và Đức.
- (6) Chỉ có Đức đồng ý làm chủ tịch với điều kiện Hùng không làm phó chủ tịch.

Người ta phải chọn ai trong số 6 đề cử viên để thoả mãn nguyện vọng riêng của các đề cử viên.

Bài tập 7: Ba bạn Khánh, Lương, Minh tham gia các môn thể thao: Chạy, bơi, bóng bàn, bóng đá, đá cầu và đua xe đạp, mỗi bạn tham gia hai môn. Biết rằng:

- a) Bạn tham gia chạy và bạn chơi đá cầu nhà ở cạnh nhau.
- b) Trong ba bạn thì Khánh ít tuổi nhất.
- c) Bạn Lương, bạn chơi bóng bàn và bạn chơi đá cầu thường rủ nhau đi học.
- d) Bạn chơi bóng bàn nhiều tuổi hơn bạn chơi bóng đá.
- e) Bạn tham gia bơi, bạn chơi bóng đá và bạn Khánh thường cùng đi xem phim với nhau.

Hãy xem xét mỗi bạn tham gia hai môn thể thao nào?

Bài tập 8: Ba vận động viên Mai, Lan, Nga tham gia thi đấu thể thao, đó là 3 cô gái ở Hà Nội, Huế, Thành phố Hồ Chí Minh. Một cô thi chạy, một cô thi nhảy xa, một cô thi bơi. Biết rằng:

- a) Nga không thi chạy.
- b) Mai không thi bơi.
- c) Cô ở Hà Nội thi bơi.
- d) Cô ở Huế không thi chạy.
- e) Mai không ở Thành phố Hồ Chí Minh.

Hỏi mỗi cô ở đâu, thi đấu môn nào?

Bài tập 9: Trong 4 người bạn A,B,C,D có 1 người là bác sĩ, 1 nhà báo, 1 cô giáo và 1 kĩ sư. Nhà báo viết 1 bài báo về thành tích của A và D. Vào ngày nghỉ, cô giáo cùng với B và nhà báo thích cùng nhau đi du lịch, còn A và B thường ghé thăm bệnh tại nhà bác sĩ. Vậy ai làm nghề gì?

Đáp số: Bác sĩ - D; Cô giáo - A; Nhà báo - C; Kĩ sư - B.

Bài tập 10: Trong một giải bóng chuyền có 6 đội A, B, C, D, E, F tham gia. Kết quả như sau:

- Đội A xếp sau đội B 3 bậc.
- Đội E hơn đội B nhưng lại kém đội D
- Đội C hơn đội F.

Hỏi kết quả xếp hạng của mỗi đội?

Đáp số: D - E - B - C - F - A.

Bài tập 11: Chiếc thang dây được treo vào một bên tàu thủy đáy thang chìm trong nước, mà mực thủy triều cứ dâng lên mỗi giờ 50cm. 5 bậc thang đã chìm trong nước và khoảng cách giữa hai nấc thang là 20cm bề dày một nấc thang là 3cm. Hỏi sau hai giờ thang bị chìm mấy nấc?

Bài tập 12: Làm thế nào để có thể đem 6 lít nước từ sông về nếu trong tay chỉ có hai cái thùng, một thùng dung tích 4 lít một thùng dung tích 9 lít và không thùng nào có vạch chưa dung tích?

Bài tập 13: Trong một can có 16 lít xăng. Làm thế nào để chia số xăng đó thành hai phần bằng nhau, mỗi phần 8 lít, nếu chỉ có thêm một can 11 lít và một can 6 lít ?

Bài tập 14: Cho 20 số hữu tỉ, trong đó tích 3 số bất kì là một số hữu tỉ dương. Chứng minh rằng cả 20 số hữu tỉ đó đều dương.

Bài tập 15: Có 17 nhà Bác học viết thư cho nhau. Mỗi người viết thư cho tất cả những người khác. Các thư chỉ trao đổi về ba đề tài. Từng cặp 2 nhà Bác Học chỉ viết thư cho nhau về cùng 1 đề tài. Chứng minh rằng không ít hơn ba người viết thư cho nhau về cùng một đề tài.

Bài tập 16: 34 đội bóng tham gia giải bóng đá vô địch ngoại hạng Anh Championleague. Mỗi đội bóng có đại diện là huấn luyện viên trưởng và đội trưởng của đội bóng. Trước khi bốc thăm chọn lượt đấu một số người đại diện của các đội bóng đã bắt tay nhau nhưng không có HLV trưởng nào bắt tay đội trưởng đội bóng của mình. Sau cuộc họp, ông Ferguson HLV trưởng Manchester United đã hỏi mỗi người tham gia về số người mà họ bắt tay. Tất cả các câu trả lời đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu người bắt tay đội trưởng MU?

Bài tập 17: Năm người A,B,C,D,E là kí giả hoặc là nhà buôn, kí quả luôn luôn nói thật, nhà buôn luôn nói dối.

D nói E là kí giả

B nói A là nhà buôn

C nói D không phải là nhà buôn.

E nói B không phải là kí giả.

A nói C và D có nghề nghiệp khác nhau.

Hỏi ai là nhà buôn ai là kí giả?

Bài tập 18: Trong 3 ngăn kéo đóng, mỗi ngăn đều có 2 quả bóng, một ngăn chứa 2 bóng trắng, một ngăn chứa 2 bóng đỏ và ngăn còn lại chứa 1 bóng trắng và một bóng đỏ.

Có 3 nhãn hiệu: Trắng-Trắng, Đỏ-Đỏ và Trắng-Đỏ đem dán bên ngoài mỗi ngăn một nhãn nhưng đều sai với bóng trong ngăn.

Hỏi phải rút ra từ ngăn có nhãn hiệu nào để chỉ một lần rút một bóng (và không được nhìn vào trong ngăn) có thể xác định được các bóng chứa trong mỗi ngăn?

Bài tập 19: Tình cờ có 10 ví đựng tiền, trong mỗi ví đều đựng 10 đồng tiền giống hệt nhau và giống như các ví khác, nhưng trong đó có 1 ví đựng toàn tiền giả . Các đồng tiền thật nặng 10 gam, còn các đồng tiền giả nặng hơn đúng 1 gam.

Với một lần cân (cân đồng hồ) hãy chỉ ra ví đựng tiền giả?

Bài tập 20: Giả thiết đồng tiền giả hoặc nhẹ hơn, hoặc nặng hơn đồng tiền thật. với một chiếc cân đĩa và không dùng quả cân, bằng 3 lần cân hãy tìm ra đồng tiền giả và xác định xem nó nặng hơn hay nhẹ hơn đồng tiền thật trong hai trường hợp sau:

I. Đồng tiền giả nằm trong 8 đồng tiền giống hệt nhau.

II. Đồng tiền giả nằm trong 12 đồng tiền giống hệt nhau.

Bài tập 21: Trong 1 hội nghị có 500 đại biểu tham dự, mỗi đại biểu có thể sử dụng một trong ba thứ tiếng: Nga, Anh hoặc pháp. Theo thống kê của ban tổ chức, có 60 đại biểu chỉ nói được một trong ba thứ tiếng, 180 đại biểu chỉ nói được 2 thứ tiếng Anh và Pháp, 150 đại biểu nói được cả tiếng Anh và Nga, 170 đại biểu nói được cả tiếng Nga và tiếng Pháp .Hỏi có bao nhiêu đại biểu nói được cả ba thứ tiếng?

Bài tập 22: Trong một giải bóng đá có k đội tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt (2 đội bất kì đấu với nhau đúng 1 trận). Đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không có điểm. Kết thúc giải đấu, người ta nhận thấy rằng số trận thắng – thua gấp đôi số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 176. Hãy tìm k.

Bài tập 23: Trong một giải bóng đá, có 4 đội thi đấu vòng tròn 1 lượt (trong một trận, đội thắng được 3 điểm, đội thua được 0 điểm và đội hòa được 1 điểm). Khi kết thúc giải đấu, người ta thấy có 3 đội được tổng điểm lần lượt là 6 điểm, 5 điểm và 1 điểm. Hãy cho biết đội còn lại của giải có tổng số điểm là bao nhiêu và giải thích tại sao?

Bài tập 24: Trong một giải bóng đá, có N đội tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (2 đội bất kì gặp nhau đúng 1 lần). Sau mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, thua 0 điểm và hòa

thì mỗi đội 1 điểm. Các đội được xếp hạng dựa trên tổng điểm. Trong trường hợp một số đội có tổng điểm bằng nhau thì các đội này được xếp hạng theo chỉ số phụ. Kết thúc giải người ta nhận thấy rằng không có trận đấu nào kết thúc với tỉ số hòa; các đội xếp thứ nhất nhì ba có tổng điểm lần lượt là 15, 12, 12 và tất cả các đội xếp tiếp theo có điểm đôi một khác nhau.