

BIÊN SOẠN: TRẦN TRUNG CHÍNH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10

MÔN TOÁN

PHẦN I: SỐ HỌC



Leonhard Euler
(1707-1783)

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

TÀI LIỆU CHƯA ĐĂNG KÝ BẢN QUYỀN
NÊN CHỈ ĐƯỢC LƯU HÀNH NỘI BỘ! KHÔNG ĐƯỢC PHÁT HÀNH.

CHỦ ĐỀ 1
SỐ CHÍNH PHƯƠNG

1. Kiến thức cơ bản:

Định nghĩa:

Số nguyên A được gọi là số chính phương nếu tồn tại số nguyên dương a sao cho:

$$A = a^2$$

Phát biểu: Số chính phương là số bằng bình phương của một số tự nhiên.

Lưu ý: Mười số chính phương đầu tiên là: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,...

Tính chất:

Số chính phương có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Số chính phương chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

Kí hiệu: $3n$ và $3n + 1$, ($n \in \mathbb{N}$)

Số chính phương chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

Kí hiệu: $4n$ và $4n + 1$, ($n \in \mathbb{N}$)

Vận dụng tính chất:

Nếu hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số a, b cũng là một số chính phương.

Khi phân tích một số chính phương ra thừa số nguyên tố ta được các thừa số là lũy thừa của số nguyên tố với số mũ chẵn.

$$\text{Ví dụ: } 3600 = 60^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Một số cách nhận biết số không chính phương N:

(1) Chứng minh N có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8.

(2) Chứng minh N chứa số nguyên tố với mũ lẻ.

(3) Xét số dư khi N cho 3 hoặc cho 4 hoặc cho 5 cho 8.

(4) Chứng minh N nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

(5) N chia cho 3 dư 2; N chia cho 4; 5 có số dư là 2; 3.

(6) Một số tính chất về số dư khi chia cho 5, 6, 7, ... các bạn có thể tự suy ra bằng cách đặt số ban đầu là $nk + q$ (Ví dụ: $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, ...).

Lưu ý:

Khi **Giải** các bài toán về số chính phương ta có thể áp dụng "phương pháp modun (mod)", nghĩa là xét số dư của các số chính phương khi chia cho 1 số nguyên nào đó.

Ví dụ 1: Tìm k để $4k + 3 = a^2$

Giải

Giả sử: $4k + 3 = a^2$.

Khi đó: $a^2 \equiv 3 \pmod{4}$ (1)

Ta lại có, nếu a là số chính phương thì $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ (2)

Từ (1) và (2) thì vô lý.

Vậy không có số k thỏa mãn $4k + 3$ là số chính phương.

Ví dụ 2: Tìm $a \in \mathbb{N}^*$ để phương trình sau có nghiệm nguyên:

$$x^2 + 2ax - 3a = 0$$

Giải

Xét $\Delta' = a^2 + 3a$.

Để phương trình trên có nghiệm nguyên thì $a^2 + 3a$ phải là số chính phương.

$$a^2 < a^2 + 3a < a^2 + 4a + 4 \Leftrightarrow a^2 < a^2 + 3a < (a + 2)^2$$

$$\text{Do đó: } a^2 + 3a = a^2 + 2a + 1 \Leftrightarrow a = 1.$$

Với $a = 1$ thì phương trình có nghiệm nguyên là $x = 1$ hay $x = -3$.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Tìm số tự nhiên n sao cho các số sau là số chính phương:

a. $n^2 + 2n + 12$

b. $n(n+3)$

c. $n^2 + n + 1589$

Giải

a) Vì $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương nên đặt:

$$n^2 + 2n + 12 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow (n^2 + 2n + 1) + 11 = k^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 - (n + 1)^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow (k + n + 1)(k - n - 1) = 11$$

Nhận xét thấy $k + n + 1 > k - n - 1$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết

$$(k + n + 1)(k - n - 1) = 11.1 \Leftrightarrow \begin{cases} k + n + 1 = 11 \\ k - n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 4 \end{cases}$$

Vậy $n = 4$.

Bài tập 2: Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

Giải

Gọi $A = abcd = k^2$. Nếu thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta có số

$$B = (a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) = m^2,$$

với $k, m \in \mathbb{N}$ và $32 < k < m < 100$; $a, b, c, d \in \mathbb{N}$; $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b, c, d \leq 9$

$$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111$$

$$\Leftrightarrow (m - k)(m + k) = 1111.$$

Xét các trường hợp, kết quả: $A = 2025$, $B = 3136$.

Bài tập 3: Tìm a để $17a + 8$ là số chính phương.

Giải

Giả sử luôn tồn tại $y \in \mathbb{N}$ sao cho: $17a + 8 = y^2$.

Khi đó:

$$\Leftrightarrow 17(a - 1) = y^2 - 25$$

$$\Leftrightarrow 17(a - 1) = (y + 5)(y - 5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 5 : 17 \\ y + 5 : 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = 17n \pm 5$$

$$\Leftrightarrow a = 17n^2 \pm 10n + 1.$$

Bài tập 4: Chứng minh $3^n + 63$ không chính phương, ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0, 4$)

Giải

Xét n lẻ. Đặt: $n = 2k + 1$, ($k \in \mathbb{N}$)

Ta có: $3^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \pmod{4} \equiv -1 \pmod{4}$.

$$63 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 3^{2k+1} + 63 \equiv 2 \pmod{4}$$

$\Rightarrow 3^n + 63$ không chính phương.

Xét n chẵn. Đặt $n = 2k$, ($k \neq 0$).

Vì $y \vdots 3$ nên ta đặt: $y = 3t$, ($t \in \mathbb{N}$)

Khi đó, ta có:

$$3^{2k} + 63 = 9t^2.$$

$$3^{2k-2} + 7 = t^2$$

$$\Rightarrow t^2 - (3^{k-1})^2 = 7$$

$$\Rightarrow (t - 3^{k-1})(t + 3^{k-1}) = 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - 3^{k-1} = 1 \\ t + 3^{k-1} = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 3^{k-1} = 6$$

$$\Rightarrow 3^{k-1} = 3$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$\Rightarrow n = 4$ (trái với giả thiết đề bài)

Vậy $3^n + 63$ không là số chính phương với ($\forall n \neq 0, 4$).

Bài tập 5: Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + 1 = z^2$ có vô số nghiệm nguyên.

Giải

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta chọn $x = 2n^2$; $y = 2n$; $z = 2n^2 + 1$.

Ta có: $x^2 + y^2 + 1 = (2n^2)^2 + (2n)^2 + 1 = (2n^2 + 1)^2 = z^2$.

Do đó phương trình có vô số nghiệm.

Bài tập 6: Cho p là tích của n số nguyên tố đầu tiên ($n > 1$). Chứng minh rằng $p - 1$ không phải là số chính phương.

Giải

Giả sử $p - 1$ là số chính phương. Do p là tích của n số nguyên tố đầu tiên ($n > 1$).

Suy ra: $p \equiv 3 \pmod{4}$. Do đó $p - 1 \equiv -1 \pmod{4}$

Đặt: $p - 1 = 4k - 1$.

Một số chính phương không có dạng $4k - 1$. Từ đây ta có điều mâu thuẫn.

Bài tập 7: Chứng minh $n^7 + 34n + 5$ không chính phương.

Giải

Bỏ đề $x^2 \equiv 1 \pmod{7}$; $i \in \{0; 1; 2; 4\}$

Theo định lý Fermat, ta có: $n^7 \equiv n \pmod{7}$

$\Rightarrow n^7 + 34n + 5 \equiv 35n + 5 \pmod{7}$

$\Rightarrow n^7 + 34n + 5 \equiv 6 \pmod{7}$

Giả sử $n^7 + 34n + 5 = x^2$, $x \in \mathbb{N}$.

Suy ra: $x^2 \equiv 6 \pmod{7}$ (vô lý)

Do đó $n^7 + 34n + 5$ không phải là số chính phương.

Bài tập 8: Cho $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ là những số nguyên dương, không có hai số nào liên tiếp và đặt $S_n = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, $\forall n = 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương, khoảng $[S_n, S_{n+1})$ chứa ít nhất một số chính phương.

Giải

Nhận xét: Khoảng $[S_n, S_{n+1})$ có ít nhất một số chính phương khi và chỉ khi khoảng $[\sqrt{S_n}, \sqrt{S_{n+1}})$ có ít nhất một số nguyên dương, tức là: $\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} \geq 1$.

Ta có:

$$\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow S_{n+1} \geq (\sqrt{S_n} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow S_n + k_{n+1} \geq (\sqrt{S_n} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow k_{n+1} \geq 2\sqrt{S_n} + 1$$

Theo đề bài, ta thấy:

$$k_{n+1} \geq k_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow S_n \leq nk_{n+1} - n(n+1)$$

Ta cần chứng minh:

$$k_{n+1} \geq 2\sqrt{nk_{n+1} - n(n+1)} + 1$$

$$\Leftrightarrow k_{n+1}^2 - 2k_{n+1} + 1 \geq 4nk_{n+1} - 4n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow k_{n+1}^2 - 2(2n+1)k_{n+1} + (2n+1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (k_{n+1} - 2n - 1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng.

Do đó với mọi số nguyên dương n , khoảng $[S_n, S_{n+1})$ chứa ít nhất một số chính phương.

Bài tập 9: Chứng minh rằng với mọi số $k \in \mathbb{N}$ thì số:

$$A = 1 + 9^{2k} + 77^{2k} + 1977^{2k}$$

Không phải là số chính phương.

Giải

Bất kỳ số chính phương nào cũng có dạng $3t$ hoặc $3t + 1$, với $t \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$A = 1 + 9^{2k} + 77^{2k} + 1977^{2k} \text{ có dạng } 3l + 2 \text{ với } l \in \mathbb{N}.$$

Do đó A không phải là số chính phương.

Bài tập 10: Chứng minh rằng với mọi số $m \in \mathbb{N}$ thì số:

$$A = 1 + 9^{2m} + 80^{2m} + 1980^{2m}$$

Có phải là số chính phương không?

Giải

Bất kỳ số chính phương nào cũng có dạng $4n$ hoặc $4n+1$, $n \in \mathbb{N}$

Ta có:

$$A = 1 + 9^{2m} + 80^{2m} + 1980^{2k}$$

Có dạng $4q + 2$, với $q \in \mathbb{N}$.

Suy ra A không là số chính phương.

Bài tập 11: Tích của hai số tự nhiên liên tiếp, của hai số chẵn liên tiếp hoặc 2 số lẻ liên tiếp có thể là số chính phương không?

Giải

Ta chứng minh với hai số tự nhiên liên tiếp:

Ta có:

$$n^2 < n(n+1) < (n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Do đó $n(n+1)$ không chính phương.

Ta chứng minh với hai số chẵn liên tiếp:

Gọi $a = 2k(2k+2)$, với $k \in \mathbb{N}$.

Nhận xét rằng:

$$4k^2 < a < (2k+1)^2$$

Suy ra a không là số chính phương.

Ta chứng minh với hai số lẻ liên tiếp:

Đặt: $b = (2k+1)(2k+3)$, $k \in \mathbb{N}$.

$$(2k+1)^2 < (2k+1)(2k+3) < (2k+3)^2$$

Suy ra b không là số chính phương.

Bài tập 12: Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Giải

a và b là hai số lẻ nên $a^2 = 4l + 1$ và $b^2 = 4m + 1$ với $l, m \in \mathbb{N}$.

Suy ra: $a^2 + b^2 = 4t + 2$, $t \in \mathbb{N}$.

Do đó: $a^2 + b^2$ không thể là số chính phương.

Bài tập 13: Chứng minh rằng tích của 4 số tự nhiên liên tiếp thêm 1 là 1 số chính phương.

Giải

Ta có:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2)$$

$$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1$$

$$= (n^2 + 3n + 1)^2.$$

Đây là một số chính phương. (Đpcm)

Bài tập 14: Tổng bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp có phải là số chính phương không?

Giải

$$\text{Gọi } A = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2$$

$$A = 5n^2 + 20n + 30 = 5(n^2 + 4n + 6)$$

Giả sử A là một số chính phương.

$$\text{Suy ra: } n^2 + 4n + 6 = 5t^2$$

$$\Leftrightarrow (n+2)^2 + 2 = 5t^2$$

$$\Leftrightarrow (n+2)^2 = 5t^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow (n+2)^2 = 5q + 3$$

Điều này vô lý.

Vậy tổng bình phương 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Bài tập 15: Các số: $abab$, $abba$, $abcabc$

Có phải là những số chính phương không?

Giải

Ta có: $\overline{abab} = 101ab$

Do đó $\overline{abab}$ không thể là số chính phương.

$$\overline{abcabc} = 1001abc$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 16: Có số chính phương nào chia hết cho 55 có dạng $\overline{abca}$ không?

Giải

Giả sử tồn tại số chính phương k^2 có dạng $\overline{abca}$ và chia hết cho 55.

Suy ra: $k^2 \div 5$ và $k^2 \div 11$

Mà $(5, 11) = 1$ nên $k^2 \div 55$. Khi đó: $k^2 = 55t, t \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$1000 \leq (55t)^2 = 55m \leq 9999$$

$$\Rightarrow 1000 \leq 3025t^2 \leq 9999$$

$$\Rightarrow 1 \leq t^2 \leq 3.$$

$$\Rightarrow t^2 = 1$$

$$\Rightarrow t = 1.$$

$$\Rightarrow k^2 = 3025 \neq \overline{abca}$$

Vậy không tồn tại số chính phương có dạng $\overline{abca}$ và chia hết cho 55.

Bài tập 17: Tìm số chính phương có dạng $\overline{22ab}$.

Giải

Ta có:

$$2116 < \overline{22ab} < 2304$$

$$\Leftrightarrow 46^2 < \overline{22ab} < 48^2$$

Do đó: Nếu $\overline{22ab}$ là một số chính phương thì $\overline{22ab} = 47^2 = 2209$.

Vậy số chính phương phải tìm là 2209.

Bài tập 18: Tìm số chính phương có 4 chữ số sao cho 3 chữ số đầu hoặc cuối giống nhau.

Giải

1) Giả sử $\overline{abbb}$ là số chính phương. Nếu chữ số hàng đơn vị là số lẻ thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn, do đó b không thể lẻ.

Mặt khác $\overline{abbb}$ chính phương thì b chỉ có thể là 0, 1, 4, 6, 9

Do đó $b = 0, 4, 6$

Nếu $b = 0$ thì $\overline{a000}$ không chính phương.

Nếu $b = 4$ thì $\overline{a444}$ chính phương khi $a = 1$.

Nếu $b = 6$ thì $\overline{a666}$ thì không chính phương.

Ta có 1444 là số chính phương.

2) Không có số chính phương nào có dạng $\overline{aaab}$.

Bài tập 19: Nghiên cứu các số chính phương có các chữ số giống nhau.

Giải

Xem số $A = \overline{aa...aa}$ (n chữ số a)

Suy ra: $A = a.11...11$ (n chữ số 1)

Không có số chính phương nào tận cùng bởi một trong các chữ số: 2, 3, 7, 8

Suy ra: $a \neq 2, 3, 7, 8$

Nếu chữ số hàng đơn vị là chữ số lẻ thì chữ số hàng chục phải là chữ số chẵn.

Suy ra $a \neq 1, 3, 5, 7, 9$

Nếu chữ số hàng đơn vị là 4 hoặc 6 thì chữ số hàng chục phải là chữ số lẻ.

Suy ra $a \neq 4, 6$

Dĩ nhiên $a \neq 0$.

Vậy không có số chính phương nào mà tất cả các chữ số đều giống nhau.

Bài tập 20: Cho số $A = n^4 + 14n^3 + 71n^2 + 154n + 120$, với $n \in \mathbb{N}$.

a) Phân tích A thành nhân tử.

b) Chứng minh rằng A không thể là một số chính phương.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên toán Lê Quý Đôn Nha Trang năm học 1996 - 1997)

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= n^4 + 14n^3 + 71n^2 + 154n + 120 \\ &= (n^4 + 14n^3 + 49n^2) + (22n^2 + 154n) + 120 \\ &= (n^2 + 7n)^2 + 22(n^2 + 7n) + 120 \\ &= (n^2 + 7n + 10)(n^2 + 7n + 12) \\ &= (n + 2)(n + 5)(n + 3)(n + 4) \end{aligned}$$

Vậy $A = (n + 2)(n + 3)(n + 4)(n + 5)$

b) Các bạn làm tương tự bài 11.

Bài tập 21: Cho a và b là 2 số tự nhiên, $a^2 - b^2$ có thể là một số chính phương không?

Giải

Ta có: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Giả sử $a > 0$

Muốn cho $a^2 - b^2$ là một số chính phương, ta chỉ cần chọn:

$$\begin{cases} a + b = du^2 \\ a - b = dv^2, u > v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{d(u^2 + v^2)}{2} \\ b = \frac{d(u^2 - v^2)}{2} \end{cases}$$

Trong đó hoặc d chẵn hoặc u và v cùng tính chất chẵn, lẻ ($u > v$).

Lúc đó, ta có: $a^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

Các nghiệm của phương trình là: $a = d(u^2 + v^2)$, $b = d(u^2 - v^2)$

Vậy $a^2 - b^2$ có thể là một số chính phương.

Bài tập 22:

1) Tìm số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho số $n = \overline{ab} - \overline{ba}$ là một số chính phương.

2) Tìm số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho số $m = \overline{ab} + \overline{ba}$ là một số chính phương.

Giải

1) Ta có: $n = \overline{ab} - \overline{ba} = k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, với $a, b, k \in \mathbb{N}$ và $a \leq 9$, $b \leq 9$, $a \neq 0$.

$$\Leftrightarrow 9(a - b) = k^2$$

Do đó $(a - b)$ là một số chính phương.

Mặt khác, ta có: $a - b \leq 9$.

Do đó ta có: $a - b = 1$ v $a - b = 4$ v $a - b = 9$.

Xét trường hợp $a - b = 1 \Leftrightarrow a = b + 1$.

Có 9 số thỏa: 10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98.

Xét trường hợp $a - b = 4 \Leftrightarrow a = b + 4$ có 6 số thỏa: 40; 51; 62; 73; 84; 95.

Xét trường hợp $a - b = 9 \Leftrightarrow a = b + 9$ có một số duy nhất thỏa là 90.

Vậy có 16 số thỏa mãn yêu cầu.

2) Ta có: $m = \overline{ab} + \overline{ba} = q^2$, $q \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow 11(a + b) = q^2$$

Do đó, ta có: $a + b = 11t^2$, $t \in \mathbb{N}^*$

là một số chính phương.

Giải

Ta có: $n^4 + n^3 + 1 > (n^2)^2$

Do đó: $n^4 + n^3 + 1 = (n^2 + k)^2, k \in \mathbb{N}^*$.

$$\Rightarrow n^2(n - 2k) = k^2 - 1 (*)$$

$$\Rightarrow k^2 - 1 \vdots n^2.$$

$$\text{Suy ra: } k^2 - 1 = 0 \vee k^2 - 1 = n^2$$

$$\text{Với } k^2 - 1 = 0, k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow k = 1$$

$$\Rightarrow n = 2$$

$$q = 5^2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Xét $k \in \mathbb{N}^*, k > 1$. Ta có:

$$n^2 \leq k^2 - 1 < k^2$$

$$\Rightarrow n < k, (*) \text{ vô lý.}$$

Do đó duy nhất có một giá trị của n thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $n = 2$.

Bài tập 26: Tìm số tự nhiên n sao cho $n + 24$ và $n - 65$ là hai số chính phương.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Quốc học Huế năm học 2001 - 2002)

Giải

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} n + 24 = p^2 \\ n - 65 = q^2 \end{cases}, p, q \in \mathbb{N}, p > q$$

$$\Leftrightarrow p^2 - q^2 = 89$$

$$\Leftrightarrow (p + q)(p - q) = 89$$

Ta có: $p, q \in \mathbb{N}$ và $p > q \Rightarrow p + q, p - q \in \mathbb{N}$ và $p + q > p - q > 0$

Do đó, ta có:

$$\begin{cases} p + q = 89 \\ p - q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 45 \\ q = 44 \end{cases} \Rightarrow n = 2001$$

Vậy số tự nhiên phải tìm là $n = 2001$.

Bài tập 27: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^2 + 2002$ là một số chính phương.

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Đại học KHTN - ĐHQG Hà Nội năm học 2002 - 2003)

Giải

Giả sử $n^2 + 2002$ là một số chính phương.

$$n^2 + 2002 = m^2, \text{ với } n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2002$$

$m + n$ và $m - n$ là hai số chẵn.

$$\Rightarrow (m + n)(m - n) \vdots 4 \Rightarrow 2002 \vdots 4, \text{ vô lý.}$$

Vậy không tồn tại số nguyên n để $n^2 + 2002$ là một số chính phương.

Bài tập 28: Thay các dấu (*) bằng các chữ số sao cho số sau là một số tự nhiên:

$$A = \sqrt[6]{4****}$$

Giải

Ta có:

$$A = \sqrt[6]{4****} \Rightarrow A^6 = 4****$$

A^6 có chữ số đầu tiên bên trái là 4.

$$\Rightarrow 10000 \leq A^6 \leq 100000$$

$$\Rightarrow 100 \leq A^3 \leq 317$$

$$\Rightarrow 4 < A < 7$$

A là một số tự nhiên $\Rightarrow A = 5$ hoặc $A = 6$.

Với $A = 5 \Rightarrow A^6 = 15625$, không thỏa

Với $A = 6 \Rightarrow A^6 = 46656$,

Vậy số phải tìm là: $A = \sqrt[6]{46656}$

Bài tập 29: Tìm số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$, với a, b, c, d nguyên và $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$

$\overline{abcd}$ chính phương $\Rightarrow d = 0, 1, 4, 5, 6, 9$

d nguyên tố $\Rightarrow d = 5$.

Đặt: $\overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \leq k \leq 100$.

k là một số có 2 chữ số mà $d = 5$ nên k tận cùng bằng 5.

Tổng các chữ số của k là một số chính phương.

Do đó: $k = 45$ và $\overline{abcd} = 2025$

Vậy số phải tìm là 2025.

Bài tập 30: Tìm một hình vuông có số đo diện tích là một số tự nhiên gồm 4 chữ số mà 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Giải

Số đo diện tích của hình vuông phải tìm có dạng $\overline{aabb}$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$.

$\Rightarrow \overline{abcd} = k^2, k \in \mathbb{N}, 32 \leq k < 100$ (k là cạnh hình vuông)

$\Rightarrow 11(100a + b) = k^2$

Do đó:

$k^2 : 11 \Rightarrow k : \Rightarrow k = 11t$

$\Rightarrow 100a + b = 11t^2$ với $3 \leq t \leq 9$ (1)

$\Rightarrow a + b : 11$ (2)

Với $a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$, ta có:

$1 \leq a + b \leq 18$ (3)

Từ (2) và (3), suy ra: $a + b = 11$

Từ (1), suy ra: $9a + 1 = t^2$

$\Leftrightarrow t^2 - 1 = 9a^2$ (4)

Suy ra: $t^2 - 1 : 9 \Rightarrow (t + 1)(t - 1) : 3$

Vì $(t + 1) - (t - 1) = 2$

Nên $t + 1$ và $t - 1$ không đồng thời chia hết cho 3.

a) Nếu $t + 1 : 3$ thì (4) $\Rightarrow t + 1 : 9$ mà $3 \leq t \leq 9$

$\Rightarrow t + 1 = 9$

$\Rightarrow t = 8 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow b = 4$.

Suy ra $\overline{aabb} = 7744 = 88^2$

b) Nếu $t - 1 : 3$ thì (4) $\Rightarrow t - 1 : 9$ (loại).

Vậy hình vuông phải tìm có cạnh đo được 88 đơn vị.

Bài tập 31: Tìm một số tự nhiên sao cho:

a) Nếu thêm 64 hoặc bớt đi 35 ta đều được một số chính phương.

b) Nếu thêm 51 hoặc bớt đi 38 ta đều được một số chính phương.

Giải

a) Đặt: $A - 35 = k^2$ và $A + 64 = t^2$, với $k, t \in \mathbb{N}$.

Suy ra: $(t + k)(t - k) = 99$

Do đó:

$$\begin{cases} t = 50 \\ k = 49 \end{cases} \vee \begin{cases} t = 18 \\ k = 15 \end{cases} \vee \begin{cases} t = 10 \\ k = 1 \end{cases}$$

Ta tìm được $A = 2436; 260; 36$.

b) Các bạn giải tương tự câu a.

Bài tập 32: Cho A là một số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B . Hãy tìm các số A và B .

Giải

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2 \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N}$$

Với $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a \leq 9$ và $0 \leq b, c, d \leq 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases}$$

Với $k, m \in \mathbb{N}$ và $32 \leq k < m < 100$

$$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111$$

$$\Rightarrow (m+k)(m-k) = 1111 = 101.111$$

Ta có: $0 < m-k < m+k < 200$

Do đó:

$$\begin{cases} m+k=101 \\ m-k=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=56 \\ k=45 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} A=2025 \\ B=3136 \end{cases}$$

Bài tập 33: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm 2 chữ số sau 1 đơn vị.

Giải

Đặt: $\overline{abcd} = k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Ta có: $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ và $32 \leq k < 100$

Suy ra: $101\overline{cd} = k^2 - 100 = (k+10)(k-10)$

$$\Rightarrow (k+10) : 101 \text{ hoặc } (k-10) : 101$$

$$\text{Mà } (k-10, 101) = 1 \Rightarrow k+10 : 101$$

$$42 \leq k+10 < 110$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} k+10=101 \\ k-10=\overline{cd} \end{cases} \Rightarrow \overline{cd} = 81, k=91$$

$$\text{Vậy } \overline{abcd} = 8281 = 91^2$$

Số phải tìm là 8281.

Bài tập 34: Tìm một số chính phương có 3 chữ số và chia hết cho 56.

Giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b, c \leq 9$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} \overline{abc} = k^2, k \in \mathbb{N} \\ \overline{abc} = 56l, l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow k^2 = 56l = 4.14l \quad (1)$$

$$\Rightarrow l = 14q^2, q \in \mathbb{N}$$

$$\text{Mặt khác, ta lại có: } 100 \leq 56l \leq 999 \Rightarrow 2 \leq l \leq 17 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $q = 1$; $l = 14$.

Vậy số chính phương phải tìm là 784.

Bài tập 35: Cho a và b là 2 số chính phương lẻ liên tiếp, chứng minh:

$$\overline{ab} - a - b + 1 : 192$$

Giải

Đặt: $a = (2n-1)^2$ và $b = (2n+1)^2$ với $n \in \mathbb{N}$.

Suy ra:

$$A = 4n(n-1) + 1 \text{ và } b = 4n(n+1) + 1.$$

$$\Rightarrow (a-1)(b-1) = 16n^2(n-1)(n+1)$$

$(n-1)n$ và $(n+1)n$ đều chia hết cho 2 và $(n+1)(n-1)n : 3$

Do đó: $(a-1)(b-1) : 192$ (đpcm)

Bài tập 36: Chứng minh rằng một số chính phương có ước số lẻ và đảo lại.

Giải

Giả sử: $A = \alpha_1^{\beta_1} \cdot \alpha_2^{\beta_2} \dots \alpha_n^{\beta_n}$, với β_i là số tự nhiên và α_i là số nguyên tố và $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Ta có: $(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \dots (\beta_n + 1)$ là số lẻ

Rõ ràng là $\beta_1 + 1, \beta_2 + 1, \dots, \beta_n + 1$ đều là số lẻ nên β_i chẵn.

Vậy A là số chính phương.

Đảo lại: A là số chính phương.

Suy ra: $A = \alpha_1^{2k_1} \cdot \alpha_2^{2k_2} \dots \alpha_n^{2k_n}$, với α_i nguyên tố, $k_i \in \mathbb{N}$ và $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Số ước của A là $(2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \dots (2k_n + 1)$ lẻ

Suy ra đpcm.

Bài tập 37: Cho một số tự nhiên n sao cho $2n = a^2 + b^2$. Chứng tỏ a và b cùng tính chất và n cũng là tổng của 2 bình phương.

Giải

$$a^2 + b^2 = 2n \Rightarrow a^2 + b^2 : 2$$

a^2 và b^2 cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Hay a và b cùng tính chất chẵn lẻ.

Suy ra: a + b và a - b đều chẵn (giả sử $a > b > 0$)

Đặt:

$$a + b = 2x$$

$$a - b = 2y, \text{ với } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra: $a = x + y$ và $b = x - y$

$$\text{Do đó: } 2n = 2(x^2 + y^2)$$

$$\text{Vậy } n = x^2 + y^2, \text{ (đpcm)}$$

Bài tập 38: Tìm những số tự nhiên A sao cho A chia hết cho 359 thì có số dư bằng số thương.

a) Tìm số nhỏ nhất chia hết cho 35.

b) Có số A nào là số chính phương nhỏ nhất không? Có bao nhiêu số A chính phương?

Giải

Đặt: $A = 359q + r$, ($q, r \in \mathbb{N}$, $q = r < 359$), $q \neq 0$.

Vì $q = r$ nên $A = 360q$

$$\text{a) } A : 35 \Rightarrow 360q : 35 \Rightarrow q : 7, q \neq 0.$$

Vì A nhỏ nhất nên $q = 7$.

Ta có: $A = 2520$.

$$\text{b) } A = n^2, (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow 360q = n^2$$

$$\Rightarrow q = 10m^2, (m \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow q = 10 \text{ (A nhỏ nhất)}$$

Ta có: $A = 360$.

$$A = 360q = e^2 \Rightarrow q = 10t^2, (t \in \mathbb{N})$$

Suy ra có 5 số như vậy (vì $q < 359$)

3600, 14400, 32400, 57600, 90000

Bài tập 39: Tìm một số có 4 chữ số biết rằng số đó có 4 ước số, gấp 2 lần ước số đó là một số chính phương và chia hết cho 7 thì dư 4.

Giải

2.abcd chính phương nên $\overline{abcd} = 2^{2m-1}t^{2n}$, t nguyên tố và $m, n \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$2m(2n+1) = 6 \Rightarrow m = 1, n = 1 \Rightarrow \overline{abcd} = 2t^2$$

Ta lại có:

$$\overline{abcd} - 4 : 7 \Rightarrow t^2 = 7k + 2 \Rightarrow t = 7l + 3$$

$$\text{Hoặc } t = 7l + 4, l \in \mathbb{N}$$

$1000 \leq \overline{abcd} < 10000 \Rightarrow 23 \leq t \leq 70$, t nguyên tố và có dạng $7l + 3$ hoặc $7l + 4$.

Suy ra: $t = 31, 53, 59, 67$.

Suy ra: $\overline{abcd} = 1992, 5618, 6962, 8978$

Vậy có 4 số thỏa yêu cầu: 1992, 5618, 6962, 8978.

Bài tập 40: Cho A là một số tự nhiên gồm 100 chữ số, trong đó 99 chữ số 5 và một chữ số khác 5. Chứng minh rằng A không thể là số chính phương.

Giải

Giả sử $A = k^2$, với $k \in \mathbb{N}$

A chỉ có thể tận cùng 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Nếu A tận cùng bằng 5 $\Rightarrow k = 5l, l \in \mathbb{N}$

A lẻ, suy ra k lẻ $\Rightarrow l = 2m + 1$

$\Rightarrow k = 5(2m + 1), m \in \mathbb{N}$.

$A = k^2 = 25(2m + 1)^2 = 100m^2 + 100m + 25$.

Suy ra A tận cùng bởi 25

$A = 555 \dots 500 + 25$

$\Rightarrow m(m + 1)$, vô lý

Lần lượt chứng minh A không thể tận cùng bằng 0, 1, 4, 6, 9.

Do đó A không phải là một số chính phương.

Bài tập 41: Một số gồm 4 chữ số, đọc ngược lại không đổi chia hết cho 5, có thể là một số chính phương không?

Giải

Giả sử A là số chính phương.

$A : 5$ nên A tận cùng là 5 hoặc 0. Loại số 0.

Theo giả thiết, ta có:

$A = 5aa5$

Vì A là số chính phương nên $a = 2$ nhưng số 5225 không phải là số chính phương.

Vậy A không chính phương.

Bài tập 42: Tìm số dư của phép chia của một số chính phương lẻ cho 8.

Áp dụng: Nếu một số chẵn là tổng của hai số bình phương, số dư của phép chia của số ấy cho 8 bằng bao nhiêu? Nếu một số lẻ là tổng của bình phương, số dư của phép chia của số ấy cho 4 bằng bao nhiêu?

Giải

1) x^2 lẻ nên x lẻ

Đặt: $x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$.

Suy ra: $x^2 = 4n(n + 1) + 1$

$\Rightarrow x^2 = 8t + 1, t \in \mathbb{N}$

Do đó số chính phương lẻ chia cho 8 dư 1.

2) Cho $z = 2n = x^2 + y^2$

$\Rightarrow x$ và y cùng tính chất.

a) x và y cũng chẵn.

$x = 2m, y = 2m'$

$z = 4(m^2 + m'^2)$

- Nếu m và m' cùng chẵn.

$m = 2k$ và $m' = 2k'$

$\Rightarrow 16(k^2 + k'^2) = 16p = 8q \Rightarrow \text{đpcm.}$

- Nếu m và m' đều trái tính chất, giả sử:

$m = 2k$ và $m' = 2k' + 1$

$\Rightarrow z = 4[4k^2 + 4k'(k' + 1) + 1] = 16p' + 4 = 8q' + 4 \Rightarrow \text{đpcm.}$

b) Trường hợp x và y cùng lẻ"

$\Rightarrow z = 8l + 2 \Rightarrow \text{đpcm.}$

3) Cho $b = 2a + 1 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow x$ và y cùng trái tính chất chẵn, lẻ.

Giả sử $x = 2m$, $y = 2m' + 1$
 $\Rightarrow b = 4m^2 + 4m'(m' + 1) + 1$
 $\Rightarrow b = 4z + 1$
 $\Rightarrow$ đpcm.

Bài tập 43: Tìm số có hai chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Giải

Số phải tìm có dạng $\overline{ab}$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$
Theo giả thiết, ta có:

$$\overline{ab}^2 = (a+b)^3 \Leftrightarrow (10a+b)^2 = (a+b)^3 \quad (1)$$

Hệ thức (1) chứng tỏ $\overline{ab}$ là một số lập phương.

$$\overline{ab} = t^3, t \in \mathbb{N}$$

Và $(a+b)$ là một số chính phương.

$$a+b = l^2, l \in \mathbb{N}.$$

$$10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27 \text{ hoặc } \overline{ab} = 64$$

$$\overline{ab} = 27 \Rightarrow a+b = 9$$

$$\overline{ab} = 64 \Rightarrow a+b = 10 \neq l^2 \text{ (loại)}$$

Vậy số phải tìm là $\overline{ab} = 27$.

Bài tập 44: Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Giải

Cách 1:

$$\begin{aligned} A &= (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 \\ &= 12n^2 + 12n + 11 \\ &= \overline{aaaa} = 1111a, \quad (\text{vì } a \text{ lẻ và } 1 \leq a \leq 9) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 11(101a-1) = 12n(n+1)$$

$$\Rightarrow 101a-1 \vdots 3$$

$$\text{Mà } 1 \leq 2a-1 \leq 17 \text{ và } 2a-1 \text{ lẻ nên } 2a-1 = 3, 9, 15$$

$$\text{Vì } a \text{ lẻ do đó: } a = 5 \Rightarrow n = 21.$$

Vậy 3 số phải tìm là 41, 43, 45.

Cách 2:

$$\begin{aligned} A &= x^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 \\ &= 3x^2 + 12x + 20 \end{aligned}$$

$$= \overline{aaaa} = 1111a, a \text{ lẻ}$$

$$\Rightarrow 3(x+2) = 1111a-8$$

$$\Rightarrow 1111a-8 \vdots 3$$

$$\Rightarrow a-2 \vdots 3 \Rightarrow a = 5, 8$$

$$\text{Mà } a \text{ lẻ nên } a = 5$$

$$\Rightarrow x = 41$$

Suy ra 3 số phải tìm là 41, 43, 45.

Bài tập 45: Cho $x^2 + 2y$ là một số chính phương với $x, y \in \mathbb{N}$. Chứng minh $x^2 + y$ bằng tổng của 2 số chính phương.

Giải

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x^2 + 2y > x$

Do $x^2 + 2y$ là số chính phương, ta có:

$$x^2 + 2y = (x+t)^2, \text{ với } t \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow 2y = t^2 + x \Rightarrow t = 2k, k \in \mathbb{Z}_+$$

$$\text{Do đó: } 2y = 4k^2 + 4kx \Rightarrow y = 2k^2 + 2kx,$$

$$\Rightarrow x^2 + y = (x+k)^2 + k^2, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 46: Tìm những số nhỏ hơn một triệu chia hết cho 61 và 5 sao cho phần còn lại khi tìm căn

bậc hai của chúng lại bằng nửa giá trị của căn bậc hai đó.

Giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abcdef}$, với a, b, c, d, e, f là những số tự nhiên nhỏ hơn hoặc bằng 9, ít nhất một trong các chữ số a, b, c, d, e, f khác 0.

Theo giả thiết, ta có:

$$\overline{abcdef} = \overline{pqr}^2 + \frac{\overline{pqr}}{2} = \frac{\overline{pqr}(2\overline{pqr} + 1)}{2}$$

$\overline{pqr}$ là căn bậc hai thiếu chưa tới 1 của $\overline{abcdef}$

Theo giả thiết, ta suy ra rằng

$$\overline{abcdef} : 5 \Rightarrow \begin{cases} \overline{pqr} = 5 \\ 2\overline{pqr} + 1 : 5 \end{cases}$$

Do đó $r = 0$ hoặc $r = 2$

$$\overline{abcdef} : 61 \Rightarrow \overline{pqr} : 61$$

Hoặc $2\overline{pqr} + 1 : 61$

$$\text{Xét: } \overline{pqr} : 61 \Rightarrow 100 \leq \overline{pqr} = 61t < 1000, t \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2 \leq t \leq 16$$

Vì $r = 0$ nên t tận cùng bằng 0 $\Rightarrow t = 10$.

Nếu $r = 2$ thì t tận cùng bằng 2 $\Rightarrow t = 2$ hoặc $t = 12$

$$\text{Do đó: } \overline{pqr} = 122, 610, 732$$

Suy ra số phải tìm:

$$\text{Xét: } 2\overline{pqr} + 1 : 61 \Leftrightarrow 2\overline{pqr} + 1 = 61k, k \in \mathbb{N} \text{ và } 1 \leq k \leq 32$$

$\overline{pqr}$ tận cùng là 0 hoặc 2 nên $2\overline{pqr} + 1$ tận cùng bằng 1 hoặc 5.

Do đó:

$$K = 1, 5, 11, 15, 21, 25, 31$$

$$\Rightarrow \overline{pqr} = 30, 152, 335, 457, 640, 762, 945$$

Mặt khác: $r = 0, 2$

$$\Rightarrow \overline{pqr} = 30, 152, 640, 762$$

Suy ra số phải tìm.

Vậy các số phải tìm là 915, 14945, 23180, 372405, 409920, 536190, 581025.

Bài tập 47: Tìm số chính phương có 4 chữ số chia hết cho 33.

Giải

$$\text{Đặt: } abcd = A^2$$

$$A^2 : 33 \Leftrightarrow A^2 : 3, A^2 : 11$$

Suy ra $A : 3$ và $A : 11$

$$\text{Do đó: } A^2 : 9 \text{ và } A^2 : 121$$

$$(121, 9) = 1 \text{ nên } A^2 : 1089$$

$$\text{Hay } A^2 = 1089t^2, t \in \mathbb{N}$$

$$\text{Mặt khác } 1000 \leq abcd \leq 9999 \Rightarrow 1 \leq t^2 \leq 9$$

$$abcd = 1089, 4356, 9801$$

Vậy có ba số thỏa mãn yêu cầu là 1089, 4356, 9801.

Bài tập 48: Tìm số có 4 chữ số vừa là một số chính phương vừa là một số lập phương.

Giải

$$abcd = x^2 = y^3, x, y \in \mathbb{N}$$

Do đó y cũng là một số chính phương.

$$1000 \leq abcd \leq 9999$$

$$\Rightarrow 10 \leq y \leq 21$$

Do y chính phương, suy ra $y = 16$

$$\overline{abcd} = 4096.$$

Vậy có duy nhất một số thỏa yêu cầu là 4096.

Bài tập 49: Tìm 2 số tự nhiên a và b sao cho tích của chúng là một số chính phương và hiệu của chúng là một số nguyên tố p .

Giải

Gọi $d = (a, b)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases} \quad (a, b) = 1$$

$$ab = k^2 \Leftrightarrow d^2 a' b' = k^2 (*)$$

$$\Rightarrow k^2 : d^2 \Rightarrow k : d \Rightarrow k = dk'$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow a' b' = k'^2$$

$$\text{Vì } (a', b') = 1, a' b' = k'^2$$

Nên a' và b' đều là số chính phương.

$$a' = u^2, b' = v^2 \text{ với } (u, v) = 1$$

$$\Rightarrow a = du^2, b = dv^2$$

Mặt khác, ta có:

$$a - b = p \Rightarrow a' - b' = \frac{p}{d}$$

Bài tập 50: Cho $S_1 = 1.2.3$; $S_2 = 2.3.4$; $S_3 = 3.4.5$, ..., $S_n = n(n+1)(n+2)$.

Đặt: $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$. Chứng minh $4S + 1$ là một số chính phương.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 4S &= 4(S_1 + S_2 + \dots + S_n) = 4(1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2)) \\ &= 1.2.3(4-0) + 2.3.4(5-1) + \dots + n(n+1)(n+2)((n+3)-(n-1)) \\ &= 1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } 4S + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

Vậy $4S + 1$ là một số chính phương.

Bài tập 51: Tìm một số có hai chữ số biết rằng nó bằng lập phương của một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó bằng bình phương của một số tự nhiên đó.

Giải

Theo giả thiết, ta có:

$$\overline{ab} = t^3 \text{ và } a + b = t^2, \text{ với } t \in \mathbb{N}.$$

$$1 \leq a + b \leq 18 \Rightarrow 1 \leq t^2 \leq 18$$

$$\Rightarrow 1 \leq t \leq 4$$

$$\overline{ab} \geq 10 \Rightarrow t^3 \geq 10 \Rightarrow t \geq 3 \Rightarrow t = 3 \vee t = 4 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } \overline{ab} = 27.$$

Bài tập 52: Tìm một số có 2 chữ số biết rằng số đó bằng bình phương tổng các chữ số của nó.

Giải

Gọi số phải tìm là: $\overline{ab}$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$

Theo giả thiết, ta có:

$$\overline{ab} = (a + b)^2$$

Một số học sinh nhận xét rằng $\overline{ab}$ là một số chính phương có 2 chữ số. Do đó $\overline{ab}$ chỉ có thể là một trong các số:

$$16, 25, 36, 49, 64, 81$$

Thử thì thấy chỉ có số 81 là thích hợp.

Do đó số phải tìm là số 81.

Suy nghĩ như vậy thì đơn giản quá. Cần phải tìm những cách **Giải** hay hơn.

Bài tập 53: Tìm 3 số sao cho tổng bình phương các số gấp 2 lần tổng các tích của các số đó lấy từng đôi một.

Giải

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow 4xy = (x + y - z)^2$$

Chọn $x = ha^2$

$$y = kb^2, \text{ với } a, b, k \in \mathbb{N}.$$

Giả sử $a > b$

$$\text{Ta có: } z = k(a \pm b)^2$$

Vậy 3 số phải tìm là $ka^2, kb^2, k(a \pm b)^2$, với $k, a, b \in \mathbb{N}$ và $a > b$.

Bài tập 54: Tìm số có hai chữ số sao cho tích của số đó với tổng các chữ số của nó bằng tổng lập phương các chữ số của số đó.

Giải

$$\overline{ab} (a + b) = a^3 + b^3$$

$$\Rightarrow 10a + b = a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$$

$$\Rightarrow 3a(3 + b) = (a + b)(a + b - 1)$$

$a + b$ và $a + b - 1$ nguyên tố cùng nhau.

$$\text{Do đó: } \begin{cases} a + b = 3a \\ a + b - 1 = 3 + b \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a + b = 3 + b \\ a + b - 1 = 3a \end{cases}$$

Suy ra: $a = 4, b = 8$ hoặc $a = 3, b = 7$.

Suy ra: $\overline{ab} = 48$ hoặc $\overline{ab} = 37$

Vậy có 2 số thỏa mãn yêu cầu của bài toán là 37; 48.

Bài tập 55: Tìm một số chính phương có 4 chữ số sao cho số gồm 2 chữ số cuối chia hết cho số gồm 2 chữ số đầu.

Giải

Gọi số chính phương phải tìm là $A^2 = \overline{abcd}$, với $a, b, c, d \in \mathbb{N}$

và $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$.

Theo giả thiết, ta có:

$$\overline{cd} = k \cdot \overline{ab} \text{ do đó: } c \geq 1, \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ và } 1 \leq k \leq 9$$

Ta suy ra:

$$A^2 = 100\overline{ab} + \overline{cd} = (100 + k)\overline{ab}$$

Vì $\overline{ab} < 100$ nên $100 + k$ không thể là số nguyên tố

$$101 \leq 100 + k \leq 109$$

$$\Rightarrow k \neq 1, 3, 7, 9$$

Ta xét lần lượt $k = 2, 4, 5, 6, 8$

Với $k = 2$.

$$\text{Ta có: } A^2 = 102 \cdot \overline{ab} = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot \overline{ab}$$

$$\Rightarrow \overline{ab} = 2 \cdot 3 \cdot 17 t^2, t \in \mathbb{N}$$

Điều này vô lý.

Ta xét tương tự với các số còn lại.

Số phải tìm là $\overline{abcd} = 1296 = 36^2$, (ứng với $k = 8$)

Bài tập 56: Tìm số chính phương có 4 chữ số chia hết cho 147 và tận cùng là 9.

Giải

Gọi số phải tìm là A

$$A : 147 \Rightarrow A : 3$$

A chính phương, 3 nguyên tố nên $A : 9$

$$\Rightarrow A : 441$$

Đặt $A = 441k$, k chính phương.

$$\text{Vì } 1000 \leq 441k \leq 10000$$

$$\Rightarrow 3 \leq k \leq 22$$

Vì A tận cùng là 9 nên k tận cùng là 9, k chính phương, do đó $k = 9$

Suy ra $A = 3969$.

Vậy số phải tìm là 3969.

Bài tập 57: Tìm những số chính phương gồm 4 chữ số tận cùng bởi 2 chữ số bằng nhau và khác 0.

Giải

Không có số chính phương nào tận cùng bởi một trong các chữ số 2, 3, 7, 8.

Do đó ta chỉ xét xem có những số chính phương nào tận cùng bởi 11, 44, 55, 66, 99

Xem số $\overline{ab} = 10a + b$

$$\Rightarrow \overline{ab}^2 = 100a^2 + 10.2ab + b^2$$

Ta suy ra:

- Chữ số hàng đơn vị của số $\overline{ab}^2$ chính là chữ số hàng đơn vị của số b^2 .

- Chữ số hàng chục của số $\overline{ab}^2$ bằng chữ số hàng đơn vị của số $2ab$ cộng với chữ số hàng chục của số b^2 .

Do đó:

- Nếu b lẻ thì chữ số hàng chục của $\overline{ab}^2$ là số chẵn.

$\Rightarrow b$ chỉ có là số chẵn.

Số phải tìm là $1444 = 38^2$; $7744 = 88^2$.

Bài tập 58: Tìm các số chính phương có 5 chữ số và chia hết cho 54.

Giải

$$A^2 : 54 \Rightarrow A^2 : 2 \text{ và } A^2 : 27$$

$$A^2 : 2 \Rightarrow A^2 : 4$$

$$A^2 : 27 \Rightarrow A^2 : 81$$

$$\Rightarrow A^2 : 324 \Rightarrow A^2 : 324t^2, t \in \mathbb{N}$$

$$\text{Mà } 10000 \leq A^2 \leq 99999$$

$$\Rightarrow 6 \leq t \leq 17$$

Suy ra: A^2 .

Bài tập 59: Chứng minh rằng nếu một số chính phương có chữ số hàng đơn vị là chữ số 5 thì chữ số hàng trăm của nó là một chữ số chẵn.

Giải

Số đã cho có dạng $\overline{A5}^2$

$$\text{Ta có: } \overline{A5}^2 = (10A + 5)^2 = 100A^2 + 100A + 25 = 200A(A + 1) + 25$$

Chữ số hàng trăm của số $\overline{A5}^2$ chính là chữ số hàng đơn vị của số $A(A + 1)$ nghĩa là một số chẵn.

Vậy số $\overline{A5}^2$ có chữ số hàng trăm là một số chẵn.

Bài tập 60: Cho số tự nhiên a, chia $[(a - 1)^2 + a^2]^2$ cho $4a^2$. Chứng minh rằng thương và số dư của phép chia là những số chính phương.

Giải

Ta có:

$$[(a - 1)^2 + a^2] = 4a^2(a - 1)^2 + (2a - 1)^2$$

Nếu chia $[(a - 1)^2 + a^2]$ cho $4a^2$, rõ ràng thương số là $(a - 1)^2$ và số dư là $(2a - 1)^2$ vì $(2a - 1)^2 < 4a^2$

Suy ra đpcm.

Bài tập 61: Chứng minh rằng $4n + 3$ không phải là một số chính phương. Suy ra rằng phương trình $x^2 + y^2 = 4n + 3$ không có nghiệm nguyên.

Giải

Số chính phương nào cũng có dạng $4a$ hoặc $4n + 1$

Do đó $4n + 3$ không phải là số chính phương.

Nếu x và y là 2 số tự nhiên bất kỳ thì $x^2 + y^2$ chỉ có thể có một trong ba dạng $4k$, $4k + 1$ hoặc $4k + 2$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 62: Cho các số:

$$A = 11 \dots 11 \text{ (2m chữ số 1)}$$

$$B = 11 \dots 11 \text{ [(2m + 1) chữ số 1]}$$

$$C = 66 \dots 66 \text{ (m chữ số 6)}$$

Chứng minh rằng $A + B + C + 8$ là một số chính phương.

Giải

$$A = 11 \dots 11 = 10^{2m-1} + 10^{2m-2} + \dots + 10 + 1 = \frac{10^{2m} - 1}{9}$$

$$B = 11 \dots 11 = 10^m + 10^{m-1} + \dots + 10 + 1 = \frac{10^{m+1} - 1}{9}$$

$$C = 66 \dots 66 = 6.11 \dots 11 = 6. \frac{10^m - 1}{9}$$

$$\text{Suy ra: } A + B + C = \frac{10^{2m} + 10^{m+1} + 6.10^m + 64}{9} = \left(\frac{10^m + 8}{3} \right)^2 = (33 \dots 336)^2 \text{ [(m - 1) chữ số 3] đpcm.}$$

Bài tập 63: Cho A, B là 2 hợp số: $A = 11 \dots 11$ (2m chữ số 1) và $B = 44 \dots 44$ (m chữ số 4)
Chứng minh $A + B + 1$ là số chính phương.

Giải

Ta có:

$$A = \underbrace{11 \dots 11}_{2n \text{ chữ số } 1} = \frac{10^{2m} - 1}{9}$$

$$B = \underbrace{44 \dots 44}_{m \text{ chữ số } 4} = 4. \frac{10^m - 1}{9}$$

$$\Rightarrow A + B + 1 = \frac{10^{2m} + 4.10^m + 4}{9} = \left(\frac{10^m + 2}{3} \right)^2 = 33.334^2 \text{ (có (m - 1) chữ số 3)}$$

Vậy $A + B + 1$ là số chính phương.

Bài tập 64: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất, $a \neq 0$ sao cho a chia hết cho 6 và $1000a$ là số chính phương.

Giải

Ta có: $a : 6, a \neq 0 \Leftrightarrow a = 6k, k \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Suy ra: } 1000a = 6000k = 2^2.15k$$

$1000a$ là số chính phương khi và chỉ khi

$$K = 15p^2, p \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 90p^2, p \in \mathbb{N}$$

Do đó số tự nhiên a nhỏ nhất phải tìm là $a = 90$.

Bài tập 65: Tìm số tự nhiên b nhỏ nhất sao cho số $(b - 1)$ không chia hết cho 9, b chia hết cho tích bốn số nguyên tố liên tiếp và $2002.b$ là số chính phương.

Giải

$$\text{Ta có: } 2002 = 2.7.11.13$$

$2002.b$ là số chính phương nên ta có:

$$b = 2002k^2, k \in \mathbb{N}^*$$

b chia hết cho bốn số nguyên tố liên tiếp mà b đã chứa ba thừa số nguyên tố liên tiếp là 7, 11 và 13 nên thừa số nguyên tố thứ tư là 5 hoặc 17, b nhỏ nhất nên ta chọn thừa số nguyên tố là 5.

$$\Rightarrow b = 2002.25t^2, t \in \mathbb{N}$$

$$\text{Nếu } t^2 = 1 \Rightarrow b = 50049 \Rightarrow b - 1 = 50049 : 9 \text{ (không thỏa yêu cầu)}$$

$$\text{Nếu } t^2 = 4 \Rightarrow b = 200200 \Rightarrow b - 1 = 200199 \not\vdots 9 \text{ (thỏa yêu cầu bài toán)}$$

Vậy số b phải tìm là $b = 200200$.

Bài tập 66: Tìm số nguyên m và n để cho đa thức:

$$p(x) = x^4 + mx^3 + 29x^2 + nx + 4, x \in \mathbb{Z}$$

là số chính phương.

Giải

$p(x)$ là một đa thức bậc 4 và hệ số của x^4 là 1 nên $p(x)$ chỉ có thể là bình phương đúng của một tam

thức bậc 2 có dạng:

$$\alpha(x) = x^2 + px + q$$

Do đó, ta có:

$$x^4 + mx^3 + 29x^2 + nx + 4 = (x^2 + px + q)^2$$

Sử dụng đồng nhất hệ số ở hai vế ta có: $q = 2$; $p = \pm 5$; $m = \pm 10$; $n = \pm 20$.

Vậy $(m, n) = (10, 20)$; $(-10, -20)$

Bài tập 67: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n + 26$ và $n - 11$ đều bằng lập phương đúng của một số tự nhiên.

Giải

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} n + 26 = p^3 \\ n - 11 = q^3 \end{cases}, \text{ với } p, q \in \mathbb{N} \text{ và } p > q$$

$$\Rightarrow p^3 - q^3 = 37$$

$$\Rightarrow (p - q)(p^2 + pq + q^2) = 37$$

Ta có: $p, q \in \mathbb{N}, p > q \Rightarrow p - q, p^2 + pq + q^2 \in \mathbb{N}^*$

Do đó, ta có:

$$\begin{cases} p - q = 1 \\ p^2 + pq + q^2 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = q + 1 \\ q^2 + q - 12 = 0 \end{cases}$$

$$q \in \mathbb{N} \Rightarrow q = 3 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow n = 38.$$

Vậy số tự nhiên n phải tìm là $n = 38$.

Bài tập 68: Chứng minh rằng có vô số bộ 3 số tự nhiên (a, b, c) sao cho a, b, c nguyên tố cùng nhau và số $n = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ là một số chính phương.

Giải

Chọn 3 số tự nhiên a, b, c nguyên tố cùng nhau và thỏa tính chất.

$$a = b + c$$

Ta có:

$$\begin{aligned} n &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (b + c)^2(b^2 + c^2) + b^2c^2 \\ &= b^4 + c^4 + 3b^2c^2 + 2b^3c + 2bc^3 = (b^2 + c^2 + bc)^2 \end{aligned}$$

Do đó n là một số chính phương.

Có vô số bộ ba số tự nhiên nguyên tố cùng nhau mà một trong 3 số bằng tổng hai số kia.

Thí dụ: $(2, 3, 5) = 1$ và $5 = 2 + 3$

$$\Rightarrow n = 6^2 + 15^2 + 10^2 = 19^2.$$

Bài tập 69: Cho dãy số:

$$a_1 = 14$$

$$a_2 = 144$$

$$a_3 = 1444$$

.....

$$a_n = \underbrace{1444 \dots 44}_{n \text{ chữ số } 4}$$

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho a_n là số chính phương.

Giải

Ta có:

$$a_1 = 14, \text{ không phải là số chính phương.}$$

$$a_2 = 144 = 12^2$$

$$a_3 = 1444 = 38^2$$

Ta hãy xét a_n , với $n \geq 4$

Giả sử a_n là một số chính phương

$$a_n = k^2, k \in \mathbb{N}^*$$

a_n tận cùng là 4444

Số dư của phép chia a_n cho 16 bằng số dư của phép chia 4444 cho 16

$$\Rightarrow a_n = 16q + 12, q \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow k^2 = 16q + 12 (*)$$

Suy ra: $k \vdots 2$ và $k \vdots 4$

$$\Rightarrow k = 2(2t + 1) = 4t + 2$$

$$\Rightarrow k^2 = 16t^2 + 16t + 4 = 16h + 4, \text{ mâu thuẫn } (*)$$

Ta suy ra: a_n , với $n \geq 4$, không phải là số chính phương.

Bài tập 70: Có tồn tại hay không một số tự nhiên n sao cho số:

$$k = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$$

là một số hữu tỉ.

Giải

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $k = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ là một số hữu tỉ.

$$\Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{k}$$

Do đó, ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{n+1} = \frac{1}{2} \left(k + \frac{2}{k} \right) \\ \sqrt{n-1} = \frac{1}{2} \left(k - \frac{2}{k} \right) \end{cases}$$

Ta suy ra $(n+1)$ và $(n-1)$ là hai số chính phương.

$$\begin{cases} n+1 = p^2 \\ n-1 = q^2 \end{cases} \text{ với } p, q \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 = 2 (*)$$

$(p+q)$ và $(p-q)$ cùng tính chất chẵn lẻ.

$$(*) \Rightarrow (p+q)(p-q) \vdots 4 \Rightarrow 2 \vdots 4, \text{ vô lý.}$$

Do đó không có số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu câu bài toán.

Bài tập 71: Ta nói số tự nhiên A là một số "Pitago" nếu A là tổng bình phương của hai số tự nhiên nào đó.

a) Cho P và Q là hai số "Pitago", chứng minh $P \cdot Q$ và $2^n \cdot P$ cũng là các số "Pitago".

b) Tìm các chữ số "Pitago" M và N sao cho tổng và hiệu của chúng không phải là các số "Pitago".

(Đề thi vào lớp 10 Đại học Tổng hợp TP. HCM hệ PTTH Chuyên Toán - Tin học năm 1993 - 1994).

Giải

a) Xem hai số "Pitago" phân biệt P và Q

$$P = a^2 + b^2$$

$$Q = c^2 + d^2$$

Với $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ và $a \neq c$ và $b \neq d$

Ta có:

$$P \cdot Q = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Ta suy ra: PQ là một số "pitago"

Xem số $T = 2^n \cdot P$, $n \in \mathbb{N}$

Xét hai khả năng:

(i) Trường hợp n chẵn: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$\text{Ta có: } T = 2^n \cdot P = 2^{2k}(a^2 + b^2) = (a \cdot 2^k)^2 + (b \cdot 2^k)^2$$

Suy ra: T là một số "Pitago"

(ii) Trường hợp n lẻ: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\text{Ta có: } T = 2^{k+1} \cdot P = 2 \cdot 2^{2k} \cdot P = (1^2 + 1^2) \cdot 2^{2k} \cdot P$$

Suy ra: T là một số "Pitago"

b) Có vô số cặp số "Pitago" M và N mà tổng và hiệu của chúng không phải các số "Pitago"

Thí dụ:

$$M = 3^2 + 5^2 = 34$$

$$N = 2^2 + 7^2 = 53$$

Suy ra: $N + M = 87$ và $N - M = 19$.

Bài tập 72: Chứng minh rằng không tồn tại một số $n \in \mathbb{N}$ để cho ta có thể phân tập hợp.

$$E = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

thành 2 tập con cách biệt sao cho tích các phân tử của tập con này bằng tích các phân tử của tập con kia.

Giải

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để cho ta có thể phân tập hợp.

$$E = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

thành hai tập con cách biệt sao cho tích các phân tử của tập con này bằng tích các phân tử của tập con kia nghĩa là:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) = k^2, \text{ với } k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

E chứa nhiều nhất một số chia hết cho 7, do đó (1) không được nghiệm đúng.

Vậy E không chứa một số nào chia hết cho 7.

Ta giả sử: $n = bs7 + 1$

$$\Rightarrow n+1 = bs7 + 2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Rightarrow n+5 = bs7 + 6$$

$$\Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) = bs7 + 6$$

Nhưng không có số chính phương nào có dạng $7k + 6$

Vậy không tồn tại $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Bài tập 2: Tìm số có 2 chữ số sao cho tích của số đó với tổng các chữ số của nó bằng tổng lập phương các chữ số của số đó.

Bài tập 3: Nếu $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a^2 + b^2}{1 + ab} \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{a^2 + b^2}{1 + ab} \in \mathbb{Z}$ là số chính phương.

Bài tập 4: Tìm tất cả bộ số nguyên dương (x, y, z) sao cho
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1)$$

là số chính phương.

Bài tập 5: Tìm a để $19a + 7$ là số chính phương.

Bài tập 6: Chứng minh rằng $19^{2n} + 5^n + 2000$, ($n \in \mathbb{N}^*$) không phải là số chính phương.

Bài tập 7: Tìm n để tổng bình phương các số từ 1 đến n là số chính phương.

Bài tập 8: Với mọi số nguyên dương n , hãy xác định (phụ thuộc theo n) số tất cả các cặp thứ tự hai số nguyên dương (x, y) sao cho $x^2 - y^2 = 10^2 \cdot 30^{2n}$.

Ngoài ra chứng minh số các cặp này không phải là số chính phương.

Bài tập 9: Cho dãy $\{a_n\}_{n \geq 0}$ là dãy số mà $a_0 = a_1 = 5$ và $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{98}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$\frac{a_n + 1}{6}$ là số chính phương với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập 10: Cho các số:

$$A = 11 \dots 11 \text{ (2m chữ số 1)}$$

$$B = 11 \dots 11 \text{ (m+1 chữ số 1)}$$

$$C = 66 \dots 66 \text{ (m chữ số 6)}$$

Theo các bạn $A + B + C$ có phải là số chính phương hay không?

Bài tập 11: Một số có tổng các chữ số là 2000 có thể là số chính phương hay không?

Bài tập 12: Số $1 + 5^m + 8^n$, với $m, n \in \mathbb{N}$ có thể là số chính phương không?

Bài tập 13: Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

CHỦ ĐỀ 2
SỐ NGUYÊN TỐ

1. Kiến thức cơ bản:

Định nghĩa: Số nguyên tố là những số tự nhiên chỉ có 2 ước là 1 và chính nó.

VD: Các số: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... là những số nguyên tố.

Các số có từ 3 ước số trở lên gọi là hợp số. Một hợp số có ít nhất 2 ước số.

Bất kỳ số tự nhiên nào lớn hơn 1 cũng có ít nhất một ước số nguyên tố.

Một số định lý cơ bản:

Dãy số nguyên tố là dãy số vô hạn (không có số nguyên tố nào là lớn nhất)

Nếu số nguyên tố p chia hết cho số nguyên tố q hoặc số nguyên tố q chia hết cho số nguyên tố p thì $p = q$.

Nếu số nguyên tố p chia hết tích abc thì p chia hết ít nhất một thừa của tích abc :

$$p \text{ nguyên tố} \mid abc \Rightarrow p \mid a \text{ hoặc } p \mid b \text{ hoặc } p \mid c$$

Nếu số nguyên tố p không chia hết a và b thì p không chia hết tích ab .

Cách nhận biết một số nguyên tố:

(i) Chia số đó lần lượt cho các số nguyên tố đã biết từ nhỏ đến lớn

Nếu có một phép chia hết thì số đó không nguyên tố.

Nếu chia đến lúc thương nhỏ hơn số chia mà các phép chia vẫn có số dư thì số đó là số nguyên tố.

(ii) Một số có hai ước số lớn hơn 2 thì số đó không phải là số nguyên tố.

Phân tích một số tự nhiên thành thừa số nguyên tố - dạng tiêu chuẩn:

$$A = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot \dots \cdot c^\gamma$$

a, b, c là những số nguyên tố.

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ và $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$

Số các ước số và tổng các ước số của một số:

Giả sử $A = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot \dots \cdot c^\gamma$, với a, b, c là những số nguyên tố. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ và $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$.

(i) Tập các ước của A là $U(A) = \{d \in \mathbb{N} \mid d = a^{\alpha'} \cdot b^{\beta'} \cdot \dots \cdot c^{\gamma'}\}$

Với $\alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{N}$ và $\alpha \leq \alpha', \beta \leq \beta', \gamma \leq \gamma'$

Số các ước của A là số phần tử của tập hợp $U(A)$.

(ii) Tổng các ước của A :

$$\delta(A) = \sum d \mid A = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \dots \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1}$$

Số nguyên tố cùng nhau:

Hai số nguyên tố được gọi là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng có một ước số chung duy nhất là 1, nghĩa là chúng có ước số chung lớn nhất bằng 1.

$$a, b \text{ nguyên tố cùng nhau} \Leftrightarrow (a, b) = 1$$

Hai số tự nhiên liên tiếp thì nguyên tố cùng nhau.

Hai số nguyên tố thì luôn luôn nguyên tố cùng nhau.

Các số abc nguyên tố cùng nhau $\Leftrightarrow (a, b, c) = 1$

a, b, c nguyên tố đôi khi chúng đôi một nguyên tố cùng nhau.

$$(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$$

Chú ý: 3 số nguyên tố đôi khi chúng đôi một nguyên tố cùng nhau:

$$(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1 \Rightarrow (a, b, c) = 1$$

Đảo lại không đúng.

Ba số a, b, c nguyên tố cùng nhau thì chưa chắc cùng nguyên tố đôi.

Dạng tổng quát của số nguyên tố:

Hiện nay chưa có:

Nhà toán học Fermat (Fecma) cho rằng số:

$$(2^{2^n} + 1) \text{ là số nguyên tố, } \forall n \in \mathbb{N}$$

Nhưng Euler (Ôle) chỉ ra rằng số:

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297, \text{ (với } n = 5 \text{ là một hợp số)}$$

$$2^{2^5} + 1 = 641.6\,700\,471$$

Trong phạm vi từ 1 đến 10 000 000, có 664 580 số nguyên tố. (D.N Lème)

Trong khoảng từ 1 đến 1 000 000 000, có 50 847 479 số nguyên tố. (Craisit)

Số nguyên tố Mecxen: Số nguyên tố có dạng: $2^p - 1$:

$$M_p = 2^p - 1$$

Số nguyên tố Mecxen lớn nhất tìm ra năm 1978 do hai học sinh Mỹ là Nickel và Noll là số:

$$M_{21701} = 2^{21701} - 1 \text{ gồm } 6533 \text{ chữ số.}$$

Năm 1992: AEA technology's Harwell Laboratory phát hiện số nguyên tố gồm có 227832 chữ số.

Năm 1994: Cra Research loan báo phát hiện số nguyên tố

$$M_{859\,433} = 2^{859\,433} - 1$$

gồm 258 716 chữ số, cần đến 8 trang báo mới in hết.

- Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng $4n + 1$ hoặc $4n + 3$, với $n \in \mathbb{N}$.

- Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $6n + 1$ hoặc $6n + 5$, với $n \in \mathbb{N}$.

Một số định lý đặc biệt:

(1) Định lý Dirichlet:

Nếu a và b nguyên tố cùng nhau thì tồn tại vô số nguyên tố p có dạng:

$$p = an + b, n \in \mathbb{N}$$

(2) Định lý Tchebycheff:

Trong khoảng từ số tự nhiên n đến số tự nhiên $2n$, có ít nhất một số nguyên tố.

(3) Định lý Vinogradov:

Mọi số lẻ lớn hơn $3^{3^{15}}$ là tổng của 3 số nguyên tố.

2 Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $a + b = p$, p là một số nguyên tố. Chứng minh a và b nguyên tố cùng nhau.

Giải

Giả sử a và b không nguyên tố cùng nhau. Ta suy ra a và b có ít nhất một ước số $d > 1$.

$$a : d \text{ và } b : d$$

$$\Rightarrow a + b : d$$

$$\Rightarrow p : d, d > 1$$

Điều này vô lý, vì p là một số nguyên tố $\Rightarrow (a, b) = 1$.

Bài tập 2: Nếu $a^2 - b^2$ là một số nguyên tố thì $a^2 - b^2 = a + b$.

Giải

$$\text{Ta có: } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\text{Nếu } a - b > 1 \text{ thì } a + b > 1$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 \text{ là một hợp số, trái với giả thiết.}$$

$$\text{Do đó, ta có: } a - b \leq 1 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } a^2 - b^2 \text{ là số nguyên tố.}$$

$$\Rightarrow a > b$$

$$\Rightarrow a - b > 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } a - b = 1$$

$$\text{Vậy } a^2 - b^2 = a + b.$$

Bài tập 3: Chứng minh tổng bình phương của 3 số nguyên tố lớn hơn 3 không thể là một số nguyên tố.

Giải

Số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng:

$$6k \pm 1, k \in \mathbb{N} \text{ và } k \geq 1 \text{ nên bình phương của chúng có dạng: } 6m + 1, m \in \mathbb{N}.$$

Do đó tổng bình phương của 3 số nguyên tố là:

$$6n + 3 : 3, n > 1$$

Điều này chứng tỏ tổng bình phương của 3 số nguyên tố lớn hơn 3 là một hợp số (đpcm).

Bài tập 4: Một số nguyên tố lớn hơn 3 có một trong các dạng $6n + 1$ hoặc $6n - 1$. Chứng minh rằng có vô số nguyên tố có dạng thứ hai.

Giải

Gọi p là 1 số nguyên tố có dạng $6n - 1$. Ta chứng minh có 1 số nguyên tố p' có dạng này và $p' > p$.
Gọi p là tích các số nguyên tố đầu tiên từ 2 đến p .

$$P = 2, 3, \dots, p \Rightarrow P:6 \Rightarrow P = 6n$$

Đặt: $A = P - 1 \Rightarrow A > p$ và A có dạng $6n - 1$, n tự nhiên.

Nếu A là số nguyên tố: Bài toán đã **Giải** xong.

Nếu A là hợp số thì A có 1 ước nguyên tố $p' > p$ vì nếu $p' \leq p$ thì p' sẽ là một thừa của p .

$\Rightarrow p'|p \Rightarrow p'|1$ Vô lý.

Mặt khác p' có dạng $6n - 1$. Thật vậy, nếu A không có một ước nguyên tố dạng $6n - 1$ thì mọi ước nguyên tố của A đều có dạng $6n + 1$ và như vậy A có dạng $6n + 1$, vô lý vì trái với điều ta đã biết là A có dạng $6n - 1$.

Do đó p' là số nguyên tố có dạng $6n - 1$ và lớn hơn p .

Vậy có vô số số nguyên tố có dạng $6n - 1$.

Bài tập 5: Cho 2 số nguyên tố phân biệt a và b , với $a < b$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số tự nhiên n sao cho các số $a + n$ và $b + n$ nguyên tố cùng nhau.

Giải

Chọn một số tự nhiên: $k > \frac{a}{b-a}$

$\Rightarrow n_k = (b - a)k - a + 1$ sẽ là một số tự nhiên lớn hơn 1.

Xem các số: $A = a + n_k = (b - a)k + 1$

$$B = b + n_k = (b - a)(k + 1) + 1$$

Nếu $d = (A, B) \Rightarrow d|B - A$

$$\Rightarrow d|b - a \text{ và } d|A - (b - a)k =$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Do đó $(A, B) = 1$

Ta cho k các giá trị $k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$, trong đó $k_0 \in \mathbb{N}$ và $k_0 > \frac{a}{b-a}$, ta có vô hạn số tự nhiên n có dạng n_k sao cho:

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (a + n, b + n) = 1.$$

Bài tập 6: Cho số tự nhiên $n \geq 2$. Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n$ là những số nguyên tố sao cho $p_n \leq n + 1$.

Đặt: $A = p_1 p_2 \dots p_n$

a) Chứng minh rằng trong các dãy số các số tự nhiên liên tiếp: $A + 2, A + 3, \dots, A + (n + 1)$ không chứa một số nguyên tố nào.

b) Chứng minh rằng có vô số dãy số gồm n số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

Hãy viết số hạng đầu và số hạng cuối của hai dãy số như vậy, mỗi dãy có 10 số hạng.

Giải

a) Ta hãy xem số hạng $A + m$, với $m \in \mathbb{N}$ và $2 \leq m \leq n + 1$, của dãy số đã cho.

Nếu m là số nguyên tố thì m chia hết tích $p_1 p_2 \dots p_n = A$.

$$\Rightarrow A + m : m$$

$\Rightarrow (A + m)$ không nguyên tố

Nếu m là hợp số thì m ắt có ít nhất 1 ước nguyên tố d :

$$d|m \Rightarrow d|A \Rightarrow d|A + m \Rightarrow (A + m) \text{ không nguyên tố.}$$

Vậy trong dãy số đã cho, không có số hạng nào là số nguyên tố cả.

b) Dãy số đã cho: $A + 2, A + 3, \dots, A + (n + 1)$

gồm n số tự nhiên liên tiếp không nguyên tố.

Ta suy ra có vô số dãy số gồm n số tự nhiên liên tiếp không nguyên tố, có dạng:

$$kA + 2, kA + 3, \dots, kA + (n + 1), \text{ với } k \in \mathbb{N}, \text{ tùy ý.}$$

Với $n = 10$.

$$\Rightarrow A = 2.3.5.7.11 = 2.310$$

Dãy số $2310k + 2, 2310k + 3, \dots, 2310k + 11$, với $k \in \mathbb{N}$, tùy ý và $k \geq 0$

Chọn $k = 1$ và $k = 2$, ta có:

* 2312, ..., 2321

* 4622, ..., 4631

Suy ra đpcm.

Bài tập 7: Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng.

Giải

Gọi 3 số nguyên tố đó là a, b, c

Ta có: $abc = 5(a + b + c) \Rightarrow 5|abc$

a, b và c bình đẳng. Giả sử $5|a$ và a là số nguyên tố nên $a = 5$.

Suy ra: $bc = 5 + bc \Rightarrow (b - 1)(c - 1) = 6$

Do đó:

$$\begin{cases} b-1=1 \\ c-1=6 \end{cases} \vee \begin{cases} b-1=2 \\ c-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=7 \end{cases} \vee \begin{cases} b=3 \\ c=4 \end{cases} \text{ (loại)} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=7 \end{cases}$$

Vậy 3 số nguyên tố phải tìm là 2, 5, 7.

Bài tập 8: Chứng minh điều kiện cần và đủ để p và $8p^2 + 1$ nguyên tố là $p = 3$.

Giải

Điều kiện đủ: $p = 3 \Rightarrow 8p^2 + 1 = 73$, nguyên tố.

Điều kiện cần: Nếu $p = 3n \pm 1$

$\Rightarrow 8p^2 + 1 = 3k$: 3 không phải là số nguyên tố nên

$p = 3h$ và p nguyên tố $\Rightarrow p = 3$.

Vậy ta có điều phải chứng minh: $p = 3$.

Bài tập 9: Cho m và $m^2 + 2$ là hai số nguyên tố. Chứng minh rằng $m^3 + 2$ cũng là một số nguyên tố.

Giải

m và $m^2 + 2$ nguyên tố $\Rightarrow m = 3$

$\Rightarrow m^2 + 2 = 11$, nguyên tố.

Ta có:

$m^3 + 2 = 29$, nguyên tố.

Vậy m, $m^2 + 2$ nguyên tố $\Rightarrow m^3 + 2$ nguyên tố.

Bài tập 10: Chứng minh rằng có vô số số nguyên dương a sao cho $z = n^4 + a$ không phải là số nguyên tố, với $n \in \mathbb{N}$.

Giải

Chọn $a = 4b^2$, với $b \in \mathbb{N}$.

Ta có: $z = n^4 + 4b^4$

$$\Leftrightarrow z = n^4 + 4b^4 + 4n^2b^2 - 4n^2b^2 = [(n + b)^2 + b^2][(n - b)^2 + b^2]$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 11: Cho $2^n + 1$ là một số nguyên tố. Chứng minh n là một lũy thừa của 2.

Giải

Nếu n có một ước nguyên tố khác 2 thì ước số ấy lẻ và có dạng $2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Do đó: $n = p(2k + 1)$

Ta có:

$$2^n + 1 = (2^p)^{2k+1} = (2^p + 1) \left[\sum_{i=1}^k 2^{pi} - \sum_{i=1}^k 2^{p(i-1)} \right], \text{ không nguyên tố, vô lý.}$$

Do đó n không có một ước nguyên tố nào khác 2.

Vậy n là một lũy thừa của 2.

Chú ý điều ngược lại không đúng, khi $n = 2^5$ thì

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417 \text{ không nguyên tố.}$$

Bài tập 12: Cho p nguyên tố cùng nhau với 5. Chứng minh:

$$A = p^{8n} + 3p^{4n} - 4 : 5$$

Giải

p nguyên tố cùng nhau với 5, do đó p có dạng $5k + 1$ hoặc $5k \pm 2$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$,

Nếu $p = 5k + 1$ thì $p^2 = 5t + 1$, $t \in \mathbb{N}$, $t > 0$

$$A = p^{8n} + 3p^{4n} - 4 = (p^2)^{4n} + 3(p^2)^{2n} - 4 = 5l + 1 + 5l' + 3 - 4 = 5q : 5$$

Với $l, l', q \in \mathbb{N}$

Nếu $p = 5k \pm 2$ thì $p^2 = 5h + 4$

$\Rightarrow p^4 = 5i + 1$, với $h, i \in \mathbb{N}$.

Suy ra: $A = (p^4)^{2n} - 3(p^4)^n - 4 = 5q' : 5, q' \in \mathbb{N}$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 13: Cho một số x trong một hệ thống nào đó, gồm n chữ số 1. Chứng minh rằng nếu n không nguyên tố thì x không nguyên tố.

Giải

Gọi a là cơ số của hệ đếm, ta có:

$$x = \underbrace{11\dots 11}_{n \text{ chữ số } 1} = a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1 = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Nếu n không nguyên tố, ta đặt: $n = pq$, với $p, q \in \mathbb{N}$ và $p, q > 1$

Ta có:

$$x = \frac{a^{pq} - 1}{a - 1} = \frac{a^{pq-1}}{a^p - 1} \cdot \frac{a^p - 1}{a - 1}$$

$$x = \frac{a^p - 1}{a - 1} \left[a^{p(q-1)} + a^{p(q-2)} + \dots + 1 \right]$$

$$x = (a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + 1) \left[a^{p(q-1)} + a^{p(q-2)} + \dots + 1 \right]$$

Các thừa đều nguyên và lớn hơn 1, do đó x không nguyên tố (đpcm).

Bài tập 14: Chứng minh rằng nếu số $\overline{abc}$ nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không phải là một số chính phương.

Giải

Giả sử $b^2 - 4ac$ là một số chính phương:

Đặt: $b^2 - 4ac = k^2$, với $k \in \mathbb{N} \Rightarrow b > k$

Ta có:

$$4a \cdot \overline{abc} = 400a^2 + 40ab + 4ac = (20a + b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a + b + k)(20a + b - k)$$

Do đó: $(20a + b + k)(20a + b - k) : abc$

Suy ra: $20a + b + k : abc$ hoặc $20a + b - k : abc$ (1)

Mà $\overline{abc} = 100a + 10b + c > 20a + 2b + k > 20a + b + k > 20a + b - k$, (vì $b > k$)

Do đó (1) vô lý.

Vậy $b^2 - 4ac$ không phải là số chính phương.

Bài tập 15: Cho p và $2p + 1$ là hai số nguyên tố với $p > 3$. Chứng minh $4p + 1$ là hợp số.

Giải

p nguyên tố và $p > 3$ nên p có dạng $6n + 1$ hoặc $6n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 1$.

Nếu $p = 6n + 1$ thì $2p + 1 = 12n + 3 : 3$ trái với giả thiết, do đó $p \neq 6n + 1$

Suy ra p có dạng $6n - 1$

Ta có: $2p + 1 = 12n - 1$

$$4p + 1 = 24n - 3 : 3$$

Vậy $4p + 1$ là hợp số.

Bài tập 16: Cho số nguyên tố p . Có bao nhiêu số nguyên tố cùng nhau với p^3 mà nhỏ hơn p .

Giải

Số nguyên tố cùng nhau với p^3 thì sẽ nguyên tố cùng nhau với p .

Vì p là số nguyên tố nên có $(p - 1)$ số nguyên tố cùng nhau với p^3 mà nhỏ hơn p là $2, 3, \dots, (p - 1)$

Bài tập 17: Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được 2004 số liên tiếp nhau mà không có số nguyên tố nào hay không?

Giải

Xét dãy số sau:

$$a_2 = 2005! + 2$$

$$a_3 = 2005! + 3$$

.....

$$a_{2005} = 2005! + 2005$$

Dãy số này gồm có 2004 số hạng là những số tự nhiên liên tiếp nhau và đều là hợp số, là dãy số mà ta phải tìm.

Bài tập 18: Tìm hai số nguyên tố p và q sao cho $p^2 = 8q + 1$

Giải

$$p^2 = 8q + 1 \Leftrightarrow (p + 1)(p - 1) = 8q$$

$$8q + 1 \text{ lẻ} \Rightarrow p^2 \text{ lẻ} \Rightarrow p = 2k + 1$$

$$\text{Do đó: } k(k + 1) = 2q$$

Suy ra p có dạng $4t + 1$ hoặc $4t - 1$ và q có dạng $t(2t + 1)$ hoặc $t(2t - 1)$

p và q nguyên tố $\Rightarrow p = 5, q = 3$

Vậy $p = 5; q = 3$.

Bài tập 19: Tìm số a nguyên tố sao cho $a + 10, a + 14$ đều là những số nguyên tố.

Giải

Bất kỳ số tự nhiên nào cũng có 1 trong các dạng: $3k, 3k + 1$ hoặc $3k + 2, k \in \mathbb{N}$.

Nếu $a = 3k + 1$ thì $a + 14$ không nguyên tố, trái với giả thiết.

Nếu $a = 3k + 2$ thì $a + 10$ không nguyên tố, trái với giả thiết.

Do đó: $a = 3k$.

Mà a nguyên tố nên $a = 3$.

$\Rightarrow a + 10 = 13$ nguyên tố và $a + 14 = 17$ nguyên tố.

Vậy $a = 3$.

Bài tập 20: Tìm số b nguyên tố sao cho $b + 6, b + 14, b + 12$ và $b + 8$ đều là số nguyên tố.

Giải

Bất kỳ số tự nhiên b nào cũng có một trong các dạng: $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$, với $k \in \mathbb{N}$.

Nếu $b = 5k + 1$ thì $b + 14 = 5k + 15 = 5$, không nguyên tố.

Nếu $b = 5k + 2$ thì $b + 8 = 5k + 10 = 5$, không nguyên tố.

Nếu $b = 5k + 3$ thì $b + 12 = 5k + 15 = 5$, không nguyên tố.

Nếu $b = 5k + 4$ thì $b + 6 = 5k + 10 = 5$, không nguyên tố.

Do đó $b = 5k$ mà b nguyên tố $\Rightarrow b = 5$.

Ta suy ra:

$$b + 6 = 11$$

$$b + 8 = 13$$

$$b + 12 = 17$$

$$b + 14 = 19$$

đều là số nguyên tố.

Vậy $b = 5$.

Bài tập 21: Chứng minh rằng:

a) Nếu $a^n - 1$ nguyên tố thì $a = 2$ (với $n \in \mathbb{Z}_+$ và $n > 1$)

b) Nếu n là hợp số, $a^n - 1$ không nguyên tố, ($a \geq 2$)

c) Nếu p nguyên tố, $2^p - 1$ luôn luôn là một số nguyên tố hay không?

Giải

$$\text{a) } a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

$$a^n - 1 \text{ nguyên tố} \Rightarrow (a - 1) = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{b) } n \text{ là hợp số} \Rightarrow n = pq, \text{ với } p, q \in \mathbb{N} \text{ và } p, q > 1$$

$$a^n - 1 = a^{pq} - 1 = (a^p)^q - 1 = (a^p - 1)(a^{p(q-1)} + \dots + 1)$$

$$a \geq 2 \Rightarrow a^p > 2 \Rightarrow a^p - 1 > 1$$

Do đó: $a^n - 1$ không nguyên tố $\Rightarrow$ đpcm.

c) Không:

Khi $p = 2, 3, 5, 7$ thì $2^p - 1$ là số nguyên tố.

Khi $p = 257$ thì $2^p - 1$ không nguyên tố.

Bài tập 22: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố thì:

$$(p|1806) \Leftrightarrow (p - 1|1806)$$

Giải

Ta phân tích: $1806 = 42.43 = 2.3.301$

p nguyên tố và chia hết 1806 thì $p = 43, 7, 3$.

Suy ra: $p - 1 = 42, 6, 2$

Do đó: $p - 1 \mid 1806$.

Bài tập 23: Số $a^4 + a^2 + 1$ có thể là một số nguyên tố hay không?

Giải

Ta có: $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

$a^2 + a + 1 > 1$ với $a \neq 0$

Do đó: $a^4 + a^2 + 1$ là một số nguyên tố khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 - a + 1 = 1 \\ a \in \mathbb{N}, a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

Giá trị $a = 1$ thỏa mãn.

Vậy $a = 1$.

Bài tập 24: Chứng minh rằng $(p - 1)$ chia hết cho p nếu p là hợp số và không chia hết cho p nếu p là nguyên tố.

Giải

Nếu p là hợp số thì $(p - 1)!$ là tích các thừa số nguyên tố nhỏ hơn p và số mũ của các thừa số này cũng bằng số mũ của chính các thừa số ấy chứa trong $(p - 1)!$

Do đó $(p - 1)!$ Chia hết cho p .

Nếu p là số nguyên tố và vì $p > p - 1$ nên p nguyên tố cùng nhau với mọi thừa số của $(p - 1)!$

Do đó $(p - 1)!$ không chia hết cho p (đpcm).

Bài tập 25: Tìm số nguyên tố a sao cho $2a + 1$ là một lập phương.

Giải

Giả sử: $2a + 1 = t^3$, với $t \in \mathbb{N}, t > 1$.

$t^2 + t + 1 > 2$, a nguyên tố.

Do đó: $t - 1 = 2$

Suy ra: $t = 3$

Vậy $a = 13$.

Bài tập 26: Cho $2^m - 1$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng m nguyên tố.

Giải

Giả sử m là hợp số.

$\Leftrightarrow m = pq$, với $p, q \in \mathbb{N}$ và $p, q > 1$

Ta có: $2^m - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)[2^{p(q-1)} + \dots + 1]$

Vì $p > 1 \Rightarrow 2^p - 1 > 1$

Và $2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \dots + 1 > 1$

Suy ra: $2^m - 1$ là một hợp số, mâu thuẫn với giả thiết.

Khi $m = 1 \Rightarrow 2^m - 1 = 1$, (loại)

$\Rightarrow m$ là số nguyên tố.

Vậy $2^m - 1$ nguyên tố $\Rightarrow m$ nguyên tố.

Bài tập 27: Cho $m \in \mathbb{N}$. Chứng minh $m^4 + 4$ và $m^4 + m^2 + 1$ đều là hợp số ($m > 1$)

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} m^4 + 4 &= (m^2 + 2m + 2)(m^2 - 2m + 2), \text{ với } m \in \mathbb{N}, m > 1. \\ &= [(m + 1)^2 + 1][(m - 1)^2 + 1] \end{aligned}$$

Suy ra: $m^4 + 4$ là hợp số.

$m^4 + m^2 + 1$ là hợp số với $m \in \mathbb{N}$ và $m > 1$

(HS tự chứng minh)

Bài tập 28: Chứng minh các số $p + 1$ và $p - 1$ không phải là số chính phương nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên.

Giải

Cách 1:

Gọi p là tích của n số nguyên tố đầu tiên.

$$p = p_1 p_2 \dots p_n$$

Trong đó p_i là số nguyên tố thứ i ($i = 1, 2, \dots, n$) và $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$

Nếu $p + 1$ là số chính phương.

$$p + 1 = t^2, t \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow p = t^2 - 1$$

p chẵn nên t lẻ và $t^2 - 1$ là tích của 2 số chẵn.

Do đó: $p \vdots 4$, vô lí vì p chỉ chứa một thừa số chẵn duy nhất là 2 mà thôi.

Vậy $p + 1$ không phải là một số chính phương.

Cách 2:

$$p = 2.3.5 \dots p_n \Rightarrow p \vdots 2 \text{ và } p \not\vdots 4$$

Do đó: p có dạng $4k + 2, k \in \mathbb{N}$.

Ta suy ra: $p + 1$ không phải số chính phương.

HS tự giải với trường hợp $(p - 1)$.

Bài tập 29: Chứng minh rằng $m^2 - n^2$ nguyên tố thì m và n là 2 số tự nhiên liên tiếp.

Giải

Ta có: $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$, với $m, n \in \mathbb{N}$ và $m > n$.

Vì $m^2 - n^2$ là số nguyên tố và $m + n > m - n$

Nên $m - n = 1$

Vậy m và n là hai số tự nhiên liên tiếp.

Bài tập 30: Tổng của p ($p \geq 2$) số lẻ liên tiếp có phải là một số nguyên tố không?

Giải

Xem p số lẻ sau: $2n + 1, 2n + 3, \dots, 2n + 2p - 1, n \in \mathbb{N}$.

Tổng số của các số này là: $S = (2n + 1) + (2n + 3) + \dots + (2n + 2p - 1)$

$$\Leftrightarrow S = p(2n + p), \text{ với } p \geq 2, S \text{ là một hợp số.}$$

Vậy tổng của p số lẻ liên tiếp, $p \geq 2$ không phải là số nguyên tố.

Bài tập 31: Cho 4 số tự nhiên a, b, a', b' và p nguyên tố cùng nhau với a . Chứng minh rằng nếu $ab - a'b'$ và $a - a'$ chia hết cho p thì $b - b'$ chia hết cho p .

Giải

$$a - a' \vdots p \Leftrightarrow a' = a + kp, k \in \mathbb{Z}.$$

$$ab - a'b' \vdots p \Rightarrow ab - (a + kp)b' \vdots p$$

$$\text{Suy ra: } a(b - b') \vdots p$$

$$\text{Mà } (a, p) = 1$$

$$\text{Do đó: } b - b' \vdots p \text{ (đpcm)}$$

Bài tập 32: Cho $A = m + n$ và $B = m^2 + n^2$, trong đó m và n là những số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Tìm ước số chung lớn nhất của A và B .

Giải

$$\text{Gọi } d = (A, B)$$

$$\Rightarrow d \mid A; d \mid B$$

$$\Rightarrow d \mid A^2 - B^2 = 2mn.$$

Do đó d là ước số chung của $m + n$ và $2mn$.

Vì $(m, n) = 1$ nên $(m + n, mn) = 1$.

Suy ra d là ước số chung của $(m + n)$ và 2 nên ta có:

$$d = 1 \vee d = 2$$

a) Nếu m và n cùng lẻ

$$\Rightarrow A, B \text{ cùng chẵn.}$$

$$\Rightarrow (A, B) = 2$$

b) Nếu m, n trái tính chất.

$$\Rightarrow A, B \text{ cùng lẻ}$$

$$\Rightarrow (A, B) = 1$$

Vậy: Khi m, n cùng lẻ $(A, B) = 2$

Khi m, n trái tính chất: $(A, B) = 1$.

Bài tập 33: Tìm số có 4 chữ số $\overline{abcd}$ biết rằng:

$$\overline{abcd} = (5c + 1)^2$$

Giải

$$abcd = (5c + 1)^2 = 25c^2 + 10c + 1 \Rightarrow a = 1$$

Do đó:

$$40 + 4b = c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 4.1b$$

$\Rightarrow 1b$ chính phương.

$$\Rightarrow b = 6; b = 8$$

$\Rightarrow$ Số phải tìm là 1681

$$1681 = 41^2 = (5.8 + 1)^2$$

Bài tập 34: Chứng minh $2n + 1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ nguyên tố cùng nhau.

Giải

$n(n+1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp và $2n+1$ là tổng của hai số đó.

Hai số tự nhiên liên tiếp nguyên tố cùng nhau nên tổng và tích của chúng cũng nguyên tố cùng nhau:

$$(n, n+1) = 1 \Rightarrow (2n+1, n(n+1)) = 1$$

Do đó, ta có: $2n+1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ nguyên tố cùng nhau.

Bài tập 35: Cho $A = 2^n + 3^n$, $B = 2^{n+1} + 3^{n+1}$, $C = 2^{n+2} + 3^{n+2}$

a) Chứng minh A và B nguyên tố cùng nhau.

b) Ước số chung lớn nhất của A và C có thể là bao nhiêu?

Giải

a) Ta có: $B - 2A = 3^n$

Nếu A và B có ước số chung $d \neq 1$ thì d chia hết cho 3^n và 2^n (vô lý)

Suy ra đpcm.

b) Ta có: $C - 4A = 5.3^n$

Điều này chứng tỏ $\text{USCLN}(A, C) = 5$ hoặc 1.

Muốn cho $(A, C) = 5$ thì $5|A$ mà $5|A$ nếu n lẻ và $5|A$ nếu n chẵn.

Suy ra đpcm.

Bài tập 36: Nếu $2^n - 1$ có thể phân tích thành tích ab thì $a+1$ và $b-1$ là những bội số lẻ của cùng một lũy thừa của 2.

Giải

Giả sử:

$$2^n - 1 = ab, \text{ với } n, a, b \in \mathbb{N} \text{ và } n, a, b > 1$$

$$2^n - 1 \text{ lẻ} \Rightarrow a \text{ và } b \text{ đều lẻ.}$$

$$\Rightarrow a+1 \text{ và } b-1 \text{ đều chẵn.}$$

$$\text{Giả sử: } a+1 = \alpha.2^p$$

$$b-1 = \beta.2^q$$

(với α, β lẻ và $p, q \in \mathbb{N}$)

Ta có:

$$2^n - 1 = (\alpha.2^p - 1)(\beta.2^q + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2^n = \alpha\beta.2^{p+q} + \alpha.2^p - \beta.2^q$$

Do đó: $p = q$

Vậy $a+1$ và $b-1$ là bội số lẻ của cùng một lũy thừa của 2.

Bài tập 37: Cho a và b là hai số nguyên tố. Chứng minh rằng số dư của những phép chia $(p-1)$ bội số đầu tiên của a và b tạo thành dãy số $(b-1)$ số tự nhiên đầu tiên.

Giải

Xét dãy số gồm $(b-1)$ bội số đầu tiên của a:

$$a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$$

Ta đem chia tất cả các số này cho b.

Không có số nào chia hết cho b vì b nguyên tố cùng nhau với tất cả các số hạng của dãy.

Không có số nào chia cho b có cùng số dư vì nếu có ka và ha chia cho b có cùng số dư thì:

$$(k - h)a \vdots b, \text{ với } k, h \in \mathbb{N} \text{ và } 1 \leq h < k \leq b - 1$$

Điều này vô lí. Suy ra $(b - 1)$ số dư đều khác nhau.

Mặt khác, các số dư đều nhỏ hơn hay bằng $b - 1$.

Vậy $(b - 1)$ số dư chính là $(b - 1)$ số tự nhiên đầu tiên, đpcm.

Bài tập 38: Định lý Fermat

Chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố không chia hết cho số a thì p chia hết số $a^{p-1} - 1$.

Giải

Xét dãy số gồm $(p - 1)$ bội số đầu tiên của a :

$$a, 2a, 3a, \dots, (p - 1)a$$

Ta có:

$$a = bsp + r_1$$

$$2a = bsp + r_2$$

$$3a = bsp + r_3$$

.....

$$(p - 1)a = bsp + r_{p-1}$$

Trong đó, $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$, theo một thứ tự nào đó, là $(p - 1)$ số tự nhiên đầu tiên:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots r_{p-1} = (p - 1)!$$

Suy ra:

$$a^{p-1} \cdot (p - 1)! = bsp + (p - 1)!$$

Hay

$$(a^{p-1} - 1) \cdot (p - 1)! \vdots p$$

p nguyên tố, $(p - 1)!$ và p nguyên tố cùng nhau.

Vậy $a^{p-1} - 1 \vdots p$ (Định lý Fermat)

Bài tập 39: Cho p và q là hai số nguyên tố phân biệt. Chứng minh rằng:

$$p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots pq$$

Giải

Ta có thể viết:

$$p^{q-1} + q^{p-1} - 1 = (p^{q-1} - 1) + q^{p-1}$$

Ta có:

$$p^{q-1} - 1 \vdots q \text{ (Theo định lý Fermat)}$$

$$q^{p-1} \vdots q$$

Suy ra:

$$p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots q \quad (1)$$

Tương tự:

$$p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots p \quad (2)$$

Vì p và q nguyên tố phân biệt nên cùng nguyên tố cùng nhau.

Do đó từ (1) và (2), ta suy ra:

$$p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots pq$$

Bài tập 40: Chứng minh rằng x và y không chia hết cho một số nguyên tố p thì $x^{p-1} - y^{p-1} \vdots p$.

Giải

Ta có thể viết: $x^{p-1} - y^{p-1} = (x^{p-1} - 1) - (y^{p-1} - 1)$

$$p \nmid x \Rightarrow x^{p-1} - 1 \vdots p \text{ (Định lý Fermat)}$$

$$p \nmid y \Rightarrow y^{p-1} - 1 \vdots p \text{ (Định lý Fermat)}$$

Suy ra đpcm.

Bài tập 41: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố thì tích số

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (p - 3)(p - 2)$$

là một bội số của p thêm 1.

Giải

Gọi a là một thừa số của tích

$$2.3.4...(p-2)$$

Ta chứng minh rằng tồn tại một thừa số a' của tích sao cho:

$$aa' = bsp + 1$$

Ta biết rằng phép chia các số hạng của dãy:

$$a, 2a, 3a, \dots, (p-2)a$$

cho p có các số dư là $(p-1)$ số tự nhiên đầu tiên theo một thứ tự nào đó. Số dư 1 không phải là số dư của phép chia $a, 2a, 3a, \dots, (p-2)a$ cho p .

Suy ra rằng tồn tại a' thuộc tích (1) sao cho $a' \neq a$ và $aa' = bsp + 1$.

Lý luận tương tự:

Nếu b là một thừa số thuộc tích (1) khác a và a' thì tồn tại b' thuộc tích đó để $bb' = bsp + 1$

Do đó: $2.3.4 \dots (p-2) = bsp + 1$.

Bài tập 42: Định lý Wilson:

Chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố thì tích:

$$2.3.4 \dots (p-2).(p-1)$$

là một bội số của p bớt đi 1.

Giải

HS tự chứng minh.

Bài tập 43: Chứng minh rằng nếu p chia hết $(p-1)!$ thì p nguyên tố.

Giải

Nếu p là hợp số thì p chia hết $(p-1)!$ và do đó chia hết cho 1, vô lý.

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 44: Chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố lẻ và $k \in \mathbb{N}$, ta có:

$$S = 1^{2k+1} + 2^{2k+1} + \dots + (p-1)^{2k+1} \vdots p$$

Giải

p lẻ $\Rightarrow (p-1)$ chẵn.

Ta có:

$$\begin{aligned} 2S &= 1^{2k+1} + (p-1)^{2k+1} + 2^{2k+1} + \dots + (p-2)^{2k+1} + \dots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{2k+1} + \left(\frac{p+1}{2}\right)^{2k+1} + \dots + (p-1)^{2k+1} + 1 \\ &= p[(p-1)^{2k} + \dots + 1] + p[2^{2k} - 2^{2k-1}(p-2) + \dots + (p-2)^{2k}] + \dots + \\ &\quad p\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{p-1}{2}\right)^{2k-1}\left(\frac{p-1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{p+1}{2}\right)^{2k}\right] + \dots + p[(p-1)^{2k} + \dots + 1] = lp \end{aligned}$$

Với $l \in \mathbb{N} \Rightarrow 2S \vdots p$

Vậy p nguyên tố lẻ $\Rightarrow S \vdots p$ (đpcm)

Bài tập 45: Chứng minh rằng $a = p_n + p_{n+1}$ không phải là số nguyên tố và cá ước số nguyên tố của nó nhỏ hơn p_n trong đó p_n là số nguyên tố thứ n , $p_n > 2$.

Giải

$p_n > 2$ thì p_n lẻ p_{n+1} lẻ, do đó a là hợp số.

Ta có:

$$2p_n < a < 2p_{n+1}$$

Nếu a có 1 ước số nguyên tố là p_n thì p_n cũng là 1 ước nguyên tố của p_{n+1} , vô lý.

Nếu a có 1 ước số nguyên tố là $d > p_n$ thì hoặc $d = p_{n+1}$ hoặc $d > p_{n+1}$.

$d = p_{n+1}$ thì $d \nmid p_n$, vô lý

Khi: $d > p_{n+1}$ thì $a > 2p_{n+1}$, vô lý.

Suy ra đpcm.

Bài tập 46: Tìm số các ước và tính tổng các ước của số $n = 360$.

Giải

Ta có: $360 = 2^3.3^2.5$

Số các ước là: $4.3.2 = 24$ số

Tổng các ước là:

$$\frac{2^4-1}{2-1} \cdot \frac{3^3-1}{3-1} \cdot \frac{5^2-1}{5-1} = 15.13.6 = 1170$$

Đáp số: 1170.

Bài tập 47: Tìm một số chia hết cho 35 và 6 ước số.

Giải

Ta có: $a = 5^\alpha \cdot 7^\beta$ là số phải tìm.

Suy ra: $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 6 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$ hoặc $\alpha = 2, \beta = 1$

Do đó: $a = 245$ hoặc $a = 175$

Vậy có 2 số thỏa mãn đề bài là 245 và 175.

Bài tập 48: Tìm một số chia hết cho 105 và có 30 ước số.

Giải

Ta có: $A = 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma$ là số phải tìm

Suy ra: $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

A có thể có một trong các giá trị sau:

108 075; 91 875; 108 045; 39 375; 19 845; 14 175.

Vậy có 6 số thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bài tập 49: Cho số $A = 2^n \cdot p$ trong đó $n, p \in \mathbb{N}$ và p nguyên tố.

a) Viết mọi ước của A , kể cả 1 và A . Tính tổng S các ước.

b) Tìm hệ thức giữa n và p để $A = S - A$

c) A gọi là một số hoàn chỉnh. Hãy viết 3 số hoàn chỉnh nhỏ nhất.

Giải

a) Các ước số của $A = 2^n \cdot p$ là:

1, 2, $2^2, \dots, 2^n, p, 2p, \dots, 2^n \cdot p$

Tổng các ước:

$S = \sigma(A) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + p + 2p + \dots + 2^n \cdot p = (1 + p)(2^{n+1} - 1)$

$A = 2^n \cdot p \Rightarrow 2^{n+1} = \frac{2A}{p}$

Do đó:

$S = (p + 1) \left(\frac{2A}{p} - 1 \right)$

b) $A = S - A \Rightarrow 2A = p(p + 1) \Rightarrow p = 2^{n+1} - 1$

c) $n = 1 \Rightarrow A = 6$

$n = 2 \Rightarrow A = 28$

$n = 3 \Rightarrow A = 496$

Vậy 3 số hoàn chỉnh nhỏ nhất là 6; 28; 496.

Bài tập 50: Tìm một số A gồm các thừa 2, 5, 7 biết rằng $5A$ có hơn A 8 ước và $8A$ có hơn A 18 ước.

Giải

$A = 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma \Rightarrow T(A) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$

$5A = 3^\alpha \cdot 5^{\beta+1} \cdot 7^\gamma \Rightarrow T(5A) = (\alpha + 1)(\beta + 2)(\gamma + 1) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) + 8$

$8A = 3^{\alpha+3} \cdot 5^{\beta+1} \cdot 7^\gamma \Rightarrow T(8A) = (\alpha + 3)(\beta + 2)(\gamma + 1) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) + 18$

$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha + 1)(\gamma + 1) = 8 \\ (\beta + 1)(\gamma + 1) = 6 \end{cases} \Rightarrow (\gamma + 1) | (8, 6) = 2 \Rightarrow (\gamma + 1) = 2 \Rightarrow \gamma = 1$

Do đó:

$\begin{cases} \alpha + 1 = 4 \\ \beta + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$

Vậy số phải tìm là $A = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1\,400$.

Bài tập 51: Tìm 2 số nguyên tố p và q sao cho tổng các ước số của

$A = 2^5 \cdot pq$ bằng $3A$.

Giải

$A = 2^5 \cdot pq \Rightarrow \sigma(A) = \frac{2^6 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{p^2 - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^2 - 1}{q - 1} = 63(p + 1)(q + 1)$

$$\sigma(A) = 3A \Rightarrow 21(p+1)(q+1) = 32pq$$

$$\left. \begin{array}{l} 32pq : 21 \\ (21, 32) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow pq : 21 \Rightarrow pq = 21$$

với p, q nguyên tố

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q = 7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} p = 7 \\ q = 3 \end{cases}$$

Vậy 2 số nguyên tố phải tìm là 3 và 7.

Bài tập 52: Tìm số nhỏ nhất có 9 ước và 15 ước.

Giải

Ta có: $9 = 3.3 = 9.1$

Số nhỏ nhất có 9 ước số là số nhỏ nhất trong các số:

$$2^2.3^2, 2^8 \dots \text{Đó là số } 36$$

Tương tự: $15 = 3.5 = 15.1$

Số nhỏ nhất có 15 ước số là số $2^2.3^4 = 324$.

Bài tập 53: Chứng minh rằng nếu $2^{n+1} - 1$ nguyên tố thì $2^n(2^{n+1} - 1)$ là một số hoàn chỉnh.

Giải

Xem số $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$, với $n \in \mathbb{N}$.

Trong đó $p = 2^{n+1} - 1$ là một số nguyên tố:

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $p > 2$. Do đó $a = 2^n.p$ là dạng phân tích tiêu chuẩn của a .

Ta có:

$$\sigma(A) = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \cdot \frac{p^2-1}{p-1} = (2^{n+1}-1)(p+1) = 2^{n+1}(2^{n+1}+1) = 2n, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 54: Tìm x và y để cho $2^x.3^y$ là một số hoàn chỉnh.

Giải

$$\sigma(2^x.3^y) = \frac{2^{x+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{y+1}-1}{3-1} = 2.2^x.3^y = 2^{x+1}3^y \Rightarrow (2^{x+1}-1)(3^{y+1}-1) = 2^{x+1}.3^y$$

Suy ra: $x = 1, y = 1$.

Bài tập 55: Tìm số nguyên tố p sao cho $2^6.p$ hoàn chỉnh.

Giải

$$\sigma(2^6.p) = (2^7-1)(p+1) = 2^7.p$$

$$\Rightarrow p = 2^7 - 1$$

$$\Rightarrow p = 127$$

Bài tập 56: Tìm các số a biết a có 2 ước nguyên tố khác nhau, có 6 ước và tổng các ước bằng 28.

Giải

Gọi $a = p^\alpha q^\beta$, với p và q nguyên tố

$$(\alpha+1)(\beta+1) = 6 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2 \text{ hoặc } \alpha = 2, \beta = 1$$

$$\frac{p^{\beta+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{\alpha+1}-1}{q-1} = 28 \Rightarrow (p+1)(q^2+q+1) = 28 \text{ hoặc } (p^2+p+1)(q+1) = 28$$

Suy ra: $p = 3, q = 2$ hoặc $p = 2, q = 3$.

$$\text{Do đó: } a = 3.2^2 = 12$$

Vậy $a = 12$.

Bài tập 57: Tìm tổng bình phương các ước số của 1 số.

Giải

Cho $A = a^\alpha b^\beta \dots l^\gamma$, với $a, b, \dots, l$ nguyên tố và $\alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbb{N}$.

Các ước của A là các số hạng của đa thức:

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \dots + b^\beta) \dots (1 + l + l^2 + \dots + l^\gamma)$$

Suy ra tổng bình phương các ước của A là:

$$(1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2\alpha})(1 + b^2 + b^4 + \dots + b^{2\beta}) \dots (1 + l^2 + l^4 + \dots + l^{2\gamma})$$

$$= \frac{a^{2(\alpha+1)} - 1}{a^\alpha - 1} \cdot \frac{b^{2(\beta+1)} - 1}{b^\beta - 1} \cdots \frac{l^{2(\gamma+1)} - 1}{l^\gamma - 1}$$

Bài tập 58: Tìm 2 số m và n có 45 ước số chung và $m + n = 127\,008$

Giải

Gọi D là ước số chung lớn nhất của m và n.

$$\begin{cases} m = Dm' \\ n = Dn' \end{cases} \text{ với } (m', n') = 1$$

Suy ra: $D | 127\,008$

Do đó: $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdots 7^\gamma$

Ước số chung của m và n cũng là ước số của D.

Suy ra $(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\gamma + 1) = 45$

Do đó:

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Suy ra: $D | 86\,436$ (loại), 15876 hoặc 7056

Do đó: $m' + n' = 8$ hoặc $m' + n' = 18$

Suy ra: $m = ?$ và $n = ?$

HS tự giải.

Bài tập 59: Chứng minh rằng nếu $b > 3$ và $10b + 1$ là 2 số nguyên tố thì

$$5b + 1 \vdots 6$$

Giải

Ta có: Nếu b nguyên tố và $b > 3$ nên b có dạng $6k - 1$, hoặc $6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ và $k \geq 1$.

Nếu $b = 6k - 1$ thì $10b + 1 = 60k - 9 \vdots 3$, trái với giả thiết.

Do đó b có dạng $6k + 1$.

Ta suy ra:

$$5b + 1 = 30k + 6 \vdots 6 \text{ (đpcm)}$$

Bài tập 60: Cho m và n là 2 số tự nhiên. Chứng minh rằng:

$$A = n(2n + 1)(3n + 1) \cdots (mn + 1)$$

Chia hết cho mọi số nguyên tố nhỏ hơn m.

Giải

Cho p là một số nguyên tố bất kỳ nhỏ hơn m.

Ta chứng minh rằng:

$$p | A - n(2n + 1)(3n + 1) \cdots (mn + 1)$$

Xét dãy số gồm p số sau:

$$2n, 3n, \dots, (p + 1)n$$

$$\text{Vì } p < m \Rightarrow p + 1 \leq m$$

$$\text{Do đó: } (p + 1)n + 1 \leq mn + 1$$

Chia tất cả các số của dãy cho p:

$$n \vdots p \Rightarrow A \vdots p$$

$$n \not\vdots p \Rightarrow (n, p) = 1$$

Ta được các số dư khác nhau vì nếu 2 số kn và hn của dãy với $2 \leq h < k \leq p + 1$, với $h, k \in \mathbb{N}$ có cùng số dư trong phép chia cho p thì $(k - h)n \vdots p$, vô lí.

$$\text{Vì } k - h < p \text{ và } (p, n) = 1$$

Do đó các số dư theo một thứ tự nào đó là:

$$0, 1, 2, \dots, p - 1 \text{ và nếu số } qn \text{ thuộc dãy chia cho p có số dư } p - 1 \text{ thì } qn + 1 \vdots p$$

$$\text{Với } q \leq p + 1 \Rightarrow q \leq n$$

Do đó $A \vdots p$.

Bài tập 61: Nếu $a^m + b^n$ nguyên tố lớn nhất của m và n không phải là một lũy thừa của 2.

Giải

Giả sử ước số chung lớn nhất của m và n không phải là một lũy thừa của 2. Đặt:

$$m = 2^\alpha \cdot pq$$

$$n = 2^\beta \cdot pq'$$

trong đó p, q, q' lẻ và α, β nguyên, không âm và $\alpha < \beta$.

Ta có: $a^m + b^n = (a^{2^\alpha} \cdot q)p + (b^{2^\beta} \cdot q')p$

$$= (a^{2^\alpha} \cdot q + b^{2^\beta} \cdot q') \left[a^{2^\alpha q(p-1)} + a^{2^\alpha q(p-2)} b^{2^\beta q'} + \dots + b^{2^\beta q'(p-1)} \right]$$

Do $a^m + b^n$ là hợp số, trái giả thiết.

Suy ra đpcm.

Bài tập 62: Cho $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$. Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n$ là các số nguyên tố nhỏ hơn hay bằng $n + 1$.

Gọi $p = p_1 \cdot p_2 \dots p_n$. Chứng minh rằng dãy số $p + 2, p + 3, \dots, p + (n + 1)$ không chứa số nguyên tố nào.

Giải

Xem số $a = p + q$ thuộc dãy số đã cho với $q \in \mathbb{N}$ và $2 \leq q \leq n + 1$

Suy ra: $q < p$

Nếu q là số nguyên tố thì q chính là một trong các số nguyên tố đã cho $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Do đó: $q|p$

Suy ra: $q|a$

Nếu q là hợp số thì q phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố nhỏ hơn $n + 1$.

Do đó: $q|p$

Suy ra: $q|a$

Vậy a là một hợp số.

Do đó tất cả các số hạng của dãy:

$$p + 2, p + 3, \dots, p + (n + 1)$$

đều là hợp số.

Suy ra đpcm.

Bài tập 63: Chứng minh rằng:

a) Nếu p và $8p - 1$ là 2 số nguyên tố thì $8p + 1$ không nguyên tố.

b) Nếu p và $8p^2 + 1$ là 2 số nguyên tố thì $8p^2 - 1$ là số nguyên tố.

Giải

a) Số tự nhiên p có một trong các dạng:

$$3k, 3k + 1, 3k + 2, \text{ với } k \in \mathbb{N}.$$

Nếu $p = 3k + 2$ thì $8p - 1$ là hợp số, trái giả thiết:

Do đó chỉ có thể dạng $3k$ hoặc $3k + 1$

$$p = 3k, p \text{ nguyên tố}$$

$$\Rightarrow p = 3, 8p - 1 = 23 \text{ nguyên tố}$$

$$\Rightarrow 8p + 1 \text{ hợp số.}$$

$$p = 3k + 1 \Rightarrow 8p + 1 = 3p, \text{ hợp số}$$

b) Nếu $p = 3k \pm 1, k \in \mathbb{N}$ thì $p^2 = 3t + 1, t \in \mathbb{N}$.

Suy ra $8p^2 + 1 = 3l + 9, l \in \mathbb{N}$, hợp số.

Trái giả thiết.

Do đó: $p = 3k$ mà p nguyên tố nên $p = 3$.

Suy ra:

$$8p^2 + 1 = 73, \text{ nguyên tố}$$

$$8p^2 - 1 = 71, \text{ nguyên tố.}$$

Bài tập 64: Chứng minh rằng nếu p, q, r là 3 số nguyên tố lớn hơn hay bằng 5 thì $p^2 + q^2 + r^2$ là hợp số.

Giải

p nguyên tố lớn hơn hay bằng 5 nên p có dạng $6k - 1$ hoặc $6k + 1, k \in \mathbb{N}$ và $k \geq 1$.

Suy ra: $p^2 = 6t + 1, t \in \mathbb{N}$ và $t \geq 1$

Tương tự: $q^2 = 6s + 1, s \in \mathbb{N}$ và $s \geq 1$

$$r^2 = 6l + 1, l \in \mathbb{N} \text{ và } l \geq 1$$

Do đó: $p^2 + q^2 + r^2 = 6n + 3, n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 1$.

Suy ra đpcm.

Bài tập 65: Cho bốn số tự nhiên a, b, c, d khác 0 sao cho tổng bình phương của hai số này bằng tổng bình phương hai số kia. Chứng minh rằng tổng của bốn số đã cho là một hợp số.

Giải

Giả sử $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, với $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$

Suy ra: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ là một số chẵn. (*)

Mặt khác, ta có:

$a(a+1) + b(b+1) + c(c+1) + d(d+1)$ là một số chẵn

Suy ra: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (a + b + c + d)$ chẵn. (**)

Từ (*) và (**), ta có: $(a + b + c + d)$ chẵn.

$a, b, c, d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a + b + c + d \geq 4$

Do đó, ta có: $(a + b + c + d)$ là một hợp số.

Vậy $a + b + c + d$ là hợp số.

Bài tập 66: Chứng minh rằng nếu a và b nguyên tố cùng nhau, $a^2 - b^2$ là một số chính phương nếu và chỉ nếu $(a + b)$ và $(a - b)$ là những số chính phương hoặc gấp đôi số chính phương.

Giải

Ta có: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Nếu a và b nguyên tố cùng nhau thì $a + b$ và $a - b$ nguyên tố cùng nhau khi $a + b$ và $a - b$ cùng lẻ và có ước số chung lớn nhất bằng 2 khi $a + b$ và $a - b$ cùng chẵn.

Giả sử $a^2 - b^2 = k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Suy ra: $(a + b)(a - b) = k^2$

Nếu k lẻ thì bao giờ cũng phân tích được.

$k = (2n+1)(2m+1)$, với $m, n \in \mathbb{N}$

Do đó $(a + b)$ và $(a - b)$ đều là những số chính phương và ngược lại.

Nếu k chẵn thì $k = 2t'$, với $t, t' \in \mathbb{N}$ và $t > t'$

$\Rightarrow k^2 = 4t'^2$

Ta có: $(a + b)(a - b) = 4t'^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 2t'^2 \\ a - b = 2t'^2 \end{cases}$$

Bài tập 67: Cho 7 số nguyên tố phân biệt $a, b, c, a + b + c, a + b - c, c + a - b, b + c - a$, biết hai trong ba số a, b, c có tổng bằng 800.

Gọi d là hiệu số giữa hai số nguyên tố lớn nhất và nhỏ nhất trong 7 số nguyên tố đã cho.

Hãy tìm giá trị lớn nhất có thể có của d .

Giải

Giả sử ta có: $a + b = 800$ và $a < b$

Nếu $c \geq 800$ thì $a + b - c \leq 0$ vô lí $\Rightarrow c < 800$

Số nguyên tố lớn nhất trong 7 số nguyên tố đã cho dĩ nhiên là số $a + b + c$.

Ta có: $a + b + c < 1600 \Rightarrow a + b + c \leq 1597$

Từ đề bài, ta suy ra 7 số nguyên tố đã cho là 7 số nguyên tố lẻ.

Ta suy ra số nguyên tố nhỏ nhất có thể là 3.

Ta có: $d \leq 1597 - 3 = 1594$

Chọn $a = 13, b = 787, c = 797$, ta có:

$a + b + c = 1597$

$a + b - c = 3$

$b + c - a = 1571$

$c + a - b = 23$

đều là số nguyên tố.

Giá trị lớn nhất có thể có của d là $d = 1594$.

Bài tập 68: Các cạnh của một tam giác vuông có độ dài là các số tự nhiên. Hai trong các số đó là các số nguyên tố và hiệu của chúng là 50.

Hãy tính giá trị nhỏ nhất có thể có được của cạnh thứ ba.

Giải

Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đã cho. Ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{N}^*$$

Ta suy ra:

Trong hai số a và c có một số chẵn.

b và c không thể đồng thời là một số nguyên tố.

Do đó cạnh huyền a phải là một số nguyên tố.

Ta có thể giả sử b là một số nguyên tố $\Rightarrow c$ là một số chẵn.

Ta có: $a - b = 50 \Leftrightarrow a = b + 50$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 100(b + 25)$$

$$\Rightarrow b + 25 \text{ là một số chính phương.}$$

c nhỏ nhất khi $b + 25$ là số chính phương nhỏ nhất.

$$\Rightarrow b = 11 \Rightarrow \min c = 60.$$

Vậy cạnh thứ ba có độ dài nhỏ nhất là 60.

Bài tập 69: Tìm một số tự nhiên gồm 9 chữ số, có dạng $\overline{ABA}$, B gồm 3 chữ số, thỏa các điều kiện sau:

(1) $B = 2A$.

(2) $\overline{ABA}$ bằng bình phương đúng của tích bốn số nguyên tố khác nhau.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} n = \overline{ABA} &= A \cdot 10^6 + B \cdot 10^3 + A = A \cdot 10^6 + 2A \cdot 10^3 + A \\ &= A(10^6 + 2 \cdot 10^3 + 1) = A(10^3 + 1)^2 = (7 \cdot 11 \cdot 13)^2 \cdot A \end{aligned}$$

Từ đề bài ta suy ra A là bình phương đúng của một số nguyên tố

$$A = p^2, \text{ với } p \neq 7, 11, 13$$

Ta có: $B < 1000$

$$\Leftrightarrow 100 \leq A < 500$$

$$\Leftrightarrow 100 \leq p^2 < 500$$

$$\Leftrightarrow 10 \leq p \leq 22$$

p là một số nguyên tố khác 11, 13 nên ta có: $p = 17$ v $p = 19$.

Vậy có hai số thỏa yêu cầu của bài toán:

$$n_1 = (7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17)^2 = 289\,578\,289$$

$$n_2 = (7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19)^2 = 361\,722\,361$$

Bài tập 70: Cho số nguyên tố p thỏa:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Với a, b là hai số tự nhiên khác 0.

Tìm tất cả các số nguyên tố p để a hoặc b là một số chính phương.

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow p(a + b) = ab$$

Suy ra: $ab : p$, với p nguyên tố $\Leftrightarrow a : p$ v $b : p$

Giả sử: $a : p \Leftrightarrow a = pc$

$$\Leftrightarrow p(pc + b) = bc$$

$$\Leftrightarrow pc + b = bc$$

$$\Leftrightarrow pc = b(c - 1)$$

Suy ra: $pc : (c - 1) \Rightarrow p : (c - 1)$

p là một số nguyên tố. Do đó, ta có:

$$c - 1 = 1 \vee c - 1 = p$$

$$\Leftrightarrow c = 2 \vee c = p + 1$$

Với $c = 2$, ta có: $b = 2p = a$.

A hoặc b chính phương khi và chỉ khi $(2p)$ là một số chính phương.

Ta suy ra: $p = 2 \Rightarrow a = b = 4$.

Trường hợp $c = p + 1$, ta có:

$$\begin{cases} b = p + 1 \\ a = p(p + 1) \end{cases}$$

a không phải là một số chính phương.

b chính phương: $b = k^2, k \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$p = k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1)$$

$$k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow k + 1, k - 1 \in \mathbb{N} \text{ và } k + 1 > k - 1.$$

Do đó, ta có:

$$\begin{cases} k + 1 = p \\ k - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow p = 3, \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số nguyên tố phải tìm là $p = 2$ v $p = 3$.

Bài tập 71: Tìm các số nguyên tố p sao cho:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

Với a, b là các số tự nhiên khác 0.

Giải

Xem phương trình:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

Với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và p nguyên tố.

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow a^2 b^2 = p(a^2 + b^2)$$

Suy ra: $a^2 b^2 : p, p$ nguyên tố.

$$\Rightarrow ab : p \Leftrightarrow a : p \vee b : p (*)$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 : p^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 : p (**)$$

Từ (*) và (**), suy ra: $a : p \wedge b : p$

Suy ra:

$$p^2 \leq a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{p^2} \geq \frac{1}{a^2}$$

$$p^2 \leq b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{p^2} \geq \frac{1}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{p^2} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p} \Leftrightarrow p \leq 2$$

p là một số nguyên tố. Do đó $p = 2$.

Vậy $p = 2$.

Bài tập 72: Cho $a, b, \dots, n$ là những số tự nhiên đôi một khác nhau và các ước số nguyên tố của chúng không lớn hơn 3.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{n} < 3$$

Giải

Theo đề bài, các số hạng: $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \dots, \frac{1}{n}$

đều có dạng $\frac{1}{2^k 3^m}$, với $k, m \in \mathbb{N}$.

Giả sử: $t = \max(k, m)$

$\Rightarrow$ các số hạng của tổng S chứa trong khai triển của tích:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^t}\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^t}\right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1 - \frac{1}{2^{t+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^{t+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \left(2 - \frac{1}{2^t}\right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^t}}{2} < 3$$

Vậy $S < 3$.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm số nguyên tố p sao cho:

- a) $4p + 1$ là số chính phương.
- b) $2p^2 + 1$ cũng là số nguyên tố.
- c) $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ cũng là số nguyên tố.

Bài tập 2: Cho 4 số tự nhiên thỏa tính chất: Bình phương của tổng hai số bất kỳ chia hết cho tích hai số còn lại. Chứng minh rằng có ít nhất ba trong bốn số đó phải bằng nhau.

Bài tập 3: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$ và $n + 15$ đều là số nguyên tố.

Bài tập 4: Chứng minh rằng nếu p và $8p^2 + 1$ là số nguyên tố thì $8p^2 + 2p + 1$ là số nguyên tố

Bài tập 5: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 11$ có đúng 6 ước số nguyên dương.

Bài tập 6: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho hệ phương trình $p + 1 = 2x^2$, $p^2 + 1 = 2y^2$. Có nghiệm nguyên.

Bài tập 7: Cho a, b, c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ thỏa mãn $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không thể là số nguyên tố.

Bài tập 8: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2p^2 + 1$ là số nguyên tố.

Bài tập 9: Tìm tất cả các số tự nhiên n lẻ để n , $n + 10$, $n + 14$ là số nguyên tố.

Bài tập 10: Tìm tất cả các số nguyên tố vừa là tổng của 2 số nguyên tố, vừa là hiệu của 2 số nguyên tố.

Bài tập 11: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp không là số nguyên tố.

Bài tập 12: Chứng minh rằng không tồn tại n để $6n + 5$ biểu diễn dưới dạng tổng của 2 số nguyên tố.

CHỦ ĐỀ 3
TÌM NGHIỆM NGUYÊN

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1: Phương pháp đưa về dạng tổng.

Phương pháp này thường được dùng với những phương trình có các biểu thức chứa ẩn được viết dưới dạng tổng các bình phương.

Biến đổi hai vế của phương trình về dạng: Vế trái là tổng các bình phương của các biểu thức chứa ẩn, vế phải là tổng các bình phương của các số. Sau đó cho bằng nhau về số hạng.

$$[A(x,y,...)]^2 + [B(x,y,...)]^2 + [C(x,y,...)]^2 + \dots = m^2 + n^2 + p^2 + \dots$$

Với $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

Giải hệ tương ứng:

$$\begin{cases} [A(x,y,...)]^2 = m^2 \\ [B(x,y,...)]^2 = n^2 \\ [C(x,y,...)]^2 = p^2 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} [A(x,y,...)]^2 = n^2 \\ [B(x,y,...)]^2 = m^2 \\ [C(x,y,...)]^2 = p^2 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} [A(x,y,...)]^2 = p^2 \\ [B(x,y,...)]^2 = n^2 \\ [C(x,y,...)]^2 = m^2 \\ \dots \end{cases} \quad \dots$$

Ví dụ: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn phương trình sau: $5x^2 - 4xy + y^2 = 169$

Giải

Ta thấy: $5x^2 - 4xy + y^2 = 169 = 144 + 25 + 0$

$$\begin{cases} (2x-y)^2 + x^2 = 144 + 25 & (1) \\ (2x-y)^2 + x^2 = 169 + 0 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta có:

$$\begin{cases} (2x-y)^2 = 12^2 \\ x^2 = 5^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (2x-y)^2 = 5^2 \\ x^2 = 12^2 \end{cases}$$

HS tự giải.

Từ phương trình (2), ta có:

$$\begin{cases} (2x-y)^2 = 16^2 \\ x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (2x-y)^2 = 0 \\ x^2 = 16^2 \end{cases}$$

HS tự giải.

Phương pháp 2: Phương pháp đưa về dạng tích.

Phương pháp này được áp dụng với các phương trình có các biểu thức chứa ẩn phân tích được thành nhân tử.

Biến đổi một vế thành tích của các biểu thức chứa ẩn, một vế là tích của các số nguyên. (lưu ý với trường hợp số nguyên tố).

$$[A(x,y,...)] \cdot [B(x,y,...)] \cdot [C(x,y,...)] \dots = m.n.p\dots$$

Với $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

Giải hệ tương ứng:

$$\begin{cases} [A(x, y, \dots)] = m \\ [B(x, y, \dots)] = n \\ [C(x, y, \dots)] = p \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} [A(x, y, \dots)] = n \\ [B(x, y, \dots)] = m \\ [C(x, y, \dots)] = p \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} [A(x, y, \dots)] = p \\ [B(x, y, \dots)] = n \\ [C(x, y, \dots)] = m \\ \dots \end{cases}$$

Ví dụ: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn phương trình: $x^3 - y^3 = 91$.

Giải

Ta có: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 91.1 = 13.7$ (vì $x^2 + xy + y^2 > 0$).

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 91.1 = 13.7 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 91 \\ x - y = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x - y = 13 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được nghiệm của phương trình đã cho.

Phương pháp 3: Phương pháp cực hạn (tính chất đối xứng của các ẩn).

Phương pháp này thường được sử dụng với các phương trình đối xứng.

Cách giải:

Vì phương trình đối xứng nên x, y, z có vai trò bình đẳng như nhau.

Do đó ta giả thiết: $x \leq y \leq z$.

Tìm điều kiện của các nghiệm.

Loại trừ dần các ẩn để có nghiệm đơn giản.

Giải phương trình, dùng phép hoán vị để suy ra nghiệm của phương trình đã cho.

Ta thường giả thiết: $1 \leq x \leq y \leq z \leq \dots$

Ví dụ: Tìm $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn phương trình: $x + y + z = xyz$. (1)

Giải

Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow xyz = x + y + z \leq 3z \Rightarrow xy \leq 3$. (Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$) nên $xy \in \{1; 2; 3\}$.

Nếu $xy = 1$ thì $x = y = 1 \Rightarrow 2 + z = z$ (vô lý)

Nếu $xy = 2$ thì $x = 1; y = 2; z = 3$.

Nếu $xy = 3$ thì $x = 1; y = 3 \Rightarrow z = 2 < y$ (vô lý)

Vậy các giá trị (x, y, z) cần tìm là hoán vị của $(1, 2, 3)$.

Phương pháp 4: Phương pháp sử dụng tính chất chia hết.

Phương pháp này thường được sử dụng với các phương trình có dạng phân thức mà tử là một số nguyên.

Thông thường đề bài hay ra ở dạng này là "tìm các giá trị nguyên của ... để biểu thức đạt giá trị nguyên".

Áp dụng tính chất chia hết để tìm tập giá trị của biểu thức dưới mẫu.

Ví dụ: Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức: $A = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$ nhận giá trị nguyên.

Giải

Ta có: $A = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} = \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Khi đó: Để A nhận giá trị nguyên thì $1 : (x^2 + x + 1)$

Do đó:

$$x^2 + x + 1 = 1 \text{ và } x^2 + x + 1 = -1$$

Giải 2 phương trình trên ta có được giá trị x cần tìm.

Phương pháp 5: Phương pháp sử dụng bất đẳng thức.

Phương pháp này thường được sử dụng đối với phương trình mà hai vế là những đa thức có tính chất biến thiên khác nhau.

Thông thường áp dụng 3 bất đẳng thức thường gặp:

- (1) Bất đẳng thức Cauchy (Côsi):
- (2) Bất đẳng thức Bunhiacovski (Bunhiacôpxki):
- (3) Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ: Tìm các giá trị $x, y \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn phương trình:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$$

Giải

(Ta có thể dùng phương pháp 3)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương ta có:

$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3\sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} = 3\sqrt{xyz}$$

Hay

$$\sqrt[3]{xyz} \leq 1 \Rightarrow x = y = z = 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Phương pháp 6: Phương pháp lựa chọn.

Phương pháp này ta chỉ áp dụng được với các phương trình cho ta nhằm được một vài giá trị nghiệm.

Trên cơ sở những giá trị nghiệm đã biết, áp dụng tính chất như chia hết, số dư, số chính phương, số tận cùng, ... ta chứng tỏ rằng với các giá trị khác thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn phương trình: $x^6 + 3x^2 + 1 = y^4$.

Giải

Ta thấy $x = 0$ và $y = 1, y = -1$ thì phương trình đã cho có nghiệm đúng.

Với $x > 0$ ta có:

$$x^6 + 2x^2 + 1 < x^6 + 3x^2 + 1 < x^6 + 4x^2 + 1 < x^6 + 4x^2 + 4 = (x^3 + 2)^2$$
$$\Rightarrow (x^3 + 1)^2 < y^4 < (x^3 + 2)^2.$$

Vì $(x^3 + 1)$ và $(x^3 + 2)$ là hai số nguyên liên tiếp nên không có số nguyên nào thỏa mãn.

Vậy $x = 0, y = 1$ và $y = -1$ là nghiệm nguyên của phương trình.

Phương pháp 7: Phương pháp lùi vô hạn.

Phương pháp này thường được sử dụng với các phương trình có $(n - 1)$ ẩn, mà hệ số có ước chung khác 1.

Dựa vào tính chất chia hết, ta biểu diễn ẩn theo ẩn phụ nhằm hạ (giảm bớt) hằng số tự do, để có được phương trình đơn giản hơn.

Sử dụng linh hoạt các phương pháp để giải phương trình đó.

Ví dụ: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$.

Giải

Nhận thấy $x^3 = 3(y^3 + 3z^3)$ nên $x^3 : 3 \Rightarrow x : 3$ (vì 3 là số nguyên tố).

Đặt: $x = 3x_1$. Khi đó:

$$0 = 27x_1^3 - 3y^3 - 9z^3 = 3(9x_1^3 - y^3 - 3z^3) : 3 \text{ nên } (9x_1^3 - y^3 - 3z^3) : 3.$$

$$\text{Suy ra: } y^3 : 3 \Rightarrow y : 3.$$

Tương tự như trên thì $z : 3$.

Tiếp tục sự biểu diễn trên và gọi x_0, y_0, z_0 là nghiệm của (1) thì

$$3 \in U(x_0, y_0, z_0)$$

$$\text{Và } 0 \leq x_0 \leq y_0 \leq z_0 \leq 9.$$

Thực hiện thử, ta chọn được $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ thỏa mãn là nghiệm của phương trình đã cho.

Phương pháp 8: Phương pháp sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.

Phương pháp này thường được áp dụng với các phương trình $f(x, y) = 0$, trong đó $f(x, y)$ là các đa thức bậc hai.

Ta biến đổi phương trình về dạng phương trình bậc hai, (một ẩn là ẩn của phương trình, một ẩn là tham số).

Biện luận theo điều kiện nghiệm của phương trình bậc hai.

Lưu ý: Nên chọn ẩn số có hệ số bằng 1.

Ví dụ: Tìm $x, y, z \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn phương trình sau:

$$3x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0$$

Giải

Ta có:

$$3x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = y^2 + 2(2x + 1)y + 3x^2 + 4x + 5 = 0.$$

$$\text{Khi đó: } \Delta' = x^2 - 4, (\Delta' \geq 0) \Rightarrow y_{1,2} = -(2x + 1) \pm \sqrt{\Delta'}$$

Do y nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên nên $\sqrt{\Delta'}$ phải là số nguyên.

$$\Leftrightarrow \Delta' = x^2 - 4 = n^2, (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = \pm 2$$

Áp dụng phương pháp 2 (đưa về dạng tích).

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = -5.$$

$$\text{Với } x = 2 \Rightarrow y = 3.$$

Vậy các giá trị (x, y) thỏa mãn là $(-2, -5)$ và $(2, 3)$.

Chú ý:

Nếu a và c có ước chung lớn nhất là d : $UCLN(a, c) = d$ thì đặt $y = d \cdot m$.

Nếu b và c có ước chung lớn nhất là d' : $UCLN(b, c) = d'$ thì đặt $x = d' \cdot t$.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3xy + x - y = 1$.

Giải

$$3xy + x - y = 1.$$

$$\Leftrightarrow (3y + 1)(3x - 1) = 2, (\text{phương trình ước số})$$

Vì x, y là các số nguyên nên $3x - 1, 3y + 1$ là các số nguyên và là ước của 2.

Ta có bảng sau:

$3x - 1$	-1	1	-2	2
$3y + 1$	-2	2	-2	1
x	0	/	/	1
y	-1	/	/	0

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $(0; -1), (1; 0)$.

Bài tập 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x + y = 2$

Giải

$$\text{Đặt: } x = t \Rightarrow y = 2 - t$$

Suy ra họ nghiệm nguyên là

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Bài tập 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x + 5y = 3$

Giải

Ta có: $3x + 5y = 3 \Leftrightarrow (3x + y) + 2y = 3$

Đặt: $t_1 = x + y, (t_1 \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 3t_1 + 2y = 3$$

$$\Leftrightarrow 2(t_1 + y) + t_1 = 3$$

Đặt: $t_2 = t_1 + y, (t_2 \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2t_2 + t_1 = 3$$

$$\Rightarrow t_1 = 3 - 2t_2 \Rightarrow y = t_2 - t_1 = 3t_2 - 3$$

$$\text{và } x = t_1 - y = t_2 - 2(3t_2 - 3) = 6 - 5t_2$$

Suy ra họ nghiệm nguyên của phương trình là

$$\begin{cases} x = 6 - 5t_2 \\ y = 3t_2 - 3 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

Bài tập 4: Cho phương trình: $x - 3y = 4$

Tìm giá trị x nguyên dương và y nguyên âm thỏa mãn phương trình.

Giải

Ta có: $x - 3y = 4$

Đặt: $y = t, (t \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow x = 4 - 3t$$

$$\text{để } \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ 4 - 3t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < t < 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Suy ra phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Bài tập 5: Cho phương trình: $2x + 3y = 4$

Tìm giá trị x, y nguyên của phương trình thỏa mãn $0 < x + y < 2$.

Giải

Phương trình có họ nghiệm nguyên

$$\begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = 4 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Để } 0 < x + y < 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t < 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Bài tập 6: Cho phương trình: $2x + 3y = 4$

Tìm nghiệm nguyên của phương trình thỏa mãn $5 > x > y - 3$.

Giải

Ta có: $2x + 3y = 4$

Phương trình có họ nghiệm

$$\begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = 4 - 2t \end{cases}$$

$$\text{để } 5 > x > y - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t - 4 < 5 \\ 3t - 4 > 4 - 2t - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 3 \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$$

Suy ra phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Bài tập 7: Cho phương trình: $x - y = 3$

Tìm nghiệm nguyên của phương trình thỏa mãn $x < 2$ và $y > -3$.

Giải

Phương trình có họ nghiệm

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow t \in \mathbb{Z}$$

Để $x < 2$ và $y > -3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < 2 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 2 \Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Bài tập 8: Cho phương trình: $mx + my = 1$

Tìm giá trị m để phương trình có nghiệm nguyên (x, y) .

Giải

Điều kiện cần: m phải là ước của 1

Suy ra: $m = 1$ và $m = -1$

Điều kiện đủ: với $m = 1$ và $m = -1$, ta có: $x + y = 1$ và $x + y = 2$.

Hai phương trình này luôn luôn có họ nghiệm nguyên.

Bài tập 9: Cho phương trình

$$mx + 2 = m$$

Tìm giá trị m nguyên ($m \leq 1$) để x là số nguyên.

Giải

Đặt: $m = t, (t \in \mathbb{Z}) \Rightarrow m - 2 = kt, (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{1 - k}$$

Vì $m \leq 1 \Leftrightarrow t \leq 1$

$$\Leftrightarrow k \leq -1$$

Mà $\begin{cases} 1 - k = \pm 2 \\ 1 - k = \pm 1 \end{cases}$ (vì $1 - k$ là ước của 2)

$$\Rightarrow k = \{-1, 0, 2, 3\}$$

Suy ra: $k = -1$ thoả mãn

$$\Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = -1$$

Bài tập 10: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $mx + m = 1$

Giải

$$\text{Ta có: } m = \frac{1}{x + 1}$$

Suy ra: $x + 1$ phải là ước của 1

$$\Rightarrow x = \{0, -2\}$$

Bài tập 11: Cho phương trình: $x + y = 6$

Tìm nghiệm nguyên thoả mãn $0 < x - y < 2$

Giải

Phương trình có họ nghiệm

$$\begin{cases} x = t \\ y = 6 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

để $0 < x - y < 2$

$$\Leftrightarrow 0 < 2t - 6 < 2$$

$$\Leftrightarrow 3 < t < 4$$

Suy ra không tồn tại t .

Bài tập 12: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x + 3y = 11$

Giải

Phương trình có họ nghiệm nguyên là

$$\begin{cases} x = 11 - 3t \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Bài tập 13: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x - 3y = 6$

Giải

Phương trình có họ nghiệm nguyên là

$$\begin{cases} x = 13 - 3t \\ y = 6 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Bài tập 14: Cho phương trình: $x + 100y = \frac{1}{m+1}$

Tìm giá trị m để phương trình có nghiệm nguyên (x, y) .

Giải

Nhận thấy $m+1$ phải là ước của 1

$$\begin{cases} m+1 = 1 \\ m+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$$

Xét $m = 0$

Phương trình viết lại là: $x + 100y = 1$

Phương trình này luôn luôn có họ nghiệm nguyên $\begin{cases} x = 1 - 100t \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$

Xét $m = 2$, phương trình viết lại là: $x + 100y = -1$

Phương trình này luôn luôn có họ nghiệm nguyên $\begin{cases} x = -1 - 100t \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$

Suy ra phương trình luôn luôn thỏa mãn với $m = 0$ và $m = 2$

Bài tập 15: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $4x - 2y = 7$

Giải

Phương trình có họ nghiệm nguyên

$$\begin{cases} x = 7 - k \\ y = 14 - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài tập 16: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $7x + 8y = 100$

Giải

(HS tự giải).

Bài tập 17: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x - 2^{1000}y = 0$

Giải

Ta có: $x - 2^{1000}y = 0 \Rightarrow x = 2^{1000}y$

Phương trình luôn luôn có vô số nghiệm nguyên

Bài tập 18: Cho phương trình: $\frac{x}{m-1} + \frac{y}{m+1} = 0$

Tìm giá trị m để phương trình có nghiệm nguyên (x, y) .

Giải

Điều kiện cần: Nhận thấy m phải là ước của 1 và $m+1$ phải là ước của 1.

Suy ra: $m = 0$

Điều kiện đủ: Với $m = 0$, ta có: $y = x$

phương trình này luôn luôn có nghiệm nguyên.

Bài tập 19: Cho phương trình: $\frac{2x}{m} + \frac{3y}{m-1} = 0$

Tìm giá trị m để phương trình có nghiệm nguyên (x, y) .

Giải

Điều kiện cần: Ta có: m phải là ước của 2.

$$m = \{-2, -1, 1, 2\}$$

và $m-1$ phải là ước của 3.

$$m = \{4, -2, 0, 2\}$$

Suy ra: $m = \{-2, 2\}$

Điều kiện đủ:

Với $m = -2$, ta có: $x + y = 0$ luôn luôn có nghiệm nguyên.

Với $m = 2$, ta có: $x + y = 0$ luôn luôn có nghiệm nguyên.

Bài tập 20: Cho phương trình: $\frac{2x}{4-m} + \frac{3y}{2-m} = 5$

Tìm giá trị m để phương trình có nghiệm nguyên (x, y) .

Giải

Điều kiện cần: Phương trình có nghiệm nguyên thì $4 - m$ phải là ước của 2

$\Rightarrow m = \{2, 3, 5, 6\}$

và $2 - m$ phải là ước của 3.

$\Rightarrow m = \{-1, 1, 3, 5\}$

Suy ra giá trị m thỏa mãn: $m = \{3, 5\}$

Điều kiện đủ:

Xét $m = 5$.

Phương trình viết lại là: $2x + 3y = 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 5 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Vậy $m = 3$ thỏa mãn.

Xét $m = 5$

Phương trình viết lại là

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -5 - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy $m = 5$ thỏa mãn.

Bài tập 21: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x - 111y = 114$.

Giải

Phương trình có họ nghiệm nguyên là

$$\begin{cases} x = 57 + 111t \\ y = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Bài tập 22: Cho đường thẳng D có phương trình: $5x + 7y - 50 = 0$.

a) Tìm tất cả các "điểm nguyên" của D .

b) Tìm tất cả các điểm của D có tọa độ là các số nguyên dương.

("Điểm nguyên" là điểm có các tọa độ nguyên)

Giải

a) Xem phương trình: $5x + 7y - 50 = 0$ (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 5x + 7y = 50$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow 7y : 5$

$(5, 7) = 1$

$\Rightarrow y : 5 \Leftrightarrow y = 5t, (t \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow 5x + 35t = 50 \Rightarrow x = 10 - 7t$

Vậy tập hợp các "điểm nguyên" của D là những điểm có tọa độ là:

$$\begin{cases} x = 10 - 7t \\ y = 5t \end{cases} \quad \text{với } t \in \mathbb{Z}.$$

b) x và y nguyên dương. Ta có:

$$\begin{cases} 10 - 7t > 0 \\ 5t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < \frac{10}{7} \\ t > 0 \end{cases} \quad \text{với } t \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 0 < t < \frac{10}{7}, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 23: Có 37 cây táo có số trái bằng nhau, 17 trái hồng, còn lại chia đều cho 79 người. Hỏi mỗi cây có ít nhất mấy trái.

Giải

Gọi a là số trái của mỗi cây táo và b là số trái táo của mỗi người.

Ta có phương trình: $37a - 17 = 79b$ (1)

Với $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow a = \frac{79b+17}{37} = 2b + \frac{5b+17}{37}$$

$$a, b \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \frac{5b+17}{37} = c \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow b = 7c - 3 + \frac{2(c-1)}{5}$$

$$b, c \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 2(c-1) : 5 \Rightarrow c = 5d + 1, d \in \mathbb{N}$$

Do đó, ta có:

$$a = 79d + 9$$

$$b = 37d + 4$$

$$a, b > 0 \Rightarrow d \geq 0 \Rightarrow a \geq 9$$

a đạt giá trị nhỏ nhất là 9 khi $d = 0$.

Vậy số trái ít nhất của mỗi cây táo là 9 trái.

Bài tập 24: Tìm số nguyên dương nhỏ nhất chia cho 1000 dư 1 và chia cho 761 dư 8.

Giải

Gọi a là số cần tìm, $a \in \mathbb{Z}^+$.

Theo giả thiết, ta có:

$$a = 1000x + 1 = 761y + 8, \text{ với } x, y \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\Leftrightarrow 1000x - 761y = 7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 847 - 761t \\ y = 1113 - 1000t \end{cases}$$

$$\text{Với } t \in \mathbb{Z}^+, x > 0, y > 0 \Rightarrow t \leq 1.$$

$$\text{Ta có: } x + y = 1960 - 1761t$$

$$\Rightarrow (x + y) \text{ nhỏ nhất khi } t \text{ lớn nhất.}$$

$$\Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Do đó: } x = 86, y = 113.$$

Vậy số nguyên dương nhỏ nhất phải tìm là $a = 86\,001$.

Bài tập 25: Phân 100 ổ bánh mì cho 100 người. Thanh niên mỗi người 10 ổ, ông già mỗi người 5 ổ, bà già mỗi người 2 ổ, trẻ con cứ 2 cháu một ổ. Hỏi có mấy thanh niên, mấy ông già, bà già, trẻ con?

Giải

Gọi x, y, z, t theo thứ tự là số thanh niên, ông già, bà già, trẻ con đã được phân phối bánh mì.

$$\text{Với } x, y, z, t \in \mathbb{Z}^+.$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1000 \\ 10x + 5y + 2z + \frac{t}{2} = 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 100 \\ 20x + 10y + 4z + t = 200 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 19x + 9y + 3z = 100$$

$$\Rightarrow z = 33 - 6x - 3y - \frac{x-1}{3}$$

$$\frac{x-1}{3} = u \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 3u + 1$$

$$\Rightarrow z = 33 - 6(3u + 1) - 3y - u = 27 - 19u - 3y$$

Chọn $y = v, v \in \mathbb{Z}^+, ta có: z = 27 - 19u - 3v.$

$$z = 100 - x - y - t = 100 - (3u + 1) - v - (27 - 19u - 3v)$$

$$\Leftrightarrow t = 72 + 16u + 2v.$$

Ta phải có: $x > 0, y > 0 \Rightarrow u \geq 0, v > 0$

Ta lại có: $z > 0 \Leftrightarrow 27 - 19u - 3v > 0.$

$$\Leftrightarrow 19u + 3v < 27 \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v < 9 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v \leq 2 \end{cases}$$

(i) Với $u = 0 \Rightarrow x = 1$

$$y = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

$$z = 24; 21; 18; 15; 12; 9; 6; 3$$

$$t = 74; 76; 78; 80; 82; 84; 86; 88$$

(ii) Với $u = 1 \Rightarrow x = 4.$

$$y = 1; 2$$

$$z = 5; 2$$

$$t = 90; 92$$

Có tất cả 10 lời giải.

$(x, y, z, t) = (1, 1, 24, 74); (1, 2, 21, 76); (1, 3, 18, 78); (1, 4, 15, 80); (1, 5, 12, 82); (1, 6, 9, 78); (1, 8, 3, 88); (4, 1, 5, 90); (4, 2, 2, 92).$

Bài tập 26: Cho đường thẳng (d) có phương trình: $5x + 7y = 11.$

a) Tìm trên (d) tất cả các điểm có tọa độ là cặp số nguyên.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 5|m| - 3|n|$

Cho biết $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ và $5m + 7n = 11.$

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Lê Quý Đôn Nha Trang, vòng 2 năm học 2004 - 2005)

Giải

a) Xem phương trình: $5x + 7y = 11$, với $x, y \in \mathbb{Z}.$

Ta có: $5x = 11 - 7y = (10 - 5y) + 1 - 2y$

$$\Rightarrow x = 2 - y - \frac{2y-1}{5}$$

$$x \text{ và } y \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{2y-1}{5} = t, \text{ (với } t \text{ là số nguyên).}$$

$$\Rightarrow 2y = 5t + 1 \Leftrightarrow y = 2t + \frac{t+1}{2}$$

$$y \text{ và } t \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{t+1}{2} = k \text{ nguyên.}$$

$$\Leftrightarrow t = 2k - 1.$$

Do đó, ta có: $x = -7k + 5$ và $y = 5k - 2.$

Vậy Những điểm thuộc (d) phải tìm có tọa độ là:

$$\begin{cases} x = -7k + 5 \\ y = 5k - 2 \end{cases} \text{ với } k \in \mathbb{Z}$$

b) Ta có: $m, n \in \mathbb{Z}$ và $5m + 7n = 11$

Theo câu (a), ta có:

$$\begin{cases} m = -7k + 5 \\ n = 5k - 2 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow P = 5|m| - 3|n| = 5|-7k + 5| - 3|5k - 2|$$

Xét $k \leq 0$:

$$\text{Ta có: } P = 5(-7k + 5) - 3(2 - 5k) = 19 - 20k$$

$$\Rightarrow P \geq 19.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow k = 0$.

Xét $k \geq 1$:

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow k = 1$.

Vậy, min $P = 1$ khi $m = -2, n = 3$.

Bài tập 27: Tìm tất cả các nghiệm dương của phương trình: $ax = a + 10x$

Giải

$$\text{Ta có: } ax = a + 10x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (a - 10)x = a$$

Với $a - 10 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 10$. Phương trình có nghiệm duy nhất là: $x = \frac{a}{a-10}$.

$$\text{Ta có thể viết } x = 1 + \frac{10}{a-10}.$$

x là số nguyên dương khi và chỉ khi $\frac{10}{a-10}$ là một số tự nhiên.

Do đó, ta có:

$$a - 10 | 10$$

$$\Leftrightarrow a - 10 = 1, 2, 5, 10$$

$$\Leftrightarrow a = 11, 12, 15, 20.$$

Do đó ta có nghiệm nguyên dương của phương trình: $ax = a + 10x$ là $x = 11, 6, 3, 2$.

Các giá trị tương ứng của a là $a = 11, 12, 15, 20$.

Bài tập 28: Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa phương trình: $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Giải

Ta có:

$$6x^2 + 5y^2 = 74 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2) \quad (2)$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow 6(x^2 - 4) : 5$$

$$(6, 5) = 1 \Rightarrow x^2 - 4 : 5$$

$$\Rightarrow x^2 = 5t + 4, t \in \mathbb{N}.$$

Thay $x^2 - 4 = 5t$ vào (2), ta có: $y^2 = 10 - 6t$

$$x^2 > 0, y^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 4 > 0 \\ 10t - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{4}{5} \\ t < \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{5} < t < \frac{5}{3}, t \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow t = 0 \vee t = 1.$$

Với $t = 0$: Không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta có: } \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = 3, y = 2$.

Cặp số nguyên dương (x, y) phải tìm là $(x, y) = (3, 2)$.

Bài tập 29: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy^2 + 2xy - 243y + x = 0$

Giải

Ta có:

$$xy^2 + 2xy - 243y + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y+1)^2 = 243y$$

$$\text{Vì } y+1 \neq 0 \text{ nên ta có: } x = \frac{243y}{(y+1)^2}$$

$$(y, y+1) = 1.$$

Do đó muốn cho x nguyên thì: $(y+1)^2 | 243 = 3^5$

$$\Rightarrow (y+1)^2 = 3^2 \vee (y+1)^2 = 3^4$$

$$(y+1)^2 = 3^2 \Rightarrow y = 2, x = 54.$$

$$(y+1)^2 = 3^4 \Rightarrow y = 8, x = 24.$$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là: $(x, y) = (54, 2); (24, 8)$.

Bài tập 30: Hãy dựng một tam giác vuông có số đo 3 cạnh a, b, c là những số nguyên và có một cạnh đo được 7 đơn vị.

Giải

Giả sử cạnh đo được 7 đơn vị là cạnh huyền: $a = 7$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 49 \quad (1)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow b^2 + c^2 \vdots 7 \quad (2)$$

7 là số nguyên tố có dạng $4k+3$, do đó:

$$(2) \Leftrightarrow b \vdots 7 \wedge c \vdots 7 \quad (3)$$

Nhưng $0 < b, c < 7 \Rightarrow (3)$ không thể xảy ra.

Vậy cạnh đo được 7 đơn vị không phải là cạnh huyền mà là cạnh góc vuông.

Bài toán không mất tính tổng quát khi ta giả sử $c = 7$.

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 49$$

Ta có: $a, b \in \mathbb{Z}^+, a > b \Rightarrow a+b > a-b > 0$.

Do đó, ta có:

$$\begin{cases} a+b=49 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=25 \\ b=24 \end{cases}$$

Tam giác vuông phải dựng có số đo ba cạnh là 25, 24, 7.

Bài tập 31: Tìm nghiệm nguyên tố của phương trình: $x^2 - 2y^2 = 1$

Giải

Ta có:

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2y^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 2y^2$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-1) \vdots 2 \quad (*)$$

$x+1$ và $x-1$ cùng tính chất chẵn, lẻ, do đó:

$$(*) \Rightarrow x+1 \vdots 2$$

$$x-1 \vdots 2$$

$$\Rightarrow 2y^2 \vdots 4$$

$$\Rightarrow y^2 \vdots 2$$

Mà 2 nguyên tố $\Rightarrow y \vdots 2$.

y lại là số nguyên tố $\Rightarrow y = 2$.

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow x = 3.$$

Vậy nghiệm của (1) là $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bài tập 32: Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x, y) thỏa phương trình: $x^2 + x + 13 = y^2$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 13 &= y^2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 52 &= 4y^2 \\ \Leftrightarrow 4y^2 - (2x + 1)^2 &= 51 \\ \Leftrightarrow (2y + 2x + 1)(2y - 2x - 1) &= 51. \end{aligned}$$

Ta có: $2y + 2x + 1$ và $2y - 2x - 1$ nguyên dương lẻ và $2y + 2x + 1 > 2y - 2x - 1$.

Do đó, ta có các khả năng sau:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \begin{cases} 2y + 2x + 1 = 51 \\ 2y - 2x - 1 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 13 \end{cases} \\ \text{(ii)} \quad \begin{cases} 2y + 2x + 1 = 17 \\ 2y - 2x - 1 = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 2 cặp nghiệm nguyên dương là: $\begin{cases} x = 12 \\ y = 13 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

Bài tập 33: Tìm các giá trị nguyên x, y thỏa đẳng thức: $(y + 2)x^2 + 1 = y^2$.

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Đại học KHTN Hà Nội năm học 2001 - 2002)

Giải

Ta có: $(y + 2)x^2 + 1 = y^2$ (1), với $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{y^2 - 1}{y + 2}, y \neq -2$$

$$\text{Ta có thể viết: } x^2 = y - 2 + \frac{3}{y + 2}$$

$$x, y \text{ nguyên} \Leftrightarrow y + 2 \mid 3$$

$$\Leftrightarrow y + 2 = 1, 3, -1, -3$$

$$\Leftrightarrow y = -1, 1, -3, -5$$

$$\text{Vì } x^2 \geq 0 \text{ nên } (y^2 - 1)(y + 2) \geq 0, y \neq -2.$$

$$\Leftrightarrow -2 < y \leq -1 \vee y \geq 1$$

$$\text{Do đó, ta có: } y = -1 \vee y = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Vậy các giá trị x, y nguyên phải tìm là: $(x, y) = (0, -1); (0, 1)$.

Bài tập 34: Tìm tất cả các số có 3 chữ số sao cho tích của chúng bằng tổng chúng.

Giải

Gọi số phải tìm là abc , với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9$.

Theo giả thiết, ta có:

$$abc = a + b + c \quad (1)$$

$$\Rightarrow b \neq 0, c \neq 0.$$

$$\text{Đặt: } a = m + 1; b = n + 1; c = p + 1, \text{ với } m, n, p \in \mathbb{N}.$$

Ta có:

$$(1) \Rightarrow m + n + p + 3 = (m + 1)(n + 1)(p + 1) = mnp + mn + mp + np + m + n + p + 1$$

$$\Leftrightarrow mnp + mn + mp + np = 2. \quad (2)$$

Nếu cả 3 số m, n, p đều ≥ 1 thì vế trái (2) sẽ $\geq 3 \Rightarrow$ vô lí

Vậy trong 3 số m, n, p có ít nhất một số bằng 0. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $m = 0$.

$$(2) \Rightarrow np = 2 \Rightarrow n = 1, p = 2 \vee n = 2, p = 1.$$

Vậy các số phải tìm là 123, 132, 231, 213, 321, 312.

Bài tập 35: Tìm tất cả các số có hai chữ số sao cho: $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = 1980$.

Giải

Ta có: $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = (\overline{ab} + \overline{ba})(\overline{ab} - \overline{ba}) = 1980$

$$\Leftrightarrow 99(a+b)(a-b) = 1980$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 20$$

Ta có: $18 \geq a+b \geq a-b > 0$

Mặt khác: $a+b$ và $a-b$ cùng tính chất chẵn, lẻ. Do đó ta có:

$$\begin{cases} a+b=10 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=4 \end{cases}$$

Vậy số phải tìm là 64.

Bài tập 36: Tìm tất cả những số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ để tổng của 6 số có 2 chữ số khác nhau được viết từ các chữ số a, b, c bằng $\overline{abc}$.

Giải

Theo giả thiết, ta có:

$$\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ac} + \overline{ca} = \overline{abc} \Leftrightarrow 26a = 4b + 7c \quad (1)$$

Với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a, b, c \leq 9$.

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow c:2 \Rightarrow c \leq 8.$$

$$\text{Do đó: } 26a \leq 92 \Rightarrow a \leq 3 \Rightarrow a = 1, 2, 3.$$

Với $a = 1$

$$(1) \Rightarrow 7c < 26 \Rightarrow c \leq 3, c:2 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow b = 3.$$

Ta có: $\overline{abc} = 132$.

Với $a = 2$

$$(1) \Rightarrow 4a + 7c = 52 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow 7c:4$$

$$(7, 4) = 1 \Rightarrow c:4 \quad (*)$$

Từ (2), ta lại có:

$$7c < 52 \Rightarrow 0 < c \leq 7 \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**) } \Rightarrow c = 4, b = 6.$$

Ta có: $\overline{abc} = 264$.

Với $a = 3$.

$$(1) \Rightarrow 4b + 7c = 78$$

$$\text{Nếu } c \leq 4 \Rightarrow 7c \leq 28 \Rightarrow 4b \geq 50, \text{ vô lí}$$

$$\text{Do đó: } c > 4, c:2 \Rightarrow c \geq 6.$$

$$\text{Nếu } c = 8 \Rightarrow 78:4, \text{ vô lí.}$$

$$\text{Do đó: } c = 6.$$

$$\Rightarrow b = 9.$$

Ta có: $\overline{abc} = 396$.

Vậy có ba số thỏa mãn yêu cầu của bài toán là 132, 264, 396.

Bài tập 37: Chứng minh rằng phương trình: $x^5 - x^4y - 13x^3y^2 + 13x^2y^3 + 36xy^4 - 36y^5 = 1937$ không có nghiệm nguyên.

Giải

Ta có:

$$n = x^5 - x^4y - 13x^3y^2 + 13x^2y^3 + 36xy^4 - 36y^5$$

$$= x^4(x-y) - 13x^2y^2(x-y) + 36y^4(x-y)$$

$$= (x-y)(x^4 - 13x^2y^2 + 36y^4)$$

$$= (x-y)(x^2 - 4y^2)(x^2 - 9y^2)$$

$$= (x-y)(x-2y)(x+2y)(x-3y)(x+3y)$$

Nhận xét: $x \neq y$, $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

n phân tích thành 5 thừa số nguyên.

1937 là tích của hai nguyên tố là 13 và 149 nên phân tích được thành 4 thừa số nguyên tố mà thôi:

$$1937 = 1.13.(-1).(-149) = 1.149.(-1).(-13), \dots$$

Do đó n không thể bằng 1937.

$$n \neq 1937, \forall x, y$$

Vậy phương trình đã cho không thể có nghiệm nguyên.

Bài tập 38: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $x^4 + (x+1)^4 = y^2 + (y+1)^2$

Giải

Ta có:

$$x^4 + (x+1)^4 = y^2 + (y+1)^2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 2y^2 + 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = y^2 + y$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 = y^2 + y + 1 \quad (2)$$

Từ (2), ta suy ra $(y^2 + y + 1)^2$ là một số chính phương.

Xét $y > 0$, ta có:

$$y^2 < y^2 + y + 1 < (y+1)^2, \text{ vô lý.}$$

$$\Rightarrow y \leq 0.$$

Xét $y < -1$, ta có:

$$(y+1)^2 < y^2 + y + 1 < y^2, \text{ vô lý}$$

$$\Rightarrow y \geq -1$$

Do đó, ta có:

$$-1 \leq y \leq 0, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 0.$$

Với $y = -1$

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \text{ (vì } x^2 + x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1.$$

Với $y = 0$, kết quả tương tự:

Vậy nghiệm nguyên của phương trình (1) là

$$(x, y) = (0, 0); (0, -1); (-1, 0); (-1, -1).$$

Bài tập 39: Tìm số nguyên không âm x, y thỏa đẳng thức:

$$x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}$$

Giải

Xem phương trình: $x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}$, với $x, y \in \mathbb{Z}^*$

$$\text{Xét } y = 0 \Rightarrow x^2 = 1, x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Xét } y \geq 1 \Rightarrow x \geq 3.$$

$$\text{Ta có: } (x+y)^2(x-y)^2 = y+1$$

$$\text{Suy ra: } (y+1) \vdots (x+y), \text{ vô lý}$$

$$\text{Do đó các số nguyên không âm phải tìm là } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Bài tập 40: Tìm số nguyên x thỏa đẳng thức:

$$x^2 + x + 12\sqrt{y+1} = 36$$

Giải

$$\text{Xem phương trình: } x^2 + x + 12\sqrt{y+1} = 36$$

$$\text{Điều kiện: } x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \geq -1$$

Ta có: $x^2 + x = x(x+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên không âm

$$x^2 + x \geq 0$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0$, không thỏa mãn.

$$\Rightarrow x^2 + x > 0$$

Ta suy ra: $x \geq 1 \Rightarrow x^2 + x \geq 2$

$$\Rightarrow 2 \leq \sqrt{x+1} < 3 \Rightarrow 2 \leq x+1 < 9$$

Mặt khác, ta phải có: $x+1 = p^2, p \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow 2 \leq p^2 < 9 \Rightarrow p^2 = 4 \Rightarrow x = 3.$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $x = 3$.

Bài tập 41: Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình:

$$2^x + 2^y + 2^z = 2068$$

Giải

Xem phương trình: $2^x + 2^y + 2^z = 2068$, với $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

Giả sử: $x \geq y \geq z$ ta có:

$$2^z (2^{x-z} + 2^{y-z} + 1) = 4.517$$

Suy ra: $z = 2$. Ta có:

$$2^{x-2} + 2^{y-2} = 516 \Leftrightarrow 2^{y-2} (2^{x-y} + 1) = 4.129$$

Suy ra: $y = 4$. Ta có:

$$2^{x-4} = 128 = 2^7 \Leftrightarrow x = 11.$$

Vậy các số nguyên dương x, y, z phải tìm là $(x, y, z) = (11, 4, 2)$.

Bài tập 42: Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn phương trình: $x^2 + 4x + 3 = 2^{y^2-2y}$.

Giải

Ta có: $x^2 + 4x + 3 = 2^{y^2-2y}$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+1) = 2^{y^2-2y}$$

$$\Rightarrow 2^{y^2-2y} \geq 3 \Rightarrow 2^{y^2-2y} \geq 4$$

Do đó: $(x+1)(x+3)$ đều là những lũy thừa của 2.

Đặt:

$$x+3 = 2^m$$

$$x+1 = 2^n$$

Với $m, n \in \mathbb{N}$ và $m > n \geq 1 \Rightarrow y^2 - 2y = m + n$

Ta có: $2^m - 2^n = 2$

$$\Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2$$

. $2^{m-n} - 1$ là một số tự nhiên lẻ nên ta có:

$$\begin{cases} 2^{m-n} - 1 = 1 \\ 2^n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Ta có: $y^2 - 2y = 3 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0, y \in \mathbb{N} \Rightarrow y = 3$.

Vậy x, y thỏa mãn phương trình đã cho là $(x, y) = (1, 3)$.

Bài tập 43: Tìm số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình: $yx^z = x + y^z$

Giải

Ta có:

$$yx^z = x + y^z \Leftrightarrow x = yx^z - y^z$$

$$\Rightarrow x : y \Rightarrow x^z : y^z$$

$$\Rightarrow x : y^z \Leftrightarrow x = ty^z, t \in \mathbb{Z}^+.$$

Ta suy ra:

$$ty^z = y \cdot t^z \cdot y^{z^2-z+1} \Rightarrow t = t^z y^{z^2-z+1}$$

$$\Rightarrow t + 1 = t^z \cdot y^{z^2-z+1} \quad (1)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow 1 : t \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow y^{z^2-z+1} = 2.$$

$y, z \in \mathbb{Z}^+$. Do đó, ta có:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x^2 - z + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình (1) đã cho là $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.

Bài tập 44: Có 12 quyển Tự điển Bách khoa toàn thư nằm ở trên giá sách theo thứ tự sau: 1, 2, 3, ..., 10, 12, 11 (Hai quyển sau cùng cùng nằm không đúng thứ tự).

Cho phép lấy ra 3 quyển bất kì liên tiếp nhau và sắp xếp lại ở chỗ tùy ý trên giá sách. Có thể tiến hành một vài lần đổi chỗ như thế hay không để sắp xếp lại 12 quyển Tự điển theo đúng thứ tự?

Giải

Có thể thực hiện được.

Thí dụ:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 12 11

1 2 3 4 5 6 7 12 8 9 10 11

1 2 3 4 5 6 7 10 11 12 8 9

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $xy - x - y = 2$.

Bài tập 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $11x + 18y = 120$

Bài tập 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

Bài tập 4: Tìm nghiệm nguyên của phương trình
 $1001x + 1002y = 1003$

Đáp số: $\begin{cases} x = -1003 + 1002t \\ y = 1003 - 1001t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$

Bài tập 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{4}$$

Đáp số: Vô nghiệm.

Bài tập 6: Giải bài toán cổ

Vừa gà vừa chó

Bó lại cho tròn

Một trăm chân chẵn

Hỏi số gà, số chó mỗi loại bao nhiêu con ?

Hướng dẫn: Tìm t thoả mãn hệ $\begin{cases} x = t \\ y = 50 - t \end{cases} (t \in \mathbb{N})$ và bài toán

Bài tập 7: Cho hai giỏ bi mỗi loại. Giỏ thứ nhất đựng lớn hơn 100 bi trắng, giỏ thứ hai đựng ít hơn 10 viên bi đỏ. Bạn thử lấy bi ra sao cho qua một lần lấy bi đỏ và sáu lần lấy bi trắng thì bạn được tổng số bi là 120 viên.

Đáp số: $\begin{cases} x = 120 - 6t \\ y = t \end{cases} (t \in [3, 10))$

Bài tập 8: Có 2 đoạn đường đi, đoạn thứ nhất dài 5m, đoạn thứ hai dài 6m. Bạn hãy xuất phát trên mỗi đoạn đường sao cho độ dài trên hai đoạn đường mà bạn đi được là 80m. Biết từ khi xuất phát đến lúc về vị trí xuất phát là được 1 vòng. Hãy tính số vòng đi mà bạn phải trên hai đoạn đường với các số nguyên lần vòng đi

Đáp số: Vô nghiệm

Bài tập 9: Cho phương trình

$$mx + my = 2$$

Tìm giá trị m để phương trình có nghiệm nguyên (x, y).

Đáp số: $m = \pm 2$ và $m = \pm 1$.

Bài tập 10: Cho phương trình

$$x + (m+1)y = 4$$

Tìm giá trị m nguyên để phương trình có nghiệm nguyên $x < 3$ và $y > 4$.

Đáp số: Không tồn tại m.

Bài tập 11: Cho phương trình

$$(m-1)x + my = m$$

Giá trị m để phương trình có nghiệm (x, y) nguyên thỏa mãn $x + y = 1$

Đáp số: Mọi m.

Bài tập 12: Cho phương trình

$$2^{10}x + 3^{10}y = 4^{10}$$

$$\text{Đáp số: } \begin{cases} x = 4^{10} - 3^{10}t \\ y = 2^{10}t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

Bài tập 13: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$1001x + 1002y = 1003$$

$$\text{Đáp số: } \begin{cases} x = -1003 + 1002t \\ y = 1003 - 1001t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

Bài tập 14: Giải phương trình nghiệm nguyên

$$3^{1000}x + 2 \cdot 3^{1000}y = 3^{1001}$$

$$\text{Đáp số: } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

Bài tập 15: Giải phương trình nghiệm nguyên

$$2^{10}x + 2^{11}y = 3 \cdot 2^{11}$$

$$\text{Đáp số: } \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

Bài tập 16: Tìm giá trị của m là số nguyên sao cho phương trình sau có nghiệm nguyên (x, y)

$$\frac{10}{11-m}x + \frac{7}{m-3}y = 17$$

Đáp số: $m = 10$.

Bài tập 17: Tìm giá trị m là số nguyên thỏa mãn $x + y = -1$ và phương trình sau có nghiệm nguyên (x, y)

$$3mx + my = 1$$

Đáp số: $m = \pm 1$.

Bài tập 18: Giải phương trình nghiệm nguyên

$$(1 + 3 \cdot 2^{10})x + (1 - 2^{10})y = 2 + 2^{10}$$

$$\text{Đáp số: } \begin{cases} x = 1 - 2047t \\ y = 1 + 5115t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

Bài tập 19: Phương trình vô định bậc nhất. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau:

$$6x + 15y = 10$$

Đáp số: Không có nghiệm nguyên.

Bài tập 20: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x + 3y = 11$

Đáp số: $x = -3t + 4$ và $y = 2t + 1$, với $t \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 21: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x + 5y = 10$

Bài tập 22: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $4x + 5y = 65$

Đáp số: $(x, y) = (15, 1); (10, 5); (5, 9)$.

Bài tập 23: Bài toán Euler:

Hãy phân tích 100 thành tổng của hai số. Trong đó một số chia hết cho 7, số còn lại chia hết cho 11.
Đáp số: 56 và 44.

Bài tập 24: Chia 12 ổ bánh mì cho 12 người. Thanh niên mỗi người hai ổ, người già hai người một ổ, các em bé thì cứ bốn em một ổ. Hỏi mấy thanh niên, mấy người già và mấy em bé?

Đáp số: 5 thanh niên, 1 người già, 6 em bé.

Bài tập 25: Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho: $x(y - 1) = 10y$.

Bài tập 26: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x + xy + y = 9$$

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Đại học KHTN Hà Nội năm học 2002 - 2003)

Đáp số:

$(x, y) = (0, 9); (9, 0); (1, 4); (4, 1); (-2, -11); (-11, -2); (-3, -6); (-6, -3)$.

Bài tập 27: Chứng minh rằng không thể có các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình:

$$x^3 - y^3 = 1993$$

(Đề thi vòng 2 vào lớp 10 Chuyên Trần Đại Nghĩa TP. HCM năm học 2004 - 2005)

Đáp số: Không tồn tại x, y .

Bài tập 28: Tìm số tự nhiên x và y thỏa mãn phương trình:

$$10x^2 + 29xy + 21y^2 = 2001.$$

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán Tin Đại học Vinh năm học 2001 - 2002)

Đáp số: $(x, y) = (4, 7)$.

Bài tập 29: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x^2 + x + 19 = z^2$$

Bài tập 30: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức:

$$y(x - 1) = x^2 + 2$$

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Đại học KHTN Hà Nội năm học 2000 - 2001)

Đáp số: $(x, y) = (-2, -2); (0, -2); (2, 6); (4, 6)$.

Bài tập 31: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình:

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$$

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Trần Đại Nghĩa năm học 2004 - 2005)

Đáp số: $(x, y) = (0, 0)$.

Bài tập 32: Hướng dẫn giải trên tập N các số tự nhiên:

$$(x + 1)y^2 = x^2 + 1576$$

Đáp số: $(x, y) = (18, 10); (82, 10)$

Bài tập 33: Hướng dẫn giải trên tập số nguyên tự nhiên:

$$2(x + y) + xy = x^2 + y^2$$

Đáp số: $(x, y) = (0, 0); (2, 0); (0, 2); (4, 2); (2, 4); (4, 4)$.

Bài tập 34: Hướng dẫn giải trên tập số nguyên:

$$(n + 5)^2 = 64(n - 2)^3$$

Đáp số: $n = 3$.

Bài tập 35: Tìm tất cả các số có 2 chữ số sao cho các chữ số x và y của các số đó là nghiệm của phương trình:

$$(x^2 - y^2)^2 = 4xy + 1$$

Đáp số: 17 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 36: Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $(x + y)(x^x + y^y) = 1981$.

Đáp số: $(x, y) = (3, 4); (4, 3)$.

Bài tập 37: Tìm số nguyên dương x, y thỏa mãn các phương trình sau:

$$a) \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$$

$$b) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{xy}$$

Đáp số:

a) $(x, y) = (2, 6)$

b) $(x, y) = (9, 4); (4, 9); (6, 5); (5, 6)$

Bài tập 38: Xác định các giá trị nguyên m để phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ mx - y = m \end{cases}$$

Có nghiệm nguyên.

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán Lê Hồng Phong TP.HCM năm học 1995 - 1996)

Đáp số: $m = 0 \vee m = -2$.

Bài tập 39: Tìm mọi k nguyên dương để hệ phương trình sau có nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} 2(k+1)x + (6k+2)y + 2k - 4 = 0 \\ 2(k+1)x + (k^2 + 3k + 2)y - 4k - 4 = 0 \end{cases}$$

Đáp số: $k = \{2; 4; 6\}$.

Bài tập 40: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a và b , hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2t = a \\ 2x - 2y + z - t = b \end{cases}$$

luôn luôn có nghiệm nguyên.

Bài tập 41: Chứng minh rằng nếu hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - 2x - a = 0 \\ y^2 - xy + x^2 - b = 0 \end{cases}$$

Với $a, b \in \mathbb{Z}$ có nghiệm hữu tỉ (x, y) thì x và y là những số nguyên.

Bài tập 42: Tìm các số nguyên dương (x, y) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 3y = 15 \\ x + y = 3^z \end{cases}$$

Đáp số: $(x, y, z) = (6, 3, 2)$.

Bài tập 43: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn phương trình: $x^2 + y^2 - x - y = 8$.

Đáp số:

$(x, y) = (2, 3); (2, -2); (-1, 3); (-1, -2); (3, 2); (3, -1); (-2, 2); (-2, -1)$.

Bài tập 44: Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $x^2 + 4y^2 = 115 - 2x$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + 3x + 2z - 4$.

Bài tập 45: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn phương trình sau: $x^2 + x - y^2 = 0$

Đáp số: $(x, y) = (0, 0); (-1, 0)$.

Bài tập 46: Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $x^2 - 4xy = 25$

b) $3x^3 - xy = 5$

c) $x + y = xy$

Bài tập 47: Tìm $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$$

Đáp số: (x, y, z) là hoán vị của $(1, 2, 2)$.

Bài tập 48: Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình sau:

a) $x + y + z + t = xyzt$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1995}$

c) $\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} + \frac{yz}{x} = 3$

d) $x + y + 1 = xyz$

Bài tập 49: Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn phương trình:

$$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$$

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán ĐH KHTN-ĐHQG Hà Nội)

Đáp số: $x = 0$ và $x = 1$.

Bài tập 50: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình:

$$3^x + 1 = (y + 1)^2$$

Đáp số: $(x, y) = (1, 1)$.

Bài tập 51: Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình sau:

a) $x^2 - 2y^2 = 5$.

b) $19x^2 + 28y^2 = 729$

c) $xy + x - 2y = 3$

Bài tập 52: Chứng tỏ phương trình sau vô nghiệm:

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z + 2000$$

Bài tập 53: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau:

$$(x + y + 1)^2 = 3(x^2 + y^2 + 1)$$

(Đề được trích từ toán tuổi thơ 2).

Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

Đáp số: $(x, y) = (1, 1)$.

Bài tập 54: Tìm các số nguyên x thỏa mãn phương trình sau:

$$|x - 3| + |x - 10| + |x + 101| + |x + 990| + |x + 1000| = 2004$$

Đáp số: $x = -102$ và $x = -100$.

Bài tập 55: Giải các phương trình nghiệm nguyên dương sau:

a) $x^2 - xy + y^2 = 3$

b) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2z = 4$.

Ta cần chứng minh phương trình vô nghiệm với $x \neq 0$.

Bài tập 56: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn phương trình:

$$x^2 + x - 1 = 3^{2y+1}$$

(Đề được trích Tạp chí từ toán học và tuổi trẻ)

Đáp số: Phương trình vô nghiệm.

Bài tập 57: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn phương trình:

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$$

Đáp số: Các nghiệm nguyên của phương trình là:

$(x, y) = (-5, 3); (-4, 9); (-3, 11); (0, 13); (3, 11); (4, 9); (5, 3)$.

Bài tập 58: Giải các phương trình nghiệm nguyên dương sau:

a) $x(x + 1)^3 = y^2$

b) $6x^2 - 5y^2 = 74$.

Bài tập 59: Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $x^2 + 2y^3 = 4z^3$

b) $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$

c) $x^2 - 5y^2 = 0$.

Bài tập 60: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau:

$$12x^2 + 6xy + 3y^2 = 28(x + y)$$

Hướng dẫn: Xem phương trình trên theo ẩn y và tham số x .

Đáp số: $(x, y) = (0, 0); (1, 8); (-1, 10)$.

Bài tập 61: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn phương trình: $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$.

Hướng dẫn: Xem phương trình trên ẩn x và tham số y .

Đáp số: $(x, y) = (-5, -3); (-4, 9); (-3, 11); (0, 13); (3, 11); (4, 9); (5, 3)$.

Bài tập 62: Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $2x^2 + 2y^2 - 2xy + x + y - 10 = 0$.

b) $x^2 - xy + 5y - 5x + 2 = 0$.

CHỦ ĐỀ 4
PHÉP CHIA HẾT VÀ PHÉP CHIA CÓ DƯ

1. Kiến thức cơ bản:

Định lý về phép chia:

Định lý:

Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$.

Khi đó có hai số nguyên q, r duy nhất sao cho:

$$a = bq + r$$

với $0 \leq r < |b|$, a là số bị chia, q là thương số và r là số dư.

Khi a chia cho b thì số dư có thể là $0; 1; 2; \dots; |b| - 1$.

Đặc biệt: Nếu $r = 0$ thì $a = bq$, khi đó ta nói a chia hết cho b hay b là ước của a .

Kí hiệu: $a : b$ hay $b | a$.

Vậy $a : b \Leftrightarrow$ có số nguyên p sao cho $a = bp$.

Tính chất:

Nếu $a : b$ và $b : c$ thì $a : c$.

Nếu $a : b, a : c$ và $(b, c) = 1$ thì $a : bc$.

Nếu $ab : c$ và $(b, c) = 1$ thì $a : c$.

Đồng dư thức với phép chia hết:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b : m.$$

Dấu hiệu chia hết

- Dấu hiệu chia hết cho 2

Tích hai số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 2.

Các số có số tận cùng là 0 hoặc số chẵn thì chia hết cho 2.

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 2 \Leftrightarrow a_0 : 2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

- Dấu hiệu chia hết cho 3 và 9

Tích ba số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 3

$$n(n+1)(n+2) : 3$$

Tổng các chữ số của một số chia hết cho 3 và 9 thì số đó chia hết cho 3 và 9.

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 3 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) : 3$$

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 9 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) : 9$$

- Dấu hiệu chia hết cho 4 và 25

Nếu hai chữ số cuối cùng của một số chia hết cho 4 thì số đó chia hết cho 4

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} : 4$$

Tích bốn số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 4.

Những số chia hết cho 25 chỉ khi hai chữ số cuối cùng hợp lại chia hết cho 25

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 25 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} : 25$$

- Dấu hiệu chia hết cho $8 = 2^3$ và $125 = 5^3$

Nếu ba chữ số cuối cùng của một số chia hết cho 8 thì số đó chia hết cho 8

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} : 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} : 8$$

Nếu ba chữ số cuối chia hết cho 125 số đó chia hết cho 125

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} : 125 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} : 125$$

- Dấu hiệu chia hết cho 5

Các số có chữ số tận cùng là 0 và 5 thì chia hết cho 5.

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 5 \Leftrightarrow a_0 = 5 \text{ và } a_0 = 0$$

Tích 5 số tự nhiên liên tiếp luôn luôn chia hết cho 5.

- Dấu hiệu chia hết cho 6

Tích 3 số tự nhiên liên tiếp thì luôn luôn chia hết cho 6.

Các số chia hết cho 2 và chia hết cho 3 thì chia hết cho 6.

- Dấu hiệu chia hết cho 11

Số chia hết cho 11 là những số có tổng các chữ số ở vị trí lẻ trừ đi tổng các chữ số ở vị trí chẵn chia hết cho 11.

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} : 11 \Leftrightarrow (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_2 - a_1 + a_0$$

- Dấu hiệu chia hết cho 7 và 13

$$\overline{a_{3n+2} a_{3n+1} a_{3n} \dots a_2 a_1 a_0} : 7 \Leftrightarrow \left((-1)^i \overline{a_{3n+2} a_{3n+1} a_{3n}} + \dots + \overline{a_2 a_1 a_0} \right) : 7$$

$$\overline{a_{3n+2} a_{3n+1} a_{3n} \dots a_2 a_1 a_0} : 13 \Leftrightarrow \left((-1)^i \overline{a_{3n+2} a_{3n+1} a_{3n}} + \dots + \overline{a_2 a_1 a_0} \right) : 13$$

Một số mệnh đề:

Mệnh đề 1:

Với mỗi số $p = 10s + r$ với $r = 1, 3, 7, 9$ luôn tìm được số nguyên k phụ thuộc vào s và r để $10k \equiv 1 \pmod{p}$, nghĩa là $10k - 1$ chia hết cho p .

Mệnh đề 2:

Số tự nhiên $T = \overline{a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i}$ có cùng số dư với số nguyên

$$10^{t-1} \cdot D = 10^{t-1} (a_1 + k a_2 + k^2 a_3 + \dots + k^{t-1} a_t)$$

khi chia cho số $p = 10s + r$ với $r = 1, 3, 7, 9$, còn k là số thỏa mãn $10k \equiv 1 \pmod{p}$.

Nói ngắn gọn: $T \equiv 10^{t-1} \cdot D \pmod{p}$.

Mệnh đề 3:

Số tự nhiên $T = \overline{a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i}$ chia hết cho p khi và chỉ khi

$$D = a_1 + k a_2 + k^2 a_3 + \dots + k^{t-1} a_t$$

chia hết cho p , trong đó $p = 10s + r$ với $r = 1, 3, 7, 9$ còn k là số thỏa mãn $10k \equiv 1 \pmod{p}$.

Mệnh đề 4:

Dãy số $\varphi(p)$ chia cho số lẻ p không là bội 5 là dãy số tuần hoàn có chu kỳ là ước số Euler $\varphi(p)$.

Định lý Ole:

Nếu $(a, p) = 1$ và p nguyên tố thì $a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$

Tính chia hết của đa thức

Cho các hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$. Đa thức $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ khi và chỉ khi đa thức dư là đa thức 0. Nếu đa thức $P(x)$ không chia hết cho đa thức $Q(x)$ khi và chỉ khi đa thức dư khác 0

$$\text{Hay } P(x) = Q(x) \cdot h(x) + R(x), \quad (R(x) \text{ là đa thức dư})$$

bậc của đa thức $R(x)$ luôn nhỏ hơn bậc của đa thức $Q(x)$.

Nếu $Q(x)$ có nghiệm là α thì $Q(\alpha) = R(\alpha)$ và nghiệm của đa thức $P(x)$ là nghiệm của đa thức $R(x)$.

Định lý Bézout:

Số x_0 là nghiệm của đa thức $P(x)$ khi và chỉ khi $P(x)$ chia hết $(x - x_0)$.

Các dạng toán cơ bản:

Dạng 1: Sử dụng tính chất: Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n , $m \geq 1$.

Dạng 2: Sử dụng bất đẳng thức mở rộng.

Dạng 3: Phép chia hết và phép chia có dư.

Dạng 4: Nguyên lý Dirichle đối với phép chia hết và chia có dư.

Dạng 5: Phương pháp quy nạp.

Dạng 6: Sử dụng đồng dư thức.

Dạng 7: Áp dụng định lý FERMAT.

Dạng 8: Hệ đếm cơ số.

2. Bài tập áp dụng:

Dạng 1: Tính chất: Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n , $m \geq 1$.

Bài tập 1: Chứng minh rằng:

a) Tích hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.

b) Tích ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

c) Tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 120.

Giải

a) Hai số chẵn liên tiếp có dạng $2n$ và $2n + 2$, (với $n \in \mathbb{Z}$).

Do đó: Tích của chúng là $2n(2n + 2) = 4n(n + 1)$.

Mà n và $n + 1$ là hai số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2.

Do đó: $n(n + 1) : 2$.

Suy ra: $4n(n + 1) : 8$.

Vậy tích của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.

b) Ba số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 3 nên tích của chúng chia hết cho 6 (vì $(2, 3) = 1$).

c) Ta có: $120 = 3.5.8$.

Trong 5 số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 và một số chia hết cho 5 nên tích chia hết cho 3 và 5.

Ta chứng minh trong 5 số nguyên liên tiếp có hai số chẵn liên tiếp nên tích chia hết cho 8 (câu a).

Thật vậy, 5 số nguyên liên tiếp có dạng $n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4$.

Nếu n là số chẵn thì n và $n + 2$ là hai số chẵn liên tiếp.

Nếu n là số lẻ thì $n + 1$ và $n + 3$ là hai số chẵn liên tiếp.

Do đó: Tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho $3.5.8 = 120$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng với $m, n \in \mathbb{Z}$, ta có:

a) $n^3 + 11n : 6$

b) $mn(m^2 - n^2) : 3$.

c) $n(n + 1)(2n + 1) : 6$.

Giải

a) Ta có: $n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = (n - 1)n(n + 1) + 12n$.

Vì $(n - 1)n(n + 1)$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(n - 1)n(n + 1) : 6$ và $12n : 6$.

Vậy $n^3 + 11n : 6$

b) Ta có:

$mn(m^2 - n^2) = mn[(m^2 - 1) - (n^2 - 1)] = mn(m^2 - 1) - mn(n^2 - 1)$.

Mà

$$m(m^2 - 1) = (m - 1)m(m + 1) : 6$$

và

$$n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1) : 6$$

nên

$mn(m^2 - n^2) : 6$, với $m, n \in \mathbb{Z}$.

c) $n(n + 1)(2n + 1) = n(n + 1)(n + 2 + n - 1) = n(n + 1)(n + 2) + (n - 1)n(n + 1) : 6$.

Bài tập 3:

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, chứng minh rằng: $p^2 - 1 : 24$.

b) Chứng minh rằng n và n^5 có chữ số tận cùng giống nhau.

Giải

a) p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

Ta có:

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$$

p là số lẻ nên $p - 1$ và $p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp nên:

$$(p - 1)(p + 1) : 8 \quad (1)$$

Mặt khác, $p - 1, p, p + 1$ là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà p không chia hết cho 3 nên $p - 1$ hoặc $p + 1$ chia hết cho 3.

Từ đó, suy ra:

$$(p - 1)(p + 1) : 3 \quad (2)$$

Vì $(3, 8) = 1$ và từ (1) và (2), suy ra:

$$p^2 - 1 : 24$$

b) Để chứng minh n và n^5 có chữ số tận cùng giống nhau, ta chứng minh hiệu $n^5 - n : 10$.

Ta có:

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n^2 - 1)[(n^2 - 4) + 5]$$

$$= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 5n(n^2 - 1)$$

$$(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5(n - 1)n(n + 1)$$

$(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho $2.5 = 10$

và $5n(n-1)n(n+1) \vdots 10$.

Do đó: $n^5 - n \vdots 10$.

Nhận xét: Ta chứng minh được $n^5 - n \vdots 30$, với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 4:

a) Chứng minh rằng: $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

b) Chứng minh với n chẵn thì $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ là số nguyên.

Giải

a) Ta có:

$$\frac{7n}{15} = n - \frac{8n}{15} = n - \frac{n}{5} - \frac{n}{3},$$

Do đó:

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15} = \frac{n^5 - n}{5} + \frac{n^3 - n}{3} + n$$

Ta chứng minh được $n^5 - n \vdots 10$ và $n^3 - n \vdots 6$.

Do đó: $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ là số nguyên (đpcm).

b) Giả sử: $n = 2m$, ($m \in \mathbb{Z}$), ta có:

$$\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24} = \frac{m}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} = \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Ta chứng minh được: $m(m+1)(2m+1) \vdots 6$ nên $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ là số nguyên.

Bài tập 5: Cho m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp.

Chứng minh rằng: $mn - m - n + 1 \vdots 192$.

Giải

m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp nên có dạng:

$$m = (2k-1)^2 \text{ và } n = (2k+1)^2, \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} mn - m - n + 1 &= (m-1)(n-1) = [(2k-1)^2 - 1][(2k+1)^2 - 1] \\ &= (4k^2 - 4k)(4k^2 + 4k) = 16k^2(k-1)(k+1). \end{aligned}$$

Ta có: $(k-1)k(k+1) \vdots 3$ và $(k-1)k(k+1) \vdots 4$ nên $k^2(k-1)(k+1) \vdots 12$.

Do đó: $mn - m - n + 1 = 16k^2(k-1)(k+1) \vdots 16 \cdot 12 = 192$.

Bài tập 6: Chứng minh rằng trong 1900 số tự nhiên liên tiếp có một số có tổng các chữ số chia hết cho 27.

Giải

Giả sử 1900 số tự nhiên liên tiếp là:

$$n, n+1, \dots, n+1899. \quad (1)$$

Trong 1000 số tự nhiên liên tiếp $n, n+1, \dots, n+999$ có một số chia hết cho 1000.

Giả sử số đó là n_0 . Khi đó: n_0 có tận cùng bằng 3 chữ số 0.

Giả sử tổng các chữ số của n_0 là k .

$$\text{Khi đó: } 27 \text{ số } n_0, n_0+1; \dots, n_0+9; n_0+19; \dots; n_0+99; n_0+199; n_0+299; \dots, n_0+899 \quad (2)$$

có tổng các chữ số lần lượt là $k; k+1; \dots, k+26$.

Trong 27 số tự nhiên liên tiếp $k; k+1; \dots; k+26$ có một số chi hết cho 27 (đpcm).

Chú ý rằng: Từ $n_0 + 899 \leq n + 999 + 899 < n + 1899$ nên các số ở trong dãy (2) còn nằm trong dãy (1).

Vậy trong 1900 số tự nhiên liên tiếp có một số có tổng các chữ số chia hết cho 27.

Bài tập 7: Tìm mọi số tự nhiên sao cho số:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$$

chia hết cho 5.

Giải

Ta có:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 14$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 12n + 14 \div 5$$

$$\Rightarrow 4(n-1)^2 + 20n + 10 \div 5$$

$$\Rightarrow (n-1)^2 \div 5$$

Thật vậy, ta đặt $n = 5k + 1, k \in \mathbb{N}$.

Khi đó $(n-1)^2 = 25k \div 5$.

Vậy các số tự nhiên n phải tìm có dạng $n = 5k + 1, k \in \mathbb{N}$.

Bài tập 8: Tìm hai số tự nhiên sao cho tích của chúng chia hết cho tổng của chúng.

Giải

Gọi x và y là 2 số tự nhiên phải tìm, ta có:

$$xy \div x + y$$

$$\Leftrightarrow xy = k(x+y), k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-k)(y-k) = k^2 \quad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow x, y > k$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq y > 0$

$$\Rightarrow x - k \geq y - k > 0$$

Giả sử k_1, k_2 là các ước dương của k^2 và $1 < k_1 \leq k \leq k_2 < k^2$

Ta có các khả năng sau:

$$a) \begin{cases} x - k = k^2 \\ y - k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k(k+1) \\ y = k+1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - k = k_1 \\ y - k = k_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k + k_1 \\ y = k + k_2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - k = k \\ y - k = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 2k \end{cases}$$

Số các cặp số tự nhiên tìm được phụ thuộc số ước số khác 1 và khác k của k^2 .

Bài tập 9: Cho a, b là các chữ số với a khác 0. Chứng minh rằng

a) $\overline{abba}$ chia hết cho 11

b) $\overline{ababab}$ chia hết cho 7

c) $\overline{aaabbb}$ chia hết cho 37

d) $\overline{abcabc}$ chia hết cho 7, 11 và 13.

Hướng dẫn

a) $\overline{abba} = 11(91a + 10b)$ nên chia hết cho 11

b) $\overline{ababab} = 7.1443.ab$ nên chia hết cho 7

c) $\overline{aaabbb} = 37.3.(1000a + b)$ nên chia hết cho 37

d) $\overline{abcabc} = 1001.abc = abc.7.11.13$ nên chia hết cho 7, 11 và 13.

Bài tập 10: Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ để đa thức $x^2 + 3x + 2n$ chia hết cho đa thức $x - 1$.

Giải

$$\text{Ta có: } x^2 + 3x + 2n = (x+4)(x-1) + 2n+4$$

Để hai đa thức chia hết cho nhau thì đa thức dư phải bằng đa thức 0

$$\Leftrightarrow 2n+4=0$$

$$\Leftrightarrow n=-2$$

Bài tập 11: Tìm giá trị của a sao cho số $T = \overline{35a65148}$ chia hết cho 13.

Giải

Áp dụng mệnh đề 3:

$$\text{Ta có: } D = 3 + 4.5 + 3.a - 1.6 - 4.5 - 3.1 + 1.4 + 4.8 = 30 + 3a = 3(10 + a) \pmod{13}$$

nên $T : 3 \Leftrightarrow D : 13 \Leftrightarrow a = 3$

Bài tập 12: Không sử dụng máy tính. Tìm số dư của số $T = 35265148$ khi chia cho 13.

Giải

Áp dụng mệnh đề 3, ta tính được:

$$D = 36 \equiv -3 \pmod{13}$$

$$\text{Từ: } t = 8, \text{ ta có } 10^7 \equiv (-3)^7 \equiv 9^3(-3) \equiv (-4)^3(-3) \equiv 16.12 \equiv -3 \equiv 10 \pmod{13}.$$

Suy ra: $R = 10(-3) = -30 \equiv 9 \pmod{13}$ nên số dư là 9.

Bài tập 13: Tìm số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho số $10^{2002.2n} - 1$ chia hết cho 9.

Giải

$$\text{Ta có: } 10^{2002.2n} - 1 = (10 - 1)t = 9.t, \quad (t \in \mathbb{N})$$

Suy ra: $10^{2002.2n} - 1$ chia hết cho 9 thỏa mãn với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 14: Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $10^n + 1986$ chia hết cho $10^{1986} - 1$.

Giải

$$\text{Ta có: } 10^{1986} - 1 = (10 - 1)t, \quad (t \in \mathbb{N})$$

$$\text{và } 10^n + 1986 = (10^n - 1) + 1987 = 9.k + 1987, \quad (k \in \mathbb{N})$$

nên không chia hết cho 9.

Suy ra không tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 15: Tìm giá trị $x \in \mathbb{N}$ để đa thức $x^3 + 6x^2 + 3x - 5$ chia hết cho đa thức $x + 2$.

Giải

$$\text{Ta có: } x^3 + 6x^2 + 3x - 5 = (x + 2)(x^2 + 4x - 3) + \frac{1}{x + 2}$$

Suy ra: $x + 2$ phải là ước của 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases} \text{ (không tồn tại } x \text{ là số tự nhiên)}$$

Bài tập 16: Cho ba số a, b, c bất kì.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ chia hết cho biểu thức $(a + b + c)$.

Chứng minh

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Suy ra: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ chia hết cho $(a + b + c)$

Bài tập 17: Số $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ có chia hết cho số 343 với mọi số tự nhiên n không?

Giải

$$\text{Ta có: } 343 = 7^3$$

$$\text{và } 9n^3 + 9n^2 + 3n - 16 = (3n + 1) - 49.$$

$$\text{Nếu } (3n + 1) : 7 \text{ thì } (3n + 1)^3 : 7^3$$

$$\text{Mà } 49 \nmid 7^3 \text{ nên } (3n + 1)^3 - 49 \nmid 7^3$$

$$\text{Nếu } (3n + 1) \nmid 7 \text{ thì } (3n + 1)^3 - 49 \nmid 7$$

$$\text{Suy ra: } (3n + 1)^3 - 49 \nmid 7^3$$

$$\text{Suy ra: } 9n^3 + 9n^2 + 3n - 16 \nmid 343$$

Bài tập 18: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $n^2 + n + 1$ chia hết cho 3.

Giải

Thay lần lượt từng giá trị n vào $n^2 + n + 1$ ta được:

$$n = 3k \Rightarrow n^2 + n + 1 = 3k(k + 1) + 1 \nmid 3$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 + n + 1 = 9k(k + 1) + 3 : 3$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 + n + 1 = 3(k^2 + 5k + 2) + 1 \nmid 3.$$

Vậy số tự nhiên $n = 3k + 1$ thỏa mãn $n^2 + n + 1$ chia hết cho 3.

Dạng 2: Sử dụng bất đẳng thức mở rộng.

Kiến thức:

$$\text{Với } n \in \mathbb{N}, \text{ ta có: } a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Với n lẻ: $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

Suy ra:

$a, b \in \mathbb{Z}$ và $a \neq b$ thì $a^n - b^n : (a - b), (n \in \mathbb{N})$

$a, b \in \mathbb{Z}, n$ lẻ và $a \neq -b$ thì $a^n + b^n : (a + b), (n \in \mathbb{N})$

$a, b \in \mathbb{Z}, n$ chẵn và $a \neq -b$ thì $a^n - b^n : (a + b), (n \in \mathbb{N})$

Bài tập 19: Với n chẵn ($n \in \mathbb{N}$) chứng minh rằng: $20^n + 16^n - 3^n - 1 : 323$.

Giải

Ta có: $323 = 17.19$. Biến đổi:

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$$

$20^n - 1 : (20 - 1) = 19$ và n chẵn nên $16^n - 3^n : (16 + 3) = 19$.

Do đó:

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 : 19 \quad (1)$$

Mặt khác: $20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 3^n) + (16^n - 1^n)$

$20^n - 3^n : (20 - 3) = 17$ và n chẵn nên $16^n - 1^n : (16 + 1) = 17$

Do đó:

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 : 17 \quad (2)$$

$(17, 19) = 1$ và từ (1), (2) suy ra: $20^n + 16^n - 3^n - 1 : 323$.

Bài tập 20: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta có:

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133$.

b) $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$

c) $7.5^{2n} + 12.6^n : 19$

Giải

a) Ta có: $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2.11^n + 12.12^{2n} = 121.11^n + 12.144^n$
 $= (133 - 12).11^n + 12.144^n = 133.11^n + 12(144^n - 11^n)$

Vì $133.11^n : 133$ và $144^n - 11^n : (144 - 11) = 133$ nên $133.11^n + 12(144^n - 11^n) : 133$

Hay $11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133$ (đpcm)

b) Ta có: $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} = 25.5^n + 26.5^n + 8.8^{2n} = 51.5^n + 8.64^n$
 $= (59 - 8).5^n + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n) : 59$.

Vì $64^n - 5^n : (64 - 5) = 59$.

Vậy $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$.

c) Ta có: $7.5^{2n} + 12.6^n = 7.25^n + (19 - 7).6^n = 19.6^n + 7(25^n - 6^n) : 19$.

Vì $25^n - 6^n : (25 - 6) = 19$.

Bài tập 21: Cho a, b là các số tự nhiên không chia hết cho 5. Chứng minh rằng: $pa^{4m} + qb^{4m}$, chia hết cho 5 khi và chỉ khi $p + q$ chia hết cho 5 (với $p, q, m \in \mathbb{N}$).

Giải

Ta có: $pa^{4m} + qb^{4m} = p(a^{4m} - 1) + q(b^{4m} - 1) + p + q \quad (1)$

Mà $a^{4m} - 1 = (a^4)^m - 1 : (a^4 - 1)$

$$\begin{aligned} a^4 - 1 &= (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a^2 - 1)(a^2 - 4 + 5) \\ &= (a^2 - 1)(a^2 - 4) + 5(a^2 - 1) \\ &= (a - 2)(a - 1)(a + 1)(a + 2) + 5(a^2 - 1) \end{aligned}$$

Vì $a - 2, a - 1, a, a + 1, a + 2$ là 5 số nguyên liên tiếp nên có ít nhất một số chia hết cho 5, mà a không chia hết cho 5 nên một trong các số $a - 2, a - 1, a + 1, a + 2$ phải chia hết cho 5.

Vậy $a^4 - 1 : 5$, từ đó: $a^{4m} - 1$ và $b^{4m} - 1$ cùng chia hết cho 5.

Do vậy từ (1), suy ra: $pa^{4m} + qb^{4m} : 5 \Leftrightarrow p + q : 5$.

Nhận xét: Bài toán này có thể áp dụng định lý Fermat để giải như sau:

Ta có: $(a, 5) = (b, 5) = 1$ nên $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$ và $b^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

Suy ra: $pa^{4m} + qb^{4m} \equiv p + q \pmod{5}$ (đpcm).

Bài toán tổng quát:

Cho p là số nguyên tố $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên không chia hết cho p .

$p_1, p_2, \dots, p_n$ và $k_1, k_2, \dots, k_n$ là các số tự nhiên. Chứng minh rằng:

$p_1 a_1^{(p-1)k_1} + p_2 a_2^{(p-1)k_2} + \dots + p_n a_n^{(p-1)k_n}$ chia hết cho p khi và chỉ khi $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ chia hết cho p .

Bài tập 22: Cho $a_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ và $b_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên có một và chỉ một trong hai số a_n, b_n chia hết cho 5.

Giải

Ta có:

$$a_n \cdot b_n = (2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1) = (2^{2n+1} + 1)^2 - (2^{n+1})^2 \\ = 4^{2n+1} + 2 \cdot 2^{2n+1} + 1 - 2^{2n+2} = 4^{2n+1} + 1.$$

Vì $2n+1$ là số lẻ nên $4^{2n+1} + 1 \equiv 4 + 1 = 5$.

Vậy $a_n \cdot b_n \equiv 5$.

Suy ra: $a_n \equiv 5$ hoặc $b_n \equiv 5$.

Mà $a_n - b_n = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$ không chia hết cho 5 nên hai số a_n và b_n không thể đồng thời chia hết cho 5.

Vậy trong hai số a_n, b_n chỉ có một số chia hết cho 5 với mỗi n là số tự nhiên.

Bài tập 23: Cho số tự nhiên $n > 1$ và $2^n - 2 \vdots n$. Chứng minh rằng:

$$2^{2^n-1} - 2 \vdots (2^n - 1)$$

Giải

Theo giả thiết: $2^n - 2 \vdots n$ suy ra: $2^n - 2 = n \cdot k, (k \in \mathbb{N})$.

$$\text{Ta có: } 2^{2^n-1} - 2 = 2 \left(2^{2^n-2} - 1 \right) \vdots (2^n - 1),$$

$$\text{Vì } 2^{nk} - 1 = (2^n)^k - 1 \vdots (2^n - 1)$$

Bài tập 24: Cho $A = (10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$. Chứng minh rằng A là số chính phương nhưng không là lập phương của một số tự nhiên.

Giải

$$\text{Ta có: } 10^{n+1} - 1 = (10 - 1)(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1)$$

$$\text{Suy ra: } 10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1 = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 5) + 1 = \frac{1}{9}(10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} - 5 + 9) \\ = \frac{1}{9}(10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4) = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3} \right)^2$$

Vì $10^{n+1} + 2 \vdots 3$ nên A là một số chính phương.

Ta có: $\frac{10^{n+1} + 2}{3}$ là số chẵn nên $A \vdots 4$.

$$A = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3} \right)^2 = \left[\frac{2(5 \cdot 10^n + 1)}{3} \right]^2 \text{ chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 8 vì } (5 \cdot 10^n + 1) \text{ là số lẻ.}$$

Vậy A không là lập phương của một số tự nhiên.

Bài tập 25: Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ (với } a_i \in \mathbb{Z}; t = 0, 1, 2, \dots, n)$$

a, b là hai số nguyên khác nhau.

Chứng minh rằng: $f(a) - f(b) \vdots (a - b)$

Áp dụng: Chứng minh rằng không có đa thức $P(x)$ nào với hệ số nguyên có thể có giá trị $P(7) = 5$ và $P(15) = 9$.

Giải

$$\text{Ta có: } f(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0$$

$$f(b) = b_n b^n + b_{n-1} b^{n-1} + \dots + b_1 b + b_0$$

$$\text{Suy ra: } f(a) - f(b) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \dots + a_1(a - b)$$

Vì $a^k - b^k \vdots (a - b)$, với $k \in \mathbb{N}$ nên $f(a) - f(b) \vdots (a - b)$

Áp dụng: Giả sử có đa thức $P(x)$ với hai số nguyên sao cho $P(7) = 5$ và $P(15) = 9$.

Khi đó: $P(15) - P(7) \vdots (15 - 7) = 8 \Rightarrow 4 \vdots 8$ (vô lý).

Vậy không có đa thức với hệ số nguyên nào có thể có giá trị $P(7) = 5$ và $P(15) = 9$.

Bài tập 26: Cho $f(x)$ là đa thức bậc lớn hơn 1 có hệ số nguyên. Với k, l là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng: $f(k+l) : k.l$ khi và chỉ khi $f(k) : l$ và $f(l) : k$.

Giải

Áp dụng kết quả bài 13, ta có:

$$f(k+l) - f(k) : l \quad (1)$$

$$f(k+l) - f(l) : k \quad (2)$$

Nếu $f(k+l) : k.l$ thì $f(k+l) : l$ và từ (1) suy ra: $f(k) : l$.

Nếu $f(k+l) : k.l$ thì $f(k+l) : k$ và từ (2) suy ra: $f(k) : k$.

Ngược lại, nếu $f(k) : l$ và $f(l) : k$ thì từ (1) và (2) suy ra: $f(k+l) : k$ và $f(k+l) : l$, vì $(k, l) = 1$ nên $f(k, l) : k.l$ (đpcm).

Bài tập 27: Cho $f(x), g(x)$ là hai đa thức với hệ số nguyên thỏa điều kiện:

$$F(x) = f(x^3) + xg(x^3)$$

chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$. Chứng minh rằng $f(x), g(x)$ cùng chia hết cho $(x - 1)$.

Giải

Ta có:

$$F(x) = [f(x^3) - f(1)] + x[g(x^3) - g(1)] + f(1) + xg(1) \quad (1)$$

Theo bài 13, ta có:

$$f(x^3) - f(1) : (x^3 - 1) : (x^2 + x + 1)$$

$$g(x^3) - g(1) : (x^3 - 1) : (x^2 + x + 1)$$

Theo giả thiết, $F(x) : (x^2 + x + 1)$ nên từ (1) suy ra: $f(1) + xg(1) : (x^2 + x + 1)$

Mà $f(1) + xg(1)$ có bậc bé hơn hoặc bằng 1 nên $f(1) + xg(1) \equiv 0 \Rightarrow f(1) = g(1) = 0$.

Theo định lý Bézout, suy ra: $f(x) : (x - 1)$ và $g(x) : (x - 1)$.

Dạng 3: Phép chia hết và phép chia có dư:

Để chứng minh biểu thức: $A(n) : p$ ta xét tất cả các số dư trong phép chia n cho p . Chia n cho p được các số dư là $0, 1, 2, \dots, p - 1$. Đặc biệt nếu p lẻ thì ta có thể viết:

$$n = k.p + r, \text{ với } r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{p-1}{2}.$$

Chẳng hạn khi chia n cho 5 thì n có dạng:

$$n = 5k, n = 5k \pm 1, n = 5k \pm 2, (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài tập 28: Tìm dư trong phép chia một số chính phương cho 3, cho 5.

Giải

Số chính phương có dạng n^2 , ($n \in \mathbb{N}$)

a) Chia n cho 3 thì $n = 3k$ hoặc $n = 3k \pm 1$.

Nếu $n = 3k$ thì $n^2 = 9k^2$ chia hết cho 3.

Nếu $n = 3k \pm 1$ thì $n^2(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$ chia 3 dư 1.

Vậy một số chính phương khi chia cho 3 có dư là 0 hoặc 1.

Từ đó, ta có kết quả sau: Một số có dạng $3k + 2$ không thể là một số chính phương.

2) Chia n cho 5 thì $n = 5k$, $n = 5k \pm 1$, $n = 5k \pm 2$.

Nếu $n = 5k$ thì $n^2 = 25k^2$ chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$ chia 5 dư 1.

Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$ chia 5 dư 4.

Vậy một số chính phương khi chia cho 5 có dư là 0, 1 hoặc 4.

Từ đó, ta có kết quả sau: Một số có dạng $5k + 2$ hoặc $5k + 3$ không thể là một số chính phương.

Bài tập 29: Cho x, y, z là các số nguyên thỏa phương trình:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

a) Chứng minh rằng trong hai số x, y có ít nhất một số chia hết cho 3.

b) Chứng minh rằng tích xyz chia hết cho 12.

(Đề thi vào lớp 10 Trường PTNK ĐHQG TP HCM năm học 2002 - 2003)

Giải

Xem phương trình: $x^2 + y^2 = z^2$, (1)

a) Giả sử x và y đều không chia hết cho 3.

Theo bài 3, ta có:

$$x^2 = 3k + 1$$

$$y^2 = 3t + 1$$

$$\Rightarrow z^2 = 3p + 2, \text{ vô lí}$$

Do đó trong hai số x và y , có ít nhất một số chia hết cho 3.

b) Ta chứng minh rằng trong 3 số x, y, z có ít nhất một số chia hết cho 2.

Nếu x hoặc y chia hết cho 2. Yêu cầu đã giải quyết xong.

Nếu cả hai số x và y đều không chia hết cho 2.

$$x = 2m + 1 \Rightarrow x^2 = 4m(m + 1) + 1$$

$$y = 2n + 1 \Rightarrow y^2 = 4n(n + 1) + 1$$

$$\Rightarrow z^2 = 4m(m + 1) + 4n(n + 1) + 2$$

$$\Rightarrow z^2 : 2 \text{ (2 nguyên tố)}$$

$$\Rightarrow z : 2.$$

$$\text{Ta có thể giả sử } x : 2 \Rightarrow x = 2a$$

$$\Rightarrow (z + y)(z - y) = 2a \quad (2)$$

$\Rightarrow z + y$ và $z - y$ cùng chẵn.

$$\begin{cases} z + y = 2b \\ z - y = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = b + c \\ y = b - c \end{cases}$$

Từ (2), ta có: $bc = a^2$, ($b > c$)

Gọi $d = (b, c) \Rightarrow b = md, c = nd$, ($(m, n) = 1$).

$$\text{Suy ra: } a^2 = mnd^2 \Rightarrow a^2 : d^2 \Leftrightarrow a : d \Leftrightarrow a = pd \Rightarrow mn = p^2$$

m, n nguyên tố cùng nhau mà mn là số chính phương nên m và n đều là số chính phương.

$$m = u^2, n = v^2, \text{ với } (u, v) = 1.$$

$$\Rightarrow p = uv.$$

Do đó, ta có:

$$\begin{cases} x = 2uvd \\ y = (u^2 - v^2)d \\ z = (u^2 + v^2)d \end{cases}$$

Với $(u, v) = 1$

$$\Rightarrow xyz = 2(u^2 - v^2)(u^2 + v^2)uvd^3.$$

$$\Rightarrow xyz : 4, \forall u, v \in \mathbb{N}.$$

Ta có: $xyz : 3$ và $xyz : 4 \Rightarrow xyz : 12$, $(3, 4) = 1$.

$$\text{Vậy } x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow xyz : 12.$$

Bài tập 30: Chứng minh rằng số: $a = (1976^{1976} - 1974^{1974})(1976^{1975} - 1974^{1973})$ chia hết cho 10000.

Giải

Trước hết, ta nhận xét rằng:

$$a : 2^{1976} \cdot 2^{1974} = 2^{3947}$$

$$\Rightarrow a : 2^4$$

Ta cần chứng minh: $a : 5^4$

Ta có:

$$1976^{1976} = (1975 + 1)^{1976} = 25k + 1, k \in \mathbb{Z}_+$$

$$1974^{1974} = (1975 - 1)^{1974} = 25q + 1, q \in \mathbb{Z}_+$$

$$1976^{1974} = (1975 + 1)^{1974} = 25p + 1, p \in \mathbb{Z}_+$$

$$1974^{1973} = (1975 - 1)^{1973} = 25t + 1, t \in \mathbb{Z}_+$$

Suy ra: $a : 625 = 5^4$ và $(2, 5) = 1 \Rightarrow (2^4, 5^4) = 1$.

Do đó, ta có: $a : 2^4 \cdot 5^4 = 10000$

Vậy $a = (1976^{1976} - 1974^{1974})(1976^{1975} - 1974^{1973})$ chia hết cho 10 000.

Bài tập 31: Chứng minh:

a) $2222^{5555} + 5555^{2222} : 7$

b) $1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2 : 7$

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} 2222^{5555} + 5555^{2222} &= (7k + 3)^{5555} + (7l + 4)^{2222} \\ &= 7m + 3^{5555} + 7n + 4^{2222} \\ &= 7p + 243^{1111} + 16^{1111} \\ &= 7p + 259q = 7r : 7 \\ (k, l, p, q, m, n, r &\in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2 \\ &= (7m + 1)^{1962} + (7n + 3)^{1964} + (7p - 2)^{1966} + 2 \\ &= 7q + 1 + 3^{1964} + 2^{1966} + 2 \\ &= 7q + 9 \cdot 27^{654} + 2 \cdot 8^{655} + 3 \\ &= 7r + 9 + 2 + 3 \\ &= 7r + 14, (m, n, p, q, r \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Suy ra: đpcm.

Bài tập 32: Cho n số $a_1, a_2, \dots, a_n$. Mỗi số có giá trị hoặc +1 hoặc -1.

Chứng minh rằng nếu $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1 = 0$ thì $n : 4$.

Giải

Theo giả thiết, ta có: $a_i = \pm 1$, với $i = 1, 2, \dots, n$.

$\Rightarrow a_i \cdot a_k = \pm 1$, với $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Ta có: $(a_1a_2)(a_2a_3)\dots(a_na_1) = (a_1a_2\dots a_n)^2 = 1$.

Ta suy ra số các thừa số âm ($a = -1$) trong tích trên là một số chẵn.

Ta gọi k là số các thừa số có trị số bằng -1.

$$k = 2m, m \in \mathbb{N}$$

Nhưng vì

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1 = 0$$

nên số các thừa số dương và âm bằng nhau.

Do đó: $n = 2k \Rightarrow n : 4$ (đpcm).

Bài tập 33: Chứng minh rằng tổng lũy thừa chẵn của ba số nguyên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Giải

Tổng lũy thừa $2k$, ($k \in \mathbb{N}^*$) của ba số nguyên liên tiếp có dạng:

$$(n-1)^{2k} + n^{2k} + (n+1)^{2k}$$

Trong ba số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3, hai số còn lại có dạng $3k \pm 1$ nên tổng lũy thừa chẵn của ba số nguyên liên tiếp chia cho 3 có dư là 2 nên không thể là một số chính phương.

Bài tập 34: Chứng minh rằng tổng bình phương của 5 số nguyên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Giải

Tổng bình phương của 5 số nguyên liên tiếp có dạng:

$$T = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2).$$

Ta chứng minh $(n^2 + 2)$ không chia hết cho 5 với mọi n .

Nếu $n \vdots 5$ thì $(n^2 + 2)$ chia cho 5 dư 2.

Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 + 2 = (5k \pm 1)^2 + 2$ chia cho 5 dư 3.

Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 2 = (5k \pm 2)^2 + 2$ chia cho 5 dư 1.

Vậy $n^2 + 2 \not\vdots 5$ nên T là số chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25, do đó T không thể là một số chính phương.

Bài tập 35: Tìm tất cả các số tự nhiên n để $(3^{2n} + 3^n + 1) \vdots 13$.

Giải

Với $n = 3k$, ta có: $3^{2n} + 3^n + 1 = 3^{6k} + 3^{3k} + 1 = (27^{2k} - 1) + (27^k - 1) + 3$

Chia cho 13 có dư là 3 vì $(27^n - 1) \vdots (27 - 1) = 26$.

Với $n = 3k + 1$, ta có: $3^{2n} + 3^n + 1 = 3^{6k+2} + 3^{3k+1} + 1 = 9(27^{2k} - 1) + 3(27^k - 1) + 13 \vdots 13$

Với $n = 3k + 2$, ta có: $3^{2n} + 3^n + 1 = 3^{6k+4} + 3^{3k+2} + 1 = 81(27^{2k} - 1) + 9(27^k - 1) + 91 \vdots 13$

Vậy n không chia hết cho 3 thì $(3^{2n} + 3^n + 1) \vdots 13$.

Bài tập 36: Chứng minh rằng: $(1^n + 2^n + 3^n + 4^n) \vdots 5$ khi và chỉ khi n không chia hết cho 4 ($n \in \mathbb{N}$).

Giải

Nếu $n = 4k + 1$ hoặc $n = 4k + 3$ thì n là số lẻ nên ta có:

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n = (1^n + 4^n) + (2^n + 3^n) \vdots 5.$$

Nếu $n = 4k$ thì

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \equiv 4 \pmod{5}.$$

Vì $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$; $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$ và $4^4 \equiv 1 \pmod{5}$

Nếu $n = 4k + 2$ thì:

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 1 + 2^{4k+2} + 3^{4k+2} + 4^{4k+2} = (1 + 4^{2k+1}) + (9^{2k+1} + 16^{2k+1}) \vdots 5$$

Vì $(1 + 4^{2k+1}) \vdots (1 + 4) = 5$ và $9^{2k+1} + 16^{2k+1} \vdots (9 + 16) = 25$.

Bài tập 37: Cho ba số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$. Chứng minh rằng: $xyz \vdots 60$.

Giải

Ta có: $60 = 3.4.5$

a) Chứng minh $xy \vdots 3$.

Thật vậy, nếu x và y cùng không chia hết cho 3 thì $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ và $y^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Suy ra: $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{3}$.

Khi đó: z^2 chia cho 3 dư 2, vô lý (theo bài 16)

Vậy $x \vdots 3$ hoặc $y \vdots 3$, suy ra: $xyz \vdots 3$. (1)

b) Chứng minh: $xyz \vdots 4$.

i) Nếu x, y cùng lẻ, giả sử: $x = 2k + 1, y = 2l + 1$ thì

$$x^2 + y^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4(k^2 + l^2 + k + l) + 2$$

là số chẵn, không chia hết cho 4 nên $x^2 + y^2$ không thể là số chính phương.

Vậy trường hợp này không xảy ra.

ii) Nếu x, y cùng chẵn thì $xy \vdots 4 \Leftrightarrow xyz \vdots 4$.

iii) Giả sử x chẵn, y lẻ (trường hợp x lẻ, y chẵn chứng minh tương tự):

Giả sử: $x = 2n, y = 2m + 1$, khi đó z lẻ. Đặt: $z = 2p + 1$. Ta có:

$$z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (2n)^2 + (2m + 1)^2 = (2p + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4m^2 + 4m + 1 = 4p^2 + 4p + 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 = p(p + 1) - m(m + 1) \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2 \Rightarrow x \vdots 4.$$

Vậy $xyz \vdots 4$ (2)

c) Chứng minh: $xyz \vdots 5$.

i) Nếu $x \vdots 5$ hoặc $y \vdots 5$ thì $xyz \vdots 5$.

ii) Nếu x và y cùng không chia hết cho 5 thì x^2, y^2 chia cho 5 dư 1 hoặc 4 (bài 16)

Khi đó: $x^2 + y^2$ chia cho 5 có dư là 0, 2 hoặc 3.

Nhưng một số chính phương z^2 chia cho 5 chỉ có thể dư 0, 1 hoặc 4 nên $z \vdots 5$.

Vậy $xyz \vdots 5$. (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra: $xyz \vdots 3.4.5 = 60$ (đpcm).

Bài tập 38: Tìm số dư trong phép chia $A = 3^8 + 3^6 + 3^{2004}$ cho 91.

Giải

Ta có: $3^6 - 1 = 728 \vdots 91$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } A &= 3^8 + 3^6 + 3^{2004} = (3^8 - 3^2) + (3^6 - 1) + (3^{2004} - 1) + 3^2 + 1 + 1 \\ &= 3^2(3^6 - 1) + (3^6 - 1) + ((3^6)^{334} - 1) + 11 = (3^6 - 1)(3^2 + 1 + k) + 11, (k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Suy ra: A chia cho 91 dư 11.

Bài tập 39: Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn $2^n - 1 \vdots 7$.

Giải

Ta có:

$$2^{3k} = 8^k = (7 + 1)^k = 7.t + 1, \quad (k, t \in \mathbb{N})$$

$$2^{3k+1} = 2.8^k = 2(7 + 1)^k = 7.r + 2, \quad (k, r \in \mathbb{N})$$

$$2^{3k+2} = 4.8^k = 4(7 + 1)^k = 7.s + 1, \quad (k, s \in \mathbb{N})$$

Suy ra: $2^{3k} - 1 = 7t \vdots 7$.

Bài tập 39: Tìm số dư trong phép chia $3^{2010} + 5^{2010}$ cho 13.

Giải

$$\text{Đặt: } a = 3^{2010} + 5^{2010} = (3^6)^{335} + (5^6)^{335} = (3^6 + 5^6).M = 16354.M \vdots 13 \quad (M \in \mathbb{N})$$

Suy ra: $3^{2010} + 5^{2010}$ chia hết cho 13 nên số dư là 0.

Bài tập 40: Cho $T = 12345a$. Tìm giá trị $a \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất để T chia hết cho 9.

Giải

Ta có: $T = 123450 + a = 13716.9 + 6 + a$

Để T chia hết cho 9 thì $a = 3$

Bài tập 41: Cho đa thức P là đa thức bậc hai theo ẩn x . Biết P chia cho $x - 1$ dư 1, P chia cho $x + 1$ dư 7 và P chia cho $x + 2$ dư 13. Tìm đa thức P .

Giải

Gọi $P(x) = ax^2 + bx + c$

Suy ra

$$P(x) = (x - 1).g(x) + 1$$

$$P(x) = (x + 1).h(x) + 7$$

$$P(x) = (x + 2).k(x) + 13$$

(với $g(x), h(x)$ và $k(x)$ là các đa thức)

Và $P(1) = 1, P(-1) = 7$ và $P(-2) = 13$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = 7 \\ 4a - 2b + c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 \end{cases}$$

Suy ra: $P(x) = x^2 - 3x + 3$

Bài tập 42: Tìm đa thức $P(x)$. Biết $P(x)$ chia $x^2 - a$ được số dư lần lượt 2 và -2. $P(x)$ chia $x^2 - 9$ được số dư lần lượt là 58 và -14.

Giải

Tương tự bài 18, ta có: $P(x) = x^2 + 2x + 3$

Bài tập 43: Tìm tổng của tất cả các chữ số có hai chữ số thỏa tính chất: mỗi số chia cho 4 thì dư 1.

Giải

Theo giả thiết, các số đã cho có dạng $4k + 1, k \in \mathbb{N}$ và $3 \leq k \leq 24$.

Do đó tổng của tất cả các chữ số đã cho là:

$$S = \frac{13+97}{2} \cdot 22 = 1210$$

Bài tập 44: Chứng minh rằng số $3^{2010} + 5^{2010}$ chia hết cho 13.

(Đề thi vào lớp 10 Toán, Lý, Tin Trường Chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng năm học 2001-2002)

Giải

Xem số: $a = 3^{2010} + 5^{2010}$

Ta có thể viết:

$$a = 3^{2010} + 5^{2010} = (3^6)^{335} + (5^6)^{335} = (3^6 + 3^5)A, A \in \mathbb{N}.$$

$$= 16354. A \div 13$$

$$\text{Vậy } 3^{2010} + 5^{2010} \div 13$$

Bài tập 45: Tìm số dư trong phép chia: $S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ cho 4.

Giải

Nếu n lẻ, $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$.

Ta có: $4^n \div 4$

$$1^n + 3^n = 4(3^{n-1} - 3^{n-2} + \dots + 1) \div 4$$

$$2^n = 2 \cdot 4^k$$

$$\text{Với } k = 0 \Rightarrow S_n = 4p + 2$$

$$\text{Với } k > 0 \Rightarrow S_n = 4q$$

Nếu n chẵn, $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, ta có:

$$4^n \div 4$$

$$2^n \div 4$$

$$3^n \div 9k = (2 \cdot 4 + 1)^k = 4t + 1$$

$$1^n = 1$$

$$\Rightarrow S_n = 4h + 2, (h \in \mathbb{N}).$$

Vậy khi chia $S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ cho 4, hoặc ta có số dư bằng 0 hoặc số dư bằng 2.

Bài tập 46: Cho hai số tự nhiên a và b khác 0 sao cho số:

$$n = \frac{(a+b)^3}{b^2}$$

không chia hết cho 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Giải

Ta có: $n = \frac{(a+b)^3}{b^2}$ là một số nhiên lẻ

$$\text{Gọi } d = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases} \text{ với } (\alpha, \beta) = 1$$

$$\text{Ta có: } n = \frac{(a+b)^3}{b^2} = \frac{(\alpha+\beta)^3 d^3}{\beta^2 d^2} = \frac{(\alpha+\beta)^3 d}{\beta^2}$$

$$(\alpha, \beta) = 1 \Rightarrow (\alpha + \beta, \beta) = 1 \Rightarrow (\alpha + \beta^2, \beta^2) = 1.$$

$$\text{Do đó: } d \div \beta^2 \Leftrightarrow d = m\beta^2$$

$$\text{Ta suy ra: } n = m(\alpha + \beta)^3$$

$$\text{Ta có: } \alpha + \beta \geq 2, m \geq 1 \Rightarrow n \geq 27 \Rightarrow n_{\min} = 27.$$

Xảy ra khi $\alpha + \beta = 2, m = 1$.

$$\text{Chọn } \alpha = 2, \beta = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow a = 2, b = 1.$$

$$\text{Chọn } \alpha = 1, \beta = 2 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a = 4, b = 8.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là $n_{\min} = 27$.

Bài tập 47: Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, x \in \mathbb{Z}$ có các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(x)$ chia hết cho 5 với mọi giá trị nguyên của x thì các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5.

Giải

Xem đa thức: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, x \in \mathbb{Z}$ có các hệ số nguyên là a, b, c, d .

Theo đề bài, ta có: $P(x) \equiv 5, \forall x \in \mathbb{Z}$

Suy ra:

$$\begin{cases} P(0) \equiv 5 \\ P(1) \equiv 5 \\ P(-1) \equiv 5 \\ P(2) \equiv 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \equiv 5 \\ a+b+c+d \equiv 5 \\ a-b+c-d \equiv 5 \\ 8a+4b+2c+d \equiv 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c \equiv 5 \\ a-b+c \equiv 5 \\ 4a+2b+c \equiv 5 \end{cases}$$

Từ hệ trên, ta có: $2b \equiv 5, (2, 5) = 1 \Rightarrow b \equiv 5$.

Do đó, ta có:

$$\begin{cases} a+c \equiv 5 \\ 4a+c \equiv 5 \end{cases} \Rightarrow 3a \equiv 5 \Rightarrow a \equiv 5 \text{ (vì } (3, 5) = 1)$$

Vậy nếu $P(x) \equiv 5, \forall x \in \mathbb{Z}$ thì $a, b, c, d \equiv 5$.

Bài tập 48: Xét dãy số:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 11$$

$$a_3 = 111$$

.....

$$a_i = 111 \dots 111 \text{ (có } i \text{ chữ số } 1)$$

.....

$$a_n = 111 \dots 111 \text{ (có } n \text{ chữ số } 1)$$

.....

Hãy tìm số a_j nhỏ nhất sao cho a_j chia hết cho số

$$B = 333 \dots 333 \text{ (2005 chữ số } 3)$$

Giải

Giả sử:

$$a_j = 111 \dots 111 \text{ (có } j \text{ chữ số } 1) \text{ chia hết cho số}$$

$$b = 333 \dots 333 \text{ (có } 2005 \text{ chữ số } 3)$$

Suy ra: $a_j \equiv 0$ và $a_j \equiv 111 \dots 111 \text{ (2005 chữ số } 1)$.

Do đó, ta có: $j \equiv 0$ và $j \equiv 2005$

Suy ra: $j \equiv 6015 \Rightarrow j_{\min} = 6015$.

Vậy số a_j phải tìm gồm 6015 chữ số 1.

Bài tập 49: Chứng minh rằng số:

$$n = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2003} + 7^{2004}$$

chia hết cho 400.

Giải

Ta có thể viết:

$$n = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2003} + 7^{2004}$$

$$= (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + (7^5 + 7^6 + 7^7 + 7^8) + \dots + (7^{2001} + 7^{2002} + 7^{2003} + 7^{2004})$$

$$= 7(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + 7^5(1 + 7 + 7^2 + 7^3) + \dots + 7^{2001}(1 + 7 + 7^2 + 7^3)$$

$$\text{Ta có: } 1 + 7 + 7^2 + 7^3 = 400$$

$$\Rightarrow n \equiv 0$$

$$\text{Vậy } n \equiv 0$$

Dạng 4: Nguyên lý Dirichle đối với phép chia hết và chia có dư:

Nguyên tắc "ngăn kéo" Dirichlet: "Nếu đem $(n + 1)$ vật xếp vào n ngăn kéo thì có ít nhất một ngăn kéo chứa từ hai vật trở lên".

Tổng quát: "Nếu đem $(nk + 1)$ vật xếp vào n ngăn kéo thì có ít nhất một ngăn kéo chứa từ $(k + 1)$ vật trở lên".

Bài tập 50:

- a) Trong 11 số nguyên bất kì có thể tìm được hai số có chữ số tận cùng giống nhau.
b) Trong 101 số nguyên bất kì có thể tìm được 2 số có hai chữ số tận cùng giống nhau.
c) Trong $n + 1$ số nguyên bất kì có hai số có hiệu của chúng chia hết cho n .

Giải

a) Lấy 11 số nguyên đã cho chia cho 11 thì được 11 số dư nhận một trong 10 số $0; 1; 2; \dots, 9$.

Theo nguyên tắc Dirichlet phải có hai số có cùng số dư, hiệu của hai số đó chia hết cho 10.

Khi đó: Hai số đó có chữ số tận cùng giống nhau.

Chú ý: Ở đây "vật" là 11 số dư khi chia cho 11 số nguyên cho 10 (tức là lấy các chữ số tận cùng của 11 số đó) còn "ngăn kéo" là các số dư $0; 1; 2; \dots, 9$.

b) Tương tự câu a) lấy 101 số nguyên đã cho chia cho 100 (tức là lấy 2 chữ số tận cùng của chúng).

c) Tổng quát, lấy $n + 1$ số nguyên đã cho chia cho n thì được $n + 1$ số dư nhận một trong các số $0; 1; 2; \dots, n - 1$ nên theo nguyên tắc Dirichlet, phải có hai số có dư bằng nhau, hiệu hai số này chia hết cho n .

Bài tập 51: Cho 10 số tự nhiên bất kì $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 10 hoặc tổng của một số chia hết cho 10. Hãy phát biểu bài toán tổng quát.

Giải

Xét 10 số mới như sau: $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ lấy 10 số $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ chia cho 10.

Nếu có một số $S_i : 10$ ($i = 1, 2, \dots, 10$) thì bài toán được chứng minh.

Nếu S_i không chia hết cho 10 với mọi i , tức là $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ chia cho 10 có các số dư là một số trong 9 số: $1, 2, \dots, 9$.

Theo nguyên tắc Dirichlet có hai số cùng dư khi chia cho 10, giả sử là S_k và S_l ($k > l$).

Khi đó: $S_k - S_l = a_{l+1} + a_{l+2} + \dots + a_{l+k} : 10$ (đpcm)

Bài toán tổng quát:

Trong n số tự nhiên bất kì tồn tại một số tự nhiên chia hết cho n hoặc tổng của một số số chia hết cho n .

Bài tập 52: Chứng minh rằng trong 8 số tự nhiên có 3 chữ số bao giờ cũng chọn được hai số mà khi viết liền nhau ta được một số có 6 chữ số và chia hết cho 7.

Giải

Lấy 8 số đã cho chia cho 7 được 8 số dư nhận một trong 7 giá trị $0, 1, 2, \dots, 6$.

Theo nguyên tắc Dirichlet có hai số cùng dư, giả sử là $\overline{abc}$ và $\overline{def}$ khi chia cho 7 có cùng số dư là r .

Giả sử: $\overline{abc} = 7k + 1$ và $\overline{def} = 7l + r$.

Ta có: $\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} = 1000(7k + r) + 7l + r = 7(1000k + 1) + 1001r : 7$ (đpcm)

Bài tập 53: Cho 4 số nguyên phân biệt a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d) : 12.$$

Giải

Đặt: $A = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$

Bốn số nguyên a, b, c, d không chia hết cho 3 có hai số có cùng dư khi đó hiệu của chúng chia hết cho 3, hiệu là một trong các thừa số của A nếu $A : 3$. (1)

Nếu a, b, c, d có hai số có cùng dư. Khi chia cho 4 thì $A : 4$ còn nếu a, b, c, d có dư khác nhau khi chia cho 4 thì sẽ có hai số chẵn và hai số lẻ.

Lúc đó có hai hiệu chia hết cho 2.

Do đó: $A : 4$ (4)

Từ (1) và (2), suy ra: $A : 12$.

Bài tập 54: Có hay không một số nguyên dương k để 29^k là một số có các chữ số tận cùng là 0001.

Giải

Ta cần chứng minh tồn tại số nguyên k sao cho $29^k - 1 : 10^4$.

Thật vậy: Lấy $10^4 + 1$ số: $29, 29^2, \dots, 29^{10^4+1}$ chia cho 10^4 , khi đó có hai số có hiệu chia hết cho 10^4 , giả sử hai số đó là 29^n và 29^m ($n > m$).

Ta có: $29^m - 29^n : 10^4$ hay $29^m(29^{n-m} - 1) : 10^4$.

Vì $(29^m, 10^4) = 1$ nên $29^{n-m} - 1 : 10^4$ (đpcm).

Bài tập 55: Chứng minh rằng trong 5 số nguyên bất kì có thể tìm được ba số có tổng chia hết cho 3.

Giải

Lấy 5 số nguyên đã cho chia cho 3 được các dư là 0, 1, 2.

Nếu 5 số nguyên này khi chia cho 3 có đủ ba số dư 0, 1, 2.

Giả sử: $a_1 = 3k_1$, $a_2 = 3k_2 + 1$, $a_3 = 3k_3 + 2$ thì $a_1 + a_2 + a_3 = 3(k_1 + k_2 + k_3 + 1) : 3$.

Nếu 5 số nguyên này khi chia cho 3 chỉ có hai loại số dư thì theo nguyên tắc Dirichlet có ít nhất 3 số có cùng dư.

Khi đó: Tổng của ba số này chia hết cho 3.

Nếu 5 số nguyên này khi chia cho 3 chỉ có chung một số dư thì tổng ba số bất kì trong chúng chia hết cho 3.

Vậy trong 5 số nguyên bất kì có thể tìm được 3 số có tổng chia hết cho 3.

Bài tập 56: Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên bất kì luôn tìm được một cặp gồm hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

Giải

Trong tập hợp các số dư trong phép chia 52 số cho 100 ta lấy từng cặp số sao cho tổng các cặp đó bằng 100 và lập thành các nhóm sau: (0, 0); (1, 99); (2, 98); ..., (49, 51) và (50, 50).

Ta có tất cả là 51 cặp mà có tới 52 số dư nên theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất phải có hai số dư thuộc cùng một nhóm.

Rõ ràng cặp số tự nhiên ứng với cặp số dư này là hai số tự nhiên có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100.

Bài tập 57: Trong một bảng vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông một trong ba số 1; 0 hoặc -1 sao cho mỗi ô có đúng 1 số. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Giải

Ta có 5 cột, 5 dòng, 2 đường chéo nên được 12 tổng.

Mỗi ô nhận một trong giá trị 1; 0 hoặc -1 nên mỗi tổng nhận các giá trị từ -5 đến 5.

Ta có: 11 số nguyên từ -5 đến 5 là -5, -4, ..., -1, 0, 1, ..., 5.

Vậy theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Bài tập 58: Viết các số tự nhiên từ 1 đến 10 thành hàng ngang theo một thứ tự tùy ý, tiếp đó cộng mỗi một số trong các số đã cho với số thứ tự chỉ vị trí nó đứng (tính từ trái sang phải). Chứng minh rằng ít nhất cũng có hai tổng mà chữ số tận cùng của hai tổng đó như nhau.

Giải

Gọi 10 số tự nhiên từ 1 đến 10 viết theo thứ tự từ trái sang phải là $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Ta lập dãy mới $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ với $b_1 = a_1 + 1, b_2 = a_2 + 2, \dots, b_{10} = a_{10} + 10$.

b_i là tổng của a_i với vị trí thứ i mà nó đứng ($i = 1, 2, \dots, 10$).

Ta có: $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + 2(1 + 2 + \dots + 10) = 110$.

Vì 110 là số chẵn nên không xảy ra trường hợp có 5 số b_i nào đó lẻ và 5 số b_j nào đó chẵn, hay nói cách khác số các b_i chẵn và các số b_j lẻ phải khác nhau.

Do đó số các b_i lẻ lớn hơn 5 hoặc số các b_j chẵn lớn hơn 5. Mà từ 1 đến 10 chỉ có 5 vị trí lẻ và 5 vị trí chẵn nên theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai số b_i lẻ tận cùng như nhau hoặc có hai số b_j chẵn có chữ số tận cùng như nhau.

Bài tập 59: Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn tồn tại một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Giải

Trước hết ta chứng minh rằng: Với 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 10 số liên tiếp có chữ số hàng chục như nhau còn các chữ số hàng đơn vị liên tiếp từ 0 đến 9.

Nếu trong 19 số tự nhiên liên tiếp có mặt 3 chữ số hàng chục khác nhau thì rõ ràng có một chữ số hàng chục (ở giữa hai hàng chục kia) cùng với các chữ số đơn vị liên tiếp từ 0 đến 9.

Nếu trong 19 số tự nhiên liên tiếp chỉ có hai loại chữ số hàng chục khác nhau thì từ $19 = 2 \cdot 9 + 1$.

Suy ra: Có 10 số có cùng chữ số hàng chục và các chữ số hàng đơn vị liên tiếp từ 0 đến 9. Tổng các chữ số của mỗi số trong 10 số tự nhiên nói trên cũng lập thành 10 số tự nhiên liên tiếp.

Vậy phải có một số chia hết cho 10.

Vậy trong 10 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Bài tập 60: Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho số $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5 .

Giải

Xét dãy số: $1983, 1983^2, 1983^3, \dots, 1983^{10^5}$

Chia tất cả các số hạng của dãy cho 10^5 . Không có số hạng nào của dãy chia hết cho 10^5 . Có 10^5 phép chia mà số các số dư có tối đa là $10^5 - 1$ trị số, do đó có ít nhất 2 số hạng của dãy chia cho 10^5 có cùng số dư.

Gọi 2 số đó là 1983^i và 1983^j , với $i, j \in \mathbb{N}$ và $1 \leq i \leq j \leq 10^5$.

$$\Rightarrow 1983^j - 1983^i : 10^5$$

$$\Rightarrow 1983(1983^{j-i} - 1) : 10^5 \text{ và } (1983, 10) = 1 \Rightarrow (1983^i, 10^5) = 1.$$

$$\Rightarrow 1983^{j-i} - 1 : 10^5$$

Vậy tồn tại số tự nhiên k sao cho ta có: $1983^k - 1 : 10^5$.

Dạng 5: Phương pháp quy nạp.

Giả sử cần chứng minh:

$$A(n) : p, \text{ với } n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Ta cần chứng minh (1) đúng với $n = 1$, tức là chứng minh $A(1) : p$.

Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là ta có: $A(k) : p$.

Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh $A(k + 1) : p$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta kết luận (1) đúng với mọi $n = 1, 2, \dots$

Bài tập 61: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$4^n + 15n - 1 : 9 \quad (1)$$

Giải

Với $n = 1$, ta có: $4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18 : 9$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là, ta có:

$$4^k + 15k - 1 : 9 \Rightarrow 4^k + 15k - 1 = 9m, (m \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 4^k = 9m + 1 - 15k. \quad (2)$$

Với $n = k + 1$, ta có:

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 14 = 4(9m + 1 - 15k) + 15k + 14 \text{ (theo (2))} \\ &= 36m - 45k + 18 : 9. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$, do đó (1) đúng với mọi $n \geq 1$.

Bài tập 62: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta có:

$$3^{2^{4n+1}} + 2 : 11 \quad (1)$$

Giải

Với $n = 0$ ta có: $3^{2^1} + 2 = 11 : 11$.

Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là: $3^{2^{4k+1}} + 2 : 11$.

Với $n = k + 1$, ta có:

$$3^{2^{4(k+1)+1}} + 2 = 3^{2^{4k+1} \cdot 16} + 2 = \left(3^{2^{4k+1}}\right)^{16} + 2 = \left(3^{2^{4k+1}}\right)^{16} - 2^{16} + 2^{16} + 2$$

Mà $\left(3^{2^{4k+1}}\right)^{16} - 2^{16} : (3^{2^{4k+1}} + 2)$ vì 16 là số chẵn.

Theo giả thiết quy nạp:

$$\left(3^{2^{4k+1}}\right)^{16} + 2 : 11 \text{ nên } \left(3^{2^{4k+1}}\right)^{16} - 2^{16} : 11$$

Mặt khác:

$$2^{16} + 2 = 2(2^{15} + 1) : 11$$

Do đó:

$$3^{2^{4(k+1)+1}} + 2 : 11$$

Vậy $3^{2^{4n+1}} + 2 : 11$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 63: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ và k là một số tự nhiên lẻ, ta có:

$$k^{2^n} - 1 : 2^{n+2}.$$

Giải

Với $n = 1$ ta có $k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1) : 8$ (vì $k - 1, k + 1$ là số chẵn liên tiếp nên tích của chúng chia

hết cho 8)

Giả sử $n = m$, ta có:

$$k^{2^m} - 1 : 2^{m+2} \Rightarrow k^{2^m} - 1 = 2^{m+2} \cdot q, (q \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k^{2^m} = 2^{m+2} \cdot q + 1$$

Với $n = m + 1$, ta có:

$$\begin{aligned} k^{2^{m+1}} - 1 &= (k^{2^m})^2 - 1 = (2^{m+2} \cdot q + 1)^2 - 1 = 2^{2m+4} \cdot q^2 + 2^{m+3} \cdot q \\ &= 2^{m+3} (2^{m+1} \cdot q^2 + q) : 2^{m+3}. \end{aligned}$$

Vậy $k^{2^n} - 1 : 2^{n+2}$, với mọi $n \geq 1$.

Bài tập 64: Chứng minh rằng số được thành lập bởi 3^n chữ số giống nhau thì chia hết cho 3^n với n là số nguyên dương.

(Đề thi HSG quốc gia năm 1979)

Giải

Ta cần chứng minh: $\underbrace{aa \dots a}_{3^n \text{ số } a} : 3^n$ (1)

Với $n = 1$, ta có: $aaa = 111a : 3$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là ta có:

$$\underbrace{aa \dots a}_{3^k \text{ số } a} : 3^k$$

Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh:

$$\underbrace{aa \dots a}_{3^{k+1} \text{ số } a} : 3^{k+1}$$

Ta có: $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k = 3^k + 3^k + 3^k$.

Do đó:

$$\begin{aligned} \underbrace{aa \dots a}_{3^{k+1} \text{ số } a} &= \underbrace{aa \dots a}_{3^k} \underbrace{a \dots a}_{3^k} \underbrace{a \dots a}_{3^k} = \underbrace{aa \dots a}_{3^k} \cdot 10^{2 \cdot 3^k} + \underbrace{aa \dots a}_{3^k} \cdot 10^{3^k} + \underbrace{aa \dots a}_{3^k} \\ &= \underbrace{aa \dots a}_{3^k} (10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1) : 3^{k+1} \end{aligned}$$

Vì theo giả thiết quy nạp: $\underbrace{aa \dots a}_{3^k} : 3^k$ và $10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1 : 3$.

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$, do đó (1) đúng với mọi $n \geq 1$.

Dạng 6: Sử dụng đồng dư thức:

Nếu $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b : m$

Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$ thì:

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m},$$

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Hệ quả: $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$, $ac \equiv bc \pmod{m}$, $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, ($n \in \mathbb{N}$).

Bài tập 65: Tìm dư trong phép chia 3^{2003} chia cho 13.

Giải

Ta có: $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$ và $2003 = 3 \cdot 667 + 2$.

$$\text{Do đó: } 3^{2003} = 3^{3 \cdot 667 + 2} = 3^2 \cdot (3^3)^{667}$$

$$\text{Ta có: } (3^3)^{667} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^2 \cdot (3^3)^{667} \equiv 9 \pmod{13}.$$

Vậy số dư trong phép chia 3^{2003} cho 13 là 9.

Bài tập 66: Chứng minh rằng: $2^{2002} - 4 : 31$.

Giải

Ta có: $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$ và $2002 = 5 \cdot 400 + 2$.

Do đó:

$$2^{2002} - 4 = 2^{5 \cdot 400 + 2} - 4 = 4 \cdot (2^5)^{400} - 4 = 4[(2^5)^{400} - 1] \equiv 4(1 - 1) = 0 \pmod{31}.$$

Vậy $2^{2002} - 4 \vdots 31$.

Bài tập 67: Chứng minh rằng: $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$.

Giải

Ta có: $2222 \equiv -4 \pmod{7}$ và $5555 \equiv 4 \pmod{7}$

Suy ra: $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (-4)^{5555} + 4^{2222} \pmod{7}$ (1)

Mà $(-4)^{5555} + 4^{2222} = -4^{2222}(4^{3333} - 1) \vdots (4^3 - 1) = 63 \vdots 7$.

Vậy $(-4)^{5555} + 4^{2222} \equiv 0 \pmod{7}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$ (đpcm)

Bài tập 68: Kí hiệu: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$. Chứng minh rằng:

chia hết cho $n^2 + n + 1$ khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^n (-1)^i a_i$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ với $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

Ta có: $n^2 + 1 \equiv -n \pmod{n^2 + n + 1} \Rightarrow (n^2 + 1)^3 \equiv -n^3 \pmod{n^2 + n + 1}$ (1)

Mà $n^3 - 1 \vdots (n^2 + n + 1)$. Do đó: $n^3 \equiv 1 \pmod{n^2 + n + 1}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$$(n^2 + 1)^3 \equiv -1 \pmod{n^2 + n + 1} \Rightarrow a_i(n^2 + 1)^{3i} \equiv a_i(-1)^i \pmod{n^2 + n + 1}, i = \overline{1, n}.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i (n^2 + 1)^{3i} \equiv \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i \pmod{n^2 + n + 1}$$

Bài tập 69: Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ và $\sum_{i=1}^n a_i \vdots 6$. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^n a_i^3 \vdots 6$.

(Đề thi HSG TP HCM năm 1991)

Giải

Ta cần chứng minh: $n^3 \equiv n \pmod{6}$

Thật vậy: $n^3 - n^2 = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1) \vdots 6$, vì $n - 1, n, n + 1$ là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 3 nên chia hết cho 6.

Thay $n = a_i$, ta được: $a_i^3 \equiv a_i \pmod{6} \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^3 \equiv \sum_{i=1}^n a_i \equiv 0 \pmod{6}$ (đpcm)

Bài tập 70: Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{26} k \cdot 10^{3k} \vdots 13$.

Giải

Ta có: $10^3 = 1000 \equiv -1 \pmod{13}$, vì $1001 = 13 \cdot 77$.

Suy ra: $10^{3k} \equiv (-1)^k \pmod{13} \Rightarrow k \cdot 10^{3k} \equiv k \cdot (-1)^k \pmod{13}$.

Do đó:

$$\sum_{k=1}^{26} k \cdot 10^{3k} \equiv \sum_{k=1}^{26} k(-1)^k \pmod{13}$$

Mà

$$\sum_{k=1}^{26} (-1)^k \cdot k = -1 + 2 - 3 + 4 - \dots - 25 + 26 = (-1 + 2) + (-3 + 4) + \dots + (-25 + 26) = 13$$

Vậy $\sum_{k=1}^{26} k \cdot 10^{3k} \equiv 0 \pmod{13}$ (đpcm)

Dạng 7: Áp dụng định lý FERMAT:

Với p là số nguyên tố ta có: $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Đặc biệt: Nếu $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Chứng minh

Giả sử p nguyên tố và $(a, p) = 1$. Số dư khi chia $a, 2a, \dots, (p - 1)a$ cho p sẽ đôi một khác nhau và những số trong các số $1, 2, \dots, p - 1$.

Gọi $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ là số dư tương ứng trong phép chia $a, 2a, \dots, (p-1)a$ cho p . Ta có:

$$\begin{cases} a \equiv r_1 \pmod{p} \\ 2a \equiv r_2 \pmod{p} \\ \dots \\ (p-1)a \equiv r_{p-1} \pmod{p} \end{cases}$$

Nhân tương ứng các đồng dư thức trên lại ta được:

$$1.2. \dots (p-1)a^{p-1} \equiv r_1 r_2 \dots r_{p-1} \pmod{p}$$

Mà $1.2. \dots (p-1) = (p-1)!$ và $r_1 r_2 \dots r_{p-1} = 1.2. \dots (p-1) = (p-1)!$. Nên:

$$(p-1)!a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \text{ vì } ((p-1)!, p) = 1.$$

Bài tập 71: Cho $a \in \mathbb{Z}; m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $a^{6n} + a^{6m} \vdots 7$ khi và chỉ khi $a \vdots 7$.

Giải

Giả sử: $a^{6n} + a^{6m} \vdots 7$ và $a \not\vdots 7$, ta có: $(a, 7) = 1$.

Theo định lý Fermat: $a^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow a^{6n} \equiv 1 \pmod{7}$ và $a^{6m} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow a^{6n} + a^{6m} \equiv 2 \pmod{7}$.

Vô lý! Vậy $a \vdots 7$.

Bài tập 42: Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q . Chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots p \cdot q$.

Giải

Vì p, q nguyên tố và $p \neq q$ nên $(p, q) = 1$.

Áp dụng định lý Fermat, ta có:

$$p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \text{ và } q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p^{q-1} - 1 \vdots q \text{ và } q^{p-1} - 1 \vdots p.$$

Mặt khác: $p^{q-1} \vdots p$ và $q^{p-1} \vdots q$ nên ta có:

$$p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots q \text{ và } p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots p$$

Mà $(p, q) = 1$ nên $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots p \cdot q$.

Bài tập 72: Chứng minh rằng: $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 \vdots 11$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải

Theo định lý Fermat, ta có: $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ và $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

Ta tìm dư trong phép chia 2^{4n+1} và 3^{4n+1} cho 10, tức là tìm chữ số tận cùng của chúng.

$$2^{4n+1} = 2 \cdot 16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2.$$

$$3^{4n+1} = 3 \cdot 81^n \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 3^{4n+1} = 10l + 3, (k, l \in \mathbb{N})$$

Mà $3^{10k} \equiv 1 \pmod{11}$ và $2^{10l} \equiv 1 \pmod{11}$ nên:

$$3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 \equiv 3^{10k+2} + 2^{10l+3} + 5 \equiv 3^2 + 2^3 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$$

Vậy: $3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5 \vdots 11, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 73: Chứng minh rằng nếu $(a, 240) = 1$ thì $a^4 - 1 \vdots 240$.

Giải

Ta có: $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$.

$$(a, 240) = 1 \Rightarrow (a, 2) = (a, 3) = (a, 5) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 1 \vdots 3 \\ a^4 - 1 \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 - 1 \vdots 3 \\ a^4 - 1 \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow a^4 - 1 \vdots 15 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } a^4 - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1) \vdots 16. \quad (2)$$

Vì $a-1, a+1$ là hai số chẵn liên tiếp nên tích chia hết cho 8 và $a^2+1 \vdots 2$.

Từ (1) và (2) suy ra: $a^4 - 1 \vdots 240$.

Bài tập 74: Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố dạng $4k+3$.

Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 \vdots p$ thì $a \vdots p$ và $b \vdots p$. Từ đó suy ra phương trình $x^2 + 2x + 4y^2 = 37$ không có nghiệm nguyên dương.

Giải

Giả sử $p = 4k+3$ và $a^2 + b^2$ chia hết cho p .

Nếu a và b đều không chia hết cho p thì $(a, p) = (b, p) = 1$.

Áp dụng định lý Fermat ta có:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ và } b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Khi đó:

$$a^{4k+2} + b^{4k+2} \equiv 2 \pmod{p} \quad (1)$$

Mà

$$a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} \vdots (a^2 + b^2) \vdots p \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $2 \vdots p$ hay $p = 2$, không có dạng $4k + 3$, vô lý.

Vậy $a \vdots p$ và $b \vdots p$ (do $a^2 + b^2 \vdots p$).

Áp dụng:

$$\text{Ta có: } x^2 + 2x + 4y^2 = 37 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (2y)^2 = 38 \vdots 19.$$

$$19 = 4.4 + 3 \text{ nên } (x + 1) \vdots 19 \text{ và } 2y \vdots 19, \text{ suy ra: } (x + 1)^2 + (2y)^2 \vdots 19^2 \Rightarrow 38 \vdots 19^2 \text{ (vô lý)}$$

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Bài tập 75: Tìm số nguyên tố p sao cho $2^p + 1 \vdots p$.

Giải

Áp dụng định lý Fermat, ta có:

$$2^p - 2 \vdots p$$

$$\text{Từ đó, suy ra: } 3 = 2^p + 1 - (2^p - 2) \vdots p \Rightarrow p = 3.$$

$$\text{Ngược lại: Với } p = 3 \text{ ta có: } 2^p + 1 = 2^3 + 1 = 9 \vdots 3.$$

$$\text{Vậy với } p = 3 \text{ thì } 2^p + 1 \vdots p.$$

Bài tập 76: Một số có $6n$ chữ số và chia hết cho 7. Chứng minh rằng nếu chuyển chữ số tận cùng lên đầu của số đó thì được một số cũng chia hết cho 7.

Giải

Gọi số ban đầu là $N = 10A + a$, với a là chữ số tận cùng của N và A có $6n - 1$ chữ số.

$$\text{Sau khi chuyển } a \text{ lên đầu ta được: } M = a \cdot 10^{6n-1} + A.$$

$$\text{Ta chứng minh: } (N - 3M) \vdots 7.$$

$$\text{Thật vậy, ta có: } N - 3M = 7A - a(3 \cdot 10^{6n-1} - 1)$$

Áp dụng định lý Fermat, ta có:

$$10^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 10^{6n} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 3 \cdot 10^{6n} \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 3 \cdot 10^{6n-1} \equiv 1 \pmod{7}.$$

$$\text{Vậy } (N - 3M) \vdots 7. \text{ Từ đó suy ra điều phải chứng minh.}$$

Bài tập 77: Cho số nguyên tố $p > 3$. Chứng minh rằng: $3^p - 2^p - 1 \vdots 42p$.

Giải

$$\text{Đặt: } A = 3^p - 2^p - 1, p \text{ lẻ.}$$

$$\text{Dễ dàng chứng minh: } A \vdots 2 \text{ và } A \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 6.$$

$$\text{Nếu } p = 7 \text{ thì } A = 3^7 - 2^7 - 1.$$

$$\text{Do đó: } A \vdots 49 \text{ (Hay có thể tính cụ thể } A) \text{ tức } A \vdots 7p.$$

$$\text{Nếu } p \neq 7 \text{ thì vì } p \text{ nguyên tố nên } (p, 7) = 1.$$

$$\text{Theo định lý Fermat, ta có: } A = (3^p - 3) - (2^p - 2) \text{ chia hết cho } p.$$

$$\text{Đặt: } p = 3q + r, (q \in \mathbb{N}, r = 1 \text{ hoặc } r = 2)$$

$$\Rightarrow A = 3^{3q+r} - 2^{3q+r} - 1 = 3^r \cdot 27^q - 2^r \cdot 8^q - 1 = 7k + 3^r(-1)^q - 2^r - 1, k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Xét: } r = 1: q \text{ phải chẵn vì } p \text{ lẻ.}$$

$$\Rightarrow A = 7k + 3 \cdot 1 - 2 - 1 = 7k \vdots 7$$

$$\text{Xét: } r = 2: q \text{ phải lẻ vì } p \text{ lẻ.}$$

$$\Rightarrow A = 7k + 3^2 \cdot (-1) - 2^2 - 1 = 7k - 14 \vdots 7$$

$$A \vdots 7 \text{ mà } A \vdots p, (p, 7) = 1 \Rightarrow A \vdots 7p$$

$$\text{Vậy } A \vdots 42p.$$

Dạng 8: Hệ đếm cơ số:

Bài tập 78: Chứng minh rằng trong hệ đếm cơ số $b > 1$, các tích số của $(b - 1)$ với 2 số khác b và 1 mà có tổng bằng $b + 1$ được viết với cùng những chữ số theo thứ tự ngược nhau.

Giải

$$\text{Gọi 2 số đã cho là } b - a \text{ và } a + 1, a < b$$

$$\text{Ta có: } (b - 1)(b - a) = b^2 - (a + 1)b + a = b(b - a - 1) + a = \overline{(b - a - 1)a}_{(b)}$$

$$\text{Ta lại có: } (b - 1)(a + 1) = ab + b - a - 1 = \overline{(b - a - 1)a}_{(b)}$$

Suy ra: Đpcm.

Bài tập 79: Trong hệ đếm cơ số $b > 2$, xem số $b - 1$. Chứng minh rằng các số $2(b - 1)$ và $(b - 1)^2$ viết trong hệ đã cho được cấu tạo cùng những chữ số nhưng theo thứ tự ngược nhau.

Giải

Ta có: $2(b - 1) = 2b - 2 = b + b - 2 = \overline{1(b-2)}_{(b)}$

Ta lại có:

$(b - 1)^2 = b^2 - 2b + 1 = b(b - 2) + 1 = \overline{1(b-2)}_{(b)}$

Suy ra: Đpcm.

Bài tập 80:

a) Có hệ thống cơ số b nào mà $\overline{xx}_{(b)} = \overline{yyyy}_{(b)}$ hay không?

b) Chứng tỏ rằng nếu b tồn tại thì $2x^2 - b^2 = 1$.

Giải

Ta có:

$\overline{xx}_{(b)} = \overline{yyyy}_{(b)}$, với $x, y \in \mathbb{N}$ và $1 \leq x, y \leq b$.

$$\Leftrightarrow (bx + x)^2 = b^3y + b^2y + by + y$$

$$\Leftrightarrow (b + 1)^2 = (b^2 + 1)(b + 1)y$$

$$\Leftrightarrow (b + 1)x^2 = [(b + 1)^2 - 2b]y$$

$$\Rightarrow 2by : b + 1$$

Có vô số giá trị của b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Do đó } 2y = b + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 = b^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - b^2 = 1.$$

Vậy:

Nếu $\overline{xx}_{(b)} = \overline{yyyy}_{(b)}$ thì $2x^2 - b^2 = 1$.

Bài tập 81: Trong hệ đếm cơ số x , có hai số tự nhiên là 302 và 402. Trong hệ cơ số 9 tích 2 số đó là 75583. Định x ?

Giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}$ và $x \geq 5$.

Trong hệ thập phân, ta có:

$$302 = 3x^2 + 2$$

$$402 = 4x^2 + 2$$

$$75583 = 7.9^4 + 5.9^3 + 5.9^2 + 8.9 + 3 = 50052.$$

$$\text{Do đó: } (3x^2 + 2)(4x^2 + 2) = 50052$$

$$\Leftrightarrow 12x^4 + 14x^2 - 50048 = 0$$

Đặt: $y = x^2$, với $y \in \mathbb{N}$ và $y \geq 25$.

$$\text{Ta có: } 12y^2 + 14y - 50048 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 64 \\ y = -\frac{782}{12} \text{ (Loại)} \end{cases}$$

Do đó $x = 8$.

Vậy $x = 8$.

Bài tập 82: Cho biết $36 + 45 = 103$ (1)

Hãy tính tích 36.45

(Giải trong hệ đếm có cơ số xác định)

Giải

Hệ thức (1) đã chứng tỏ rằng các số được viết trong một hệ đếm mà cơ số $6 < b < 10$.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (3b + 6) + (4b + 5) = b^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 7b - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -1 \vee b = 8$$

Vì $6 < b < 10$ nên ta chọn $b = 8$.

Do đó, ta có:

$$36.45 = (3b + 6)(4b + 5) = 12b^2 + 39b + 30$$

$$= (8 + 4)b^2 + (4.8 + 7)b + 3.8 + 6$$

$$= b^3 + 4b^2 + 7b + 3b + 6$$

$$= b^3 + (4 + 4)b^2 + (8 + 2)b + 6$$

$$= b^3 + b^3 + b^2 + 2b + 6$$

$$= 2b^3 + b^2 + 2b + 6$$

$$\Leftrightarrow 36.45 = 2126$$

Vậy $36 + 45 = 103$ thì $36.45 = 2126$.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Biết rằng đa thức $P(x)$ chia cho $(x - a)$ thì dư A , chia cho $(x - b)$ thì dư B . Tìm phần dư của $P(x)$ khi chia cho $(x - a)(x - b)$ với $(a \neq b)$.

$$\text{Đáp số: } \frac{A - B}{a - b}x + \frac{aB - bA}{a - b}$$

Bài tập 2: Tìm phần dư trong phép chia đa thức $P(x) = x^{99} + x^3 + 10x + 5$ cho đa thức $x^2 + 1$.

$$\text{Đáp số: } 8x + 5.$$

Bài tập 3: Tìm a và b sao cho đa thức $P(x) = x^3 + 8x^2 + 5x + a$ chia hết cho đa thức $x^2 + 3x + b$

$$\text{Đáp số: } a = -24 \text{ và } b = 50$$

Bài tập 4: Tìm đa thức bậc ba $P(x)$. Biết $p(0) = 0$, $P(1) = 12$, $P(2) = 41$, $P(3) = 1$.

$$\text{Đáp số: } \frac{5}{3}x^3 - \frac{25}{2}x + 12x + 10$$

Bài tập 5: Chứng minh rằng $n^5 - n$ chia hết cho 240 với số tự nhiên n

Hướng dẫn: phân tích $n^5 - n$ và $240 = 16.3.5$

Bài tập 6: Chứng minh $n^8 - n^4$ chia hết cho 240, Với $n \in \mathbb{N}$.

Hướng dẫn: $n^8 - n^4 = n^4(n^4 - 1)$ chia hết cho 16.3.5

Bài tập 7: Cho m, n và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số tự nhiên. Chứng minh rằng

$a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m$ chia hết cho 120 khi và chỉ khi $a_1^{m+3} + a_2^{m+3} + \dots + a_n^{m+3}$ chia hết cho 120.

Hướng dẫn: Xét tổng hai hiệu.

Bài tập 8: Tìm n thỏa mãn $P = 3(n+1)^{2002} - \frac{3}{n+1}$ là số nguyên.

$$\text{Đáp số: } n = 2; n = 4;$$

Bài tập 9: Tìm x sao cho biểu thức đa thức $P(x) + 4x^2 + 8x + 16$ chia hết cho $x + 3$.

$$\text{Đáp số: } x = -2; x = -4.$$

Bài tập 10: Chứng minh rằng $5^{4n+1} - 3^{4n} - 2$ chia hết cho 240 với mọi số tự nhiên n .

Hướng dẫn: Chứng minh $5^{4n+1} - 3^{4n} - 2$ chia hết cho 3, chia hết cho 16 và 5.

Bài tập 11: Chứng minh rằng:

$$a) n^4 - n^2 : 12, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b) n(n+2)(25n^2 - 1) : 24, \forall n \in \mathbb{N}$$

Bài tập 12: Cho 4 số tự nhiên a, b, c, d . Chứng minh:

$$(b - a)(c - a)(c - b)(d - b)(d - c) : 12$$

Bài tập 13:

a) Chứng minh rằng $n^3 - n + 2$ không chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n .

b) Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n .

(Đề thi vào lớp 10 Đại học Tổng hợp TP HCM hệ PTTH Chuyên năm học 1996 - 1997)

Bài tập 14: Cho 3 số tự nhiên a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\text{Nếu } a + b + c : 6 \text{ thì } (a + b)(b + c)(c + a) - 2abc : 6$$

Bài tập 15: Chứng minh rằng:

$$A = n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n : 384$$

với mọi n chẵn và $n > 4$.

Hướng dẫn: Ta có: $384 = 3.128$ và $(3, 128) = 1$. Nên ta chứng minh A chia hết cho 3 và A chia hết

cho $128 = 2^7$.

Bài tập 16: Chứng minh rằng: $a^3 - 13a \vdots 6$, với $\forall a \in \mathbb{Z}$ và $a > 1$.

Bài tập 17:

a) Cho $n > 2$ và $(n, 6) = 1$. Chứng minh rằng: $n^2 - 1 \vdots 24$.

b) Cho n lẻ và $(n, 3) = 1$. Chứng minh rằng: $n^4 - 1 \vdots 48$.

c) Cho n lẻ và $(n, 5) = 1$. Chứng minh rằng: $n^4 - 1 \vdots 80$.

HD:

a) $(n, 6) = 1$ nên đặt $n = 6k + 1$ hoặc $n = 6k + 5$.

b) Sử dụng kết quả câu (a).

c) Ta có: $80 = 2.8.5$ và $(n, 5) = 1$ nên đặt $n = 5k + 1$; $n = 5k + 2$; $n = 5k + 3$; $n = 5k + 4$.

Bài tập 18:

a) Cho a và b , $a > b$ là hai số tự nhiên. Chứng minh rằng:

$$A = ab(a^4 - b^4) \vdots 30$$

b) Chứng tỏ: $B = a^2b^2(a^4 - b^4) \vdots 60$.

Bài tập 19:

a) Cho n chẵn. Chứng tỏ rằng cả 2 số $n^3 - 4n$ và $n^3 + 4n$ đều chia hết cho 16.

b) Chứng minh rằng: $n^5 - n \vdots 30$, $\forall n \in \mathbb{N}$ và $n^5 - n \vdots 240$, mọi n lẻ.

Bài tập 20: Chứng minh rằng $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n .

Bài tập 30:

a) Chứng minh rằng: $n^8 - n^4 \vdots 240$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) Chứng tỏ: $n^5 - 5n^3 + 4n \vdots 120$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Khi nào thì $n^5 - 5n^3 + 4n \vdots 360$?

Bài tập 31:

a) Cho a và b là hai số tự nhiên chia hết cho 7. Chứng minh rằng:

$$a^{42} - b^{42} \vdots 49$$

b) Cho a và b là hai số tự nhiên lớn hơn 7. Chứng minh rằng:

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a^6 - b^6) \vdots 580608$$

Bài tập 32:

a) Chứng minh rằng: $10^n + 18n - 28 \vdots 27$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Chứng tỏ rằng: $9^{n+1} - 8n - 9 \vdots 64$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 33: Cho $A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$

Chứng minh rằng: $A \vdots 111$, $\forall n \in \mathbb{N}$ và $A \vdots 91$, $\forall n$ là số lẻ.

Bài tập 34: Giả sử a và b là những số nguyên sao cho:

$$(16a + 17b)(17a + 16b)$$

Chia hết cho 11. Chứng minh rằng tích:

$$(16a + 17b)(17a + 16b)$$

Chia hết cho 121.

Bài tập 35: Cho hai số nguyên a và b .

Chứng minh rằng số nguyên $p = 11a + 2b$ chia hết cho 19 khi và chỉ khi số nguyên $q = 18a + 5b$ chia hết cho 19.

Bài tập 36: Cho số tự nhiên n .

1. Chứng minh rằng số tự nhiên $a = n^2 + 3n + 5$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi n có dạng $n = 11k + 4$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Chứng minh rằng a không chia hết cho 121.

Bài tập 37: Chứng minh rằng: $3^{2n+1} + 2^{n+2} \vdots 7$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 38: Chứng minh rằng: $3^{2n+2} + 2^{6n+1} \vdots 11$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 39: Chứng minh rằng: $7^{2n+1} - 48n - 7 \vdots 288$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 40: Chứng minh rằng: $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 41: Chứng minh rằng:

a) $3^{4n+2} + 2.4^{3n+1} \vdots 17$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1} \vdots 17$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 42: Chứng tỏ rằng: $7^{999} - 7^{99} \vdots 100$.

Bài tập 43: Tìm số dư trong phép chia số tự nhiên $n = 3^6 + 3^8 + 3^{2004}$ cho 91.

Đáp số: Số dư $r = 11$.

Bài tập 44: Chứng minh rằng: $5^{2n} + 5^n + 1 \vdots 31$ với mọi n không chia hết cho 3.

Bài tập 45: Chứng minh rằng nếu n không chia hết cho 4 thì
 $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$

Chia hết cho 5.

Bài tập 46: Tìm mọi số tự nhiên sao cho:

a) $10^n - 1 \vdots 81$

b) $10^n - 1 \vdots 11$

c) $10^n - 1 \vdots 121$

Đáp số:

a) $n = 9k$ b) $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

Bài tập 47:

a) Định m sao cho: $2 \cdot 3^n + 3 \vdots 11$

b) Tìm mọi số tự nhiên n sao cho: $2^n - 1 \vdots 9$.

Đáp số:

a) $n = 5k + 4, (n \in \mathbb{N})$

Bài tập 48:

a) Xác định tất cả các số nguyên dương n sao cho: $2^n - 1 \vdots 7$

b) Chứng tỏ với mọi số nguyên dương n , số $2^n - 1$ không chia hết cho 7.

Đáp số: $n = 3k, (k \in \mathbb{N})$

Bài tập 49: Định $n \in \mathbb{N}$ để cho:

a) $n^2 - 3n + 6 \vdots 5$

b) $n^3 - n + 1 \vdots 7$

Đáp số:

a) $n = 5t + 4$ b) $n = 7k + 2, (n \in \mathbb{N})$

Bài tập 50: Cho $2^n = 10a + b$. Chứng minh rằng nếu $n > 3$ thì tích số ab chia hết cho 6. Ở đây a, b, n là các số nguyên dương và $b < 10$.

Bài tập 51: Chứng minh rằng nếu tổng hai phân số tối giản là một số nguyên thì hai phân số đó có mẫu bằng nhau.

CHỦ ĐỀ 5
PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH "QUY NẠP TOÁN HỌC"

1. Kiến thức cơ bản:

Quy nạp không hoàn toàn:

Là sự suy luận đi từ những sự kiện riêng lẻ đến một kết luận tổng quát. Phương pháp này không phải là phép chứng minh nhưng là phương pháp tìm tòi quan trọng, nó giúp ta dự đoán những giả thiết có thể đúng hoặc sai.

Quy nạp hoàn toàn:

Là phép suy luận sau khi đã xem xét tất cả mọi trường hợp có thể xảy ra mới rút ra kết luận tổng quát.

Bài toán:

Chứng minh $P(n)$ đúng với mọi n nguyên và $n \geq a$, a nguyên.

Phương pháp 1:

Bước 1: Thử với $n = a$

Thay $n = a \Rightarrow P(a)$ đúng.

Do đó $P(n)$ đúng khi $n = a$.

Bước 2: Lập giả thiết quy nạp.

Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k$, $k \in \mathbb{Z}$ và $k \geq a$ nghĩa là $P(k)$ đúng.

Bước 3: Chứng minh

Ta chứng minh rằng $P(n)$ khi $n = k + 1$ nghĩa là ta chứng minh rằng:
 $P(k + 1)$ đúng.

Bước 4: Kết luận.

Vậy $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq a$, $a \in \mathbb{Z}$.

Phương pháp 2:

Khi $n = a \Rightarrow P(a)$ đúng.

Khi $n = a + 1 \Rightarrow P(a + 1)$ đúng.

Giả sử $P(k - 1)$ đúng và $P(k)$ đúng, với $k \in \mathbb{Z}$ và $k \geq a + 1$

Chứng minh $P(k + 1)$ đúng.

Vậy $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq a$, $a \in \mathbb{Z}$.

Phương pháp 3:

Khi $n = a \Rightarrow P(a)$ đúng.

Giả sử $P(a)$, $P(a + 1)$, $P(a + 2)$, ..., $P(k - 1)$, $P(k)$ đúng.

Chứng minh $P(k + 1)$ đúng.

Vậy $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq a$, $a \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1: Sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp chứng minh rằng:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ví dụ 2: Tính tổng : $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$

Các tổng cơ bản cần nhớ:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Tính tổng: $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

Giải

Ta có:

$$S_1 = 1^3 = 1 = 1^2$$

$$S_2 = 1^3 + 2^3 = 9 = (1 + 2)^2$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$$

Giả sử:

$$S_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + k)^2$$

Ta có:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$(1) \Rightarrow S_k = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 \quad (1')$$

Cộng $(k+1)^3$ vào hai vế của (1'), ta được:

$$S_k + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3$$

$$\Leftrightarrow S_{k+1} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 (k^2 + 4k + 4) = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$$

$$\Leftrightarrow S_{k+1} = [1 + 2 + 3 + \dots + (k+1)]^2$$

$$\text{Vậy } S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Bài tập 2: Cho $a = x + \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ là một số nguyên. Chứng minh rằng số

$$b = x^{2005} + \frac{1}{x^{2005}}$$

là một số nguyên.

Giải

Ta chứng minh rằng nếu:

$$a = x + \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

là một số nguyên thì $S_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ cũng là một số nguyên với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét: Nếu n nguyên âm, ta đặt:

$$n = -m, \text{ với } m \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow S_n = x^{-m} + \frac{1}{x^{-m}} = \frac{1}{x^m} + x^m = S_m = S_{-n}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh quy nạp.

Khi $n = 0$ thì $S_0 = 2 \in \mathbb{Z}$

Khi $n = 1$

$$\text{Ta có: } S_1 = x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$$

Giả sử S_n nguyên với $n = k$, $k \in \mathbb{N}$ và $k \geq 1$.

$S_0, S_1, S_2, \dots, S_k$ nguyên.

Ta chứng minh S_{k+1} nguyên

Ta có:

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right)\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow S_k \cdot S_1 = S_{k+1} + S_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow S_{k+1} = S_k S_1 - S_{k-1}$$

Suy ra S_{k+1} nguyên.

$\Rightarrow S_n$ nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}$

Do đó: $S_{2005} = x^{2005} + \frac{1}{x^{2005}}$ là một số nguyên.

Bài tập 3: Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên n khác 0 sao cho:

$$2^n - 1 \vdots n \quad (*)$$

Tìm tất cả các số nguyên tố n thỏa mãn (*).

Giải

Ta chứng minh rằng với $n = 3^q$, $q \in \mathbb{N}$, thì n chia hết số $2^n + 1$

$$2^{3^q} + 1 \vdots 3^q \quad (1)$$

Khi $q = 0$, ta có:

$$2^1 + 1 \vdots 1, \text{ đúng}$$

Giả sử (1) đúng với $q = k$, $k \in \mathbb{N}$.

$$2^{3^k} + 1 \vdots 3^k$$

$$\Leftrightarrow 2^{3^k} + 1 = A \cdot 3^k, A \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

Ta chứng minh rằng (1) đúng với $q = k + 1$ tức là chứng minh

$$2^{3^{k+1}} + 1 \vdots 3^{k+1} \quad (3)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} 2^{3^{k+1}} + 1 &= \left(2^{3^k}\right)^3 + 1 = \left(A \cdot 3^k - 1\right)^3 \\ &= A^3 \cdot 3^{3k} - 3A^2 \cdot 3^{2k} + 3A \cdot 3^k - 1 \\ &= A \left[A^2 \cdot 3^{2k-1} - A \cdot 3^k + 1 \right] 3^{k+1} \end{aligned}$$

Do đó, ta có:

$$2^{3^{k+1}} + 1 \vdots 3^{k+1}$$

(3) đã được chứng minh:

Vậy có vô số số tự nhiên n sao cho: $2^n - 1 \vdots n \quad (*)$

Với $n = 3^q$, $q \in \mathbb{N}$, n nguyên tố khi $q = 1 \Rightarrow n = 3$.

Bài tập 4: Cho x và y là các số thực khác 0 sao cho các số: $a = x + \frac{1}{y}$; $b = y + \frac{1}{x}$ đều là số nguyên

a) Chứng minh rằng số $c = x^2 y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$ cũng là một số nguyên.

b) Tìm mọi n nguyên dương sao cho số:

$$d = x^n y^n + \frac{1}{x^n y^n}$$

cũng là số nguyên.

Giải

a) Ta có: $a = x + \frac{1}{y}$; $b = y + \frac{1}{x}$, với $x, y \in \mathbb{R}^*$

$$a.b = \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{1}{x}\right) = xy + \frac{1}{xy} + 2$$

$$\Leftrightarrow xy + \frac{1}{xy} = ab - 2 \Rightarrow xy + \frac{1}{xy} \in \mathbb{Z}$$

Ta có:

$$c = x^2 y^2 + \frac{1}{x^2 y^2} = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2 - 2 \Rightarrow c \in \mathbb{Z}$$

Vậy nếu $a = x + \frac{1}{y}$; $b = y + \frac{1}{x}$ nguyên thì các số $xy + \frac{1}{xy}$ và $x^2 y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$ đều là số nguyên.

b). Đặt: $t_n = d \Rightarrow t_n = x^n y^n + \frac{1}{x^n y^n}$, $n \in \mathbb{Z}$

Khi $n = 1, n = 2$ thì các số t_1, t_2 nguyên.

Giả sử t_n nguyên cho đến khi $n = k$.

$t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k$ nguyên.

Ta chứng minh rằng:

$$t_{k+1} = x^{k+1} y^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1} y^{k+1}}, k \in \mathbb{Z}$$

cũng là số nguyên.

Ta có: $t_{k+1} = t_k \cdot t_{k-1} \Rightarrow t_{k+1} \in \mathbb{Z}$.

Vậy nếu $a = x + \frac{1}{y}$; $b = y + \frac{1}{x}$ là các số nguyên thì số $d = x^n y^n + \frac{1}{x^n y^n}$ nguyên, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 5: Xem dãy số:

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 3 + 5$$

$$A_3 = 7 + 9 + 11$$

$$A_4 = 13 + 15 + 17 + 19$$

.....

Chứng minh rằng mỗi số hạng của dãy là lập phương của một số tự nhiên.

Giải

Số hạng tổng quát của dãy số đã cho có dạng: $A_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+n}$

Với $a_m = 2m - 1$ và k là số các số lẻ có trong các số hạng của dãy từ 1 đến $n - 1$.

Ta có: $k = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$

$$\begin{aligned} A_n &= (2k + 1) + (2k + 3) + \dots + (2k + 2n - 1) \\ &= (2k + n)n \\ &= [(n - 1)n + n]n = n^3 \end{aligned}$$

Do đó, ta có:

$$A_1 = 1 = 1^3$$

$$A_2 = 3 + 5 = 2^3$$

$$A_3 = 7 + 9 + 11 = 3^3$$

$$A_4 = 13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$$

.....

$$A_n = n^3.$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng số nguyên tố thứ n thì nhỏ hơn 2^{2^n} .

Giải

Gọi P_n là số nguyên tố thứ n .

Ta chứng minh rằng:

$$P_n < 2^{2^n} \quad (1)$$

Khi $n = 1$, ta có:

$$P_1 = 2 < 2^{2^1}$$

(1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (1) đúng khi $n = 1, 2, 3, \dots, k$ nghĩa là ta có:

$$\begin{aligned} P_1 &< 2^{2^1} \\ P_2 &< 2^{2^2} \\ P_3 &< 2^{2^3} \\ &\dots\dots\dots \\ P_k &< 2^{2^k} \end{aligned} \quad (2)$$

Ta chứng minh rằng:

$$P_{k+1} < 2^{2^{k+1}} \quad (3)$$

Xem số:

$$A = P_1 P_2 \dots P_k + 1 \Rightarrow A > P_k$$

Gọi d là một ước số nguyên tố của $A \Rightarrow d \leq A$

Nếu $d \leq P_k$ thì d chia hết tích $P_1 P_2 P_3 \dots P_{k+1}$ và do đó d chia hết 1, vô lí

$$\Rightarrow d > P_k \Rightarrow d \geq P_{k+1}$$

Ta có:

$$P_{k+1} \leq d \leq A = P_1 P_2 P_3 \dots P_k + 1$$

$$\Rightarrow P_{k+1} \leq 2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdot 2^{2^3} \dots 2^{2^k} + 1$$

$$\Rightarrow P_{k+1} \leq 2^{2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k}$$

$$\Rightarrow P_{k+1} \leq 2^{2^{k+1} - 2} < 2^{2^{k+1}}$$

(3) đã được chứng minh.

$$\text{Vậy } P_n < 2^{2^n}.$$

Bài tập 7: Chứng minh rằng số được thành lập bởi 3^n chữ số giống nhau thì chia hết cho 3^n , trong đó n là số tự nhiên.

Giải

Ta dùng phương pháp quy nạp:

Khi $n = 1$, ta có số $\overline{aaa} : 3 = 3^1$

Giả sử bài toán đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}$ và $k \geq 1$.

$$\Leftrightarrow A_k = \underbrace{\overline{aaa\dots aaa}}_{3^k \text{ chữ số } a} : 3^k$$

Ta chứng minh rằng bài toán đúng khi $n = k + 1$ nghĩa là ta chứng minh:

$$A_{k+1} = \underbrace{\overline{aaa\dots aaa}}_{3^{k+1} \text{ chữ số } a} : 3^{k+1}$$

Ta có thể viết:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \overline{\overline{aaa\dots aaa}aaa} = \overline{\overline{aaa\dots aaa}aaa\dots aaa} \\ &\quad \overline{3^k \cdot 3 \text{ chữ số } a} \quad \overline{3^k + 3^k + 3^k \text{ chữ số } a} \\ &= \overline{\overline{aaa\dots aaa}aaa\dots aaaaaa\dots aaa} \\ &\quad \overline{3^k \text{ chữ số } a} \quad \overline{3^k \text{ chữ số } a} \quad \overline{3^k \text{ chữ số } a} \\ &= \overline{\overline{aaa\dots aaa} \underbrace{100\dots 000}_{(3^k-1) \text{ chữ số } 0} \underbrace{100\dots 0001}_{(3^k-1) \text{ chữ số } 0}} \\ &= A_k \cdot \underbrace{100\dots 000}_{(3^k-1) \text{ chữ số } 0} \cdot \underbrace{100\dots 000}_{(3^k-1) \text{ chữ số } 0} : 3^k \cdot 3 = 3^{k+1} \end{aligned}$$

Vậy ta luôn có:

$\underbrace{aaa...aaa}_{3^n \text{ chữ số } a} : 3^n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ và } n \geq 1, a \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9.$

3^n chữ số a

Nhận xét: Bài này quá khó đối với học sinh lớp 9.

Bài tập 8: Chứng minh rằng: $2^n > n, n \in \mathbb{N}.$

Giải

Với $n = 0$, ta có: $2^0 = 1 > 0$. Vậy $2^n > n$ đúng với $n = 0$.

Giả sử $2^k > k$.

Suy ra $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 = 2^k + 2^k > k + 1$.

Vậy $2^n > n, \forall n \in \mathbb{N}.$

Bài tập 9: Chứng minh rằng: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$ (với $n = 1, 2, 3, \dots$)

Giải

Với $n = 1$, ta có: $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$

Vậy $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ đúng với $n = 1$.

Giả sử $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1) \left(\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right) \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

Vậy $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ đúng với $n = 1, 2, 3, \dots$

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có :

$$1) 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

$$2) 1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$3) \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$4) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$5) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$$

$$6) 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

Bài tập 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

$$1) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

2) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

3) $1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$

4) $1.4 + 2.7 + 3.10 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$

5) $1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n + 1)(n + 2) = \frac{n(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{4}$

6) $1.3.5 \dots (2n - 1).2^n = (n + 1)(n + 2) \dots 2n$

Bài tập 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

1) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n - 1).(2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$

2) $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{(3n - 2).(3n + 1)} = \frac{n}{3n + 1}$

3) $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n + 1).(n + 2)} = \frac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$

Bài tập 4: Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, ta luôn có:

1) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n + 1}{2n}$

2) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}.n^2 = \frac{(-1)^{n+1}.n(n + 1)}{2}$

Bài tập 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n , ta luôn có:

1) $7^n - 1 : 6$

2) $11^n - 1 : 10$

3) $(n^3 + 2n) : 3$

4) $(n^5 - 6n) : 5$

5) $(4^n + 15n - 1) : 9$

6) $6^{2n} + 10.3^n : 11$

Bài tập 7: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

1) $9^n - 1 : 8$

2) $n^3 + 11n : 6$

3) $n^7 - n : 7$

4) $(7^n + 3n - 1) : 9$

5) $4^{n+1} + 5^{2n-1} : 21$

6) $11^{n+1} + 12^{2n-1} : 133$

7) $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) : 24$

8) $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 : 9$

Bài tập 8: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

1) $5n^2 - 6n + 1 \geq 0$

2) $11n^2 - 14n + 3 \geq 0$

Bài tập 9: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n , ta luôn có:

1) $2^n > 2n + 1, \forall n \geq 3$

2) $3^{n+1} > 3n + 4, \forall n \geq 2$

3) $2^n > n^2, \forall n \geq 5$

4) $3^{n-1} > n(n+2), \forall n \geq 4$

5) $2^{n-3} > 3n - 1, \forall n \geq 8$

6) $n! > 3^n, \forall n \geq 7$

7) $n^n \geq (n+1)^{n-1}$

8) $(n!)^2 \geq n^n$

Bài tập 10: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

1) $(1+x)^n \geq 1+nx$ với $x > -1$.

2) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$ với $a \geq 0, b \geq 0$.

Bài tập 11: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{n+1}{n}$

2) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$

3) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

4) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2 - \frac{1}{n}$

5) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

Bài tập 12: Tìm công thức tính các tổng sau (với $n \in \mathbb{N}$)

1) $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$

2) $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

3) $S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n!$

Bài tập 13: Cho n số dương $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = 1$.

Chứng minh : $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq n$

Bài tập 14: Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương thỏa mãn: $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$

Chứng minh rằng : $(1-x_1)(1-x_2) \cdot \dots \cdot (1-x_n) \geq \frac{1}{2}$

Bài tập 15: Cho x là số thực và $|x| < 1$.

Chứng minh rằng: $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$ với $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$)

Bài tập 16: Chứng minh rằng $(1+x)^n \geq 1+nx$, với $x > -1$ và n nguyên dương.

Bài tập 17: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a.b^{n-2} + b^{n-1})$$

Bài tập 18: Tìm số hạng tổng quát của dãy số sau:

$$u_1 = 3; u_{n+1} = 2u_n, (n \geq 1)$$

Bài tập 19: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$$

Bài tập 20: Tìm số hạng tổng quát của dãy số sau:

a) $u_1 = 3; u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n$

b) $u_1 = a; u_{n+1} = a + b.u_n$

Bài tập 21: Cho hàm số f xác định với mọi x và thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+y) \geq f(x).f(y)$$

Chứng minh rằng: Với mọi số thực x và mọi số tự nhiên n ta có:

$$f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right]^{2^n}$$

Bài tập 22: Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương. Chứng minh bằng quy nạp:

$$\frac{x_1}{x_2 + x_n} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_4 + x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_{n-2}} + \frac{x_n}{x_1 + x_{n-1}} \geq 2, n \geq 4$$

Bài tập 23: Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có:

$$\frac{1.2.3 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Bài tập 24: Chứng minh bằng quy nạp, với $a > 0$ thì:

$$\sqrt{a} + \sqrt{a} + \dots + \sqrt{a} < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$$

Bài tập 25: Chứng minh rằng: $n^{n+1} > (n+1)^n, (n \geq 3)$

Bài tập 26: Chứng minh bất đẳng thức:

$$(1+2^2)(1+2^{2^2})(1+2^{2^3}) \dots (1+2^{2^n}) < \frac{1}{3} \cdot 2^{2^{n+1}}$$

Bài tập 27: Chứng minh mọi số tự nhiên n khác 0 ta luôn có:

$$2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Bài tập 28: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 5$ ta có:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$$

Bài tập 29: Chứng minh rằng:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq \frac{4n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$$

CHỦ ĐỀ 6
PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH "PHẢN CHỨNG"

1. Kiến thức cơ bản:

Trong chứng minh bằng phản chứng (còn được gọi là reductio ad absurdum, tiếng La tinh có nghĩa là "thu giảm đến sự vô lý"), người ta sẽ chứng minh nếu một phát biểu nào đó xảy ra, thì dẫn đến mâu thuẫn về logic, vì vậy phát biểu đó không được xảy ra. Phương pháp này có lẽ là phương pháp phổ biến nhất trong chứng minh toán học.

Định lý: *Tồn tại vô số số nguyên tố.*

Ở đây, Euclid đã giả sử ngược lại rằng tồn tại hữu hạn số nguyên tố:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n.$$

Ông xét tích $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_n + 1$. N phải có ít nhất 1 ước số nguyên tố p . Khi đó, do $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ là tất cả các số nguyên tố nên tồn tại i sao cho $p = p_i$.

Nhưng khi đó p chia hết 1, mâu thuẫn.

Bài tập 1: Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên tố dạng $4k+3$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên tố dạng $4k+1$.

Một chứng minh nổi tiếng khác bằng phương pháp phản chứng chính là chứng minh của Euler cho định lý nhỏ Fermat với trường hợp $n = 4$.

Định lý. Phương trình $x^4 + y^4 = z^4$ (1) không có nghiệm nguyên dương.

Ông đã giả sử rằng phương trình (1) có nghiệm nguyên dương.

Khi đó, theo nguyên lý cực hạn, tồn tại nghiệm (x_0, y_0, z_0) với $x_0 + y_0 + z_0$ nhỏ nhất.

Sau đó, bằng cách sử dụng cấu trúc nghiệm của phương trình Pythagore:

Ông đi đến sự tồn tại của một nghiệm (x_1, y_1, z_1) có $x_1 + y_1 + z_1 < x_0 + y_0 + z_0$.

Mâu thuẫn.

Phương pháp này thường được gọi là *phương pháp xuống thang*.

Bài tập 3. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ không có nghiệm nguyên dương.

Bài tập 4. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ không có nghiệm nguyên dương

(i) **Bài toán:**

Chứng minh rằng:

$$A \Rightarrow B$$

(Có A thì có B)

Giả thiết là A, kết luận, điều phải chứng minh là B.

Có một số bài toán, ta không chứng minh trực tiếp B được.

Do đó phải dùng phương pháp phản chứng.

(ii) **Phương pháp:**

Giả sử B sai, giả sử không có B (kí hiệu: $\bar{B}$)

$\bar{B}$ gọi là giả thiết phản chứng.

Từ $\bar{B}$, ta suy ra:

$$\bar{B} \Rightarrow E \Rightarrow F \Rightarrow \dots \Rightarrow (*)$$

(*) mâu thuẫn với A.

$$(*) = \bar{A}, \text{ vô lý}$$

Do đó giả thiết phản chứng không đúng, nghĩa là B đúng.

Kết luận: $A \Rightarrow B$.

Chú ý:

Có khi (*) mâu thuẫn với giả thiết phản chứng hoặc mâu thuẫn với một chân lí có trước.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho a và b nguyên tố cùng nhau.

Chứng minh $a + b$ và ab nguyên tố cùng nhau.

Giải

Giả sử $a + b$ và ab không nguyên tố cùng nhau.

Do đó $a + b$ và ab ít nhất phải có ít nhất một ước số cùng nguyên tố d.

$$a + b \vdots d \quad (1)$$

$$ab \vdots d \quad (2)$$

Vì d là số nguyên tố nên từ (2), ta có $a \vdots d$ và $b \vdots d$

Nếu $a \vdots d$

Từ (1) $\Rightarrow b \vdots d$

Như vậy có một ước chung nguyên tố d , trái với giả thiết.

Nếu $b \vdots d$

Tương tự như trên.

Do đó $a + b$ và ab nguyên tố cùng nhau nếu a và b nguyên tố cùng nhau.

$(a, b) = 1 \Rightarrow (a + b, ab) = 1$.

Bài tập 2: Cho a và b nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $A = 5a + 3b$ và $B = 13a + 8b$ nguyên tố cùng nhau.

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} A = 5a + 3b \\ B = 13a + 8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8A - 3B \\ b = 5B - 13A \end{cases}$$

Giả sử A và B không nguyên tố cùng nhau.

Ta suy ra A và B có ít nhất một ước số chung $d > 1$.

$$d \mid A \wedge d \mid B$$

$$\Rightarrow d \mid a \wedge d \mid b$$

Như vậy a và b có một ước số chung $d > 1$, mâu thuẫn giả thiết.

Vậy A và B nguyên tố cùng nhau, nếu a và b nguyên tố cùng nhau.

Bài tập 3: Cho a và b nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng:

$$A = ab + bc + ca, B = a + b + c, C = abc$$

Nguyên tố cùng nhau.

Giải

Giả sử A, B, C không nguyên tố cùng nhau.

Do đó A, B, C ít nhất phải có ít nhất một ước số chung nguyên tố d .

$$A \vdots d; B \vdots d; C \vdots d$$

Vì $C \vdots d$, d nguyên tố nên ta có:

$$a \vdots d \vee b \vdots d \vee c \vdots d$$

Nếu $a \vdots d$

Ta có:

$$\left. \begin{matrix} A \vdots d \\ a \vdots d \end{matrix} \right\} \Rightarrow bc \vdots d \Rightarrow b \vdots d \vee c \vdots d$$

Nếu $b \vdots d$

Ta có:

$$B \vdots d; a \vdots d; b \vdots d \Rightarrow c \vdots d$$

Như vậy 3 số a, b, c sẽ có một ước số chung nguyên tố d , mâu thuẫn giả thiết.

Nếu $b \vdots d$ hoặc $c \vdots d$, Chứng minh tương tự.

Vậy nếu $(a, b, c) = 1$ thì $(ab + bc + ca, a + b + c, abc) = 1$.

Bài tập 4:

a) Cho a, b , nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $a^n + b^n$ và ab nguyên tố cùng nhau.

b) Cho $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng: $(a^n, b) = 1$.

Giải

Giả sử $a^n + b^n$ và ab không nguyên tố cùng nhau.

Ta suy ra: $a^n + b^n$ và ab ít nhất phải có một ước số chung nguyên tố d sao cho:

$$a^n + b^n \vdots d \quad (1)$$

$$ab \vdots d \quad (2)$$

Vì $ab \vdots d$, d nguyên tố nên ta có:

$$a:d \vee b:d$$

Nếu $a:d$

$$\Rightarrow a^n:d$$

Ta lại có: $a^n + b^n:d \Rightarrow b^n:d$

Vì $b^n:d$, d nguyên tố, nên $b:d$

Như vậy $a^n + b^n$ và ab nguyên tố cùng nhau nếu a và b nguyên tố cùng nhau.

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (a^n + b^n, ab) = 1$$

b) HS tự giải.

Bài tập 5: Chứng minh rằng: $4n^2 - 2n + 13$ không chia hết cho 289 với mọi số tự nhiên n .

Giải

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho, ta có:

$$4n^2 - 2n + 13 : 289$$

$$\Leftrightarrow 16n^2 - 8n + 52 : 289$$

$$\Leftrightarrow (4n - 1)^2 + 51 : 289 (*)$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow (4n - 1)^2 + 51 : 17$$

$$\Rightarrow (4n - 1)^2 : 17$$

$$17 \text{ là số nguyên tố} \Rightarrow 4n - 1 : 17$$

$$\Rightarrow (4n - 1)^2 : 289 (**)$$

Từ (*) và (**), ta suy ra:

$51 : 289$ vô lý

Vậy $4n^2 - 2n + 13 \not\vdots 289, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 6: Chứng minh rằng số: $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 121 với mọi số tự nhiên n .

Giải

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$n^2 + 3n + 5 : 121$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 12n + 20 : 121$$

$$\Rightarrow (2n + 3)^2 + 11 : 121 (*)$$

$$\Rightarrow (2n + 3)^2 : 11$$

Vì 11 là số nguyên tố nên ta có:

$$2n + 3 : 11$$

$$\Rightarrow (2n + 3)^2 : 121 (**)$$

Từ (*) và (**), ta có: $11 : 121$, vô lý.

Vậy $n^2 + 3n + 5 \not\vdots 121, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 7: Chứng minh rằng không có số nguyên tố nào là lớn nhất.

Giải

Giả sử p_n là số nguyên tố lớn nhất.

Gọi p là tích của n số nguyên tố đã biết:

$$p = p_1 p_2 \dots p_n$$

$$\text{Đặt } A = p + 1 \Rightarrow A > p_n$$

Do đó A là một hợp số.

$\Rightarrow A$ có ít nhất một ước số nguyên tố d .

$$\Rightarrow d \leq p_n \Rightarrow d|p$$

Vì $d|A, d|p \Rightarrow d|1$, vô lý.

Vậy không có số nguyên tố nào là lớn nhất.

Bài tập 8: Có tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để cho $n^2 + n + 2$ chia hết cho 49 hay không?

Giải

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}$, sao cho:

$$n^2 + n + 2 : 49$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 4n + 8 : 49 \quad (1)$$

Ta suy ra: $4n^2 + 4n + 8 \vdots 7$

$$\Rightarrow (2n + 1)^2 \vdots 7$$

7 là số nguyên tố. Suy ra: $(2n + 1) \vdots 7$

$$\Rightarrow (2n + 1)^2 \vdots 49 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra: $7 \vdots 49$, vô lí

Vậy không tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để $n^2 + n + 2 \vdots 49$

Bài tập 9: Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

Giải

Giả sử $a = \sqrt{2}$ là số hữu tỷ, có nghĩa là tồn tại 2 số dương m, n sao cho

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2 \Leftrightarrow m^2 - mn = 2n^2 - mn$$

$$\Leftrightarrow m(m - n) = n(2n - m)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{2n - m}{m - n}$$

Ta có: $\sqrt{2} > 1 \Rightarrow m > n \Rightarrow m < 2n - m \Rightarrow \frac{2n - m}{m - n}$ là phân số rút gọn $\frac{m}{n}$.

Suy ra: $\frac{m}{n}$ chưa tối giản (mâu thuẫn)

Kết luận $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

Bài tập 10: Một lớp học có 30 học sinh. Các học sinh này tham quan trong 3 nhóm năng khiếu. Nhóm Toán có 17 em, nhóm văn có 13 em và nhóm anh văn có 11 em. Trong lớp còn 10 em không tham gia nhóm năng khiếu nào. Chứng minh rằng: Trong lớp có ít nhất một em tham gia đồng thời cả 3 nhóm năng khiếu.

Giải

Theo giả thiết, ta có: Số học sinh tham gia các môn năng khiếu là:

$$17 + 13 + 11 = 41 \text{ (em)}$$

Giả sử không có em nào dự 3 nhóm năng khiếu, tức là mỗi em tham gia tối đa là 2 môn năng khiếu.

Số học sinh tham gia các nhóm năng khiếu là:

$$20 \cdot 2 = 40 \text{ (em)}$$

Suy ra: Mâu thuẫn.

Vậy có ít nhất 1 em tham gia đồng thời cả 3 môn năng khiếu.

Bài tập 11: Một ban kiểm tra họp tất cả 40 lần, mỗi lần họp có 10 ủy viên dự. Trong đó không có 2 ủy viên nào cùng đến dự họp với nhau quá 1 lần.

Chứng minh rằng: Số ủy viên của ban kiểm tra không thể ít hơn 60 người.

Giải

Giả sử số lượng ủy viên của ban kiểm tra nhỏ hơn 60.

Theo giả thiết, ta có tổng số lượng ủy viên dự tất cả các lần họp là:

$$40 \cdot 10 = 400$$

Số lần họp của một ủy viên là: $\frac{400}{60} \approx 6,6 \approx 7$

Mỗi lần họp một ủy viên sẽ gặp 9 người ủy viên khác.

Suy ra số người ủy viên gặp là $7 \cdot 9 = 63$ (mâu thuẫn).

Bài tập 12: Một người bán hàng có 25kg Táo. Để thuận tiện cho khách hàng, ông ta dự định xếp Táo vào các hộp nhựa loại đựng 1kg, loại 3kg và loại 5kg.

Người bán hàng có tất cả 10 hộp. Hỏi ông ta có thể xếp hết 25kg táo vào 10 hộp đó để bán cho khách hàng không?

Giải

Giả sử ông ta xếp hết 25kg Táo vào 10 hộp.

Gọi x là số hộp đựng 1kg

y là số hộp đựng 3kg

z là số hộp đựng 5kg

Ta có:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + 3y + 5z = 25 \end{cases} \Leftrightarrow 2y + 4z = 15 \text{ (vô lý)}$$

Vậy không xếp được.

Bài tập 13: Có 5100 quả cầu. Trong đó có 300 quả cầu đen, còn lại là trắng. Chúng được xếp trong một số hộp sao cho mỗi hộp không quá 3 quả cầu đỏ.

Chứng minh rằng: Có thể tìm được 2 hộp chứa cùng một số lượng quả cầu.

Giải

Gọi m là số hộp, $m \geq 100$

N_1 là số táo trong hộp 1

N_2 là số táo trong hộp 2

.....

N_n là số táo trong hộp n

Vậy $N_1 + N_2 + \dots + N_n = 5100$

Gảỉ sử số lượng quả cầu trong mỗi hộp đều khác nhau:

$N_1 \geq 1$

$N_2 \geq 2$

$N_3 \geq 3$

.....

$N_n \geq m$

$N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_n \geq 1 + 2 + 3 + \dots + m$

$$\Leftrightarrow 5100 \geq \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 100 \geq m$$

Vậy $m = 100$

Suy ra mỗi hộp đều có 3 quả cầu đỏ nên:

$N_1 \geq 3$

$N_2 \geq 4$

$N_3 \geq 5$

.....

$N_n \geq 102$

$$N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_n \geq \frac{102(102+1)}{2} - 3$$

$$\Leftrightarrow 5100 \geq 5250 \text{ (mâu thuẫn)}$$

Vậy luôn có thể tìm được 2 hộp chứa cùng 1 số lượng quả cầu.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b, c luôn tìm được số nguyên dương n sao cho số $f(n) = n^3 + an^2 + bn + c$ không phải là số chính phương.

Bài tập 2: Cho a, b là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau.

Chứng minh rằng phương trình: $ax + by = ab$ không có nghiệm nguyên dương.

Bài tập 3: Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì số $2010^n - 1$ không chia hết cho $1000^n - 1$.

Bài tập 4: Chứng minh rằng hệ phương trình sau không có nghiệm nguyên dương:

$$\begin{cases} x + xyzt = 1987 \\ y + xyzt = 987 \\ z + xyzt = 87 \\ t + xyzt = 7 \end{cases}$$

Bài tập 5: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn phương trình $abc = 1$.

Chứng minh rằng: $S = \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$.

Trần Trung Chính - SP Toán Tin

CHỦ ĐỀ 7
BÀI TOÁN "TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG"

1. Kiến thức cơ bản:

Tìm một, hai, ba chữ số tận cùng của một số chính là tìm dư trong phép chia số đó cho 10, 100 hoặc 1000. Nhưng khi khảo sát các chữ số của một số, có những phương pháp đặc biệt khá lí thú.

Tìm một chữ số tận cùng của a^n

Nếu a tận cùng là 0; 1; 5; 6 thì a^n lần lượt tận cùng là 0; 1; 5; 6.

Nếu a tận cùng là 2; 3; 7 thì sao?

Dùng kí hiệu $a \equiv b \pmod{m}$ để chỉ $a - b$ chia hết cho m , ta có:

$$2^{4k} = 16^k \equiv 6 \pmod{10}$$

$$3^{4k} = 81^k \equiv 1 \pmod{10}$$

$$7^{4k} = 49^{2k} \equiv 1 \pmod{10}$$

Do đó để tìm chữ số tận cùng của a^n (với a tận cùng là 2; 3; 7) ta lấy số mũ n chia cho 4.

Giả sử: $n = 4k + r$, ($r = 0; 1; 2; 3$)

Nếu $a \equiv 2 \pmod{10}$ thì $a^n \equiv 2^n = 2^{4k+r} \equiv 6 \cdot 2^r \pmod{10}$

Nếu $a \equiv 3; 7 \pmod{10}$ thì $a^n \equiv a^{4k+r} \equiv a^r \pmod{10}$

Tìm hai chữ số tận cùng của a^n

Giả sử a có hai chữ số tận cùng là x : $0 \leq x \leq 9$

Theo nhị thức Newton, ta có:

$$a^{20} = (10k + x)^{20} = (10k)^{20} + 20 \cdot (10k)^{19} + \dots + 20 \cdot (10k)x^{19} + x^{20} \equiv x^{20} \pmod{100}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của a^{20} cũng chính là hai chữ số tận cùng của x^{20} .

Nhận xét:

$$2^{20} \equiv 76 \pmod{100}; 6^5 \equiv 76 \pmod{100}$$

$$3^{20} \equiv 1 \pmod{100}; 7^4 \equiv 1 \pmod{100}$$

Dùng quy nạp ta có: $76^m \equiv 76 \pmod{100}$

$$5^m \equiv 25 \pmod{100} \quad (m \geq 2)$$

Từ đó suy ra với mọi $m \geq 1$:

$$a^{20m} \equiv 0 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod{10}$$

$$a^{20m} \equiv 1 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10}$$

$$a^{20m} \equiv 25 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10}$$

$$a^{20m} \equiv 76 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10}$$

Vậy để tìm hai chữ số tận cùng của a^n ta tìm dư trong phép chia số mũ n cho 20.

Phương pháp chung:

Xem số tự nhiên $A = n^k$, $n, k \in \mathbb{N}$.

Cách 1:

Muốn tìm chữ số cuối cùng của A , ta chỉ cần biểu diễn A dưới dạng:

$$A = 10a + b = \overline{ab}$$

$\Rightarrow b$ là chữ số cuối cùng của A .

Ta viết:

$$A = n^k = (10q + r)^k = 10t + r^k$$

Với $r \in \mathbb{N}$ và $0 \leq r \leq 9$

Chữ số cuối cùng của A cũng chính là chữ số cuối cùng của số r^k .

Nếu $A = 100a + \overline{bc} = \overline{abc}$, thì $\overline{bc}$ là số gồm hai chữ số cuối cùng của A .

Nếu $A = 1000a + \overline{bcd} = \overline{abcd}$ thì $\overline{bcd}$ là số gồm ba chữ số cuối cùng của A .

.....

$$\text{Nếu } A = 10^m \cdot a_m + \overline{a_{m-1}a_{m-2} \dots a_1 a_0} = \overline{a_m a_{m-1} a_{m-2} \dots a_1 a_0}$$

Thì $\overline{a_{m-1}a_{m-2} \dots a_1 a_0}$ là số gồm m chữ số cuối cùng của số A .

Vậy ta có phương pháp cụ thể là:

Để tìm một số có thể lần lượt xét từng chữ số bằng cách xét chữ số tận cùng của một tích có chữ số cần tìm.

Sử dụng tính chia hết và chia có dư.

Ước lượng giá trị của biểu thức nào đó chứa các chữ số để giảm bớt các trường hợp cần xét.

Giải phương trình bậc hai nếu giả thiết cho biểu thức chứa bình phương các chữ số.

Chú ý:

Có thể có nhiều phương pháp khác nữa qua các phép biến đổi nên không nhất thiết phải làm theo một cách.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Tìm tất cả các số tự nhiên gồm 6 chữ số sao cho mỗi chữ số, kể từ chữ số thứ ba (tính từ trái sang phải) đều là tổng của 2 chữ số liền kề bên trái.

Giải

Gọi a là chữ số hàng trăm ngàn ($a > 0$) và b là chữ số hàng chục ngàn của số tự nhiên cần tìm.

Chữ số hàng ngàn là: $a + b$.

Chữ số hàng trăm là: $a + 2b$.

Chữ số hàng chục là: $2a + 3b$.

Chữ số hàng đơn vị là: $3a + 5b$.

Ta có $3a + 5b \leq 9 \Rightarrow b \leq 1$, nên $b = 0$ hoặc $b = 1$

Lý luận đưa đến kết quả: 101123; 202246; 303369; 112358.

Bài tập 2: Chứng minh rằng chữ số tận cùng của các số tự nhiên n và n^5 là như nhau.

Giải

Xem số $A = n^5 - n$

Ta có: $A = n(n^4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

Ta có: $A : 2$ vì $n(n + 1) : 2$.

Nếu $n : 5$ thì $A : 5$.

Nếu $n \not\vdots 5$ thì n có các dạng sau: $5k + 1; 5k + 2; 5k + 3; 5k + 4$

Suy ra: n^2 có dạng $5p + 1$ hoặc $5p + 4$.

$n^2 - 1 : 5$ hay $n^2 + 1 : 5 \Rightarrow A : 5$

Ta có: $A : 2$ và $A : 5$

Do $(2, 5) = 1$ nên $A : 10$.

Do đó n và n^5 có cùng chữ số hàng đơn vị.

Bài tập 3: Tìm số có ba chữ số $\overline{abc}$ thỏa mãn $(a + b + c) \cdot \overline{abc} = 1000$.

Giải

Ta có: $(a + b + c) \cdot \overline{abc} = 1000$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 0$.

Do đó ta có: $\overline{abc} = 1000, 125, 200, 250, 500$

Trường hợp: $\overline{abc} = 125 \Rightarrow a + b + c = 8$, thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp: $\overline{abc} = 100, 200, 250, 500$ không thỏa mãn điều kiện.

Suy ra: $\overline{abc} = 125$.

Bài tập 4: Một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó nhỏ hơn hai lần tích các chữ số của nó 9 đơn vị. Tìm số đó.

Giải

Gọi số có hai chữ số phải tìm là $\overline{ab}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $0 \leq a, b \leq 9, a \neq 0$.

Theo đề bài, ta có:

$$\overline{ab} = 2ab - 9 \Rightarrow b \neq 0$$

$$\Rightarrow 10a + b = 2ab - 9$$

$$\Rightarrow b = \frac{10a + 9}{2a - 1} = 5 + \frac{14}{2a - 1}$$

$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow 2a - 1$ là ước số lẻ của 14.

$$\Leftrightarrow 2a - 1 = 1 \text{ và } 2a - 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \vee a = 4$$

Ta có: $b \leq 9 \Rightarrow a \geq 2$. Do đó: $a = 4$ và $b = 7$.

Suy ra số cần tìm là 47.

Bài tập 5: Tìm chữ số hàng đơn vị của số: $17^{1983} + 11^{1983} - 7^{1983}$

Giải

Các số 17^{1983} và 7^{1983} có cùng chữ số hàng đơn vị:

Suy ra số $17^{1983} + 11^{1983} - 7^{1983}$ có cùng số hàng đơn vị với số 11^{1983} và bằng 1.

Bài tập 6: Tìm các số có dạng $\overline{xyz}$ sao cho $\overline{xyz} + \overline{xzy} = \overline{zzz}$.

Giải

Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{N}$ và $1 \leq x < z \leq 9; 0 \leq y \leq 9$

Ta có: $\overline{xyz} + \overline{xzy} = \overline{zzz}$

$$\Leftrightarrow 200x + 11y = 100z \quad (1)$$

Từ (1) $\Rightarrow 11y: 100 \Rightarrow y = 0$.

Do đó: $z = 2x$.

Các số phải tìm là: 102, 204, 306, 408.

Bài tập 7: Cho hai số a và b

$$a = 11 \, 111 \, 111$$

$$b = 1 \, 111 \, \dots \, 111 \text{ (100 chữ số 1)}$$

Tìm ước chung của a và b .

Giải

Xem hai số tự nhiên a và b

Ta có: $b = aq + 1 \, 111$

Suy ra:

$$(a, b) = (a, b - aq) = (a, 1 \, 111) = 1111.$$

Suy ra ước chung lớn nhất của a và b là 1111.

Bài tập 8: Tìm chữ số tận cùng của 1992^{1993} .

Giải

Ta có: $1992^{1993} \equiv 2^{1993} \pmod{10}$

Mà $1993 = 4 \cdot 498 + 1$

Do đó:

$$2^{1993} \equiv (2^4)^{498} \cdot 2 \equiv 2 \pmod{10}$$

Vậy chữ số tận cùng của 1992^{1993} là 2.

Bài tập 9: Tìm hai chữ số tận cùng của $2^{2^{1992}}$ (có 1992 số 2)

Giải

Đặt: $a_n = 2^{2^n}$ (có n số 2). Ta có: $a_{1992} = 2^{a_{1991}}$

Ta tìm dư trong phép chia a_{1991} cho 20

Ta có:

$$a_{1991} = 2^{2^{1991}} = 2^{a_{1991}} = 2 \cdot 2^{a_{1991}-1} = 2 \cdot 2^{4k+3} = 2(10+8) = 20l+16 \quad (l \in \mathbb{Z})$$

Do đó: $a_{1992} = 2^{20l+16} \equiv 2^{16} \cdot 76 \equiv 36 \pmod{100}$

Bài tập 10: Có bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số trong đó mỗi số đều chia hết cho 11 và có mặt tất cả các chữ số từ 1 đến 8.

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán Tin Đại học Vinh năm học 2001 - 2002)

Giải

Số các số tự nhiên gồm 8 chữ số được viết từ 8 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 mà tất cả các chữ số này đều có mặt là:

$$8! = 40 \, 320 \text{ số.}$$

Mỗi số có dạng $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$ với $a_i \in \mathbb{N}, 1 \leq a_i \leq 8, a_i \neq a_j$ và $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq 8$.

Mỗi số chia hết cho 11 $\Leftrightarrow A - B:11$ hoặc $B - A:11$

Với

$$A = a_1 + a_3 + a_5 + a_7$$

$$B = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$$

Có $4! = 24$ cách sắp xếp các chữ số a_1, a_3, a_5, a_7 và $4! = 24$ cách sắp xếp các chữ số a_2, a_4, a_6, a_8 .
 Vậy có tất cả: $4! \cdot 4! \cdot 2! = 1152$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 11: Tìm số có 3 chữ số $\overline{abc}$ sao cho:

$$(a + b + c) \overline{abc} = 1000$$

Giải

Ta có: $(a + b + c) \overline{abc} = 1000$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $0 \leq a, b, c \leq 9, a \neq 1$.

Do đó, ta có: $\overline{abc} = 100, 125, 200, 250, 500$

Trường hợp $\overline{abc} = 125 \Rightarrow a + b + c = 8$ (thỏa mãn)

Trường hợp $\overline{abc} = 100, 200, 250, 500$ (không thỏa mãn)

Vậy $\overline{abc} = 125$.

Bài tập 12: Tìm những số gồm 4 chữ số sao cho tích của mỗi số với số viết ngược lại là một số gồm 8 chữ số có tận cùng bởi 3 chữ số 0.

Giải

Số phải tìm có dạng: $\overline{abcd}$

$$\overline{abcd} \times \overline{dcba} \geq 10\,000\,000 \quad (1)$$

$$\overline{abcd} \times \overline{dcba} \quad (2)$$

Từ (1) suy ra: $d \neq 0$.

Do đó $\overline{abcd}$ và $\overline{dcba}$ không thể chia hết cho 10.

Từ (2) suy ra:

$$\overline{abcd} : 8 \text{ và } \overline{dcba} : 125 \quad (*)$$

Hoặc

$$\overline{abcd} : 125 \text{ và } \overline{dcba} : 8 \quad (**)$$

Xét trường hợp (*): $\overline{dcba}$ là số lẻ chia hết cho 125 nên có thể tận cùng bằng 125, 375, 625, 875.

$$\overline{cba} = 125 \Rightarrow \overline{21d} : 8 \Rightarrow d = 6 \Rightarrow \overline{abcd} = 5216$$

$$\overline{cba} = 375 \Rightarrow \overline{73d} : 8 \Rightarrow d = 6 \Rightarrow \overline{abcd} = 5736$$

$$\overline{cba} = 625 \Rightarrow \overline{26d} : 8 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow \overline{abcd} = 5264$$

$$\overline{cba} = 875 \Rightarrow \overline{78d} : 8 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow \overline{abcd} = 5784$$

Tương tự với trường hợp (**)

Có 8 số thỏa mãn yêu cầu bài toán: 4625, 4875, 5216, 5264, 5736, 5784, 6125, 6375.

Bài tập 13: Hãy xác định 3 chữ số nằm bên trái của số:

$$n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 999^{999} + 1000^{1000}$$

Giải

$$\text{Xem số: } n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 999^{999} + 1000^{1000}$$

Ta có:

$$1000^{1000} < n < 1000^1 + 1000^2 + \dots + 1000^{999} + 1000^{1000}$$

Ta suy ra:

$$\underbrace{1000\,000\dots000}_{3\text{ ngàn chữ số}} < n < \underbrace{100\,100\,100\dots1000}_{3001\text{ ngàn chữ số}}$$

Do đó 3 chữ số tận cùng bên trái của số n là 100.

Đáp số: 100.

Bài tập 14: Tìm 3 chữ số cuối của số:

$$A = m^{100}$$

trong đó m là một số tự nhiên bất kỳ khác 0.

Giải

Giả sử m có dạng $m = \overline{ab}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $0 \leq a, b \leq 9, a \neq 0$.

Ta có:

$$A = m^{100} = (10a + b)^{100} = 1000a + b^{100}$$

Ta suy ra: 3 chữ số cuối cùng của số $A = m^{100}$ chính là 3 chữ số cuối cùng của số $B = b^{100}$, trong đó b là chữ số hàng đơn vị của m .

Xét các khả năng: $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ thì ta có các kết quả thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 15: Tìm 4 chữ số cuối cùng của số $M = 5^{2005}$

Giải

Ta có:

$$5^4 = 0625 \text{ tận cùng } 0625$$

$$5^5 = 3125 \text{ tận cùng là } 3125$$

$$5^6 \text{ tận cùng là } 5625$$

$$5^7 \text{ tận cùng là } 8125$$

$$5^8 \text{ tận cùng là } 0625$$

$$5^9 \text{ tận cùng là } 3125$$

$$5^{10} \text{ tận cùng là } 5625$$

$$5^{11} \text{ tận cùng là } 8125$$

$$5^{12} \text{ tận cùng là } 0625$$

.....

Chu kỳ của lũy thừa 5 sẽ lặp lại là 4.

Suy ra: 5^{4m} tận cùng 0625

$$5^{4m+1} \text{ tận cùng là } 3125$$

$$5^{4m+2} \text{ tận cùng là } 5625$$

$$5^{4m+3} \text{ tận cùng là } 8125$$

Mà 2005 có dạng $4n + 1$

Do đó số $M = 5^{2005}$ có 4 chữ số cuối cùng là 3125.

Bài tập 16: Tìm hai chữ số cuối cùng của số:

a) $A = 9^{9^9}$

b) $B = 9^{9^{9^9}}$

Giải

a) Ta có:

$$A = 9^{9^9} = (10-1)^{9^9} \text{ có dạng } (10-1)^n \text{ với } n = 9^9.$$

Ta có:

$$A = C_n^0 - C_n^1 \cdot 10^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} \cdot 10 - C_n^n$$

$\Rightarrow A$ có cùng hai chữ số cuối cùng.

$$\text{Với số } a = C_n^{n-1} \cdot 10 - C_n^n = 10n - 1$$

$$\text{Số } n = 9^9 \text{ tận cùng là } 9$$

$$\Rightarrow 10n \text{ tận cùng là } 90$$

$$\Rightarrow a = 10n - 1 \text{ tận cùng là } 89.$$

Vậy: Số $A = 9^{9^9}$ có hai chữ số cuối cùng là 89.

b) Ta có:

$$B = 9^{9^{9^9}} = (10-1)^m \text{ với } m = 9^{9^9}$$

$$= C_m^0 \cdot 10^m - C_m^1 \cdot 10^{m-1} + \dots + C_m^{m-1} \cdot 10 - C_m^m$$

$\Rightarrow B$ có 2 chữ số tận cùng với số:

$$b = C_m^{m-1} \cdot 10 - C_m^m = 10m - 1$$

$$\text{Số } m = 9^{9^9} \text{ tận cùng là } 9.$$

$$\Rightarrow b \text{ tận cùng là } 89.$$

Vậy $B = 9^{9^{9^9}}$ có hai chữ số cuối cùng là 89.

Bài tập 17: Tìm hai chữ số cuối cùng của số:

a) $C = 2^{999}$

b) $D = 3^{999}$

Giải

a) Ta có:

$$2^{10} + 1 = 1024 + 1 = 1025 \vdots 25$$

$$\Rightarrow 2^{20} - 1 : 25$$

Ta lại có:

$$2^{1000} - 1 = (2^{20})^{50} - 1 : 2^{20} - 1$$

$$\Rightarrow 2^{1000} - 1 : 25$$

Do đó 2^{1000} tận cùng là 26.51 hoặc 76.

Nhưng

$$2^{1000} : 4$$

$$\Rightarrow 2^{1000} \text{ tận cùng là } 76$$

$$\Rightarrow 2^{999} \text{ tận cùng là } 38 \text{ hoặc } 88$$

$$\text{Vì } 2^{999} : 4$$

$$\Rightarrow 2^{999} \text{ tận cùng là } 88.$$

Vậy số $C = 2^{999}$ có hai chữ số tận cùng là 88.

b) Theo trên ta biết rằng:

$$9^{2m} \text{ tận cùng là } 1$$

$$9^{2m+1} \text{ tận cùng là } 9.$$

Ta hãy tìm số dư của phép chia $9^5 + 1$ cho 100.

$$\text{Ta có: } 9^5 + 1 = 10(9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1)$$

$$\text{Số } 9^4 + 9^2 + 1 \text{ tận cùng là } 3.$$

$$\text{Số } 9^3 + 9 \text{ tận cùng là } 8.$$

$$\Rightarrow (9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1) \text{ tận cùng là } 5.$$

$$\Rightarrow 9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1 = 10q + 5$$

$$\Rightarrow 9^5 + 1 = 100q + 50$$

$$\Rightarrow 9^{10} - 1 = (9^5 + 1)(9^5 - 1) = 100t$$

Ta lại có:

$$3^{1000} - 1 = 9^{500} - 1 = (9^{10})^{50} - 1$$

$$\Rightarrow 3^{1000} - 1 : 100$$

$$\Rightarrow 3^{1000} \text{ tận cùng là } 01$$

$$\text{Mặt khác: } 3^{1000} : 3$$

$$\Rightarrow \text{Chữ số hàng trăm của } 3^{1000} \text{ phải là } 2.$$

$$\Rightarrow 3^{1000} \text{ tận cùng là } 201$$

$$\text{Do đó } 3^{999} \text{ tận cùng bởi } 67.$$

Bài tập 18: Tìm chữ số tận cùng của tổng:

$$S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 502^{2001}$$

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán Tin Đại học Sư phạm Vinh năm học 2002)

Giải

Ta có:

$$n^5 - n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n^5 - n : 5, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Vì } (2, 5) = 1 \text{ nên } n^5 - n : 10$$

Ta lại có:

$$n^{4k+1} - n = n(n^{4k} - 1) : n(n^4 - 1)$$

$$\Rightarrow n^{4k+1} - n : 10$$

Ta suy ra n^{4k+1} và n có cùng chữ số hàng đơn vị.

Do đó các số:

$$S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 502^{2001}$$

$$P + 1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 502$$

Có cùng chữ số hàng đơn vị.

Ta có:

$$P + 1 = \frac{501 \cdot (501 + 1)}{2} = \frac{501 \cdot 502}{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{501 \cdot 502}{2} - 1$$

có chữ số hàng đơn vị là 2.

Vậy chữ số tận cùng của tổng:

$$S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 502^{2001}$$

là chữ số 2.

Bài tập 19:

a) Tìm số dư trong phép chia số 1999^{2004} cho 31.

b) Tìm chữ số hàng đơn vị trong biểu diễn ở hệ thập phân của số:

$$A = 17^{2005} + 7^{2005} + 37^{2005}$$

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} 1999^{2004} &= (31a + 15)^{2004} = 31b + 15^{2004} = 31b + 225^{1002} = 31c + 8^{1002} \\ &= 31c + 64^{501} = 31d + 2^{501} = 31d + (2^5)^{100} \cdot 2 = 31e + 2 \end{aligned}$$

Vậy số dư của phép chia số 1999^{2004} cho 31 là $r = 2$.

b) Hai số tự nhiên a^{4n+k} và a^k , $a \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ có cùng chữ số hàng đơn vị.

Do đó số $A = 17^{2005} + 7^{2005} + 37^{2005}$ có cùng chữ số hàng đơn vị với số:

$$B = 17 + 7 + 37 = 61$$

Vậy chữ số hàng đơn vị của A là 1.

Bài tập 20: Cho 10 số nguyên dương: 1, 2, ..., 10

Sắp xếp 10 số đó một cách tùy ý thành một hàng. Cộng mỗi số với số thứ tự của nó trong hàng, ta được 10 tổng.

Chứng minh rằng trong 10 tổng đó tồn tại ít nhất hai tổng có chữ số tận cùng giống nhau.

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Đại học KHTN Hà Nội năm học 2002 - 2003)

Giải

Giả sử 10 số đã cho được sắp xếp thành một hàng và đánh số như sau:

$$a_1, a_2, \dots, a_{10}$$

Xét 10 tổng:

$$S_1 = a_1 + 1$$

$$S_2 = a_2 + 2$$

$$S_3 = a_3 + 3$$

.....

$$S_{10} = a_{10} + 10$$

Đặt:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{10}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) + (1 + 2 + 3 + \dots + 10) = 55 + 55 = 110.$$

Giả sử 10 tổng $S = S_1, S_2, S_3, \dots, S_{10}$ có chữ số tận cùng khác nhau.

Tổng các chữ số tận cùng của chúng là:

$$0 + 1 + 2 + \dots + 10 = 55$$

nghĩa là chữ số tận cùng của S là 5, vô lí.

Vậy trong 10 tổng $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{10}$ có ít nhất hai tổng mà số tận cùng giống nhau.

Bài tập 21: Chứng minh rằng: $7^{1978^{1970}} - 3^{68^{70}} : 10$

Giải

Ta có:

$$7^{1978^{1970}} = 7^{4k} = 2410^h = 10m + 1$$

$$3^{68^{70}} = 3^{4p} = 81^p = 10n + 1$$

$$\text{Suy ra } 7^{1978^{1970}} - 3^{68^{70}} = 10(m + n) : 10.$$

Bài tập 22: Chứng minh rằng: $a^{n+4} - a^n : 10$ với mọi $a \in \mathbb{N}$, mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải

Ta có: $a^{n+4} - a^n = a^n(a^4 - 1) = a^{n-1}(a^5 - a)$

Ta cần chứng minh $a^5 - a \vdots 10$.

HS tự chứng minh.

Bài tập 23: Hỏi rằng số sau:

$$a = 0,7(2001^{2004} + 2003^{2006})$$

là một số nguyên hay phân số.

Giải

Ta có thể viết:

$$2003^{2006} = (2003^4)^{501} \cdot 2003^2$$

Số 2003^2 có chữ số hàng đơn vị là 9; số 2003^4 có chữ số hàng đơn vị là 1.

Suy ra số 2003^{2006} có chữ số hàng đơn vị là 9.

Số 2001^{2004} có chữ số hàng đơn vị là 1.

Ta suy ra: $2001^{2004} + 2003^{2006} \vdots 10$

Do đó $a = 0,7(2001^{2004} + 2003^{2006})$ là một số nguyên.

Bài tập 24: Chứng minh rằng số:

$$A = 0,3(1983^{1983} - 1917^{1917})$$

là một số nguyên.

Giải

Ta có:

$$1983^{4k} = [(1980 + 3)^4]^k = (10q + 3^4)^k = (10m + 1)^k = 10t + 1.$$

$$1983^{4k+1} = 10m + 3.$$

$$1983^{4k+2} = 10n + 9.$$

$$1983^{4k+3} = 10p + 7.$$

Vì 1983 có dạng $4k + 3$ nên ta có:

$$1983^{1983} = 10q + 7$$

Ta lại có:

$$1917^{4k} = 10a + 1$$

$$1917^{4k+1} = 10b + 7$$

$$1917^{4k+2} = 10c + 9$$

$$1917^{4k+3} = 10d + 3.$$

Vì 1917 có dạng $4k + 1$ nên ta có:

$$1917^{1917} = 10e + 7$$

Suy ra: $A = 0,3(1983^{1983} - 1917^{1917})$ là một số nguyên.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm số có 4 chữ số $\overline{abca}$ biết rằng: $\overline{abca} = (5c + 1)^2$

Đáp số: 1681.

Bài tập 2: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho: $\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Với a, b là các số tự nhiên khác 0.

Đáp số: $p = 2$.

Bài tập 3: Tìm số chính phương có dạng: $\overline{22ab}$

Đáp số: 2209

Bài tập 4: Tìm một số chính phương có ba chữ số và chia hết cho 56.

Đáp số: 784.

Bài tập 5: Tìm tất cả các số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\sqrt[3]{\overline{abcde}} = \overline{ab}$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán - Tin ĐHSPT Hà Nội năm học 2002 - 2003)

Đáp số: 32768

Bài tập 6: Tìm hai số tự nhiên x và y thỏa mãn: $\overline{xx}^y = \overline{xyyx}$

Đáp số: $x = 1$ và $y = 3$.

Bài tập 7: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng số đó nhỏ hơn hai lần tích các chữ số của nó 9 đơn vị.

Đáp số: Số phải tìm là 47.

Bài tập 8: Cho hai số tự nhiên x và y , mỗi số gồm hai chữ số. Biết rằng:

(1) $y = 2x$

(2) Một chữ số của x bằng tổng hai chữ số của y , chữ số còn lại của x bằng trị tuyệt đối của hiệu hai chữ số của y .

Hãy xác định x và y .

Đáp số: $x = 17$ và $y = 34$.

Bài tập 9: Tìm chữ số tận cùng của số:

a) $A = 9^{9^9}$

b) $B = 2^{3^4}$

Đáp số:

a) A có chữ số tận cùng là 1 hoặc 9 (tùy thuộc tính chẵn, lẻ)

b) B có chữ số tận cùng là 2.

Bài tập 10: Tìm chữ số hàng đơn vị của số:

$$17^{1983} + 11^{1983} + 7^{1983}$$

Đáp số: Chữ số tận cùng là số 1.

Bài tập 11: Chứng tỏ rằng kết quả của dãy tính sau là một số nguyên:

$$0,7(1991^{1992} + 1993^{1994})$$

Bài tập 12: Số sau đây có nguyên hay không:

$$x = 0,8(1994^{1994} - 1994^{1990})$$

CHỦ ĐỀ 8
ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

1. Kiến thức cơ bản:

Ước số - ước số chung - ước số chung lớn nhất:

Định nghĩa ước số:

Một số tự nhiên $d \neq 0$ được gọi là ước số của một số tự nhiên a khi và chỉ khi a chia hết cho d .

Ta nói d chia hết a , kí hiệu: $d|a$.

Tập các ước của a là:

$$U(a) = \{d \in \mathbb{N} / d|a\} = \{1, \dots, a\}$$

Nếu $U(a)$ và $U(b)$ có những phần tử chung thì phần tử chung đó gọi là ước số chung của a và b .

Định nghĩa ước số chung:

Một số nguyên d được gọi là ước số chung của hai số nguyên a và b khi và chỉ khi d là ước số của a và d cũng là ước số của b .

Ta kí hiệu: $(a, b) = \{d \in \mathbb{N} / d|a \text{ và } d|b\}$

$$= \{d \in \mathbb{N} / d \in U(a) \text{ và } d \in U(b)\}$$

Nếu $U(a) = \{1, a\}$ thì a là số nguyên tố.

Nếu $(a, b) = \{1\}$ thì a và b nguyên tố cùng nhau.

Kí hiệu: $(a, b) = 1$.

Ước chung lớn nhất:

Ước số chung lớn nhất của a và b , kí hiệu (a, b) là số tự nhiên D sao cho:

$$a' = \frac{a}{D} \text{ và } b' = \frac{b}{D} \text{ nguyên tố cùng nhau. } (a', b') = 1.$$

$$(a, b) = D \Leftrightarrow \left(\frac{a}{D}, \frac{b}{D} \right) = 1$$

Nếu $(a, b) = D \Leftrightarrow (ka, kb) = kD$.

Nếu $(a, b) = D \Leftrightarrow \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k} \right) = \frac{D}{k}$ với điều kiện $k|a, k|b$.

Tính chất:

- Nếu d là ước của a thì $|d| \leq |a|$.
- Tập hợp các ước số của một số là hữu hạn.
- Luôn tồn tại ước số bé nhất và ước số lớn nhất.

Tương tự ta có định nghĩa ước số chung của n số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Bội số - bội số chung - bội chung nhỏ nhất:

Định nghĩa bội số:

Một số tự nhiên m được gọi là bội số của tự nhiên $a \neq 0$ khi và chỉ khi m chia hết cho a hay a chia hết m hay a là một ước số của m .

$$m : a \Leftrightarrow m = ka, k \in \mathbb{N}.$$

Tập hợp các bội số của a là:

$$B(a) = \{0, a, 2a, \dots, ka, \dots\}$$

Nếu hai tập hợp $B(a)$ và $B(b)$ có phần tử chung thì các phần tử chung đó gọi là bội chung của a và b .

Định nghĩa bội chung:

Một số tự nhiên k được gọi là bội chung của hai số tự nhiên a và b nếu k là bội số của a và k cũng là bội số của b .

Bội số chung nhỏ nhất:

Trong tập các bội số chung của a và b , phần tử nhỏ nhất $M \neq 0$ được gọi là bội số chung nhỏ nhất của a và b , kí hiệu $[a, b] = M$.

$$\text{Nếu } [a, b] = M \Leftrightarrow \left(\frac{M}{a}, \frac{M}{b} \right) = 1$$

Nếu $[a, b].(a, b) = ab$.

Ta định nghĩa tương tự với bội chung nhỏ nhất k của n số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ là:

$$k = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Một số tính chất của ước và bội:

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương, khi đó:

1) $(ac, bc) = c(a, b)$

2) Cho c là ước chung của a và b .

Khi đó: $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{(a, b)}{c}$

Từ đây suy ra: $d = (a, b) = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

3) Tồn tại các số nguyên x, y sao cho $(a, b) = ax + by$.

4) $(a, b) = 1$ và $ac : b$ thì $c : b$.

5) $(a, b) = 1, (a, c) = 1$ thì $(a, bc) = 1$.

6) $(a, b, c) = ((a, b), c) = (a, (b, c)) = ((a, c), b)$.

7) $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$ và $(a, b) = \frac{ab}{[a, b]}$

8) Cho k là bội số chung của a và b .

$$k = [a, b] \Leftrightarrow \left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}\right) = 1.$$

9) $[ca, cb] = c[a, b]$.

10) $[a, b, c] = [[a, b], c]$.

Ví dụ:

Ví dụ 1: Các ước của số 12 và 24 là:

$$U(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \text{ và } U(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$UCLN(12, 24) = (12, 24) = 12$ (là số lớn nhất trong tất cả các ước chung của 12 và 24).

Ví dụ 2:

$B(5) = 5k$, (với k là số tự nhiên lớn hơn 0)

$BC(5, 15) = 15n$, (với n là số tự nhiên lớn hơn 0).

Bội chung nhỏ nhất của 5 và 15 là 15. (vì 15 là số nhỏ nhất trong tất cả các bội của 5 và 15).

Hay $BCNN(5, 15) = [5, 15] = 15$.

Phép chia Euclide:

Nhận xét: $(a, b) = (b, a - b) = (b - a, b) = d, a \neq b (*)$..

Giả sử $a \geq b$, khi đó từ đẳng thức $(a, b) = (a - b, b)$ ta đã đi về bài toán tìm ước số chung của hai số nguyên dương nhỏ hơn là $a - b, b$.

Tiếp tục là bài toán với hai số nguyên dương nhỏ hơn nữa là $a - 2b, b$ (trong trường hợp $a - b > b$) hay là $(a - b, 2b - a)$ (trong trường hợp $a - b < b$).

Nếu ta tiếp tục làm như vậy thì các số nguyên dương cần tìm ước số chung sẽ nhỏ đi dần, điều này có thể kéo dài vô tận và các số nguyên dương sẽ nhỏ dần vô hạn chăng?

Câu trả lời là không vì ít ra các số nguyên dương cũng bị chặn dưới bởi 1.

Như vậy tại sao quá trình này lại không thể kéo dài vô hạn được, chỉ có thể là do $(*)$ không đúng nữa, tức là đến một lúc nào đó ta thu được hai số nguyên dương bằng nhau.

Nghĩa là ta sẽ có:

$$(a, b) = (c, c) = d. \text{ Như vậy } c = d.$$

Từ đây ta có thuật toán sau để tìm ước chung lớn nhất của hai số nguyên a và b .

Cho $a > b > 0$.

Nếu $a = bq$ thì $(a, b) = b$.

Nếu $a = bq + r, (r \neq 0)$ thì $(a, b) = (b, r)$.

Phép chia Euclide trong trường hợp này được thực hiện như sau:

$$a = bq + r_1 \Rightarrow (a, b) = (b, r_1)$$

$$b = r_1q_1 + r_2 \Rightarrow (b, r_1) = (r_1, r_2)$$

$$r_1 = r_2q_2 + r_3 \Rightarrow (r_1, r_2) = (r_2, r_3)$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} \Rightarrow (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n)$$

$$r_{n-1} = r_nq_n \Rightarrow (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Từ đây, suy ra: $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3) = \dots = (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n) = r_n$.

Hay nói cách khác (a, b) là số dư cuối cùng khác 0 trong phép chia Euclide.

Từ phép chia Euclide, ta suy ra được tính iii), một tính chất đẹp và quan trọng trong lý thuyết số.

Ta có thể dễ dàng chứng minh tính chất trên bằng phương pháp quy nạp lùi theo n trong phép chia Euclide.

Thật vậy, nếu $a = bq$ thì tính chất iii) là hiển nhiên.

Nếu $a \not\equiv b$ thì ta đã có đẳng thức sau: $r_n = 0.r_{n-1} + 1.r_n$.

Giả sử ta đã có: $r_n = (r_k, r_{k+1}) = xr_k + yr_{k+1}$. Khi đó:

$$r_{k-1} = r_kq_k + r_{k+1} \Rightarrow yr_{k-1} = (yq_k - x)r_k + xr_k + yr_{k+1}$$

$$\Rightarrow yr_{k-1} - (yq_k - x)r_k = r_n = (r_{k-1}, r_k)$$

Như vậy theo nguyên lý quy nạp lùi, đối với các số (a, b) cũng tồn tại các số nguyên x, y sao cho:

$$xa + yb = r_n = (a, b).$$

Sau khi đã tìm được ước chung lớn nhất thì việc tìm bội chung nhỏ nhất là đơn giản, ta có thể dùng công thức vii) $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$

Tìm ước chung lớn nhất bằng cách phân tích ra thừa số nguyên tố:

Tìm ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của hai số nguyên dương a và b .

Sử dụng cách phân tích dạng tiêu chuẩn của một số tự nhiên:

Với $m, n \in \mathbb{N}$ và p là số nguyên tố, ta có:

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$$

$$b = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$$

Khi đó:

Ước chung lớn nhất của hai số a và b là tích của các ước chung nguyên tố của hai số a và b với số mũ thấp nhất.

Bội chung nhỏ nhất của hai số a và b là tích của ước nguyên tố của hai số a và b với số mũ cao nhất.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Hãy tìm ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của 34 và 56.

Giải

Áp dụng phép chia Euclide, ta có:

$$(34, 56) = (22, 34) = (12, 22) = (10, 12) = (2, 10) = 2.$$

Bài tập 2: Hãy tìm các ước chung lớn nhất của $2k - 1$ và $9k + 4$ ($k \in \mathbb{N}$).

Giải

Cách 1:

$$(2k - 1, 9k + 4) = (9k + 4 - 4(2k - 1), 2k - 1)$$

$$= (k + 8, 2k - 1) = (2k - 1 - 2(k + 8), k + 8)$$

$$= (k + 8, -17) = (k + 8, 17)$$

$$= \begin{cases} 1(k = 17m - 8) \\ 17(k = 17m - 8) \end{cases}$$

Vậy $(2k - 1, 9k + 4) = 17$ khi $k = 17m - 8$ và $(2k - 1, 9k + 4) = 1$ khi $k \neq 17m - 8$.

Cách 2:

Gọi $d = (2k - 1, 9k + 4)$, ta có:

$$2(9k + 4) - 9(2k - 1) \vdots d.$$

$$\Rightarrow 17 \vdots d \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ d = 17 \end{cases}$$

Bài tập 3: Chứng minh rằng các số $\frac{12n+1}{30n+2}$ và $\frac{5n+3}{12}$ không thể cùng nguyên với cùng một trị số

nguyên của n.

Giải

Giả sử ta có:

$$\frac{7n-1}{4} = t \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5n+3}{12} = k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7n-1 = 4t \\ 5n+3 = 12k \end{cases}$$

Khử n, ta có:

$$84k - 20t = 26$$

$$\Leftrightarrow 42k - 10 = 13, \text{ vô lí (hiệu của hai số lẻ phải là một số chẵn)}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 4: Chứng minh rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là một phân số tối giản.

Giải

Cách 1:

Gọi $(12n+1, 30n+2) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+1 \vdots d & (1) \\ 30n+2 \vdots d & (2) \end{cases}$$

Ta có:

$$(1) \Rightarrow 24n+2 \vdots 2 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), (3)} \Rightarrow 6n \vdots d$$

$$\Rightarrow 12n \vdots d$$

$$\text{Từ (4), (1)} \Rightarrow 1 \vdots d$$

$$\text{Do đó: } d = 1$$

Vậy phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ tối giản.

Cách 2:

Dùng phương pháp phản chứng.

Giả sử phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ chưa tối giản.

$$\Leftrightarrow 12n+1 \text{ và } 30n+2 \text{ có một ước số nguyên tố } d.$$

$$\Leftrightarrow d \mid 12n+1 \text{ và } d \mid 30n+2$$

$$\Leftrightarrow d \mid 24n+2 \Rightarrow d \mid 30n+2 - (24n+2) = 6n$$

$$\Rightarrow d \mid 12n$$

$$\text{Do đó: } d \mid 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài tập 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ là tối giản.

Giải

Cách 1:

Gọi $(21n+4, 14n+3) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} 21n+4 \vdots d & (1) \\ 14n+3 \vdots d & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow 7n+1 \vdots d$$

$$\Rightarrow 14n+3 \vdots d \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), (3)} \Rightarrow 1 \vdots d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ tối giản.

Cách 2:

Giả sử phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ chưa tối giản

$\Leftrightarrow 21n+4$ và $14n+3$ có một ước số chung nguyên tố d.

$\Rightarrow d|7n+1 = (21n+4) - (14n+3)$

$\Rightarrow d|14n+2$

Do đó: $d|(14n+3) - (14n+2) = 1$, vô lí.

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài tập 6: Chứng minh rằng phân số:

$$A = \frac{2n+3}{n^2+3n+2}, n \in \mathbb{N}$$

Giải

Ta có thể viết:

$$A = \frac{2n+3}{n^2+3n+2} = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$$

$n+1$ và $n+2$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên nguyên tố cùng nhau.

$(n+1, n+2) = 1$.

suy ra tổng của chúng là $(n+1) + (n+2) = 2n+3$

và tích của chúng là $(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$

cũng nguyên tố cùng nhau.

Vậy phân số $A = \frac{2n+3}{n^2+3n+2}, n \in \mathbb{N}$ tối giản.

Bài tập 7: Định n để phân số sau tối giản:

$$\frac{n+8}{2n-5}, n \in \mathbb{N}$$

Giải

Để cho phân số $\frac{n+8}{2n-5}, n \in \mathbb{N}$ tối giản thì $(n+8, 2n-5) = 1$

Giả sử d là một ước chung nguyên tố của $2n-5$ và $n+8$

Suy ra: $d|n+8$ (1)

và $d|2n-5$ (2)

Ta có:

(2) $\Rightarrow d|2(n+8) = (2n-5) + 21$

Từ (1), (3) $\Rightarrow d|21$, d nguyên tố.

$\Rightarrow d = 3, 7$.

Muốn cho phân số tối giản thì điều kiện cần và đủ là $(n+8)$ không chia hết cho 3 và 7.

Do đó: $n \neq 3k+1, n \neq 7m-1$, với $k, m \in \mathbb{N}$.

Vậy $n \neq 3k+1$ và $n \neq 7k-1$.

Bài tập 8: Cho $a = \frac{n+8}{2n-5}, n \in \mathbb{N}$

Định n để a là một số nguyên tố.

Giải

Ta có: $(2n-5, 2) = 1$

Suy ra: $a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2a \in \mathbb{Z}$

Ta có:

$$2a = \frac{2(n+8)}{2n-5} = 1 + \frac{21}{2n-5}$$

$2a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2n-5|21 \Leftrightarrow 2n-5 = 1, 3, 7, 21$

Với $21n - 5 = 1 \Leftrightarrow n = 3 \Rightarrow a = 11$ nguyên tố.

Với $21n - 5 = 3 \Leftrightarrow n = 4 \Rightarrow a = 4$ hợp số

Với $21n - 5 = 7 \Leftrightarrow n = 6 \Rightarrow a = 2$ nguyên tố.

Với $21n - 5 = 21 \Leftrightarrow n = 13 \Rightarrow a = 1$ không nguyên tố.

Vậy giá trị n phải tìm để cho a là một số nguyên tố là $n = 3$ và $n = 6$.

Bài tập 9: Tìm k nguyên dương lớn nhất để ta có số:

$$n = \frac{(k+1)^2}{k+23}$$

là một số nguyên dương.

Giải

Ta có thể viết:

$$n = \frac{(k+1)^2}{k+23} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k+23} = \frac{(k+23)(k-21) + 484}{k+23} = k - 21 + \frac{484}{k+23}, k \in \mathbb{Z}$$

n là một số nguyên khi và chỉ khi:

$$k+23 \mid 484, k+23 > 23$$

Ta có: $484 = 22^2 = 4 \cdot 121 = 44 \cdot 11$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+23 = 121 \\ k+23 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 98 \\ k = 21 \end{cases}$$

Với $k = 98$, ta có: $n = 81$

Với $k = 21$, ta có: $n = 11$.

Vậy có hai giá trị k nguyên dương thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

$$k = 81 \text{ và } k = 21$$

Giá trị lớn nhất của k phải tìm là $k = 98$.

Bài tập 10: Tìm ước số chung nguyên tố của các số $n + 8$ và $2n - 5$.

Giải

Ta có:

$$(2n - 5, 2) = 1.$$

Do đó ước số chung của $2n - 5$ và $n + 8$ cũng là ước số chung của $2n - 5$ và $2(n+8) = (2n - 5) + 21$

$$(2n - 5, n + 8) = (2n - 5, 2n - 5 + 21) = (2n - 5, 21)$$

Vậy các ước số chung nguyên tố của $2n - 5$ và $n + 8$ chỉ có thể là

$$d = 3 \text{ và } d = 7$$

Bài tập 11:

a) Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b}$ tối giản thì $\frac{ab}{a^2 + b^2}$ cũng tối giản.

b) Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b}$ tối giản thì $\frac{ab}{a+b}$ cũng tối giản.

Giải

a) Ta biết rằng:

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (ab, a^n + b^n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (ab, a^2 + b^2) = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vậy nếu $\frac{a}{b}$ tối giản thì $\frac{ab}{a^2 + b^2}$ cũng tối giản.

b) HS chứng minh tương tự.

Bài tập 12: Chứng minh rằng ước số chung lớn nhất của 2 số bằng ước số chung lớn nhất của tổng 2 số ấy và bội số chung nhỏ nhất của chúng.

Giải

Gọi $d = (a, b)$ và $M = [a, b]$

Vì $d = (a, b)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases} \quad \text{với } (a', b') = 1$$

$$\Rightarrow a + b = d(a' + b')$$

$$\text{Vì } M = [a, b] \text{ nên } M = \frac{ab}{d} = da'b'$$

Ta suy ra:

$a + b$ và M có một ước số chung là d .

Mặt khác, ta có:

$$(a', b') = 1 \Rightarrow (a' + b', a'b') = 1$$

Do đó d là ước số chung lớn nhất của $a + b$ và M .

$$\text{Vậy } (a, b) = d \Rightarrow (a + b, [a+b]) = d.$$

Bài tập 13: Tìm 2 số biết tổng S và bội số chung nhỏ nhất M của chúng.

Áp dụng:

$$S = 26, M = 84.$$

Giải

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} (a, b) = S \\ [a, b] = M \end{cases} \quad (*)$$

a và b là hai số phải tìm.

Theo bài 12, ta có: $(a + b, [a + b]) = (S, M) = d$

Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} d(a' + b') = S \\ da'b' = M \end{cases}$$

$$\text{với } (a', b') = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' + b' = \frac{S}{d} \\ a'b' = \frac{M}{d} \end{cases}$$

$$\text{với } (a', b') = 1$$

$$\text{Tìm được } a', b' \Rightarrow a = da' \text{ và } b = db'$$

$$\text{Áp dụng: } S = 26, M = 84$$

$$d = (26, 84) = 2.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' + b' = 13 \\ a'b' = 42 \end{cases} \Leftrightarrow a' = 6, b' = 7 \vee a' = 7, b' = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 14 \end{cases} \wedge \begin{cases} a = 14 \\ b = 12 \end{cases}$$

Vậy 2 số phải tìm là 12 và 14.

Bài tập 14: Tìm số tự nhiên n biết rằng tổng tất cả các ước số của n là $2n$ và tích tất cả các ước của n là n^2 .

Giải

Số tự nhiên n có 2 ước số tầm thường là 1 và n .

Nếu n có một ước số $a \neq 1$ và $a \neq n$ thì n ắt có 1 ước số là b sao cho $ab = n$.

Ta có: Tích các ước số của n là: $1.n.a.b = n^2 \Leftrightarrow ab = n$.

Ta suy ra n không còn một ước số nào khác.

$$\text{Do đó, ta có: } 1 + a + b = n \Rightarrow ab = 1 + a + b$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 2.$$

$$\text{Có thể giả sử } a \geq b \Rightarrow a - 1 \geq b - 1 > 0$$

Suy ra:
$$\begin{cases} a-1=2 \\ b-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

Do đó, ta có: $n = 6$.

Vậy $n = 6$.

Bài tập 15: Cho hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau.

Chứng minh rằng các số:

$$A = 111a - 13b$$

$$B = 101a + 6b$$

không thể có ước chung nào khác 1 và 1979.

Giải

Gọi d là một ước số chung của hai số.

$$A = 111a - 13b$$

$$B = 101a + 6b$$

Suy ra d cũng là ước số chung của các số:

$$C = 111B - 101A = 1979b$$

$$D = 13B + 6A = 1979a$$

Do đó, ta có: $d = 1$ và $d = 1979$. (đpcm)

Bài tập 16: Cho 6 số tự nhiên liên tiếp.

Chứng minh rằng:

a) Trong 6 số đã cho, không thể tồn tại 2 số mà ước số chung của chúng lớn hơn hay bằng 6.

b) Trong 6 số đã cho, có ít nhất một số nguyên tố cùng nhau với 5 số còn lại.

Giải

a) Gọi d là ước số chung của hai trong 6 số tự nhiên liên tiếp đã cho.

$$a = da'$$

$$b = db'$$

Giả sử $a > b \Leftrightarrow a' > b'$

Ta có: $a - b = (a' - b')d$

$$a - b \leq 5 \Leftrightarrow (a' - b')d \leq 5 \Leftrightarrow d \leq 5 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

b) Gọi $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ là 6 số tự nhiên liên tiếp đã cho. Có 3 số chẵn và 3 số lẻ.

Theo trên, hai trong sáu số đã cho chỉ có thể có các ước chung nguyên tố là 2, 3, 5.

Những số có ước chung là 2 phải là các số chẵn.

Những số có ước số chung là 3 gồm hai số: một số chẵn, một số lẻ.

Những số có ước số chung là 5 cũng chỉ có thể là hai số: Một số chẵn, một số lẻ.

Do đó, có nhiều nhất là hai số lẻ; mỗi số có ước chung với một số chẵn khác.

Vậy có ít nhất một số lẻ nguyên tố cùng nhau với các số kia.

Bài tập 17: Cho hai số a và b

$$a = 11\,111\,111$$

$$b = 1\,111\,111 \dots 111 \text{ (100 chữ số 1)}$$

Tìm ước chung lớn nhất của a và b .

Giải

Xem hai số tự nhiên a và b

$$a = 11\,111\,111$$

$$b = 1\,111\,111 \dots 111 \text{ (100 chữ số 1)}$$

Ta có:

$$b = aq + 1\,111$$

Suy ra:

$$(a, b) = (a, b - aq) = (a, 1\,111) = 1111$$

Vậy $(a, b) = 1111$.

Bài tập 18: Chứng minh rằng ước chung lớn nhất của các số có dạng $p^4 - 1$ bằng 240, trong đó p là một số nguyên lớn hơn 5.

Giải

$$\text{Ta có: } n = p^4 - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$$

p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là một số lẻ.

Suy ra: $p^2 - 1 \vdots 8$

$$p^2 + 1 \vdots 2$$

$$\Rightarrow n \vdots 16$$

p không chia hết cho 3 $\Rightarrow p^2 = 3k + 1$

$$\Rightarrow p^2 - 1 \vdots 3$$

$$\Rightarrow n \vdots 3$$

Ta có: $p = 5q + 1, 5q + 2, 5q + 3, 5q + 4$

Suy ra: $p^2 = 5m + 1$, hoặc $p^2 = 5m + 4$

$$\Rightarrow p^2 - 1 \vdots 5 \text{ hoặc } p^2 + 1 \vdots 5$$

$$\Rightarrow n \vdots 5$$

Ta có: n chia hết cho 3, 5, 16 và 3 số nguyên tố khác đôi.

Do đó, ta có:

$$n \vdots 240$$

Vậy $p^4 - 1 \vdots 240$ với mọi p nguyên tố lớn hơn 5.

Xem hai số tự nhiên có dạng $p^4 - 1$, p nguyên tố lớn hơn 5.

$$A = a^4 - 1$$

$$B = b^4 - 1$$

Với a, b là hai số nguyên tố lớn hơn 5 (Giả sử $a > b \Leftrightarrow A > B$)

Ta có: $(A, B) = (A, A - B)$

$$A - B = a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$$

a^2 có dạng $4m(m + 1) + 1$

b^2 có dạng $4n(n + 1) + 1$

Suy ra: $a^2 - b^2 = 4m(m + 1) - 4n(n + 1) \vdots 8$

$$a^2 + b^2 \vdots 8$$

$$\Rightarrow A - B \vdots 16$$

a^2 và b^2 cùng có dạng $3c + 1$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 \vdots 3$$

$$\Rightarrow A - B \vdots 3$$

a^2 có dạng $5k + 1$ hoặc $5k + 4$

b^2 có dạng $5h + 1$ hoặc $5h + 4$

Suy ra: $a^2 - b^2 \vdots 5$ hoặc $a^2 + b^2 \vdots 5$

$$\Rightarrow A - B \vdots 5$$

$$\Rightarrow A - B \vdots 240$$

Do đó: $(A, B) = (A, A - B) = 240$

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị có thể có của $(6k + 5, 8k + 3)$, $k \in \mathbb{N}$.

Bài tập 2: Cho $A = 2n + 1$, $B = \frac{n(n+1)}{2}$. Tìm (A, B) .

Bài tập 3: Cho $1 \leq m < n$; $m, n \in \mathbb{N}$.

a) Chứng minh rằng: $(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1) = 1$

b) Tìm $(2^m - 1, 2^n - 1)$.

Bài tập 4: Cho (a, m, n) là các số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng:

$$(a^m + 1, a^n + 1) = a^{(m,n)} + 1.$$

Bài tập 5: Cho (a, b) là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$(2a + 1, 2b + 1) = 1.$$

Tìm các giá trị của: $(2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1, 2^{2b+1} + 2^{b+1} + 1)$

Bài tập 6: Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1 \right) = (m, a - 1), \text{ trong đó } a, m > 1.$$

Bài tập 7: Nếu a, b là các số nguyên dương và $a > b$ thì:

$$\left(\frac{a^m - b^n}{a - b}, a - b \right) = (n(a, b)^{n-1}, a - b)$$

Bài tập 8: Chứng minh rằng: $[1, 2, 3, \dots, 2n] = [n + 1, n + 2, \dots, 2n]$.

Bài tập 9: Cho p là một số nguyên tố. Tìm $(2^{2^n} - 2, 2^n - 1)$

Bài tập 10: Chứng minh rằng dãy số:

a) $A_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$ chứa những dãy vô hạn những số nguyên tố cùng nhau.

b) $M_n = 2^n - 1$ chứa dãy vô hạn những số nguyên tố cùng nhau.

Dãy M_n được gọi là dãy số Mecxen.

Bài tập 11: Hãy xem xét phân số sau có tối giản hay không:

$$A = \frac{2n + 4}{n^2 + 4n + 3}, n \in \mathbb{N}$$

Bài tập 12:

a) Chứng minh rằng phân số sau tối giản:

$$\frac{2n + 3}{3n + 5}, n \in \mathbb{N}$$

b) Cho số $b = \frac{3n - 9}{n + 5}, n \in \mathbb{N}$

Định mọi giá trị của n để b là số nguyên tố.

c) Tìm tất cả các giá trị của $n \in \mathbb{N}$ để cho phân số sau tối giản.

$$\frac{3n - 9}{3n + 5}, n \in \mathbb{N}$$

d) Tìm ước số chung nguyên tố của $3n - 9$ và $n + 5$.

Đáp số:

b) $n = 19, b = 2$

c) $n = 2k, k \in \mathbb{N}; n \neq 3m + 1, m \in \mathbb{N}$.

d) $d = 2$ và $d = 3$.

Bài tập 13: Tìm mọi số tự nhiên n sao cho:

$$a = \frac{n^2 + 1}{n + 1}, n \in \mathbb{N}$$

là một số tự nhiên.

Đáp số: $n = 0$ và $n = 1$.

CHỦ ĐỀ 9
NGUYÊN LÝ "DIRICHLET"

9.1 Kiến thức cơ bản:

Nguyên lý Dirichle tổng quát

Nguyên lý những chiếc lồng và các chú thỏ ngay trong trường phổ thông cơ sở đều đã được biết và đôi lần áp dụng giải bài tập toán.

Nguyên lý đó là ta nhốt một số thỏ vào một số lồng, nếu số lồng ít hơn số thỏ thì ít nhất có hai thỏ nhốt cùng một lồng.

Để dễ hiểu và vận dụng nguyên tắc này, ta phát biểu nó dưới dạng sau đây: k, m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $km < n$. Nếu nhốt n con thỏ vào m chiếc lồng thì tồn tại ít nhất một lồng được nhốt ít hơn $k + 1$ con thỏ.

Nguyên lý Dirichle mở rộng.

Nguyên lý Dirichle cho diện tích, ta có đề cập đến nguyên lý Dirichle cho độ dài đoạn thẳng, cho độ dài cung, cho diện tích, cho thể tích.

Ta cũng có thể chứng minh các nguyên lý này ví dụ như:

1) Cho những đoạn thẳng $a_1, a_2, \dots, a_n$ nằm trong đoạn a và tổng độ dài các đoạn thẳng $a_1, a_2, \dots, a_n$ lớn hơn độ dài của a .

Khi đó ít nhất có hai trong số những đoạn thẳng $a_1, a_2, \dots, a_n$ có điểm chung.

2) Cho những đa diện $D_1, D_2, \dots, D_n$ nằm trong đa diện D và tổng thể tích của $D_1, D_2, \dots, D_n$ lớn hơn thể tích D .

Khi đó ít nhất có hai trong số $D_1, D_2, \dots, D_n$ có điểm chung.

Mệnh đề. Chứng minh rằng nếu $A, A_1, A_2, \dots, A_n$ là phần tử của Σ , mà chúng thỏa mãn:

$$A_i \subset A \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ và } \sigma(A) < \sigma(A_1) + \sigma(A_2) + \dots + \sigma(A_n),$$

thì hai trong số các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ có điểm chung.

Mệnh đề này ta gọi là **Nguyên lý Dirichle tổng quát**.

Trường hợp Σ ở các ví dụ trên đưa ta về Nguyên lý Dirichle cho diện tích, trường hợp thứ hai là nguyên lý Dirichle lồng và thỏ. Trong những trường hợp cụ thể ta lại có nguyên lý Dirichle tương ứng với độ đo, như vậy là vô cùng nhiều, nhưng không phải mọi nguyên lý với độ đo khác nhau đều là hay và mang một ý nghĩa lớn.

9.2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Trong một cửa hàng hoa quả người ta chở đến 25 sọt cam trong ba loại chất lượng, biết rằng mỗi sọt chỉ chứa một loại cam. Chứng minh rằng ít nhất có 9 sọt có cùng một loại chất lượng.

Giải

Nếu mỗi loại chất lượng đều có không quá 8 sọt.

Suy ra: Số lượng sọt cam sẽ không vượt quá $8.3 = 24$, điều này trái với giả thiết đã cho ta có 25 sọt (Nguyên lý Dirichle mở rộng).

Suy ra một loại chất lượng nào đó phải có nhiều hơn 8 sọt, nghĩa là ít nhất 9 sọt.

Bài tập 2: Trong một lớp học có 40 học sinh, biết rằng tất cả học sinh đều sinh một năm. Chứng minh rằng có không dưới 4 em sinh cùng một tháng.

Giải

Một năm có 12 tháng, nếu mỗi tháng chỉ sinh ra nhiều nhất là 3 học sinh.

Suy ra: Số học sinh chỉ là $12.3 = 36 < 40$.

Như vậy ít nhất phải có 1 tháng có 4 học sinh được sinh ra (Nguyên lý Dirichle mở rộng).

Bài tập 3: Hãy tìm số tự nhiên nhỏ nhất m sao cho giữa mỗi bộ m số tự nhiên có hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 5.

Giải

Ta chia tập hợp các số tự nhiên thành 5 tập hợp con M_i ($i=1,2,3,4$) sao cho M_1 gồm tất cả các số chia hết cho 5; M_2 gồm tất cả các số chia cho 5 còn dư 1; M_3 gồm tất cả các số chia cho 5 còn dư 2;...

Nếu ta lấy 5 số trong các tập hợp con khác nhau, thì hiệu của bất kỳ hai số trong các số này đều không chia hết cho 5.

Nếu ta lấy 6 số tự nhiên bất kỳ, thì hai trong chúng phải nằm trong cùng một tập hợp trên (nguyên lý Dirichlê). Suy ra hiệu của chúng chia hết cho 5.

Như vậy số lượng nhỏ nhất những số ta phải lấy là 6 số tự nhiên.

Bài tập 4: Một lần 20 người quyết định đi bơi thuyền bằng 10 chiếc thuyền đôi. Một số người đã quen nhau, một số người không quen nhau. Nhưng biết rằng mỗi cặp hai người A và B mà không quen nhau, thì tổng những người quen của A và những người quen của B không nhỏ hơn 19. Chứng minh rằng có thể phân chia số người vào các thuyền đôi sao cho trong mỗi thuyền đều là những người quen nhau.

Giải

Dễ thấy rằng ít nhất có 1 thuyền mà người ta xếp hai người quen nhau.

Ta ký hiệu k số lượng thuyền lớn nhất, mà trong đó người ta có thể xếp những cặp quen nhau và để cụ thể ta ký hiệu trong thuyền thứ nhất xếp hai người quen A_1 và B_1 , thuyền thứ hai là A_2 và B_2 , ... và trong thuyền thứ k xếp hai người quen nhau A_k và B_k .

Nếu $k=10$, thì bài toán đã được giải.

Vì thế ta giả sử rằng $k \leq 9$.

Ta ký hiệu tập hợp M gồm tất cả những người chưa được xếp vào thuyền.

Dễ thấy không có hai người A và B từ M quen nhau, vì nếu ngược lại A và B có thể xếp vào thuyền thứ $k+1$.

Ta chọn hai người bất kỳ A và B từ M .

Theo điều kiện đầu bài tổng của những người quen của A và tổng những người quen của B không nhỏ hơn 19 và những người quen họ nằm trong số những người đã xếp vào k thuyền rồi.

Tồn tại một thuyền đã xếp mà số lượng quen biết giữa một trong hai người A và B và một trong những người trong thuyền này không nhỏ hơn $\frac{19}{k} > 2$.

Dễ thấy khi đó một người nào đó trong A hoặc B quen biết hai người trong thuyền đã biết, còn một trong những người dưới thuyền quen cả A và B.

Để cụ thể hóa ta có thể giả thiết rằng trong thuyền này xếp hai người A_k và B_k .

Nhưng khi đó ta có thể xếp lại: trong $k-1$ thuyền đầu tiên vẫn giữ nguyên, còn trong thuyền thứ k xếp A_k và B, còn thuyền thứ $k+1$ xếp A và B_k .

Theo cách xếp này ta tiếp tục xếp đến hết 10 thuyền sao cho trong mỗi thuyền hai người đều quen nhau.

Bài tập 5: Cho 12 số có hai chữ số. Chứng minh rằng giữa chúng có hai số mà hiệu của chúng cũng là hai chữ số, hai chữ số này trùng nhau.

Giải

Trong 12 số có hai chữ số có hai số cho sẽ tìm được hai số hiệu của chúng nhỏ hơn 3 (nếu ngược lại hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất trong các số đã chọn khả năng lớn hơn $3.666 = 1998$, điều này không thể xảy ra).

Nghĩa là hiệu của chúng chỉ là hoặc 1, hoặc 2. Trong trường hợp thứ nhất mọi số đều chia hết cho 1, nghĩa là cả tổng của chúng; trường hợp thứ hai, hai số sẽ cùng tính chẵn, lẻ và khi đó tổng của chúng là một số chẵn.

Trong trường hợp này tổng của hai số ta lấy sẽ chia hết cho hiệu của nó.

Như vậy từ 1999 số đã cho không thể chọn hơn 666 số sao cho thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ta cũng xây dựng được cách chọn 666 số. Suy ra số lượng lớn nhất các số ta phải tìm là 666.

Bài tập 6: Số lượng lớn nhất là bao nhiêu số ta có thể chọn trong các số từ 1 đến 1999 sao cho tổng của mọi hai trong các số đã chọn không chia hết cho hiệu của chúng.

Giải

Ta sẽ chứng minh rằng từ các số đã cho có thể chọn được 666 số thỏa mãn điều kiện của đề bài. Thật vậy, ta lấy tất cả các số có dạng $3k+1$, ở đây $k=1, 2, \dots, 666$.

Hiệu của hai số bất kỳ đã chọn chia hết cho 3, còn tổng của chúng chia cho 3 còn dư 2. Từ đây suy ra tổng của hai số ở dạng trên không chia hết cho hiệu của chúng.

Ta chứng minh rằng chọn số lượng lớn hơn 666 số thỏa mãn điều kiện đầu bài không thể được? Thật vậy, nếu chọn nhiều hơn 666 số, thì sẽ tìm được hai số có hiệu số của chúng nhỏ hơn 3 (nếu ngược lại hiệu số của số lớn nhất và số nhỏ nhất trong các số đã chọn khả năng lớn hơn $3.666 = 1998$, điều này không thể xảy ra).

Nghĩa là hiệu của chúng chỉ là hoặc 1 hoặc 2. Trong trường hợp thứ nhất mọi số đều chia hết cho 1, nghĩa là cả tổng của chúng, trường hợp thứ hai là hai số sẽ cùng tính chẵn, lẻ và tổng của chúng sẽ là một số chẵn.

Trong trường hợp tổng hai số ta sẽ lấy chia hết cho hiệu của nó.

Như vậy từ 199 số đã cho ta không thể chọn hơn 666 số thỏa mãn điều kiện đề bài. Ta cũng xây dựng được cách chọn 666 số. Suy ra số lượng lớn nhất các số ta phải tìm là 666.

Bài tập 7: Cho S là tập hợp n phần tử $M_i \in S, M_i \neq \emptyset, i = 1, 2, 3, \dots, n+1$. Chứng minh rằng tồn tại hai bộ số: $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n+1$ và $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n+1$ sao cho:

$$M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_r} = M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup \dots \cup M_{j_r}$$

Giải

Số lượng những hợp khác nhau $M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_r}$ của những tập hợp con $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$, sao cho tập hợp con $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ trong $\{1, 2, \dots, n+1\}$ là $2^{n+1} - 1$. Như vậy những tập hợp khác rỗng của S là $2^n - 1 < 2^{n+1} - 1$, thì trong những tập hợp con ở trên thì có hai tập hợp đều là một tập hợp con của tập hợp S (nguyên lý Dirichlê):

$$M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_r} = M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup \dots \cup M_{j_r}.$$

Bài tập 8: Từ 5 đường tròn mỗi cặp 4 đường tròn đều đi qua một điểm. Chứng minh rằng tồn tại một điểm mà đi qua tất cả năm vòng tròn.

Giải

Cho những đường tròn k_1, k_2, k_4, k_5 đi qua điểm chung A ; những đường tròn k_1, k_3, k_4, k_5 đi qua điểm chung B ; những đường tròn k_2, k_3, k_4, k_5 đi qua điểm chung C . Dễ thấy ba điểm A, B, C không thể đồng thời khác nhau vì tất cả đều nằm trên đường tròn k_4 , cả trên k_5 , nhưng đường tròn chỉ cắt nhau hai điểm. Suy ra, hai điểm nào đó trong ba điểm A, B, C trùng nhau (nguyên lý Dirichlê). Qua điểm trùng này sẽ đi qua tất cả 5 đường tròn.

Bài tập 9: Cho A là tập hợp điểm trên đường tròn sinh ra bởi một điểm chuyển dịch liên tiếp (theo chiều kim đồng hồ) trên đường tròn một cung 1 radian. Chứng minh rằng một cung bất kỳ trên đường tròn đều có chứa những điểm thuộc A .

Giải

Ta lấy một cung bất kỳ ký hiệu P_1P_2 . Ta có thể lấy cung này $P_1P_2 = \frac{2\pi}{m}$, ở đây m là số tự nhiên.

Ta dựng các điểm $P_3, P_4, \dots, P_m$ sao cho chúng chia đường tròn thành m cung bằng nhau.

Ta lấy điểm nào đó $Q_0 \in A$ và ký hiệu Q_n là điểm ảnh của Q_0 sau khi ta chuyển liên tiếp n radian.

Chứng minh rằng tập hợp những điểm $A(Q_0) = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_n, \dots\}$ là vô hạn.

Thật vậy, nếu ngược lại, thì tồn tại hai chỉ số s và t sao cho $Q_s = Q_t$ (Nguyên lý Dirichlê cho dãy số). Nếu $s < t$, thì suy ra điểm Q_s dịch chuyển về chính mình sau phép lặp $t-s$ radian. Như vậy, mà cả

vòng tròn có 2π radian, nghĩa là $\pi = \frac{t-s}{2}$. Điều này trái với tính chất số π là một số vô tỷ.

Như vậy $A(Q_0)$ là tập hợp vô hạn điểm. Nhưng số các cung $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_mP_1$ hữu hạn và phủ toàn bộ đường tròn, thì tồn tại một cung nào đó P_kP_{k+1} chứa ít nhất hai điểm Q_s và Q_t thuộc $A(Q_0)$.

Như vậy độ dài Q_sQ_t bằng $\alpha < \frac{2\pi}{m}$. Như lý luận phân trên $Q_s \neq Q_t$, nghĩa là $\alpha \neq 0$. Bây giờ ta xét các

điểm $R_0 = Q_s, R_1 = Q_t, R_n = Q_{s+n(t-s)}, \dots$ thuộc $A(Q_0)$ với mọi n cung R_nR_{n+1} nhận được từ cung $R_0R_1 = Q_sQ_t$ lặp lại chuyển dịch $n(t-s)$ radian. Suy ra cung $R_nR_{n+1} = \alpha$. Dễ thấy với $n > \frac{2\pi}{\alpha}$ cung $R_0R_1,$

$R_1R_2, \dots, R_nR_{n+1}, \dots$ phủ kín đường tròn. Như vậy P_1 nằm ở trong cung nào đó R_kR_{k+1} . Nhưng vì độ dài cung $R_kR_{k+1} < P_1P_2$, điều cần chứng minh.

Bài tập 10: Chứng minh rằng trong 51 số khác nhau có một hoặc hai chữ số ta có thể chọn ra 6 số sao cho trong 6 số đó không có hai số nào có những chữ số giống nhau trong một thứ tự.

Giải

Ta chọn 6 chữ số hàng chục sao cho có một nhóm, không ít hơn 6, các số đã rơi vào một hàng chục nào đó, có một nhóm, không ít hơn 5, các số rơi vào hàng chục tiếp theo ... cuối cùng có ít nhất một số rơi vào hàng chục còn lại. Các số cũng thuộc một nhóm thì khác nhau chữ số hàng đơn vị.

Ta chọn ở mỗi nhóm một số sao cho chữ số hàng đơn vị khác nhau, chọn một số ở nhóm cuối, lấy một số ở nhóm kế trước đó ... Ta được 6 số thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bài tập 11: Chứng minh tồn tại một số tự nhiên $x < 17$ sao cho:

$$25^x - 1 \vdots 17$$

Giải

Xét dãy số gồm 17 số hạng sau:

$$25, 25^2, 25^3, \dots, 25^{17} \quad (*)$$

Chia các số hạng của dãy (*) cho 17

Vì $(25, 17) = 1$ nên $(25^n, 17^n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 1$.

Do đó số dư của các phép chia có thể theo một thứ tự nào đó là 1, 2, 3, ... 16.

Có 17 phép chia và 16 số dư có thể có nên có ít nhất 2 số hạng của dãy (*) chia cho 17 có cùng số dư.

Gọi 2 số đó là 25^i và 25^j với $i, j \in \mathbb{N}$ và $1 \leq i, j \leq 17$

$$\Rightarrow 25^i - 25^j \vdots 17$$

$$\Leftrightarrow 25^i(25^{j-i} - 1) \vdots 17$$

$$\text{Vì } (25^i, 17) = 1 \text{ nên } 25^i - 1 \vdots 17$$

$$\text{Vì } 1 \leq i, j \leq 17 \Rightarrow j - i < 17$$

Vậy tồn tại $x \in \mathbb{N}$ và $x < 17$ để $25^x - 1 \vdots 17$.

Bài tập 12: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng 2004 2004 ... 2004 gồm k số 2004, với $k \in \mathbb{N}$ và $1 < k \leq 2003$ chia hết cho 2003.

Giải

Xem dãy số:

$$a_1 = 2004$$

$$a_2 = 2004 \ 2004$$

.....

$$a_{2004} = \underbrace{20042004\dots2004}_{2004 \text{ số } 2004}$$

Ta chia các số hạng của dãy cho 2003.

Có 2004 phép chia mà tập hợp các số dư có tối đa là 2003 giá trị.

Do đó có ít nhất hai số hạng của dãy chia cho 2003 có cùng số dư.

Gọi 2 số đó là a_i và a_j :

$$a_i = 2004 \ 2004 \dots 2004 \text{ (i số 2004)}$$

$$a_j = 2004 \ 2004 \dots 2004 \text{ (j số 2004)}$$

với $i, j \in \mathbb{N}$ và $1 \leq i, j \leq 2004$

$$\Rightarrow a_j - a_i \vdots 2003$$

$$\Rightarrow \underbrace{20042004\dots2004}_{(j-i) \text{ số } 2004} \underbrace{00000000\dots0000}_{4i \text{ số } 0} \vdots 2003$$

$$\Rightarrow \underbrace{20042004\dots2004}_{(j-i) \text{ số } 2004} \cdot 10^{4i} \vdots 2003$$

$$\text{Vì } (10, 2003) = 1 \text{ nên } (10^k, 2003) = 1$$

Do đó, ta có:

$$\underbrace{20042004\dots2004}_{k \text{ số } 2004} \vdots 2003 \text{ với } k \in \mathbb{N}, 1 < k \leq 2003$$

Có tồn tại số có dạng

$$2005 \ 2005 \dots 2005$$

Chia hết cho số 2004 hay không?

Bài tập 13: Chứng minh rằng tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho 3^n tận cùng 000 001.

Giải

Ta chứng minh tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho: $3^n - 1 \vdots 10^6$

Xem dãy số gồm 1 000 000 số hạng sau:

$$3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{1000\ 000} \quad (*)$$

Chia các số hạng của dãy cho 1000 000. Số dư của các phép chia có thể có là 1, 2, 3, ..., 999 999. Có

một triệu phép chia do đó có ít nhất 2 số hạng của dãy (*) có cùng số dư trong phép chia cho 10^6 .

Gọi 2 số đó là 3^i và 3^j , với $i, j \in \mathbb{N}$ và $1 \leq i < j \leq 10^6$

$$\Rightarrow 3^j - 3^i : 10^6$$

$$\Rightarrow 3^i(3^{j-i} - 1) : 10^6$$

$$\text{Nhưng } (3, 10) = 1 \Rightarrow (3^i, 10^6) = 1.$$

$$\text{Do đó: } 3^{j-i} - 1 : 10^6$$

Vậy tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để cho 3^n tận cùng bởi 000001.

Bài tập 14: Cho 51 số nguyên dương phân biệt:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{51} \text{ không vượt quá } 100$$

Chứng minh rằng có hai số mà hiệu của chúng bằng 50.

Giải

Xem tập hợp có dạng:

$$A = \{i, 50 + i\} \text{ với } i \in \mathbb{N} \text{ và } 1 \leq i \leq 50$$

Có 50 tập hợp như vậy: $A_1, A_2, \dots, A_{50}$

Các số nguyên dương $x \leq 100$ đều thuộc một trong các tập hợp này.

Ta suy ra mỗi số nguyên dương đã cho thuộc một trong các tập hợp này.

Như vậy hai số nguyên dương x và $x + 50$ cùng thuộc một tập hợp A_x nào đó trong số 50 tập hợp A_i .

Hai số nguyên dương này hơn kém nhau 50 đơn vị.

Bài tập 15: Cho 51 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ phân biệt không vượt quá 100. Chứng minh rằng có hai số mà tổng của chúng không bằng 101.

Giải

Gọi A là tập hợp 51 số nguyên dương đã cho:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{51}\}$$

Với $a_i \leq 100, i \in \mathbb{N}$ và $1 \leq i \leq 51$

Gọi B là tập hợp 51 số nguyên dương có dạng $b_j = 101 - a_j, a_j \in A$.

$$B = \{101 - a_1, 101 - a_2, \dots, 101 - a_{51}\}$$

Ta có: $b_j \leq 100$

Do đó hai tập hợp A và B có ít nhất một phần tử chung.

Gọi $c \in A \cap B$

Vì $c \in A$ nên tồn tại $d \in B$ để ta có: $c = 101 - d$.

$$\Leftrightarrow c + d = 101, c \neq d.$$

Vậy trong 51 số nguyên dương đã cho có hai số mà tổng của chúng bằng 101.

9.3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Tập hợp $M = \{1, 2, \dots, 2n\}$ ($n \geq 2$) được chia ra k tập hợp con không giao nhau $M_1, M_2, \dots, M_k$, ở đây $k+1 \leq n$. Chứng minh rằng có $k+1$ số chẵn $2j_1, 2j_2, \dots, 2j_{k+1}$ nằm trong cùng một tập hợp M_i ($1 \leq i \leq k$), sao cho những số $2j_1-1, 2j_2-1, \dots, 2j_{k+1}-1$ cũng nằm trong một tập hợp M_r ($1 \leq r \leq k$).

Bài tập 2: Cho một số hình tròn không giao nhau, chiếm trên mặt phẳng một diện tích bằng đơn vị. Chứng minh rằng trong số đó có thể chọn ra một hình tròn hoặc một số các hình tròn đôi một không giao nhau mà diện tích tổng cộng của chúng không nhỏ hơn $1/9$.

Bài tập 3: Có thể lấy bao nhiêu số tự nhiên khác nhau không lớn hơn 10, để trong chúng không tìm được hai số mà một trong hai số đó gấp hai lần số kia.

Bài tập 4: Chứng minh rằng trong số 25 số dương khác nhau có thể chọn ra hai số sao cho không có một số nào trong các số còn lại bằng tổng hoặc hiệu của các số đã được chọn.

Bài tập 5: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n tồn tại một số N , mà nó chia hết cho n và trong cách viết thập phân có gặp tất cả các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Bài tập 6: Chứng minh rằng nếu 6 đường tròn cắt nhau tại một điểm, thì ít nhất một trong chúng chứa tâm của một đường tròn khác.

Bài tập 7: Chứng minh tồn tại một số tự nhiên y sao cho:

$$17^y - 1 : 25$$

Bài tập 8: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng:

$$3232 \dots 32 \text{ chia hết cho } 31.$$

Bài tập 9: Có tồn tại hay không số có dạng

$2003\ 2003 \dots 2003\ 000 \dots 000$

chia hết cho 2004?

(Đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán Tin Đại học Sư phạm Vinh năm học 2002)

Bài tập 10: Có tồn tại hay không số có dạng:

$31\ 31 \dots 3100 \dots 00$

chia hết cho 32?

Bài tập 11: Chứng minh rằng tồn tại số có dạng:

$1357\ 1357 \dots 1357\ 0000 \dots 0000$

chia hết cho 2468?

Bài tập 12: Chứng minh rằng tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho 3^m tận cùng bởi 001.

Bài tập 13: Chứng minh rằng luôn tồn tại số có dạng

$2002\ 2002 \dots 2002$

mà số đó chia hết cho 2003.

Trần Trung Chính - SP Toán Tin

CHỦ ĐỀ 10
MỘT SỐ VẤN ĐỀ BẤT BIÊN VÀ NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

1. Kiến thức cơ bản:

Trong quá trình tìm kiếm lời giải nhiều bài toán hình học, sẽ rất có lợi nếu chúng ta xem xét phần tử biên, phần tử giới hạn nào đó, tức là phần tử mà tại đó mỗi đại lượng hình học có thể nhận giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất, chẳng hạn như cạnh lớn nhất, cạnh nhỏ nhất của một tam giác; góc lớn nhất hoặc góc nhỏ nhất của một đa giác, ...

Những tính chất của phần tử biên, phần tử giới hạn nhiều khi giúp chúng ta tìm được lời giải thu gọn của bài toán.

Phương pháp tiếp cận như vậy tới lời giải bài toán được gọi là nguyên tắc cực hạn.

Một trong những tính chất quan trọng nhất của tập số nguyên và tập số tự nhiên là tính sắp thứ tự tốt và số hạng lớn nhất, số hạng nhỏ nhất.

Cụ thể là:

(i) Một tập con S bất kỳ của N đều có số hạng nhỏ nhất. Nếu S không là tập vô hạn thì S cũng có số hạng lớn nhất.

(ii) Một tập con S của N đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Nếu S không là tập vô hạn thì S cũng có số hạng lớn nhất và nhỏ nhất.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Một nước có 80 sân bay mà khoảng cách giữa hai sân bay nào cũng khác nhau và không có 3 sân bay nào thẳng hàng. Mỗi máy bay cất cánh từ một sân bay và bay đến sân bay nào gần nhất. Chứng minh rằng trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay đến.

(Đề thi chọn lọc HSG toán lớp 9 năm học 1992 - 1993, Bảng A)

Giải

Từ giả thiết suy ra nếu các máy bay bay từ các sân bay M và N đến sân bay O thì khoảng cách giữa MN là lớn nhất trong các cạnh của $\triangle MON$.

Do đó $\widehat{MON} > 60^\circ$. Giả sử rằng các máy bay bay từ các sân bay $M_1, M_2, \dots, M_n$ tới sân bay O thì một tròn các góc M_iOM_j không lớn hơn $\frac{360^\circ}{n}$, ($i, j = 1, 2, \dots, 80$) vì tổng các góc đã cho bằng 360° .

Vậy $\frac{360^\circ}{n} > 60^\circ$, hay $n < 6$.

Khi xét các sân bay thẳng hàng thì bài toán vẫn đúng.

Bài toán 2: Trong tam giác ABC có ba góc nhọn, lấy một điểm P bất kỳ. Chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác đó.

(Đề chọn học sinh giỏi Toán lớp 9 năm học 1992 - 1993, Bảng B)

Giải

Dựng PA_1, PB_1, PC_1 tương ứng vuông góc với cạnh BC, CA và AB .

Vì tam giác có ba góc nhọn nên các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng nằm trên đoạn BC, CA và AB . Nối PA, PB, PC ta có:

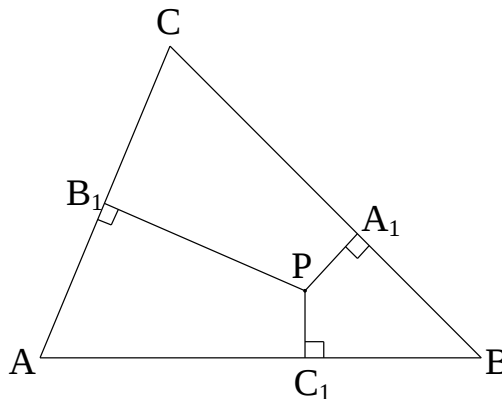
$$\widehat{APC_1} + \widehat{C_1PB} + \widehat{BPA_1} + \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_1} + \widehat{B_1PA} = 360^\circ$$

Suy ra góc lớn nhất trong 6 góc này không thể nhỏ hơn 60° .

Không làm mất tính chất tổng quát ta có thể giả sử rằng góc $\widehat{APC_1}$ là lớn nhất, thế thì $\widehat{APC_1} \geq 60^\circ$.

Xét tam giác vuông APC_1 , ta có:

$$\frac{PC_1}{AP} = \cos \widehat{APC_1} \leq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$



(Vì nếu góc tăng từ 0^0 đến 90^0 thì cosin góc đó giảm).

Từ đó ta có: $AP \geq 2PC_1$.

Nếu thay PA bằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến các đỉnh và thay PC_1 bằng khoảng cách ngắn nhất trong các khoảng cách từ P đến các cạnh thì bất đẳng thức càng được thỏa mãn.

Bài tập 3: Tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau ở E. Chứng minh rằng nếu các bán kính của bốn đường tròn nội tiếp các tam giác EAB, EBC, ECD và EDA mà bằng nhau thì tứ giác ABCD là hình thoi.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 1986 - 1987)

Giải

Không mất tính chất tổng quát, có thể giả sử rằng $AE \geq CE$ và $DE \geq BE$. Gọi B_1 và C_1 tương ứng là các điểm đối xứng của B và C qua tâm E, ta có tam giác C_1EB_1 nằm trong tam giác AED.

Giả sử đoạn AD không trùng với đoạn C_1B_1 . Khi đó đường tròn ζ nội tiếp tam giác C_1EB_1 đồng dạng với phối cảnh với đường tròn nội tiếp tam giác AED, với tâm đồng dạng E, hệ số đồng dạng lớn hơn 1.

Như vậy $r_{EAD} > r_{C_1EB_1} = r_{CEB}$ (r_{EAD} là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AED). Vô lý vì trái với giả thiết $r_{AED} = r_{CEB}$. Điều vô lý chứng tỏ rằng $A \equiv C_1$ và $D \equiv B_1$, suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành, nên $AE = EC$.

Trong hình bình hành ABCD ta có: $p_1.r = S_{AEB} = S_{BEC} = p_2.r$ (với p_1, p_2 tương ứng là nửa chu vi các tam giác AEB và BEC).

Suy ra $p_1 = p_2$, vì $AE = EC$ nên $AB = EC$ hay ABCD là hình thoi.

Bài tập 4: Chứng minh rằng bốn hình tròn có đường kính là bốn cạnh của một tứ giác lồi thì phủ kín tứ giác đã cho.

Giải

Giả sử M là một điểm tùy ý nằm bên trong tứ giác lồi ABCD.

Ta có: $\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA} = 360^0$.

Do đó góc lớn nhất trong bốn góc này không nhỏ hơn 90^0 .

Giả sử $\widehat{AMB} \geq 90^0$. Khi đó M nằm bên trong đường tròn đường kính AB.

Bài tập 5: Trên mặt phẳng cho 1993 điểm, khoảng cách giữa các điểm này đôi một khác nhau. Nối một điểm nào đó trong số các điểm này với điểm gần nhất. Cứ tiếp tục như thế. Hỏi với cách nối đó có thể nhận được một đường gấp khúc khép kín hay không?

Giải

Giả sử xuất phát từ một điểm A_1 bất kỳ.

Theo giả thiết trong số tất cả các đoạn thẳng có đầu mút A_1 thì tồn tại duy nhất điểm A_2 để A_1A_2 ngắn nhất.

Tiếp tục xét như thế với các đoạn thẳng xuất phát từ A_2 . Xây ra 2 trường hợp: Hoặc A_1A_2 ngắn nhất thì đường gấp khúc dừng lại tại A_2 , hoặc tồn tại duy nhất điểm A_3 để A_2A_3 ngắn nhất.

Khi đó $A_2A_3 < A_1A_2$.

Giả sử có đường gấp khúc $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ thì theo lập luận trên có $A_1A_2 > A_2A_3 > ... > A_{n-1}A_n$.

Điểm A_n không thể nối được với điểm A_i nào đó với $1 \leq i \leq n-2$ vì nếu trái lại $A_nA_i < A_nA_{n-1} < A_{n-1}A_{n-2}$, mâu thuẫn với yêu cầu A_iA_{i+1} là đoạn ngắn nhất xuất phát từ A_i .

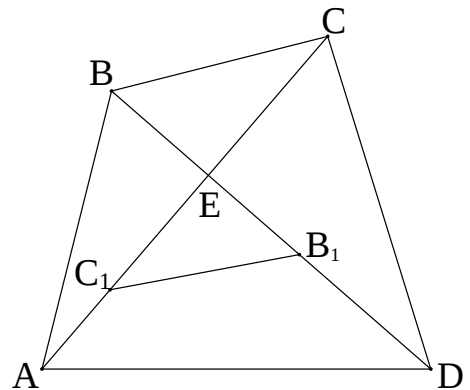
Vậy đường gấp khúc $A_1A_2...A_n$ không thể khép kín.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Giả sử E là giao điểm hai đường chéo AC và BD của tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng nếu chu vi các tam giác EAB, EBC, ECD bằng nhau thì ABCD là hình thoi.

Bài tập 2: Cho 1994 đường thẳng phân biệt, trong đó ba đường bất kì trong số chúng đồng quy. Chứng minh rằng 1994 đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.

Bài tập 3: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào nằm trên cùng một



đường thẳng. Chứng minh rằng có ít nhất là một trong số các tam giác tạo thành bởi ba trong bốn điểm A, B, C, D không phải là tam giác có ba góc đều nhọn.

Bài tập 4: Trên mặt phẳng cho 1994 điểm sao cho ba điểm bất kì trong số đó là thẳng hàng. Chứng minh rằng 1994 điểm đã cho thẳng hàng.

Bài tập 5: Trên mặt phẳng cho 1994 điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn qua 3 điểm sao cho nó không chứa bất kỳ điểm nào trong số 1991 điểm còn lại.

Trần Trung Chính - SP Toán Tin

CHỦ ĐỀ 11
ĐỒNG DƯ THỨC

1. Kiến thức cơ bản:

Định nghĩa.

Cho a, b, m là các số nguyên, $m \neq 0$. Nếu $a - b$ chia hết cho m thì a được gọi là đồng dư với b theo modulo m .

Ký hiệu: $a \equiv b \pmod{m}$

Ví dụ: $3 \equiv -1 \pmod{4}$

$$5 \equiv 17 \pmod{6}$$

$$18 \equiv 0 \pmod{6}$$

Điều kiện $a \equiv 0 \pmod{m}$ có nghĩa bội của $a : m$ hay m là ước của a ($m|a$)

Nếu $a - b$ không chia hết cho m , ta viết $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Tính chất

Cho a, b, c, d là các số nguyên.

- (1) Ta có $a \equiv a \pmod{m}$
 (2) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $b \equiv a \pmod{m}$
 (3) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $b \equiv c \pmod{m}$ thì $a \equiv c \pmod{m}$

Chứng minh:

Ta có: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a - b : m$ ($m|a - b$) và

$$b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow b - c : m$$
 ($m|b - c$)

Vì $a - c = (a - b) + (b - c) \Rightarrow a - c : m$ (tính chất chia hết của tổng) hay
 $a \equiv c \pmod{m}$

- (4) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$ thì $(a \pm c) \equiv (b \pm d) \pmod{m}$

Chứng minh

Ta có: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a - b : m \Rightarrow a - b = m.q_1$, (với $q_1 \in \mathbb{Z}$) (1)

$$c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow c - d : m \Rightarrow c - d = m.q_2$$
, (với $q_2 \in \mathbb{Z}$) (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được:

$$\begin{aligned} (a - b) + (c - d) &= m(q_1 + q_2) \\ \Leftrightarrow (a + c) - (b + d) &= m(q_1 + q_2) \\ \Rightarrow (a + c) - (b + d) &: m \end{aligned}$$

Hay

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

Hệ quả:

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv b_1 \pmod{m}, a_2 \equiv b_2 \pmod{m}, \dots, a_n \equiv b_n \pmod{m} \\ \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n &\equiv b_1 + b_2 + \dots + b_n \pmod{m} \end{aligned}$$

- (5) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$ thì $ac \equiv bd \pmod{m}$

Chứng minh

Ta có: $a - b \equiv m.q_1 \Rightarrow a = b + m.q_1$, (với $q_1 \in \mathbb{Z}$) (1)

$$c - d \equiv m.q_2 \Rightarrow c = d + m.q_2$$
, (với $q_2 \in \mathbb{Z}$) (2)

Nhân (1) và (2) vế theo vế, ta được:

$$\begin{aligned} a.c &= (b + m.q_1)(d + m.q_2) = bd + bm.q_2 + dm.q_1 + m^2.q_1.q_2 \\ \Rightarrow ac - bd &= m(bq_2 + dq_1 + mq_1.q_2) \\ \Rightarrow ac - bd &: m \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m} \end{aligned}$$

Hệ quả:

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, a_2 \equiv b_2 \pmod{m}, \dots, a_n \equiv b_n \pmod{m} \\ \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \dots a_n \equiv b_1 \cdot b_2 \dots b_n \pmod{m}$$

(6) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $a^k \equiv b^k \pmod{m}$, với $k \in \mathbb{N}$.

Như vậy ta có thể cộng, trừ, nhân và nâng lên lũy thừa các đồng dư thức theo cùng một modun.

(7) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$, d là ước số chung của a, b, m và $(d, m) = 1$ thì $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$
và $a \equiv b \pmod{d}$

Chứng minh

Ta có: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a - b \vdots m \Rightarrow a - b = m \cdot q \quad (1)$

Chia hai vế của (1) cho d (vì d là ước chung của a, b nên $d \neq 0$)

$$\frac{a-b}{d} = \frac{m \cdot q}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{m \cdot q}{d} \text{ là số nguyên (vì } d \text{ là ước của } a \text{ và } b)$$

Do đó: $m \cdot q \vdots d$, mà $(d, m) = 1 \Rightarrow q \vdots d$.

Vậy $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} \vdots m$ hay $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$

(8) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $ac \equiv bc \pmod{cm}$, với mọi c khác 0.

(9) Nếu $ab \equiv ac \pmod{m}$ và $(a, m) = 1$ thì $b \equiv c \pmod{m}$

(10) Nếu $a \equiv b \pmod{m_i}$, ($i=1, 2, \dots, n$) $\Leftrightarrow a \equiv b \pmod{[m_1, m_2, \dots, m_n]}$

(11) Nếu $a \equiv r \pmod{m}$, với $0 \leq r < m$ thì r chính là số dư của phép chia a cho m .

Chứng minh

Ta có: $a \equiv r \pmod{m} \Rightarrow a - r = m \cdot q \Rightarrow a = mq + r$ (với $0 \leq r < m$)

Lưu ý:

Tổng của hai số lẻ đồng dư với một số chẵn và tích của hai số lẻ đồng dư với một số lẻ.

Nếu một số chia 7 dư 3 thì bình phương của nó khi chia 7 thì dư 2.

Không được chia hai vế của một đồng dư thức với một số khác 0 để giản ước hai vế.

Hai số không đồng dư với nhau theo cùng một modulo nhưng tích của chúng cũng xảy ra trường hợp đồng dư với 0 theo modulo đó.

Phương trình đồng dư tuyến tính

Khái niệm:

Phương trình dạng $ax \equiv b \pmod{m}$ được gọi là phương trình đồng dư tuyến tính với a, b, m là các số đã biết.

Trong đó x_0 là một nghiệm của phương trình khi và chỉ khi $ax_0 \equiv b \pmod{m}$.

Nếu x_0 là nghiệm thì các phần tử thuộc lớp $\overline{x_0}$ cũng là nghiệm.

Định nghĩa:

Giả sử a, m là các số nguyên, $m > 1$. Nghiệm của phương trình $ax \equiv 1 \pmod{m}$ được gọi là nghịch đảo của a modulo m .

Định lý 1:

Nghịch đảo của a modulo m là duy nhất $\Leftrightarrow (a, m) = 1$

Chứng minh.

Gọi a' là nghịch đảo của a modulo m

$$\Rightarrow aa' \equiv 1 \pmod{m}$$

$$\Rightarrow aa' + mb = 1 \Rightarrow (a, m) = 1$$

Đảo lại nếu $(a, m) = 1$

$$\Rightarrow \text{tồn tại } a', m' \text{ sao cho } aa' + mm' = 1$$

$$\Rightarrow aa' \equiv 1 \pmod{m}$$

$\Rightarrow a'$ là nghịch đảo của a modulo m . a' là duy nhất bởi vì nếu có a'' sao cho

$$aa'' \equiv 1 \pmod{m}$$

thì

$$aa' \equiv aa'' \pmod{m},$$

$$\text{mà } (a, m) = 1$$

$$\Rightarrow a' \equiv a'' \pmod{m}$$

Hệ quả:

Nếu p nguyên tố thì mỗi phần tử của tập hợp $\{1, 2, \dots, p-1\}$ đều có nghịch đảo duy nhất modulo p .

Định lý 2:

Nếu $(a, m) = 1$ thì phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ có nghiệm duy nhất theo modulo m .

Chứng minh.

Ta có $\{1, 2, \dots, m\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m và

$(a, m) = 1$ nên $\{a, 2a, \dots, ma\}$ cũng là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m .

Suy ra có đúng một phần tử của hệ này đồng dư với b modulo m .

Vậy ta có đpcm.

Định lý 3:

Định lý tồn tại nghiệm phương trình đồng dư tuyến tính.

Giả sử $(a, m) = d$.

$$\text{Khi đó phương trình } ax \equiv b \pmod{m} \tag{1}$$

có nghiệm khi và chỉ khi $d|b$

Hơn nữa, khi $d|b$ thì (1) có d nghiệm phân biệt modulo m , đó là

$$t, t + \frac{m}{d}, t + 2\frac{m}{d}, \dots, t + (d-1)\frac{m}{d} \tag{2}$$

$$\text{trong đó } t \text{ là nghiệm duy nhất của phương trình } \frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}} \tag{3}$$

Chứng minh.

Nếu phương trình có nghiệm là $x_0 \Rightarrow ax_0 = b + mt \Rightarrow d|b$

Đảo lại, nếu $d|b$ thì phương trình $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$ do $\left(\frac{a}{d}, \frac{m}{d}\right) = 1$ có nghiệm t duy nhất

$\Rightarrow$ phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ cũng có nghiệm t .

Mỗi nghiệm của (3) là nghiệm của (1) và ngược lại.

Dễ thấy rằng (2) là d nghiệm của (3) nên (2) cũng là d nghiệm của (1).

Ngoài ra hai nghiệm của (2) là phân biệt theo modulo m .

Thật vậy, nếu: $t + r\frac{m}{d} \equiv t + s\frac{m}{d} \pmod{m} \quad (1 \leq r, s \leq d-1)$

$$\Rightarrow r\frac{m}{d} \equiv s\frac{m}{d} \pmod{m} \Rightarrow r \equiv s \pmod{d}$$

$$\Rightarrow r - s : d \Rightarrow r = s$$

Tiếp tục, ta chứng minh (1) không còn nghiệm nào khác ngoài (2).

Giả sử y là nghiệm của (1) $\Rightarrow ay \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ay \equiv at \pmod{m}$

$$\Rightarrow y \equiv t \pmod{m} \Rightarrow y \equiv t \pmod{m}|d \Rightarrow y = t + km|d.$$

Ta có $k \equiv r \pmod{d}$ với $0 \leq r < d$.

$$\text{Do đó } k \cdot \frac{m}{d} \equiv r \cdot \frac{m}{d} \pmod{m} \Rightarrow y \equiv (t + rm)|d \pmod{m} \Rightarrow y \text{ thuộc (2).}$$

Ví dụ: Giải phương trình $12x \equiv 7 \pmod{23}$

Giải

Do $(12, 23) = 1$ nên phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

Ta tìm một số nguyên k sao cho $7 + 23k$ chia hết cho 12.

Chọn $k = 7$. Suy ra: $12x \equiv 7 \cdot 24 \pmod{23} \Rightarrow x \equiv 14 \pmod{23}$

Mệnh đề:

Giả sử p là số nguyên tố. Số nguyên a là nghịch đảo modulo p của chính nó khi và chỉ khi:

$$a \equiv 1 \pmod{p} \text{ hoặc } a \equiv -1 \pmod{p}.$$

Chứng minh

Nếu $a \equiv 1 \pmod{p}$ hoặc $a \equiv -1 \pmod{p}$ thì $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ nên a là nghịch đảo modulo p của chính nó.

Ngược lại, giả sử a là nghịch đảo modulo của chính nó, tức là $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$

$$\Rightarrow a^2 - 1 \vdots p$$

$$\Rightarrow a + 1 \vdots p$$

hoặc $a - 1 \vdots p$

hay $a \equiv -1 \pmod{p}$

hoặc $a \equiv 1 \pmod{p}$.

Định lý Fermat nhỏ

Định lý: Cho số nguyên tố p . Khi đó với mọi số nguyên a ta đều có:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Ngoài ra, nếu: $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Lưu ý:

Tính chất của số nguyên tố liên quan đến modulo.

Cho p là số nguyên tố, khi đó tập các số $a_i, i = 1, 2, \dots, p-1$ là hệ thặng dư thu gọn modulo p , trong đó $(a, p) = 1$.

Chứng minh.

Xét $p-1$ số $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$.

Ta chứng minh rằng không tồn tại 2 số đồng dư trong phép chia a cho p .

Giả sử $ka \equiv la \pmod{p}$, với $k, l \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ và $k \neq l$

$$\Rightarrow a(k-l) \vdots p \Rightarrow k-l \vdots p \Rightarrow k=l \text{ (mâu thuẫn)}$$

Vậy khi chia $p-1$ số trên cho p ta nhận được $p-1$ số dư khác nhau từ $1, 2, \dots, p-1$

$$\text{Suy ra: } a \cdot 2a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

$$\Leftrightarrow (p-1)! \cdot a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$$

$$\text{Vì } ((p-1)!, p) = 1 \text{ nên } a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Từ định lý ta có $a^p \equiv a \pmod{p}$ (với p nguyên tố, $(a, p) = 1$)

Hệ thặng dư đầy đủ.

Tập hợp $x_1, x_2, \dots, x_n$ gọi là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m nếu với mỗi số nguyên y tồn tại duy nhất một x_i sao cho $y \equiv x_i \pmod{m}$.

Tập $\{1, 2, \dots, m-1, m\}$ là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m

Mọi hệ thặng dư đầy đủ modulo m đều có đúng m phần tử

Một tập gồm m phần tử là một hệ thặng dư đầy đủ modulo m nếu và chỉ nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của nó không đồng dư với nhau modulo m .

Cho số nguyên a và $m > 0$.

Tập hợp tất cả các số nguyên x thỏa mãn $x \equiv a \pmod{m}$ được gọi là một lớp đồng dư modulo m .

$$\text{Ký hiệu: } \bar{a} = \{a + mt \mid t \in \mathbb{Z}\}.$$

Có m lớp đồng dư phân biệt modulo m , thu được bằng cách lấy lần lượt:

$$a = 1, 2, \dots, m.$$

Một tập hợp $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ được gọi là một hệ thặng dư thu gọn modulo m nếu $(r_i, m) = 1, r_i \neq r_j \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ và với mọi số nguyên x nguyên tố cùng nhau với m thì tồn tại r_i sao cho $r_i \equiv x \pmod{m}$.

Số các phần tử của hệ thặng dư thu gọn modulo m được xác định bởi hàm Euler $\varphi(m)$ là số các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m .

Hàm φ có các tính chất sau:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \text{ với } (m, n) = 1$$

$$\text{Nếu } p \text{ nguyên tố, } \varphi(p) = p-1, \varphi(p^n) = p^n - p^{n-1} (n > 1),$$

Nếu $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, p_i là các số nguyên tố thì

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Ví dụ : $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2^2 - 2 = 2$, $\varphi(20) = 20(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 8$

Định lý:

Cho $(a, m) = 1$ và $r_1, r_2, \dots, r_n$ là một hệ thặng dư thu gọn (đầy đủ) modulo m .

Khi đó $ar_1, ar_2, \dots, ar_n$ cũng là một hệ thặng dư thu gọn (đầy đủ) modulo m .

Chứng minh.

Vì $(a, m) = 1$ nên nếu $(r_i, m) = 1$ thì $(ar_i, m) = 1$.

Ta chứng minh các phần tử của tập $\{ar_1, ar_2, \dots, ar_n\}$ đôi một phân biệt modulo m .

Thật vậy, nếu $ar_i = ar_j \pmod{m}$ thì do $(a, m) = 1$ nên $r_i \equiv r_j \pmod{m}$ (vô lý).

Suy ra điều phải chứng minh.

Định lý Euler:**Định lý:**

Nếu m là số nguyên dương bất kỳ và a là số nguyên tố cùng nhau với m , thì $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, trong đó $\varphi(m)$ là ký hiệu của hàm Euler đếm số các số nguyên giữa 1 và m nguyên tố cùng nhau với m .

Đây là tổng quát hóa của định lý nhỏ Fermat vì nếu $m = p$ là số nguyên tố thì $\varphi(p) = p - 1$.

Định lý này có thể được sử dụng để dễ dàng giản ước với modulo n rất lớn.

Chứng minh

Cách 1:

Giả sử $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}$ là hệ thặng dư thu gọn gồm các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m .

Theo định lý trên ta suy ra $ar_1, ar_2, \dots, ar_{\varphi(m)}$ là một hệ thặng dư thu gọn modulo m .

Như vậy các đồng dư dương bé nhất của $ar_1, ar_2, \dots, ar_{\varphi(m)}$ phải là các số $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}$ xếp theo một thứ tự nào đó.

Vì thế ta có:

$$ar_1 \cdot ar_2 \cdot \dots \cdot ar_{\varphi(m)} \equiv r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_{\varphi(m)} \pmod{m}$$

hay

$$a^{\varphi(m)} r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_{\varphi(m)} \equiv r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_{\varphi(m)} \pmod{m}$$

Vì $(r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_{\varphi(m)}, m) = 1$ nên $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

Cách 2:

Chứng minh

Gọi $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$ là các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n .

Với mọi 2 số phân biệt:

$$i, j \in \{1, 2, \dots, \varphi(n)\}: (a_i, m) = (a, m) = 1.$$

Suy ra:

$$(aa_i, m) = 1; aa_i \not\equiv aa_j \pmod{n}$$

Do vậy, $aa_1, aa_2, \dots, aa_{\varphi(n)}$ là một hoán vị theo modulo của $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$.

Suy ra: $a_1 a_2 \dots a_{\varphi(n)} = (aa_1) (aa_2) \dots (aa_{\varphi(n)}) \equiv a^{\varphi(n)} a_1 a_2 \dots a_{\varphi(n)} \pmod{n}$

Giản ước đồng dư thức, ta được:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 1: Tìm dư khi chia số 11^{2010} cho số 24.

Giải

Ta có: $(11, 24) = 1 \Rightarrow 11^{\varphi(24)} \equiv 1 \pmod{24} \Rightarrow 11^8 \equiv 1 \pmod{24}$

$$11^{2010} = 11^{8 \cdot 251 + 2} \equiv 11^2 \equiv 1 \pmod{24}.$$

Ví dụ 2: Tìm chữ số tận cùng của số 7^{222} .

Giải

$$7^{222} \equiv 7^{4 \cdot 55 + 2} \equiv (7^4)^{55} \cdot 7^2 \equiv 1^{55} \cdot 7^2 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10}.$$

Vậy 7^{222} có chữ số tận cùng là 9.

Định lý Wilson:

Cho p là số tự nhiên lớn hơn 1, khi đó p là số nguyên tố, khi và chỉ khi:
 $(p-1)! + 1$

chia hết cho p .

Hay phát biểu cách khác.

Cho số nguyên tố $p > 1$, ta có $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

Mở rộng với số nguyên dương n lẻ, $n > 1$ và

$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq n, \text{UCLN}(x, n) = \text{UCLN}(x+1, n) = 1\}$ thì $\prod_{x \in S} x \equiv 1 \pmod{n}$.

Chứng minh

Khi $p = 2$, ta có $(p-1)! = 1 \equiv -1 \pmod{2}$

Giả sử p là số nguyên tố lớn hơn 2, khi đó mỗi số nguyên a với $1 \leq a \leq p-1$ tồn tại nghịch đảo a' với $1 \leq a' \leq p-1$ sao cho $aa' \equiv 1 \pmod{p}$.

Theo mệnh đề trên chỉ có 2 số 1 và $p-1$ là nghịch đảo modulo p của chính nó.

Như vậy, ta có thể nhóm các số $2, 3, \dots, p-2$ thành $(p-3)/2$ cặp mà tích của chúng đồng dư 1 modulo p .

$$2.3. \dots (p-3)(p-2) \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow (p-1)! \equiv 1(p-1) \equiv -1 \pmod{p}.$$

Mệnh đề đảo của định lý Wilson cũng đúng.

Định lý:

Giả sử p là số nguyên dương sao cho $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ thì p là số nguyên tố.

Định lý đồng dư Trung Hoa:

Giả sử $m_1, m_2, \dots, m_r$ là các số nguyên tố cùng nhau đôi một.

Khi đó hệ phương trình đồng dư tuyến tính

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

....

$$x \equiv a_r \pmod{m_r}$$

có nghiệm duy nhất modulo $m = m_1 m_2 \dots m_r$.

Ví dụ: Giải hệ phương trình $x \equiv 2 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{7}$, $x \equiv 5 \pmod{3}$

Giải

Ta có:

$$x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 17 \pmod{5}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 17 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow x \equiv 17 \pmod{35}$$

$$x \equiv 5 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 5 + 3.4 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 17 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow x \equiv 17 \pmod{105}$$

2. Bài tập áp dụng:

Dạng 1: Tìm số dư của phép chia

Bài tập 1: Tìm số dư trong phép chia 2004^{2004} cho 11.

Giải

Ta có $2002 : 11 \Leftrightarrow 2004 - 2 : 11 \Rightarrow 2004 \equiv 2 \pmod{11}$

$\Rightarrow 2004^{2004} \equiv 2^{2004} \pmod{11}$, mà $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ (vì $1024 - 1 : 11$)

$\Rightarrow 2004^{2004} = 2^4 \cdot 2^{2000} = 24 \cdot (2^{10})^{200} \equiv 2^4 \equiv 5 \pmod{11}$

Vậy 2004^{2004} chia 11 dư 5.

Bài tập 2: Tìm số dư khi chia $A = 1944^{2005}$ cho 7.

Giải

Ta có: $1944 \equiv -2 \pmod{7} \Rightarrow 1944^{2005} \equiv (-2)^{2005} \pmod{7}$

Mà $(-2)^3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow (-2^3)^{668} \equiv 1^{668} \pmod{7}$

hay $(-2^3)^{668} \equiv 1 \pmod{7}$

$\Rightarrow (-2^3)^{668} \cdot (-2) \equiv -2 \pmod{7}$ hay $(-2)^{2005} \equiv -2 \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7}$

Vậy 1944^{2005} cho 7 dư 5.

Bài tập 3: Chứng minh rằng các số $A = 6^{1000} - 1$ và $B = 6^{1001} + 1$ đều là bội số của 7.

Giải

Ta có: $6 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} - 1 \vdots 7$

Vậy A là bội của 7

Từ

$$6^{1000} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1001} \equiv 6 \pmod{7}, \text{ mà } 6 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 6^{1001} \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1001} + 1 \vdots 7$$

Vậy B là bội của 7.

Bài tập 4: Tìm số dư trong phép chia $1532^5 - 1$ cho 9.

Giải

Ta có $1532 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \pmod{9}$, mà $2^5 \equiv 5 \pmod{9}$

$$\Rightarrow 1532^5 \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod{9}$$

Vậy $1532^5 - 1$ chia cho 9 dư là 4.

Bài tập 5: Chứng minh rằng $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19

Giải

Ta có: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n = 7.25^n + 12.6^n$

$$\text{Vì } 25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 25^n \equiv 6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 7.25^n \equiv 7.6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \equiv 7.6^n + 12.6^n \equiv 19.6^n \equiv 0 \pmod{19}.$$

Điều này chứng tỏ A chia hết cho 19.

Bài tập 6: Tìm dư trong phép chia 3^{2003} cho 13.

Giải

Ta có:

$$3^3 \equiv 1 \pmod{13} \text{ mà } 2003 = 3.667 + 2 \Rightarrow 3^{2003} = (3^3)^{667} \cdot 3^2$$

$$3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{667} \equiv 1^{667} \pmod{13}$$

$$\Rightarrow (3^3)^{667} \cdot 3^2 \equiv 1 \cdot 3^2 \pmod{13} \quad (3^3)^{667} \cdot 3^2 \equiv 9 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 3^{2003} \equiv 9 \pmod{13}.$$

Vậy 3^{2003} chia cho 13 dư 9.

Bài tập 7: Chứng minh rằng $2^{2002} - 4$ chia hết cho 31.

Giải

Ta có $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$, mà $2002 = 5.400 + 2$

$$\text{Nên } 2^{2002} = (2^5)^{400} \cdot 2^2$$

$$\text{Vì } 2^5 \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow (2^5)^{400} \equiv 1^{400} \pmod{31} \Rightarrow (2^5)^{400} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 2^2 \pmod{31}$$

$$\Rightarrow 2^{2002} \equiv 4 \pmod{31} \Rightarrow 2^{2002} - 4 \text{ chia hết cho 31}$$

Bài tập 8: Chứng minh rằng : $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7

Giải

Ta có:

$$2222 + 4 \vdots 7 \Rightarrow 2222 \equiv -4 \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv (-4)^{5555} \pmod{7}$$

$$5555 - 4 \vdots 7 \Rightarrow 5555 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 4^{2222} \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (-4)^{5555} + 4^{2222} \pmod{7}$$

Mà

$$4^{2222} = (-4)^{2222} \Rightarrow (-4)^{5555} + 4^{2222} = (-4)^{2222} \cdot 4^{3333} + 4^{2222}$$

$$= (-4)^{2222} \cdot 4^{3333} - (-4)^{2222} = (-4)^{2222} (4^{3333} - 1) \equiv (4^3)^{777} - 1 \pmod{7} \quad (1)$$

Ta lại có:

$$4^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 4^3 - 1 = 63 \vdots 7 \Rightarrow 4^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7} \quad (2)$$

Nên

$$(-4)^{5555} + 4^{2222} \equiv 0 \pmod{7}$$

Từ (1) và (2), suy ra: $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

Bài tập 9: Tìm dư trong phép chia $5^{70} + 7^{50}$ cho 12.

Giải

$$\text{Ta có } 5^2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow (5^2)^{35} \equiv 1 \pmod{12} \text{ hay } 5^{70} \equiv 1 \pmod{12} \quad (1)$$

$$7^2 \equiv 2 \pmod{12} \Rightarrow (7^2)^{25} \equiv 1 \pmod{12} \text{ hay } 7^{50} \equiv 1 \pmod{12} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5^{70} + 7^{50}$ chia cho 12 dư 2.

Bài tập 10: Tìm số dư của $A = 776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ khi chia cho 3 và khi chia cho 5?

Giải

Ta có:

$$776 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 776^{776} \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 776^{776} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$777 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 777^{777} \equiv 0 \pmod{3}$$

$$778 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 778^{778} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow 776^{776} + 777^{777} + 778^{778} \text{ khi chia cho 3 dư 2.}$$

Ta có:

$$776 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 776^{776} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$777 \equiv -3 \pmod{5} \Rightarrow 777^{777} \equiv -3^{777} \pmod{5}$$

$$778 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 778^{778} \equiv 3^{778} \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 776^{776} + 777^{777} + 778^{778} \equiv 1 - 3^{777} + 3^{778} \pmod{5}$$

Hay

$$776^{776} + 777^{777} + 778^{778} \equiv 1 + 3 \cdot 3^{777} - 3^{777} \pmod{5}$$

$$776^{776} + 777^{777} + 778^{778} \equiv 1 + 3^{777} (3 - 1) \pmod{5}$$

$$776^{776} + 777^{777} + 778^{778} \equiv 1 + 2 \cdot 3^{777} \pmod{5}$$

$$\text{Mà } 3^2 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow (3^2)^{388} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\text{Vậy } A = 776^{776} + 777^{777} + 778^{778} \equiv 1 + 2 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{5}$$

Vậy A chia cho 5 dư 2.

Bài tập 11: Tìm số dư của $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11 và khi chia cho 13 ?

Giải

$$\text{Ta có: } 3^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (3^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\text{Và } 4^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (4^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow A = 3^{2005} + 4^{2005} \equiv 2 \pmod{11}$$

$\Rightarrow A$ chia cho 11 dư 2

$$\text{Ta có: } 3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{668} \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \pmod{13} \Rightarrow 3^{2005} \equiv 3 \pmod{13}$$

$$\text{Và } 4^3 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow (4^3)^{668} \cdot 4 \equiv 1 \cdot 4 \pmod{13} \Rightarrow 4^{2005} \equiv 4 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow A = 3^{2005} + 4^{2005} \equiv 7 \pmod{13}$$

$\Rightarrow A$ chia cho 13 dư 7.

Bài tập 12: Giả sử m là số nguyên dương.

Chứng minh rằng: Nếu $ac_1 \equiv ac_2 \pmod{m}$ và $(a, m) = 1$ thì $c_1 \equiv c_2 \pmod{m}$

Giải

$$\text{Ta có: } ac_1 \equiv ac_2 \pmod{m} \Rightarrow m | ac_1 - ac_2 \Rightarrow m | a(c_1 - c_2)$$

$$\text{Vì } (a, m) = 1 \Rightarrow m | c_1 - c_2 \Rightarrow c_1 \equiv c_2 \pmod{m}$$

Bài tập 13: Chứng minh rằng: Nếu p là một số nguyên tố và không là ước của số nguyên a thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Giải

Xét dãy số $1; 2; 3; \dots; p-1$. Tất cả các số này đôi một không đồng dư với nhau theo modulo p . Do đó các số $a, 2a, 3a, \dots; (p-1)a$ cũng đôi một không đồng dư với nhau theo modulo p . Bởi vì ngược lại nếu có $r_1 a \equiv r_2 a \pmod{p}$ mà $(a, p) = 1 \Rightarrow r_1 \equiv r_2 \pmod{p}$ - với r_1, r_2 là hai số nào đó của dãy số $1, 2, 3, \dots, p-1$ (vô lý)

Hơn nữa mỗi một số của dãy $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ đồng dư với đúng một trong các số $1, 2, 3, \dots, p-1$ theo modulo p .

$$\Rightarrow a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

hay

$$(p-1)! a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

$$\text{Vì } (p, (p-1)!) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Bài tập 14: Chứng minh rằng: Nếu c là số nguyên dương: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{c \cdot m}$

Giải

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a - b = m \cdot q \Rightarrow ac - bc = mc \cdot q \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{c \cdot m}$$

Định lý nhỏ Fermat:

Giả sử p là số nguyên tố bất kỳ, khi đó với mọi số tự nhiên n ta có $n^p - n$ chia hết cho p .

Giải

Ta có $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$

Nếu n chia hết cho $p \Rightarrow$ định lý được chứng minh.

Nếu n không chia hết cho p thì $(n, p) = 1$, nên $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

$\Rightarrow (n^{p-1} - 1)$ chia hết cho p .

Bài tập 15: Bạn Thắng học sinh lớp 6A đã viết một số có hai chữ số mà tổng các chữ số của nó là 14. Bạn Thắng đem số đó chia cho 8 thì được số dư là 4, nhưng khi chia cho 12 thì được số dư là 3.

a) Chứng minh rằng bạn Thắng đã làm sai ít nhất một phép tính chia.

b) Nếu phép chia thứ nhất cho 8 là đúng thì phép chia thứ hai cho 12 có số dư là bao nhiêu? Hãy tìm số bị chia.

Giải

a) Gọi số đó là $n = ab$

Vì n chia cho 8 dư 4, nên $n = 8p + 4$

Và n chia cho 12 dư 3, nên $n = 12q + 3$

$\Rightarrow 8p + 4 = 12q + 3$ (Mà $8p + 4$ là số chẵn, còn $12q + 3$ là số lẻ).

Do vậy bạn Thắng đã làm sai một phép chia.

b) Vì $a + b = 14 \Rightarrow ab \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 4ab \equiv 8 \pmod{12}$ (1)

Nếu $ab \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 3ab \equiv 0 \pmod{12}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ab \equiv 8 \pmod{12} \Rightarrow n$ chia cho 12 dư 8

Do $n = 8p + 4$ là số chẵn mà $n = ab \Rightarrow \{0; 2; 4; 6; 8\} \in b$

Nếu $b = 0 \Rightarrow a = 14$ (loại - vì a là số có một chữ số khác 0)

$b = 2 \Rightarrow a = 12$ (loại)

$b = 4 \Rightarrow a = 10$ (loại)

$b = 6 \Rightarrow a = 8$

$b = 8 \Rightarrow a = 6$

Vậy số cần tìm là 86 hoặc 68. Suy ra số bị chia là 68.

Dạng 2 : Tìm chữ số tận cùng của một số

Tìm một chữ số tận cùng của a^n :

Nếu a có chữ số tận cùng là 0; 1; 5 hoặc 6 thì a^n lần lượt có chữ số tận cùng lần lượt là 0; 1; 5 hoặc 6.

Nếu a có chữ số tận cùng là 2, 3 hoặc 7, ta vận dụng nhận xét sau với $k \in \mathbb{Z}$.

$$24k \equiv 6 \pmod{10}$$

$$34k \equiv 1 \pmod{10}$$

$$74k \equiv 1 \pmod{10}$$

Do đó để tìm chữ số tận cùng của a^n với a có chữ số tận cùng là 2; 3; 7 ta lấy n chia cho 4.

Giả sử $n = 4k + r$ với $r \in \{0; 1; 2; 3\}$

Nếu $a \equiv 2 \pmod{10}$ thì $a^n \equiv 2^n = 2^{4k+r} \equiv 6 \cdot 2^r \pmod{10}$

Nếu $a \equiv 3 \pmod{10}$ hoặc $a \equiv 7 \pmod{10}$ thì $a^n \equiv a^{4k+r} \equiv a^r \pmod{10}$

Bài tập 16: Tìm chữ số cuối cùng của các số:

a) 6^{2009} ; b) 9^{2008} ; c) 3^{2009} ; d) 2^{2009} .

Giải

a) 6^{2009} có chữ số tận cùng là 6 (vì 6 khi nâng lên lũy thừa với số mũ tự nhiên khác 0 vẫn bằng chính số 6)

b) $9^{2008} = (9^2)^{1004} = 81^{1004} = \dots 1$ có chữ số tận cùng là 1

$9^{1991} = 9^{1990} \cdot 9 = (9^2)^{995} \cdot 9 = 81^{995} \cdot 9 = (\dots 1) \cdot 9 = \dots 9$ có chữ số tận cùng là 9.

Nhận xét: Số có chữ số tận cùng là 9 khi nâng lên lũy thừa với số mũ tự nhiên chẵn khác 0 nào thì chữ số tận cùng là 1, khi nâng lên lũy thừa với số mũ tự nhiên lẻ thì có số tận cùng là 9.

c) $3^{2009} = (3^4)^{502} \cdot 3 = 81^{502} \cdot 3 = (\dots 1) \cdot 3 = \dots 3$ có chữ số tận cùng là 3.

d) $2^{2009} = 2^{2008} \cdot 2 = (2^4)^{502} \cdot 2 = 16^{502} \cdot 2 = (\dots 6) \cdot 2 = \dots 2$ có chữ số tận cùng là 2.

Bài tập 17: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 4^{21} ; b) 3^{103}

c) 8^{4n+1} ($n \in \mathbb{N}$)

d) $14^{23} + 23^{23} + 70^{23}$.

Giải

a) $4^{30} = 4^{2 \cdot 15} = (4^2)^{15} = 16^{15} = \dots 6$ có chữ số tận cùng là 6

$4^{21} = 4^{20+1} = (4^2)^{10} \cdot 4 = 16^{10} \cdot 4 = (\dots 6) \cdot 4 = \dots 4$ có chữ số tận cùng là 4.

Nhận xét:

Số nào có số tận cùng là 4 thì khi nâng lên lũy thừa với số mũ tự nhiên chẵn thì có số tận cùng là 6, khi nâng lên với số mũ tự nhiên lẻ có số tận cùng là 4).

b) $3^{103} = 3^{102} \cdot 3 = (3^2)^{51} \cdot 3 = 9^{51} \cdot 3 = (\dots 9) \cdot 3 = \dots 7$ có chữ số tận cùng là 7.

c) $8^{4n+1} = 8^{4n} \cdot 8 = (2^3)^{4n} \cdot 8 = 2^{12n} \cdot 8 = (2^4)^{3n} \cdot 8 = 16^{3n} \cdot 8 = (\dots 6) \cdot 8 = \dots 8$ có chữ số tận cùng là 8.

d) $14^{23} = 14^{22} \cdot 14 = (\dots 6) \cdot 14 = \dots 4$

$23^{23} = 23^{22} \cdot 23 = (23^2)^{11} \cdot 23 = (\dots 9) \cdot 23 = \dots 7$

$70^{23} = \dots 0$

Vậy: $14^{23} + 23^{23} + 70^{23} = \dots 4 + \dots 7 + \dots 0 = \dots 1$ có chữ số tận cùng là 1.

Tìm hai số tận cùng của số a^n :

Ta có nhận xét sau:

$2^{20} \equiv 76 \pmod{100}$

$3^{20} \equiv 01 \pmod{100}$

$6^5 \equiv 76 \pmod{100}$

$7^4 \equiv 01 \pmod{100}$

Mà $76^n \equiv 76 \pmod{100}$, với $n \geq 1$

$5^n \equiv 25 \pmod{100}$, với $n \geq 2$

Suy ra kết quả sau với k là số tự nhiên khác 0:

$a^{20k} \equiv 00 \pmod{100}$ nếu $a \equiv 0 \pmod{10}$

$a^{20k} \equiv 01 \pmod{100}$ nếu $a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10}$

$a^{20k} \equiv 25 \pmod{100}$ nếu $a \equiv 5 \pmod{10}$

$a^{20k} \equiv 76 \pmod{100}$ nếu $a \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10}$

Vậy để tìm hai chữ số tận cùng của a^n , ta lấy số mũ n chia cho 20.

Bài tập 18: Tìm hai chữ số tận cùng của 2^{2003} .

Giải

Ta có: $2^{20} \equiv 76 \pmod{100} \Rightarrow 2^{20k} \equiv 76 \pmod{100}$

Do đó: $2^{2003} = 2^3 \cdot (2^{20})^{100} = 8 \cdot (2^{20})^{100} = (\dots 76) \cdot 8 = \dots 08$.

Vậy 2^{2003} có hai chữ số tận cùng là 08.

Bài tập 19: Cho p là số nguyên tố có dạng $4k + 3$.

Cho các số nguyên x và y . Biết $x^2 + y^2 \vdots p$. Chứng minh rằng: x và y chia hết cho p .

Giải

Giả sử: $(x, p) = 1$ thì ta thấy $(y, p) = 1$.

Ta có: $x^2 \equiv -y^2 \pmod{p}$

$\Leftrightarrow x^{4k+3} \equiv -y^{4k+3} \pmod{p}$

$\Leftrightarrow 1 \equiv -1 \pmod{p}$

(Theo định lý Fermat)

Do đó, $(x, p) \neq 1$ nên x chia hết cho p và dễ thấy y cũng chia hết cho p .

Bài tập 20: Chứng minh rằng: Với $n > 1$ thì $2^{3^n} + 1 \vdots 3^{n+1}$.

Giải

Theo nhị thức Newton, ta có:

$$2^{3^n} + 1 = (3 - 1)^{3^n} + 1 = 3^{n+1} \cdot A \vdots 3^{n+1}$$

Ta suy ra điều phải chứng minh.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Chứng minh rằng:

- Nếu a là số nguyên chẵn thì $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$,

- Nếu a là số nguyên lẻ thì $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng nếu a lẻ thì $a^2 \equiv 1 \pmod 8$

Bài tập 3: Chứng minh rằng $n^7 - n : 42$ với n nguyên dương

Bài tập 4: Chứng minh rằng nếu $a + b + c : 30$ thì $a^5 + b^5 + c^5 : 30$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$)

Bài tập 5: Chứng minh rằng $5^{3^n} + 7 : 12$ với n nguyên dương

Bài tập 6: Giả sử n là số tự nhiên không chia hết cho 17.

Chứng minh rằng hoặc $n^8 - 1 : 17$ hoặc $n^8 + 1$ chia hết cho 17

Bài tập 7: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n \cdot 2^n + 1$ chia hết cho 3.

Bài tập 8: Với số nguyên n nào ta có $1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 \equiv 0 \pmod n$

Bài tập 9: Tìm dư trong phép chia

a) $23^{34^{19}} : 17$ b) $46^{2345} : 37$ c) $239^{237^{54}} : 135$ d) $2^{1000000} : 3^{10}$

Bài tập 10: Giải hệ

a) $x \equiv 1 \pmod 2, x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 5$

b) $x \equiv 2 \pmod{11}, x \equiv 3 \pmod{12}, x \equiv 4 \pmod{13}, x \equiv 5 \pmod{17}, x \equiv 6 \pmod{19}$

c) $x \equiv 5 \pmod 6, x \equiv 3 \pmod{10}, x \equiv 8 \pmod{15}$

Bài tập 11: Chứng minh định lý đảo của định lý Wilson

Bài tập 12: Chứng minh rằng nếu p, q là các số nguyên tố khác nhau thì $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$

Bài tập 13: Chứng minh nếu p nguyên tố và $a^p \equiv b^p \pmod p$ thì $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$

Bài tập 14: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lẻ thì:

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (p-4)^2 (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod p$$

Bài tập 15: Chứng minh rằng nếu p nguyên tố thì $(p-2)! - 1 : p$ nhưng nếu $p > 5$ thì $(p-2)! - 1$ không phải là một lũy thừa của p

Bài tập 16: Giả sử hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $f(mf(n)) = n^2 f(m) \forall m, n \in \mathbb{N}^*$

a) Chứng minh rằng $f(2009)$ hoặc là số nguyên tố hoặc là bình phương của một số nguyên tố

b) Hãy xây dựng một hàm f thỏa mãn điều kiện trên.

Bài tập 17: Cho $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng mọi ước lẻ của $A = a^{2^n} + b^{2^n}$ đều có dạng $2^{n+1}k + 1$.

Bài tập 18: Cho $x \in \mathbb{N}^* : 2^x + 1 : x^2$. Chứng minh rằng $x = 3$.

Bài tập 19: Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = z^2 \\ 6x^2 + y^2 = t^2 \end{cases}$$

không có nghiệm nguyên.

Bài tập 20: Chứng minh rằng $1! + 2! + \dots + n!$ là số chính phương khi và chỉ khi $n = 3$.

Bài tập 21: Giả sử a, b, c là các số nguyên, $c > 0$.

Chứng minh rằng $a \equiv b \pmod c$ thì $(a, c) = (b, c)$.

Bài tập 22: Giả sử a, b, k, m là các số nguyên, $k, m > 0, (a, m) = 1$. Chứng minh rằng nếu $a^k \equiv b^k \pmod m$ và $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod m$ thì $a \equiv b \pmod m$.

Bài tập 23: Chứng minh rằng nếu p nguyên tố và k nguyên dương thì nghiệm duy nhất của đồng dư $x^2 \equiv x \pmod{p^k}$ là $x \equiv 0$ hoặc $x \equiv 1 \pmod{p^k}$

Bài tập 24: Giả sử $m_1, m_2, \dots, m_k$ là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau.

$$M = m_1 m_2 \dots m_k \text{ và } M_j = M/m_j$$

Chứng minh rằng:

$$M_1 a_1 + M_2 a_2 + \dots + M_k a_k$$

Chạy trên hệ thặng dư đầy đủ modulo M khi $a_1, a_2, \dots, a_k$ tương ứng chạy trên hệ thặng dư đầy đủ modulo $m_1, m_2, \dots, m_k$.

Bài tập 25: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương m đều có vô số Fibonacci f_n là bội của m .

Bài tập 26: Giải các phương trình đồng dư sau:

a) $19x \equiv 30 \pmod{40}$ b) $103x \equiv 444 \pmod{999}$

c) $980x \equiv 1500 \pmod{1600}$ d) $3x \equiv 2 \pmod{7}$

e) $6x \equiv 3 \pmod{9}$ f) $17x \equiv 14 \pmod{21}$

g) $15x \equiv 9 \pmod{25}$ h) $128x \equiv 833 \pmod{1001}$

Bài tập 27: Giả sử p là nguyên tố và k nguyên dương. Chứng minh rằng đồng dư $x^2 \equiv 1 \pmod{p^k}$ có

đúng hai nghiệm không đồng dư nhau modulo p^k , đó là

$$x \equiv \pm 1 \pmod{p^k}$$

Bài tập 28: Chứng minh rằng đồng dư $x^2 \equiv 1 \pmod{2^k}$ có đúng bốn nghiệm không đồng dư nhau modulo 2^k , đó là $x \equiv \pm 1 \pmod{p^k}$ hoặc $x \equiv \pm (1 + 2^{k-1}) \pmod{p^k}$ khi $k > 2$. Chứng minh rằng khi $k = 1$ thì chỉ có một nghiệm và khi $k = 2$ thì có đúng hai nghiệm không đồng dư nhau.

Bài tập 29: Bằng cách sử dụng định lý Wilson hãy chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố và $p \equiv 1 \pmod{4}$ thì đồng dư $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ có hai nghiệm không đồng dư nhau là $x \equiv \pm ((p-1)/2)! \pmod{p}$

Bài tập 30: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố và a là số nguyên thì

$$p | (a^p + (p-1)!a)$$

Bài tập 31: Chứng minh rằng nếu p nguyên tố và $0 < k < p$ thì

$$(p-k)!(k-1)! \equiv (-1)^k \pmod{p}$$

Bài tập 32: Hãy sử dụng định lý Fermat để tìm thặng dư dương nhỏ nhất của $2^{1000000}$ modulo 17.

Bài tập 33: Hãy sử dụng định lý Fermat để tìm chữ số cuối cùng của 3^{100} trong hệ đếm cơ số 7.

Bài tập 34: Hãy sử dụng định lý Fermat để giải các phương trình:

a) $7x \equiv 12 \pmod{17}$

b) $4x \equiv 11 \pmod{19}$

Bài tập 35: Chứng minh rằng nếu p, q là các số nguyên tố khác nhau thì

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

Bài tập 36: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố, a, b là các số nguyên và

$$a^p \equiv b^p \pmod{p} \text{ thì } a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$$

Bài tập 37: Hãy sử dụng định lý Euler để tìm chữ số cuối cùng của:

a) 7^{1000}

b) $5^{1000000}$ trong hệ thập lục phân.

CHỦ ĐỀ 12
CÁC "HÀM SỐ HỌC"

1. Kiến thức cơ bản:

a. Tính nhân của hàm số học:

Định nghĩa: Hàm số học là hàm thừa nhận giá trị thực hoặc phức và xác định trên tập số nguyên dương.

Hàm số học f không đồng nhất bằng 0, được gọi là có tính nhân nếu:

$$f(mn) = f(m)f(n), \text{ với } (m, n) = 1.$$

Hàm số học f không đồng nhất bằng 0, được gọi là có tính nhân đầy đủ nếu:

$$f(mn) = f(m)f(n), \text{ với mọi số nguyên dương } m, n.$$

Hiển nhiên, hàm số tính nhân đầy đủ là hàm có tính nhân. Hàm f có tính nhân thì $f(1) = 1$.

Ví dụ:

Hàm đồng nhất bằng một, $f(n) = 1$ với mọi n , có tính nhân đầy đủ.

Vì $f(mn) = 1 = f(m)f(n)$.

Hàm đồng nhất, $f(n) = n$, với mọi n cũng có tính nhân đầy đủ.

Vì $f(mn) = mn = f(m)f(n)$.

Định lý 1:

Giả sử f là hàm có tính nhân và $n = f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2})\dots f(p_k^{\alpha_k})$ là khai triển lũy thừa nguyên tố của số nguyên dương n thì

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2})\dots f(p_k^{\alpha_k})$$

Định lý 2: Nếu f có tính nhân thì hàm

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

cũng có tính nhân.

b. Hàm phần nguyên của một số thực:

Định nghĩa:

Định nghĩa 1:

Phát biểu 1: Phần nguyên của số thực x , kí hiệu là $[x]$ là "số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x ".

Phát biểu 2: Phần nguyên của một số thực x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Kí hiệu: $[x]$ là phần nguyên của số thực x .

Ngoài ra người ta còn kí hiệu là $\lfloor x \rfloor$, nên ta có thể dùng một trong hai kí hiệu đó đều được.

Ví dụ: $[2,9] = 2$; $[3,2] = 3$; $[3] = 3$; $[-1,5] = -2$; $[\sqrt{3}] = 1$; v.v...

Các phát biểu sau là tương đương:

$$\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n < x \end{cases} \Rightarrow n \leq [x]$$

$$[x] \leq x < [x] + 1 \Leftrightarrow x - 1 < [x] \leq x$$

Định nghĩa 2:

Phần lẻ của một số thực x , kí hiệu là $\{x\}$, là một số thực được xác định theo công thức:

$$\{x\} = x - [x]$$

trong đó kí hiệu $[x]$ là chỉ phần nguyên của x , tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Ví dụ: $\{2,1\} = 0,1$; $\{-1,2\} = 0,8$.

Từ định nghĩa phần nguyên ta có:

$$0 \leq \{x\} < 1$$

Tính chất:

Phần nguyên:

(1) Nếu $[x] = a$ thì

- a) a là số nguyên
b) $x = a + d$, với $0 \leq d < 1$
c) $0 \leq x - a < 1$
(2) Nếu $[x + y] = x$ thì x là số nguyên và $0 \leq y < 1$
(3) Nếu $[x] = [y]$ thì $-1 < x - y < 1$
Thật vậy: Đặt $[x] = [y] = a$ thì:
 $x = a + d$, với $0 \leq d < 1$
 $y = a + d'$, với $0 \leq d' < 1$
 $\Rightarrow x - y = d - d'$, với $-1 < d - d' < 1$
Vậy $-1 < x - y < 1$
(4) Nếu n là số nguyên thì $[x + n] = n + [x]$.

Một số kết quả cơ bản:

- (1) $[x + n] = [x] + n$, với $n \in \mathbb{Z}$.
(2) $[-n] = -[n]$, với $n \in \mathbb{Z}$.
(3) $[-x] = -1 - [x]$, với $x > 0$ và $x \notin \mathbb{Z}$.
(4) $x > y \Rightarrow [x] \geq [y]$
(5) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$

Với phép chia giữa các số nguyên dương:

$$n = p.m + q, \text{ với } 0 \leq q < m \text{ (} n \text{ chia } m \text{ được } p \text{ dư } q)$$

Ta có:

Thương là $p = \left[\frac{n}{m} \right]$

Phần dư (mod m) là $p = n - m \left[\frac{n}{m} \right]$

Hay đơn giản là: $0 \leq n - m \left[\frac{n}{m} \right] < m$

(Công thức này rất có ích trong việc biểu diễn chung 1 công thức tổng quát cho m trường hợp cần xét)

Hệ quả:

$$\left[\frac{\left[\frac{x}{m} \right]}{m} \right] = \left[\frac{x}{m.n} \right],$$

với mọi số nguyên dương m, n

Phần lẻ: Sau đây là một số tính chất và hệ quả của hàm số phần lẻ:

i) $0 \leq \{x\} < 1$, x thuộc $\mathbb{P}$. $\forall 1$,

Tính chất:

Định lý 1: Nếu n là một số tự nhiên thì $n[x] \leq [n.x]$

Chứng minh

Đặt: $[x] = a \Rightarrow x = a + d$, với $0 \leq d < 1$

Ta có: $[nx] = [n(a + d)] = [na + nd] = na + [nd]$

Nhưng $nd \geq 0$ nên $[nd] \geq 0$.

Suy ra: $na \leq [nx]$ hay $n[x] \leq [n.x]$.

Hệ quả 1: Với mọi số tự nhiên n và $q, q \neq 0$. Ta có: $q \left[\frac{n}{q} \right] \leq n$

Thật vậy: $q \left[\frac{n}{q} \right] \leq \left[q \cdot \frac{n}{q} \right] = [n] = n$

Định lý 2: Với mọi số tự nhiên n và $q, q \neq 0$, ta có: $n < q \left(1 + \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil \right)$

Chứng minh

Ta có: $n = mq + r$, với $r = 0, 1, 2, \dots, q - 1$ nên $\frac{n}{q} = m + \frac{r}{q}$ với $0 \leq \frac{r}{q} < 1$.

Suy ra: $\left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil = m + 1$.

Mặt khác, từ $n = mq + r$.

Suy ra: $n = (m + 1)q + r - q$, với $r - q < 0$,

Do đó: $n < (m + 1)q = q \left(1 + \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil \right)$.

Định lý 3: Trong dãy n số tự nhiên $1, 2, \dots, n$ có đúng $\left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$ số tự nhiên chia hết cho số tự nhiên q khác 0.

Chứng minh

Xét ba trường hợp có thể xảy ra.

(TH 1) Nếu $n < q$. Khi đó $\frac{n}{q} < 1$, do đó $\left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil = 0$. Rõ ràng trong dãy $1, 2, \dots, n$ không có số nào chia hết cho q .

(TH 2) Nếu $n = q$. Khi đó $\left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil = 1$. Trong dãy $1, 2, \dots, n$ có đúng một số n chia hết cho q .

(TH 3) Nếu $n > q$. Khi đó $\frac{n}{q} > 1$, cho nên $\left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil \geq 1$.

Nhận thấy trong dãy số $1, 2, \dots, q, q + 1, \dots, n$. Chỉ có các số $q, 2q, 3q, \dots, \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil q$ chia hết cho q .

Thật vậy, theo hệ quả 1: $q \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil \leq n$ nên số tự nhiên $q \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$ chia hết cho q là một số tự hạng của dãy $1, 2, \dots, n$.

Mặt khác theo định lý 2 thì $n < q \left(1 + \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil \right)$ nên số tự nhiên $\left(1 + \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil \right) q$ không phải là số hạng của dãy số $1, 2, \dots, n$.

Kết luận: Trong dãy $1, 2, \dots, n$, chỉ có đúng $\left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$ số chia hết cho q .

Hệ quả 2: Trong dãy số tự nhiên $1, 2, \dots, n$ có đúng $\left\lceil \frac{n}{q^2} \right\rceil$ số chia hết cho q^2 , có đúng $\left\lceil \frac{n}{q^3} \right\rceil$ số chia hết cho q^3 , ... có đúng $\left\lceil \frac{n}{q^k} \right\rceil$ số chia hết cho q^k .

Định lý 4: Số mũ cao nhất của số nguyên tố p có trong phân tích ra thừa số nguyên tố của tích $1.2 \dots n$ đúng bằng:

$$S = \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{p^2} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{n}{p^k} \right\rceil, \text{ với } p^k \leq n < p^{k+1}$$

Chứng minh

Theo định lý 3 và hệ quả 2. Số các nhân tử của tích $1.2...n$ chia hết cho p đúng bằng $\left[\frac{n}{p} \right]$, số các nhân tử chia hết cho p^2 đúng bằng $\left[\frac{n}{p^2} \right]$, ...

Điều đó có nghĩa, số các thừa số nguyên tố p có trong phân tích ra thừa số nguyên tố của tích $1.2...n$ đúng bằng:

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k} \right]$$

Hệ quả 3:

$\{x\} = 0$ tương đương x thuộc $\mathbb{Z}$.

$\{x\} = x$ tương đương $0 < x < 1$.

i) Nếu x thuộc $\mathbb{Z}$ thì $\{x\} + \{-x\} = 0$.

ii) Nếu x không thuộc $\mathbb{Z}$ thì $\{x\} + \{-x\} = 1$.

Hệ quả 4: Nếu x không thuộc $\mathbb{Z}$ thì $\{x\} = \{-x\} \Rightarrow x = k + 0,5$ (với k thuộc $\mathbb{Z}$).

iii) $\{x + y\} < x, y$ thuộc $P, \forall = \{x\} + \{y\}$,

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\{x\} + \{y\} < 1$.

Hệ quả 5:

$\{x - y\} > x, y$ thuộc $P, \forall = \{x\} - \{y\}$,

$\{x_1 + x_2 + \dots + x_n\} \leq \{x_1\} + \{x_2\} + \dots + \{x_n\}$,

$x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc P (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\{x_1\} + \{x_2\} + \dots + \{x_n\} < 1).$$

x thuộc P và $\forall m$ thuộc $\mathbb{Z}$.

iv) $\{x + m\} = \{x\}$,

Hệ quả 6: Hàm số $y = \{x\}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ cơ sở là 1.

v) Hàm số $y = \{x\}$ là hàm đơn điệu tăng trên từng khoảng $[k; k + 1)$, với k thuộc $\mathbb{Z}$.

Ta áp dụng các tính chất và hệ quả của hàm số phần lẻ ở trên để giải một số bài toán. Sau đây là một số bài tập ví dụ

c. Hàm Euler

Phi hàm Euler, kí hiệu φ , được xác định bởi: $\varphi(n)$ là các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n .

Định lý 1: Phi hàm Euler có tính nhân.

Bổ đề 1: Giả sử m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau;

$\{a_i; 1 \leq i \leq m\}$ và $\{b_j; 1 \leq j \leq n\}$ tương ứng là các hệ thặng dư đầy đủ modulo m và n .

Khi đó, ta có: $\{a_i n + b_j m; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ là hệ thặng dư đầy đủ modulo mn .

Định lý 2: Nếu p nguyên tố và α nguyên dương thì

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p} \right)$$

Định lý 3: Nếu $n = n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ là khai triển lũy thừa nguyên tố của số nguyên dương n thì

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right)$$

Ví dụ:

Tính:

$$\varphi(100) = \varphi(2^2 5^2) = 100 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{5} \right) = 40$$

Và

$$\varphi(720) = \varphi(2^4 3^2 5) = 720 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{5} \right) = 192$$

Từ định lý trên ta thấy, nếu $n = p^m$, với $p > \frac{1}{\varepsilon}$ là số nguyên tố và $m \geq 1$, thì

$$n > \varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p}\right) > n(1 - \varepsilon)$$

d. Hàm tổng các ước $\sigma(n)$ và số các ước $\tau(n)$.

Định nghĩa 1: Hàm tổng các ước, kí hiệu bởi σ , được xác định bởi: $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước dương của số nguyên dương n .

Định nghĩa 2: Hàm số các ước, kí hiệu bởi τ , được xác định bởi: $\tau(n)$ là số các ước dương của số nguyên dương n .

Ví dụ:

$$\sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 7, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 12, \sigma(7) = 8, \sigma(8) = 15, \sigma(9) = 13.$$

$$\tau(2) = 2, \tau(3) = 2, \tau(4) = 3, \tau(5) = 2, \tau(6) = 4, \tau(7) = 2, \tau(8) = 4, \tau(9) = 3.$$

Định lý 1: Hàm tổng các ước σ và số các ước τ có tính chất nhân.

Định lý 2: Nếu $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ là khai triển lũy thừa nguyên tố của số nguyên dương n thì

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}; \tau(n) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1)$$

Ví dụ:

$$\sigma(1955) = \sigma(5 \cdot 17 \cdot 23) = \frac{5^2 - 1}{5 - 1} \cdot \frac{17^2 - 1}{17 - 1} \cdot \frac{23^2 - 1}{23 - 1} = 2592$$

$$\tau(1955) = \tau(5 \cdot 17 \cdot 23) = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$$

e. Số hoàn hảo

Định nghĩa: Theo người Hy Lạp gọi số hoàn hảo là các số mà $\sigma(n) = 2n$.

Ví dụ:

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

$$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$$

$$\sigma(496) = 992$$

$$\sigma(8128) = 16256$$

Định lý: Số nguyên dương chẵn n là số hoàn hảo khi và chỉ khi $n = 2^m(2^{m+1} - 1)$, trong đó $m \geq 2$ là số nguyên dương và $2^m - 1$ là số nguyên tố.

Mỗi số hoàn hảo có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của các số tự nhiên liên tiếp.

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$496 = 1 + 2 + 3 + \dots + 30 + 31$$

$$8128 = 1 + 2 + 3 + \dots + 126 + 127.$$

Người ta biết được rằng, trong khoảng từ 1 đến 100^{200} không có số hoàn hảo lẻ. Tuy nhiên, tồn tại hay không các số hoàn hảo lẻ? (Các bạn tự tìm đọc).

Tổng đảo của tất cả các ước số của các số hoàn hảo đều bằng 2.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{31} + \frac{1}{62} + \frac{1}{124} + \frac{1}{248} + \frac{1}{496} = 2$$

Biểu diễn các số hoàn hảo dưới dạng hệ nhị phân:

$$6 = 110$$

$$28 = 11100$$

$$496 = 111110000$$

$$8128 = 1111111000000$$

Thuật toán tìm số hoàn hảo:

Sau đây là một đoạn hàm trong Pascal để tìm số hoàn hảo:

Function hoanhao(n: integer): boolean;

var i, tonguoc: longint;

begin

tonguoc:=0;

for i:=1 to (n-1) do

if (n mod i) = 0 then tonguoc:= tonguoc + i ;

hoanhao := (n-tonguoc)

end;

g. Bài toán thiên niên kỷ (Millennium Problems):

Một triệu đô la dành cho ai giải được bất kỳ bí ẩn nào trong số bảy bí ẩn toán học. Đó chính là phần thưởng do một tổ chức tư nhân nêu ra nhằm đưa toán học trở lại vị trí xứng đáng của nó. Và dĩ nhiên, cũng để trả lời những câu hỏi lớn vẫn làm đau đầu các nhà toán học bấy lâu nay.

7 bài toán "Clay" đặt ra cho "thiên kỉ" cũng theo tinh thần Hilbert, nghĩa là bao gồm toàn bộ các lãnh vực toán học. Người ta có thể thấy hơi "kì": người "ra đề" không phải là một cơ quan chính thức như Liên hiệp quốc tế toán học hay Hội toán học Pháp, mà lại là một cơ sở tư nhân. Sự thật là ngày nay không có, không thể có một nhà toán học "phổ quát" nữa _ toán học đã trở thành quá menh mông. Không còn mình chủ được quần hùng một lòng tôn vinh, thì lại càng nên tránh đề nổ ra những cuộc xung đột giữa các môn phái. Và lại, kiếm đâu ra mấy triệu \$, nếu không gõ cửa tư nhân? Dù sao, Hội đồng khoa học của Viện Clay (tập hợp những chuyên gia kiệt xuất trong tất cả các ngành toán học, và đầu tiên phải kể tên Andrew Wiles, người đã chứng minh "định lí cuối cùng của Fermat") đã đánh liều tiếp nối con đường của Hilbert để nêu ra 7 bài toán cho thế kỉ 21.

Bài toán 1: Giả thuyết Poincaré

Henri Poincaré (1854-1912), là nhà vật lý học và toán học người Pháp, một trong những nhà toán học lớn nhất thế kỷ 19. Giả thuyết Poincaré do ông đưa ra năm 1904 là một trong những thách thức lớn nhất của toán học thế kỷ 20.

Lấy một quả bóng (hoặc một vật hình cầu), vẽ trên đó một đường cong khép kín không có điểm cắt nhau, sau đó cắt quả bóng theo đường vừa vẽ: bạn sẽ nhận được hai mảnh bóng vỡ. Làm lại như vậy với một cái phao (hay một vật hình xuyên): lần này bạn không được hai mảnh phao vỡ mà chỉ được một.

Trong hình học topo, người ta gọi quả bóng đối lập với cái phao, là một bề mặt liên thông đơn giản. Một điều rất dễ chứng minh là trong không gian 3 chiều, mọi bề mặt liên thông đơn giản hữu hạn và không có biên đều là bề mặt của một vật hình cầu.

Vào năm 1904, nhà toán học Pháp Henri Poincaré đặt ra câu hỏi: Liệu tính chất này của các vật hình cầu có còn đúng trong không gian bốn chiều. Điều kỳ lạ là các nhà hình học topo đã chứng minh được rằng điều này đúng trong những không gian lớn hơn hoặc bằng 5 chiều, nhưng chưa ai chứng minh được tính chất này vẫn đúng trong không gian bốn chiều.

Bài toán 2: Vấn đề P chống lại NP:

Với quyền từ điển trong tay, liệu bạn thấy tra nghĩa của từ "thần lẩn" dễ hơn, hay tìm một từ phổ thông để diễn tả "loài bò sát có bốn chân, da có vảy ánh kim, thường ở bờ bụi" dễ hơn? Câu trả lời hầu như chắc chắn là tra nghĩa thì dễ hơn tìm từ.

Những các nhà toán học lại không chắc chắn như thế. Nhà toán học Canada Stephen Cook là người đầu tiên, vào năm 1971, đặt ra câu hỏi này một cách "toán học". Sử dụng ngôn ngữ logic của tin học, ông đã định nghĩa một cách chính xác tập hợp những vấn đề mà người ta thẩm tra kết quả dễ hơn (gọi là tập hợp P), và tập hợp những vấn đề mà người ta dễ tìm ra hơn (gọi là tập hợp NP). Liệu hai tập hợp này có trùng nhau không? Các nhà logic học khẳng định $P \neq NP$. Như mọi người, họ tin rằng có những vấn đề rất khó tìm ra lời giải, nhưng lại dễ thẩm tra kết quả. Nó giống như việc tìm ra số chia của 13717421 là việc rất phức tạp, nhưng rất dễ kiểm tra rằng $3607 \times 3808 = 13717421$. Đó chính là nền tảng của phần lớn các loại mật mã: rất khó giải mã, nhưng lại dễ kiểm tra mã có đúng không. Tuy nhiên, cũng lại chưa có ai chứng minh được điều đó.

"Nếu $P=NP$, mọi giả thuyết của chúng ta đến nay là sai" – Stephen Cook báo trước. "Một mặt, điều này sẽ giải quyết được rất nhiều vấn đề tin học ứng dụng trong công nghiệp; nhưng mặt khác lại sẽ phá hủy sự bảo mật của toàn bộ các giao dịch tài chính thực hiện qua Internet". Mọi ngân hàng đều hoảng sợ trước vấn đề logic nhỏ bé và cơ bản này!

Bài toán 3: Các phương trình của Yang-Mills:

Các nhà toán học luôn chậm chân hơn các nhà vật lý. Nếu như từ lâu, các nhà vật lý đã sử dụng các phương trình của Yang-Mills trong các máy gia tốc hạt trên toàn thế giới, thì các ông bạn toán học của họ vẫn không thể xác định chính xác số nghiệm của các phương trình này.

Được xác lập vào những năm 50 bởi các nhà vật lý Mỹ Chen Ning Yang và Robert Mills, các phương trình này đã biểu diễn mối quan hệ mật thiết giữa vật lý về hạt cơ bản với hình học của các không gian sợi. Nó cũng cho thấy sự thống nhất của hình học với phần trung tâm của thế giới lượng tử, gồm tương tác yếu, mạnh và tương tác điện từ. Nhưng hiện nay, mới chỉ có các nhà vật lý sử dụng chúng...

Bài toán 4: Giả thuyết Hodge:

Euclide sẽ không thể hiểu được gì về hình học hiện đại. Trong thế kỷ XX, các đường thẳng và đường tròn đã bị thay thế bởi các khái niệm đại số, khái quát và hiệu quả hơn. Khoa học của các hình khối và không gian đang dần dần đi tới hình học của “tính đồng đẳng”. Chúng ta đã có những tiến bộ đáng kinh ngạc trong việc phân loại các thực thể toán học, nhưng việc mở rộng các khái niệm đã dẫn đến hậu quả là bản chất hình học dần dần biến mất trong toán học. Vào năm 1950, nhà toán học người Anh William Hodge cho rằng trong một số dạng không gian, các thành phần của tính đồng đẳng sẽ tìm lại bản chất hình học của chúng...

Bài toán 5: Giả thuyết Riemann:

Các số 2, 3, 5, 7, ..., 1999, ..., những số nguyên tố, tức những số chỉ có thể chia hết cho 1 và chính nó, giữ vai trò trung tâm trong số học. Dù sự phân chia các số này dường như không theo một quy tắc nào, nhưng nó liên kết chặt chẽ với một hàm số do thiên tài Thụy Sĩ Leonard Euler đưa ra vào thế kỷ XVIII. Đến năm 1850, Bernhard Riemann đưa ra ý tưởng các giá trị không phù hợp với hàm số Euler được sắp xếp theo thứ tự. Giả thuyết của nhà toán học người Đức này chính là một trong 23 vấn đề mà Hilbert đã đưa ra cách đây 100 năm. Giả thuyết trên đã được rất nhiều nhà toán học lao vào giải quyết từ 150 năm nay. Họ đã kiểm tra tính đúng đắn của nó trong 1.500.000.000 giá trị đầu tiên, nhưng ... vẫn không sao chứng minh được. “Đối với nhiều nhà toán học, đây là vấn đề quan trọng nhất của toán học cơ bản” – Enrico Bombieri, giáo sư trường Đại học Princeton, cho biết. và theo David Hilbert, đây cũng là một vấn đề quan trọng đặt ra cho nhân loại.

Bernhard Riemann (1826-1866) là nhà toán học Đức.

Giả thuyết Riemann do ông đưa ra năm 1859 là một bài toán có vai trò cực kỳ quan trọng đến cả lý thuyết số lẫn toán học hiện đại.

Bài toán 6: Các phương trình của Navier-Stokes:

Chúng mô tả hình dạng của sóng, xoáy lốc không khí, chuyển động của khí quyển và cả hình thái của các thiên hà trong thời điểm nguyên thủy của vũ trụ. Chúng được Henri Navier và George Stokes đưa ra cách đây 150 năm. Chúng chỉ là sự áp dụng các định luật về chuyển động của Newton vào chất lỏng và chất khí. Tuy nhiên, những phương trình của Navier-Stokes đến nay vẫn là một điều bí ẩn của toán học: người ta vẫn chưa thể giải hay xác định chính xác số nghiệm của phương trình này. “Thậm chí người ta không thể biết là phương trình này có nghiệm hay không” – nhà toán học người Mỹ Charles Fefferman nhấn mạnh – “Điều đó cho thấy hiểu biết của chúng ta về các phương trình này còn hết sức ít ỏi”.

Bài toán 7: Giả thuyết của Birch và Swinnerton-Dyer:

Những số nguyên nào là nghiệm của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$? Có những nghiệm hiển nhiên, như $3^2 + 4^2 = 5^2$. Và cách đây hơn 2300 năm, Euclide đã chứng minh rằng phương trình này có vô số nghiệm. hiển nhiên vấn đề sẽ không đơn giản như thế nếu các hệ số và số mũ của phương trình này phức tạp hơn... Người ta cũng biết từ 30 năm nay rằng không có phương pháp chung nào cho phép tìm ra số các nghiệm nguyên của các phương trình dạng này. Tuy nhiên, đối với nhóm phương trình quan trọng nhất có đồ thị là các đường cong êlip loại 1, các nhà toán học người Anh Bryan Birch và Peter Swinnerton-Dyer từ đầu những năm 60 đã đưa ra giả thuyết là số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào một hàm số f : nếu hàm số f triệt tiêu tại giá trị bằng 1 (nghĩa là nếu $f(1) = 0$), phương trình có vô số nghiệm. nếu không, số nghiệm là hữu hạn.

Giả thuyết nói như thế, các nhà toán học cũng nghĩ vậy, nhưng đến giờ chưa ai chứng minh được...

Người ta thấy vắng bóng ngành Giải tích hàm (Functional analysis) vốn được coi là lãnh vực vương giả của nghiên cứu toán học. Lý do cũng đơn giản:

Những bài toán quan trọng nhất của Giải tích hàm vừa mới được giải quyết xong, và người ta đang đợi để tìm được những bài toán mới. Một nhận xét nữa: 7 bài toán đặt ra cho thế kỉ 21, mà không

phải bài nào cũng phát sinh từ thế kỉ 20. Bài toán P-NP (do Stephen Cook nêu ra năm 1971) cổ nhiên là bài toán mang dấu ấn thế kỉ 20 (logic và tin học), nhưng bài toán số 4 là giả thuyết Riemann đã đưa ra từ thế kỉ 19. Và là một trong 3 bài toán Hilbert chưa được giải đáp !

Một giai thoại vui: Vài ngày trước khi 7 bài toán 1 triệu đôla được công bố, nhà toán học Nhật Bản Matsumoto (sống và làm việc ở Paris) tuyên bố mình đã chứng minh được giả thuyết Riemann. Khó một nỗi, đây là lần thứ 3 ông tuyên bố như vậy. Và cho đến hôm nay, vẫn chưa biết Matsumoto có phải là nhà toán học triệu phú đầu tiên của thế kỉ 21 hay chẳng...

Trong số 7 bài toán trên có 1 bài đã được chứng minh. Đó là giả thuyết Poincaré. Cuối năm 2002 nhà toán học Nga Grigori Perelman tại Viện toán học Steklov (St. Petersburg, Nga) công bố chứng minh Giả thuyết Poincaré. Và mới đây, vào tháng 6 năm 2004, tin tức về việc chứng minh giả thuyết Riemann của nhà toán học Louis De Branges ở Đại học Purdue cũng được công bố và hiện vẫn đang trong giai đoạn kiểm tra. Cũng xin lưu ý là trong số 7 bí ẩn toán học này, thì hai bài toán này thuộc loại “xương” hơn cả (dĩ nhiên cái này cũng tương đối) thế nhưng nó lại (có thể) được chứng minh trước. Tuy nhiên có thể dễ dàng lý giải điều này, vì đây là hai bài toán có vai trò rất quan trọng trong cả lĩnh vực của nó lẫn trong toán học hiện đại nói chung (nhất là giả thuyết Riemann).

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Giải phương trình: $[x^3] + [x] = \{x\} + 2$.

Giải

Từ phương trình trên, suy ra $\{x\}$ thuộc $\mathbb{Z}$ nên $\{x\} = 0$, với x thuộc $\mathbb{Z}$.

Từ đó suy ra:

$$x^3 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn).}$$

Bài tập 2: Giải phương trình sau: $8x^2 - 6x[x] + [x]^2 - 3 = 0$.

Giải

Xem phương trình trên là bậc 2 ẩn $[x]$, ta có:

$$\Delta' = (-3x)^2 - (8x^2 - 3) = x^2 + 3 > 0$$

Nên phương trình có 2 nghiệm là $[x]_{1,2} = 3x \pm \sqrt{x^2 + 3}$ (*)

Theo định nghĩa phần nguyên thì phải có:

$$x - 1 < [x] \leq x$$

Từ đó suy ra các bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x - 1 < 3x + \sqrt{x^2 + 3} \leq x \\ x - 1 < 3x - \sqrt{x^2 + 3} \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 2x + \sqrt{x^2 + 3} \leq 0 \\ -1 < 2x - \sqrt{x^2 + 3} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(\sqrt{10} + 2)}{3} < x \leq -1 & (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{10} - 2}{3} < x \leq -1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} [x] = -1 \\ [x] = -2 \end{cases}$$

Thay vào (*) ta được:

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{x^2 + 3} = -2 \\ 3x + \sqrt{x^2 + 3} = -1 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} [x] = 0 \\ [x] = 1 \end{cases}$$

Thay vào (*) ta được:

$$\begin{cases} 3x - \sqrt{x^2 + 3} = 0 \\ 3x - \sqrt{x^2 + 3} = 1 \end{cases}$$

Nghiệm của 4 phương trình thu được là nghiệm của phương trình ban đầu.

Cụ thể 4 nghiệm là $-\frac{3+\sqrt{7}}{4}; -1; \frac{\sqrt{6}}{4}; 1$.

Bài tập 3: Giải phương trình sau: $x^3 - [x] = 3$.

Giải

Ta có: $[x] = x^3 - 3 \in \mathbb{Z}$ nên $x^3 \in \mathbb{Z}$.

Mặt khác: $x^3 - x - 3 = \{x\}$ nên $0 < x^3 - x - 3 < 1$

Từ đó tìm được một nghiệm $x = \sqrt[3]{5}$.

Bài tập 4: Giải phương trình sau: $1 - [x+1] = \frac{[x]-x}{[x-1]}$

Giải

Ta có: $[x+1] = [x] + 1$

Suy ra:

$$1 - [x+1] = \frac{[x]-x}{[x-1]} \Leftrightarrow [x] = \frac{[x]-x}{[x-1]} \in \mathbb{Z}$$

Nên $[x] = x$.

Vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình.

Bài tập 5: Giải phương trình sau: $\left[\frac{2x-1}{3}\right] - [x^2] = [-x^2]$

Giải

Ta có:

Vì $[-x^2] = -[x^2]$ nên

$$\begin{aligned} \left[\frac{2x-1}{3}\right] - [x^2] &= [-x^2] \Leftrightarrow \left[\frac{2x-1}{3}\right] - [x^2] = -[x^2] \\ \Leftrightarrow \left[\frac{2x-1}{3}\right] &= 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

Bài tập 6: Tính: $S_n = \sum_{k=0}^n \left[\frac{k^2 - k}{3}\right]$.

Giải

Ta thấy các số hạng của S_n là phép chia cho 3 lấy nguyên.

Vì thế ta đặt:

$$n = 3p + q, \text{ với } 0 \leq q \leq 2.$$

Ta có:

$$S_{3p} = S_{3p-1} + \left[\frac{(3p)^2 - 3p}{3}\right] = S_{3(p-1)+2} + 3p^2 - p$$

Từ 3 đẳng thức trên suy ra:

$$S_{3p+2} = S_{3(p-1)+2} + (3p^2 + 3p) + (3p^2 + p) + 3p^2 - p$$

$$S_{3p+2} = S_{3(p-2)+2} + 9(p-1)^2 + 3(p-1)$$

$$S_{3(p-1)+2} = S_{3(p-2)+2} + 9(p-1)^2 + 3(p-1)$$

.....

$$S_5 = S_2 + 9.1^2 + 3.1$$

Cộng các đẳng thức theo từng vế, suy ra:

$$S_{3p+2} = 9 \sum_{i=1}^p i^2 + 3 \sum_{i=1}^p i \quad (\text{do } S_2 = 0)$$

Suy ra: Sau khi tính và rút gọn.

$$S_{3p+2} = 3p^3 + 6p^2 + 3p \quad (1)$$

$$S_{3p+1} = S_{3p+2} - (3p^2 + 3p) = 3p^3 + 3p^2 \quad (2)$$

$$S_{3p} = S_{3p+1} - (3p^2 + p) = 3p^3 - p \quad (3)$$

Bây giờ ta sẽ dùng [...] để gộp (1), (2), (3) thành một công thức.

Ta có: $p = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

Ta có:

Hệ số p^2 theo thứ tự trong (3) - (1) là $\{0, 3, 6\}$

Hệ số p theo thứ tự trong (3) - (1) là $\{-1, 0, 3\}$

Theo thứ tự $n = 3p$ đến $n = 3p + 2$ thì $q = \{0, 1, 2\}$

Suy ra $\{0, 3, 6\} = 3q$ và $\{-1, 0, 3\} = q^2 - 1$

Với $q = n - 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

Công thức ta cần tìm là:

$$S_n = 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^3 + 3 \left(n - 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^2 + \left(\left(n - 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \right)^2 - 1 \right) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

nhân ra rồi rút gọn lại

$$S_n = 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^3 - 3n \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^2 + (n^2 - 1) \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Bài tập 7: Chứng minh rằng: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor$

Với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Giải

Đặt: $n = 6p + r$, trong đó $p = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$ và $r = n - 6 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (tương ứng với 6 trường hợp)

Ta có:

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 2p + \frac{r}{3} \right\rfloor = 2p + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = 2p + \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

$$\left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor = \left\lfloor p + \frac{r+2}{6} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{r+2}{6} \right\rfloor = p + \{0, 0, 0, 0, 1, 1\}$$

$$\left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor = \left\lfloor p + \frac{r+4}{6} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{r+4}{6} \right\rfloor = p + \{0, 0, 1, 1, 1, 1\}$$

Suy ra:

$$VT = 2p + p + p + \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} + \{0, 0, 0, 0, 1, 1\} + \{0, 0, 1, 1, 1, 1\} = 4p + \{0, 0, 1, 2, 3, 3\}$$

Tương tự:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 3p + \frac{r}{2} \right\rfloor = 3p + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor = 3p + \{0, 0, 1, 1, 2, 2\}$$

$$\left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor = \left\lfloor p + \frac{r+3}{6} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{r+3}{6} \right\rfloor = p + \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

Suy ra:

$$VP = 3p + p + \{0, 0, 1, 1, 2, 2\} + \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} = 4p + \{0, 0, 1, 2, 3, 3\}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 8: ĐỊNH LÝ HERMITE:

Với n là số nguyên dương, x là số thực bất kỳ ta có:

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

Giải

Định lý này có cách chứng minh khá độc đáo.

Xét hàm:

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$$

Ta có:

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + [x+1] - [nx]$$

$$\Leftrightarrow f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$$

Vậy $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $\frac{1}{n}$.

$$\text{Ta có } f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) = 0$$

Xét trên một chu kỳ $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ thì các giá trị $[x]; \left[x + \frac{1}{n}\right]; \dots; \left[x + \frac{n-1}{n}\right]; [nx]$ đều bằng 0.

Vậy $f(x) = 0, \forall x$.

Vậy định lý được chứng minh.

Bài tập 9: Chứng minh với x nguyên dương thì: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = [\sqrt{9x+8}]$

Giải

Ta sẽ chứng minh rằng: Với $\forall x \geq 1$

$$\sqrt{9x+8} < \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$$

Sau đó suy ra:

$$[\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}] = [\sqrt{9x+8}]$$

Thật vậy:

Theo Cauchy - Schwarz, ta có:

$$1 \cdot \sqrt{x} + 1 \cdot \sqrt{x+1} + 1 \cdot \sqrt{x+2} < \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)(x + x+1 + x+2)} = \sqrt{9x+9}$$

Ta cần chứng minh:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} > \sqrt{9x+7}$$

Bình phương 2 vế:

$$\Leftrightarrow VT = 3x + 3 + 2(\sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x+2)} + \sqrt{(x+1)(x+2)}) > 9x + 7$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x+2)} + \sqrt{(x+1)(x+2)} > 3x + 2$$

$$\text{Mà } \sqrt{(x+1)x} > x$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt{(x+2)x} + \sqrt{(x+2)(x+1)} \geq 2(x+1)$$

Áp dụng trực tiếp AM - GM ta dẫn đến cần chứng minh:

$$(x+2)^2 x \geq (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)^2 - 1](x+2) \geq (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \geq x+2$$

BĐT này hiển nhiên đúng nên suy ra đpcm.

Bài tập 10: Tính các tổng sau:

a) $S_n = \sum_{k=0}^n [\sqrt{k}]$

b) $S_n = \sum_{k=0}^n [\sqrt{2k}]$

Giải

a) Để viết cho gọn ta đặt: $[\sqrt{n}] = m$

Như vậy $m \leq \sqrt{n} < m+1 \Leftrightarrow m^2 \leq n < (m+1)^2$

Trước hết ta có nhận xét sau:

Trên mỗi đoạn $[i^2, i^2 + 2i]$ (giữa hai số chính phương liên tiếp) có $2i + 1$ số có dạng: $i^2 + j$, ($0 \leq j \leq 2i$).

Các số này đều thỏa: $[\sqrt{i^2 + j}] = i$

Do đó S_n được chia thành các tổng:

$$S_n = \sum_{k=0}^{1^2-1} [\sqrt{k}] + \sum_{k=1^2}^{2^2-1} [\sqrt{k}] + \dots + \sum_{k=(m-1)^2}^{m^2-1} [\sqrt{k}] + \sum_{k=m^2}^n [\sqrt{k}]$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{k=i^2}^{i^2+2i} [\sqrt{k}] \right) + \sum_{k=m^2}^n [\sqrt{k}]$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{m-1} (2i+1)i + \sum_{k=m^2}^n [\sqrt{k}]$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{2}{3} \left((i+1)^3 - i^3 \right) - \frac{1}{2} \left((i+1)^2 - i^2 \right) - \frac{1}{6} \right) + (n - m^2 + 1)m$$

(đây được viết dưới dạng sai phân để hiểu hơn)

Ta có: $m(n - m^2 + 1) = m$

$$S_n = \frac{2m^3}{3} - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{6} + nm - m^3 + m$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n [\sqrt{k}] = n.m - \frac{m(m-1)(2m+5)}{6}, \text{ với } m = [\sqrt{n}]$$

b) Làm tương tự câu (a), ta có:

$$S_n = \sum_{k=0}^n [\sqrt{2k}] = n.m - \frac{m(m-1)(2m+5)}{12} + \frac{1}{2} \left[\frac{m}{2} \right], \text{ với } m = [\sqrt{2n}]$$

Bài tập 11: Với $i, j, k, n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. Hãy tính các tổng sau:

a) $\sum_{0 \leq i < j \leq n} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor$

b) $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \dots$

c) $\sum_{k=0}^{2009} \left(\left\lfloor \frac{3^k + 2010}{3^{k+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2010 - 3^k}{3^{k+1}} \right\rfloor \right)$

Giải

a) Áp dụng định lý HERMITE, ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j \leq n} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor &= \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor + \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+i}{n} \right\rfloor \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor + \left\lfloor n \cdot \frac{x}{n} \right\rfloor \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor + [x] \\ &\Rightarrow U_n = U_{n-1} + [x] \\ \text{Với } U_n &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor \text{ và } U_1 = [x] \Rightarrow U_n = n[x] \end{aligned}$$

b) Ta có:

Áp dụng trường hợp riêng của định lý Hermite:

$$[2x] = [x] + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Ta có:

$$\left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} \right\rfloor$$

Vậy tổng cần tính là

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{2^0} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^1} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{n}{2^1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor \right) + \dots + \left(\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) + \dots = [n] = n$$

Số hạng $-\left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} \right\rfloor = 0$ khi k đủ lớn.

c) Áp dụng trường hợp riêng của định lý Hermite:

$$[3x] = [x] + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor = [x] + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x - \frac{1}{3} \right\rfloor + 1$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2009} \left(\left\lfloor \frac{2010+3^k}{3^{k+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2010-3^k}{3^{k+1}} \right\rfloor \right) &= \sum_{k=0}^{2009} \left(\left\lfloor \frac{2010}{3^{k+1}} + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2010}{3^{k+1}} - \frac{1}{3} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{k=0}^{2009} \left(\left\lfloor 3 \cdot \frac{2010}{3^{k+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2010}{3^{k+1}} \right\rfloor - 1 \right) = 2010 + \sum_{k=0}^{2009} \left(\left\lfloor \frac{2010}{3^{k+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2010}{3^{k+1}} \right\rfloor \right) \\ &= -2010 + [2010] - \left\lfloor \frac{2010}{3^{2010}} \right\rfloor = 0 \end{aligned}$$

Bài tập 12: Cho $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các số nguyên dương không vượt quá n thỏa mãn $[a_i, a_j] > n$ và $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} < 2$

Giải

Từ điều kiện suy ra các số trên phân biệt và $k < n$.

Gọi A_i là tập hợp những số không vượt quá n chia hết cho $a_i, i = 1, \dots, n$.

Từ điều kiện suy ra các tập hợp này rời nhau.

Giả sử $s \in A_i \cap A_j$, khi đó thì $s : a_i$ và $s : a_j$ nên $a : [a_i, a_j] > n$ mâu thuẫn!

Mà số phần tử của tập hợp A_i là $\left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor \leq n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{n}{a_i} \leq \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor + k \leq n + k < 2n$$

Bài tập 13: Tích số $100! = 1.2 \dots 100$ tận cùng là bao nhiêu chữ số 0.

(Đề thi học sinh giỏi Mátxcova - 1940)

Giải

Tích của 5 và một chữ số chẵn là một số có chữ số tận cùng là 0.

Trong 100 thừa số của tích $100!$ Có 50 số chẵn và 50 số lẻ.

Vì vậy chỉ cần tìm tất cả các bội số của 5 trong phân tích đã cho.

Theo hệ quả 2, số mũ cao nhất của 5 có trong phân tích ra thừa số nguyên tố của $100!$ đúng bằng:

$$\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 24$$

Vậy tích $100!$ tận cùng là 24 chữ số 0.

Bài tập 14: Chứng minh rằng nếu $(n-1)!$ Chia hết cho n thì không phải là số nguyên tố.

Giải

Giả sử ngược lại n là số nguyên tố, suy ra n chỉ có hai ước số là 1 và n .

Theo định lý 3, trong dãy số $1, 2, \dots, n-1$ có đúng $\left\lfloor \frac{n-1}{n} \right\rfloor = 0$ số chia hết cho n .

Từ đó, suy ra tích $1.2 \dots (n-1)$ không chia hết cho n . Vô lý, vì trái với giả thiết.

Vậy n không phải là số nguyên tố.

Bài tập 15: Chứng minh rằng $n! = 1.2 \dots n$ không chia hết cho 2^n .

Giải

Theo định lý 4, số mũ cao nhất của 2^n có trong phân tích ra thừa số nguyên tố của n là:

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2^m} \right\rfloor, \text{ với } 2^m \leq n < 2^{m+1}$$

Ta chỉ cần chứng tỏ $n > k$.

Ta có:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2}; \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2^2}; \dots; \left\lfloor \frac{n}{2^m} \right\rfloor \leq \frac{n}{2^m}$$

Cộng từng vế m bất đẳng thức trên, ta có:

$$k \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^m} = n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^m} \right)$$

Đặt: $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^m}$

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$\Rightarrow S = 2S - S = 1 - \frac{1}{2^m} < 1$$

Do đó: $k = n.S < n$. Điều này chứng tỏ $n!$ không chia hết cho 2^n .

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Chứng minh rằng: $\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$.

Hướng dẫn: Chứng minh theo bất đẳng thức phần nguyên.

Bài tập 2: chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n hiệu:

$$\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$$

luôn là một số chẵn.

Hướng dẫn:

Ta sử dụng nhận xét:

$$\left[\frac{n}{k} \right] = s; \quad s \in \mathbb{Z}, \quad ks \leq n.$$

nên $\sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right]$ là số các cặp có tính thứ tự (s, k) thỏa mãn $1 \leq s, k \leq n; ks \leq n$.

$\left[\sqrt{n} \right]$ là số các cặp (k, k) thỏa mãn $1 \leq s, k \leq n; k^2 \leq n$ nên hiệu $\sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right] - \left[\sqrt{n} \right]$ là số các cặp có tính

thứ tự (s, k) . nếu (s, k) thỏa mãn thì (k, s) cũng thỏa mãn.

Suy ra hiệu là số chẵn.

Bài tập 3: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + [y] + \{x\} = 200 \\ \{y\} + y + [z] = 190,1 \\ [x] + \{z\} + z = 178,8 \end{cases}$$

Hãy tìm x, y, z .

Bài tập 4: Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ thì $\left[\frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right]$ là số chẵn.

Bài tập 5: Cho p, q là 2 số nguyên tố cùng nhau. Hãy tính tổng:

$$\left\{ \frac{p}{q} \right\} + \left\{ \frac{2p}{q} \right\} + \dots + \left\{ \frac{(q-1)p}{q} \right\}$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{16}$ không phải là số nguyên.

(Đề thi vào trường Chuyên Toán vòng 2 năm 1973)

Bài tập 7: Chứng minh rằng tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, với $n = 1, 2, 3, 4$ không phải là số nguyên.

Hướng dẫn

$$S - 1 = \frac{\frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \dots + \frac{n!}{n}}{n!}$$

Mẫu số chia hết cho một lũy thừa của 2 bậc cao hơn tử số.

Bài tập 8: Tìm lũy thừa k cao nhất của 7 mà $1000!$ có thể chia hết cho 7^k .

Đáp số: $1000!$ chia hết cho 7^{164} .

Bài tập 9: Tìm $1125!$ tận cùng là bao nhiêu chữ số 0.

Đáp số: 280 số 0

Bài tập 10: Chứng minh rằng tích $1300!$ chia hết cho 169^{53} .

Bài tập 11: Chứng minh rằng:

a) $A = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n-1)(2n)}{2^n}$ là một số nguyên.

b) $B = \frac{(n+1)(n+2)\dots(3n-1)(3n)}{3^n}$ là một số nguyên.

Hướng dẫn

$$a) A = \frac{1.2.3\dots n(n+1)(n+2)\dots(2n-1)(2n)}{1.2.3\dots n.2^n} = \frac{(1.3.5.7\dots(2n-1))(2.4.6\dots 2n)}{1.2.3\dots n.n^2}$$

Do đó: $A = 1.3.5.7\dots(2n-1)$.

Bài tập 12: Chứng minh rằng nếu n chia hết cho 24 thì $\sigma(n)$ cũng chia hết cho 24.

Bài tập 13: Chứng minh rằng với mọi $k > 1$ thì phương trình $\tau(x) = k$ có vô số nghiệm.

Bài tập 14: Chứng minh rằng:

$$\varphi(2n) = \begin{cases} \varphi(n) & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 2\varphi(n) & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

Bài tập 15: Chứng minh rằng nếu n có k ước nguyên tố lẻ khác nhau thì $2^k | \varphi(n)$.

Bài tập 16: Chứng minh rằng nếu m, k là nguyên dương thì $\varphi(m^k) = m^{k-1} \varphi(m)$.

Bài tập 17: Chứng minh rằng nếu a, b là các số nguyên dương thì

$$\varphi(ab) = (a, b) \varphi(a) \varphi(b) / \varphi((a, b))$$

Bài tập 18: Hãy tính số các ước và tổng các ước của $2^{100}, 5^3 7^4 11^5, 30!$.

Bài tập 19: Hãy xác định các số nguyên dương có đúng:

a) Ba ước dương

b) Bốn ước dương.

Bài tập 20: Đưa ra công thức $\sigma_k(p^\alpha)$, với p nguyên tố và α nguyên dương.

Bài tập 21: Chứng minh rằng hàm σ_k có tính nhân.

Bài tập 22: Đưa ra công thức tính $\sigma_k(n)$, khi n có khai triển thành lũy thừa nguyên tố $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$.

Bài tập 23: Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa $\varphi(n) + \sigma(n) = 2n$.

Bài tập 24: Chứng minh rằng có đúng $\tau(n^2)$ cặp có thứ tự hai số nguyên dương với bội chung nhỏ nhất bằng n .

Bài tập 25: Giả sử $n \geq 2$ là số nguyên.

Dãy các số nguyên $n_1, n_2, \dots$, được xác định bởi $n_1 = \tau(n)$, $n_{k+1} = \tau(n_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng có số nguyên dương r sao cho $2 = n_{r+k}$ với mọi số tự nhiên k .

Trần Trung Chính - SP Toán Tin