HOÀNG MINH QUÂN

MỚI

TUYỂN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

Lớp 10

Cho hai dãy sè dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Với mọi $r \geq 1$, ta có

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Mục lục

Lời nói đầu **4**

Các thành viên tham gia biên soạn **5**

1 Các bất đẳng thức kinh điển **6**

1.1 Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (AM-GM). 6

1.2 Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình điều hoà (AM-HM). 6

1.3 Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz. 6

1.4 Bất đẳng thức Holder. 7

1.5 Bất đẳng thức Chebyshev. 7

1.6 Bất đẳng thức Minkowski. 7

1.7 Bất đẳng thức Schur. 7

1.8 Bất đẳng thức Vornicu - Schur. 8

1.9 Bất đẳng thức Bernoulli. 8

1.10 Ba tiêu chuẩn SOS thường gặp. 9

2 Một số đánh giá quen thuộc **9**

3 Tuyển tập bất đẳng thức **10**

3.1 Bài 1.1 đến bài 1.40 10

3.2 Bài 2.1 đến bài 2.40 39

3.3 Bài 3.1 đến bài 3.40 59

3.4 Bài 4.1 đến bài 4.40 80

3.5 Bài 5.1 đến bài 5.40 104

3.6 Bài 6.1 đến bài 6.40 132

3.7 Bài 7.1 đến bài 7.40 148

3.8 Bài 8.1 đến bài 8.40 168

3.9 Bài 9.1 đến bài 9.40 193

3.10 Bài 10.1 đến bài 10.40 211

Lời nói đầu

Biển vẫn mãi nhấp nhô với những con sóng dạt vào bờ, thuyền vẫn mãi lênh đênh theo từng con sóng đi vào đại dương, và trong đất liền cuộc sống vẫn có nhiều bất cập còn đang xảy ra,..., tất cả những điều đó đều là các bất đẳng thức trong phạm trù đặc thù của từng lĩnh vực. Trong toán học cũng vậy nói đến bất đẳng thức là chúng ta nói đến một lớp bài toán khó mà ẩn chứa bên trong có nhiều lời giải đẹp lạ kì làm say đắm biết bao nhiêu người.
Trong thời đại công nghệ thông tin với việc kết nối internet bạn có thể giao lưu học hỏi được rất nhiều về các phương pháp làm bài bất đẳng thức, hoặc học hỏi với nhiều cuốn sách về bất đẳng thức đang bày bán trên thị trường nhưng để có một cuốn sách bất đẳng thức hay với sự hội tụ tinh hoa kiến thức của nhiều người thì điều đó chính là điểm mạnh của cuốn sách bất đẳng thức mà các bạn đang cầm trên tay.

"Tuyển Tập Bất Đẳng Thức" với khoảng bốn trăm bài toán bất đẳng thức chọn lọc được gửi tới từ các bạn trẻ, các thầy cô giáo yêu toán trên mọi miền của tổ quốc, ở đó bao gồm các bài toán bất đẳng thức mới sáng tạo, các bài toán bất đẳng thức khó, các bài toán bất đẳng thức hay và thú vị mà các bạn trẻ muốn chia sẻ với mọi người. Điều đó tạo nên sự hấp dẫn, tính cập nhật và thời đại của cuốn sách này.
Bạn đọc hãy nhâm nhi với những lời giải hay, những ý tưởng độc đáo, những sáng kiến lạ kì trong cách giải từng bài toán để từ đó rút kinh nghiệm học tập cho mình, giúp cho bạn thêm yêu, thêm tin vào việc giải nhiều bài toán bất đẳng thức.
Với tinh thần làm việc nghiêm túc, ham học hỏi nhóm biên tập xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới tất cả các bạn đã tham gia gửi bài và giải bài, đồng thời cũng xin bày tỏ sự cảm ơn và kính trọng tới thầy giáo Châu Ngọc Hùng - THPT Ninh Hải - Ninh Thuận đã nhiệt tình cố vấn kĩ thuật latex. Nhóm biên tập cũng xin gửi lời cảm ơn tới ban quản trị diễn đàn http://forum.mathscope.org/index.php đã cổ vũ, động viên anh em trong quá trình làm việc để ngày hôm nay chúng ta có một cuốn sách hay, có giá trị cao về kiến thức chuyên môn mà lại hoàn toàn miễn phí về tài chính.
"TUYỂN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC" chính thức được phát hành trên cộng đồng mạng những người yêu toán, để từ đó thổi một luồng gió mới đem lại nhiều điều mới lạ cho học sinh, là tài liệu tham khảo hữu ích cho giáo viên trong việc giảng dạy và học tập bất đẳng thức.
Do thời gian gấp rút và trình độ có hạn, dù rất cố gắng song những sai sót là khó tránh khỏi rất mong nhận được sự thông cảm, chia sẻ, góp ý của các bạn để nhóm biên tập hoàn thiện cuốn sách tốt hơn. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ hoangquan9@gmail.

Thay mặt nhóm biên soạn, tôi xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, ngày 10 tháng 8 năm 2011

Đại diện nhóm biên soạn
Chủ biên
Hoàng Minh Quân-Batigoal

Các thành viên tham gia biên soạn

Nội dung

- Hoàng Minh Quân - THPT Ngọc Tảo - Hà Nội.
- Tăng Hải Tuân - THPT Nguyễn Đức Cảnh - TP. Thái Bình.
- Lê Đức Cảnh - THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định.
- Đào Thái Hiệp - PTNK - ĐHQG HCM.
- Phạm Tuấn Huy - PTNK - ĐHQG HCM.
- Phạm Quang Hưng - THPT Cao Bá Quát - Hà Nội.
- Phạm Tiến Kha - THPT Chuyên Lê Hồng Phong - TP. HCM.
- Nguyễn Văn Khánh - THPT Chuyên Bắc Ninh - TP. Bắc Ninh.
- Nguyễn Thị Nguyên Khoa - THCS Nguyễn Tri Phương - TP. Huế.
- Mạc Đức Trí - Hải Dương.

LaTeX

Hỗ trợ kĩ thuật Latex

1. Châu Ngọc Hùng - THPT Ninh Hải -Ninh Thuận.
2. Các thành viên trong nhóm biên soạn.

Trình bày bìa

Hoàng Minh Quân - THPT Ngọc Tảo - Hà Nội.

1 Các bất đẳng thức kinh điển

1.1 Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (AM-GM).

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm, thì

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

1.2 Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình điều hoà (AM-HM).

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương, thì

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Thực chất đây là một hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Cauchy - Schwarz. Hai trường hợp thường được sử dụng nhất của bất đẳng thức này là khi $n = 3$ hay $n = 4$.

Với $n = 3$, ta có

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Với $n = 4$, ta có

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}},$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geq \frac{16}{a+b+c+d}.$$

1.3 Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz.

Dạng sơ cấp của nó được phát biểu như sau:

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số thực tuỳ ý, thì

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, trong đó ta sử dụng quy ước: nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0.

Trong đánh giá trên, chọn $a_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}, b_i = \sqrt{y_i}$ với $x_i, y_i \in \mathbb{R}$; $y_i > 0$, ta thu được *bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức*:

Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực và $y_1, y_2, \ldots, y_n$, là các số thực dương, thì

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$.

1.4 Bất đẳng thức Holder.

Cho x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ là các số thực không âm. Khi đó ta có
$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^{\frac{1}{m}} \geq \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{\frac{1}{m}}\right).$$
Tổng quát hơn, nếu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các số thực dương thoả mãn $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, thì
$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^{p_i} \geq \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{p_i}\right).$$

1.5 Bất đẳng thức Chebyshev.

Cho hai dãy số thực $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Khi đó

1. Nếu $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ thì $n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$;
2. Nếu $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ thì $n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.

1.6 Bất đẳng thức Minkowski.

Cho hai dãy số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Với mọi $r \geq 1$, ta có
$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Trường hợp $r = 2$ là trường hợp thường được sử dụng nhất của bất đẳng thức Minkowski. Khi đó ta có
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

1.7 Bất đẳng thức Schur.

Cho các số thực không âm a, b, c. Khi đó với mọi số thực dương r, ta có
$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0.$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hoặc $a = 0$ và $b = c$, hoặc các hoán vị tương ứng.

Hai trường hợp thường được sử dụng nhất của bất đẳng thức Schur là $r = 1$ và $r = 2$.

Với $r = 1$, ta có *bất đẳng thức Schur bậc ba*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a),$$

$$(a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca),$$

$$(b-c)^2(b+c-a) + (c-a)^2(c+a-b) + (a-b)^2(a+b-c) \geq 0,$$

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\ge 2(ab+bc+ca),$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2.$$

Với $r=2$, ta thu được *bất đẳng thức Schur bậc bốn*

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\ge ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2).$$

1.8 Bất đẳng thức Vornicu - Schur.

Với mọi số thực a,b,c và $x,y,z\ge 0$, bất đẳng thức

$$x(a-b)(a-b)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$$

đúng nếu một trong các điều kiện sau được thoả mãn

1. $a\ge b\ge c$ và $x\ge y$;
2. $a\ge b\ge c$ và $z\ge y$;
3. $a\ge b\ge c$ và $x+z\ge y$;
4. $a\ge b\ge c\ge 0$ và $ax\ge by$;
5. $a\ge b\ge c\ge 0$ và $cz\ge by$;
6. $a\ge b\ge c\ge 0$ và $ax+cz\ge by$;
7. x,y,z là độ dài ba cạnh của một tam giác;
8. x,y,z là bình phương độ dài ba cạnh của một tam giác;
9. ax,by,cz là độ dài ba cạnh của một tam giác;
10. ax,by,cz là bình phương độ dài ba cạnh của một tam giác;
11. Tồn tại một hàm lồi $t:I\to\mathbb{R}^+$, trong đó I là tập xác định của a,b,c, sao cho $x=t(a),y=t(b),z=t(c)$.

1.9 Bất đẳng thức Bernoulli.

Nếu $\alpha\ge 1$ hoặc $\alpha\le 0$ thì $(1+x)^\alpha\ge 1+\alpha x,\forall x>-1$.
Nếu $0\le\alpha\le 1$ thì $(1+x)^\alpha\le 1+\alpha x,\forall x>-1$.

1.10 Ba tiêu chuẩn SOS thường gặp.

Giả sử $a \geq b \geq c$ và có: $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$($S_a, S_b, S_c$ là các hàm chứa biến a, b, c).
Khi đó bất đẳng thức đúng nếu thỏa mãn một trong các tiêu chuẩn.
1.$S_b \geq 0, S_b + S_c \geq 0, S_b + S_a \geq 0$.
2.Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $S_b \geq 0, S_c \geq 0, a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$.
3.$S_b \geq 0, S_c \geq 0, S_a(b-c) + S_b(a-c) \geq 0$

2 Một số đánh giá quen thuộc

$\boxed{1}$ Với mọi số thực a, b, ta luôn có

$$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$$

Chứng minh. Để ý rằng

$$2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2 \geq 0,$$

do đó ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. □

$\boxed{2}$ Với mọi số thực a, b, c, ta luôn có

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

Chứng minh. Để ý rằng

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geq 0,$$

do vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Lưu ý. Từ đánh giá này ta suy ra

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

và

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2.$$

$\boxed{3}$ Với mọi số thực dương a, b, c, ta luôn có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Chứng minh. Đây là một kết quả đã được đề cập ở trên. Lời giải có thể sử dụng bất đẳng thức AM-HM hoặc Cauchy - Schwarz. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

3 Tuyển tập bất đẳng thức

3.1 Bài 1.1 đến bài 1.40

1.1 Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:
$$8^x+8^y+8^z \geq 4^{x+1}+4^{y+1}+4^{z+1}$$

Lời giải. Đặt $a=2^x, b=2^y, c=2^z$. Khi đó điều kiện đã cho được viết lại thành

$$a, b, c>0; abc=2^{x+y+z}=64,$$

và ta cần chứng minh
$$a^3+b^3+c^3 \geq 4(a^2+b^2+c^2).$$

Để ý rằng ta có đẳng thức
$$a^3+32-6a^2=(a-4)^2(a+2),$$

từ đó sử dụng giả thiết $a>0$ ta suy ra $a^3+32 \geq 6a^2$. Thiết lập các bất đẳng thức tương tự cho b và c và cộng vế theo vế các bất đẳng thức thu được, ta có

$$a^3+b^3+c^3+96 \geq 6(a^2+b^2+c^2).$$

Như vậy để kết thúc chứng minh ta cần chỉ ra rằng

$$6(a^2+b^2+c^2) \geq 4(a^2+b^2+c^2)+96,$$

hay $2(a^2+b^2+c^2) \geq 96$. Tuy nhiên bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức AM-GM cho ba số:
$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=6\sqrt[3]{4096}=96.$$

Như vậy phép chứng minh đến đây hoàn tất.□

1.2 Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và $a^2+b^2+c^2=90$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P=a+b+c$$

Lời giải. Đặt $a=m+4, b=n+5, c=p+6$, khi đó $m, n, p \geq 0$ và từ giả thiết $a^2+b^2+c^2=90$ ta suy ra
$$m^2+n^2+p^2+8m+10n+12p=13.$$

Để ý rằng ta có đẳng thức sau

$$(m+n+p)^2+12(m+n+p)=(m^2+n^2+p^2+8m+10n+12p)+2(mn+np+pm+2m+n).$$

Đến đây ta sử dụng các giả thiết đã cho để có

$$(m+n+p)^2+12(m+n+p) \geq 13,$$

từ đó ta suy ra $m+n+p \geq 1$. Thay $m=a-4, n=b-5, p=c-6$ ta suy ra $a+b+c \geq 10$ hay $P \geq 16$.

Cuối cùng, với $a = 4, b = 5, c = 7$ (thoả mãn các điều kiện đã cho) ta có $P = 16$ nên ta kết luận 16 là giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

1.3 Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $xy + yz + 3zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^2 + y^2 + z^2$$

Lời giải. Đặt $a = \dfrac{9 + 3\sqrt{17}}{4}$ và $b = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{4}$, khi đó $a = 3b$ và $a + 1 = 2b^2 = c = \dfrac{13 + 3\sqrt{17}}{4}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta thu được các bất đẳng thức sau

$$x^2 + b^2y^2 \geq 2bxy,$$

$$by^2 + z^2 \geq 2byz,$$

$$a(z^2 + x^2) \geq 2azx.$$

Đến đây ta cộng vế theo vế các bất đẳng thức thu được để có

$$(a + 1)(x^2 + z^2) + 2b^2y^2 \geq 2b(xy + yz) + 2azx,$$

hay $c(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2b(xy + yz + 3zx)$. Từ đó ta thay các giá trị của $xy + yz + 3zx$, b và c để được

$$P = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{\sqrt{17} - 3}{2}.$$

Cuối cùng, với $x = z = \dfrac{1}{\sqrt[4]{17}}$ và $y = \sqrt{\dfrac{13\sqrt{17} - 51}{34}}$ (thoả mãn giả thiết) thì $P = \dfrac{\sqrt{17} - 3}{2}$ nên ta kết luận $\dfrac{\sqrt{17} - 3}{2}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Phép chứng minh hoàn tất.$\square$

1.4 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^7 + b^7}{a^5 + b^5} + \frac{b^7 + c^7}{b^5 + c^5} + \frac{c^7 + a^7}{c^5 + a^5} \geq \frac{1}{3}$$

Lời giải. Trước hết ta có đẳng thức sau

$$2(a^7 + b^7) - (a^2 + b^2)(a^5 + b^5) = (a - b)^2(a + b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$

do vậy từ giả thiết $a, b \geq 0$ ta suy ra

$$\frac{a^7 + b^7}{a^5 + b^5} \geq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\dfrac{b^7 + c^7}{b^5 + c^5} \geq \dfrac{b^2 + c^2}{2}$ và $\dfrac{c^7 + a^7}{c^5 + a^5} \geq \dfrac{c^2 + a^2}{2}$. Đến đây ta cộng vế theo vế ba bất đẳng thức thu được để có

$$\frac{a^7 + b^7}{a^5 + b^5} + \frac{b^7 + c^7}{b^5 + c^5} + \frac{c^7 + a^7}{c^5 + a^5} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Như vậy để kết thúc chứng minh ta cần chỉ ra rằng

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}.$$

Tuy nhiên bất đẳng thức trên đúng do

$$a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}=a^2+b^2+c^2-\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3} \geq 0.$$

Như vậy phép chứng minh đến đây hoàn tất.□

1.5 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)}+\frac{c^2a}{b^3(c+a)}+\frac{a^2b}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Lời giải. Ta áp dụng AM-GM cho ba số như sau:

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)}+\frac{b+c}{4bc}+\frac{1}{2b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2c}{a^3(b+c)}.\frac{(b+c)}{4bc}.\frac{1}{2b}}=\frac{3}{2a},$$

từ đó ta suy ra

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2a}-\frac{3}{4b}-\frac{1}{4c}.$$

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng lại, ta suy ra

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)}+\frac{c^2a}{b^3(c+a)}+\frac{a^2b}{c^3(a+b)} \geq \left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)(a+b+c)=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.6 Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)^3 \geq 6\sqrt{3}(a-b)(b-c)(c-a)$$

Lời giải. Bất đẳng thức ban đầu mang tính hoán vị giữa các biến nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = max\,\{a, b, c\}$.

Với $a \geq b \geq c$ thì vế phải là biểu thức không dương, trong khi vế trái là biểu thức không âm nên bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng. Do vậy ta xét trường hợp $a \geq c \geq b$. Khi đó bình phương hai vế ta thu được bất đẳng thức tương đương sau:

$$(a+b+c)^6 \geq 108[(a-b)(b-c)(c-a)]^2.$$

Để ý rằng các biến không âm, và với việc sắp thứ tự như trên thì

$$[(a-b)(b-c)(c-a)]^2=[(a-b)(c-b)(a-c)]^2 \leq (a-c)^2a^2c^2.$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM để có

$$4(a-c)^2a^2c^2=(a-c)^2.2ac.2ac \leq \frac{[(a-c)^2+2ac+2ac]^3}{27}=\frac{(a+c)^6}{27},$$

từ đó ta suy ra

$$[(a-b)(b-c)(c-a)]^2 \leq \frac{(a+c)^6}{108},$$

Xuctu.com®

và như vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức ban đầu vì

$$(a+b+c)^6 \geq (a+c)^6 \geq 108[(a-b)(b-c)(c-a)]^2.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.7 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Chứng minh rằng:

$$2(a+b+c) \geq \sqrt{a^2+3}+\sqrt{b^2+3}+\sqrt{c^2+3}$$

Lời giải. Dễ thấy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau

$$(2a-\sqrt{a^2+3})+(2b-\sqrt{b^2+3})+(2c-\sqrt{c^2+3}) \geq 0,$$

$$\frac{a^2-1}{2a+\sqrt{a^2+3}}+\frac{b^2-1}{2b+\sqrt{b^2+3}}+\frac{c^2-1}{2c+\sqrt{c^2+3}} \geq 0,$$

$$\frac{\frac{a^2-1}{a}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}}+\frac{\frac{b^2-1}{b}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}}+\frac{\frac{c^2-1}{c}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{c^2}}} \geq 0.$$

Các bất đẳng thức trên đều mang tính đối xứng giữa các biến nên không mất tính tổng quát ta hoàn toàn có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó không khó để ta suy ra

$$\frac{a^2-1}{a} \geq \frac{b^2-1}{b} \geq \frac{c^2-1}{c}$$

và

$$\frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}} \geq \frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}} \geq \frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}}.$$

Như vậy theo bất đẳng thức Chebyshev ta được

$$\frac{\frac{a^2-1}{a}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}}+\frac{\frac{b^2-1}{b}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}}+\frac{\frac{c^2-1}{c}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{c^2}}} \geq \frac{1}{3}\left(\sum \frac{a^2-1}{a}\right)\left(\sum \frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}}\right)$$

Nhưng theo giả thiết ta lại có

$$\sum \frac{a^2-1}{a} = (a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 0$$

nên ta suy ra $\dfrac{\frac{a^2-1}{a}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}}+\dfrac{\frac{b^2-1}{b}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}}+\dfrac{\frac{c^2-1}{c}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{c^2}}} \geq 0$, và vì vậy bất đẳng thức đã cho cũng đúng.

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.8 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải. Trước hết để ý rằng

$$ab+bc+ca-\frac{(a+b+c)^2}{3}=-\left[\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{6}\right]\le 0,$$

do đó từ giả thiết ta suy ra $ab+bc+ca\le 3$. Như vậy

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}=\frac{ab}{\sqrt{(c+a)(b+c)}}.$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM để có

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{b+c}\right).$$

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng lại, ta suy ra dãy các đánh giá sau

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}\left[\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{c+a}\right)+\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{ca}{a+b}\right)+\left(\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{b+c}\right)\right],$$

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{a+b+c}{2},$$

từ đó với lưu ý $a+b+c=3$ ta suy ra bất đẳng thức đã cho là đúng.

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.9 Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)^2\ge 4(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

Lời giải 1. Dễ thấy rằng bất đẳng thức ban đầu tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau

$$[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]^2\ge 4(a+b+c)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\sum a^2b^2(a+b)^2+2abc[\sum a(a+b)(a+c)]\ge 4\left\{\sum a^3b^3+abc[\sum ab(a+b)]\right\}$$

Tuy nhiên để ý rằng

$$\sum a^2b^2(a+b)^2-4(\sum a^3b^3)=\sum a^2b^2(a-b)^2\ge 0$$

và

$$2abc[\sum a(a+b)(a+c)]-4\left\{abc[\sum ab(a+b)]\right\}=2abc[a^3+b^3+c^3+3abc-\sum ab(a+b)]\ge 0,$$

do đó bất đẳng thức ban đầu là đúng. Phép chứng minh đến đây hoàn tất.□

Lời giải 2. Bất đẳng thức ban đầu mang tính hoán vị giữa các biến, nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $b=max\{a,b,c\}$.

Ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau

$$\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)^2=\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}\right)\right]^2\ge 4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}\right).$$

Như vậy để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}\right) \geq (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Tuy nhiên bằng phép biến đổi tương đương ta được

$$\frac{(b-a)(b-c)}{ca} \geq 0,$$

là một đánh giá đúng do ta đã giả sử $b = max\{a,b,c\}$.

Phép chứng minh đến đây hoàn tất.□

Lời giải 3. Bất đẳng thức ban đầu mang tính đối xứng giữa các biến nên không mất tính tổng quát, ta giả sử b nằm giữa a và c.

Ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$4(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \leq \left[\frac{ab+bc+ca}{ca}+ca\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right]^2.$$

Như vậy để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq \frac{ab+bc+ca}{ca}+ca\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Thực hiện phép biến đổi tương đương ta được bất đẳng thức

$$\frac{(a-b)(b-c)}{b^2} \geq 0,$$

tuy nhiên đây lại là một đánh giá đúng do ta đã giả sử b nằm giữa a và c.

Phép chứng minh đến đây hoàn tất.□

Nhận xét. Lời giải đầu tiên không mang nhiều ý nghĩa lắm, vì nó đơn thuần chỉ là biến đổi tương đương kèm theo một chút tinh ý trong sử dụng các đánh giá quen thuộc và cơ bản. Ở đây ta bàn thêm về hai lời giải bằng AM-GM.

Ta nhận thấy rằng phát biểu của bài toán có dạng *"Chứng minh rằng $A^2 \geq 4BC$"* (ở đây $A = \left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)^2$, $B = ab+bc+ca$ và $C = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$. Nhận xét này khá đặc biệt, nó giúp ta liên tưởng đến một đánh giá quen thuộc sau bằng AM-GM:

$$(x+y)^2 \geq 4xy \qquad\qquad \forall x,y \geq 0.$$

Do vậy, một cách tự nhiên ta nghĩ ra hai hướng để giải quyết bài toán trên bằng AM-GM:

1. Biểu diễn $A = X+Y$, với X và Y là hai đại lượng thích hợp, sau đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM để có $A^2 \geq 4XY$, từ đó đi chứng minh $XY \geq BC$; hoặc

2. Biểu diễn $BC = \frac{B}{D}.CD$, với D là một đại lượng thích hợp, sau đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM để có $4BC \leq \left(\frac{B}{D} + CD\right)^2$, từ đó đi chứng minh $A \geq \frac{B}{D} + CD$.

Ở đây ta hiểu cụm từ *"thích hợp"* là như thế nào? Lưu ý rằng một trong những điều cần để ý trong mọi chứng minh bất đẳng thức là cần phải *đơn giản hoá bất đẳng thức cần chứng minh*. Ta có thể tìm cách giảm bậc, chuẩn hoá điều kiện, ..., nhưng tựu chung lại, ta luôn muốn bất đẳng thức cần chứng minh trở nên đơn giản nhất có thể, để từ đó áp dụng nhẹ nhàng các đánh giá quen thuộc hoặc biến đổi tương đương. Ở đây ta tìm cách thu gọn đánh giá sau cùng theo kiểu *triệt tiêu một lượng đáng kể các phần tử chung*, tức là ở đánh giá $XY \geq BC$ hoặc $A \geq \frac{B}{D} + CD$, các đại lượng X, Y, D được chọn sao cho ở hai vế của bất đẳng thức có nhiều phần tử chung để ta rút gọn. Cụ thể:

`Hướng 1.` Trước tiên ta viết lại A và khai triển tích BC như sau:

$$A = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = X + Y,$$

$$BC = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2}.$$

Để ý rằng trong BC có phần tử $\frac{ca}{b^2}$, nên ta cần có $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{b}$ ở X và Y tương ứng:

$$X = \frac{a}{b} + \dots, \qquad Y = \frac{c}{b} + \dots$$

Mặt khác, trong BC có phần tử $\frac{a}{b}$, mà ở Y đã có $\frac{c}{b}$ nên ta cần phần tử $\frac{a}{c}$ ở trong X:

$$X = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \dots, \qquad Y = \frac{c}{b} + \dots$$

Tiếp tục, trong BC có phần tử $\frac{ab}{c^2}$, nên ta cần có $\frac{a}{c}$ và $\frac{b}{c}$ ở X và Y tương ứng:

$$X = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \dots, \qquad Y = \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \dots$$

Tiếp tục như vậy ta sẽ tìm được hai đại lượng X, Y chẳng hạn như sau:

$$X = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}, \qquad Y = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a},$$

và ta có được lời giải thứ hai. Cần lưu ý rằng đây không phải là cách chọn duy nhất.

`Hướng 2.` Xét hiệu sau

$$A - \frac{B}{D} - CD = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} - \frac{ab+bc+ca}{D} - D\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Để ý rằng trong hiệu trên thì hệ số của biến b bằng

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{c+a}{D},$$

như vậy để tìm cách thu gọn bất đẳng thức, tại sao ta không cho hệ số của biến b bằng không? Cụ thể, nếu chọn $D = ca$ thì

$$A - \frac{B}{D} - CD = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} - \frac{ab+bc+ca}{ca} - ca\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$
$$= \frac{(a-b)(b-c)}{b^2},$$

và như vậy ta đã có lời giải thứ ba.

1.10 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = ab + bc + ca + \frac{5}{2}[(a+b)\sqrt{ab} + (b+c)\sqrt{bc} + (c+a)\sqrt{ca}]$$

Lời giải. Trước hết ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$2(a+b)^2 + 2ab = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2} + 2ab \geq 5\sqrt[5]{\frac{ab(a+b)^8}{8}}$$

và
$$(a+b)^3 \geq (2\sqrt{ab})^3 = 8(\sqrt{ab})^3,$$
từ đó kết hợp hai bất đẳng thức này để có
$$2(a+b)^2 + 2ab \geq 5(a+b)\sqrt{ab}.$$

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng lại, ta suy ra
$$5[(a+b)\sqrt{ab} + (b+c)\sqrt{bc} + (c+a)\sqrt{ca}] \leq 4(a^2+b^2+c^2) + 6(ab+bc+ca)$$

Đến đây ta cộng thêm $2(ab+bc+ca)$ vào mỗi vế để có
$$2(ab+bc+ca) + 5[(a+b)\sqrt{ab} + (b+c)\sqrt{bc} + (c+a)\sqrt{ca}] \leq 4(a+b+c)^2,$$

từ đó ta suy ra $P \leq 2(a+b+c)^2 = 2$.

Cuối cùng, với $a = b = c = \dfrac{1}{3}$ (thoả mãn điều kiện) thì $P = 2$ nên ta suy ra 2 là giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.11 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leq 16(a+b+c)$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{(a+b+2\sqrt{a+c})^3} + \frac{1}{(b+c+2\sqrt{b+a})^3} + \frac{1}{(c+a+2\sqrt{c+b})^3} \leq \frac{8}{9}$$

Lời giải. Trước hết ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$a + b + \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a+c}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}},$$

từ đó ta suy ra
$$\frac{1}{(a+b+2\sqrt{a+c})^3} \leq \frac{2}{27(a+b)(a+c)}.$$

Cộng vế theo vế bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự cho ta

$$\frac{1}{(a+b+2\sqrt{a+c})^3}+\frac{1}{(b+c+2\sqrt{b+a})^3}+\frac{1}{(c+a+2\sqrt{c+b})^3}\le\frac{4(a+b+c)}{27(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Hơn nữa, theo một kết quả quen thuộc, ta lại có

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca),$$

do vậy

$$\frac{1}{(a+b+2\sqrt{a+c})^3}+\frac{1}{(b+c+2\sqrt{b+a})^3}+\frac{1}{(c+a+2\sqrt{c+b})^3}\le\frac{1}{6(ab+bc+ca)}.(*)$$

Đến đây ta sử dụng giả thiết và đánh giá cơ bản $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$ để có

$$16(a+b+c)\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca},$$

từ đó suy ra $ab+bc+ca\ge\frac{3}{16}$. Kết hợp với $(*)$ ta suy ra

$$\frac{1}{(a+b+2\sqrt{a+c})^3}+\frac{1}{(b+c+2\sqrt{b+a})^3}+\frac{1}{(c+a+2\sqrt{c+b})^3}\le\frac{8}{9}.$$

Phép chứng minh đến đây hoàn tất.□

Nhận xét.

1. Có thể thấy đánh giá ban đầu $a+b+\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a+c}{2}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}}$ chính là điểm mấu chốt để giải quyết bài toán. Thực ra đánh giá này không khó nghĩ tới vì đề bài đã ngầm gợi ý cho chúng ta phải áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số.

2. Sau khi đánh giá bằng AM-GM, ta có thể sử dụng luôn giả thiết để đưa về bất đẳng thức thuần nhất sau:
$$\frac{(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{3(ab+bc+ca)}{8abc(a+b+c)}.$$
Bất đẳng thức này có thể được chứng minh bằng nhiều cách khác nhau.

1.12 Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng:
$$5(a+b+c)\ge 7+8abc$$

Lời giải. Trước hết từ giả thiết ta có

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c},$$

từ đó suy ra $a+b+c=3$.

Cũng từ giả thiết ta có $ab+bc+ca=abc(a+b+c)$, từ đây ta suy ra bất đẳng thức sau là tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh

$$5(a+b+c)^2\ge 7(a+b+c)+8(ab+bc+ca).$$

Để ý rằng ta có đánh giá cơ bản sau:

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

do vậy để có kết luận cho bài toán ta cần chỉ ra rằng

$$5(a+b+c)^2 \geq 7(a+b+c) + \frac{8(a+b+c)^2}{3},$$

hay $a+b+c \geq 3$, là một đánh giá đúng do ta đã chứng minh ở trên.

Do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong. Bài toán kết thúc.□

1.13 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 16(a+b+c)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} + \frac{1}{2+c^2} \leq 1$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{2+a^2} + \frac{b^2}{2+b^2} + \frac{c^2}{2+c^2} \geq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\frac{a^2}{2+a^2} + \frac{b^2}{2+b^2} + \frac{c^2}{2+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}.$$

Như vậy để kết thúc chứng minh ta cần chỉ ra rằng

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} \geq 1.$$

Thực hiện phép khai triển tương đương ta được $ab+bc+ca \geq 3$. Tuy nhiên bất đẳng thức này đúng nhờ vào giả thiết của bài toán. Lưu ý rằng từ giả thiết ta có

$$ab+bc+ca = abc(a+b+c),$$

và theo một đánh giá quen thuộc thì $abc(a+b+c) \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3}$, từ đó ta suy ra

$$ab+bc+ca \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3},$$

hay $ab+bc+ca \geq 3$. Phép chứng minh đến đây hoàn tất.□

1.14 Cho a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn $a+b+c+d = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{bcd} + \frac{1}{cda} + \frac{1}{dab}$$

Lời giải. Kí hiệu $\sum$ là tổng hoán vị. Trước hết ta sử dụng AM-GM và giả thiết để có các đánh giá sau:

$$abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 = \frac{1}{256},$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \leq \frac{3(a+b+c+d)^2}{8} = \frac{3}{8}.$$

Kết hợp các đánh giá này với bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta suy ra được các bất đẳng thức sau:

1.
$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}+\sum\frac{1}{4ab}\geq\frac{7^2}{a^2+b^2+c^2+d^2+\sum 4ab}$$
$$=\frac{49}{(a+b+c+d)^2+2\sum ab}\geq\frac{49}{1+2.\frac{3}{8}}=28,$$

2. $7\sum\frac{1}{4ab}\geq\frac{7.6^2}{\sum 4ab}\geq\frac{7.36}{4.\frac{3}{8}}=168.$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho bốn số ta lại có

$$\sum\frac{a}{bcd}\geq 4\sqrt{\frac{1}{4abcd}}\geq 4\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{256}}}=64.$$

Kết hợp ba bất đẳng thức vừa chứng minh ở trên, ta suy ra

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}+2\sum\frac{1}{ab}+\sum\frac{a}{bcd}\geq 28+168+64=260.$$

Hơn nữa, sử dụng giả thiết $a+b+c+d=1$ ta suy ra

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}+(a+b+c+d)\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{bcd}+\frac{1}{cda}+\frac{1}{dab}\right)\\&=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}+2\sum\frac{1}{ab}+\sum\frac{a}{bcd}.\end{aligned}$$

Do vậy $P\geq 260$.

Cuối cùng, với $a=b=c=d=\frac{1}{4}$ (thoả mãn điều kiện) thì $P=260$ nên ta suy ra 260 là giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.15 Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:
$$18\left(\frac{1}{x^3+1}+\frac{1}{y^3+1}+\frac{1}{z^3+1}\right)\leq(x+y+z)^3$$

Lời giải. Sử dụng giả thiết, dễ thấy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:

$$18\left(3-\frac{x^3}{x^3+1}-\frac{y^3}{y^3+1}-\frac{z^3}{z^3+1}\right)\leq(x+y+z)^3,$$

$$18\left(\frac{x^2}{x^2+yz}+\frac{y^2}{y^2+zx}+\frac{z^2}{z^2+xy}\right)+(x+y+z)^3\geq 54.\ (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\frac{x^2}{x^2+yz}+\frac{y^2}{y^2+zx}+\frac{z^2}{z^2+xy}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}.$$

Như vậy nếu kí hiệu $VT(*)$ là vế trái của bất đẳng thức $(*)$ thì ta có

$$VT(*) \geq \frac{18(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx} + (x+y+z)^3.$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM để có

$$VT(*) \geq 2\sqrt{\frac{18(x+y+z)^5}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}}.$$

Như vậy để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$(x+y+z)^5 \geq \frac{81}{2}(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx).$$

Trước hết ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$(x+y+z)^6 = [(x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)+(xy+yz+zx)]^3 \geq 27(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)^2.$$

Hơn nữa, theo một kết quả quen thuộc ta có $(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$, do đó

$$(x+y+z)^6 \geq 81xyz(x^2+y^2+z^2)(x+y+z),$$

hay $(x+y+z)^5 \geq 81(x^2+y^2+z^2)$ do $xyz = 1$. Như vậy ta cần chỉ ra rằng

$$2(x^2+y^2+z^2) \geq x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx.$$

Tuy nhiên bằng phép biến đổi tương đương ta thu được

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geq 0,$$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Do vậy bất đẳng thức ban đầu đã được chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

1.16 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^4+b^4+c^4 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải. Ta sẽ đi chứng minh

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}},$$

từ đó sử dụng giả thiết để suy ra kết luận cho bài toán. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right)^2 [a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2] \geq (a^2+b^2+c^2)^3.$$

Hơn nữa, theo một kết quả quen thuộc, ta có

$$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2,$$

từ đây ta thiết lập hai đánh giá tương tự để có

$$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)^2[2a^2(b^2+c^2)+2b^2(c^2+a^2)+2c^2(a^2+b^2)]\geq(a^2+b^2+c^2)^3,$$

hay

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

Như vậy để kết thúc chứng minh ta cần chỉ ra rằng

$$\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\geq 3\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}.$$

Thực hiện phép biến đổi tương đương ta thu được

$$(a^2+b^2+c^2)^6\geq 27(a^4+b^4+c^4)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2.$$

Tuy nhiên bất đẳng thức trên đúng nếu ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^6&=[(a^4+b^4+c^4)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)]^3\\&\geq 27(a^4+b^4+c^4)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2\end{aligned}$$

Phép chứng minh đến đây hoàn tất.□

1.17 Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}\leq 1$$

Lời giải. Sử dụng giả thiết, ta thấy rằng các bất đẳng thức sau là tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{a}{4-c}+\frac{b}{4-a}+\frac{c}{4-b}\leq 1,$$

$$a(4-a)(4-b)+b(4-b)(4-c)+c(4-c)(4-a)\leq(4-a)(4-b)(4-c),$$

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc\leq 4.$$

Bất đẳng thức trên mang tính hoán vị giữa các biến nên không mất tính tổng quát, ta giả sử c nằm giữa a và b. Khi đó

$$a(a-c)(b-c)\leq 0.$$

Thực hiện phép khai triển ta được $a^2b+c^2a\leq a^2c+abc$. Từ đây ta cộng thêm đại lượng (b^2c+abc) vào hai vế để được

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc\leq a^2c+b^2c+2abc=c(a+b)^2.$$

Đến đây ta áp dụng AM-GM như sau:

$$c(a+b)^2=\frac{1}{2}2c(a+b)(a+b)\leq\frac{(2c+a+b+a+b)^3}{2.27}=4,$$

từ đó suy ra $a^2b+b^2c+c^2a+abc\leq 4$, tức là bất đẳng thức ban đầu đã được chứng minh.

Bài toán hoàn tất.□

1.18 Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{25}{27} \le (1-4ab)^2+(1-4bc)^2+(1-4ca)^2 \le 3$$

Lời giải.

1. Chứng minh $(1-4ab)^2+(1-4bc)^2+(1-4ca)^2 \le 3$.

   Trước hết ta có
   $$1 = a+b+c \ge a+b \ge 2\sqrt{ab},$$
   từ đó suy ra $1 \ge 4ab$. Đến đây ta sử dụng giả thiết các biến không âm để có
   $$0 \le 1-4ab \le 1,$$
   từ đó mà $(1-4ab)^2 \le 1$. Thiết lập hai đánh giá tương tự và cộng lại ta có ngay điều phải chứng minh.

2. Chứng minh $(1-4ab)^2+(1-4bc)^2+(1-4ca)^2 \ge \dfrac{25}{27}$.

   Dễ thấy bất đẳng thức trên tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:
   $$3-8(ab+bc+ca)+16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \ge \frac{25}{27},$$
   $$ab+bc+ca-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \le \frac{7}{27}.$$
   Để ý rằng ta có đẳng thức sau
   $$ab-2a^2b^2-\frac{5}{9}\left(ab-\frac{1}{9}\right)-\frac{7}{81} = -2\left(ab-\frac{1}{9}\right)^2,$$
   do đó ta suy ra $ab-2a^2b^2 \le \dfrac{5}{9}\left(ab-\dfrac{1}{9}\right)+\dfrac{7}{81}$. Đến đây ta thiết lập hai đánh giá tương tự và cộng lại để có
   $$ab+bc+ca-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \le \frac{5}{9}\left(ab+bc+ca-\frac{1}{3}\right)-\frac{7}{27}.$$
   Hơn nữa, theo một kết quả quen thuộc ta có $ab+bc+ca \le \dfrac{(a+b+c)^2}{3} = \dfrac{1}{3}$, do vậy ta suy ra
   $$ab+bc+ca-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \le \frac{7}{27},$$
   tức là bất đẳng thức ban đầu đã được chứng minh.

Tóm lại ta đã chứng minh được $\dfrac{25}{27} \le (1-4ab)^2+(1-4bc)^2+(1-4ca)^2 \le 3$. Phép chứng minh hoàn tất.□

1.18 Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+xy+z^2}+\frac{1}{1+yz+x^2}+\frac{1}{1+zx+y^2} \le \frac{9}{5}$$

Lời giải. Đặt $x=\dfrac{1}{a}, y=\dfrac{1}{b}, z=\dfrac{1}{c}$. Khi đó sử dụng giả thiết $xy+yz+zx=1$, ta thấy rằng

$$\frac{1}{1+xy+z^2} = \frac{xy+yz+zx}{x^2+xy+xz+2yz} = \frac{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{2}{bc}}$$
$$= \frac{a(a+b+c)}{2a^2+ab+bc+ca},$$

do đó bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum \frac{a}{2a^2+ab+bc+ca} \le \frac{9}{5(a+b+c)}.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này với $ab+bc+ca$ và chú ý rằng

$$\frac{a(ab+bc+ca)}{2a^2+ab+bc+ca} = a - \frac{2a^3}{2a^2+ab+bc+ca},$$

ta được

$$2\sum \frac{a^3}{2a^2+ab+bc+ca} + \frac{9(ab+bc+ca)}{5(a+b+c)} \ge a+b+c.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum \frac{a^3}{2a^2+ab+bc+ca} &\ge \frac{(\sum a^2)^2}{\sum a(2a^2+ab+bc+ca)} \\ &= \frac{(\sum a^2)^2}{6abc+(\sum a)(2\sum a^2-\sum ab)}.\end{aligned} \tag{1}$$

Mặt khác, từ bất đẳng thức cơ bản $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$, ta lại có

$$3abc \le \frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}. \tag{2}$$

Kết hợp (1) và (2), ta suy ra

$$\begin{aligned}\sum \frac{a^3}{2a^2+ab+bc+ca} &\ge \frac{(\sum a^2)^2(\sum a)}{2(\sum ab+bc+ca)^2+(\sum a)^2(2\sum a^2-\sum ab)}. \\ &= \frac{(\sum a^2)(\sum a)}{2\sum a^2+3\sum ab}.\end{aligned}$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)} + \frac{9(ab+bc+ca)}{5(a+b+c)} \ge a+b+c.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được bất đẳng thức hiển nhiên đúng

$$(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \ge 0.$$

Bài toán được chứng minh xong.□

1.19 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng:
$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq 1$$

Lời giải 1. Bất đẳng thức cần chứng minh mang tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó $a+b-c \geq 0$ và $c+a-b \geq 0$.

Nếu $b+c-a < 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng do $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq 0 < 1$. Do đó ta chỉ cần giải quyết bài toán trong trường hợp $b+c-a \geq 0$. Lúc này ta đặt $x = b+c-a, y = c+a-b, z = a+b-c$. Khi đó ta viết lại điều kiện như sau

$$x, y, z \geq 0; \qquad x+y+z = \frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x},$$

và ta cần chứng minh

$$xyz \leq 1.$$

Ta sẽ giải quyết bài toán bằng phương pháp phản chứng. Thật vậy, giả sử rằng $xyz > 1$. Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta suy ra

$$x+y+z = \frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}},$$

hay $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geq \sqrt{xyz}(x+y+z)$. Hơn nữa, ta cũng có $xyz > 1$ nên

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} > x+y+z.$$

Tuy nhiên theo bất đẳng thức AM-GM, ta lại có $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$. Ta thiết lập thêm hai đánh giá tương tự nữa để có

$$\frac{x+y+z+3}{2} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} > x+y+z,$$

hay $x+y+z < 3$. Nhưng đây là một đánh giá sai vì theo một kết quả quen thuộc, ta có

$$x+y+z = \frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z},$$

dẫn tới $x+y+z \geq 3$. Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử ban đầu là sai, do vậy $xyz \leq 1$.

Phép chứng minh hoàn tất.□

Lời giải 2. Bất đẳng thức cần chứng minh mang tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó $a+b-c \geq 0$ và $c+a-b \geq 0$.

Nếu $b+c-a < 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng do $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq 0 < 1$. Do đó ta chỉ cần giải quyết bài toán trong trường hợp $b+c-a \geq 0$. Lúc này ta đặt $x = b+c-a, y = c+a-b, z = a+b-c$. Khi đó ta viết lại điều kiện như sau

$$x, y, z \geq 0; \qquad x+y+z = \frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x},$$

và ta cần chứng minh

$$xyz \leq 1.$$

Ta sẽ giải quyết bài toán bằng phương pháp phản chứng. Thật vậy, giả sử rằng $xyz > 1$. Khi đó, từ giả thiết, ta suy ra

$$(x+y+z)^2(xy+yz+zx) = 2(x+y+z)^2 + 2(xy+yz+zx) + xyz(x+y+z). \qquad (*)$$

Tuy nhiên, theo bất đẳng thức AM-GM và theo điều giả sử ở trên, ta có các đánh giá

$$xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} > 3,$$

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} > 3,$$

do vậy ta suy ra

$$\frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{3} > 2(x+y+z)^2,$$
$$\frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{9} > 2(xy+yz+zx),$$
$$\frac{(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{9} > xyz(x+y+z).$$

Cộng vế theo vế các đánh giá trên lại, ta được

$$(x+y+z)^2(xy+yz+zx) > 2(x+y+z)^2 + 2(xy+yz+zx) + xyz(x+y+z),$$

trái với $(*)$. Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử ban đầu là sai, do vậy $xyz \leq 1$.

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.20 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{5a^2+ab+bc} + \frac{1}{5b^2+bc+ca} + \frac{1}{5c^2+ca+ab} \geq \frac{3}{7}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\frac{1}{5a^2+ab+bc} + \frac{1}{5b^2+bc+ca} + \frac{1}{5c^2+ca+ab} = \sum_{cyc} \frac{(b+c)^2}{(b+c)^2(5a^2+ab+bc)}$$
$$\geq \frac{4(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}(b+c)^2(5a^2+ab+bc)}.$$

Theo đó, ta cần chứng minh rằng

$$\frac{4(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}(b+c)^2(5a^2+ab+bc)} \geq \frac{3}{7}.$$

Sử dụng giả thiết $a+b+c=3$, ta thấy rằng bất đẳng thức trên tương đương với

$$28(a+b+c)^4 \geq 27[\sum_{cyc}(b+c)^2(5a^2+ab+bc)].$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được

$$28\sum a^4 + 58\sum_{cyc} a^3b + 85\sum_{cyc} ab^3 \geq 156\sum a^2b^2 + 15abc(a+b+c).$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, trước hết ta chú ý đến các đánh giá cơ bản sau (thu được bằng bất đẳng thức AM-GM):

$$\sum_{cyc} a^3b + \sum_{cyc} ab^3 \geq 2\sum a^2b^2,$$

$$\sum a^4 + \sum_{cyc} ab^3 \geq \sum_{cyc} a^3b + \sum_{cyc} ab^3 \geq 2\sum a^2b^2,$$

$$\sum a^4 \geq \sum a^2b^2 \geq abc(a+b+c).$$

Từ đó ta suy ra

$$58\sum_{cyc} a^3b + 58\sum_{cyc} ab^3 \geq 116\sum a^2b^2,$$

$$27\sum a^4 + 27\sum_{cyc} ab^3 \geq 54\sum a^2b^2,$$

$$\sum a^4 + 14\sum a^2b^2 \geq 15abc(a+b+c).$$

Cộng vế theo vế các đánh giá trên, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

1.21 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{2a^2+bc} + \frac{c+a}{2b^2+ca} + \frac{a+b}{2c^2+ab} \geq \frac{6}{a+b+c}$$

Lời giải. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức cho $4(a+b+c)$, ta được

$$\frac{4(b+c)(a+b+c)}{2a^2+bc} + \frac{4(c+a)(a+b+c)}{2b^2+ca} + \frac{4(a+b)(a+b+c)}{2c^2+ab} \geq 24.$$

Do $\dfrac{4(b+c)(a+b+c)}{2a^2+bc} = \dfrac{(a+2b+2c)^2}{2a^2+bc} - \dfrac{a^2}{2a^2+bc}$ nên ta có

$$\sum \frac{(a+2b+2c)^2}{2a^2+bc} \geq 24 + \sum \frac{a^2}{2a^2+bc}.$$

Bất đẳng thức này được suy ra bằng cách cộng hai bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1,$$

$$\frac{(a+2b+2c)^2}{2a^2+bc} + \frac{(b+2c+2a)^2}{2b^2+ca} + \frac{(c+2c+2b)^2}{2c^2+ab} \geq 25.$$

Do $\dfrac{a^2}{2a^2+bc} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{bc}{2(2a^2+bc)}$ nên bất đẳng thức thứ nhất tương đương với

$$\frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} + \frac{ab}{2c^2+ab} \geq 1,$$

đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

$$\sum \frac{bc}{2a^2+bc} \geq \frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum bc(2a^2+bc)} = 1.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức thứ hai. Đây là bất đẳng thức đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $c = min\{a, b, c\}$. Đặt $t = \dfrac{b+c}{2}$, ta sẽ chứng minh

$$\frac{(a+2b+2c)^2}{2a^2+bc} + \frac{(b+2c+2a)^2}{2b^2+ca} \geq \frac{2(3t+2c)^2}{2t^2+tc}. \quad (*)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\frac{(a+2b+2c)^2}{2a^2+bc} + \frac{(b+2c+2a)^2}{2b^2+ca} &\geq \frac{[b(a+2b+2c)+a(b+2c+2a)]^2}{b^2(2a^2+bc)+a^2(2b^2+ca)} \\ &= \frac{2(4t^2-ab+2tc)^2}{2a^2b^2-3abtc+4t^3c}.\end{aligned}$$

Vì $tc \leq ab \leq t^2$ nên

$$2a^2b^2 - 3abtc - (2t^4 - 3t^3c) = -(t^2-ab)(2t^2+2ab-3tc) \leq 0,$$

từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned}\frac{(a+2b+2c)^2}{2a^2+bc} + \frac{(b+2c+2a)^2}{2b^2+ca} \geq \frac{2(4t^2-ab+2tc)^2}{2a^2b^2-3abtc+4t^3c} &\geq \frac{2(3t^2+2tc)^2}{2t^4-3t^3c+4t^3c} \\ &= \frac{2(3t+2c)^2}{2t^2+tc}.\end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\frac{(c+2c+2b)^2}{2c^2+ab} \geq \frac{(4t+c)^2}{t^2+2c^2}. \quad (**)$$

Kết hợp hai đánh giá $(*)$ và $(**)$, ta đưa bài toán về việc chứng minh

$$\frac{2(3t+2c)^2}{2t^2+tc} + \frac{(4t+c)^2}{t^2+2c^2} \geq 25.$$

Sau khi thu gọn, ta được bất đẳng thức hiển nhiên đúng

$$\frac{c(31t+16c)(t-c)^2}{t(2t+c)(t^2+2c^2)} \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong.□

1.22 Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{d^2+1} + \frac{d}{a^2+1} \geq \frac{4(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}+d\sqrt{d})^2}{5}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{d^2+1} + \frac{d}{a^2+1} &= \frac{a^3}{a^2b^2+a^2} + \frac{b^3}{b^2c^2+b^2} + \frac{c^3}{c^2d^2+c^2} + \frac{d^3}{d^2a^2+d^2} \\ &\geq \frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}+d\sqrt{d})^2}{a^2+b^2+c^2+d^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+a^2d^2}.\end{aligned}$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$a^2+b^2+c^2+d^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+a^2d^2 \le \frac{5}{4},$$

hay $(a^2+c^2)(b^2+d^2) \le \frac{1}{4}$. Tuy nhiên đây lại là đánh giá đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM:

$$(a^2+c^2)(b^2+d^2) \le \frac{(a^2+c^2+b^2+d^2)^2}{4} = \frac{1}{4},$$

do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

1.23 Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[0,1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1+y^3}}+\frac{y}{\sqrt[3]{1+z^3}}+\frac{z}{\sqrt[3]{1+x^3}} \le \frac{3}{\sqrt[3]{1+xyz}}$$

Lời giải. Do $x,y,z \in [0,1]$ nên ta có

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1+y^3}}+\frac{y}{\sqrt[3]{1+z^3}}+\frac{z}{\sqrt[3]{1+x^3}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{1+y^3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+z^3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

Để ý rằng theo bất đẳng thức Holder, ta được đánh giá sau với mọi số thực dương a,b,c:

$$(a+b+c)^3 \le 9(a^3+b^3+c^3),$$

hay $(a+b+c) \le \sqrt[3]{9(a^3+b^3+c^3)}$. Sử dụng đánh giá này, ta có

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+y^3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+z^3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} \le \sqrt[3]{9\left(\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)}.$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+z^3} \le \frac{3}{1+xyz}. \qquad (*)$$

Để ý rằng với hai số thực a,b thay đổi trong đoạn $[0,1]$ ta luôn có

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}-\frac{2}{1+ab} = \frac{(ab-1)(a-b)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \le 0.$$

Sử dụng đánh giá này, ta được

$$\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}+\frac{1}{1+xyz} \le \frac{2}{1+\sqrt{x^3y^3}}+\frac{2}{1+\sqrt{z^4xy}} \le \frac{4}{1+xyz}.$$

Do vậy đánh giá $(*)$ được chứng minh, dẫn đến bất đẳng thức ban đầu đúng.

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.24 Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

Lời giải 1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz, ta có

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Phép chứng minh hoàn tất. □

Lời giải 2. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương, ta có

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq a.$$

Cộng vế theo vế đánh giá này với hai đánh giá tương tự khác, ta được:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\geq a+b+c,$$

từ đó ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

Lời giải 3. Bất đẳng thức ban đầu mang tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử $a\geq b\geq c$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{a+c}\geq\frac{1}{a+b}.$$

Như vậy, theo bất đẳng thức Chebyshev, ta có

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{3}.(a^2+b^2+c^2).(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}).$$

Đến đây ta áp dụng hai đánh giá cơ bản $x^2+y^2+z^2\geq\frac{(x+y+z)^2}{3}$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}$ để có

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{3}.\frac{(a+b+c)^2}{3}.\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.25 Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[4]{3+a^4}+\sqrt[4]{3+b^4}+\sqrt[4]{3+c^4}\geq\sqrt[4]{108(a+b+c)}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$(1+3)(1+3)(1+3)(a^4+3)\geq(a+3)^4,$$

từ đó suy ra $\sqrt[4]{3+a^4}\geq\frac{3+a}{\sqrt[4]{64}}$. Thiết lập các đánh giá tương tự và cộng lại, ta được

$$\sqrt[4]{3+a^4}+\sqrt[4]{3+b^4}+\sqrt[4]{3+c^4}\geq\frac{9+a+b+c}{\sqrt[4]{64}}.$$

Hơn nữa, theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$9+a+b+c=3+3+3+(a+b+c)\geq 4\sqrt[4]{27(a+b+c)},$$

như vậy

$$\sqrt[4]{3+a^4}+\sqrt[4]{3+b^4}+\sqrt[4]{3+c^4}\geq \frac{4\sqrt[4]{27(a+b+c)}}{\sqrt[4]{64}}=\sqrt[4]{108(a+b+c)}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.26 Cho a, b là các số thực dương thoả mãn $ab \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\geq \frac{2}{1+ab}$$

Lời giải. Thực hiện phép biến đổi tương đương, ta thu được dãy các đánh giá sau:

$$\frac{2+a^2+b^2}{a^2b^2+a^2+b^2+1}\geq \frac{2}{1+ab},$$

$$2+2ab+a^3b+b^3a+a^2+b^2-2a^2b^2-2a^2-2b^2-2\geq 0,$$

$$(ab-1)(a-b)^2\geq 0.$$

Đánh giá cuối cùng đúng do $ab \geq 1$, do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

1.27 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{c+ab}{a+b}+\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ac}{a+c}\geq 2$$

Lời giải. Để ý rằng ta có

$$c+ab=c(a+b+c)+ab=(c+a)(c+b),$$

do vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}+\frac{(b+a)(b+c)}{a+c}+\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}\geq 2.$$

Áp dụng đánh giá cơ bản $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, ta thấy đánh giá trên đúng do

$$\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}+\frac{(b+a)(b+c)}{a+c}+\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}\geq b+c+a+b+c+a=2.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.28 Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $2x+3y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=x^3+y^3+z^3$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\begin{aligned}P(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1)^2&=(x^3+y^3+z^3)(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1)(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1)\\&\geq (2x+3y+z)^3=1.\end{aligned}$$

Như vậy $P \geq \dfrac{1}{(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1)^2}$.

Cuối cùng, với $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1}, y = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1}$ và $z = \dfrac{1}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1}$ (thoả mãn điều kiện) thì $P = \dfrac{1}{(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1)^2}$ nên ta kết luận $\dfrac{1}{(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1)^2}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Bài toán kết thúc.□

1.29 Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $a^2+ab+b^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a^2 - ab - 3b^2$$

Lời giải. Với $b=0$ thì từ giả thiết ta suy ra $a^2=3$, từ đó biểu thức P có giá trị là 3.

Với $b \neq 0$, xét biểu thức

$$Q = \frac{P}{3} = \frac{a^2-ab-3b^2}{a^2+ab+b^2} = \frac{x^2-x-3}{x^2+x+1},$$

trong đó $x = \dfrac{a}{b}$. Từ đây ta suy ra

$$(Q-1)x^2 + (Q+1)x + Q + 3 = 0.$$

Coi đó là một phương trình theo ẩn x. Xét biệt thức của phương trình trên, ta thấy rằng để phương trình trên có nghiệm thì

$$(Q+1)^2 - 4(Q-1)(Q+3) \geq 0,$$

từ đây ta suy ra $\dfrac{-3-4\sqrt{3}}{3} \leq Q \leq \dfrac{-3+4\sqrt{3}}{3}$. Hơn nữa, do $P=3Q$ nên ta có

$$-3-4\sqrt{3} \leq P \leq -3+4\sqrt{3}.$$

Cuối cùng, với $a = -\sqrt{2-\sqrt{3}}$ và $b = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ thì $P = -3-4\sqrt{3}$; với $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ và $b = -\sqrt{2-\sqrt{3}}$ thì $P = -3+4\sqrt{3}$ nên ta kết luận $-3-4\sqrt{3}$ và $-3+4\sqrt{3}$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Bài toán kết thúc.□

1.30 Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $a^2+2b^2=3c^2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{3}{c}$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta suy ra $(3c)^2 = (a^2+2b^2)(1+2)$. Từ đây ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz để có

$$(3c)^2 \geq (a+2b)^2,$$

từ đó suy ra $3c \geq a+2b$. $(*)$

Hơn nữa, cũng theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{a+2b}. \qquad (**)$$

Kết hợp hai đánh giá $(*)$ và $(**)$, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

1.31 Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = xy + yz + zx + \frac{5}{x + y + z}$$

Lời giải. Để ý rằng

$$P = \frac{(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2} + \frac{5}{x+y+z} = \frac{(x+y+z)^2}{2} + \frac{5}{x+y+z} - \frac{3}{2},$$

từ đó đặt $t = x + y + z$, ta đưa bài toán về việc tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = t^2 + \frac{10}{t}.$$

Để ý rằng từ đánh giá $x^2 + y^2 + z^2 \le (x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$, ta suy ra $\sqrt{3} \le t \le 3$, do vậy

$$t^2 + \frac{10}{t} - \frac{37}{3} = \frac{(t-3)(3t^2 + 9t - 10)}{3t} \le 0.$$

Như vậy $Q \le \dfrac{37}{3}$, và vì $P = \dfrac{Q}{2} - \dfrac{3}{2}$ nên

$$P \le \frac{37}{6} - \frac{3}{2} = \frac{14}{3}.$$

Cuối cùng, với $x = y = z = 1$ (thoả mãn điều kiện) thì $P = \dfrac{14}{3}$ nên ta kết luận $\dfrac{14}{3}$ là giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Bài toán kết thúc.□

1.32 Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $2y > x$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^3(2y - x)} + x^2 + y^2 \ge 3$$

Lời giải. Ta thấy rằng

$$\frac{1}{x^3(2y-x)} + x^2 + y^2 = \frac{1}{x^2(2xy - x^2)} + +x^2 + (y^2 + x^2 - x^2),$$

và vì $x^2 + y^2 \ge 2xy$ theo bất đẳng thức AM-GM nên

$$\frac{1}{x^3(2y-x)} + x^2 + y^2 \ge \frac{1}{x^2(2xy - x^2)} + x^2 + (2xy - x^2).$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM một lần nữa để có

$$\frac{1}{x^3(2y-x)} + x^2 + y^2 \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2(2xy - x^2)}.x^2.(2xy - x^2)} = 3.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.33 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $ab + bc + ca = 2abc$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a(2a-1)^2} + \frac{1}{b(2b-1)^2} + \frac{1}{c(2c-1)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Lời giải. Đặt $m = \frac{1}{a}; n = \frac{1}{b}; p = \frac{1}{c}$. Khi đó điều kiện đã cho tương đương với $m + n + p = 2$ (để ý rằng từ đây ta có $m, n, p < 2$), và bất đẳng thức đã cho được viết lại thành

$$\frac{m^3}{(2-m)^2} + \frac{n^3}{(2-n)^2} + \frac{p^3}{(2-p)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{m^3}{(2-m)^2} + \frac{2-m}{8} + \frac{2-m}{8} \geq \frac{3m}{4},$$

từ đó suy ra $\frac{m^3}{(2-m)^2} \geq m - \frac{1}{2}$. Thiết lập hai đánh giá tương tự cho n và p và cộng lại, ta được

$$\frac{m^3}{(2-m)^2} + \frac{n^3}{(2-n)^2} + \frac{p^3}{(2-p)^2} \geq m + n + p - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.$\square$

1.34 Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + 2b + 3c = 4$. Chứng minh rằng:
$$(a^2b + b^2c + c^2a + abc)(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc) \leq 8$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}8(a^2b + b^2c + c^2a + abc)(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc) &= 4(a^2b + b^2c + c^2a + abc).2(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc)\\ &\leq (a^2b + b^2c + c^2a + 2ab^2 + 2bc^2 + 2ca^2 + 3abc)^2.\end{aligned}$$

Hơn nữa, ta cũng có

$$\begin{aligned}(a+2b)(b+2c)(c+2a) &= 9abc + 2a^2b + 2ac^2 + 4a^2c + 2b^2c + 4b^2a + 4c^2b\\ &\geq 2(a^2b + b^2c + c^2a + 2ab^2 + 2bc^2 + 2ca^2 + 3abc),\end{aligned}$$

do vậy $8(a^2b + b^2c + c^2a + abc)(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc) \leq \left[\frac{(a+2b)(b+2c)(c+2a)}{2}\right]^2$. Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$4(a+2b)(b+2c)(c+2a) = (a+2b)(4b+8c)(c+2a) \leq \left[\frac{3a+6b+9c}{3}\right]^3 = (a+2b+3c)^3 = 64.$$

Như vậy, ta suy ra

$$8(a^2b + b^2c + c^2a + abc)(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc) \leq \left[\frac{64}{4.2}\right]^2 = 64,$$

hay $(a^2b + b^2c + c^2a + abc)(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc) \leq 8$.

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.35 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:
$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ac}{c+3a+2b}\le\frac{a+b+c}{6}$$

Lời giải. Sử dụng đánh giá cơ bản $\dfrac{9}{x+y+z}\le\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$, ta có
$$\frac{9}{a+3b+2c}=\frac{9}{(a+c)+(b+c)+2b}\le\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}.$$

Từ đó ta suy ra $\dfrac{9ab}{a+3b+2c}\le\dfrac{ab}{a+c}+\dfrac{ab}{b+c}+\dfrac{a}{2}$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có
$$\frac{9bc}{b+3c+2a}\le\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}+\frac{b}{2},$$
và
$$\frac{9ca}{c+3a+2b}\le\frac{ca}{c+b}+\frac{ca}{a+b}+\frac{c}{2}.$$

Cộng vế theo vế các đánh giá trên, ta thu được
$$\begin{aligned}\frac{9ab}{a+3b+2c}+\frac{9bc}{b+3c+2a}+\frac{9ca}{c+3a+2b}&\le\frac{ca+ab}{b+c}+\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{bc+ca}{b+a}+\frac{a+b+c}{2}\\&=\frac{3(a+b+c)}{2},\end{aligned}$$

từ đây ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

1.36 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a+b+4}+\frac{1}{b+c+4}+\frac{1}{c+a+4}\le\frac{1}{2}$$

Lời giải 1. Đặt $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$. Khi đó ta phải chứng minh
$$\frac{1}{x^2+y^2+4}+\frac{1}{y^2+z^2+4}+\frac{1}{z^2+x^2+4}\le\frac{1}{2}$$

với $x, y, z>0$ và $xyz=1$.

Do $\dfrac{1}{x^2+y^2+4}=1-\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+4}=1-\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2(x^2+y^2+4)}$ nên bất đẳng thức này có thể được viết lại thành
$$\sum\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+4}+\sum\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2+4}\ge 2.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x\ge y\ge z$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có
$$\sum\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+4}\ge\frac{[(x+y)+(y+z)+(z+x)]^2}{\sum(x^2+y^2+4)},$$

và
$$\sum\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2+4}\ge\frac{[x-y+y-z+x-z]^2}{\sum(x^2+y^2+4)}.$$

Từ đây ta đưa bài toán về chứng minh

$$2(x+y+z)^2+2(x-z)^2 \geq 2(x^2+y^2+z^2)+12,$$

hay $2(x-z)^2+4(xy+yz+zx-3) \geq 0$. Tuy nhiên đây lại là đánh giá đúng do $(x-z)^2 \geq 0$ và theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3,$$

do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

Lời giải 2. Đặt $x=\sqrt[3]{a}, y=\sqrt[3]{b}, z=\sqrt[3]{c}$. Khi đó $x,y,z>0$; $xyz=1$ và ta cần chứng minh

$$\frac{1}{x^3+y^3+4}+\frac{1}{y^3+z^3+4}+\frac{1}{z^3+x^3+4} \leq \frac{1}{2}$$

Với chú ý ta có đánh giá $x^3+y^3 \geq xy(x+y)$, đồng thời lại có $4=4xyz$, ta đưa bài toán về việc chứng minh

$$\frac{1}{xy(x+y+4z)}+\frac{1}{yz(y+z+4x)}+\frac{1}{zx(z+x+4y)} \leq \frac{1}{2},$$

hay

$$\frac{x+y}{x+y+4z}+\frac{y+z}{y+z+4x}+\frac{z+x}{z+x+4y} \geq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz, ta có

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{x+y+4z}+\frac{y+z}{y+z+4x}+\frac{z+x}{z+x+4y} &\geq \frac{4(x+y+z)^2}{\sum(x+y)(x+y+4z)}\\ &= \frac{4(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+10(xy+yz+zx)},\end{aligned}$$

như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$4(x+y+z)^2 \geq 2(x^2+y^2+z^2)+10(xy+yz+zx),$$

hay $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$. Tuy nhiên đây lại là một đánh giá đúng, do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

1.37 Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a} \leq \frac{1}{abc}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\right)^3 &\leq \left(\frac{1}{a}+6b+\frac{1}{b}+6c+\frac{1}{c}+6a\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}.3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}.3\right)\\ &= 9\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+6a+6b+6c\right). \qquad (*)\end{aligned}$$

Hơn nữa, sử dụng đánh giá cơ bản $xy + yz + zx \le \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$, ta có

$$abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+6a+6b+6c\right) = ab+bc+ca+6abc(a+b+c)$$
$$\le ab+bc+ca+2(ab+bc+ca)^2 = 3,$$

do vậy $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+6a+6b+6c \le \dfrac{3}{abc}$. Kết hợp với đánh giá $(*)$ ở trên, ta được

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\right)^3 \le \frac{27}{abc},$$

từ đó ta lấy căn bậc ba hai vế để thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

1.38 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+a+c} \le 1$$

Lời giải. Đặt $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$. Khi đó ta phải chứng minh

$$\frac{1}{x^2+y^2+1}+\frac{1}{y^2+z^2+1}+\frac{1}{z^2+x^2+1} \le 1$$

với $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$.

Do $\dfrac{1}{x^2+y^2+1} = 1 - \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} = 1 - \dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2(x^2+y^2+1)}$ nên bất đẳng thức này có thể được viết lại thành

$$\sum \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1} + \sum \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2+1} \ge 4.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \ge y \ge z$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\sum \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1} \ge \frac{[(x+y)+(y+z)+(z+x)]^2}{\sum(x^2+y^2+1)},$$

và

$$\sum \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2+1} \ge \frac{[x-y+y-z+x-z]^2}{\sum(x^2+y^2+1)}.$$

Từ đây ta đưa bài toán về chứng minh

$$(x+y+z)^2+(x-z)^2 \ge 2(x^2+y^2+z^2)+3.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$3 = 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le xy+yz+zx,$$

do vậy ta chỉ còn phải chứng minh

$$(x+y+z)^2+(x-z)^2 \ge 2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx.$$

Sau khi thu gọn, ta được bất đẳng thức hiển nhiên đúng

$$(x-y)(y-z) \geq 0.$$

Bài toán do đó được chứng minh xong.□

1.39 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b^3}{c(a+2)} + \frac{c^3}{a(b+2)} \geq 1$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b}{3} + \frac{c+2}{9} \geq a.$$

Lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng lại, ta được

$$\frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b^3}{c(a+2)} + \frac{c^3}{a(b+2)} + \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b+c+6}{9} \geq a+b+c,$$

hay

$$\frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b^3}{c(a+2)} + \frac{c^3}{a(b+2)} \geq \frac{5(a+b+c)}{9} - \frac{2}{3}.$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức AM-GM thì $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$, do vậy

$$\frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b^3}{c(a+2)} + \frac{c^3}{a(b+2)} \geq \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

1.40 Cho a, b, c là các số thực không âm thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:
$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Lời giải. Bất đẳng thức ban đầu mang tính đối xứng giữa các biến, nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = max\{a; b; c\}$. Khi đó thực hiện biến đổi tương đương, ta thu được dãy bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh

$$a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0,$$

$$(a-b)(a^2 - ac - b^2 + bc) + c(a-c)(b-c) \geq 0,$$

$$(a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \geq 0.$$

Đánh giá cuối cùng đúng do $a = max\{a; b; c\}$, do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

3.2 Bài 2.1 đến bài 2.40

2.1 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Lời giải. Bất đẳng thức ban đầu tương đương với

$$(a+b+c)\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right]\geq \frac{9}{4}.$$

Đặt $k=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$. Ta thấy rằng

$$(a+b+c)\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right]=\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b},$$

và theo một đánh giá quen thuộc thì $\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}\geq \frac{k^2}{3}$, do vậy

$$(a+b+c)\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right]\geq \frac{k^2}{3}+k$$

Ta lại có chú ý rằng $k\geq \frac{3}{2}$ theo bất đẳng thức Nesbitt, do đó

$$(a+b+c)\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right]\geq \frac{9}{4.3}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

2.2 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ab}}.$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ab}&=\sqrt{a}\sqrt{a^3+8abc}+\sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}\sqrt{c^3+8abc}\\&\leq \sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)},\end{aligned}$$

do vậy

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}&\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)}}\\&=\sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc}}.\end{aligned}$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc,$$

hay $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$. Tuy nhiên đây là một đánh giá đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca} = 8abc,$$

do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

2.3 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn đồng thời $c \geq a$ và $3a^2+4b^2+5c^2 = 12$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta có

$$4a^2+4b^2+4c^2 = 12+a^2-c^2 \leq 12,$$

như vậy $a^2+b^2+c^2 \leq 3$. Từ đây ta cũng có

$$a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \leq 3,$$

và vì vậy ta chứng minh được bất đẳng thức ban đầu vì

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \geq \frac{9}{3} = 3.$$

Bài toán kết thúc.□

2.4 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a+c}{b+c}+\frac{b+a}{c+a}+\frac{c+b}{a+b}$$

Lời giải 1. Đặt

$$X = \frac{1+\dfrac{a}{b}}{2}, \quad Y = \frac{1+\frac{b}{c}}{2}, \quad Z = \frac{1+\frac{c}{a}}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta thu được

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq \left(1+\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}\right)^3 = 8,$$

từ đó ta suy ra $XYZ \geq 1$.

Bây giờ ta thực hiện biến đổi bất đẳng thức đã cho như sau

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}\right)+\left(\frac{b}{c}-\frac{b+a}{c+a}\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{c+b}{a+b}\right) \geq 0,$$

$$\frac{c(a-b)}{b(b+c)}+\frac{a(b-c)}{c(c+a)}+\frac{b(c-a)}{a(a+b)} \geq 0,$$

Xuctu.com®

$$\frac{\frac{a}{b}-1}{1+\frac{b}{c}}+\frac{\frac{b}{c}-1}{1+\frac{c}{a}}+\frac{\frac{c}{a}-1}{1+\frac{a}{b}}\ge 0.$$

Để ý rằng

$$\frac{\frac{a}{b}-1}{1+\frac{b}{c}}=\frac{2X-1-1}{2Y}=\frac{X-1}{Y},$$

do vậy bất đẳng thức cuối có thể viết lại thành

$$\frac{X-1}{Y}+\frac{Y-1}{Z}+\frac{Z-1}{X}\ge 0,$$

tương đương

$$\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}\ge \frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}3\sum\frac{X}{Y}&=\sum\left(\frac{X}{Y}+\frac{X}{Y}+\frac{Z}{X}\right)\\&\ge 3\sum\sqrt[3]{\frac{ZX}{Y^2}}=3\sqrt[3]{XYZ}\sum\frac{1}{Y}=3\sum\frac{1}{Y}.\end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

Lời giải 2. Thực hiện biến đổi tương tự như cách 1, ta cần chứng minh

$$\frac{c(a-b)}{b(b+c)}+\frac{a(b-c)}{c(c+a)}+\frac{b(c-a)}{a(a+b)}\ge 0.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử b là số nằm giữa a và c. Khi đó $(b-a)(b-c)\le 0$. Để ý rằng

$$b(c-a)=-c(a-b)-a(b-c),$$

vì vậy bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$c(a-b)\left[\frac{1}{b(b+c)}-\frac{1}{a(a+b)}\right]+a(b-c)\left[\frac{1}{c(c+a)}-\frac{1}{a(a+b)}\right]\ge 0,$$

tương đương

$$\frac{c[(a-b)^2(a+b)+b(a-b)(a-c)]}{ab(a+b)(b+c)}+\frac{[(b-c)(a-c)(a+c)+a(b-c)^2]}{c(c+a)(a+b)}\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối này đúng do

$$(a-b)(a-c)=(a-b)^2-(b-a)(b-c)\ge 0,$$

và

$$(b-c)(a-c)=(b-c)^2-(b-a)(b-c)\ge 0,$$

do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

Nhận xét.

1. Lưu ý rằng bất đẳng thức sau đúng với a, b, c và k là các số thực dương:
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{ka+c}{kb+c}+\frac{kb+c}{kc+a}+\frac{kc+b}{ka+b}.$$
Với $k=1$, ta thu được bài toán trên.

2. Riêng với trường hợp $k=1$, ta có thể chứng minh bài toán dựa trên bất đẳng thức sau (đây là một bài trong Belarusian Mathematical Olympiad 1998): *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1.$$
Việc chứng minh cũng như áp dụng xin để dành cho bạn đọc.

2.5 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với
$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c} \geq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=9.$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có
$$a^2+2\sqrt{a} \geq 3a.$$
Lập các bất đẳng thức tương tự và cộng lại, ta được
$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c} \geq 3(a+b+c)=9.$$
Phép chứng minh hoàn tất.$\square$

2.6 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{abc}+\frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có
$$\begin{aligned}\frac{1}{abc}+\frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} &= \frac{1}{2abc}+\frac{1}{2abc}+\frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2(a+b)(b+c)(c+a)}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc(ab+ac)(bc+ba)(ca+cb)}}.\end{aligned}$$
Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM, ta có hai đánh giá:
$$a^2b^2c^2 \leq \frac{(ab+bc+ca)^3}{27},$$
và
$$(ab+bc)(bc+ca)(ca+ab) \leq \frac{8(ab+bc+ca)^3}{27},$$

từ đó sử dụng giả thiết ta suy ra $abc \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ và $(ab+bc)(bc+ca)(ca+ab) \leq \dfrac{8}{27}$. Do vậy

$$\frac{1}{abc} + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 3\sqrt[3]{\frac{27.3\sqrt{3}}{8}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

2.7 Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $x+y+z=0$, trong đó có hai số cùng dấu. Chứng minh rằng:

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{(x^3+y^3+z^3)^2} \geq 6$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử x, y là hai số cùng dấu, tức là $xy \geq 0$. Với điều kiện $z=-x-y$, ta có

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{(x^3+y^3+z^3)^2} = \frac{8(x^2+y^2+xy)^3}{9x^2y^2(x+y)^2}.$$

Như vậy, nếu ta đặt $x^2+y^2=m$ và $xy=n$ (để ý rằng $m \geq 2n$) thì ta cần chứng minh

$$\frac{8(m+n)^3}{9n^2(m+2n)} \geq 6,$$

hay

$$4m^3+4n^3+12m^2n+12n^2m \geq 27n^2m+54n^3.$$

Bất đẳng thức trên mang tính thuần nhất giữa các biến, do đó ta cho $n=1$, lúc này $m \geq 2$ và ta cần chứng minh

$$4m^3+12m^2-15m-50 \geq 0.$$

Tuy nhiên bằng biến đổi tương đương, ta được $(m-2)\left(m-\dfrac{5}{2}\right)^2 \geq 0$. Đây là một đánh giá đúng do $m \geq 2$, do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

2.8 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi trong đoạn $[0,1]$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq 1$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \sqrt{(a+1-a)[bc+(1-b)(1-c)]} = \sqrt{2bc-b-c+1}.$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$2bc \leq b+c.$$

Tuy nhiên đây là một đánh giá đúng vì theo giả thiết và bất đẳng thức AM-GM thì

$$2bc \leq 2\sqrt{bc} \leq b+c,$$

do đó bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

2.9 Cho a, b, c là các số thực không âm thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:
$$2\sqrt{(ab+bc+ca)} \leq \sqrt{3}.\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Lời giải. Để ý rằng ta có đẳng thức

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc.$$

Mặt khác, theo các đánh giá quen thuộc, ta có

$$a+b+c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)},$$

và

$$abc \leq \sqrt{\frac{(ab+bc+ca)^3}{27}},$$

do vậy

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &\geq (ab+bc+ca)\sqrt{3(ab+bc+ca)} - \sqrt{\frac{(ab+bc+ca)^3}{27}}\\ &= \frac{8\sqrt{(ab+bc+ca)^3}}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Từ đây, lấy căn bậc ba hai vế, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

2.10 Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2+b^2}{a^2-2ab+b^2} + \frac{a^2+c^2}{a^2-2ac+c^2} + \frac{b^2+c^2}{b^2-2bc+c^2} \geq \frac{5}{2}$$

Lời giải. Dãy bất đẳng thức sau tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2+(b-c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2+(c-a)^2}{(c-a)^2} \geq 5,$$

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2.$$

Đặt $x = \dfrac{a+b}{a-b}, y = \dfrac{b+c}{b-c}, z = \dfrac{c+a}{c-a}$. để ý rằng ta có đẳng thức

$$\begin{aligned}xy+yz+zx &= \frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)} + \frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)} + \frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)}\\ &= \frac{(a+b)(b+c)(c-a)+(b+c)(c+a)(a-b)+(c+a)(a+b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1\end{aligned}$$

Hơn nữa, ta cũng có $(x+y+z)^2 \geq 0$, do vậy

$$x^2+y^2+z^2 \geq -2(xy+yz+zx) = 2.$$

Từ đây ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

2.11 Cho a, b là các số thực không âm thoả mãn $a+b \leq \dfrac{4}{5}$. Chứng minh rằng:
$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}-1 \leq \sqrt{\frac{1-a-b}{1+a+b}}$$

Lời giải. Dãy bất đẳng thức sau là tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{1-a}{1+a}+\frac{1-b}{1+b}+2\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}} \leq \frac{1-a-b}{1+a+b}+1+2\sqrt{\frac{1-a-b}{1+a+b}},$$

$$\frac{2(1-ab)}{1+ab+a+b}+2\sqrt{\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}} \leq \frac{2}{1+a+b}+2\sqrt{\frac{1-a-b}{1+a+b}}.$$

Đặt $u=ab; v=a+b$. Khi đó $u, v \geq 0$ và ta cần chứng minh

$$\frac{2(1-u)}{1+u+v}+2\sqrt{\frac{1+u-v}{1+u+v}} \leq \frac{2}{1+v}+2\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}.$$

Thực hiện biến đổi tương đương, ta được dãy bất đẳng thức sau

$$\frac{1+u-v}{1+u+v}-\frac{1-v}{1+v} \leq \frac{u(2+v)}{(1+v)(1+v+u)}\left(\sqrt{\frac{1+u-v}{1+u+v}}+\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right),$$

$$\frac{2uv}{(1+u+v)(1+v)} \leq \frac{u(2+v)}{(1+v)(1+v+u)}\left(\sqrt{\frac{1+u-v}{1+u+v}}+\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right).$$

Nếu $u=0$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Nếu $u>0$, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{2v}{2+v} \leq \sqrt{\frac{1+u-v}{1+u+v}}+\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}. \qquad (*)$$

Để ý rằng với $u>0$, ta có đánh giá

$$\frac{1+u-v}{1+u+v} \geq \frac{1-v}{1+v},$$

do vậy

$$\sqrt{\frac{1+u-v}{1+u+v}}+\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \geq 2\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}=2\sqrt{-1+\frac{2}{1+v}}.$$

Hơn nữa, ta lại có $v \leq \dfrac{4}{5}$ theo giả thiết nên

$$\sqrt{\frac{1+u-v}{1+u+v}}+\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \geq 2\sqrt{-1+\frac{2}{1+\frac{4}{5}}}=\frac{2}{3}.$$

Ngoài ra cũng do $v \leq \dfrac{4}{5}<1$ nên

$$\frac{2v}{2+v}=\frac{2}{\frac{2}{v}+1}<\frac{2}{3},$$

do vậy đánh giá $(*)$ đúng, cũng có nghĩa bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Bài toán hoàn tất.□

2.12 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh mang tính hoán vị giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử b là số hạng nằm giữa a và c. Khi đó ta biến đổi bất đẳng thức như sau

$$\sum\left(\frac{a^2}{b}+b-2a\right) \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}-2(a+b+c),$$

$$\sum\frac{(a-b)^2}{b} \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}-2(a+b+c).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\sum\frac{(a-b)^2}{b} \geq \frac{[(a-b)+(b-c)+(a-c)]^2}{b+c+a} = \frac{4(a-c)^2}{a+b+c}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh được

$$2(a-c)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2.$$

Sau khi thu gọn, ta được bất đẳng thức hiển nhiên đúng do b nằm giữa a và c

$$2(b-c)(b-a) \leq 0.$$

Bài toán hoàn tất.□

2.13 Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng:
$$-1 \leq x^3+y^3+z^3-3xyz \leq 1$$

Lời giải 1. Chú ý rằng ta có đẳng thức

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2 = (x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2 = (1+2t)(1-t)(1-t),$$

trong đó $t = xy+yz+zx$. Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM để có

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2 \leq \frac{[(1+2t)+(1-t)+(1-t)]^3}{27} = 1,$$

do vậy $-1 \leq x^3+y^3+z^3-3xyz \leq 1$.

Phép chứng minh hoàn tất.□

Lời giải 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2 &= [x(x^2-yz)+y(y^2-zx)+z(z^2-xy)]^2\\ &\leq (x^2+y^2+z^2)[(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2].\end{aligned}$$

Hơn nữa, ta lại có

$$(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2=(x^2+y^2+z^2)^2-(xy+yz+zx)^2\le(x^2+y^2+z^2)^2,$$

do vậy

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2\le(x^2+y^2+z^2)^3=1.$$

Từ đó ta suy ra $-1\le x^3+y^3+z^3-3xyz\le 1$.

Phép chứng minh hoàn tất.□

2.14 Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{xyz}{(1+3x)(z+6)(x+8y)(y+9z)}\le\frac{1}{7^4}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có các đánh giá sau:

$$z+6=z+1+1+1+1+1+1\ge 7\sqrt[7]{z},$$

$$1+3x=1+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\ge 7\sqrt[7]{\frac{x^6}{2^6}},$$

$$x+8y=x+\frac{4y}{3}+\frac{4y}{3}+\frac{4y}{3}+\frac{4y}{3}+\frac{4y}{3}+\frac{4y}{3}\ge 7\sqrt[7]{xy^6.\frac{4^6}{3^6}},$$

$$y+9z=y+\frac{3z}{2}+\frac{3z}{2}+\frac{3z}{2}+\frac{3z}{2}+\frac{3z}{2}+\frac{3z}{2}\ge 7\sqrt[7]{yz^6.\frac{3^6}{2^6}}.$$

Nhân các bất đẳng thức trên với nhau, ta được

$$(z+6)(1+3x)(x+8y)(y+9z)\ge 7^4\sqrt[7]{z.\frac{x^6}{2^6}.xy^6.\frac{4^6}{3^6}.yz^6.\frac{3^6}{2^6}}=7^4xyz,$$

từ đó suy ra

$$\frac{xyz}{(1+3x)(z+6)(x+8y)(y+9z)}\le\frac{1}{7^4}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

2.15 Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{ab+c^2}+\frac{b+c}{bc+a^2}+\frac{a+c}{ac+b^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\frac{a^2}{b(a^2+c^2)}+\frac{b^2}{a(b^2+c^2)}\ge\frac{(a+b)^2}{b(a^2+c^2)+a(b^2+c^2)}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(ab+c^2)},$$

từ đây ta suy ra $\dfrac{a+b}{ab+c^2}\le\dfrac{a^2}{b(a^2+c^2)}+\dfrac{b^2}{a(b^2+c^2)}$. Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại, ta được

$$\frac{a+b}{ab+c^2}+\frac{b+c}{bc+a^2}+\frac{a+c}{ac+b^2}$$
$$\le\frac{a^2}{b(a^2+c^2)}+\frac{b^2}{a(b^2+c^2)}+\frac{b^2}{c(b^2+a^2)}+\frac{c^2}{b(a^2+c^2)}+\frac{a^2}{c(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{a(b^2+c^2)}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

2.16 Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn không có bất kì hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:
$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(a+c)}{a^2+ac+c^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2}\geq 2$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(a+c)}{a^2+ac+c^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^2}{a(b+c)-\dfrac{abc}{b+c}}+\frac{b^2}{b(a+c)-\frac{abc}{a+c}}+\frac{c^2}{c(a+b)-\frac{abc}{a+b}}$$
$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-\dfrac{abc}{b+c}-\dfrac{abc}{c+a}-\dfrac{abc}{a+b}}.$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$(a+b+c)^2\geq 4(ab+bc+ca)-2abc.(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}),$$

hay

$$a^2+b^2+c^2+2abc.(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c})\geq 2(ab+bc+ca).$$

Áp dụng đánh giá cơ bản $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}$, ta có

$$a^2+b^2+c^2+2abc.(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c})\geq a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}.$$

Công việc cuối cùng chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\geq 2(ab+bc+ca),$$

hay $a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$. Tuy nhiên đánh giá này đúng theo bất đẳng thức Schur bậc ba nên bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

2.17 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải. Sử dụng giả thiết, ta có

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}.$$

Để ý rằng ta có đánh giá

$$\frac{a}{1-a^2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{a(a\sqrt{3}+2)(a\sqrt{3}-1)^2}{2(1-a^2)}\geq 0,$$

Xuctu.com®

do vậy $\dfrac{a}{1-a^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Thiết lập hai đánh giá tương tự và cộng lại, ta được

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2),$$

do vậy

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

2.18 Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x+y+z}\left(\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y}\right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh mang tính thuần nhất, do đó ta chuẩn hóa $x+y+z=1$. Đồng thời, ta đặt $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}, c=\sqrt{z}$. Như vậy ta cần chứng minh

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Tuy nhiên đây là một kết quả đã được chứng minh ở bài **2.17**. □

2.19 Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn không có bất kì hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2+a^2)(2b^2+c^2)} + \frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)} \leq \frac{1}{a+b+c}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz, ta có

$$(2a^2+b^2)(2a^2+c^2) = (a^2+a^2+b^2)(a^2+c^2+a^2) \geq (a^2+ab+ac)^2 = a^2(a+b+c)^2.$$

Như vậy $\dfrac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)} \leq \dfrac{a}{(a+b+c)^2}$. Thiết lập hai đánh giá tương tự rồi cộng lại, ta được

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2+a^2)(2b^2+c^2)} + \frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)} \leq \frac{a+b+c}{(a+b+c)^2} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

2.20 Cho a, b, c là các số thực không âm thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải. Dãy bất đẳng thức sau tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh

$$2(a^2+b^2+c^2) + \frac{c(a^2+b^2)}{a+b} + \frac{a(b^2+c^2)}{b+c} + \frac{b(c^2+a^2)}{c+a} \leq 3(a^2+b^2+c^2),$$

$$\frac{c[(a+b)^2-2ab]}{a+b} + \frac{a[(b+c)^2-2bc]}{b+c} + \frac{b[(c+a)^2-2ca])}{c+a} \leq a^2+b^2+c^2,$$

$$2ab+2bc+2ca \leq a^2+b^2+c^2+2abc\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}\right).$$

Đánh giá cuối cùng là một kết quả đã được chứng minh ở bài **2.16**, do vậy ta kết thúc chứng minh.□

2.21 Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{xy}{1+z} + \frac{yz}{1+x} + \frac{xz}{1+y} \le \frac{1}{4}$$

Lời giải. Chú ý rằng
$$\frac{xy}{1+z} = \frac{xy}{(x+z)+(y+z)},$$
và theo một đánh giá quen thuộc thì
$$\frac{4}{(x+z)+(y+z)} \le \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z},$$
do vậy $\frac{xy}{1+z} \le \frac{1}{4}\left(\frac{xy}{x+z} + \frac{xy}{y+z}\right)$. Thiết lập hai đánh giá tương tự rồi cộng lại, ta được
$$\frac{xy}{1+z} + \frac{yz}{1+x} + \frac{xz}{1+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{xy+yz}{x+z} + \frac{yz+zx}{x+y} + \frac{zx+xy}{y+z}\right) = \frac{x+y+z}{4},$$
từ đây ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

2.22 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:
$$(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a})(a+b+c) \ge 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz, ta có
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca},$$
do vậy $(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a})(a+b+c) \ge \frac{(a+b+c)^3}{ab+bc+ca}$. Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng
$$(a+b+c)^3 \ge 3(ab+bc+ca)\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)},$$
hay $(a+b+c)^6 \ge 27(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2$. Tuy nhiên đây là một đánh giá đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM, ta có
$$(a+b+c)^6 = [(a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ca) + (ab+bc+ca)]^3 \ge 27(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2,$$
do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

2.23 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \ge 2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được
$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \ge 2\sqrt{(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a})(a+b+c)}.$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)(a+b+c) \geq 3(a^2+b^2+c^2).$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz, ta có

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

Công việc cuối cùng chỉ cần chứng minh

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^2b+b^2c+c^2a),$$

hay $(a^3+ab^2)+(b^3+bc^2)+(c^3+ca^2) \geq 2(a^2b+b^2c+c^2a)$. Tuy nhiên đây là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức AM-GM, do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

2.24 Cho a, b, c là các số thực dương thuộc khoảng $(0, 1)$ thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{(1-a^2)(1-b^2)}+\frac{b^2+c^2}{(1-b^2)(1-c^2)}+\frac{c^2+a^2}{(1-a^2)(1-c^2)} \geq \frac{9}{2}$$

Lời giải. Bất đẳng thức ban đầu tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau

$$\sum\left[\frac{a^2+b^2}{(1-a^2)(1-b^2)}+\frac{1}{2}\right] \geq 6,$$

$$\sum\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 12.$$

Để ý rằng ta có

$$(1-a^2)(1-b^2)-(1-ab)^2 = -(a-b)^2,$$

do vậy $(1-a^2)(1-b^2) \leq (1-ab)^2$. Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$(1+a^2)(1+b^2) \geq (1+ab)^2,$$

do vậy ta suy ra

$$\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)} \geq \frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2}.$$

Đến đây ta thiết lập hai đánh giá tương tự và cộng lại để có

$$\sum\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)} \geq \sum\frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2}.$$

Ta áp dụng tiếp bất đẳng thức AM-GM để suy ra

$$\sum\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 3\sqrt[3]{\left[\frac{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}\right]^2}.$$

Do vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$(1+ab)(1+bc)(1+ca) \geq 8(1-ab)(1-bc)(1-ca).$$

Đặt $x = ab, y = bc, z = ca$. Khi đó $x, y, z > 0$; $x + y + z = 1$ và ta cần chứng minh

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) \geq 8(1 - x)(1 - y)(1 - z),$$

tương đương

$$9xyz \geq 7(xy + yz + zx) - 2.$$

Theo một kết quả đã được chứng minh ở bài $\boxed{\mathbf{2.35}}$, ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x + y + z} \geq 2(xy + yz + zx),$$

từ đó sử dụng giả thiết $x + y + z = 1$ để suy ra $9xyz \geq 4(xy + yz + zx) - 1$. Công việc cuối cùng là chứng minh

$$4(xy + yz + zx) - 1 \geq 7(xy + yz + zx) - 2,$$

hay $xy + yz + zx \leq \dfrac{1}{3}$. Tuy nhiên đây là một đánh giá đúng vì

$$xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3} = \frac{1}{3},$$

do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

$\boxed{\mathbf{2.25}}$ Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{1 + a^3 + b^3} + \sqrt[3]{1 + b^3 + c^3} + \sqrt[3]{1 + a^3 + c^3} \geq \sqrt[3]{27 + 2(a + b + c)^3}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$(1 + a^3 + b^3)[27 + (a + b + c)^3 + (a + b + c)^3]^2 \geq [9 + a(a + b + c)^2 + b(a + b + c)^2]^3,$$

từ đó ta suy ra

$$\sqrt[3]{1 + a^3 + b^3}.\sqrt[3]{[27 + 2(a + b + c)^3]^2} \geq 9 + (a + b)(a + b + c)^2.$$

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng lại, ta được

$$\sqrt[3]{[27 + 2(a + b + c)^3]^2}(\sqrt[3]{1 + a^3 + b^3} + \sqrt[3]{1 + b^3 + c^3} + \sqrt[3]{1 + a^3 + c^3}) \geq 27 + 2(a + b + c)^3,$$

từ đó ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

Nhận xét. Bất đẳng thức trên là hệ quả trực tiếp của *bất đẳng thức Minkowsky mở rộng*:

$$\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3} + \sqrt[3]{d^3 + e^3 + f^3} + \sqrt[3]{g^3 + h^3 + k^3} \geq \sqrt[3]{(a + d + g)^3 + (b + e + h)^3 + (c + f + k)^3}.$$

Cách chứng minh tương tự như lời giải của bài toán trên.

$\boxed{\mathbf{2.26}}$ Cho a, b, c là các số thực không âm thay đổi bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{(a + b)(a + c)} + \frac{ca}{(b + c)(b + a)} + \frac{ab}{(c + a)(c + b)} \geq \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)}$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$1-\frac{bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{ca}{(b+c)(b+a)}-\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\le 1-\frac{2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}.$$

Mặt khác, để ý rằng ta có các đẳng thức sau:

$$1-\frac{bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{ca}{(b+c)(b+a)}-\frac{ab}{(c+a)(c+b)}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

$$1-\frac{2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}=\frac{ab+bc+ca}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2},$$

do đó ta cần chứng minh

$$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{ab+bc+ca}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2},$$

hay

$$\frac{2(a+b)}{(c+a)(c+b)}+\frac{2(b+c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{2(c+a)}{(b+c)(b+a)}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Để ý rằng

$$\frac{1}{c}-\frac{2(a+b)}{(c+a)(c+b)}=\frac{(c-a)(c-b)}{c(c+a)(c+b)},$$

do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a(a+b)(a+c)}+\frac{(b-a)(b-c)}{b(b+a)(b+c)}+\frac{(c-a)(c-b)}{c(c+a)(c+b)}\ge 0.$$

Tuy nhiên đánh giá này đúng theo bất đẳng thức Vornicu - Schur, do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

2.27 Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[4]{2a^2+bc}+\sqrt[4]{2b^2+ac}+\sqrt[4]{2c^2+ab}\le\frac{ab+bc+ca}{\sqrt[4]{3}}.\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$. Khi đó $x,y,z>0$ và $xyz=1$. Đồng thời ta cũng có

$$\sqrt[4]{2a^2+bc}=\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{yz}}=\sqrt[4]{\frac{2yz+x^2}{x}},$$

và $ab+bc+ca=x+y+z$. Theo đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sum\sqrt[4]{\frac{2yz+x^2}{x}}\le\frac{(x+y+z)}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}},$$

hay

$$\left(\sum\sqrt[4]{\frac{2yz+x^2}{x}}\right)^4\le\frac{(x+y+z)^4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$3(2yz+x^2+2zx+y^2+2xy+z^2)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \geq \left(\sum \sqrt[4]{\frac{2yz+x^2}{x}}\right)^4.$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$3(2yz+x^2+2zx+y^2+2xy+z^2) \leq \frac{(x+y+z)^4}{3},$$

hay $x+y+z \geq 3$. Tuy nhiên đây là một đánh giá đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3,$$

do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

2.28 Cho a, b, c là các số thực không âm đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right] \geq 4$$

Lời giải. Bất đẳng thức ban đầu mang tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử $a > b > c \geq 0$. Khi đó ta đặt $a-b=x; b-c=y$. Từ đây ta suy ra $x, y > 0$ và

$$ab+bc+ca \geq ab = (c+y)(c+x+y) \geq y(x+y).$$

Đồng thời, cũng từ phép đặt trên, ta có

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2} = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Như vậy, ta đưa bài toán về việc chứng minh

$$y(x+y)\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right] \geq 4,$$

hay

$$\frac{y(x+y)}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x+y} \geq 3.$$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$. Khi đó $t > 0$ và ta cần chứng minh

$$\frac{t+1}{t^2}+t+\frac{1}{t+1} \geq 3.$$

Sau khi biến đổi tương đương, ta thu được một đánh giá hiển nhiên đúng

$$(t^2-t-1)^2 \geq 0,$$

do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

2.29 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \geq ab + bc + ca + a + b + c$$

Lời giải. Do $abc = 1$ nên tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z}, \quad c = \frac{z}{x}.$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + 3 \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x},$$

tương đương

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 + 3x^2y^2z^2 \geq xyz[xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)].$$

Tuy nhiên đây là một hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Schur bậc 3:

$$m^3 + n^3 + p^3 + 3mnp \geq mn(m+n) + np(n+p) + pm(p+m),$$

ở đây $m = xy$,$n = yz$ và $p = zx$. Do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

2.30 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:
$$\sum \frac{a+b}{ab+c^2} \leq \sum \frac{1}{a}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:
$$\sum \frac{1}{a} - \sum \frac{a+b}{ab+c^2} = \frac{(a-c)(b-c)}{abc+c^3} + \frac{(b-a)(c-a)}{abc+a^3} + \frac{(a-b)(c-b)}{abc+b^3} \geq 0$$
Đặt $\dfrac{1}{abc+a^3} = x, \dfrac{1}{abc+b^3} = y, \dfrac{1}{abc+c^3} = z.$

Bất đẳng thức được đưa về dạng Vornicu Schur:
$$x(a-c)(b-c) + y(b-a)(c-a) + z(a-b)(c-b) \geq 0(*)$$
Giả sử $a \geq b \geq c$, thế thì $abc + c^3 \leq abc + b^3$.

Suy ra $\dfrac{1}{abc+c^3} \geq \dfrac{1}{abc+b^3}$

hay $z \geq y$

Mặc khác, theo điều giả sử thì $b \geq c$, do đó $a - b \leq a - c$.

Kết hợp với $z \geq y > 0$, suy ra $z(a-c) \geq y(a-b)$.

Viết lại bất đẳng thức $(*)$ như sau:
$$x(a-b)(b-c) + (b-c)[z(a-c) - y(a-b)] \geq 0$$
Bất đẳng thức này đúng theo các điều giả sử.

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.□

2.31 Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm max của biểu thức:
$$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

Lời giải. Ta có: $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

Suy ra $P^2 = (x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số không âm:

$$
\begin{aligned}
P^2 &= (x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2 \\
&= (x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\
&\le \left[\frac{(x+y+z)^2+(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{3}\right]^3 \\
&= (x^2+y^2+z^2)^3 = 1 \text{ (theo giả thiết)}
\end{aligned}
.$$

Suy ra $P \le 1$.

Vậy $maxP = 1 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \Leftrightarrow x = 1, y = z = 0$ và các hoán vị.□

2.32 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$$

Lời giải.

Cách 1

Ta có:

$$\sum \frac{a^2-b^2}{a+b} = a-b+b-c+c-a = 0$$

Suy ra $\sum \dfrac{2a^2}{a+b} = \sum \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

Khi đó ta cần chứng minh:

$$\sum \frac{2c^2}{a+b} \ge \sum \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$\sum \frac{2c^2-a^2-b^2}{a+b} \ge 0$$

hay

$$\sum \left(\frac{c^2}{a+b}-\frac{a^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}-\frac{c^2}{b+c}\right) \ge 0$$

hay

$$\sum \frac{(c-a)^2(c+a)}{(a+b)(b+c)} \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Cách 2

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sum a^2\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}\right) \ge 0$$

hay

$$(a^2(a^2-c^2)+b^2(b^2-a^2)+c^2(c^2-b^2) \ge 0$$

hay

$$\frac{1}{2}\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right] \ge 0 \text{ (đúng)}.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

2.34 Cho $x, y, z \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ac}{(a+c)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b}^2 \ge \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sum \left[\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}-\frac{1}{2}\right] \ge 0$$

hay

$$\sum \frac{2a^2-b^2-c^2}{(b+c)^2} \geq 0$$

Giả sử $a \geq b \geq c$.
Khi đó ta có hai dãy cùng chiều:

$$\begin{cases} 2a^2-b^2-c^2 \geq 2b^2-a^2-c^2 \geq 2c^2-a^2-b^2 \\ \dfrac{1}{(b+c)^2} \geq \dfrac{1}{(a+c)^2} \geq \dfrac{1}{(a+b)^2} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebychep cho hai dãy trên:

$$\sum \left[(2a^2-b^2-c^2).\frac{1}{(b+c)^2}\right] \geq \left[\sum(2a^2-b^2-c^2)\right].\left[\sum \frac{1}{(b+c)^2}\right] = 0.\left[\sum \frac{1}{(b+c)^2}\right] = 0$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

2.35 Cho $a,b>0$. Chứng minh rằng:

$$(a^2+b^2)(a+b)^2+(ab+1)^2 \geq 2(a+b)^2$$

Lời giải.
Để ý rằng $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.
Đặt $a^2+b^2=x, ab=y$
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$x(x+2y)+(y+1)^2 \geq 2(x+2y)$$

Khai triển và rút gọn, ta được:

$$x^2+y^2+1-2x-2y+2xy \geq 0$$

hay

$$(x+y-1)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^2+b^2+ab=1$ (chẳng hạn $a=b=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$).□

2.36 Cho $a,b,c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3}+\frac{b^3-c^3}{(b-c)^3}+\frac{c^3-a^3}{(c-a)^3} \geq \frac{9}{4}$$

Lời giải.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum \frac{a^2+b^2+ab}{(a-b)^2} \geq \frac{9}{4}$$

Nhận thấy rằng:

$$\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2} = \frac{\dfrac{1}{4}(a+b)^2+\dfrac{3}{4}(a-b)^2}{(a-b)^2} \geq \frac{\dfrac{3}{4}(a-b)^2}{(a-b)^2} = \frac{3}{4}$$

Thục hiện tương tự cho hai bất đẳng thức còn lại.
Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b+c=0$.□

2.37 Cho $a,b>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{4}{a^2+b^2} \geq \frac{32(a^2+b^2)}{(a+b)^4}$$

Lời giải.
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{4}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+\frac{4}{a^2+b^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.\frac{4}{a^2+b^2}} = \frac{4}{ab}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{4}{ab} \geq \frac{32(a^2+b^2)}{(a+b)^4}$$

hay

$$8ab(a^2+b^2) \leq (a+b)^4$$

Áp dụng bất đẳng thức $4xy \leq (x+y)^2$:

$$8ab(a^2+b^2) = 4.2ab.a^2+b^2) \leq (a^2+b^2+2ab)^2 = (a+b)^4$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.□

2.38 Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c \leq 3$$

Lời giải.

Cách 1:

Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số a, b, c ắt sẽ có hai số cùng phía với 1 trên trục số. Giả sử hai số đó là a và b. Thế thì:

$$(a-1)(b-1) \geq 0$$

hay

$$ab \geq a+b-1 \quad .$$

Mặt khác, theo giả thiết và bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương:

$$4-c^2 = a^2+b^2+abc \geq 2ab+abc = ab(2+c)$$

hay

$$(2-c)(2+c) \geq ab(2+c)$$

hay

$2-c \geq ab$

Kết hợp với bất đẳng thức $ab \geq a+b-1$ (chứng minh trên), suy ra:

$$2-c \geq ab \geq a+b-1$$

hay

$$a+b+c \leq 3 \quad .$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Cách 2:

Đặt $a = \dfrac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}, b = \dfrac{2y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}, c = \dfrac{2z}{\sqrt{(z+y)(z+x)}}$

Suy ra:

$$a+b+c = \frac{\sum 2x\sqrt{y+z}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

Vì thế bất đẳng thức $a+b+c \leq 3$ sẽ tương đương với:

$$\sum 2x\sqrt{y+z} \leq 3\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur với các biến $\sqrt{y+z}, \sqrt{y+x}, \sqrt{z+x}$.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

Cách 3:

Giả sử tồn tại một số (cho số đó là a) trong ba số a, b, c lớn hơn 2. Khi đó, vì a, b, c dương nên:

$$a^2+b^2+c^2+abc = 4 > 4+b^2+c^2+abc > 4 \text{ (vô lí!)}$$

Do đó $a, b, c \in (0; 2]$

Từ giả thiết suy ra:

$$a^2+abc+\frac{b^2c^2}{4} = 4+\frac{b^2c^2}{4}-b^2-c^2$$

hay

$$\left(a+\frac{bc}{2}\right)^2=\frac{(4-b^2)(4-c^2)}{4}$$

Do $b,c\le 2$ nên suy ra:

$$a+b+c=\sqrt{\frac{(4-b^2)\,(4-c^2)}{4}}-\frac{bc}{2}+b+c$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\sqrt{\frac{(4-b^2)\,(4-c^2)}{4}}-\frac{bc}{2}+b+c\le\frac{\frac{1}{2}(4-b^2+4-c^2)-bc}{2}+b+c$$
$$=3-\left(\frac{b+c}{2}-1\right)^2\le 3$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

Nhận xét:

Bất đẳng thức $a+b+c\le 3$ cũng đúng với điều kiện $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{2}abc=\frac{9}{2}$.

2.39 Cho $x,y,z>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

Lời giải.

Đặt $xy=a, yz=b, xz=c$, bất đẳng thức trở thành:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+9)\ge 36\sqrt{abc}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[12]{(abc)^4}$$
$$a^2+b^2+c^2+9\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}+9=3\sqrt[3]{(abc)^2}+3+3+3\ge 4\sqrt[4]{3\sqrt[3]{(abc)^2}.3.3.3}=12\sqrt[12]{(abc)^2}$$

Nhân vế theo vế hai bất đẳng thức trên:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+9)\ge 3\sqrt[3]{abc}.12\sqrt[12]{(abc)^2}=36.\sqrt{abc}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

2.40 Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right)\ge 3(a+b+c)^2$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Holder:

$$\left(\frac{4}{a^2+b^2}+1\right)\left(\frac{4}{b^2+c^2}+1\right)\left(\frac{4}{c^2+a^2}+1\right)\ge\left(\sqrt[3]{\frac{64}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}+1\right)^3$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức $3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2$:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{64}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}+1\right)^3\ge\left[\frac{12}{2(a^2+b^2+c^2)}+1\right]^3=27=9(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a+b+c)^2$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{\frac{1}{3}}$.□

3.3 Bài 3.1 đến bài 3.40

3.1 Cho $a,b,c,x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\le a+b+c$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)} &\le \sqrt{\sum a^2.\sum x^2}+\sqrt{2\sum xy.2\sum ab} \\ &\le \sqrt{(\sum a^2+2\sum ab)(\sum x^2+2\sum xy)} \\ &= a+b+c \text{ (do } x+y+z=1) \end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=\dfrac{1}{a+b+c}=\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=a+b+c$ hay $a+b+c=1$. □

3.2 Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4$$

Lời giải.

Ta chứng minh giá trị lớn nhất của biểu thức là 3.

Đặt $a^3=x, b^3=y, c^3=z$, suy ra $x+y+z=3$.

Áp dụng AM-GM

$$3a^4b^4\le a^3b^3(a^3+b^3+1)$$

Khi đó, ta chỉ cần chứng minh:

$$xy(x+y+1)+yz(y+z+1)+zx(z+x+1)\le 9$$

Đưa về dạng đồng bậc, ta cần chứng minh

$$3\sum xy(x+y)+(x+y+z)(xy+yz+zx)\le (x+y+z)^3$$

Sau khi khai triển, bất đẳng thức trở thành:

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge \sum xy(x+y)$$

Đúng theo bất đẳng thức Schur.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

3.3 Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

Lời giải.

Cách 1:

Giả sử $a\ge b\ge c$.

Ta sẽ có hai dãy cùng chiều:

$$\begin{cases} a^2\ge b^2\ge c^2 \\ \dfrac{1}{b+c}\ge\dfrac{1}{a+c}\ge\dfrac{1}{a+b} \end{cases}$$

Áp dụng lần lượt bất các bất đẳng thức Chebychep, giả thiết $a^2+b^2+c^2=1$ và bất đẳng thức $\sum\dfrac{1}{x}\ge\dfrac{9}{\sum x}$, ta có:

$$P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge\frac{3}{2(a+b+c)}$$

Lại theo bất đẳng thức:

$$3=3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$$

Suy ra:

$$a+b+c\le\sqrt{3}$$

.

Do đó:

$$P\ge\frac{3}{2(a+b+c)}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$$

.

Vậy $minP=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Xuctu.com®

Cách 2:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và giả thiết:

$$\sum \frac{a^2}{b+c} = \sum \frac{a^4}{a^2(b+c)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)} = \frac{1}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\sum a(b^2+c^2) = \sum \sqrt{\frac{1}{2}.2a^2(b^2+c^2)(b^2+c^2)} \leq 3\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+2b^2+2c^2}{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Suy ra:

$$P \geq \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $minP = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\square$

3.4 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(b+a)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}.(1+\sqrt[3]{abc})}$$

Lời giải.

Cách 1:

Nhân vế trái với $abc+1$, ta có:

$$\frac{1}{a(b+a)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(c+a)} = \sum\left[\frac{bc}{1+b} + \frac{1}{a(1+b)}\right] = \sum\left[\frac{b(1+c)}{1+b} + \frac{1+a}{a(1+b)} - 1\right]$$

$$= \sum \frac{b(1+c)}{1+b} + \sum \frac{1+a}{a(1+b)} - 3 = P$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$P \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc(1+a)(1+b)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + 3\sqrt[3]{\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{abc(1+a)(1+b)(1+c)}} - 3$$

$$= 3\frac{(\sqrt[3]{abc})^2 - \sqrt[3]{abc} + 1}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{3(abc+1)}{\sqrt[3]{abc}(\sqrt[3]{abc}+1)}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c.\square$

Cách 2:

Theo bất đẳng thức Holder thì:

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$$

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ và bất đẳng thức trên:

$$\left[\sum \frac{1}{a(b+1)}\right]^2 \geq 3\left(\sum \frac{1}{ab(1+b)(1+c)}\right) = \frac{3(a+b+c+ab+bc+ca)}{abc(1+b)(1+c)(1+a)}$$

$$= \frac{3}{abc} - \frac{3(abc+1)}{abc(1+a)(1+b)(1+c)} \geq \frac{3}{abc} - \frac{3(abc+1)}{abc(1+\sqrt[3]{abc})^3}$$

$$= 3\frac{3\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}{abc(1+\sqrt[3]{abc})^3} = \frac{9}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}(1+\sqrt[3]{abc})^2}$$

Khai căn hai vế, suy ra:

$$\frac{1}{a(b+a)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}.(1+\sqrt[3]{abc})}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c.\square$

Cách 3:

Đặt $abc = k$. Thế thì luôn tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho $a = \dfrac{ky}{x}, b = \dfrac{kz}{y}, c = \dfrac{kx}{z}$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{\frac{ky}{x}\left(\frac{kz}{y}\right)+1}+\frac{1}{\frac{kz}{y}\left(\frac{kx}{z}\right)+1}+\frac{1}{\frac{kx}{z}\left(\frac{ky}{x}\right)+1}\geq\frac{3}{k(k+1)}$$

hay

$$\frac{x}{y+kz}+\frac{y}{z+kx}+\frac{z}{x+ky}\geq\frac{3}{k+1}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$:

$$\frac{x}{y+kz}+\frac{y}{z+kx}+\frac{z}{x+ky}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x(y+kz)+y(z+kx)+z(x+ky)}=\frac{(x+y+z)^2}{(k+1)(xy+yz+zx)}\geq\frac{3}{k+1}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.5 Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2}\leq\frac{3}{4}$$

Lời giải.

Giả sử $a\geq b\geq c$.

Trường hợp 1: $a^2+b^2\leq 6$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+\frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}}\geq\frac{3}{2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz :

$$\sum\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+\frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}}\geq\frac{4(a+b+c)^2}{\sum(a+b)^2+\sum\frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2+\frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{2(b+c)^2}{b^2+c^2}+\frac{2(c+a)^2}{c^2+a^2}\leq 24$$

Ta lại có:

$$12-\sum(a+b)^2=\frac{4}{3}(a+b+c)^2-\sum(a+b)^2=\frac{-1}{3}\sum(a-b)^2$$

và

$$12-\sum\frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}=\sum\frac{2(a-b)^2}{a^2+b^2}$$

Nên bất đẳng thức tương đương với:

$$\sum(a-b)^2\left(\frac{6}{a^2+b^2}-1\right)\geq 0\text{ (đúng)}$$

Trường hợp 2: $a^2+b^2\geq 6$.

Khi đó ta có:

$$\frac{1}{a^2+b^2+2}\leq\frac{1}{8}$$

và

$$\frac{1}{a^2+c^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}\leq\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}\leq\frac{1}{8-b^2}+\frac{1}{b^2+2}\leq\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\text{ (vì }0\leq b^2\leq 6)$$

Khi đó :

$$\sum\frac{1}{a^2+b^2+2}\leq\tfrac{3}{4}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.6 Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\geq\frac{3}{2}$$

Lời giải.

Giả sử $a \geq b \geq c$.
Suy ra:

$$ab \geq 1$$

Suy ra:

$$(a-b)^2(ab-1) \geq 0$$

hay

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{2}{1+ab} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$\frac{3-ab}{ab+1} \geq \frac{2c^2}{c^2+1}$$

hay

$$c^2 + 3 - ab \geq 3abc^2$$

hay

$$c^2 + ca + bc \geq 3abc^2$$

hay

$$a + b + c \geq 3abc$$

Điều này đúng vì:

$$\begin{cases} (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \\ ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \end{cases} \text{hay } a+b+c \geq 3 \geq 3abc.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

3.7 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2abc+ab^2} + \frac{1}{2abc+bc^2} + \frac{1}{2abc+ca^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải.

Nhân abc cho 2 vế của bất đẳng thức, ta cần chứng minh:

$$\frac{ca}{2ca+ba} + \frac{ab}{2ab+cb} + \frac{bc}{2bc+ac} \geq \frac{abc(a+b+c)}{3}$$

Đặt $bc = x, ca = y, ab = z$, suy ra $x + y + z = 3$, bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{y}{2y+z} + \frac{z}{2z+x} + \frac{x}{2x+y} \geq \frac{xy+yz+zx}{3}$$

Đặt $x^2 + y^2 + z^2 = m$, $xy + yz + zx = n$, suy ra $m + 2n = 9$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{y}{2y+z} + \frac{z}{2z+x} + \frac{x}{2x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2m+n}$$

Vì vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{(x+y+z)^2}{2m+n} \geq \frac{n}{3}$$

hay

$$(m+2n)^2 \geq 3n(2m+n) \text{ (do } m+2n=9)$$

Hay tức là

$$m^2 + n^2 \geq 2mn \text{ (đúng theo AM-GM)}.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

3.8 Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:
$$2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Lời giải.

Ta có hằng đẳng thức sau:
$$(x^2+y^2)(m^2+n^2) = (xm+yn)^2 + (xn-ym)^2$$
Áp dụng hằng đẳng thức trên, ta có:
$$\begin{aligned}2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) &= \left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]\left[(c^2+ab)^2+c^2(a-b)^2\right]\\ &= \left[(a+b)(c^2+ab)+c(a-b)^2\right]^2 + \left[c(a-b)(a+b)-(c^2+ab)(a-b)\right]^2\\ &= \left[(a+b)(c^2+ab)+c(a-b)^2\right]^2 + (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\\ &\geq (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\end{aligned}$$
Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a+b)(c^2+ab) = -c(a-b)^2$.□

3.9 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:
$$\sum \frac{a^3b}{1+ab^2}.\sum \frac{1+ab^2}{ab} \geq (a+b+c)^2$$
hay
$$\sum \frac{a^3b}{1+ab^2}.\left(\frac{abc+1}{abc}\right)(a+b+c) \geq (a+b+c)^2$$
hay
$$\frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$
Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

3.10 Cho $a, b, c \in [0; 2]$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:
$$A = a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$$

Lời giải.

Cách 1

Ta có đẳng thức sau:
$$\begin{aligned}A = a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)\\ &= 27 - 3(3-a)(3-b)(3-c)\\ &= 27 - 9(ab+bc+ca) + 3abc\end{aligned}$$
Mặt khác, do $a, b, c \in [0; 2]$ nên $(2-a)(2-b)(2-c) \geq 0$, hay:
$$8 - 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) - abc \geq 0$$
Suy ra:
$$2(ab+bc+ca) - abc \geq 4(a+b+c) - 8 = 4$$
Suy ra:
$$-9(ab+bc+ca) \leq \frac{-9}{2}abc - 18$$
.

Do đó:
$$A \leq 27 - \frac{9}{2}abc - 18 + 3abc = 9 - \frac{3}{2}abc \leq 9 \text{ (do } a, b, c \geq 0)$$
Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 1, c = 0$ và các hoán vị.

Cách 2

Giả sử $a = max\{a; b; c\}$

Suy ra $3 = a + b + c \leq 3a$, hay $a \in [1; 2]$, hay $(a-1)(a-2) \leq 0$
Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= a^3 + b^3 + c^3 \\
&\leq a^3 + 3bc(b+c) + b^3 + c^3 \\
&= a^3 + (b+c)^3 \\
&= a^3 + (3-a)^3 \\
&= (a-1)(a-2) + 9 \leq 9
\end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 1, c = 0$ và các hoán vị.□

3.11 Cho dãy số dương a_n . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \ldots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} < 4\left(\frac{1}{a_1} + \ldots. + \frac{1}{a_n}\right)$$

Lời giải.

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \ldots + \frac{i^2}{a_i} \geq \frac{(1+2+\ldots+i)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_i}$$

Thế lần lượt $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ rồi cộng vế theo vế:

$$A \leq \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i}{(1+2+\ldots+i)^2}.\left(\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \ldots + \frac{i^2}{a_i}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(B_i.\frac{i^2}{a_i}\right) = T$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}
B_i &= \frac{i}{(1+2+\ldots+i)^2} + \frac{i+1}{[1+2+\ldots+(i+1)]^2} + \ldots + \frac{n}{(1+2+\ldots+n)^2} \\
&= 4.\left\{\frac{i}{[i(i+1)]^2} + \frac{i+1}{[(i+1)(i+2)]^2} + \ldots + \frac{n}{[n(n+1)]^2}\right\} \\
&= 4.\left[\frac{1}{i(i+1)^2} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)^2}\right] \\
&= 4\left[\frac{1}{i+1}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \ldots + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\
&= 4\left(\frac{1}{i^2} - C\right) \\
&< 4.\frac{1}{i^2}
\end{aligned}$$

Do

$$C = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

Suy ra:

$$B_i.i^2 < 4$$

Suy ra:

$$B_i.\frac{i^2}{a_i} < \frac{4}{a_i}$$

Suy ra:

$$A \leq T < 4\left(\frac{1}{a_1} + \ldots. + \frac{1}{a_n}\right)$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

3.12 Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \leq [ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)]$$

Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$a^3+b^3+c^3-3abc \le 2\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc\right]$$

hay

$$(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \le 4\left[c(a-b)^2+a(b-c)^2+b(c-a)^2\right]$$

hay

$$(3a-b-c)(b-c)^2+(3b-c-a)(c-a)^2+(3c-a-b)(a-b)^2 \ge 0 \ (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$.
Xét hai trường hợp:

• Trường hợp 1: $c \le \dfrac{a+b}{3}$

Bất đẳng thức (1) có thể biến đổi thành:

$$(c+a-b)(b-c)^2+(b+c-a)(c-a)^2+(a+b-3c)(b-c)(a-c) \ge 0$$

Bất đẳng thức này đúng theo điều giả sử.

• Trường hợp 2: $c > \dfrac{a+b}{3}$

Suy ra $b > \dfrac{a+b}{3} \ge \dfrac{a+c}{3}$

Biến đổi bất đẳng thức (1) thành:

$$(b+c-a)(a-b)^2+(a+b-c)(b-c)^2+(3b-c-a)(a-b)(b-c) \ge 0$$

Bất đẳng thức này cũng đúng theo điêu giả sử.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b=3c$ hoặc $a+c=3b$.□

3.13 Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$S = a_1^2 + \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^2 < 4(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)$$

Lời giải.

Đặt $\alpha_k = \sqrt{k}-\sqrt{k-1}$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\left(\frac{a_1^2}{\alpha_1}+\frac{a_2^2}{\alpha_2}+\dots+\frac{a_k^2}{\alpha_k}\right)(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k) \ge (a_1+a_2+..+a_k)^2$$

Suy ra:

$$\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}\right)^2 \le \frac{(\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_k)}{k^2}\left(\frac{a_1^2}{\alpha_1}+\frac{a_2^2}{\alpha_2}+\dots+\frac{a_k^2}{\alpha_k}\right)$$

Suy ra:

$$S \le \sum_{k=1}^{n}\left(c_k\frac{a_k^2}{\alpha_k}\right)$$

với $c_k = \sum_{i=0}^{n-k}\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_{k+i}}{(k+i)^2}$

Suy ra:

$$c_k = \frac{\sqrt{k}}{k^2}+\frac{\sqrt{k+1}}{(k+1)^2}+\dots+\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{k\sqrt{k}}+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}+\dots+\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Ta lại có:

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}+\sqrt{k-\frac{1}{2}}} = \sqrt{k+\frac{1}{2}}-\sqrt{k-\frac{1}{2}}$$

và

$$\sqrt{(k-\frac{1}{2}).(k+\frac{1}{2})} < k$$

Suy ra:

$$\frac{1}{k\sqrt{k}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}\right)$$

Suy ra:

$$c_k < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\right) < \frac{2}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}}$$

Suy ra:

$$\frac{c_k}{\alpha_k} < \frac{2}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}}.2\sqrt{k-\frac{1}{2}} = 4$$

Suy ra:

$$S < 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

3.14 (VMO 2002) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Chứng minh rằng:

$$2(a+b+c) - abc \leq 10$$

Lời giải.

Cách 1:

Theo giả thiết:

$$\begin{cases} |a|, |b|, |c| \leq 3 \\ |a+b+c| \leq 3\sqrt{3} \\ |abc| \leq 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có thể giả sử $a, b, c \neq 0$ và $a \leq b \leq c$. Xét các trường hợp sau:

• $c < 0$: Thế thì

$$2(a+b+c) - abc \leq -abc \leq 3\sqrt{3} < 10$$

• $a \leq b < 0 < c$. Suy ra $abc > 0$. Suy ra

$$2(a+b+c) < 2c \leq 6 < 10 + abc$$

hay

$$2(a+b+c) - abc < 10$$

• $a < 0 < b \leq c$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$(2b + 2c - a)^2 \leq (b^2 + c^2 + a^2)[2^2 + 2^2 + (-1)^2] = 9.9 = 81$$

Suy ra:

$$2b + 2c - a \leq 9$$

Do đó:

$$2(a+b+c) = 2b + 2c - a + 3a \leq 9 + 3a$$

Ta cần chứng minh:

$$9 + 3a \leq abc + 10$$

hay

$$3a - 1 \leq abc$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì $bc \leq \dfrac{b^2+c^2}{2} = \dfrac{9-a^2}{2}$

Tức ta phải chứng minh:

$$3a - 1 \leq \frac{9 - a^2}{2}$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$(a+1)^2(a-2) \leq 0 \text{ (đúng do } a < 0)$$

• $0 < a \leq b \leq c$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz tương tự như trên, ta co: $2b + 2c + a \leq 9$

Ta cũng suy ra được:

$$2(a+b+c) \leq 9 + a$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$9 + a \leq 10 + abc$$

hay

$$a \leq 1 + abc$$

Với $a < 1$ thì bất đẳng thức hiện nhiên đúng.

Với $a \geq 1$ thì $c \geq b \geq 1$. Khi đó bất đẳng thức cũng đúng.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c = 2, a = -1$ và các hoán vị.

Cách 2:

Đặt $P = 2(a+b+c) - abc$.

Suy ra $P^2 = [2(a+b+c) - abc]^2 = [2(a+b) + z(2-ab)]^2$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$P^2 \leq [(a+b)^2 + c^2)[4 + (2-ab)^2] = 72 - 20ab + (ab)^2 + 2(ab)^3$$

Đặt $t = ab$. Ta sẽ chứng minh:

$$100 \geq 72 - 20t + t^2 + 2t^3$$

hay

$$(t+2)^2(t-3.5) \leq 0 \text{ (*)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $|a| \leq |b| \leq |c|$.

Suy ra:

$$3|c| \geq 9$$

Suy ra:

$$a^2 + b^2 \leq 6$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì:

$$6 \geq a^2 + b^2 \geq 2ab$$

hay

$$ab \leq 3 < 3.5$$

Suy ra (*) đúng.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi vả chỉ khi $b = c = 2, a = -1$ và các hoán vị.□

3.15 Cho $a, b, c \geq 0$ và không có hai số nào trong chúng đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}} \geq \frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{\sum a(b^2+c^2)}{a^2+bc} = \frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc} + b + c \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc(b^2+c^2)}{a^2+bc}}$$

Suy ra:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}(a^2+bc)}{\sum a(b^2+c^2)}$$

Tương tự với $\sqrt[3]{\dfrac{b^2+ca}{c^2+a^2}}$ và $\sqrt[3]{\dfrac{c^2+ab}{a^2+b^2}}$, ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{\sum a(b^2+c^2)}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{\sum a(b^2+c^2)} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

hay

$$(a+b+c)[(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)] \geq 3[\sum a(b^2+c^2)]$$

Giả sử $a \geq b \geq c$. Biến đổi bất đẳng thức trên thành:

$$a(a-b)^2 + c(b-c)^2 + (a+c-b)(a-b)(b-c) \geq 0 \text{ (đúng theo điều giả sử)} \quad .$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.16 Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9}{4}a^2b^2c^2 \geq \frac{21}{4}$$

Lời giải.

Từ đề bài suy ra $b+c \neq 0$ và $a = \dfrac{3-bc}{b+c}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử:

$$bc \geq ca \geq ab \quad .$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\frac{3-bc}{b+c}\right)^2\left(1+\frac{9}{4}b^2c^2\right)+b^2+c^2 \geq \frac{21}{4}$$

Đặt $b+c=S$ và $bc=P$.

Ta được:

$$(3-P)^2(4+9P^2)+4S^2(S^2-2P) \geq 21S^2$$

hay

$$9P^4-54P^3+85P^2-24P+36+4S^4-8S^2P-21S^2 \geq 0$$

hay

$$(9P^4-54P^3+117P^2-108P+36)+(4S^4-8S^2P-32P^2-21S^2+84P) \geq 0$$

hay

$$9(P^2-3P+2)^2+(S^2-4P)(4S^2+8P-21) \geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng vì $4S^2+8P \geq 16P+8P-21 \geq 24-21 > 0$.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}; b=c=\sqrt{2}$.□

3.17 Cho $a, b, c \in [0;1]$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2 \leq 1+a^2b+b^2c+c^2a$$

Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)+a^2b^2c^2+a^2b(1-b)+b^2c(1-c)+c^2b(1-b) \geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng theo giả thiết.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0, b=c=1$ và các hoán vị.□

3.18 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a-a^2} + \frac{1}{b-b^2} + \frac{1}{c-c^2} \geq \frac{108}{5}$$

Lời giải.

Cách 1:

Từ giả thiết suy ra $0 < a, b, c \leq \frac{1}{2}$

Xét hiệu sau:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-a^2} - \frac{36}{5} + \frac{144(6a-1)}{25} &= \frac{(6a-1)(6a-5)}{5(a-a^2)} + \frac{144(6a-1)}{25} \\ &= \frac{(6a-1)}{5}\left(\frac{6a-5}{a-a^2} + \frac{144}{5}\right) \\ &= \frac{(6a-1)}{5}\left[\frac{-144a^2+174a-25}{5(a-a^2)}\right] \\ &= \frac{(6a-1)^2(25-24a)}{25(a-a^2)} \geq 0\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\frac{1}{a-a^2} \geq \frac{36}{5} - \frac{144(6a-1)}{25}$$

Một cách tương tự:

$$\frac{1}{b-b^2} \geq \frac{36}{5} - \frac{144(6b-1)}{25}$$
$$\frac{1}{c-c^2} \geq \frac{36}{5} - \frac{144(6c-1)}{25}$$

Cộng vế theo vế:

$$\frac{1}{a-a^2} + \frac{1}{b-b^2} + \frac{1}{c-c^2} \geq \frac{108}{5} - \frac{144}{25}\left(\frac{6a+6b+6c-3}{25}\right) \geq \frac{108}{25} \text{ (do } a+b+c \leq \frac{1}{2})$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{6}$.

Cách 2:

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\sum \frac{1}{a-a^2} \geq \frac{9}{a+b+c-a^2-b^2-c^2}$$

Đặt $a + b + c = x$. Thế thì $x \leq \frac{1}{2}$ và $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{x^2}{3}$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{9}{x - \frac{x^2}{3}} \geq \frac{108}{5}$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$(2x-1)(2x-5) \geq 0 \text{ (đúng do } x \leq \frac{1}{2})$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{6}$.□

3.19 Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa $a + b + c + d = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{3b+c+d+3} + \frac{bc}{3c+d+a+3} + \frac{cd}{3d+a+b+3} + \frac{da}{3a+b+c+3} \leq \frac{1}{3}$$

Lời giải.

Với $a + b + c + d = 3$, bất đẳng thức được viết thành:

$$\frac{ab}{4b+2c+2d+a} + \frac{bc}{4c+2d+2a+b} + \frac{cd}{4d+2a+2b+c} + \frac{da}{4a+2b+2c+d} \leq \frac{1}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{ab}{4b+2c+2d+a} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2ab}{2b+d}+\frac{ab}{2c+a}\right)$$
$$\frac{bc}{4c+2d+2a+b} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2bc}{2c+a}+\frac{bc}{2d+b}\right)$$
$$\frac{cd}{4d+2a+2b+c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2cd}{2d+b}+\frac{cd}{2a+c}\right)$$
$$\frac{da}{4a+2b+2c+d} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2da}{2a+c}+\frac{da}{2b+d}\right)$$

Cộng vế theo vế, ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\frac{3}{4}$. □

3.20 Cho $a,b,c>0$, Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c} \ge a+\frac{b}{2}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4} \ge \frac{3a}{2}$$
$$\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c}{2}+\frac{a+b}{4} \ge \frac{3b}{2}$$
$$\frac{c^2}{b+c}+\frac{b+c}{4} \ge c$$

Cộng vế theo vế:

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a}{2}+b+c \ge \frac{3a}{2}+\frac{3b}{2}+c$$

hay

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c} \ge a+\frac{b}{2}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.21 Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{3(x+y+z)}{2}$$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $0<a,b,c\le\sqrt{3}$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a}+\frac{3}{2}a \ge \frac{a^2+9}{4}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với:

$$(a-1)^2(4-a) \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Tương tự với b và c, rồi cộng vế theo vế, ta có:

$$P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{3(x+y+z)}{2} \ge \frac{a^2+b^2+c^2+27}{4}=\frac{15}{2}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

3.22 (Iran 1996) Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right] \ge \frac{9}{4}$$

Lời giải.

Đặt $a+b=x; b+c=y; c+a=z$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\geq 9$$

hay

$$2\sum\nolimits_{sym}\frac{x}{y}-\sum\nolimits_{sym}\frac{x^2}{y^2}+2\sum\nolimits_{sym}\frac{xy}{z^2}-12\geq 0$$

hay

$$\sum\nolimits_{sym}(x-y)^2\left(\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}\right)\geq 0$$

Giả sử $x\geq y\geq z$. Thế thì:

$$\frac{2}{yz}-\frac{1}{x^2}\geq 0$$

hay

$$(x-y)^2\left(\frac{2}{yz}-\frac{1}{x^2}\right)\geq 0$$

Lại có:

$$(y-z)(y+z-x)\geq 0$$

Suy ra;

$$\frac{x-z}{x-y}\geq\frac{y}{z}$$

Mặt khác:

$$\frac{2}{zx}-\frac{1}{y^2}>\frac{2}{z(z+y)}-\frac{1}{y^2}>0$$

Suy ra:

$$(z-x)^2\left(\frac{2}{zx}-\frac{1}{y^2}\right)+(x-y)^2\left(\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}\right)\geq(x-y)^2\left(\frac{2y^2}{z^3x}-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}\right)$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{2y^2}{z^3x}-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}\geq 0$$

hay

$$y^3+z^3-xyz\geq 0$$

hay

$$(y+z)(y-z)^2+yz(y+z-x)\geq 0 \text{ (đúng)}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=0, b=c$ và các hoán vị.□

3.23 Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+2b}\right)^2\geq\frac{1}{3}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2$:

$$\left(\frac{a}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+2b}\right)^2\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right)^2$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$:

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}=\frac{a^2}{ab+2ac}+\frac{b^2}{bc+2ab}+\frac{c^2}{ac+2bc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\geq 1$$

Suy ra:

$$\left(\frac{a}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+2b}\right)^2\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right)^2\geq\frac{1}{3}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳn thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.24 Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) = 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = (a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)$$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra:

$$\sum \frac{a+b+c}{d} = 16$$

Áp dụng hằng đẳng thức:

$$(a+b+c-d)^2 + (b+c+d-a)^2 + (c+d+a-b)^2 + (d+a+b-c)^2 = 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2).(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}) &= \frac{1}{4}.\left[\sum(a+b+c-d)^2\right].\left(\sum\frac{1}{a^2}\right)\\ &\geq \frac{1}{4}.\left(\sum\frac{a+b+c-d}{d}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\left(\sum\frac{a+b+c}{d}-4\right)^2 = \frac{1}{4}.12^2 = 36\end{aligned}$$

Vậy $minA = 36 \Leftrightarrow a = c = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.b = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.d.$ □

Nhận xét:

Ta có hằng đẳng thức đáng chú ý sau:

$$(a+b+c-d)^2 + (b+c+d-a)^2 + (c+d+a-b)^2 + (d+a+b-c)^2 = 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

Từ đó nếu có tám số thực dương a, b, c, d, x, y, z, t thì áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và hằng đẳng thức trên:

$$\begin{aligned}&[(a+b+c+d)(x+y+z+t) - 2(at+bx+cy+dz)]^2\\ &= [a(x+y+z-t) + b(y+z+t-x) + c(z+t+x-y) + d(t+x+y-z)]^2\\ &\leq (a^2+b^2+c^2+d^2)[(x+y+z-t)^2 + (y+z+t-x)^2 + (z+t+x-y)^2 + (y+x+y-z)^2]\\ &= 4(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)\end{aligned}$$

hay

$$(a+b+c+d)(x+y+z+t) - 2(at+bx+cy+dz) \leq 2\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)}$$

Bài toán trên là trường hợp riêng khi $a = \frac{1}{t}; b = \frac{1}{x}; c = \frac{1}{y}; d = \frac{1}{z}$.

3.25 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$64abc(a+b+c)^3 \leq 27[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$$

Lời giải.

Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab++bc+ca)$$

Thật vậy, sau khi khai triển, rút gọn, ta được bất đẳng thức tương đương sau:

$$c(a-b)^2 + b(a-c)^2 + a(b-c)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên:

$$27[(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \geq 27.\frac{64}{81}.(a+b+c)^2.(ab+bc+ca)^2$$

hay

$$27[(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \geq \frac{64}{3}(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$:

$$\frac{64}{3}(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 \geq \frac{64}{3}.(a+b+c)^2.3abc.(a+b+c) = 64abc.(a+b+c)^3$$

Suy ra:

$$64abc(a+b+c)^3 \leq 27[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.26 Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^3+b^3=c^3$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2-c^2>6(c-a)(c-b)$$

Lời giải.

Đặt $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}$. Theo giả thiết thì $x^3+y^3=1$ và $0<x,y<1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$x^2+y^2+1>6(1-x)(1-y)$$

Từ giả thiết và bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương:

$$x^3y^3=(1-x)(1-y)(1+x+x^2)(1+y+y^2) \geq (1-x)(1-y).3x.3y=(1-x)(1-y)9xy$$

Suy ra:

$$xy \geq 3\sqrt{(1-x)(1-y}$$

Do đó:

$$x^2+y^2-1=x^2(1-x)+y^2(1-y) \geq 2xy\sqrt{(1-x)(1-y)} \geq 6(1-x)(1-y)$$

Đẳng thức không xảy ra. Phép chứng minh hoàn tất.□

3.27 Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)^4 \geq 16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=max\{a,b,c\}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$(a+b+c)^4 \geq 16a^2(b+c)^2=16(a^2b^2+a^2c^2+2a^2bc) \geq 16(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$$

Phép chứng mnh hoàn tất, Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ và các hoán vị.□

3.28 Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}+\frac{b\sqrt{b^2+3ac}}{a+c}+\frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b} \geq a+b+c$$

Lời giải.

Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\sum \frac{a(b^2+3bc)}{(b+c)\sqrt{b^2+3bc}} \geq \sum \frac{2a(b^2+3bc)}{b^2+3bc+(b+c)^2}=\sum \frac{2a(a^2+3bc)}{a^2+b^2+c^2+5bc}$$

Xét hiệu sau:

$$\sum\left[\frac{2a(a^2+3bc)}{a^2+b^2+c^2+5bc}-a\right]=\sum \frac{a(a^2+bc-b^2-c^2)}{a^2+b^2+c^2+5bc}=\sum \frac{a(b+c)(a^2+bc-b^2-c^2)}{(b+c)(a^2+b^2+c^2+5bc)}$$

$$=\sum \frac{a^3(b+c)-a(b^3+c^3)}{(b+c)(a^2+b^2+c^2+5bc)}$$

$$=\sum \frac{ab(a^2-b^2)+ac(a^2-b^2)}{(b+c)(a^2+b^2+c^2+5bc)}$$

$$=ab\sum(a^2-b^2)\left[\frac{1}{(b+c)(a^2+b^2+c^2+5bc)}-\frac{1}{(a+c)(a^2+b^2+c^2+5ac)}\right]$$

$$= \frac{ab(a^2-b^2)(a-b)(a^2+b^2+c^2+5ac+5bc)}{(a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2+5bc)(a^2+b^2+c^2+5ac)} \geq 0$$

Do đó:

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b^2+3ac}}{a+c} + \frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b} \geq a+b+c$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.29 Cho $x,y,z>0$ thoản mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) \geq 2\sqrt{2(2+\sum x^3y^3+\sum x^3)}$$

Lời giải.

Đặt $x^3=a, y^3=b, z^3=c$. Thế thì $abc=1$.

Bất đăng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{2(2+\sum ab+\sum a)}$$

hay

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{2(a+1)(b+1)(c+1)}$$

hay

$$[(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \geq 8(a+1)(b+1)(c+1)$$

Theo bất đẳng thức Holder thì:

$$(a+b)^2\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 \geq (a+1)^4$$

hay

$$a^2(a+b)^2(c+1)^2 \geq (a+1)^4$$

Lập các bất đẳng thức tương tự:

$$b^2(b+c)^2(a+1)^2 \geq (b+1)^4$$
$$c^2(c+a)(b+1)^2 \geq (c+1)^4$$

Nhân vế theo vế ba bất đẳng thức trên:

$$a^2b^2c^2(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2 \geq (a+1)^4(b+1)^4(c+1)^4$$

hay

$$[(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \geq (a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2$$

Lại theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned}(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2 &= [(a+1)(b+1)(c+1)][(a+1)(b+1)(c+1)]\\ &\geq 8\sqrt{abc}.[(a+1)(b+1)(c+1)]\\ &= 8(a+1)(b+1)(c+1)\end{aligned}$$

Do đó:

$$[(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \geq 8(a+1)(b+1)(c+1)$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.□

3.30 Cho $z,y,z>0$. Chứng minh rằng:

i) $\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(y+1)^2} \geq \dfrac{1}{1+xy}$

ii) Cho $xyz=1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(y+1)^2}+\dfrac{1}{(z+1)^2}+\dfrac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 1$

Lời giải.

i) Tiến hành quy đồng, thu gọn, ta được bất đẳng thức tương đương:

$$x^3y+xy^3+1 \geq x^2y^2+2xy$$

hay
$$xy(x-y)^2+(xy-1)^2\ge 0 \text{ (đúng)}$$

ii) Đặt $x=\dfrac{ab}{c^2}, y=\dfrac{bc}{a^2}, z=\dfrac{ca}{b^2}$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:
$$\frac{c^4}{(ab+c^2)^2}+\frac{b^4}{(ac+b^2)^2}+\frac{a^4}{(bc+a^2)^2}+\frac{2a^2b^2c^2}{(ab+c^2)(bc+a^2)(ca+b^2)}\ge 1$$
Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:
$$(ab+c^2)^2\le (a^2+c^2).(b^2+c^2)$$
$$(ab+c^2)(bc+a^2)(ca+b^2)\le (a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$$
Do đó:
$$\frac{c^4}{(ab+c^2)^2}+\frac{b^4}{(ac+b^2)^2}+\frac{a^4}{(bc+a^2)^2}+\frac{2a^2b^2c^2}{(ab+c^2)(bc+a^2)(ca+b^2)}$$
$$\ge \frac{c^4(a^2+b^2)+b^4(a^2+c^2)+a^4(c^2+b^2)+2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(c^2+b^2)}=1$$
Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.□

3.31 Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:
$$a\sqrt{a^2+bc}+b\sqrt{b^2+ac}+c\sqrt{c^2+ab}\ge\sqrt{2}(a+b+c)$$

Lời giải.

Ta chứng minh bổ đề sau:

Cho $x,y,z\ge 0$. Khi đó:
$$\sum x^4+xyz(x+y+z)\ge 2\sum x^2y^2$$
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có bất đẳng thức quen thuộc sau:
$$xyz\ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$$
Suy ra:
$$xyz(x+y+z)\ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y+z)$$
Khai triển và chuyển vế bất đẳng thức trên, ta có bổ đề cần chứng minh.

Trở lại bài toán:

Bình phương hai vế bất đẳng thức cần chứng minh:
$$\sum a^4+abc\sum a+2\sum ab\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)}\ge 2\sum a^2b^2+4abc\sum a$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:
$$2\sum ab\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)}\ge 2\sum ab(ab+c\sqrt{ab})=2\sum a^2b^2+2abc\sum\sqrt{ab}$$
Áp dụng bổ đề trên:
$$\sum a^4+abc\sum a\ge 2\sum a^2b^2$$
$$2\sum a^2b^2+2abc\sum\sqrt{ab}\ge 4abc\sum a$$
Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức trên, ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.32 Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a(a+b)(a+c)}{(b+c)^3}+\frac{b(b+c)(b+a)}{(c+a)^3}+\frac{c(c+a)(c+b)}{(a+b)^3}\ge\frac{(a+b+c)^4}{6(ab+bc+ca)^2}$$

Lời giải.

Chuẩn hóa $ab+bc+ca=3$.

Ta cần chứng minh:

$$\sum \frac{a(a^2+3)}{(b+c)^3} \geq \frac{(a+b+c)^4}{54}$$

hay

$$\sum \frac{a^3}{(b+c)^3} + 3\sum \frac{a}{(b+c)^3} \geq \frac{(a+b+c)^4}{54}$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder:

$$\left[\sum a(b+c)\right]^3 \sum \frac{a^3}{(b+c)^3} \geq \left(\sum a\sqrt{a}\right)^4$$

$$\left[\sum a(b+c)\right]^3 \sum \frac{a}{(b+c)^3} \geq (a+b+c)^4$$

$$(1+1+1)\left(\sum a\sqrt{a}\right)^2 \geq \left(\sum a\right)^3 \geq \sqrt{\sum ab}\left(\sum a\right)^2 \Rightarrow \left(\sum a\sqrt{a}\right)^4 \geq \left(\sum a\right)^4$$

Kết hợp các bất đẳng thức trên, ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.33 Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(b+c)(b^2+bc+c^2)} + \frac{1}{(a+b)(a^2+ab+b^2)} + \frac{1}{(a+c)(a^2+ac+c^2)} \geq \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{1}{(b+c)(b^2+bc+c^2)} = \frac{ab+bc+ac}{(b+c)(b^2+bc+c^2)(ab+bc+ac)} \geq \frac{4(ab+bc+ac)}{(b+c)^3(a+b+c)^2}$$

Tương tự với các phân thức còn lại, từ đó ta cần chứng minh:

$$\sum \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac}$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$\sum \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} \geq \sum \frac{2a(b+c)}{(b+c)^2}$$

hay

$$\sum \frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2} \geq 0$$

Bất đẳng thức trên đúng theo bất đẳng thức Vonicur-Schur.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.34 Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c-a)}{a^2+2bc} + \frac{b(c+a-b)}{b^2+2ac} + \frac{c(a+b-c)}{c^2+2ab} \geq 0$$

Lời giải.

Giả sử $a \geq b \geq c$.

• Trường hợp 1: $a \leq b+c$.

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

• Trường hợp 2: $a \geq b+c$.

Suy ra:

$$\frac{b}{b^2+ac} - \frac{a}{a^2+bc} = \frac{(a-b)(ab-ac-bc)}{(b^2+ac)(a^2+2bc)} \geq 0$$

Suy ra:

$$\frac{b(a+c-b)}{b^2+2ac} + \frac{a(b+c-a)}{a^2+2bc} \geq \frac{2ac}{a^2+bc} \geq 0$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Phép chứng minh hoàn tất. □

3.35 Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:
$$a\sqrt[3]{ab} + b\sqrt[3]{bc} + c\sqrt[3]{ca} \leq 3$$

Lời giải.

Theo bất đẳng thức AM-GM:
$$a\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a^4b} \leq \frac{2a\sqrt{ab} + a}{3}$$
Tương tự:
$$b\sqrt[3]{bc} \leq \frac{2b\sqrt{bc} + b}{3}$$
$$c\sqrt[3]{ca} \leq \frac{2c\sqrt{ca} + c}{3}$$
Do đó ta chỉ cần chứng minh:
$$a\sqrt{ab} + b\sqrt{bc} + c\sqrt{ca} \leq 3$$
hay
$$a\sqrt{ab} + b\sqrt{bc} + c\sqrt{ca} \leq (a + b + c)^2$$
Biến đổi bất đẳng thức trên thành bất đẳng thức tương đương:
$$\sum(a - b - \sqrt{ab} - \sqrt{ca} + 2\sqrt{bc})^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$
Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

3.36 Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:
$$\sum \frac{b + c}{a} + \frac{(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}{abc} \geq 7$$

Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:
$$\frac{bc(b + c)}{abc} + \frac{2\sum ab(a + b) - \sum a^3 - 2abc}{abc} \geq 4$$
hay
$$2\sum ab(a + b) \geq \sum a^3 + 9abc$$
Đây chính là bất đẳng thức Schur theo các biến $a + b - c, b + c - a, c + a - b$.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

3.37 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:
$$\sum \sqrt{\frac{a^2}{b^2 + (c + a)^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:
$$\sum \sqrt{\frac{a^2}{5(b^2 + (c + a)^2)}} \leq \frac{3}{5}$$
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:
$$[(b^2 + (c + a)^2] = (1 + 4)[b^2 + (c + a)^2] \geq [b + 2(c + a)]^2$$
Suy ra:
$$\sum \sqrt{\frac{a^2}{5(b^2 + (c + a)^2)}} \leq \sum \frac{a}{b + 2(c + a)}$$
Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau:
$$\frac{a}{b + 2(c + a)} + \frac{b}{c + 2(a + b)} + \frac{c}{a + 2(b + c)} \leq \frac{3}{5}$$
hay

$$\frac{b+2c}{b+2(c+a)}+\frac{c+2a}{c+2(a+b)}+\frac{a+2b}{a+2(b+c)}\geq\frac{9}{5}$$

Thật vậy:

$$\sum\left[\frac{1}{2}-\frac{a}{b+2(c+a)}\right]=\sum\frac{b+2c}{b+2(c+a)}=\sum\frac{(b+2c)^2}{(b+2c)(b+2c+2a)}\geq\frac{9(a+b+c)^2}{\sum(b+2c)(b+2c+2a)}=\frac{9}{5}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.38 Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2}\geq 4(a+b+c)$$

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)\geq(a^2+b^2+c^2)^2$$

Suy ra:

$$\frac{4(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Lại có:

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca)=8(a+b)(b+c)(c+a)+8abc\leq 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

Nên

$$\frac{4(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2}\geq\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}+\frac{8(ab+bc+ca)}{a+b+c}=4(a+b+c)$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.39 Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3b}{a^4+a^2b^2+b^4}+\frac{b^3c}{b^4+b^2c^2+c^4}+\frac{c^3a}{c^4+c^2a^2+a^4}\leq 1$$

Lời giải.

Theo bất đẳng thức AM-GM;

$$\sum\frac{a^3b}{a^4+a^2b^2+b^4}\leq\sum\frac{a^3b}{2a^3b+b^4}=\sum\frac{a^3}{2a^3+b^3}$$

Ta cần chứng minh:

$$\sum\frac{a^3}{2a^3+b^3}\leq 1$$

hay

$$\sum\frac{a^3}{a^3+2c^3}\geq 1$$

Thật vậy. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\sum\frac{a^3}{a^3+2c^3}\geq\frac{\left(\sum a^3\right)^2}{\sum a^6+2\sum a^3b^3}=1$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

3.40 Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq 28$$

Lời giải.

Ta có bất đẳng thức sau:

$$(a+b+c)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$$

Thật vậy. Sau khi khai triển và rút gon, ta được bất đẳng thức tương đương:

$$\sum c(a-b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta cần chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a^3+b^3+c^3+24abc}{abc} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 28$$

hay

$$\sum \frac{a^2}{bc} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebychep;

$$\sum \frac{a^2}{bc} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 4$$

Bất đẳng thức này được tạo bởi hai bất đẳng thức luôn đúng sau:

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} \geq 2$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 2 \text{ (theo bất đẳng thức AM-GM)}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thúc xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.$\square$

3.4 Bài 4.1 đến bài 4.40

4.1 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{abc} + \frac{|a-b| + |b-c| + |c-a|}{3} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải.

Giả sử $a \geq b \geq c$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sqrt[3]{abc} + \frac{2a-2c}{3} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

hay

$$\sqrt[3]{abc} + \frac{a-b-3c}{3} \geq 0$$

Ta có:

$$f'(a) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{bc}\frac{1}{a^2} > 0$$

nên hàm $f(a)$ đồng biến. Suy ra:

$$f(a) \geq f(b) = \sqrt[3]{b^2c} - c \geq 0$$

Phép chứng minh hoán tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.$\square$

Nhận xét:

Bài toán tổng quát:

Với mọi $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ thì

$$n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sum_{i\neq j} |a_i - a_j| \geq \sum_{i=1}^n a_i$$

4.2 Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2) \leq (2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)$$

Lời giải.

Do a, b, c là ba cạnh tam giác nên

$$(2a^2+bc)^2 - (2a^2+2b^2-c^2)(2a^2+2c^2-b^2) = [(b+c)^2-a^2](b-c)^2 \geq 0$$

Suy ra:

$$(2a^2+bc)^2 \geq (2a^2+2b^2-c^2)(2a^2+2c^2-b^2)$$

Tương tự:

$$(2b^2+ca)^2 \geq (2b^2+2c^2-a^2)(2b^2+2a^2-c^2)$$
$$(2c^2+ab)^2 \geq (2c^2+2a^2-b^2)(2c^2+2b^2-a^2)$$

Nhân vế theo vế ba bất đẳng thức trên, ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

4.3 Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{(c+a)^2} \leq \frac{1}{4}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Lời giải.

Chuẩn hóa $c=1$. Ta cần chứng minh:

$$\frac{(a-b)^2}{4(a+b)^2}+\frac{4ab}{(a+b)(a+1)(b+1)} \geq \frac{a}{(a+1)^2}+\frac{b}{(b+1)^2}$$

hay

$$\frac{(a-b)^2}{4(a+b)}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}-\frac{2ab}{(a+1)(b+1)} \geq \frac{a+b}{(a+1)(b+1)}-\frac{4ab}{(a+b)(a+1)(b+1)}$$

hay

$$\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}+\frac{4(a-b)^2}{(a+1)^2(b+1)^2} \geq \frac{4(a-b)^2}{(a+1)(b+1)(a+b)}$$

Kết quả này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có hai biến bằng nhau.□

4.4 Cho $a,b,c>0$ thỏa $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{bc}{a} \geq a^2+b^2+c^2$$

Lời giải.

Đặt $x=\dfrac{ab}{c}; y=\dfrac{bc}{a}; z=\dfrac{ca}{b}$.

Theo giả thiết thì $xy+yz+zx+xyz=4$. Suy ra $\sum \dfrac{x}{x+2}=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$x+y+z \geq xy+yz+zx$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum \frac{x}{x+2}\right)\left[\sum x\left(x+2\right)\right] \geq \left(\sum x\right)^2 \qquad]$$

Suy ra:

$$\sum x(x+2) \geq (x+y+z)^2$$

hay

$$x+y+z \geq xy+yz+zx$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

4.5 Cho $a,b,c>0$ thỏa $a^2+b^2=2(a+b)+1$.
Tìm giá tri nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $P=a^2+b^2$

Lời giải.

Đặt $a^2+b^2=x>0$.

Theo giả thiết và bất đẳng thức $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$:

$$x=2(a+b)+1 \leq 2\sqrt{2x}+1$$

Suy ra:

$$x - 2\sqrt{2x} + 1 \leq 0$$

Suy ra:

$$\sqrt{2} - 1 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$$

Do đó:

$$3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + \sqrt{2}$$

Vậy:

$$min(a^2 + b^2) = 3 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}$$
$$max(a^2 + b^2) = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}$$.□

4.6 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{2a^3}{a^2 + b^2}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3}{b^2 + c^2}} + \sqrt[3]{\frac{2c^3}{c^2 + a^2}} \leq 3$$

Lời giải.

Ta có:

$$a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = 3$$
$$8(x + y + z)(xy + yz + zx) \leq 9(x + y)(y + z)(z + x)$$
$$\frac{2a^3}{a^2 + b^2} = 2a.(a^2 + c^2).\frac{a^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}$$

Sử dụng các đẳng thức bất đẳng thức trên và bất đẳng thức Holder:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{2a^3}{a^2 + b^2}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3}{b^2 + c^2}} + \sqrt[3]{\frac{2c^3}{c^2 + a^2}}\right)^3 \leq \sum \frac{a^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}.\sum(2a).\sum(a^2 + c^2)$$
$$= \sum \frac{a^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}.\sum(2a).\sum(a^2 + c^2)$$
$$= 9(a + b + c) \leq 27$$

Suy ra:

$$\sqrt[3]{\frac{2a^3}{a^2 + b^2}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3}{b^2 + c^2}} + \sqrt[3]{\frac{2c^3}{c^2 + a^2}} \leq 3$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức cảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

4.7 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{8a^3}{(bc + a)^3} + \frac{8b^3}{(ac + b)^3} + \frac{8c^3}{(ba + c)^3} \geq 6[$$

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{3(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = 3$$

Vì vậy ta cần chứng minh:

$$\sum \frac{a^3}{(a + bc)^3} \geq \frac{3}{8}$$

hay

$$\sum \frac{a^6}{(a^2 + 1)^3} \geq \frac{3}{8} \text{ (do } abc = 1)$$

hay

$$\sum \frac{x^3}{(x+1)^3} \geq \frac{3}{8} \text{ (với } x = a^2, y = b^2, x = c^2, xyz = 1)$$

Đây là bất đẳng thức Vietnam TST 2005.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\sum \left[2.\frac{x^3}{(x+y)^3} + \frac{1}{8}\right] \geq \frac{3}{2}.\sum \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{y^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2}{(z+x)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Trước hết ta chứng minh:

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} \geq \frac{1}{xy+1}$$

Thật vậy. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{1}{(x+1)^2} \geq \frac{1}{(xy+1)\left(\dfrac{x}{y}+1\right)} = \frac{y}{(xy+1)(x+y)}$$

nên

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} \geq \frac{y}{(xy+1)(x+y)} + \frac{x}{(xy+1)(x+y)} = \frac{1}{xy+1}$$

Cuối cùng, ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{xy+1} + \frac{1}{(z+1)^2} \geq \frac{3}{4}$$

hay

$$\frac{z}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Bất đẳng thức này đúng vì:

$$\frac{z}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{3}{4} = \frac{(z-1)^2}{4(z+1)^2} \geq 0$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Nhận xét: Bất đẳng thức

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} \geq \frac{1}{xy+1}$$

rất thông dụng trong việc chứng minh bất đẳng thức.

Hãy lấy ví dụ là bài bất đẳng thức trong China MO 2004:

Với $x, y, z, t > 0$ thỏa mãn $xyzt = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} \geq 1$$

Sử dụng kết quả trên, ta có ngay:

$$\sum \frac{1}{(x+1)^2} \geq \frac{1}{xy+1} + \frac{1}{zt+1} = 1. \text{ (do } xyzt = 1)$$

$\square$

4.8 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{a^2+7} + \frac{4}{b^2+7} + \frac{4}{c^2+7}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\sum \frac{a^2}{a^2+7} + \sum \frac{1}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{24} + \frac{9}{2(a+b+c)}$$

Đặt $a+b+c = x \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = 3$. Ta chứng minh:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{9}{2x} \geq \frac{15}{8}$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$(x-3)\left(x - \frac{-3+3\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-3\sqrt{17}}{2}\right) \geq 0 \text{ (đúng, do } x \leq 3)$$

Do đó:

$$\sum \frac{a^2}{a^2+7} + \sum \frac{1}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{24} + \frac{9}{2(a+b+c)} \geq \frac{15}{8}$$

Suy ra:

$$\sum \frac{1}{a+b} \geq \frac{15}{8} - \sum \frac{a^2}{a^2+7} = \sum \frac{7}{a^2+7} - \frac{9}{8}$$

Ta cần chứng minh:

$$\sum \frac{7}{a^2+7} - \frac{9}{8} \geq \frac{4}{a^2+7}$$

hay

$$\sum \frac{1}{a^2+7} \geq \frac{3}{8}$$

Bất đẳng thức trên đúng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\sum \frac{1}{x^2+7} \geq \frac{9}{\sum a^2 + 21} = \frac{3}{8}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.$\square$

4.9 Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$M = \frac{x+y}{xyz}$$

Lời giải.

Ta có:
$$M = \frac{x+y}{xyz} = \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}$$
Áp dụng các bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và AM - GM, ta được:
$$M \geq \frac{4}{xz+yz} = \frac{4}{\sqrt{z(x+y)}^2} \geq \frac{4}{\left(\dfrac{z+x+y}{2}\right)^2} = 16$$
Vậy $\min M = 16 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}; x = y = \frac{1}{4}$. □

4.10 Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $x^4 + y^4 + z^4 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$N = x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:
$$N^2 \leq (x^4+y^4+z^4)[(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2] = 6(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$$
Ta có một kết quả quen thuộc:
$$xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$$
Do đó
$$N^2 \leq 12(x^2+y^2+z^2)$$
Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:
$$N^4 \leq 144.3(x^4+y^4+z^4) = 1296$$
Từ đây suy ra $N \leq 6$.

Vậy $\max N = 6 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.□

4.11 Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:
$$16xyz(x+y+z) \leq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}^4$$

Lời giải.

Lời giải 1.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:
$$(x+y)(z+x) = \frac{x(x+y+z)}{3} + \frac{x(x+y+z)}{3} + \frac{x(x+y+z)}{3} + yz \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^3(x+y+z)^3yz}{27}}$$
$$y+z \geq 2\sqrt{yz}$$
Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được:
$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8\sqrt[4]{\frac{x^3y^3z^3(x+y+z)^3}{27}}$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}^4 \geq 16xyz(x+y+z)$$
Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.□

Lời giải 2.

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau:
$$\frac{3}{8}(x+y)(y+z)(z+x)\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 2xyz(x+y+z)$$
Trước hết, ta sẽ chứng minh:
$$\frac{9}{8}(x+y)(y+z)(z+x) \geq (x+y+z)(xy+yz+zx) \ (1)$$
Ta có đẳng thức $(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz$

Do đó, (1) $\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 9xyz$

Điều này đúng vì theo bất đẳng thức AM - GM thì $VT \geq 3\sqrt[3]{xyz}.3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = VP$.

Vậy (1) được chứng minh.

Lại áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 3(x+y+z)\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\frac{3}{8}(x+y)(y+z)(z+x) \geq (x+y+z)\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

Bây giờ, ta chỉ cần chứng minh được:

$$\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 2\sqrt[3]{xyz}$$

hay

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

Nhưng điều này lại đúng theo bất đẳng thức AM - GM:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx} = 8xyz$$

Do đó phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.□

4.12 Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1$$

Lời giải.

Dễ thấy bất đẳng thức trên tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:

$$\frac{4a}{3a-b+c} - 1 + \frac{4b}{3b-c+a} - 1 + \frac{4c}{3c-a+b} - 1 \geq 1$$

$$\frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \geq 1$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz:

$$\Sigma\frac{a+b-c}{3a-b+c} = \Sigma\frac{(a+b-c)^2}{(3a-b+c)(a+b-c)} \geq \frac{[\Sigma(a+b-c)]^2}{\Sigma(3a-b+c)(a+b-c)} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1 .$$

Vậy phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.□

4.13 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{b(c+a)}{(b+c)(b+a)} + \frac{c(a+b)}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:

$$\frac{a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$$1 + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 1 + \frac{2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\frac{8abc(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)$$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có:

$$2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2) = 4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2 \leq \frac{9abc}{a+b+c}$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh được:

$$\frac{8abc(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{9abc}{a+b+c}$$

Điều này tương đương với

$$8(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

hay

$$8(a^3+b^3+c^3) \geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+18abc$$

hay

$$8(a^3+b^3+c^3) \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+18abc$$

Bất đẳng thức này đúng từ các bất đẳng thức sau:

$$7(a^3+b^3+c^3) \geq 21abc \text{ (Theo bất đẳng thức AM - GM)}$$

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \text{ (Theo bất đẳng thức Schur)}$$

Vậy phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.□

4.14 Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 3+\frac{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}{abc(a+b+c)}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức trên tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:

$$\frac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc}{abc} \geq 6+\frac{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}{abc(a+b+c)}$$

$$\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}-\frac{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}{abc(a+b+c)} \geq 6$$

$$\frac{2(ab+bc+ca)^2}{abc(a+b+c)} \geq 6$$

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo một kết quả quen thuộc:

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

Vậy phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.□

4.15 Cho ba số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=6$; $ab+bc+ca=9$; $a<b<c$. Chứng minh rằng:

$$0<a<1<b<3<c<4$$

Lời giải.

Theo bất đẳng thức AM - GM:

$$c(6-c)=c(a+b)=ac+bc=9-ab \geq 9-\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{36-(6-c)^2}{2}$$

Suy ra $c \leq 4$. Dấu "=" không xảy ra vì $a<b$. Do đó $c<4$.

Ta có: $(b-a)(b-c)<0$

Từ đó suy ra

$$b^2+9<2b(a+c)=2b(6-b)$$

hay

$$(b-1)(b-3)<0$$

hay

$$1<b<3$$

.

Với cách làm tương tự, ta được $(a-1)(a-3)>0$ và $(c-1)(c-3)>0$.

Do $c > b > 1$ nên $c > 3$.

Do $a < b < 3$ nên $a < 1$.

Vậy ta có $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$.□

4.16 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c)^3}{3(a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2} + \frac{bc(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{ca(c+a)}{c^2+a^2}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:

$$(a+b+c)^3 \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)ab(a+b)}{a^2+b^2} + \frac{3(a^2+b^2+c^2)bc(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{3(a^2+b^2+c^2)ca(c+a)}{c^2+a^2}$$

$$\Sigma a^3 + 3\Sigma ab(a+b) + 6abc \geq 3\Sigma ab(a+b) + \Sigma\frac{3c^2ab(a+b)}{a^2+b^2}$$

$$\Sigma a^3 + 6abc \geq 6abc\Sigma\frac{c(a+b)}{2(a^2+b^2)}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$6abc\Sigma\frac{c(a+b)}{2(a^2+b^2)} \leq 6abc\Sigma\frac{c(a+b)}{(a+b)^2} = 6abc\Sigma\frac{c}{a+b}$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh được:

$$\Sigma a^3 + 6abc \geq 6abc\Sigma\frac{c}{a+b}$$

Điều này tương đương với

$$(\Sigma a^3 + 6abc)(a+b)(b+c)(c+a) \geq 6abc[\Sigma a^3 + \Sigma a^2(b+c) + 3abc]$$

hay

$$\Sigma a^3(a+b)(b+c)(c+a) \geq 6abc[\Sigma a^3 + \Sigma a^2(b+c) + 3abc - (a+b)(b+c)(c+a)]$$

hay

$$\Sigma a^3(a+b)(b+c)(c+a) \geq 6abc(\Sigma a^3 + abc)$$

hay

$$\Sigma a^3[(a+b)(b+c)(c+a) - 6abc] \geq 6a^2b^2c^2$$

Điều này đúng theo bất đẳng thức AM - GM:

$$\Sigma a^3[(a+b)(b+c)(c+a) - 6abc] \geq 3abc(2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca} - 6abc) = 6a^2b^2c^2$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.□

4.17 Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2+b}{b+c} + \frac{b^2+c}{c+a} + \frac{c^2+a}{a+b}$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} P+1 &= \frac{a^2+b}{b+c} + a + \frac{b^2+c}{c+a} + b + \frac{c^2+a}{a+b} + c \\ &= \frac{a(a+b+c)+b}{b+c} + \frac{b(a+b+c)+c}{c+a} + \frac{c(a+b+c)+a}{a+b} \\ &= \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có ngay $P + 1 \geq 3$, suy ra $P \geq 2$.

Vậy $\min P = 2 \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$.□

4.18 Cho $a, b, c, d > 0$ thoả mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng:
$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM liên tiếp, ta có:
$$(ab+cd)(ac+bd) = \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)}^2 \leq \left[\frac{ab+cd+ac+bd}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}.[(a+d)(b+c)]^2$$
$$[(a+d)(b+c)]^2 = \sqrt{(a+d)(b+c)}^4 \leq \left[\frac{a+b+c+d}{2}\right]^4 = 16$$
Từ đây suy ra:
$$(ab+cd)(ac+bd) \leq 4$$
Tương tự, ta chứng minh được:
$$(bc+da)(bd+ac) \leq 4$$
Ta có các đánh giá sau:
$$VT - (ab+cd)(ac+bd) = -bd(a-c)(b-d)$$
$$VT - (bc+da)(bd+ac) = ac(a-c)(b-d)$$
Dễ thấy trong 2 biểu thức trên có một biểu thức không dương nên
$$VT \leq \max\{(ab+cd)(ac+bd), (bc+da)(bd+ac)\} \leq 4$$
Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$.□

4.19 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^3+abc}{b^3+c^3+abc} + \frac{b^3+abc}{c^3+a^3+abc} + \frac{c^3+abc}{a^3+b^3+abc} \geq 2$$

Lời giải.

Do bất đẳng thức là thuần nhất nên ta chuẩn hoá $abc = 1$. Ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:
$$\frac{a+1}{b+c+1} + \frac{b+1}{c+a+1} + \frac{c+1}{c+a+1} \geq 2$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:
$$\begin{aligned} VT &= \frac{(a+1)^2}{(a+1)(b+c+1)} + \frac{(b+1)^2}{(b+1)(c+a+1)} + \frac{(c+1)^2}{(c+1)(c+a+1)} \\ &\geq \frac{(a+b+c+3)^2}{2(ab+bc+ca)+3(a+b+c)+3} \end{aligned}$$
Ta sẽ chứng minh:
$$\frac{(a+b+c+3)^2}{2(ab+bc+ca)+3(a+b+c)+3} \geq 2$$
Điều này tương đương với:
$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+6(a+b+c)+9 \geq 4(ab+bc+ca)+6(a+b+c)+6$$
hay
$$3 \geq 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)$$
Theo bất đẳng thức Schur, ta có:
$$2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2) = 4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2 \leq \frac{9abc}{a+b+c} = \frac{9}{a+b+c}$$
Vậy ta chỉ cần chứng minh:
$$\frac{9}{a+b+c} \leq 3$$

hay

$$3\sqrt[3]{abc} \le a+b+c$$

Điều này đúng theo bất đẳng thức AM - GM.

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c.\square$

4.20 Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{5b^2+(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{5c^2+(a+b)^2}} \le \sqrt{\frac{a+b+c}{3}}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$VT \le \sqrt{(a+b+c)\left[\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\right]}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2} \le \frac{1}{3}$$

Ta có:

$$\Sigma\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}=\Sigma\frac{1}{9}.\frac{(3a)^2}{a^2+b^2+c^2+4a^2+2bc}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta được:

$$\Sigma\frac{(3a)^2}{a^2+b^2+c^2+4a^2+2bc} \le \Sigma\left(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{a^2}{2a^2+bc}\right)=\Sigma\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\Sigma\frac{2a^2}{2a^2+bc}$$

Do đó:

$$\Sigma\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2} \le \frac{1}{9}\left(\Sigma\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\Sigma\frac{2a^2}{2a^2+bc}\right)=\frac{1}{9}\left(1+\Sigma\frac{2a^2}{2a^2+bc}\right)$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh được:

$$\frac{1}{9}\left(1+\Sigma\frac{2a^2}{2a^2+bc}\right) \le \frac{1}{3}$$

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:

$$1+\Sigma\frac{2a^2}{2a^2+bc} \le 3$$

$$4-\Sigma\frac{bc}{2a^2+bc} \le 3$$

$$\Sigma\frac{bc}{2a^2+bc} \ge 1$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì theo Cauchy - Schwarz thì:

$$\Sigma\frac{bc}{2a^2+bc}=\Sigma\frac{b^2c^2}{2a^2bc+b^2c^2} \ge \frac{(ab+bc+ca)^2}{\Sigma a^2b^2+2abc(a+b+c)}=1$$

Vậy phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c.\square$

4.21 Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$(a+c)(b+1) \ge abc(a^2+b^2+c^2+1)$$

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{(a-c)^2}{4ac} \ge \frac{(a-c)^2}{2b^2+2+(a+c)^2}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{(a+c)^2}{4ac} - 1 \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2+1)}{2b^2+2+(a+c)^2} - 1$$

hay

$$\frac{(a+c)^2}{4ac} \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2+1)}{2b^2+2+(a+c)^2}$$

hay

$$\frac{[2b^2+2+(a+c)^2](a+c)^2b}{8} \geq abc(a^2+b^2+c^2+1)$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$(a+c)(b+1) \geq \frac{[2b^2+2+(a+c)^2](a+c)^2b}{8}$$

hay

$$8(b+1) - [2b^2+2+(a+c)^2](a+c)b \geq 0$$

Kết hợp với giả thiết $a+b+c=3$, ta suy ra cần phải chứng minh:

$$8(b+1) - [2b^2+2+(3-b)^2](3-b)b \geq 0$$

hay

$$3b^4 - 15b^3 + 29b^2 - 25b + 8 \geq 0$$

hay

$$(b-1)^2(3b^2-9b+8) \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1.\square$

4.22 Cho $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Lời giải.

Ta có:

$$Q = 3 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó thì

$$(x-y)(y-z) \geq 0$$

hay

$$y^2 + xz \leq xy + yz$$

hay

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{y} \leq 1 + \frac{z}{x} \text{ và } \frac{y}{z} + \frac{x}{y} \leq 1 + \frac{x}{z}$$

Vì vậy

$$Q \leq 5 + 2\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)$$

Dễ thấy $1 \leq \frac{x}{z} \leq 2$ nên $(x-2z)(x-z) \leq 0$ hay $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{5}{2}$.

Từ đó suy ra $Q \leq 10$.

Vậy $\max Q = 10 \Leftrightarrow x = y = 2; z = 1$ hoặc $x = 2; y = z = 1$ và các hoán vị.$\square$

4.23 Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4}$$

Lời giải.

Xuctu.com®

Sử dụng bất đẳng thức Holder cùng với đánh giá $3abc \geq 0$, ta có:

$$\Sigma\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \Sigma\sqrt{\frac{a^3}{a^2(b+c)}} \geq \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}}$$
$$\geq \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}} = \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz liên tiếp, ta có:

$$\Sigma\frac{ab}{(a+b)^2} \geq \Sigma\frac{ab}{2(a^2+b^2)} = \Sigma\frac{(a+b)^2}{4(a^2+b^2)} - \frac{3}{4} \geq \frac{4(a+b+c)^2}{8(a^2+b^2+c^2)} - \frac{3}{4} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} - \frac{3}{4}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được:

$$\Sigma\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \Sigma\frac{ab}{(a+b)^2} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}} + \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} - \frac{3}{4}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}} + \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} - \frac{3}{4} \geq \frac{9}{4}$$

hay

$$\frac{a+b+c}{2\sqrt{ab+bc+ca}} + \frac{a+b+c}{2\sqrt{ab+bc+ca}} + \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \geq 3$$

Điều này đúng theo bất đẳng thức AM - GM:

$$VT \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^4}{[2\sqrt{2(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)}]^2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^4}{[2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)]^2}} = 3$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b; c = 0$ và các hoán vị.□

4.24 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} \leq \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{1}{4}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:

$$\frac{-4ab}{(a+b)^2} + \frac{-4bc}{(b+c)^2} + \frac{-4ca}{(c+a)^2} \geq \frac{-16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 1$$
$$\frac{-4ab}{(a+b)^2} + 1 + \frac{-4bc}{(b+c)^2} + 1 + \frac{-4ca}{(c+a)^2} + 1 + \frac{16abc - 2(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$
$$\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} + \frac{(c-a)^2}{(c+a)^2} - \frac{2a(b-c)^2 + 2b(c-a)^2 + 2c(a-b)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$
$$\Sigma\frac{(b-c)^2}{b+c}\left[\frac{1}{b+c} - \frac{2a}{(c+a)(a+b)}\right] \geq 0$$
$$\Sigma\frac{(b-c)^2}{b+c}.\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$
$$\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\Sigma\frac{b-c}{b+c} \geq 0$$
$$\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$
$$\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.□

4.25 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:
$$\sqrt{\frac{2a}{b+c}}+\sqrt{\frac{2b}{c+a}}+\sqrt{\frac{2c}{a+b}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải.

Lời giải 1.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:
$$2\sqrt{2a(b+c)} \leq b+c+2a$$
Từ đó suy ra
$$\sqrt{\frac{2a}{b+c}}=\frac{4a}{2\sqrt{2a(b+c)}} \geq \frac{4a}{b+c+2a}$$
Tương tự, ta chứng minh được:
$$\sqrt{\frac{2b}{c+a}} \geq \frac{4b}{c+a+2b}$$
$$\sqrt{\frac{2c}{a+b}} \geq \frac{4c}{a+b+2c}$$
Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:
$$VT \geq \frac{4a}{b+c+2a}+\frac{4b}{c+a+2b}+\frac{4c}{a+b+2c}$$
Ta sẽ chứng minh
$$\frac{4a}{b+c+2a}+\frac{4b}{c+a+2b}+\frac{4c}{a+b+2c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:
$$\Sigma\frac{4a}{b+c+2a}=\Sigma\frac{4a^2}{ab+ac+2a^2} \geq \frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}=\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$
Bây giờ ta chỉ cần chứng minh được
$$\frac{2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$
hay
$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$
Đây là một kết quả quen thuộc.

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.□

Lời giải 2.

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có:
$$\left(\sqrt{\frac{2a}{b+c}}+\sqrt{\frac{2b}{c+a}}+\sqrt{\frac{2c}{a+b}}\right)^2\left[\frac{a^2(b+c)}{2}+\frac{b^2(c+a)}{2}+\frac{c^2(a+b)}{2}\right] \geq (a+b+c)^3$$
hay
$$VT^2 \geq \frac{2(a+b+c)^3}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}$$
Ta sẽ chứng minh
$$\frac{2(a+b+c)^3}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)} \geq \frac{(a+b+c)^4}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$
Bất đẳng thức này tương đương với
$$2(a^2+b^2+c^2)^2 \geq (a+b+c)[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]$$
hay
$$2(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)+2abc(a+b+c)$$
Ta có hai cách để chứng minh bất đẳng thức này.

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức Schur, ta có:

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 3abc(a+b+c)$$

hay

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3abc(a+b+c)$$

Ta có đánh giá

$$a^2+b^2+c^2\geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

nên

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geq \frac{(a+b+c)^4}{9}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^4}{9}\geq 3abc(a+b+c)$$

hay

$$(a+b+c)^3\geq 27abc$$

hay

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Điều này đúng theo bất đẳng thức AM - GM.

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. $\square$

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$ab(a^2+b^2)\leq \frac{(a^2+b^2)^2}{2}=\frac{a^4+b^4}{2}+a^2b^2$$

Tương tự, ta chứng minh được

$$bc(b^2+c^2)\leq \frac{b^4+c^4}{2}+b^2c^2$$
$$ca(c^2+a^2)\leq \frac{c^4+a^4}{2}+c^2a^2$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\leq a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

Ta cần chứng minh

$$2abc(a+b+c)\leq a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

Điều này đúng vì theo bất đẳng thức AM - GM:

$$(a^4+b^2c^2)+(b^4+c^2a^2)+(c^4+a^2b^2)\geq 2a^2bc+2b^2ca+2c^2ab=2abc(a+b+c)$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.$\square$

4.26 Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh rằng:

$$2(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+b^2c+c^2a)\leq 3$$

Lời giải.

Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$ thì:

$$2c^3\leq b^2c+c^2a$$

hay

$$2c^3-(b^2c+c^2a)\leq 0$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$2(a^3+b^3)-a^2b\leq 3$$

Nếu $a \geq b \geq 0$, ta có:

$$2(a^3+b^3)-a^2b = 2a^3+b^3+b(b^2-a^2) \leq 2+1+0=3$$

Nếu $b \geq a \geq 0$, ta có:

$$2(a^3+b^3)-a^2b = a^3+2b^3+a^2(a-b) \leq 2+1+0=3$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $a=b=1, c=0$ và các hoán vị.□

4.27 Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x \geq max\{y,z\} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x}{y} + 2\sqrt{1+\frac{y}{z}} + 3\sqrt[3]{1+\frac{z}{x}}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$1+\frac{y}{z} \geq 2\sqrt{\frac{y}{z}}$$
$$1+\frac{z}{x} \geq 2\sqrt{\frac{z}{x}}$$

Từ đó ta suy ra:

$$M \geq \frac{x}{y} + 2\sqrt{2}.\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 3\sqrt[3]{2}.\sqrt[6]{\frac{z}{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y} + 4\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 6\sqrt[6]{\frac{z}{x}}\right) + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{x}{y} + (3\sqrt[3]{2}-3\sqrt{2})\sqrt[6]{\frac{z}{x}}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y} + 4\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 6\sqrt[6]{\frac{z}{x}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.11\sqrt[11]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}} = \frac{11}{\sqrt{2}}$$

Từ giả thiết $x \geq max\{y,z\}$, ta suy ra:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} \geq 1 \\ \frac{z}{x} \leq 1 \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{cases} \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{x}{y} \geq 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ (3\sqrt[3]{2}-3\sqrt{2})\sqrt[6]{\frac{z}{x}} \geq 3\sqrt[3]{2}-3\sqrt{2} \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra:

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y} + 4\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 6\sqrt[6]{\frac{z}{x}}\right) + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{x}{y} + (3\sqrt[3]{2}-3\sqrt{2})\sqrt[6]{\frac{z}{x}} \\ &\geq \frac{11}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Vậy $\min M = 1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x=y=z$.□

4.28 Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}} \geq \frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{3a}{\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}} = 3\sqrt[3]{\frac{a.a.a}{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}} \le \frac{a}{a}+\frac{2a}{a+b}+\frac{3a}{a+b+c} = 1+\frac{2a}{a+b}+\frac{3a}{a+b+c}$$

$$\frac{3\sqrt{ab}}{\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}} = 3\sqrt[3]{\frac{a.\sqrt{ab}.b}{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}} \le \frac{a}{a}+\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{3b}{a+b+c} \le 2+\frac{3b}{a+b+c}$$

$$\frac{3\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}} = 3\sqrt[3]{\frac{abc}{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}} \le \frac{a}{a}+\frac{2b}{a+b}+\frac{3c}{a+b+c} = 1+\frac{2b}{a+b}+\frac{3c}{a+b+c}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{3a}{\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}}+\frac{3\sqrt{ab}}{\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}} \le 9$$

hay

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3} \le \sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}$$

Đây chính là điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c.\square$

4.29 Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\left(8+\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}} \ge 3(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc})$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{\sqrt{ab}}{3}+\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}\right)} \ge \frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(8+\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}} \ge 9\sqrt[3]{\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{\sqrt{ab}}{3}+\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}\right)}$$

hay

$$\left(8+\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} \ge 9\sqrt[3]{\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}}$$

Điều này đúng vì theo bất đẳng thức AM - GM:

$$\left(8+\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} = \left[3+3+\frac{2(a+\sqrt{ab}+b)}{a+b}\right].\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} \ge 3\sqrt[3]{3^2.\frac{2(a+\sqrt{ab}+b)}{a+b}.\frac{a+b}{2}} = 9\sqrt[3]{\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c.\square$

4.30 Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{4+2b^2(a+c)+c^3}+\frac{b^3}{4+2c^2(b+a)+a^3}+\frac{c^3}{4+2a^2(c+b)+b^3} \ge \frac{1}{3}$$

Lời giải.

Ta có một bổ đề cơ bản:

Với m, n, p, x, y, z là các số thực dương bất kì, ta luôn có bất đẳng thức:

$$\frac{m^3}{x}+\frac{n^3}{y}+\frac{p^3}{z}\ge\frac{(m+n+p)^3}{3(x+y+z)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=n=p, x=y=z.$

Bổ đề này có thể chứng minh dễ dàng bằng bất đẳng thức Holder như sau:

$$\left(\frac{m^3}{x}+\frac{n^3}{y}+\frac{p^3}{z}\right)(x+y+z)(1+1+1)\ge(m+n+p)^3$$

Chia cả hai vế cho $3(x+y+z)$, ta có ngay điều phải chứng minh.

Trở lại với bài toán. Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$VT\ge\frac{(a+b+c)^3}{3[12+a^3+b^3+c^3+2b^2(a+c)+2c^2(b+a)+2a^2(c+b)]}$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^3}{3[12+a^3+b^3+c^3+2a^2(c+b)+2b^2(a+c)+2c^2(b+a)]}\ge\frac{1}{3}$$

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:

$$(a+b+c)^3\ge 12+a^3+b^3+c^3+2b^2(a+c)+2c^2(b+a)+2a^2(c+b)$$

$$a^2(c+b)+b^2(a+c)+c^2(b+a)+6abc\ge 12$$

$$(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc\ge 12$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì theo bất đẳng thức AM - GM thì:

$$(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc\ge 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}+6abc=12abc=12$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1.\square$

4.31 Cho $a, b, c>0$ thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9\ge 10(a^2+b^2+c^2)$$

Lời giải.

Giả sử $a=\max\{a,b,c\}$, dễ thấy $a\in[1;3)$.

Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{8}{a}+\frac{8}{b}+\frac{8}{c}+42a+42b+42c-117\ge 10a^2+10b^2+10c^2$$

hay

$$\left(-10b^2+42b-\frac{69}{2}+\frac{8}{b}\right)+\left(-10c^2+42c-\frac{69}{2}+\frac{8}{c}\right)\ge 10a^2-42a+48-\frac{8}{a}$$

hay

$$\frac{(2b-1)^2(16-5b)}{b}+\frac{(2c-1)^2(16-5c)}{c}\ge\frac{(a-2)^2(20a-4)}{a}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$VT=\frac{(1-2b)^2}{\frac{b}{16-5b}}+\frac{(1-2c)^2}{\frac{c}{16-5c}}\ge\frac{[2(1-b-c)]^2}{\frac{b}{16-5b}+\frac{c}{16-5c}}=\frac{4(a-2)^2}{\frac{b}{16-5b}+\frac{c}{16-5c}}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{(a-2)^2}{\frac{b}{16-5b}+\frac{c}{16-5c}}\ge\frac{(a-2)^2(5a-1)}{a}$$

Ta có:

$$\frac{b}{16-5b}+\frac{c}{16-5c}\le\frac{b}{16-5a}+\frac{c}{16-5a}=\frac{3-a}{16-5a}$$

Do đó:

$$\frac{(a-2)^2}{\dfrac{b}{16-5b}+\dfrac{c}{16-5c}} \geq \frac{(a-2)^2}{\dfrac{3-a}{16-5a}}$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{(a-2)^2}{\dfrac{3-a}{16-5a}} \geq \frac{(a-2)^2(5a-1)}{a}$$

Điều này tương đương với:

$$(a-2)^2(16a-5a^2) \geq (a-2)^2(-5a^2+16a-3)$$

hay

$$3(a-2)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c) = \left(2;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và các hoán vị.□

4.32 Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+\dfrac{1}{4}abc+b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+\dfrac{1}{4}abc+c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+\dfrac{1}{4}abc+a^3}} \leq 2$$

Lời giải.

Do bất đẳng thức là thuần nhất nên ta chuẩn hoá $abc=1$. Ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:

$$\sqrt{\frac{a}{a+\frac{1}{4}+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+\dfrac{1}{4}+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+\dfrac{1}{4}+a}} \leq 2$$

hay

$$\sqrt{\frac{a}{4a+4b+1}}+\sqrt{\frac{b}{4b+4c+1}}+\sqrt{\frac{c}{4c+4a+1}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} VT^2 = \Sigma\left[\sqrt{\frac{(4a+4c+1)a}{(4a+4b+1)(4a+4c+1)}}\right]^2 &\leq [\Sigma(4a+4c+1)]\left[\Sigma\frac{a}{(4a+4b+1)(4a+4c+1)}\right] \\ &= \frac{(8a+8b+8c+3)(8ab+8bc+8ca+a+b+c)}{(4a+4b+1)(4b+4c+1)(4c+4a+1)} \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{(8a+8b+8c+3)(8ab+8bc+8ca+a+b+c)}{(4a+4b+1)(4b+4c+1)(4c+4a+1)} \leq 1$$

hay

$$(8a+8b+8c+3)(8ab+8bc+8ca+a+b+c) \leq (4a+4b+1)(4b+4c+1)(4c+4a+1)$$

Ta có nhận xét:

$$\begin{aligned} VT &= 64(a+b+c)(ab+bc+ca)+8(a+b+c)^2+24(ab+bc+ca)+3(a+b+c) \\ &= 64[(a+b)(b+c)(c+a)+abc]+8(a+b+c)^2+24(ab+bc+ca)+3(a+b+c) \\ &= 64(a+b)(b+c)(c+a)+64+8(a+b+c)^2+24(ab+bc+ca)+3(a+b+c) \text{ (do } abc=1) \\ VP &= 64(a+b)(b+c)(c+a)+16(a+b)(b+c)+16(a+b)(c+a)+16(b+c)(c+a) \\ &+4(a+b)+4(b+c)+4(c+a)+1 \\ &= 64(a+b)(b+c)(c+a)+16(3ab+3bc+3ca+a^2+b^2+c^2)+8(a+b+c)+1 \\ &= 64(a+b)(b+c)(c+a)+16(a+b+c)^2+16(ab+bc+ca)+8(a+b+c)+1 \end{aligned}$$

nên
$$VP - VT = 8(a+b+c)^2 + 5(a+b+c) - 8(ab+bc+ca) - 63$$
Bây giờ ta chỉ cần chứng minh:
$$8(a+b+c)^2 + 5(a+b+c) - 8(ab+bc+ca) - 63 \geq 0$$
hay
$$16(a+b+c)^2 + 15(a+b+c) + 8[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)] \geq 189$$
Bất đẳng thức này đúng từ các bất đẳng thức sau:
$$16(a+b+c)^2 \geq 16(3\sqrt[3]{abc})^2 = 144 \text{ (Theo bất đẳng thức AM - GM)}$$
$$15(a+b+c) \geq 45\sqrt[3]{abc} = 45 \text{ (Theo bất đẳng thức AM - GM)}$$
$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$
Vậy phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c.\square$

4.33 Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:
$$\sqrt[3]{b+c-a} + \sqrt[3]{c+a-b} + \sqrt[3]{a+b-c} \leq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có:
$$(\sqrt[3]{c+a-b} + \sqrt[3]{a+b-c})^3 \leq (1+1)(1+1).2a = 8a$$
Do đó
$$\sqrt[3]{c+a-b} + \sqrt[3]{a+b-c} \leq 2\sqrt[3]{a}$$
Tương tự, ta chứng minh được
$$\sqrt[3]{a+b-c} + \sqrt[3]{b+c-a} \leq 2\sqrt[3]{b}$$
$$\sqrt[3]{b+c-a} + \sqrt[3]{c+a-b} \leq 2\sqrt[3]{c}$$
Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:
$$2(\sqrt[3]{b+c-a} + \sqrt[3]{c+a-b} + \sqrt[3]{a+b-c}) \leq 2(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})$$
hay
$$\sqrt[3]{b+c-a} + \sqrt[3]{c+a-b} + \sqrt[3]{a+b-c} \leq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$$
Đây chính là điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c.\square$

4.34 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:
$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

Lời giải.

Vì bất đẳng thức là thuần nhất nên ta chuẩn hóa $a+b+c = 3$. Khi ấy, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:
$$\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2} + \frac{(3-2b)^2}{(3-b)^2+b^2} + \frac{(3-2c)^2}{(3-c)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$
Bất đẳng thức này tương đương với:
$$\frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9} + \frac{4b^2-12b+9}{2b^2-6b+9} + \frac{4c^2-12c+9}{2c^2-6c+9} \geq \frac{3}{5}$$
Ta có nhận xét:
$$\frac{4x^2-12x+9}{2x^2-6x+9} + \frac{18x-23}{25} = \frac{36x^3-54x^2+18}{25(2x^2-6x+9)} = \frac{18}{25}.\frac{(x-1)^2(2x+1)}{2x^2-6x+9} \geq 0, \forall x > 0$$

Do đó:

$$\frac{4x^2-12x+9}{2x^2-6x+9}\geq\frac{23-18x}{25},\forall x>0$$

Sử dụng nhận xét trên, ta có ngay:

$$\frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9}+\frac{4b^2-12b+9}{2b^2-6b+9}+\frac{4c^2-12c+9}{2c^2-6c+9}\geq\frac{69-18(a+b+c)}{25}=\frac{3}{5}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c.\square$

Lời giải 2

Bất đẳng thức tương đương với:

$$1-\frac{2a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+1-\frac{2b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+1-\frac{2c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}$$

hay

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{6}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$(b+c)^2+a^2=\frac{3(b+c)^2}{4}+\frac{(b+c)^2}{4}+a^2\geq\frac{3(b+c)^2}{4}+a(b+c)=(b+c).\frac{3b+3c+4a}{4}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}\leq\frac{a(b+c)}{(b+c).\dfrac{3b+3c+4a}{4}}=\frac{4a}{3b+3c+4a}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{27}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{9}{\dfrac{a+b+c}{3}}\geq\frac{10^2}{a+\dfrac{9(a+b+c)}{3}}=\frac{100}{3b+3c+4a}$$

Do đó:

$$\frac{4a}{3b+3c+4a}\leq\frac{4a}{100}.\left(\frac{1}{a}+\frac{27}{a+b+c}\right)=\frac{1}{25}+\frac{27a}{25(a+b+c)}$$

Vậy tóm lại, ta thu được:

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}\leq\frac{1}{25}+\frac{27a}{25(a+b+c)}$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}\leq\frac{1}{25}+\frac{27b}{25(a+b+c)}$$

$$\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{1}{25}+\frac{27c}{25(a+b+c)}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{27(a+b+c)}{25(a+b+c)}+\frac{3}{25}=\frac{6}{5}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c.\square$

4.35 Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\geq\sqrt{3}$$

.

Lời giải.

Từ giả thiết $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\geq 1$, ta suy ra:

$$a+b+c\geq abc$$

Ta có một kết quả quen thuộc:

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

Áp dụng các bất đẳng thức trên, ta có:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq (ab+bc+ca)^2 \geq 3(ab^2c+bc^2a+ca^2b) = 3abc(a+b+c) \geq 3(abc)^2$$

Điều này tương đương với:

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3}abc$$

hay

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab} \geq \sqrt{3}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.□

4.36 Cho x, y, z, t là các số thực thoả mãn $|x+y+z-t| \leq 1$ và các hoán vị. Chứng minh rằng:

$$x^2+y^2+z^2+t^2 \leq 1$$

Lời giải.

Từ giả thiết $|x+y+z-t| \leq 1$, ta suy ra:

$$x^2+y^2+z^2+t^2+2(xy+xz+yt-xt-yt-zt) \leq 1$$

Tương tự đối với các hoán vị, ta cũng có:

$$x^2+y^2+z^2+t^2+2(yz+yt+zt-yx-zx-tx) \leq 1$$
$$x^2+y^2+z^2+t^2+2(zt+zx+tx-zy-ty-xy) \leq 1$$
$$x^2+y^2+z^2+t^2+2(tx+ty+xy-tz-xz-yz) \leq 1$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên, ta được:

$$4(x^2+y^2+z^2+t^2) \leq 4$$

hay

$$x^2+y^2+z^2+t^2 \leq 1$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=t=\pm\frac{1}{2}$.□

4.37 Cho $a, b, c \in R$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4-\frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)$$

Lời giải.

Đặt $a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{z+x-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}$ thì:

$$P = z^4+x^4+y^4-\frac{1}{28}[(y+z-x)^4+(z+x-y)^4+(x+y-z)^4]$$

Đặt $Q = (y+z-x)^4+(z+x-y)^4+(x+y-z)^4$.

Ta có đẳng thức:

$$(u+v)^4+(u-v)^4 = 2(u^4+v^4+6u^2v^2)$$

Ta áp dụng đẳng thức trên như sau:

$$(x+y+z)^4+(x+y-z)^4 = 2[(x+y)^4+z^4+6z^2(x+y)^2]$$
$$(z+x-y)^4+(z+y-x)^4 = 2[(x-y)^4+z^4+6z^2(x-y)^2]$$

Cộng theo vế hai đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} Q+(x+y+z)^4 &= (x+y+z)^4+(x+y-z)^4+(z+x-y)^4+(z+y-x)^4 \\ &= 4[(x^4+y^4+6x^2y^2)+z^4+3z^2(2x^2+2y^2)] \\ &= 4[x^4+y^4+z^4+6(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)] \end{aligned}$$

Ta có một kết quả quen thuộc:

$$mn + np + pm \le m^2 + n^2 + p^2$$

Do đó

$$Q \le 28(x^4 + y^4 + z^4) - (x + y + z)^4 \le 28(x^4 + y^4 + z^4)$$

Suy ra

$$P = z^4 + x^4 + y^4 - \frac{1}{28}Q \ge x^4 + y^4 + z^4 - (x^4 + y^4 + z^4) = 0$$

Vậy $\min P = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$, hay $a = b = c = 0$.□

4.38 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \ge \sqrt[4]{3}.\sqrt[4]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lời giải.

Mũ 4 hai vế, ta được:

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^4 \ge \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2)^2}{abc}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{b^2c} + \frac{c^4}{c^2a} \ge \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^3 \ge \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)(a^2b + b^2c + c^2a)}{abc}$$

hay

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^6 \ge \frac{9(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^2b + b^2c + c^2a)^2}{(abc)^2}$$

Ta có bổ đề sau:

Với x, y, z là các số thực dương bất kì, ta luôn có bất đẳng thức:

$$(x + y + z)^6 \ge 27(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Bổ đề này có thể chứng minh dễ dàng bằng AM - GM như sau:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{27(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)^2} &= 3\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)^2}\\ &\le x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)\\ &= (x + y + z)^2\end{aligned}$$

Lập phương hai vế, ta có ngay điều phải chứng minh.

Trở lại với bài toán. Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^6 \ge 27\left(\frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2}\right)\left(\frac{a^2b}{c} + \frac{b^2c}{a} + \frac{c^2a}{b}\right)^2$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$27\left(\frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2}\right)\left(\frac{a^2b}{c} + \frac{b^2c}{a} + \frac{c^2a}{b}\right)^2 \ge \frac{9(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^2b + b^2c + c^2a)^2}{(abc)^2}$$

hay

$$3\left(\frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2}\right)(a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2)^2 \ge (a^3 + b^3 + c^3)^2(a^2b + b^2c + c^2a)^2$$

Bất đẳng thức này đúng từ các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}\right)(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2)(a^2+b^2+c^2) &\geq (a^3+b^3+c^3)^3 \text{ (Theo Holder)}\\
(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2)(a+b+c) &\geq (a^2b+b^2c+c^2a)^2 \text{ (Theo Cauchy - Schwarz)}\\
3(a^3+b^3+c^3) &\geq (a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \text{ (Theo Chebychev)}
\end{aligned}$$

Vậy phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c.\square$

4.39 Cho $a,b,c,d>0$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\left(d+\frac{1}{d}\right)\geq\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right)$$

Lời giải.

Bất đẳng thức ban đầu tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:

$$\prod(a^2+1)\geq\prod(ab+1)$$
$$\Leftrightarrow\left[\prod(a^2+1)\right]^2\geq\left[\prod(ab+1)\right]^2$$
$$\Leftrightarrow\prod(a^2+1)(b^2+1)\geq\prod(ab+1)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz.

Do đó phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d.\square$

4.40 Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2)\geq 8$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:

$$(a+b^2)(a+1)\geq(a+b)^2$$

Tương tự, ta chứng minh được:

$$(b+c^2)(b+1)\geq(b+c)^2$$
$$(c+a^2)(c+1)\geq(c+a)^2$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2)(a+1)(b+1)(c+1)\geq[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{[(a+b)(b+c)(c+a)]^2}{(a+1)(b+1)(c+1)}\geq 8$$

Ta có thể chứng minh bằng cách chỉ ra:

$$\begin{cases}(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8 & (1)\\ \dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+1)(b+1)(c+1)}\geq 1 & (2)\end{cases}$$

Hai điều này có thể chứng minh đơn giản như sau:

Từ giả thiết $ab+bc+ca=3$, ta dễ dàng suy ra:

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=9 \text{ hay } a+b+c\geq 3$$
$$3=ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \text{ hay } abc\leq 1 \text{ (Theo bất đẳng thức AM - GM)}$$

Chứng minh (1):

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=3(a+b+c)-abc\geq 8$$

Chứng minh (2):

Ta có:

$$\begin{aligned}
& (a+b)(b+c)(c+a)-(a+1)(b+1)(c+1) \\
= \; & 3(a+b+c)-abc-(a+b+c+ab+bc+ca+abc+1) \\
= \; & 2(a+b+c)-2abc-4 \geq 0
\end{aligned}$$

Do đó

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (a+1)(b+1)(c+1)$$

hay

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq 1$$

Vậy phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.□

3.5 Bài 5.1 đến bài 5.40

5.1 Cho $a, b, c \geq 0$ thoả mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(bc+ca-2ab)}{(2a+b)^2}+\frac{b(ca+ab-2bc)}{(2b+c)^2}+\frac{c(ab+bc-2ca)}{(2c+a)^2} \geq 0$$

Lời giải.

Ta thấy:

$$\begin{aligned}
\frac{a(bc+ca-2ab)}{(2a+b)^2} &= \frac{a[(2b^2+bc)+(2ac+bc)-2(2ab+b^2)]}{(2a+b)^2} \\
&= \frac{ab(2b+c)}{(2a+b)^2}+\frac{ca}{2a+b}-\frac{2ab}{2a+b}
\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
\Sigma\frac{a(bc+ca-2ab)}{(2a+b)^2} &= \Sigma\frac{ab(2b+c)}{(2a+b)^2}+\Sigma\frac{ca}{2a+b}-\Sigma\frac{2ab}{2a+b} \\
&= \Sigma\frac{ab(2b+c)}{(2a+b)^2}+\Sigma\frac{ab}{2b+c}-\Sigma\frac{2ab}{2a+b} \\
&= \Sigma ab(2b+c)\left[\frac{1}{(2a+b)^2}-\frac{2}{(2a+b)(2b+c)}+\frac{1}{(2b+c)^2}\right] \\
&= \Sigma ab(2b+c)\left(\frac{1}{2a+b}-\frac{1}{2b+c}\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $(a,b,c)=(0;1;2)$ và các hoán vị.□

5.2 Cho $a, b, c \geq 0$ thoả mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Lời giải.

Lời giải 1.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$.

Ta có một bổ đề quen thuộc:

Với $x \geq y > 0$ và $z \geq 0$ thì ta luôn có bất đẳng thức:

$$\frac{x}{y} \geq \frac{x+z}{y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$ hoặc $z=0$.

Bổ đề này có thể chứng minh dễ dàng bằng cách xét hiệu như sau:

$$\frac{x}{y} - \frac{x+z}{y+z} = \frac{z(x-y)}{y(y+z)} \geq 0 \text{ (do } x \geq y > 0 \text{ và } z \geq 0)$$

Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a^2+b^2+2c^2}{c^2+ab+bc+ca} = \frac{a^2+b^2+2c^2}{(a+c)(b+c)}$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{a^2+b^2+2c^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:

$$(a^2+b^2+2c^2)(a+b) + 8abc \geq 2(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^3+a^2b+ab^2+b^3+2ac^2+2bc^2+8abc \geq 2a^2b+2b^2c+2c^2a+2ab^2+2bc^2+2ca^2+4abc$$

$$a^3-a^2b-ab^2+b^3-2ac^2+4abc-2bc^2 \geq 0$$

$$(a+b)(a-b)^2 - 2c(a-b)^2 \geq 0$$

$$(a+b-2c)(a-b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do giả sử $a \geq b \geq c$.

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.$\square$

Lời giải 2.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$.

Ta có hai đẳng thức sau:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \Sigma(a-b)(a-c)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) - 8abc = \Sigma(b+c)(a-b)(a-c)$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại như sau:

$$\frac{ab+bc+ca+\Sigma(a-b)(a-c)}{ab+bc+ca} + \frac{(a+b)(b+c)(c+a) - \Sigma(b+c)(a-b)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$\frac{\Sigma(a-b)(a-c)}{ab+bc+ca} - \frac{\Sigma(b+c)(a-b)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$

hay

$$\Sigma\left[\frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(a+b)(a+c)}\right](a-b)(a-c) \geq 0$$

Ta dễ thấy ngay rằng bất đẳng thức sẽ đúng theo bất đẳng thức Vornicu Schur nếu ta chỉ ra được:

$$\frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(a+b)(a+c)} \geq \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(b+c)(b+a)}$$

Điều này tương đương với:

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{1}{(b+c)(b+a)}$$

hay

$$(b+c)(b+a) \leq (a+b)(a+c)$$

hay

$$b \leq a \text{ (đúng theo giả sử)}$$

Vậy phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.$\square$

5.3 Cho x, y là các số thực. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4(2x+y)-13}{(x^2+5)(y^2+5)}$$

Lời giải.

Ta thấy rằng:
$$\max P = \frac{4}{21} \Leftrightarrow x = 4; y = \frac{1}{2}$$
nên ta sẽ chứng minh $P \leq \frac{4}{21}$ với dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 4; y = \frac{1}{2}$. □

Thật vậy:
$$\frac{4(2x+y)-13}{(x^2+5)(y^2+5)} \leq \frac{4}{21}$$
Bất đẳng thức này tương đương với:
$$168x + 84y - 273 \leq 4x^2y^2 + 20x^2 + 20y^2 + 100$$
hay
$$4(x^2y^2 - 4xy + 4) + 16x^2 + 4y^2 + 289 + 16xy - 136x - 68y + 4(x^2 - 8x + 16) + 4(4y^2 - 4y + 1) \geq 0$$
hay
$$4(xy-2)^2 + (4x+2y-17)^2 + 4(x-4)^2 + 4(2y-1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$
Vậy $\max P = \frac{4}{21} \Leftrightarrow x = 4; y = \frac{1}{2}$.□

5.4 Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $12a^2 + 3b^2 + 2c^2 = 20$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$M = (a+b)(1+c)$$

Lời giải.

Đặt $m = \frac{1}{\sqrt{5}}, n = \frac{4}{\sqrt{5}}, p = 2, k = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:
$$M^2 \leq (m+n)\left(\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n}\right)(1+p)\left(1 + \frac{c^2}{p}\right) = N$$
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:
$$N = \frac{(m+n)(1+p)}{k}.\left(\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n}\right)\left(k + \frac{kc^2}{p}\right) \leq \frac{(m+n)(1+p)}{4k}.\left(\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} + k + \frac{kc^2}{p}\right)^2$$
Theo cách đặt m, n, p, k như trên, ta sẽ có:
$$\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} + k + \frac{kc^2}{p} = \frac{npa^2 + pmb^2 + kmnc^2}{mnp} + k = \frac{\sqrt{5}}{12}.(12a^2 + 3b^2 + 2c^2) + \frac{\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$$
Cuối cùng, ta thu được:
$$M^2 \leq N \leq \frac{(m+n)(1+p)}{4k}.(2\sqrt{5})^2 = 45$$
Từ đó suy ra:
$$M \leq 3\sqrt{5}$$
Vậy $\max M = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{5}}, b = \frac{4}{\sqrt{5}}, c = 2$.□

5.5 Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2}{3a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{3b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{3c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{2}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức cauchy–Schawrz, ta có:

$$\sum \frac{a^2}{3a^2+(b+c)^2} = \sum \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2+2a^2+2bc} \le \sum \frac{a^2}{4a^2+4b^2+4c^2} + \sum \frac{a^2}{8a^2+8bc} = \frac{1}{4} + \sum \frac{a^2}{8a^2+8bc}$$

Ta cần chứng minh:

$$\sum \frac{a^2}{a^2+bc} \le 2 \Leftrightarrow \sum \frac{bc}{a^2+bc} \ge 1$$

Ta có :

$$\sum \frac{bc}{a^2+bc} \ge \frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)} \ge 1$$

tương đương

$$abc(a+b+c) \ge 0 \quad \text{Đúng}$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

5.6 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$5\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right) + \frac{a}{c^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{c}{b^2} \ge 2\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right) + a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2$$

Lời giải.

Bất đẳng thức tương đương với:

$$5\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right) + \frac{a}{c^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{c}{b^2} \ge 2\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right) + 2(a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM cùng với giả thiết $abc = 1$, ta có:

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} = b^4c^4 + \frac{1}{b^4} \ge 2c^2$$

Tương tự, ta chứng minh được:

$$\frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \ge 2a^2$$

$$\frac{1}{c^4} + \frac{1}{a^4} \ge 2b^2$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$2\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right) \ge 2(a^2+b^2+c^2)$$

hay

$$4\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right) \ge 4(a^2+b^2+c^2)$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\left(\frac{1}{a^4}+c^2\right) + \left(\frac{1}{b^4}+a^2\right) + \left(\frac{1}{c^4}+b^2\right) \ge \frac{2c}{a^2} + \frac{2b}{b^2} + \frac{2b}{c^2}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được:

$$5\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right) \ge 3(a^2+b^2+c^2) + 2\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right)$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2 + \frac{a}{c^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{c}{b^2} \ge 2(ab+bc+ca)$$

Lại áp dụng AM - GM, ta có:

$$a^2 + \frac{c}{b^2} + bc = a^2 + \frac{c}{b^2} + ab^2c^2 \ge 3ca$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự, ta được:

$$b^2 + \frac{a}{c^2} + ca \ge 3ab$$

$$c^2 + \frac{b}{a^2} + ab \geq 3bc$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức này, ta được:

$$a^2 + \frac{c}{b^2} + bc + b^2 + \frac{a}{c^2} + ca + c^2 + \frac{b}{a^2} + ab \geq 3(ab + bc + ca)$$

hay

$$a^2 + \frac{c}{b^2} + b^2 + \frac{a}{c^2} + c^2 + \frac{b}{a^2} \geq 2(ab + bc + ca)$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1.\square$

5.7 Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^2b + b^2c + c^2a + \frac{1}{\sqrt[6]{a^3 + b^3 + c^3}} \geq 3 + \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$$

Lời giải.

Ta có một bổ đề quen thuộc:

Với x, y, z là các số thực dương bất kì, ta luôn có bất đẳng thức:

$$(x + y + z)^3 \geq \frac{27}{4}(xy^2 + yz^2 + zx^2 + xyz)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Áp dụng bổ đề trên và kết hợp với giả thiết $abc = 1$, ta có:

$$(a^2b + b^2c + c^2a)^3 \geq \frac{27}{4}(a^2b^5c^2 + b^2c^5a^2 + c^2a^5b^2 + a^3b^3c^3) = \frac{27}{4}(a^3 + b^3 + c^3 + 1)$$

Từ đây suy ra:

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 1}{4}}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$3\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 1}{4}} + \frac{1}{\sqrt[6]{a^3 + b^3 + c^3}} \geq 3 + \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 1 = 3.\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} + 1 \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^3}$$

Do đó:

$$3\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 1}{4}} \geq 3\sqrt[4]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}}$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$3\sqrt[4]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} + \frac{1}{\sqrt[6]{a^3 + b^3 + c^3}} \geq 3 + \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$$

Đặt $t = \sqrt[12]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} \geq \sqrt[12]{abc} = 1$, bất đẳng thức trở thành:

$$3t^3 + \frac{1}{\sqrt[6]{3}t^2} \geq 3 + \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$$

Điều này tương đương với:

$$3\sqrt[6]{3}t^5 - 3\sqrt[6]{3}t^2 - t^2 + 1 \geq 0$$

hay

$$(t - 1)(3\sqrt[6]{3}t^4 + 3\sqrt[6]{3}t^3 + 3\sqrt[6]{3}t^2 - t - 1) \geq 0 \text{ (luôn đúng vì } t \geq 1).$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1.\square$

5.8 Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x^5 + y^5 + z^5 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^4}{y^3} + \frac{y^4}{z^3} + \frac{z^4}{x^3} \geq 3$$

Lời giải.
Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có:

$$\frac{x^4}{y^3} + \frac{y^4}{z^3} + \frac{z^4}{x^3} \geq \frac{(x^5 + y^5 + z^5)^2}{x^6y^4 + y^6z^4 + z^6x^4} \geq \frac{9}{x^6y^4 + y^6z^4 + z^6x^4}$$

Vậy nên ta cần chứng minh:

$$x^6y^4 + y^6z^4 + z^6x^4 \leq 3$$

Từ bất đẳng thức quen thuộc: $\dfrac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$ ta có:

$$x^5y^5 + y^5z^5 + z^5x^5 \leq 3$$

Suy ra:

$$15 \geq \sum(x^5 + 3x^5y^5 + x^{10})$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$:

$$x^5 + 3x^5y^5 + x^{10} \geq 5x^6y^3$$

Làm tương tự với các biểu thức còn lại ta được:

$$15 \geq 5(x^6y^4 + y^6z^4 + z^6x^4)$$

hay

$$x^6y^4 + y^6z^4 + z^6x^4 \leq 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.□

5.9 Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx \leq 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Lời giải.

Từ giả thiết $xy+yz+zx \le 3xyz$ ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le 3$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$:

$$3 \ge \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \to xyz \ge 1$$

Đặt $a=\sqrt[6]{x}, b=\sqrt[6]{y}, a=\sqrt[6]{z}$ $(x,y,z>0)$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$a^4+b^4+c^4 \ge a^3+b^3+c^3$$

với a,b,c là các số dương sao cho $abc \ge 1$

Theo bất đẳng thức $Chebyshev$ ta có:

$$3(a^4+b^4+c^4) \ge (a^3+b^3+c^3)(a+b+c)$$

Lại có theo $AM-GM$:

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \ge 3$$

Kết hợp hai điều trên cho ta điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$..□

5.10 Cho a,b,c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b^2+1}{(a-b)^2}+\frac{b^2c^2+1}{(b-c)^2}+\frac{c^2a^2+1}{(c-a)^2} \ge \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Ta chú ý tới biến đổi sau:

$$\sum \frac{a^2b^2+1}{(a-b)^2}=\frac{1}{2}.\sum \frac{(1-ab)^2+(1+ab)^2}{(a-b)^2}=\frac{1}{2}.(\sum \frac{(1-ab)^2}{(a-b)^2}+\sum \frac{(1+ab)^2}{(a-b)^2})$$

Đến đây sử dụng 2 bất đẳng thức quen thuộc:

$$x^2+y^2+z^2 \ge -2(xy+yz+zx); x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$$

ta có:

$$\frac{1}{2}.(\sum \frac{(1-ab)^2}{(a-b)^2}+\sum \frac{(1+ab)^2}{(a-b)^2}) \ge \frac{1}{2}(-2.\sum \frac{(1-ab)(1-bc)}{(a-b)(b-c)}+\sum \frac{(1+ab)(1+bc)}{(a-b)(b-c)})$$

Bằng phép quy đồng và khai triển trực tiếp ta có 2 đẳng thức sau:

$$\frac{(1-ab)(1-bc)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(1-bc)(1-ca)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(1-ca)(1-ab)}{(c-a)(a-b)}=-1$$

$$\frac{(1+ab)(1+bc)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(1+bc)(1+ca)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(1+ca)(1+ab)}{(c-a)(a-b)}=1$$

Suy ra:

$$\frac{1}{2}(-2.\sum\frac{(1-ab)(1-bc)}{(a-b)(b-c)}+\sum\frac{(1+ab)(1+bc)}{(a-b)(b-c)})=\frac{3}{2}$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

5.11 Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+a^2b^2}{ab}+\frac{54ab}{(a+b)ab+6ab+1}\geq 9$$

Lời giải 1.

Sử dụng phương pháp đổi biến p, q, r.

Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=ab; x+y+z=p, xy+yz+zx=q, xyz=r=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$x+y+z+\frac{54}{xy+yz+xz+6}\geq 9$$

$$\Leftrightarrow pq+6p\geq 9q$$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc sau:

$$p^2q+3pr\geq 4q^2$$

$$\Leftrightarrow p^2q+3p\geq 4q^2$$

$$\Leftrightarrow p\geq\frac{-3+\sqrt{9+16q^3}}{2q}$$

Mặt khác với $q\geq 3$ dễ thấy: $\frac{-3+\sqrt{9+16q^3}}{2q}\geq\frac{9q}{q+6}$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

5.12 Chứng minh với mọi số thực a, b, c không âm ta có bất đẳng thức sau:

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a+b+c)^2\geq 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2$$

Lời giải.

Đặt $a^2 = x, b^2 = y, c^2 = z(x, y, z \geq 0)$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(x+y)(y+z)(z+x)(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 \geq 8(xy+yz+zx)^2$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$:

$$\sum 2\sqrt{xy} \geq \sum \frac{4xy}{x+y}$$

Suy ra:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 = \sum x + \sum 2\sqrt{xy} \geq \sum x + \sum \frac{4xy}{x+y}$$

Mặt khác ta lại có:

$$(x+y)(y+z)(z+x)(\sum x + \sum \frac{4xy}{x+y}) - 8(xy+yz+zx)^2 = \sum xy(x-y)^2 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức chứng minh xong.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.$\square$

$\boxed{\textbf{5.13}}$ Cho các số thực dương x, y, z thõa mãn $x+y+z = xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{y}{x\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{y\sqrt{z^2+1}} + \frac{x}{z\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải 1.

Từ giả thiết $x+y+z = xyz$ suy ra $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} = 1$.

Đặt $\dfrac{1}{x} = a; \dfrac{1}{y} = b; \dfrac{1}{z} = c$ khi đó $ab+bc+ca = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành :

$$\frac{a}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+a^2}} \geq \frac{3}{2}$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ và $Cauchy-Schwarz$ ta có:

$$\begin{aligned}
\sum \sqrt{1+b^2} = \sum \frac{a}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} \geq \sum \frac{2a}{2b+a+c} &\geq \frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} \\
&= 2.\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)} \\
&\geq 2.\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+\dfrac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức chứng minh xong.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$. □

Lời giải 2.

Vì x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$ nên ta đặt $x = tanA; y = tanB; z = tanC$ với A, B, C là 3 góc của một tam giác nhọn và $A + B + C = \pi$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{tanB}{tanA\sqrt{tan^2B+1}} + \frac{tanC}{tanB\sqrt{tan^2C+1}} + \frac{tanA}{tanC\sqrt{tan^2A+1}} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{cosAsinB}{sinA} + \frac{cosBsinC}{sinB} + \frac{cosCsinA}{sinC} \geq \frac{3}{2}$$

Sử dụng định lí hàm số *Sine* và *Cosine* để đưa về 3 cạnh tam giác ta được:

$$\sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ac} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 3abc + a^2b + b^2c + c^2a$$

Nhưng bất đẳng thức trên luôn đúng do $ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 3abc$ (theo $AM - GM$) và $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$ (theo bất đẳng thức hoán vị).

Bất đẳng thức chứng minh xong.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$.□

5.14 Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, b, c \geq 1, a^2 + b^2 + c^2 = 4$.Chứng minh:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{9}{2(\sqrt{a^2-1} + \sqrt{b^2-1} + \sqrt{c^2-1})}$$

Lời giải.

Đặt $\sqrt{a^2-1} = x, \sqrt{b^2-1} = y, \sqrt{c^2-1} = z$ ta viết lại giả thiết thành: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right) \leq \frac{9}{2}$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy − Schwarz* ta có:

$$\sum \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq \sqrt{\sum \frac{3x^2}{2x^2+y^2+z^2}} \leq \sqrt{\frac{3}{4}\sum\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+z^2}\right)} = \frac{3}{2}$$

$$\sum \frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}} \leq \sqrt{\sum \frac{3(y+z)^2}{2x^2+y^2+z^2}} \leq \sqrt{3\sum\left(\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2}\right)} = 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.□

5.15 Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng ming rằng:

$$\frac{1}{x^2+xy+y^2}+\frac{1}{y^2+yz+z^2}+\frac{1}{z^2+zx+x^2}\geq\frac{9}{(x+y+z)^2}$$

Lời giải.
Nhân cả 2 vế với $x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz$ ta được:

$$\sum\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz}{x^2+xy+y^2}\geq\frac{9(x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz)}{(x+y+z)^2}$$

Để ý rằng:

$$\sum\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz}{x^2+xy+y^2}=3+\sum\frac{z(x+y+z)}{x^2+xy+y^2}$$

Nên bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$3+(x+y+z)(\sum\frac{z}{x^2+xy+y^2})\geq\frac{9(x^2+xy+y^2+yz+xz+z^2)}{(x+y+z)^2}$$

Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có:

$$\begin{aligned}\frac{z}{x^2+xy+y^2}+\frac{x}{z^2+zy+y^2}+\frac{y}{x^2+xz+z^2}&\geq\frac{(x+y+z)^2}{zx^2+zy^2+xz^2+xy^2+yx^2+yz^2+3xyz}\\&=\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)(xy+yz+xz)}\\&=\frac{x+y+z}{xy+yz+xz}\end{aligned}$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$3+\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+xz}\geq\frac{9(x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz)}{(x+y+z)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3+\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+xz}\geq\frac{9((x+y+z)^2-(xy+yz+xz))}{(x+y+z)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+xz}\geq\frac{3(2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca)}{(x+y+z)^2})$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^4 \geq 3(ab+bc+ca)(2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca)$$

Dễ thấy bất đẳng thức trên đúng theo bất đẳng thức $AM-GM$ cho 2 số.
Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. □
Bất đẳng thức trên cũng là một hệ quả trực tiếp suy ra từ bất đẳng thức Iran 1996. Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$VT=\sum \frac{1}{x^2+xy+y^2} \geq \sum \frac{4(xy+yz+zx)}{(y^2+yz+z^2+xy+yz+zx)^2} = \sum \frac{4(xy+yz+zx)}{(y+z)^2(x+y+z)^2}$$

Như vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+x)^2}+\frac{1}{(z+x)^2} \geq \frac{9}{4(xy+yz+zx)}$$

Nhưng đây là bất đẳng thức Iran 1996 quen thuộc.

5.16 Chứng minh với mọi số thực a, b, c ta có bất đẳng thức sau:

$$2(1+abc)+\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq (1+a)(1+b)(1+c)$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq (b+c)(1+a)+(1-bc)(a-1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{((1+a)^2+(a-1)^2)((b+c)^2+(1-bc)^2)} \geq (1+a)(b+c)+(a-1)(bc-1)$$

Kết quả này đúng theo $Cauchy-Schwarz$.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. □
Cũng có thể áp dụng $Cauchy-Schwarz$ như sau:

$$\begin{aligned}
2(1+abc)+\sqrt{2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} &= 2(1+abc)+\sqrt{2[(ab+bc+ca-1)^2+(a+b+c-abc)^2]} \\
&\geq (ab+bc+ca-1)+(a+b+c-abc)+2(1+abc) \\
&= (1+a)(1+b)(1+c)
\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.□

5.17 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.Chứng minh:

$$12(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 4(a^3+b^3+c^3)+21$$

Lời giải. Giả sử c là số lớn nhất trong 3 số a, b, c. Đặt $t=\dfrac{a+b}{2}$ với $t \in (0,1]$

Xét $f(a,b,c)=VT-VP$. Dễ thấy $f(a,b,c) \geq f(t,t,c)$ vì $(a+b)^2ab \leq \dfrac{(a+b)^4}{4} \leq 4$.

Lại có:

$$f(t,t,c)=3(2t-1)^2(\frac{1}{3-2t}+\frac{8}{t}+2t-30)$$

Để chứng minh $f(t,t,c) \geq 0$ ta sẽ đi chứng minh: $g(t)=4t^3-26t^2+45t-24<0 \forall t \in (0,1]$

Ta thấy $g(t)$ đồng biến nên $g(t)<g(1)=-1<0$.

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0.5, c=2$ và các hoán vị.□

5.18 Cho ba số thức dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}+3 \geq 4\left(\frac{ab}{ab+c^2}+\frac{bc}{bc+a^2}+\frac{ca}{ca+b^2}\right)$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz , ta có:

$$\frac{4bc}{bc+a^2}=\frac{4bc(b+c)}{(b+c)(bc+a^2)}=bc(b+c)\frac{(1+1)^2}{b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}$$
$$\leq bc(b+c)\left(\frac{1}{b(c^2+a^2)}+\frac{1}{c(a^2+b^2)}\right)=\frac{c(b+c)}{c^2+a^2}+\frac{b(b+c)}{a^2+b^2}$$

Do đó:

$$\sum_{cyc}\frac{4bc}{bc+a^2} \leq \sum_{cyc}\frac{c(b+c)}{c^2+a^2}+\sum_{cyc}\frac{b(b+c)}{a^2+b^2}=\sum_{cyc}\frac{b(a+b)}{b^2+c^2}+\sum_{cyc}\frac{c(c+a)}{b^2+c^2}$$
$$=\sum_{cyc}\left(\frac{b(a+b)}{b^2+c^2}+\frac{c(c+a)}{b^2+c^2}\right)=\sum_{cyc}\left(\frac{b(a+b)+c(c+a)}{b^2+c^2}\right)=\sum_{cyc}\left(\frac{a(b+c)+b^2+c^2}{b^2+c^2}\right)$$
$$=\sum_{cyc}\left(\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+1\right)=\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+3$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.□

5.19 Cho các số dương a, b, c, x, y, z thoả mãn:

$$(a+b+c)(x+y+z)=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4$$

Chứng minh rằng:

$$abcxyz \leq \frac{1}{36}$$

Lời giải.
Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$\begin{aligned}4(ab+bc+ca)(xy+yz+xz) &= [(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)][(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]\\ &= 20-(a+b+c)^2.(x^2+y^2+z^2)-(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)^2\\ &\le 20-2\sqrt{(a+b+c)^2.(x^2+y^2+z^2).(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)^2}=4\\ &\Rightarrow (ab+bc+ca)(xy+yz+xz)\le 1\end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có:

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c); (xy+yz+xz)^2 \ge 3xyz(x+y+z)$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2.(xy+yz+xz)^2 \ge 9abcxyz(a+b+c)(x+y+z)$$

$$\Rightarrow abcxyz \le \frac{1}{36}$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức không xảy ra.□

5.20 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Lời giải.
Ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng thuần nhất:

$$(a+b+c)^5 \ge 81abc(a^2+b^2+c^2)(*)$$

Rõ ràng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (*) với mọi a,b,c dương.
Không mất tính tổng quát, giả sử $c = min(a, b, c)$.
Ta có các đánh giá sau:

$$8abc(a^2+b^2) \le c(a+b)^4$$

$$8abc^3 \le 2c^3(a+b)^2$$

Do vậy, ta chỉ cần chứng minh:

$$8(a+b+c)^5 \ge 81c(a+b)^2(2c^2+(a+b)^2)(1)$$

Đặt $a + b = 2t$ và chuẩn hoá cho $a + b + c = 3$. Thay $c = 3 - 2t$ vào (1), ta được:

$$3 \ge t^2(3-2t)((3-2t)^2+2t^2)$$

$$\Leftrightarrow 4t^5 - 14t^4 + 18t^3 - 9t^2 + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(4t^3 - 6t^2 + 2t + 1) \ge 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $t \ge 1$ (Do $c = min(a, b, c)$).
Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1.\square$

5.21 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh:

$$a + b + c \geq abc + 2\sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{3}}$$

Lời giải 1.

Đặt $x + y + z = p, xy + yz + zx = q, xyz = r$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$3(p - r)^2 \geq 4(9 - 2rp)$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc 4 ta có:

$$r \geq \frac{(4q - p^2)(p^2 - q)}{6p}$$

Mặt khác hàm số $f(p, r) = 3(p - r)^2 - 4(9 - 2rp)$ đồng biến theo r nên ta có:

$$\begin{aligned} 3(p - r)^2 &\geq 3\left(p - \frac{(12 - p^2)(p^2 - 3)}{6p}\right)^2 - 4\left(9 - 2p\frac{(12 - p^2)(p^2 - 3)}{6p}\right) \\ &= \frac{(p - 3)(p - 1)(p + 1)(p + 3)(p^2 - 12)^2}{12p^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này đúng vì $p \geq 3$.

Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1.\square$

Lời giải 2.

Giả sử b là số nằm giữa a và c. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức đơn giản $4xy \leq (x + y)^2$, ta sẽ quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là:

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{b} + b(ab + bc + ca)$$

Tương đương với:

$$\frac{ca(a - b)(b - c)}{b} \geq 0$$

Nhưng đánh giá trên đúng theo điều giả sử.

Ta có điều phải chứng minh.$\square$

5.22 Cho 3 số thực dương thay đổi a, b, c sao cho:$a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = (a + b + c)^2 + (ab + bc + ca)\left(\frac{1 + a^2b + b^2c + c^2a}{a^2b + b^2c + c^2a}\right) + \frac{81}{(a + b)(b + c)(c + a) + abc}$$

Lời giải.
Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có các đánh giá sau:
(1)

$$\begin{aligned}3(a^2+b^2+c^2) &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\\ &= \sum(a^3+\sum ab^2+\sum a^2b)\\ &\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a)\end{aligned}$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq a^2b+b^2c+c^2a$$

(2)

$$abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27} = 1$$

(3)

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{8(a+b+c)^3}{27} = 8$$

Đặt $a^2+b^2+c^2=t \Rightarrow ab+bc+ca=\dfrac{9-t}{2}$.
Xét $f(t)=t+\dfrac{9-t}{2}.(3+\dfrac{1}{t})$ với $t \geq 3$ Ta có:

$$f'(t)=\frac{2(t^3-2t^2-9)}{4t^2}$$

Giải phương trình $f'(t)=0$ ta được $t=3$. $\Rightarrow f(t) \geq f(3)=13(4)$.
Từ $(2),(3)$ và (4), suy ra $MinA=22$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

5.23 Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho không tồn tại 2 số đồng thời bằng 0 và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$. Chứng minh:

$$\frac{1-a^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{1-b^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{1-c^2}{a^2+ab+b^2} \leq \frac{1}{2}$$

Lời giải.
Từ giả thiết $a^2+b^2+c^2=2$ ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2+ab+b^2} \geq 2$$

Đây là một kết quả quen thuộc, chứng minh nó như sau:
Xét hiệu:

$$\begin{aligned}\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}-2 &= \frac{\sum(a^2+bc)(c^2+ca+a^2)(c^2+ca+a^2)}{\prod(a^2+ab+b^2)}\\ &= \frac{\sum a^6+\sum a^5(b+c)-\sum a^4(b^2+c^2)-\sum a^3b^3}{\prod(a^2+ab+b^2)}\end{aligned}$$

Đến đây sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$a^5b+3b^5a \geq 4a^2b^4$$

Hoàn toàn tương tự với số hạng còn lại rồi cộng theo vế ta được:

$$\Rightarrow a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)\geq a^4(b^2+c^2)+b^4(a^2+c^2)+c^4(a^2+b^2)(1)$$

Mặt khác dễ thấy rằng:

$$a^6+b^6+c^6\geq a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3(2)$$

Từ 2 bất đẳng thức (1) và (2) suy ra:

$$\frac{\sum a^6+\sum a^5(b+c)-\sum a^4(b^2+c^2)-\sum a^3b^3}{\prod(a^2+ab+b^2)}\geq 0$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị.□

5.24 Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho $ab+bc+ca>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+abc}{b^2+c^2}+\frac{b^3+abc}{c^2+a^2}+\frac{c^3+abc}{a^2+b^2}\geq a+b+c$$

Lời giải.
Để ý rằng:

$$\frac{a^3+abc}{b^2+c^2}-a=\frac{a^3+abc-ab^2-ac^2}{b^2+c^2}=\frac{a(a-b)(a-c)}{b^2+c^2}$$

Vậy nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\frac{a(a-b)(a-c)}{b^2+c^2}+\frac{b(b-c)(b-a)}{c^2+a^2}+\frac{c(c-a)(c-b)}{a^2+b^2}\geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$ khi đó dễ thấy rằng:

$$\frac{a}{b^2+c^2}\geq\frac{b}{c^2+a^2}\geq\frac{c}{a^2+b^2}$$

Nên theo bất đẳng thức $Vornicu-Schur$ ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

5.25 Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho $ab+bc+ca>0$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{a(b^2+c^2)}{b+c}+\frac{b(c^2+a^2)}{c+a}+\frac{c(a^2+b^2)}{a+b}$$

Lời giải.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$2abc(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})\geq 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)$$

Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có:

$$2abc(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})\geq\frac{9abc}{a+b+c}$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\geq 2(ab+bc+ca)$$

Nhưng đây lại là bất đẳng thức Schur dạng phân thức.
Chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.□

5.26 Cho a,b,c,d là các số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh:

$$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)\geq abcd$$

Lời giải.
Không mất tính tổng quát, giả sử $d\geq a\geq c\geq b$.
Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ dễ thấy:

$$2(a+b)\leq a+b+c+d\leq\sqrt{4(a^2+b^2+c^2+d^2)}=2$$

$$\Rightarrow a+b\leq 1$$

Xét 2 số a và b ta có đánh giá sau:

$$\frac{1-a}{a}.\frac{1-b}{b}\geq\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(1-a-b)+2ab(\sqrt{2(a^2+b^2)}-a-b)\geq 0$$

Như vậy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $a=b=c\leq d$ tức là chứng minh:

$$(1-a)(1-b)\geq cd$$

$$\Leftrightarrow 2-2a-2b+2ab\geq 2cd$$

$$\Leftrightarrow (a+b-1)^2+(c-d)^2\geq 0$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

5.27 Chứng minh với các số thực dương x,y,z ta có bất đẳng thức sau:

$$xyz+x^2+y^2+z^2+5\geq 3(x+y+z)$$

Lời giải 1.
Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$xyz+xyz+1\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\geq\frac{9xyz}{x+y+z}$$

Mặt khác theo $Schur$ bậc 2 dạng phân thức:

$$\frac{9xyz}{x+y+z}\geq 2(xy+yz+xz)-x^2-y^2-z^2$$

Như vậy ta cần phải chứng minh:

$$2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+xz)-x^2-y^2-z^2+9\geq 6(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2+9\geq 6(x+y+z)$$

Bất đẳng thức trên đúng theo $AM-GM$.□

Lời giải 2.

Đặt $x=a+1, y=b+1, z=c+1 (a,b,c>-1)$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$abc+ab+bc+ca+a^2+b^2+c^2\geq 0$$

Do $(abc)^2\geq 0$, nên giả sử $ab\geq 0$. Kết hợp với $c>-1$ ta có:

$$ab(c+1)\geq 0 (1)$$

Lại có:

$$a^2+b^2+c^2+bc+ca=(a+\frac{c}{2})^2+(b+\frac{c}{2})^2+\frac{c^2}{2} (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.□

Lời giải 3.

Ta sử dụng phương pháp dồn biến.

Đặt $f(x,y,z)=abc+a^2+b^2+c^2+5-3(a+b+c)$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=min\{a,b,c\}$.

Ta có:

$$f(a,b,c)-f\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(a+b+2\sqrt{ab}-3\right)$$

$$f(a,b,c)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)=\frac{(a-b)^2}{4}(2-c)$$

Từ đấy ta thấy rằng:

- Nếu $c\geq 1$ thì $f(a,b,c)\geq f\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c\right)$
- Nếu $c\leq 1$ thì $f(a,b,c)\geq f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)$

tức là ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp có hai biến bằng nhau.

Xét $f(x,x,c)=x^2(c+2)-6x+c^2-3c+5$

Xem $f(x,x,c)\geq 0$ là một bất phương trình bậc hai ẩn x, bất phương trình này có:

$$\Delta^{'}=-(c-1)^2(c+1)\leq 0$$

Nên suy ra $f(x,x,c)\geq 0 \quad \forall x,c>0$ Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

5.28 Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+2$$

Lời giải 1.

Đặt $x+y+z=p, xy+yz+zx=q, xyz=r$, dễ thấy $q \le 3$

Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}=\frac{9}{q}$$

Lại có $a^2+b^2+c^2=p^2-2q$. Vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{9}{q} \ge \sqrt{\frac{p^2-2q}{3}}+2$$

$$\Leftrightarrow (\frac{9}{q}-2)^2 \ge \frac{9-2q}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3-q)(9-2q)(q+9)}{3q^2} \ge 0$$

Bất đẳng thức trên đúng do $q \le 3$.

Lời giải 2.

Nhân hai vế của bất đẳng thức với $a+b+c$ ta được:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{a^2}{b}+\frac{a^2}{b}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+a+b+c \ge \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+6$$

Dễ dàng chứng minh được theo $AM-GM$:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \ge 3$$

Vậy để chứng minh bất đẳng thức ban đầu ta cần chứng minh:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sum(\frac{a^2}{b}-2a+b) \ge \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}-(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{(a-b)^2}{b} \ge \sum \frac{(a-b)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sum(a-b)^2(\frac{1}{b}-\frac{1}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+(a+b+c)}) \ge 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng với $a,b,c>0$.$\square$

Lời giải 3.

Trước hết ta có một bổ đề quen thuộc:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \ge \frac{9(x^2+y^2+z^2)}{(x+y+z)^2}$$

Áp dung bổ đề trên ta chỉ cần chứng minh được:

$$\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \ge \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+2$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq 1$ Bất đẳng thức trở thành:

$$3x^2 \geq x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x+2) \geq 0$$

Chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

5.29 Chứng minh với a, b, c là các số thực dương ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} + \frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Lời giải.
Đặt $\dfrac{a}{b+c} = x, \dfrac{b}{c+a} = y, \dfrac{c}{a+b} = z$. Khi đó ta có các đẳng thức và bất đẳng thức quen thuộc sau:

$$\begin{cases} xy + yz + zx + 2xyz = 1 \\ x + y + z \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 10xyz \geq 2$$

Từ điều kiện $x + y + z \geq \frac{3}{2}$ ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6xyz + 4xyz \geq x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} + 4xyz$$

Mặt khác theo Schur ta lại có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 10xyz \geq 2(xy + yz + zx) + 4xyz = 1$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

5.30 Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$\frac{-\sqrt{3}}{8} \leq (a-b)(b-c)(c-a) \leq \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Lời giải.
Rõ rằng bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| \leq \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Ta có bước dự đoán như sau:
Bất đẳng thức là đối xứng nên ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi có một số bằng 0, vì ở đây không

thể xảy ra trường hợp có hai số bằng nhau được vì khi đó $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ và ta giả sử $c=0$ để thu được $|-ab(a-b)| \le \frac{\sqrt{3}}{18}, a+b=1$. Giải hệ này ta tìm được $a=\frac{3+\sqrt{3}}{6}, b=\frac{3-\sqrt{3}}{6}, c=0$.
Và ta có lời giải bằng $AM-GM$ như sau:
Giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$\begin{aligned}
|(a-b)(b-c)(c-a)| &= (a-c)(b-c)(a-b) \\
&\le (a+c).b.(a+c-b) \\
&= \frac{1}{2}.\left(\sqrt{3}+1\right)(a+c).b(\sqrt{3}-1)(a+c-b) \\
&\le \frac{1}{2}.\left[\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)(a+c)+b(\sqrt{3}-1)+(a+c-b)}{3}\right]^3 \\
&= \frac{1}{2}.\left[\frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{3}\right]^3 = \frac{\sqrt{3}}{18}
\end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{3+\sqrt{3}}{6}, b=\frac{3-\sqrt{3}}{6}, c=0$ và các hoán vị.□

5.31 Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh:

$$\frac{a^3}{4+2b^2(a+c)+c^3}+\frac{b^3}{4+2c^2(a+b)+a^3}+\frac{c^3}{4+2a^2(b+c)+b^3} \ge \frac{1}{3}$$

Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức *Holder* ta có:

$$\sum \frac{a^3}{4+2b^2(a+c)+c^3} \ge \frac{(a+b+c)^3}{3(12+2a^2(b+c)+2b^2(a+c)+2c^2(a+b)+a^3+b^3+c^3)}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(a+b+c)^3 \ge 12+2a^2(b+c)+2b^2(a+c)+2c^2(a+b)+a^3+b^3+c^3$$

Điều này tương đương với :

$$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b) \ge 6$$

Nhưng đánh giá trên hiển nhiên đúng theo $AM-GM$
Chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

5.32 Cho a là số thực thỏa mãn $a^5-a^3+a-2=0$. Chứng minh:

$$S=\frac{a^{16}+a^{12}+7a^8+12a^4+12}{a^{12}+7a^8+7a^4+12} < \sqrt[3]{4}$$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có: $\frac{2}{a} = a^4 - a^2 + 1 > 0 \Rightarrow a > 0$.
Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$:

$$a^3 + 2 = a^5 + a \geq 2a^3$$

Do dấu đẳng thức xảy ra không thỏa mãn phương trình trên nên suy ra $a < \sqrt[3]{2}(1)$
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương :

$$a^{16} + a^{12} + 7a^8 + 12a^4 + 12 \leq a^{14} + 7a^{10} + 7a^6 + 12a^2$$

$$\Leftrightarrow (a^4 - a^2 + 1)(a^{12} - 7a^6 + 12) < 0$$

$$\Leftrightarrow a^{12} - 7a^6 + 12 < 0$$

Mặt khác do $a \neq 1$ ta lại có đánh giá sau:

$$(a-1)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{2(a^2+1)}{a} > 4 \Leftrightarrow (a^2+1)(a^4 - a^2 + 1) > 4 \Leftrightarrow a^6 + 1 > 4$$

Suy ra

$$a > \sqrt[6]{3}(2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.□

5.33 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c \geq ab + ac + bc$. Chứng minh rằng"

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

Lời giải.

Áp dụng trực tiếp bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a + b + c$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

5.34 Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ac = 1$. Chứng minh rằng :

$$a + b + c + \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{c+a} + \frac{ca}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải.

Ta viết lại bất đẳng thức thành:

$$(a+b+c)\left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}\right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có:

$$(a+b+c)\left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}\right) \geq \frac{(a+b+c)^3}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$
$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2+2)^3}{(a^2+b^2+c^2+1)^2}}$$

Đặt $a^2+b^2+c^2=t$.

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$\sqrt{\frac{(t+2)^3}{(t+1)^2}}=\sqrt{\frac{(\frac{t+1}{2}+\frac{t+1}{2}+1)^3}{(t+1)^2}}\geq\sqrt{\frac{27(\frac{t+1}{2})(\frac{t+1}{2})}{(t+1)^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.$\square$

5.35 Cho các số a,b,c dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\geq\frac{3a}{4}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{1+c}{8}+\frac{1+a}{8}\geq\frac{3b}{4}$ và $\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}\geq\frac{3a}{4}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{3+a+b+c}{4}\geq\frac{3(a+b+c)}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{2(a+b+c)-3}{4}\geq\frac{2\cdot3\sqrt[3]{abc}-3}{4}=\frac{3}{4}$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.$\square$

5.36 Cho a,b,c là các số dương và $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{b+c}{2c-b}\geq4$$

Lời giải.

Do $a,b,c>0$, ta viết lại giả thiết thành: $\frac{b}{a}+\frac{b}{c}=2$. Ta có :

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{b+c}{2c-b}=\frac{1+\frac{b}{a}}{2-\frac{b}{a}}+\frac{1+\frac{b}{c}}{2-\frac{b}{c}}=\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{b}{c}}+\frac{1+\frac{b}{c}}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\frac{b}{c}}+\frac{1}{\frac{b}{a}}+\frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{c}}+\frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{a}}$$

Sử dụng 2 bất đẳng thức quen thuộc: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$ và $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2$ suy ra:

$$\frac{1}{\frac{b}{c}}+\frac{1}{\frac{b}{a}}+\frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{c}}+\frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{a}}\geq 2+2=4$$

Chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

5.37 Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:
$$F=x^2+y^2+z^2$$

Lời giải 1.
Từ giả thiết suy ra:
$$xy+yz+zx=2xyz+(x+y+z)-1$$
Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:
$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\\&=(x+y+z)^2-4xyz-2(x+y+z)+2\\&\geq-\frac{4}{27}.(x+y+z)^3+(x+y+z)^2-2(x+y+z)+2\end{aligned}$$
Đặt $t=x+y+z; t\in[0;3]$ ta được:
$$\begin{aligned}F=x^2+y^2+z^2&=-\frac{4}{27}.t^3+t^2-2t+2\\&=\frac{1}{27}.(2a-3)^2.(\frac{15}{4}-a)+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}\end{aligned}$$
Vậy $MinP=\frac{3}{4}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$. □

Lời giải 2.
Đặt $a=sin^2\alpha, b=sin^2\beta, c=sin^2\gamma$.
Từ giả thiết $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$ suy ra $cot^2\alpha.cot^2\beta.cot^2\gamma=1$
Ta sẽ chứng minh:
$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{(1+cot^2\alpha)^2}+\frac{1}{(1+cot^2\beta)^2}+\frac{1}{(1+cot^2\gamma)^2}\geq\frac{3}{4}$$
Đặt $cot^2\alpha=a, cot^2\beta=b, cot^2\gamma=c$ thì $xyz=1$.
Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc: $\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+x)^2}\geq\dfrac{1}{1+xy}$ ta được:
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}&\geq\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{(1+z)^2}\\&=\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(1+z)^2}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(1+z)^2}\geq\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow (z-1)^2\geq 0$$

Chứng minh hoàn tất.□

5.38 Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x+y+z}.(\frac{\sqrt{x}}{y+z}+\frac{\sqrt{y}}{x+z}+\frac{\sqrt{z}}{y+x})\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải.

Vì bất đẳng thức ở dạng thuần nhất nên ta chuẩn hóa $x+y+z=3$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{\sqrt{x}}{3-x}+\frac{\sqrt{y}}{3-y}+\frac{\sqrt{z}}{3-z}\geq\frac{3}{2}$$

Theo $AM-GM$ ta có:

$$x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x}\geq 3$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\geq x(3-x)$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{3-x}\geq\frac{x}{2}$$

Hoàn toàn tương tự với các biểu thức còn lại ta được:

$$\frac{\sqrt{x}}{3-x}+\frac{\sqrt{y}}{3-y}+\frac{\sqrt{z}}{3-z}\geq\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác $x=y=z$.□

5.39 Cho $a,b,c\geq 1$ thỏa mãn $a+b+c+2=abc$. Chứng minh rằng:

$$bc\sqrt{a^2-1}+ca\sqrt{b^2-1}+ab\sqrt{c^2-1}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}abc$$

Lời giải 1.

Từ giả thiết, chia cả 2 vế cho $abc\neq 1$ ta được $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{2}{abc}=1$.

Ta có nhận xét sau:

Nếu có 3 số $x,y,z>0$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ thì khi đó tồn tại tam giác ABC nhọn sao cho $x=cosA, y=cosB, z=cosC$.

Theo nhận xét trên, áp dụng vào bài toán ta thấy tồn tại tam giác ABC nhọn sao cho: $\frac{1}{bc}=cos^2A;\ \frac{1}{ca}=cos^2B;\ \frac{1}{ab}=cos^2C$.

Bất đẳng thức ban đầu lại trở thành:

$$\sqrt{1-\frac{cos^2Bcos^2C}{cos^2A}}+\sqrt{1-\frac{cos^2Ccos^2A}{cos^2B}}+\sqrt{1-\frac{cos^2Acos^2B}{cos^2C}}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có:

$$\sum \sqrt{1 - \frac{cos^2Bcos^2C}{cos^2A}} \leq \sqrt{3(3 - \sum \frac{cos^2Bcos^2C}{cos^2A}}$$

Mặt khác, theo $AM - GM$ dễ thấy:

$$\frac{cos^2Bcos^2C}{cos^2A} + \frac{cos^2Ccos^2A}{cos^2B} + \frac{cos^2Acos^2B}{cos^2C} \geq cos^2A + cos^2B + cos^2C$$

Như vậy, cuối cùng ta chỉ cần chứng minh:

$$sin^2A + sin^2B + sin^2C \leq \frac{9}{4}$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.
Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.□

Lời giải 2.
Đặt $t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ Từ gỉa thiết áp dụng $AM - GM$ ta có:

$$1 = \frac{2}{abc} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{2t^3}{27} + \frac{t^2}{3} \Rightarrow t \geq \frac{3}{2}(*)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$ab\sqrt{(3c-3)(c+1)} + bc\sqrt{(3a-3)(a+1)} + ca\sqrt{(3b-3)(b+1)} \leq \frac{9}{2}abc.$$

Cũng theo $AM - GM$ ta lại có:

$$\sum ab\sqrt{(3c-3)(c+1)} \leq \sum ab(2c-1) = 6abc - \sum ab \leq \frac{9}{2}abc$$

$$\Leftrightarrow 2\sum ab \geq 3abc$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{3}{2}$$

(đúng theo điều kiện $(*)$)
Chứng minh hoàn tất.□

5.40 Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx} \leq \frac{27}{8}$$

Lời giải 1.
Bằng phép quy đồng và khai triển trực tiếp, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$19.xyz - 11(xy + yz + zx) - 27x^2y^2z^2 + 3 \geq 0$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$xyz = xyz.(x + y + z)^3 \geq 27.x^2y^2z^2$$

$$\Rightarrow 19.xyz - 11(xy + yz + zx) - 27x^2y^2z^2 + 3 \geq 19xyz - 11(xy + yz + zx) - xyz + 3 \geq 0(1)$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $z = min(x; y; z) \Rightarrow z \leq \dfrac{x + y + z}{3} = \dfrac{1}{3}$. Suy ra:

$$(1) \Leftrightarrow xy.(18z - 11) - 11z.(x + y) + 3 \geq (\frac{x + y}{2})^2(18z - 11) - 11z.(1 - z) + 3$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$(\frac{1 - z}{2})^2(18z - 11) - 11z.(1 - z) + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2z + 1).(3z - 1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng do $z > 0$.
Phép chứng minh hoàn tất.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.$\square$

Lời giải 2.

Bài toán này có thể sử dụng phương pháp tiếp tuyến.
Đặt $x = \dfrac{a}{3}, y = \dfrac{b}{3}, z = \dfrac{c}{3}$ thì bài toán được viết lại thành:
Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{9 - ab} + \frac{1}{9 - bc} + \frac{1}{9 - ca} \leq \frac{3}{8}$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$ab \leq \frac{(a + b)^2}{4} = \frac{(3 - c)^2}{4}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{9 - ab} \leq \frac{4}{-c^2 + 6c + 27}$$

Mặt khác từ giả thiết dễ thấy $a, b, c \in (0; 3]$ nên ta có đánh giá sau:

$$\frac{4}{-c^2 + 6c + 27} - \frac{9 - c}{64} = \frac{(c - 1)^2(c - 3)}{64(-c^2 + 6c + 27)} \leq 0$$

Suy ra:

$$\frac{1}{9 - ab} \leq \frac{4}{-c^2 + 6c + 27} \leq \frac{9 - c}{64}$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự ta cũng có: $\dfrac{1}{9 - bc} \leq \dfrac{9 - a}{64}; \dfrac{1}{9 - ca} \leq \dfrac{9 - b}{64}$
Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{9 - ab} + \frac{1}{9 - bc} + \frac{1}{9 - ca} \leq \frac{27 - (a + b + c)}{64} = \frac{3}{8}$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Ngoài ra bài toán này còn có khá nhiều cách giải, ví dụ như sử dụng hàm bậc nhất hoặc sử dụng đánh giá sau:

$$\frac{1}{1-xy}+\frac{1}{1-yz}+\frac{1}{1-zx}\leq\frac{3}{1-\dfrac{xy+yz+zx}{3}}$$

3.6 Bài 6.1 đến bài 6.40

6.1 Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+\frac{a}{b+c}}+\sqrt{1+\frac{b}{c+a}}+\sqrt{1+\frac{c}{a+b}}\geq 1+2\sqrt{2}$$

Lời giải.
Đầu tiên ta sẽ chứng minh bổ đề sau:
Nếu xy không âm thì $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}\geq 1+\sqrt{1+x+y}$
Chứng minh bằng cách bình phương 2 vế, cuối cùng ta được: $xy\geq 0$ (đúng)
Không mất tính tổng quát, giả sử $a\leq b\leq c$.Ta có:

$$a^2+b^2\leq c(a+b)\Rightarrow c^2\geq c(a+b)\Rightarrow c\geq a+b$$

Đặt $x=\dfrac{a}{b+c}; y=\dfrac{b}{c+a}; z=\dfrac{c}{a+b}$ thì $xy+yz+zx+2xyz=1(1)$.
Ngoài ra, từ hệ thức đầu bài ta cũng có được $x+y+z=2+3xyz(2)$
Từ (1) và (2) suy ra $x+y=\dfrac{-2z^2+6z+2}{3z^2+2z+1}$ Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}\geq 1+\sqrt{1+x+y}$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt{1+x+y}+\sqrt{1+z}\geq 2\sqrt{2}$$

Hay:

$$\sqrt{\frac{z^2+8z+3}{3z^2+2z+1}}+\sqrt{1+z}\geq 2\sqrt{2}(3)$$

Ta luôn có $(z-1)^3\geq 0$ nên theo $AM-GM$

$$\sqrt{\frac{z^2+8z+3}{3z^2+2z+1}}+\sqrt{1+z}\geq\frac{2}{\sqrt{1+z}}+\sqrt{1+z}\geq 2\sqrt{2}$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0; y=z=1$ hay $a=0; b=c$ và các hoán vị.□

6.2 Cho các số a, b, c dương thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{7b^2+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{7c^2+c+a}}+\frac{c}{\sqrt{7a^2+a+b}}\geq 1$$

6.3 Cho $x_1 \geq x_2 \geq .... \geq x_n \geq 0$ thỏa mãn $\sum x_i \leq 400$ và $\sum x_i^2 \geq 10^4$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 10$$

Lời giải.

Đặt $x_i = 25y_i$ với mọi $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Khi đó bài toán được chuyển về chứng minh:

$$\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} \geq 2$$

với $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq 0$ thỏa mãn $y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq 16$ và $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \geq 16$.
Nếu $y_1 \geq 4$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Xét trường hợp $y_1 \leq 4$: Do $y_i \leq y_2$ với mọi $2 \leq i \leq n$ nên

$$16 \leq y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leq y_1^2 + y_2^2 + y_2y_3 + \cdots + y_2y_n = y_1^2 + y_2(y_2 + y_3 + \cdots + y_n) \leq y_1^2 + y_2(16 - y_1)$$

Từ đây ta có:

$$y_2 \geq \frac{16 - y_1^2}{16 - y_1}(*)$$

Hơn nữa, từ đánh giá trên ta cũng suy ra được $y_1 \geq 1$. Thật vậy, do $y_2 \leq y_1 \leq 4$ nên

$$16 \leq y_1^2 + y_2(16 - y_1) \leq y_1^2 + y_1(16 - y_1) = 16y_1$$

và ta dễ dàng thu được $y_1 \geq 1$.
Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức (*) thu được ở trên, ta có thể đưa bài toán về chứng minh:

$$\sqrt{y_1} + \sqrt{\frac{16 - y_1^2}{16 - y_1}} \geq 2$$

với $1 \leq y_1 \leq 4$. Thật vậy, ta đặt $\sqrt{y_1} = t,\ 1 \leq t \leq 2$. Bất đẳng thức trở thành:

$$\sqrt{\frac{16 - t^4}{16 - t^2}} \geq 2 - t$$

$$\Leftrightarrow 16 - t^4 \geq (2 - t)^2(16 - t^2)$$

$$\Leftrightarrow (2 + t)(4 + t^2) \geq (2 - t)(4 - t)(4 + t)$$

Bất đẳng thức trên đúng do $4 + t^2 \geq 4 + t$ và $2 + t \geq 3 \geq 3(2 - t) \geq (4 - t)(2 - t)$.
Phép chứng minh hoàn tất.□

6.4 Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos B + \cos C + \frac{1}{sinA} + \frac{1}{sinB} + \frac{1}{sinC} \geq 2\sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Đặt $f(A, B, C) = cosA + cosB + cosC + \frac{1}{sinA} + \frac{1}{sinB} + \frac{1}{sinC} - (2\sqrt{3} + \frac{3}{2})$ trong đó A, B, C là

độ lớn 3 góc của tam giác ABC và $A+B+C=\pi$.
Xét hiệu :

$$f(A,B,C)-f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})=(cosB+cosC-2cos\frac{B+C}{2})+(\frac{1}{sinB}+\frac{1}{sinC}-\frac{2}{sin\frac{B+C}{2}})$$
$$=2cos\frac{B+C}{2}(cos\frac{B-C}{2}-1)+(\frac{1}{sinB}+\frac{1}{sinC}-\frac{2}{sin\frac{B+C}{2}})$$

Mặt khác chú ý rằng $sinB, sinC$ là các số dương cho nên theo bất đẳng thức $AM-GM$:

$$\frac{1}{sinB}+\frac{1}{sinC}-\frac{2}{sin\frac{B+C}{2}}\geq\frac{4}{sinB+sinC}-\frac{2}{sin\frac{B+C}{2}}=\frac{4(1-cos\frac{B-C}{2})}{sinB+sinC}$$

Do đó ta có :

$$f(A,B,C)-f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})\geq 2(1-cos\frac{B-C}{2})(\frac{2}{sinB+sinC}-cos\frac{B+C}{2})$$
$$=2(1-cos\frac{B-C}{2}).\frac{1-sin\frac{B+C}{2}.cos\frac{B+C}{2}.cos\frac{B-C}{2}}{sinB+sinC}\geq 0$$

Vậy nên $f(A,B,C)\geq f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})$
Tức là ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp tam giác ABC cân tại A, khi đó $B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\Rightarrow cosB=cosC=sin\frac{A}{2}, sinB=sinC=cos\frac{A}{2}$.
Ta có :

$$f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})=(cosA+2sin\frac{A}{2}-\frac{3}{2})+(\frac{1}{sinA}+\frac{2}{cos\frac{A}{2}}-2\sqrt{3})$$
$$=\frac{-(2sin\frac{A}{2}-1)^2}{2}+\frac{1+4sin\frac{A}{2}-2\sqrt{3}sinA}{sinA}$$

Dễ thấy rằng:

$$1\geq sin(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 8sin\frac{A}{2}\geq 2\sqrt{3}sinA+4sin^2\frac{A}{2}$$
$$\Rightarrow 1+4sin\frac{A}{2}-2\sqrt{3}sinA\geq 4sin^2\frac{A}{2}-4sin\frac{A}{2}+1=(2sin\frac{A}{2}-1)^2$$

Vậy ta được :

$$f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})\geq(2sin\frac{A}{2}-1)^2(\frac{1}{sinA}-\frac{1}{2})\geq 0$$

Chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.□

6.5 Cho tam giác ABC không vuông. Chứng minh rằng:

$$3tan^2Atan^2Btan^2B-5(tan^2A+tan^2B+tan^2C)\leq 9+tan^2Atan^2B+tan^2Btan^2C+tan^2Ctan^2A$$

Lời giải.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$4tan^2Atan^2Btan^2B-4(tan^2A+tan^2B+tan^2C)-8\leq(1+tan^2A)(1+tan^2B)(1+tan^2C)$$

$$\Leftrightarrow 4\prod(\frac{1}{cos^2A}-1)-4(\sum\frac{1}{cos^2A}-3)-8\leq\frac{1}{\prod cos^2A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\prod cos^2A} - \left(\sum \frac{1}{cos^2Acos^2B}\right) \leq \frac{1}{\prod cos^2A}$$

$$\Leftrightarrow cos^2A + cos^2B + cos^2C \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+cos2A}{2} + \frac{1+cos2B}{2} + cos^2C \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(cos2A + cos2B) + 4cos^2C + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2cos(A-B)cos(A+B) + 4cos^2C + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4cos^2C - 4cos(A-B)cosC + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2cosC - cos(A-B))^2 + sin^2(A-B) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.
Chứng minh hoàn tất.□

6.6 Cho $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Chứng minh:

$$\left(\frac{sinx}{x}\right)^3 > cosx$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương: $\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x > 0$

Đặt $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x$ với $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$

Ta có:

$$f'(x) = \frac{\cos x.\sqrt[3]{\cos x} + \sin^2 x.\dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} - 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{3\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sqrt[3]{\cos^4 x}}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2\cos^2 x - 3\sqrt[3]{\cos^4 x} + 1}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(\sqrt[3]{\cos^2 x} - 1)^2(2\sqrt[3]{\cos^2 x} + 1)}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}} > 0$$

Khi đó $f(x)$ đồng biến trong $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$

Phép chứng minh hoàn tất. □

6.7 Cho x, y, z là các số thực dương, a, b, c là 3 cạnh và S là diện tích của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx}S$$

Lời giải.

Giả sử BC là cạnh lớn nhất trong tam giác ABC. Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống BC.

Ta có:

$$\begin{aligned} xa^2 + yb^2 + zc^2 &= xBC^2 + y(HC^2 + HA^2) + z(HB^2 + HA^2) \\ &= xBC^2 + (y+z)AH^2 + yHC^2 + zHB^2 (1) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $CauchySchwarz$ ta có:

$$\left(yHC^2 + zHB^2\right)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq (HB + HC)^2 = a^2$$

Suy ra:

$$yHC^2 + zHB^2 \geq \frac{yza^2}{y+z}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{aligned} xa^2 + yb^2 + zc^2 &\geq \frac{(xy + yz + zx)\,a^2}{y+z} + (y+z)AH^2 \\ &\geq 2\sqrt{xy + yz + zx}.AH.a \\ &= 4\sqrt{xy + yz + zx}S \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.□
Đây là một hệ quả của bất đẳng thức $Finsler - Hadwinger$.

6.8 Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có:
$1/a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) > 2abc$

$2/\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} < \sqrt{3p}$ với p là nửa chu vi.

$3/0,4 < \frac{r}{h_a} \leq 0,5$ với $a^2 + b^2 \leq c^2$

$4/a^4 + b^4 + c^4 \geq 16$ biết $S_{\Delta ABC} = 1$

$5/\frac{ab}{l_c} + \frac{bc}{l_a} + \frac{ac}{l_b} \leq 6R$ với l_a, l_b, l_c là các đường phân giác tương ứng mỗi góc.

$6/sinA.sinB + sinB.sinC + sinC.sinA \geq 9.(\frac{r}{R})^2$

Lời giải.
1/ Chia cả 2 vế cho $2abc$ và áp dụng định lý $Cosine$, ta có bất đẳng thức tương đương:

$$\cos A + \cos B + \cos C > 1$$

Mặt khác, ta có đẳng thức quen thuộc sau:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Dễ thấy $\sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2} > 0$ do A, B, C là 3 góc của tam giác nên suy ra:

$$\cos A + \cos B + \cos C > 1$$

Đây chính là điều phải chứng minh.
2/ Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq \sqrt{a+b+c}$ ta có:

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \geq \sqrt{3p - (a+b+c)} = \sqrt{p}$$

Lại có theo $Cauchy - Schwarz$:

$$(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-a}+\sqrt{p-a})^2 \leq 3(3p-(a+b+c)) = 3p$$

$$\Rightarrow \sqrt{p-a}+\sqrt{p-a}+\sqrt{p-a} \leq \sqrt{3p}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

3/ Ta có:

$$S = pr = \frac{1}{2}c.h \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c}$$

Do $a+b>c$ nên ta được $\frac{r}{h} < \frac{1}{2}$

Mặt khác ta lại có:

$$c^2 \geq a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$\Rightarrow a+b \leq c\sqrt{2}$$

Từ đó ta được:

$$\frac{r}{h} \geq \frac{c}{c(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}-1 > 0,4$$

Chứng minh hoàn tất.

4/ Sử dụng công thức $Heron$ ta có:

$$S_{\Delta ABC} = p(p-a)(p-b)(p-c) = 1$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} 16 &= (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \\ &= \left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right] \leq \left(a^2+b^2+2ab-c^2\right).c^2 \end{aligned}$$

Kết hợp với $AM-GM$ ta được:

$$16 \leq 2a^2.c^2+2b^2c^2-c^4 \leq (a^4+c^4)+(b^4+c^4)-c^4 = a^4+b^4+c^4$$

Chứng minh hoàn tất.

5/ Theo công thức đường phân giác, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{ab}{l_c}+\frac{bc}{l_a}+\frac{ac}{l_b} \leq 6.\frac{abc}{4S} = \frac{3abc}{2S}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{al_a}+\frac{1}{bl_b}+\frac{1}{cl_c} \leq \frac{3}{2S}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{b+c}{a\sqrt{bc}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}} \leq \frac{3}{2S}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{(b+c)\sqrt{bc}\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)}}{abc} \leq 6$$

Ta sẽ chứng minh:

$$(b+c)\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)} \leq 2a\sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{2\sqrt{bc}} \leq \frac{2a}{\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)^2}{4bc} - 1 \leq \frac{a^2}{a^2-(b-c)^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2(\frac{1}{4bc} - \frac{1}{a^2-(b-c)^2)}) \leq 0$$

Suy ra:

$$(b+c)\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)} \leq 2abc$$

Hoàn toàn tương tự với các biểu thức còn lại ta có điều phải chứng minh.
6/ Theo định lí hàm số *Sine* ta có:

$$\sin A \sin B = \frac{ab}{4R^2}; \sin B \sin C = \frac{bc}{4R^2}; \sin C \sin A = \frac{ca}{4R^2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$ab+bc+ca \geq 36r^2$$

Từ hệ thức quen thuộc $r^2 = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

$$\Rightarrow 36r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = 9(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức *Schur* thì:

$$9abc \geq 9(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$$

Điều này đúng theo bất đẳng thức $AM-GM$:

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.□

6.9 Giả sử a, b, c là 3 số thực phân biệt. Chứng minh rằng

$$\left|\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a}\right| > 1.$$

Lời giải.
Đặt $x = \dfrac{a+b}{a-b}, y = \dfrac{b+c}{b-c}, z = \dfrac{c+a}{c-a}$ thì $ab+bc+ca = 1$.
Khi đó theo bất đẳng thức $C-S$ ta có:
$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 3$. Suy ra $|x+y+z| \geq \sqrt{3} > 1$. □

6.10 Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác thỏa mãn $ab+bc+ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{a+b+c+abc}$$

Lời giải.

Đặt $p = a+b+c, q = ab + bbc + ca, r = abc.$

Ta có $p^2 \geq 3q = 3$

Hơn nữa a, b, c là 3 cạnh tam giác nên $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca) \Rightarrow p^2 < 4q = 4$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $p^3 + (p^2+6)\, r \geq 4p$

Theo bất đẳng thức Schur ta có : $r \geq \dfrac{4pq - p^3}{9} = \dfrac{4p - p^3}{9}$

Do đó $p^3 + (p^2+6)\, r \geq p^3 + (p^2+6)\dfrac{4p-p^3}{9}$ (1)

Mà $p^3 + (p^2+6)\dfrac{4p-p^3}{9} = \dfrac{-p(p^2-4)(p^2-3)}{9} \geq 0$ (2) Từ (1), (2).□

6.11 Cho ba a, b, c, x, y, z là 6 số dương thỏa mãn $ax + by + cz = 1$. Chứng minh rằng:

$$x+y+z > \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$$

Lời giải.

Ta có $x = \dfrac{ax}{yz} + \dfrac{b}{z} + \dfrac{c}{y} > \dfrac{b}{z} + \dfrac{c}{y}$

Tương tự, có $y > \dfrac{a}{z} + \dfrac{c}{x}, z > \dfrac{a}{y} + \dfrac{b}{x}$

Suy ra $x+y+z > \dfrac{b+c}{x} + \dfrac{c+a}{y} + \dfrac{a+b}{z}$

$\Rightarrow (x+y+z) > x + \dfrac{b+c}{x} + y + \dfrac{c+a}{y} + z + \dfrac{a+b}{z}$

Theo BĐT AM-GM ta có

$x + \dfrac{b+c}{x} + y + \dfrac{c+a}{y} + z + \dfrac{a+b}{z} \geq 2\sqrt{b+c} + 2\sqrt{c+a} + 2\sqrt{a+b}$

Vậy $x+y+z > \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b}.$ □

6.12 Cho ba số thức dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$4a^2b^2c^2 \geq (a^3+b^3+c^3+abc)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Lời giải.

Giả sử $a \geq b \geq c$, nếu $b+c-a \leq 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Nếu $b+c-a > 0$ thì a, b, c là 3 cạnh của tam giác. Ta có:

$\dfrac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c} \leq R^2$

Khai triển $\left[(a+b)\overrightarrow{OC} + (c+b)\overrightarrow{OA} + (a+c)\overrightarrow{OB}\right]^2 \geq 0$ với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ta có bất đẳng thức cần chứng minh.□

6.13 Co a, b, c là 3 số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức tương đương với

$(a+b+c)\left(\dfrac{a^2+b^2}{a+b} + \dfrac{b^2+c^2}{b+c} + \dfrac{c^2+a^2}{c+a}\right) \leq 3(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 + 2abc\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}\right) \geq 2(ab+bc+ca)$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy-Schwart thì
$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{9}{2\left(a+b+c\right)}$
Vậy để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh được
$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\geq 2\left(ab+bc+ca\right)$
Đây chính là bất đẳng thức Schur dạng phân thức. Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.□

6.14 Cho $a;b;c$ dương và $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:
$$8\left(2-a\right)\left(2-b\right)\left(2-c\right)\geq\left(a+bc\right)\left(b+ca\right)\left(c+ab\right)$$

Lời giải.

Ta có $2\left(2-a\right)=4-2a=b^2+c^2+\left(a^2-2a+1\right)\geq b^2+c^2$

Tương tự ta có $2\left(2-b\right)\geq a^2+c^2, 2\left(2-c\right)\geq a^2+b^2$

Suy ra $8\left(2-a\right)\left(2-b\right)\left(2-c\right)\geq\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\geq\left(a+bc\right)\left(b+ca\right)\left(c+ab\right)$

Chứng minh bất đẳng thức này không khó khăn, xin dành cho bạn đọc.□

6.15 Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a^2\left(1+a\right)}+\frac{1}{b^2\left(1+b\right)}+\frac{1}{c^2\left(1+c\right)}\geq\frac{3}{4abc}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwart ta có:
$\sum\frac{bc}{a\left(1+a\right)}=\sum\frac{b^2c^2}{abc\left(1+a\right)}\geq\frac{\left(\sum bc\right)^2}{4abc}$
Mặt khác dễ thấy $\left(\sum bc\right)^2\geq 3abc\left(a+b+c\right)$
Vậy $\sum\frac{bc}{a\left(1+a\right)}\geq\frac{3}{4}$ Do đó:
$\frac{1}{a^2\left(1+a\right)}+\frac{1}{b^2\left(1+b\right)}+\frac{1}{c^2\left(1+c\right)}\geq\frac{3}{4abc}$
Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.□

6.16 Cho $a,b,c,$ là 3 số thực dương. Chứng minh rằng:
$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq\left(a+b+c\right)^2$$

Lời giải.

Bất đẳng thức tương đương $a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq 2\left(ab+bc+ca\right)$
Mà $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq\frac{9abc}{a+b+c}$
Do đó ta chỉ cần chứng minh $a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\geq 2\left(ab+bc+ca\right)$
Nhưng đây là BĐT Schur dạng phân thức. Vậy, bất đẳng thức đầu bài được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$.□

6.17 Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:
$$a^2b^2\left(a-b\right)^2+b^2c^2\left(b-c\right)^2+c^2a^2\left(c-a\right)^2\geq\left[\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)\right]^2$$

Lời giải.

Nếu $abc = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Xét $abc > 0$, bất đẳng thức được viết lại như sau

$$\left(\frac{a-b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^2 \geq \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)^2$$

Ta có $\left(\sum \frac{a-b}{c}\right)^2 = \sum \left(\frac{a-b}{c}\right)^2 + 2\sum \frac{a-b}{c}.\frac{b-c}{a}$

Nhưng

$\sum \frac{a-b}{c}.\frac{b-c}{a} = -\frac{a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b)}{abc} \leq 0$

Nên $\sum \left(\frac{a-b}{c}\right)^2 \geq \left(\sum \frac{a-b}{c}\right)^2$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.□

$\boxed{\textbf{6.18}}$ Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sum \frac{1}{1-ab}$$

Lời giải.

Xét $\frac{P-3}{2} = \frac{1}{2-2ab} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2-2bc} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2-2ac} - \frac{1}{2} = \sum \frac{ab}{2a^2+2b^2+2c^2-2ab} \leq \sum \frac{ab}{2c^2+a^2+b^2}$

Mặt khác Theo BĐT Cauchy-Schwart ta có

$\sum \frac{ab}{2c^2+a^2+b^2} \leq \frac{1}{4}\sum \frac{(a+b)^2}{a^2+c^2+b^2+c^2} \leq \frac{1}{4}\sum \left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2}\right) = \frac{3}{4}$.

Do đó GTLN của P là $\frac{9}{2}$khi $a = b = c = \sqrt{\frac{1}{3}}$.□

$\boxed{\textbf{6.19}}$ Cho x, y, z Thỏa mãn $\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = 1$.

Tìm GTLN của

$$A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z}$$

Lời giải.

Ta đặt $\sqrt{\frac{yz}{x}} = a, \sqrt{\frac{xz}{y}} = b, \sqrt{\frac{xy}{z}} = c$

Ta có $z = ab, y = ac, x = bc$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Khi đó $A = \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca}$.

Theo bài trên thì GTLN của A là $\frac{9}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. □

$\boxed{\textbf{6.20}}$ Cho $a, b, c \geq 0$. CMR:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \sqrt[3]{abc}\,(a+b+c)^2$$

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$

Khi đó theo BĐT Schur có

$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq (ab+bc+ca)(a+b+c) \geq \sqrt[3]{abc}\,(a+b+c)^2$

Trường hợp 2: $\sqrt[3]{abc} \geq \dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$.

Chuẩn hóa $a+b+c=3$, bất đẳng thức tương đương với $27-9\left(ab+bc+ca\right)+9abc \geq 9\sqrt[3]{abc}$

Hay $3+abc \geq \sqrt[3]{abc}+ab+bc+ca$.

Theo giả thiết ở trên ta có $3\sqrt[3]{abc} \geq ab+bc+ca$. Vậy ta chỉ cần chứng minh $3+abc \geq 4\sqrt[3]{abc}$.

Dễ thấy với $abc \leq 1$ thì bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$.□

6.21 Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng :

$$\sum \frac{a}{bc\left(c^2+c^2\right)+a} \leq \frac{3}{1+2abc}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum \frac{bc\left(b^2+c^2\right)}{bc\left(b^2+c^2\right)+a} \leq \frac{6abc}{1+2abc}$$

hay $\sum \dfrac{b^2+c^2}{abc\left(b^2+c^2\right)+a^2} \geq \dfrac{6}{1+2abc}$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$ thì

$b^2+c^2 \leq c^2+a^2 \leq a^2+b^2$

và $\dfrac{1}{abc\left(b^2+c^2\right)+a^2} \leq \dfrac{1}{abc\left(c^2+a^2\right)+b^2} \leq \dfrac{1}{abc\left(a^2+b^2\right)+c^2}$Áp dụng BBĐT Chebyshev ta có

$$VT \geq \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\sum \frac{1}{abc\left(b^2+c^2\right)+a^2}\right) \geq 2.\frac{9}{2abc\left(a^2+b^2+c^2\right)+a^2+b^2+c^2} = VP$$

Bất đẳng thức được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.□

6.22 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a}{a+2b+2c} \geq \tfrac{3}{5}$$

Lời giải.

Đặt $a+2b+2c=x, b+2c+2a=y, c+2b+2a=z$

Suy ra $a=\dfrac{2y+2z-3x}{5}.b=\dfrac{2x+2z-3y}{5}, z=\dfrac{2x+2y-3z}{5}$

Bất đẳng thức được đưa về dạng $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y} \geq 6$ Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo BĐT AM-GM. Đẳng thức xảy ra khi$a=b=c$.□

6.23 Cho a, b, c dương, Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c+\frac{4\left(a-b\right)^2}{a+b+c} \quad .$$

Lời giải.

Bất đẳng thức tương đương với $\sum \left(\dfrac{a^2}{b}-2a+b\right) \geq \dfrac{4\left(a-b\right)^2}{a+b+c}$

hay $\sum \dfrac{\left(a-b\right)^2}{b} \geq \dfrac{4\left(a-b\right)^2}{a+b+c}$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwart ta có:

$$\frac{\left(b-c\right)^2}{c}+\frac{\left(c-a\right)^2}{a} \geq \frac{\left(a-b\right)^2}{a+c}$$

Do đó, $VT \geq \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(a-b)^2}{a+c} = (a-b)^2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a+c}\right) \geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$

Bất đẳng thức được chứng minh.□

6.24 Cho a, b, c là 3 số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{1}{a^2 - bc + 1} \leq 1$$

Lời giải.

Bất đẳng thức được viết lại $\sum \frac{ab+bc+ca}{a^2-bc+1} \leq 1$

$\Leftrightarrow \sum \left(1 - 2\frac{ab+bc+ca}{a^2-bc+1}\right) \geq 1$

$\Leftrightarrow \sum \frac{a^2+ab+ac}{a^2-bc+1} \geq 1$ Áp dụng BĐT Cauchy-Schwart có

$\sum \frac{a^2+ab+ac}{a^2-bc+1} = (a+b+c)\sum \frac{a^2}{a^3-abc+a} \geq \frac{(a+b+c)^3}{\sum(a^3-abc+a)}$Mặt khác với $ab+bc+ca=1$ thì dễ thấy $\frac{(a+b+c)^3}{\sum(a^3-abc+a)} = 1$

Vậy, bất đẳng thức được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.□

6.25 Cho 3 số $a, b, c > 0$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{81}{4}\sum \frac{a^2b}{(2a+b)^2} \geq \frac{13}{4}(a+b+c)$$

Lời giải.

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwart ta có

$\sum \frac{a^2b}{(2a+b)^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum \frac{(2a+b)^2}{b}} = \frac{x^2}{5x+4y}$

(với $x = a+b+c$ và $y = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$

Ta chỉ cần chứng minh $y + \frac{81x^2}{4(5x+4y)} \geq \frac{13}{4}x$

$\Leftrightarrow 4x + 5y + \frac{81x^2}{4(5x+4y)} \geq 18x$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. Đẳng thức xảy ra khi$a = b = c$. □

6.26 Cho các số thực dương a, b, c thảo mãn$a + b + c = 1$.Chứng minh rằng:

$$5(a^2+b^2+c^2) \leq 6(a^3+b^3+c^3) + 1$$

Lời giải.

Đồng bậc 2 vế ta có

$5(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \leq 6(a^3+b^3+c^3) + (a+b+c)^3$

Hay $2(a^3+b^3+c^3) + 6abc \geq 2[2(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2)]$

Nhưng đây chính là BĐT Schur bậc 3. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.□

6.27 Cho các số thức $a, b, c \geq 1$.Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leq \sqrt{a(bc+1)}$$

Lời giải.

Ta có $bc \geq \left(\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\right)^2$

Hay $\sqrt{bc} \geq \sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}$

Vậy,$\sqrt{a-1}\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leq \sqrt{bc}+\sqrt{a-1} \leq \sqrt{a(bc+1)}$.□

6. 28 Cho a, b, c là đọ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{13}{5}bc}} \geq \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Hoder ta có

$\sum a\left(5a^2+13bc\right).\sum \frac{a}{\sqrt{5a^2+13abc}}.\sum \frac{a}{\sqrt{5a^2+13abc}} \geq (a+b+c)^3$

Như vậy chỉ cần chứng minh $(a+b+c)^3 \geq \frac{1}{2}\sum a\left(5a^2+13bc\right)$

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác nên tồn tạ x, y, z dương sao cho $a = x+y, b = y+z, c = z+x$

Thay vào và khai triển ta được

$x^3+y^3+z^3+3xyz \geq x^2(x+y)+y^2(x+z)+z^2(x+y)$

Nhưng đây chính là bất đẳng thức Schur nên ta có ĐPCM. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.□

6. 29 Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = a+b+c$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a+b+c}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \sqrt{a^2b+b^2c+c^2a}+\sqrt{ab^2+bc^2+ca^2}$$

Lời giải.

Ta có:

$\sqrt{a^2b+b^2c+c^2a}+\sqrt{ab^2+bc^2+ca^2} \leq \sqrt{2\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right]}$

Ta chỉ cần chứng minh:

$(a+b+c)^4 \geq 8ab(a+b)+8bc(b+c)+8ca(c+a)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^4 \geq 8ab\left(a^2+b^2+c^2-c\right)+8cb\left(a^2+b^2+c^2-a\right)+8ac\left(a^2+b^2+c^2-b\right)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^4+24abc \geq 4(2ab+2bc+2ca)\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca\right)^2+24abc \geq 0$.

Vậy, bất đẳng thức được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 0$.□

6. 30 Cho các số thực a, b, c . CMR:

$$2(1+abc)+\sqrt{2\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)} \geq (1+a)(1+b)(1+c)$$

Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho được viết lại

$\sqrt{2\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)} \geq (b+c)(1+a)+(1-bc)(a-1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left[(1+a)^2+(a-1)^2\right]\left[(b+c)^2+(1-bc)^2\right]} \geq (b+c)(1+a)+(1-bc)(a-1)$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo BĐT Cauchy-Schwart.□

6. 31 Cho các số thực dương a, b, c, d . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{b(a+c)}{c(a+b)} + \frac{c(b+d)}{d(b+c)} + \frac{d(c+a)}{a(c+d)} + \frac{a(d+b)}{b(d+a)}$$

Lời giải.

Ta có:

$A = (a+c)\left[\frac{b}{c(a+b)} + \frac{d}{d(c+d)}\right] + (b+d)\left[\frac{c}{d(b+c)} + \frac{a}{b(d+a)}\right]$

$= (abc + abd + acd + bcd)\left[\frac{a+c}{ac(a+b)(c+d)} + \frac{b+d}{bd(b+c)(d+a)}\right]$

$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\left[\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{c}\right)} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right)}\right]$

Theo BĐT AM-GM ta có:

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{c}\right)} \geq \frac{4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right)} \geq \frac{4\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2}$$

do đó $A \geq 4$.Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 4 khi $a = c$ và $b = d$..□

6. 32 Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{1}{8a^2 + bc} \geq \frac{1}{ab + bc + ca}$$

Lời giải.

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwart ta có:

$$\sum \frac{1}{8a^2 + bc} = \sum \frac{b^2c^2}{8a^2b^2c^2 + b^3c^3} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{24a^2b^2c^2 + a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3}$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(ab + bc + ca)^2}{24a^2b^2c^2 + a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3} \geq \frac{1}{ab + bc + ca} \qquad \Leftrightarrow abc(a+b)(b+c)(c+a) \doteq 8a^2b^2c^2$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo BĐT AM-GM.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$..□

6. 33 Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{2a + b} + \frac{b^2c}{2b + c} + \frac{c^2a}{2c + a} \leq 1$$

Lời giải.

Nhận xét thấy $\frac{a^2b}{2a + b} \leq \frac{2ab + a^2}{9}(1)$

Thật vậy, (1)$\Leftrightarrow a^3 + ab^2 \geq 2a^2b$(luôn đúng theo BĐT AM-GM).

Tương tự, ta có $\frac{b^2c}{2b + c} \leq \frac{2bc + b^2}{9}, \frac{c^2a}{2c + a} \leq \frac{2ac + c^2}{9}$

Cộng 3 vế của 3 bất đẳng thức cùng chiều với điều kiện $a + b + c = 3$ ta được bất đẳng thức cần chứng minh.Đẳng thức có khi $a=b=c=1.\square$

6. 34 Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2}$$

Lời giải.

Vì $a^2+b^2+c^2=1$ nên $a,b,c\in(0,1)$. Suy ra $1-a^2,1-b^2,1-c^2$ là các số dương.

Ta có:

$\left(\frac{b^2+c^2}{a}\right)^2=\frac{a^2\left(1-a^2\right)^2}{a^4}=\frac{2a^2\left(1-a^2\right)\left(1-a^2\right)}{2a^4}\le\frac{\left(2a^2+1-a^2+1-a^2\right)}{54a^4}=\frac{4}{27a^4}$

Suy ra $\frac{a}{b^2+c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

Chứng minh tương tự ta có $\frac{b}{c^2+a^2}\ge\frac{3\sqrt{3}b^2}{2}$ và $\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}c^2}{2}$.

Cộng vế 3 bất đẳng thức cùng chiều với điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$ ta có $P\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, đạt được khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$..$\square$

6. 35 Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=(1+x)\left(a+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Lời giải.

Ta có $A=2+x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge4+x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

Mặt khác, có

$$x+\frac{1}{2x}\ge\sqrt{2}$$
$$y+\frac{1}{2y}\ge\sqrt{2}$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge\frac{2}{x+y}\ge\frac{2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}=\sqrt{2}$$

.

Từ đó suy ra $A\ge4+3\sqrt{2}$

Vậy, GTNN của A là $4+3\sqrt{2}$ khi $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$..$\square$

6. 36 Cho các số thực không âm x,y,z. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge\frac{4}{xy+yz+zx}$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $z=min\left\{x,y,z\right\}$. Khi đó ta có các đánh giá

$$(z-x)^2=z^2+x^2-2xz\le x^2$$
$$(y-x)^2=y^2+z^2-2yz\le y^2$$
$$xy+yz+zx\ge xy$$

Vậy, ta có

$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}-\frac{4}{xy+yz+zx}\ge\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{4}{xy}=\frac{\left(x^2+y^2-3xy\right)}{x^2y^2\left(y-z^2\right)}\ge0.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, z = 0$. Phép chứng minh hoàn tất.□

6. 37 Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+c} \geq 1$$

Lời giải.

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwart ta có

$VT = \dfrac{a^2}{2ab+ac} + \dfrac{b^2}{2bc+ab} + \dfrac{c^2}{2ac+bc} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1.$

Đẳng thưc xảy ra khi $a = b = c$..□

6. 38 Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm GTLN của :
$$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

Lời giải.

Ta có $P^2 = (x+y+z)^2 (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$\leq (x^2 + y^2 + z^2)^3 = 8 \Rightarrow P \leq 2\sqrt{2}$.

Vậy,GTLN của P là $2\sqrt{2}$ khi x, y, z là hoán vị của bộ $\left(0, 0, \sqrt{2}\right)$. □

6. 39 Cho các số thực a, b, c, d thuộc $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Chứng minh rằng:
$$(a+b+c+d)^4 (1-a)(1-b)(1-c)(1-a) \geq abcd (4-a-b-c-d)^4$$

Lời giải.

Nhận xét: với $0 \leq a, b \leq \dfrac{1}{2}$ ta có:
$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right) \geq \left(\frac{2}{a+b} - 1\right)^2$$
Thật vậy, dễ thấy bất đăng thức trên tương đương với $(a-b)^2 (1-a-b) \geq 0$.

Vậy, áp dụng tương tự với c, d và $\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{c+d}{2}$, ta có ĐPCM.

Đẳng thức có khi $a = b = c = d$..□

6. 40 Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^2}{a^2 - ac + c^2} + \frac{c^2}{a^2 - ab + b^2} \geq 2$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó
$$\frac{a^2}{b^2 - bc + c^2} \geq \frac{a^2}{b^2}$$
$$\frac{b^2}{c^2 - ac + a^2} \geq \frac{b^2}{a^2}$$
$$\frac{c^2}{a^2 - ab + b^2} \geq 0$$
Từ đó suy ra $VT \geq \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} \geq 2$

Đẳng thức có khi $a = b, c = 0$ và các hoán vị..□

3.7 Bài 7.1 đến bài 7.40

7.1 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:
$$A = |x+2000| + |x+y+4| + |2x+y-6|$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản: $|a| + |b| + |c| \geq |a+b+c|$
Ta có:
$$A = |x+2000| + |x+y+4| + |6-2x-y| \geq |(x+2000) + (x+y+4) + (6-2x-y)| = 2010$$
Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+2000 & \geq 0 \\ x+y+4 & \geq 0 \\ 6-2x-y & \geq 0 \end{cases}$
Có vô số cặp $(x;y)$ thỏa mãn, ví dụ $(1;1), (2;1)$....□

7.2 Cho $a, b, \in [0,2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:
$$P = \frac{8+6(a+b)+(a+b)^2}{4+2(a+b)+ab}$$

Lời giải.
Trước hết, ta có thể dự đoán giá trị lớn nhất của P là 3 khi $(a;b) = (2;0)$ hoặc $(0;2)$.
Do $a \in [0;2]$ nên $a(a-2) \leq 0$ hay $a^2 \leq 2a$. Tương tự ta có $b^2 \leq 2b$.
Vì vậy,
$$\begin{aligned} P &= \frac{8+6(a+b)+(a+b)^2}{4+2(a+b)+ab} = \frac{8+6(a+b)+a^2+b^2+2ab}{4+2(a+b)+ab} \\ &\leq \frac{8+8(a+b)+2ab}{4+2(a+b)+ab} = 2 + \frac{4(a+b)}{4+2(a+b)+ab} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\dfrac{4(a+b)}{4+2(a+b)+ab} \leq 1$ hay $(a-2)(b-2) \geq 0$
Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng do $a; b \leq 2$.□

7.3 Cho ba số thức dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng:
$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải.
Do $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ nên $ab+bc+ca \leq 3$.
Ta có: $$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} \leq \frac{bc}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{c+a}\right)$$
Tương tự với các biểu thức còn lại. Cộng 3 vế bất đẳng thức vừa chứng minh, suy ra:
$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}.$$
Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

7.4 Cho hai số thực $a, b \geq 0$ thỏa mãn $a + b = 2$. Chứng minh rằng:
$$a^a b^b + 3ab \leq 4$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ suy rộng, ta có:
$$\frac{a}{a+b}a + \frac{b}{a+b}b \geq a^{\frac{a}{a+b}} b^{\frac{b}{a+b}}$$
Do $x + y = 2$ nên: $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq a^{\frac{a}{2}} b^{\frac{b}{2}}$ hay $a^a b^b \leq (\dfrac{a^2+b^2}{2})^2 = (2 - ab)^2$

Vì vậy, $a^a b^b + 3ab - 4 \leq (2-ab)^2 + 3ab - 4 = ab(ab-1) \leq 0$ vì $ab \leq (\dfrac{a+b}{2})^2 = 1$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi$(a; b) = (1; 1), (2; 0), (0; 2)$..□

7.5 Cho hai số thực $a \geq b > 0$. Chững minh rằng:
$$(2^a + \frac{1}{2^a})^b \leq (2^b + \frac{1}{2^b})^a$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương $\dfrac{ln(1+4^a)}{a} \leq \dfrac{ln(1+4^b)}{b}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{ln(1+4^x)}{x}$ với $x > 0$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{4^x ln4^x - (1+4^x)ln(1+4^x)}{x^2(1+4^x)} < 0$, do đó $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\propto)$.

Kết hợp $a \geq b > 0$ nên $\dfrac{ln(1+4^a)}{a} \leq \dfrac{ln(1+4^b)}{b}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$. □

7.6 Cho $a; b; c$ dương và $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:
$$\frac{(a^2+b^2)^3}{a^3+b^3} + \frac{(b^2+c^2)^3}{b^3+c^3} + \frac{(c^2+a^2)^3}{c^3+a^3} \geq 12$$

Lời giải.

Lời giải 1:

Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$, ta có $xyz = 1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:
$$\sum \frac{(x^2+y^2)^3}{x^3y^3(x^3+y^3)} \geq 12 \text{ hay } \sum \frac{(x^2+y^2)^3}{x^2y^2(x+y)xy(x^2-xy+y^2)} \geq 12$$
Mặt khác, ta có $xy(x^2 - xy + y^2) \leq \dfrac{(x^2+y^2)^2}{4}$ nên:
$$\sum \frac{(x^2+y^2)^3}{x^2y^2(x+y)xy(x^2-xy+y^2)} \geq 2\sum \frac{2(x^2+y^2)}{x^2y^2(x+y)} \geq 2\sum \frac{x+y}{x^2y^2}$$
$$\geq 6\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x^4y^4z^4}} \geq 6\sqrt[3]{8xyz} = 12$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.□

Lời giải 2:

Ta sẽ chứng minh nhận xét: Với 2 số x, y dương, $\dfrac{(x^4+y^4)^3}{x^6+x^6} \geq 4x^3y^3$

Thật vậy,

$$\frac{(x^4+y^4)^3}{x^6+x^6} = \frac{x^{12}+y^{12}+3x^4y^4(x^4+y^4)}{x^6+y^6} = \frac{(x^6+y^6)^2+x^4y^4(x^2-y^2)^2+2x^4y^4(x^4+y^4)}{x^6+y^6}$$
$$\geq \frac{(x^6+y^6)^2+2x^4y^4(x^4+y^4)}{x^6+y^6} \geq \frac{2(x^6+y^6)\sqrt{2x^4y^4(x^4+y^4)}}{x^6+y^6} \geq 4x^3y^3$$

Lấy $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}$, khi đó $\dfrac{(a^2+b^2)^3}{a^3+y^3} \geq 4ab\sqrt{ab}$.

Tương tự với các biểu thức còn lại, ta có $\sum \dfrac{(a^2+b^2)^3}{a^3+b^3} \geq 4\sum ab\sqrt{ab} \geq 12 (AM-GM.)$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

7.7 Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương và $k \in [0;2]$ Chứng minh rằng
$$\frac{a^2-bc}{b^2+c^2+ka^2} + \frac{b^2-ac}{a^2+c^2+kb^2} + \frac{c^2-ab}{a^2+b^2+kc^2} \geq 0$$

Lời giải.

Cần chứng minh: $\dfrac{(a^2-bc)(b+c)}{(b^2+c^2+ka^2)(b+c)} + \dfrac{(b^2-ac)(a+c)}{(a^2+c^2+kb^2)(a+c)} + \dfrac{(c^2-ab)(a+b)}{(a^2+b^2+kc^2)(a+b)} \geq 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$, khi đó:

$$(a^2-bc)(b+c)-(b^2-ac)(a+c) = (ab+c^2)(a-b)+c(a^2-b^2) \geq 0$$
$$(b^2+c^2+ka^2)(b+c)-(a^2+c^2+kb^2)(a+c) = (b-a)(a^2+b^2+c^2-(k-1)(ab+bc+ca)) \leq 0$$

Ta có các bộ số cùng chiều :
$$(a^2-bc)(b+c); (b^2-ac)(a+c); (c^2-ab)(a+b)$$
và
$$\frac{1}{(b^2+c^2+ka^2)(b+c)}; \frac{1}{(a^2+c^2+kb^2)(a+c)}; \frac{1}{(a^2+b^2+kc^2)(a+b)}$$

Áp dụng bất đẳng thức *Chebychev* với chú ý $(a^2-bc)(b+c)+(b^2-ac)(a+c)+(c^2-ab)(a+b) = 0$, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.□

7.8 Cho a, b, c, là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:
$$\frac{a+b-c}{3b+c-a} + \frac{b+c-a}{3c+a-b} + \frac{c+a-b}{3a+b-c} \geq 1$$

Lời giải.

Do a, b, c là 3 cạnh của tam giác, đặt $a = x+y, b = y+z, c = z+x$, bất đẳng thức trở thành:
$$\frac{y}{y+2z} + \frac{z}{z+2x} + \frac{x}{x+2y} \geq 1$$
Bất đẳng thức trên có thể chứng minh đơn giản bằng *Cauchy − Schwarz*:
$$\frac{y}{y+2z} + \frac{z}{z+2x} + \frac{x}{x+2y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx} = 1$$
Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.□

7.9 Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c>0$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b}\le\frac{1}{3}$$

Lời giải.

Ta có: $$\frac{4a(a+b+c)}{4a+4b+c}=a+\frac{3ac}{4a+4b+c}$$
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:
$$\frac{ac}{4a+4b+c}+\frac{ab}{4b+4c+a}+\frac{bc}{4c+4a+b}\le\frac{a+b+c}{9}$$
Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ dạng $Engel$, ta có:
$$\frac{ca}{4a+4b+c}=\frac{ca}{(2b+c)+2(2a+b)}\le\frac{ca}{9}\left(\frac{1}{2b+c}+\frac{2}{2a+b}\right)$$
Tương tự, cộng các vế bất đẳng thức ta có:
$$\sum\frac{ca}{4a+4b+c}\le\frac{1}{9}\sum\left(\frac{ca}{2b+c}+\frac{2ca}{2a+b}\right)=\frac{1}{9}\left(\sum\frac{ca}{2b+c}+\sum\frac{2ab}{2b+c}\right)=\frac{a+b+c}{9}.$$
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=2b, c=0$ và các hoán vị.□

7.10 Cho $xyz=1$, $x,y,z>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P=\frac{1}{x^2+2y^2+3}+\frac{1}{y^2+2z^2+3}+\frac{1}{z^2+2x^2+3}$$

Lời giải.

Áp dụng 2 bất đẳng thức đơn giản: $x^2+y^2\ge 2xy$ và $y^2+1\ge 2y$, ta có:
$$\frac{1}{x^2+2y^2+3}\le\frac{1}{2(xy+y+1)}$$
Tương tự với các biểu thức còn lại, suy ra: $P\le\frac{1}{2}$

(Chú ý đẳng thức $\sum\frac{1}{xy+y+1}=1$ khi $xyz=1$)

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.□

7.11 Cho x, y, z không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+xyz=4$. Chứng minh rằng:
$$0\le xy+yz+xz-xyz\le 2$$

Lời giải.

Chứng minh bất đẳng thức vế trái:

Từ giả thiết ta thấy rằng có ít nhất một trong 3 số $x, y, z\le 1$. (Vì điều ngược lại vô lý). Giả sử $x\le 1$. Khi đó ta có:
$$xy+yz+xz-xyz=x(y+z)+yz(1-x)\ge 0$$
Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)=(2,0,0)$ và các hoán vị.

Chứng minh bất đẳng thức vế phải:

Theo nguyên lí *Dirichle*, tồn tại 2 số cùng nằm về 1 bên so với 1. Giả sử 2 số đó là y, z. Khi đó:$(1-y)(1-z)\ge 0$.

Ta có: $4=x^2+y^2+z^2+xyz\ge x^2+2yz+xyz$ hay $yz(2+x)\le 4-x^2$ hay $yz\le 2-x$.

Vì vậy ta có:

$$\begin{aligned}xy+yz+xz-xyz &\le x(y+z)+(2-x)-xyz\\ &= 2-x(1+yz-y-z)=2-a(1-b)(1-c)\\ &\le 2\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy khi $(x,y,z)=(1,1,1);(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$ và các hoán vị.□

7.12 Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2}{\sqrt{b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+a}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b}}\ge\frac{b^2}{\sqrt{b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{c+a}}+\frac{a^2}{\sqrt{a+b}}$$

Lời giải.
Giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó, $a+b\ge a+c\ge b+c$.
Bất đẳng thức cần chứng minh chỉ là hệ quả của bất đẳng thức hoán vị với 3 bộ số có điều kiện như trên:

$$a\ge b\ge c$$
$$\frac{1}{b+c}\ge\frac{1}{a+c}\ge\frac{1}{a+b}$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.□

7.13 Cho 3 số thức dương $x,y,z>1$ thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$T=\frac{y-2}{x^2}+\frac{z-2}{y^2}+\frac{x-2}{z^2}$$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}T&=\sum(\frac{y-2}{x^2}+\frac{1}{x})-\sum\frac{1}{x}=\sum(\frac{(x-1)+(y-1)}{x^2}+\frac{1}{x})-\sum\frac{1}{x}\\ &=\sum[(x-1)(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2})]-\sum\frac{1}{x}\\ &\ge(x-1)(\frac{2}{xz})-\sum\frac{1}{x}=\sum\frac{1}{x}-2\end{aligned}$$

Mặt khác : $\sum\frac{1}{x}\ge\sqrt{3\sum\frac{1}{xy}}=\sqrt{3}$. Vì vậy, $T\ge\sqrt{3}-2$
Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\sqrt{3}$. .□

7.14 Cho $a,b,c\ge 0, a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P=\frac{1+a^2}{1+b^2}+\frac{1+b^2}{1+c^2}+\frac{1+c^2}{1+a^2}$$

Lời giải.

Lời giải 1.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Ta có:

$$\frac{a^2+1}{b^2+1} = a^2+1-\frac{b^2(a^2+1)}{b^2+1} \le a^2+1-\frac{b^2(a^2+1)}{2}$$

Tương tự với các số hạng còn lại, ta thu được:

$$\begin{aligned}
P &\le a^2+b^2+c^2+3-\frac{a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)}{2} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{2}+3 \\
&\le \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{2}+3=\frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $=1, b=0, c=0$ và các hoán vị.□

Lời giải 2.

Cho $a=1, b=c=0$. Khi đó, giá trị lớn nhất dự đoán là $\frac{7}{2}$. Dựa trên dự đoán đó, ta có lời giải như sau:

Giả sử $c = min\{a,b,c\}$, ta có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2-\frac{b}{a}\right)=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}\ge 0$$

Từ đó ta có:

$$P-3=\frac{1+a^2}{1+b^2}+\frac{1+b^2}{1+c^2}+\frac{1+c^2}{1+a^2}-3=\frac{(a^2-b^2)^2}{(1+a^2)(1+b^2)}+\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}{(1+a^2)(1+c^2)},$$

Với giả sử c nằm giữa a, b, ta được $(a^2-c^2)(b^2-c^2)\le 0$ suy ra $P-3\le\frac{(a^2-b^2)^2}{(1+a^2)(1+b^2)}$

Như vậy, để chứng minh giá trị lớn nhất là $\frac{7}{2}$. Ta cần chứng minh:

$$\frac{(a^2-b^2)^2}{(1+a^2)(1+b^2)}\le\frac{1}{2} \text{ hay } 2(a^2-b^2)^2\le(1+a^2)(1+b^2)$$

Sử dụng giả thiết, ta suy ra $0\le a,b\le 1$, từ đó suy ra bất đẳng thức trên đúng vì:

$$2(a^2-b^2)^2\le 2\max\{a^4,b^4\}\le 2\max\{a^2,b^2\}\le\max\{1+a^2,1+b^2\}\le(1+a^2)(1+b^2).$$

Bất đẳng thức được chứng minh..□

Nhận xét:

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có kết quả tổng quát sau:

Với mọi số thực không âm a, b, c có tổng bằng 1 và với mọi $k\ge 1$, ta có:

$$P=\frac{1+a^k}{1+b^k}+\frac{1+b^k}{1+c^k}+\frac{1+c^k}{1+a^k}\le\frac{7}{2}$$

7.15 Cho x, y, z dương thỏa mãn $xy+yz+3xz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^2+y^2+z^2$

Lời giải.

Những bài dạng này, chúng ta có thể giải bằng phương pháp cân bằng hệ số với bất đẳng thức

$AM - GM, Cauchy - Schwarz$ hoặc bất đẳng thức $Holder$. Ở đây sẽ dùng bất đẳng thức $AM - GM$. Cách còn lại xin dành cho bạn đọc.
Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 =& (ax^2 + \frac{1}{2}y^2) + (az^2 + \frac{1}{2}y^2) + (1-a)x^2 + (1-a)z^2 \\ \geq& 2\sqrt{\frac{a}{2}}xy + 2\sqrt{\frac{a}{2}}yz + 2(1-a)xz \end{aligned}$$

Cần tìm a sao cho $\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{1}{3}(1-a)$, ta tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức.□

Nhận xét:

Bây giờ ta đưa ra 2 bài toán dạng tương tự và cũng rất thú vị, và phần chứng minh sẽ dành cho các bạn.

1: Cho các số thức không âm $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = a$.(a là hằng số đã biết) Tìm giá trị lớn nhất của:

$$f = k_1xy + k_2yz + k_3xz \text{ (với } k_1; k_2; k_3 \text{ là hằng số)}$$

2: Cho $x_1; ...; x_n \geq 0; x_1 + ... + x_n = k$($k$ là hằng số). Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$a_1x_1^m + a_2x_2^m + ... + a_nx_n^m$$

7.16 cho $a; b; c > 0, abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \frac{ab}{a+b+ab} + \frac{bc}{b+c+bc} + \frac{ca}{c+a+ca}$$

Lời giải.

Để ý với điều kiện $abc = 1$, ta có: $\dfrac{ab}{a+b+ab} = \dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1}$

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$, ta được:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 \geq \sqrt[3]{\frac{1}{ab}}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}}\right) + 1 = \sqrt[3]{c}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}}\right) + 1$$

suy ra

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{c}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}}\right) + 1} = \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca}}$$

Làm tương tự với các biểu thức còn lại, ta có $T \leq 1$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

7.17 Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt[3]{(\frac{1}{ab} - 1)(\frac{1}{bc} - 1)(\frac{1}{ac} - 1)}$$

Lời giải.

Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$, khi đó ta có: $xy + yz + zx = xyz$ và $xyz \geq 27$

Ta sẽ chứng minh:

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{ab} - 1)(\frac{1}{bc} - 1)(\frac{1}{ac} - 1) = (xy - 1)(yz - 1)(zx - 1) \geq 512 \\
&\Leftrightarrow x^2y^2z^2 - xyz(x + y + z) + xy + yz + zx - 1 \geq 512 \\
&\Leftrightarrow 2x^2y^2z^2 - 2xyz(x + y + z) + 2xyz \geq 2.513 \\
&\Leftrightarrow x^2y^2z^2 + [(xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z)] + 2xyz \geq 1026 \\
&\Leftrightarrow x^2y^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz \geq 1026
\end{aligned}$$

Mặt khác, theo $AM - GM$, ta có:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4} \geq 243;\ x^2y^2z^2 \geq 729;\text{ và } xyz \geq 27$$

Vậy $P \geq 8$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.$\square$

7.18 Cho các số dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[10]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}}$$

Lời giải.

Đây là một bài toán rất khó. Ta sẽ sử dụng bổ đề sau:

Bổ đề: Với mọi số thức dương a, b, c thì:

$$(a + b + c)^6 \geq \frac{729}{5}abc(a^3 + b^3 + c^3 + 2abc)$$

.

Quay trở lại bài toán. Từ bổ đề trên với chú ý $abc = 1$, ta có :

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[6]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 2}{5}}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2 = 3\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} + 1 + 1 \geq 5\sqrt[5]{\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^3}{27}}$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. .$\square$

7.19 Cho $x, y, z \geq 0$ thoả $x + y + z = 1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = x^ny + y^nz + z^nx \text{ với } n \in N^*$$

Lời giải.

Với $n = 1$ thì $maxP = \frac{1}{3}$.

Với $n > 1$.

Không mất tổng quát, giả sử $x = \max\{x, y, z\}$, thế thì:

$$\begin{cases} y \le x \Rightarrow y^n z \le x^{n-1}yz \\ z \le x \Rightarrow z^n x \le zx^n \\ z^n x \le z^2 x^{n-1} \\ n > 1 \Rightarrow \dfrac{n-1}{n} \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{n-1}{n}.z \ge \dfrac{z}{2} \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} P = x^n y + y^n z + z^n x &\le x^n y + x^{n-1}yz + \frac{1}{2}.z^n x + \frac{1}{2}.z^n x \\ &\le x^n y + x^{n-1}yz + \frac{zx^n}{2} + \frac{z^2x^{n-1}}{2} = x^{n-1}(x+z)\left(y + \frac{z}{2}\right) \\ &\le x^{n-1}(x+z)\left(y + \frac{n-1}{n}z\right) \\ &= n^n.\left[\underbrace{\frac{x}{n}.\frac{x}{n}...\frac{x}{n}}_{n-1}.\frac{x+z}{n}.\left(y + \frac{n-1}{n}.z\right)\right] (1) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì:

$$\underbrace{\frac{x}{n}.\frac{x}{n}...\frac{x}{n}}_{n-1}.\frac{x+z}{n}.\left(y + \frac{n-1}{n}.z\right) \le \left[\frac{(n-1).\frac{x}{n} + \frac{x+z}{n} + y + \frac{n-1}{n}.z}{n+1}\right]^{n+1}$$

Từ đó đem thế vào (1), ta được:

$$P \le \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \dfrac{n+1}{n}, z = 0$ và các hoán vị.□

7.20 Cho a, b, c thỏa mãn $\dfrac{1}{2} \le a; b; c \le 2$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \ge \frac{22}{15}$$

Lời giải.

Xét :$f(a,b,c) = \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a = max\{a, b, c\}$ .Ta có:

$$f(a,b,c) - f(a,b,\sqrt{ab}) = (\sqrt{ab} - c)^2\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(b+c)(c+a)}\right)\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \ge 0$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = x \Rightarrow (\dfrac{1}{2} \le x \le 2)$, ta có:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2(x-1)(1-x^3)}{(x^2+1)^2(x+1)^2} \le 0$$

Vậy $f(x)$ nghịch biến $\Rightarrow minf(x) = f(2) = \dfrac{22}{15}$

7.21 Cho a, b, c dương và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{\sqrt{a^2+abc}}{c+ab}+\frac{\sqrt{b^2+abc}}{a+bc}+\frac{\sqrt{c^2+abc}}{b+ac}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

Lời giải.

Ta có:
$$a^2+abc=a(a+b)(a+c) \text{ và } c+ab=(b+c)(c+a)$$
Vì thế bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết dưới dạng:
$$\sum\frac{\sqrt{a(a+b)(a+c)}}{(b+c)(c+a)}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}.$$
hay
$$\sum\frac{a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}}{(b+c)(c+a)}\le\frac{1}{2}.$$
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:
$$\sqrt{bc(a+b)(a+c)}\le\frac{b(a+c)+c(a+b)}{2}=\frac{ab+ac+2bc}{2}.$$
Theo đó ta chỉ cần chứng minh được:
$$\sum\frac{a(ab+ac+2bc)}{(b+c)(c+a)}\le 1.$$
Bất đẳng thức này tương đương với
$$\sum a(a+b)(ab+ac+2bc)\le(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c).$$
Khai triển và rút gọn ta được
$$\sum a^3(b+c)+\sum a^2b^2+5\sum a^2bc\le\sum a^3(b+c)+2\sum a^2b^2+4\sum a^2bc$$
hay
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc(a+b+c).$$
Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. □

7.22 Cho a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:
$$ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27}$$

Lời giải.
Viết lại bất đẳng thức dưới dạng: $(ab+bc+ca)(a+b+c)-2abc\le\frac{7}{27}$
Đặt $a+b+c=k$, sử dụng bất đẳng thức quen thuộc:
$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$$
$$\text{hay } (k-2a)(k-2b)(k-2c)\le abc.$$
Sau khi biến đổi tương đương ta thu được:
$$4k(ab+bc+ca)\le k^3+9abc$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)\le\frac{1}{4}+\frac{9abc}{4}$$
Mặt khác, theo $AM-GM$ ta có: $abc\le(\frac{a+b+c}{3})^3$.
Vì vậy $(ab+bc+ca)(a+b+c)-2abc\le\frac{1}{4}+\frac{abc}{4}\le\frac{7}{27}$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.□

7.23 Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{ab}{ab+c} + \frac{bc}{bc+a} + \frac{ac}{ac+b} \geq \frac{3}{4}$$

Lời giải.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4[\sum ab(a+b)]$$

Dựa vào 2 đẳng thức quen thuộc:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = (a+b)(b+c)(c+a$$
$$(a+b+c) + (ab+bc+ca) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc$$

ta đưa bất đẳng thức phía trên về dạng:

$$(ab+bc+ca)(a+b+c) \geq 9abc$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$$

Nhưng đây lại là một bất đẳng thức đúng, do $a + b + c = 1$
Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.□

7.24 Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = 9$. Chứng minh rằng:
$$a\sqrt{1+\frac{7}{b^2}} + b\sqrt{1+\frac{7}{c^2}} + c\sqrt{1+\frac{7}{a^2}} \geq \frac{7\sqrt{3}}{6}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) + \frac{3}{2}$$

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned} a\sqrt{1+\frac{7}{b^2}} + b\sqrt{1+\frac{7}{c^2}} + c\sqrt{1+\frac{7}{a^2}} &= \sqrt{a^2+\frac{7a^2}{b^2}} + \sqrt{b^2+\frac{7b^2}{c^2}} + \sqrt{c^2+\frac{7c^2}{a^2}} \\ &\geq \sqrt{(a+b+c)^2 + 7(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2} \\ &\geq \sqrt{81+7.9} = 12 \end{aligned}$$

$$\frac{7\sqrt{3}}{6}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) + \frac{3}{2} \leq \frac{7.\sqrt{3}.\sqrt{3(a+b+c)}}{6} + \frac{3}{2} = \frac{21}{2} + \frac{3}{2} = 12$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 3$.□

7.25 Cho a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:
$$\frac{ab}{c(1+ab)}+\frac{bc}{a(1+bc)}+\frac{ca}{b(1+ca)}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải.

Đặt
$$a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}\Rightarrow xy+yz+zx=1$$
hay
$$\frac{x}{yz+1}+\frac{y}{zx+1}+\frac{z}{xy+1}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}$$
Xét trường hợp: $x\geq y\geq z\Rightarrow yz+1\geq zx+1\geq xy+1$

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev có :
$$\begin{aligned}\frac{x}{yz+1}+\frac{y}{zx+1}+\frac{z}{xy+1}&\geq\frac{1}{3}(x+y+z)(\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1}+\frac{1}{xy+1})\\&\geq\frac{3}{4}(x+y+z)\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

Xét trường hợp:$x\geq z\geq y$. Bất đẳng thức được chứng minh tương tự.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hay $a=b=c=\sqrt{3}$.□

7.26 Cho $a;b;c>0$ và $a+b+c=\sqrt{3}$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải.

Sử dụng phương pháp tiếp tuyến, ta sẽ chứng minh: $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\leq\dfrac{5\sqrt{3}}{8}-\dfrac{3}{8}a(*)$

Thật vậy
$$\begin{aligned}(*)&\Leftrightarrow\sqrt{3}(5-\sqrt{3}a)\sqrt{a^2+1}\geq 8\\&\Leftrightarrow 9a^4-30\sqrt{3}a^3+84a^2-30\sqrt{3}a+11\geq 0\\&\Leftrightarrow(a-\frac{1}{\sqrt{3}})^2(9a^2-24\sqrt{3}a+33)\geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên đúng do $a\in(0,\sqrt{3})$.

Tương tự với các bất đẳng thức còn lại. Cộng vế với vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.□

7.27 Cho $a;b;c>0$. Chứng minh:
$$(a+b+c)^3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq 27a^2b^2c^2$$

Lời giải.

Lời giải 1.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $b\geq a\geq c$.

Dễ thấy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức thức khi a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Đặt 2 vế của bất đẳng thức ban đầu lần lượt là VT (vế trái) và VP (vế phải).

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta được:

$$\begin{aligned}3VT &= 3(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)\cdot(a+b+c)^2(b+c-a)\\ &\le \left[\frac{3(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)+(a+b+c)^2(b+c-a)}{2}\right]^2.\end{aligned}$$

Như vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{3(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)+(a+b+c)^2(b+c-a)}{2} \le 9abc.$$

Rút gọn một chút:

$$3(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)+(a+b+c)^2(b+c-a) = 2(a+b+c)(a^2-b^2-c^2+4bc)$$

Như vậy, ta cần chứng minh:

$$(a+b+c)(a^2-b^2-c^2+4bc) \le 9abc$$

Do điều giả sử, ta có $(a-c)(a-b) \le 0$ hay $a^2+bc \le a(b+c)$. Suy ra:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a^2-b^2-c^2+4bc) &\le (a+b+c)\left(ab+bc+ca-b^2-c^2+2bc\right)\\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca)-(b-c)^2(a+b+c)\end{aligned}$$

Hơn nữa ta có đẳng thức:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc = a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$

Vì vậy, ta cần chỉ ra rằng:

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \le (b-c)^2(a+b+c)$$

Điều này đúng do với điều giả sử $b \ge a \ge c$ thì:

$$(b-c)^2 = \max\left\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\right\}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 2.

Đặt: $x = a+b-c; y = a+c-b; z = b+c-a$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \ge 64xyz(x+y+z)^3$$

Mà ta có:

$$\begin{aligned}81(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 &\ge 64(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2\\ &\ge 64.3(x+y+z)^3xyz\end{aligned}$$

Đây là điều phải chứng minh.

Lời giải 3.

Ta thấy rằng nếu $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) < 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì vế trái của nó là số âm, trong khi vế phải lại là một số dương.

Từ lý luận này suy ra, ta chỉ cần xét trường hợp $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \ge 0$ là đủ.

Khi đó dễ thấy $b+c-a > 0,\ c+a-b > 0,\ a+b-c > 0$. Bây giờ, ta nhân $27abc$ vào hai vế của bất đẳng thức và viết lại nó như sau:

$$27abc(a+b+c)^3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le 9^3a^3b^3c^3$$

hay

$$[27 \cdot a(b+c-a) \cdot b(c+a-b) \cdot c(a+b-c)]\,(a+b+c)^3 \le 9^3a^3b^3c^3.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có:

$$27 \cdot a(b+c-a) \cdot b(c+a-b) \cdot c(a+b-c) \le [a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)]^3.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh được:

$$(a+b+c)\left[2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2\right] \le 9abc.$$

hay

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c} \ge 2(ab+bc+ca)$$

Nhưng đây lại chính là bất đẳng thức *Schur* quen thuộc. Ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 4.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$.

Ta viết bất đẳng thức lại như sau:

$\Leftrightarrow (a+b+c)^3\,[abc-(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]+abc\,[27abc-(a+b+c)^3 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^3\,[(a-b)^2(a+b-c)+c(a-c)(b-c)]-abc(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)(b-c)] \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2.M+(a-c)(b-c).N \ge 0$

với $M=(a+b+c)^3(a+b-c)-abc(a+b+c)$ và $N=(a+b+c)^3c-abc(a+b+c)$.

Ta chỉ cần chứng minh M, N đều không âm là được. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} M=(a+b+c)^3(a+b-c)-abc(a+b+c) &= (a+b+c)\left[(a+b+c)^2(a+b-c)-abc\right] \\ &\ge (a+b+c)(a^2.a-abc) \ge 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N=(a+b+c)^3.c-abc(a+b+c) &= c(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-ab\right] \\ &= c(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2+2(bc+ca)+ab\right] > 0. \end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

$\boxed{\textbf{7.28}}$ Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}$$

Lời giải.

Ta có đánh giá: $5a^2+2ab+2b^2 \ge (2a+b)^2$. (Bất đẳng thức tương đương: $(a-b)^2$)

Từ đánh giá trên , ta có:

$$P \le \sum \frac{1}{2a+b} = \frac{1}{9}\sum \frac{9}{a+a+b} \le \frac{1}{3}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

Mặt khác, ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \sqrt{3(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})} = \sqrt{3}$$

Vì vậy, $P \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.□

7.29 Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 6$và $ab + bc + ac = -3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a^6 + b^6 + c^6$$

Lời giải.

Từ giả thiết dễ dàng suy ra: $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 = 9 \\ a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 18 \end{cases}$

Từ đó, ta có:

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) = 54 \quad .$$

Như vậy, ta chỉ cần tìm cực trị của $P = a^2b^2c^2$.

Dễ dàng có $P \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $a = 0, b = \sqrt{3}, c = -\sqrt{3}$.

Công việc còn lại ta cần tìm giá trị lớn nhất của P.

Áp dụng Cauchy Schwarz, ta được:

$$6 = a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + \frac{(b + c)^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Suy ra $-2 \leq a \leq 2$. Bằng cách tương tự ta cũng có $-2 \leq b, c \leq 2$. Suy ra:

$$(a - 2)(b - 2)(c - 2) \leq 0 \text{ và } (a + 2)(b + 2)(c + 2) \geq 0$$

Khai triển và dựa vào các đẳng thức đã có, ta được $-2 \leq abc \leq 2$ suy ra $a^2b^2c^2 \leq 4$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = 2, b = c = -1$ hoặc $a = -2, b = c = 1$.

Đến đây bài toán được giải quyết.□

Nhận xét:

Ta có một bài toán tương tự nhưng thú vị hơn như sau:

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^5b + b^5c + c^5a \leq -3$$

7.30 Cho các số không âm a, b, c thoả mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{b^2 + bc + c^2 + 3a} + \frac{1}{c^2 + ca + a^2 + 3b} + \frac{1}{a^2 + ab + b^2 + 3c}$$

Lời giải.

Sử dụng giả thiết ta suy ra $b^2 + bc + c^2 + 3a = (a + b)^2 + (a + b)(a + c) + (a + c)^2$.

Từ đó đặt $x = a + b, y = b + c, z = c + a$, ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{x^2 + xy + y^2} + \frac{1}{y^2 + yz + z^2} + \frac{1}{z^2 + zx + x^2}$$

với $x + y + z = 2$.

Trên thực tế ta có bất đẳng thức rất quen thuộc sau và có lẽ cũng không cần phải chứng minh lại:

$$\frac{1}{x^2 + xy + y^2} + \frac{1}{y^2 + yz + z^2} + \frac{1}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{9}{(x + y + z)^2} \quad .$$

Vậy ta có $P \geq \dfrac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.□

7.31 Cho các số thực $x; y; z \geq 0$ thoả mãn $xy + yz + zx = 3$.Chứng minh bất đẳng thức:
$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có:
$$3 = xy + yz + xz \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \text{ hay } xyz \leq 1$$
Và
$$(xz + yz)(xy + zx)(zy + xy) \leq \left(\frac{xz + yz + xy + zx + zy + xy}{3}\right)^3 = 8.$$
Từ 2 bất đẳng thức trên, ta có:
$$\begin{aligned}\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} &= \frac{1}{2xyz} + \frac{1}{2xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}\\ &\geq \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{2}{(xz+yz)(yx+zx)(zy+xy)}}\\ &\geq \frac{3}{2}\end{aligned}$$
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.□

7.32 Cho a, b, c, d thỏa mãn: $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng : $abcd \leq (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$.

Lời giải.

Ta đi chứng minh:
$$(1-a)(1-b) \geq cd.$$
Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với:
$$\begin{aligned}&1 - a - b + ab \geq cd\\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2a - 2b + 2ab - 2cd + 1 \geq 0\\ &\Leftrightarrow (a+b-1)^2 + (c-d)^2 \geq 0\end{aligned}$$
Tương tự, ta có: $(1-c)(1-d) \geq ab$. Nhân 2 vế của 2 bất đẳng thức vừa chứng minh, ta được kết luận.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{2}$. □

7.33 Cho $a; b; c \geq 0$. Chứng minh rằng:
$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + \frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Lời giải.

Đặt
$$x = \frac{2a}{b+c}; y = \frac{2b}{c+a}; z = \frac{2c}{a+b}.$$
Từ đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$, ta có đẳng thức sau :
$$\begin{aligned}xy + yz + zx + xyz &= \frac{4ab}{(b+c)(a+c)} + \frac{4bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{4ca}{(b+c)(a+b)} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\ &= 4\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $x^2+y^2+z^2+5xyz \geq 8$.
Đến đây nếu đánh giá $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ thì tất nhiên không đi tới kết quả. Vì vậy, ta nghĩ đến mối quan hệ với xyz, từ đó ta sẽ nghĩ đến bất đẳng thức $Schur$ (chú ý đến dấu = xảy ra ở 2 điểm) có dạng:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2(xy+yz+zx)$$

Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned}
&4 = xy+yz+zx+xyz \leq \frac{t^2}{3}+\frac{t^{33}}{27}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{27}((t)-3)(t+6)^2 \geq 0\\
&\Rightarrow t \geq 3
\end{aligned}$$

với $t=x+y+z$.
Từ đó, ta viết lại vế trái bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2+5xyz &= x^2+y^2+z^2+\frac{9}{3}xyz+2xyz\\
&\geq x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z}+2xyz\\
&\geq 2(xy+yz+zx+xyz)=8.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$ hoặc $x=0; y=z=2$ và các hoán vị .
Suy ra $a=b=c$ hoặc $a=0; b=c$ và các hoán vị. □

7.34 Chứng minh rằng với mọi $a,b,c \geq 0$ ta đều có :

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geq 2\left(\frac{b+c}{2}-a\right)^3$$

Lời giải.

Đặt $f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3-3abc-2\left(\frac{b+c}{2}-a\right)^3$. Ta có:

$$f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=\frac{3(b-c)^2(b+c)}{4}+\frac{3a(b-c)^2}{4} \geq 0$$

Do đó,
$$f(a,b,c) \geq f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right).$$

Mặt khác
$$f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=3a\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.□

7.35 Cho a,b,c là các số dương thoả: $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$F=\frac{a^3+b^3}{ab+3}+\frac{b^3+c^3}{bc+3}+\frac{c^3+a^3}{ca+3}$$

Lời giải.

Ta có 2 bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

và $$ab + bc + ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{a^3}{ab+3} + \frac{b^3}{bc+3} + \frac{c^3}{ca+3}\right) + \left(\frac{b^3}{ab+3} + \frac{c^3}{bc+3} + \frac{a^3}{ca+3}\right) \\ &\ge \frac{2(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca+9)} \\ &\ge \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vì vậy, giá trị nhỏ nhất của $F = \dfrac{3}{2}$.

Nhận xét:

Từ bài toán trên, ta đưa ra một bất đẳng thức tổng quát có nhiều ứng dụng:

Cho $a_i; b_i (i = 1; 2; ...; k)$ là các số thực dương và số nguyên $n \ge 2$. Ta có bất đẳng thức sau:
$$\frac{a_1^n}{b_1} + \frac{a_2^n}{b_2} + ... + \frac{a_k^n}{b_k} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n}{k^{n-2}(b_1 + b_2 + ... + b_n)}.$$
Bất đẳng thức này có thể chứng minh trực tiếp bằng bất đẳng thức $Holder$. Việc chứng minh sẽ để lại cho bạn đọc.

7. 36 Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:
$$2\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \ge (abc+1)(a+1)(b+1)(c+1)$$

Lời giải.

Nhận xét với mỗi số thưc dương a ta có $\left(a^2+1\right)^3 \ge \left(a^3+1\right)(a+1)^3$. Đẳng thức có khi $a = 1$. Chứng minh bất đẳng thúc này khá đơn giản, xin dành cho bạn đọc.
Áp dụng cho b và c ta có
$\left(b^2+1\right)^3 \ge \left(b^3+1\right)(b+1)^3$
$\left(c^2+1\right)^3 \ge \left(c^3+1\right)(c+1)^3$
Từ đó suy ra $VT \ge (a+1)(b+1)(c+1)\sqrt[3]{\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)\left(c^3+1\right)}$
Mặt khác theo BĐT Hoder ta có $\sqrt[3]{\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)\left(c^3+1\right)} \ge abc + 1$.
vậy, ta có $VT \ge VP$. Đẳng thức có khi $a = b = c = 1$.□

7.37 Cho các số thực a, b, c, x, y, z thỏa mãn $(a+b+c)(x+y+z) = 3$ và $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) = 4$. Chứng minh rằng:
$$ax + by + cz \ge 0$$

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}}$ thì:
$a^2 + b^2 + c^2 = 2t^2$
$x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{2}{t^2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\frac{a}{t}+tx\right)^2+\left(\frac{b}{t}+ty\right)^2+\left(\frac{c}{t}+tz\right)^2 \geq 4$$

Nhưng ta có:

$$\left(\frac{a}{t}+tx\right)^2+\left(\frac{b}{t}+ty\right)^2+\left(\frac{c}{t}+tz\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left[\frac{a+b+c}{t}+t\left(x+y+z\right)\right]^2 \geq \frac{4}{3}\left(a+b+c\right)\left(x+y+z\right)$$
$$=4.$$

Vậy, bất đẳng thức được chứng minh.□

$\boxed{\textbf{7.38}}$ Cho a,b,c là đọ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh rằng:
$abc\left[2\sum a^2\left(b+c\right)-2\sum a^3+3abc\right] \geq \left(a+b+c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right)\left(ab+bc+ca\right)$

Lời giải.

Áp dụng hằng đẳng thức:
$\left(a+b-c\right)\left(c+a-b\right)\left(b+c-a\right)=\sum a^2\left(b+c\right)-\sum a^3-2abc$
Suy ra bất đẳng thức trên tương đương với
$2abc\prod\left(b+c-a\right)+7a^2b^2c^2 \geq \left(a+b+c\right)\prod\left(b+c-a\right)\left(ab+bc+ca\right)$
Tuy nhiên, ta có một số đẳng thức tam giác sau đây:
$16S^2=\left(a+b+c\right)\prod\left(b+c-a\right)$
$abc=4SR$
$S=pr$
Từ đó dễ dàng đưa bất đẳng thức về dạng:
$4\frac{r}{R}+7 \geq 4\sum\sin A\sin B$
$\Leftrightarrow 4\sum\cos A+3 \geq \sum\sin A\sin B$
$\Leftrightarrow 4\sum\cos A\cos B \leq 3$
Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $\sum\cos A \leq \frac{3}{2}$.
Vậy, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.□

$\boxed{\textbf{7.39}}$ Cho a,b,c là các số nguyên không âm thỏa mãn $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=2$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right) \leq 1$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử c là số nằm giữa a và b, Khi đó $\left(a-c\right)\left(b-c\right) \leq 0$.
Ta có:

$$\left(a+b\right)^2\left[\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]^2=4$$

tương đương

$$\left(a+b\right)^2\left(c^2+ab+ca+cb\right)=4$$

Hơn nữa,

$$\left(c^2+ab+bc+ca\right) \geq 4\left(c^2+ab\right)\left(bc+ca\right)$$

Do vậy

$$\left(c^2+ab\right)\left(bc+ca\right)\left(a+b\right)^2 \leq 1$$

Tương đương

$$c\,(a+b)^3\,(c^2+ab)\le 1$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$(a^2+bc)\,(b^2+ca)\,(c^2+ab)\le c\,(a+b)^3\,(c^2+ab)$$

tương đương

$$ab\,[(a-c)\,(b-c)-2ac-2bc]\le 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức có khi và chỉ khi $a=0, b=c=1$ và các hoán vị.□

7.40 Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge \frac{5}{16}(a+b+c+1)^2$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$(a+b+c+1)^2=\left(a.1+\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}(b+c)+\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\right)^2\le (a^2+1)[3+2(b+c)^2].$$

Khi đó ta cần chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\tfrac{5}{16}[3+2(b+c)^2]\le (b^2+1)(c^2+1)$$

Hay:

$$16b^2c^2+6(b^2+c^2)+1\ge 20ab.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM:

$$16b^2c^2+1\ge 8bc,\ 6(b^2+c^2)\ge 12bc$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.□

3.8 Bài 8.1 đến bài 8.40

8.1 Tìm hằng số k tốt nhất (lớn nhất) để bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a, b, c không âm:
$2\sum a^3 + k\left(ab + bc + ca\right)\left(\sum a\right) \geqslant ab\left(a + b\right) + bc\left(b + c\right) + ca\left(c + a\right) + k\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(a + b + c\right)$

Lời giải. Cho $c = 0, a = b = t > 0 \Rightarrow 4t^3 + 2kt^3 \geq 2t^3 + 4kt^3 \Rightarrow k \leq 1 \Rightarrow k_{max} = 1$
Khi $k = 1$ ta cần chứng minh:
$2\sum a^3 + (a + b + c)(ab + bc + ca) \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$
tương đương
$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$
(Đúng theo bất đẳng thức Schur).□

8.2 Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$.Chứng minh:
$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq 1$$

Lời giải. **Lời giải 1.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có:
$$\tfrac{x^3}{y} + \tfrac{y^3}{z} + \tfrac{z^3}{x} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{xy + yz + zx}.$$
Mặt khác, ta cũng có $\quad x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad$ và$^2 + y^2 + z^2 \geq 1$
theo điều kiện nên ta suy ra:
$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq 1.$$

Phép chứng minh hoàn tất. □

Lời giải 2. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$\frac{x^3}{y} + \frac{x^3}{y} + y^2 \geq 3x^2$$
Thiết lập 2 biểu thức tương tự, sau đó cộng vế theo vế, ta được:
$$2\left(\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x}\right) + x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$
hay
$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$$
Bài toán được chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. □

Lời giải 3. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có:
$$\left(\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x}\right)\left(\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \tfrac{z^3}{x}\right)\left(y^2 + z^2 + x^2\right) \geq \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3$$
Do đó:
$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$$
Bài toán được chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.□

8.3 Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geqslant a + b + c$$

Lời giải. Từ điều kiện suy ra $1 \geq abc$.
Ta có:

$$\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} \geq 3a$$

Tương tự:

$$\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c} \geq 3b$$
$$\frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \geq 3c$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta có điều phải chứng minh.□

8.4 Cho a, b, c là ba số thực không âm , chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1$$

Lời giải. Ta viết lại:

$$\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ac}+\frac{2c^2}{2c^2+ab} \leq 2$$

tương đương

$$1-\frac{2a^2}{2a^2+bc}+1-\frac{2b^2}{2b^2+ac}+1-\frac{2c^2}{2c^2+ab} \geq 1$$

tương đương

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ac}{2b^2+ac}+\frac{ab}{2c^2+ab} \geq 1$$

Mà theo Cauchy–Schawrz, ta có:

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ac}{2b^2+ac}+\frac{ab}{2c^2+ab} \geq \frac{(bc+ac+ab)^2}{a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2+2abc(a+b+c)}=1$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

8.5 Cho x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=x^ny+y^nz+z^nx, n \geq 2$$

Lời giải. Gọi (a, b, c)là một hoán vị của bộ (x, y, z) sao cho $a \geq b \geq c \Rightarrow a^{n-1} \geq b^{n-1} \geq c^{n-1}; ab \geq ac \geq bc$
Ta có:

$$
\begin{aligned}
x^ny+y^nz+z^nx &= x^{n-1}xy+y^{n-1}yz+z^{n-1}zx\\
&\le a^{n-1}ab+b^{n-1}ac+c^{n-1}bc\\
&= b(a^n+acb^{n-2}+c^n)\\
&\le b(a^n+a^{n-1}c+c^n)\\
&\le b(a+c)^n\\
&= b(a+c)^n\\
&= \frac{1}{n}nb(a+c)^n\\
&\le \frac{1}{n}\left(\frac{n(a+b+c)}{n+1}\right)^{n+1}\\
&= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Dấu $=$ xảy ra khi(x,y,z) là hoan vị của $\left(\dfrac{n}{n+1};\dfrac{1}{n+2};0\right)$.□

8.6 Cho a,b,clà các số thực thỏa mãn $3a^2+2b^2+c^2\le 6$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức sau:

$$P=2(a+b+c)-abc$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$[2(a+b+c)-abc]^2=[a(2-bc)+2(b+c)]^2\le(a^2+2)\left[(2-bc)^2+2(b+c)^2\right]=(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$$

Lại theo bất đẳng thức

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)=\frac{1}{6}(3a^2+6)(2b^2+4)(c^2+2)\le\frac{1}{6}\left(\frac{3a^2+2b^2+c^2+12}{3}\right)^3\le 36$$

tương đương $$[2(a+b+c)-abc]^2\le 36\Rightarrow -6\le 2(a+b+c)-abc\le 6$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} a(b+c)=2-bc\\ 3a^2+6=2b^2+4=c^2+2=6\end{cases}$

tương đương $\left[\begin{array}{l} a=0;b=1;c=2\\ a=0;b=-1;c=-2\end{array}\right.$

Vậy:

$Min(2(a+b+c)-abc)=-6\Leftrightarrow a=0;b=-1;c=-2$

$Max(2(a+b+c)-abc)=6\Leftrightarrow a=0;b=1;c=2$..□

8.7 Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\ge 2+\sqrt{22+\frac{1}{abc}}$$

Lời giải. Nhân $\sqrt{abc}$ cho mỗi vế, ta được bất đẳng thức tương đương là:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge 2\sqrt{abc}+\sqrt{22abc+1}.$$

Bình phương hai vế, ta được bất đẳng thức tương đương là

$$a+b+c+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\ge 26abc+1+4\sqrt{abc(22abc+1)}.$$

Vì $a+b+c=1$ nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \geq 13abc+2\sqrt{abc(22abc+1)}.$$

Áp dụng AM-GM cho ba số dương $a,\ b,\ c$ ta có ngay điều sau

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Như vậy, ta có

$$2\sqrt{abc(22abc+1)} \leq 2\sqrt{abc\left(\frac{22}{27}+1\right)} = \frac{14}{3\sqrt{3}}(abc)^{1/2}.$$

Ta cũng có theo AM-GM

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}} = 3(abc)^{1/3}.$$

Nói cách khác, ta cần chỉ ra rằng

$$3(abc)^{1/3} \geq 13abc + \frac{14}{3\sqrt{3}}(abc)^{1/2}.$$

Hay tương đương với (rút gọn $(abc)^{1/3}$hai vế)

$$3 \geq 13(abc)^{2/3} + \frac{14}{3\sqrt{3}}(abc)^{1/6}.$$

Vì $abc \leq 127$nên bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức đúng, thật vậy, ta có

$$13(abc)^{2/3} + \frac{14}{3\sqrt{3}}(abc)^{1/6} \leq 13\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{2/3} + \frac{14}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{27}\right)^{1/6} = 3.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

8.8 (USA TST 2011)Cho $a, b, c \in [0,1]$ thỏa mãn $a+b, b+c, c+a > 1$. chứng minh:

$$1 \leq (1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2+\frac{2\sqrt{2}abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Lời giải. Viết lại bất đẳng thức như sau:

$$a^2+b^2+c^2+2+\frac{2\sqrt{2}abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq 2(a+b+c).$$

Áp dụng AM-GM, ta có

$$2(a+b+c) \leq \frac{(a+b+c)^2}{2}+2.$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$a^2+b^2+c^2+\frac{2\sqrt{2}abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2},$$

Hay

$$\frac{4\sqrt{2}abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2).$$

Bất đẳng thức đã cho là thuần nhất, do đó ta có thể chuẩn hoá $a^2+b^2+c^2=2$.
Bất đẳng thức trở thành:

$$4abc \geq 2(ab+bc+ca)-2$$

Hay

$$2abc+1 \geq ab+bc+ca$$

Giả sử có 1 số lớn hơn 1, chẳng hạn là a, ta có bất đẳng thức trên tương đương:

$$4bc(a-1)+(a-b-c)^2 \geq 0$$

Xét trường hợp ngược lại, bất đẳng thức tương đương:

$$(1-a)(1-bc)+a(1-b)(1-c) \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.□

8.9 Cho 3 số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c+abc=0; a, b \in [-1\ 1]$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} \leq 3$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $ab \geq 0$ theo nguyên lí Dirichlet.
Khi đó, từ giả thiết ta được:

$$(1+c) \leq (1+c)(1+ab)=(1-a)(1-b)$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+c} \leq \sqrt{(1-a)(1-b)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\sqrt{(1-a)(1-b)}+\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b} \leq \sqrt{(1-a+1+a+1)(1-b+1+1+b)}=3$$

Bài toán được chứng minh.□

8.10 Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a+2b}{3}}+\sqrt{\frac{b+2c}{3}}+\sqrt{\frac{c+2a}{3}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Lời giải. Bình phương hai vế, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum \sqrt{(a+2b)(b+2c)} \geq 3\sum \sqrt{ab}$$

Áp dụng bất đẳng thứcCauchy–Schawrz, ta có:

$$\sqrt{(a+2b)(b+2c)} \geq \sqrt{(\sqrt{ab}+2\sqrt{bc})^2}=\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}$$

Lập các bất đẳng thức tương tự rồi cộng vế theo vế, ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

8.11 Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Lời giải 1. Trước tiên, ta dễ dàng có $xyz \leq 1$..Áp dụng AM-GM liên tục, ta sẽ có

$$\begin{aligned}\frac{1}{xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} &= \frac{1}{2xyz}+\left[\frac{1}{2xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right]\\ &\ge \frac{1}{2xyz}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}}\\ &= \frac{1}{2xyz}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(xy+xz)\,(yz+yx)\,(zx+zy)}}\\ &\ge \frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{xy+xz+yz+yx+zx+zy}{3}\right)^3}}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải 2. Dễ thấy $xyz \le 1$.Sử dụng AM-GM ta có:

$$\frac{4xyz}{(xy+xz)(yz+yx)(zx+zy)} \ge \frac{4xyz}{\left(\dfrac{xy+xz+yz+yx+zx+zy}{3}\right)^3}=\frac{xyz}{2}$$

Như vậy chỉ cần chứng minh:

$$\frac{1}{xyz}+\frac{xyz}{2}\ge\frac{3}{2}.$$

Nhưng BĐT này đúng vì:

$$VT=\frac{1}{2xyz}+\left(\frac{1}{2xyz}+\frac{xyz}{2}\right)\ge\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.True$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

8.12 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+\dfrac{bc}{4}+c^2}}\ge 2$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}+\frac{b}{\sqrt{4c^2+ca+4a^2}}+\frac{c}{\sqrt{4a^2+ab+4b^2}}\ge 1.$$

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum\frac{a}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{\sum a\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(\sum a)\left[\sum a(4b^2+bc+4c^2)\right]}}.$$

Nói tóm lại, ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$(a+b+c)^3\ge\sum a(4b^2+bc+4c^2).$$

Khai triển ra, ta sẽ có ngay bất đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur. Ta có điều phải chứng minh. □

8.13 Cho 3 số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:
$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{12abc}\le 1$$

Lời giải. **Lời giải 1.** Bất đẳng thức tương đương
$$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+\sqrt{12abc}\le 1$$
tương đương $$ab+bc+ca\ge\sqrt{3abc}$$
tương đương $$(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$$
tương đương $$\Leftrightarrow (ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\ge 0 \quad \text{Đúng}$$
Lời giải 2. Đặt $x=\sqrt{\dfrac{bc}{a}}, y=\sqrt{\dfrac{ca}{b}}, z=\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$

Khi đó $a=yz, b=zx, c=xy$ và $xy+yz+zx=1$

Bất đẳng thức tương đương
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\sqrt{3}xyz\le 1\Leftrightarrow x+y+z\ge\sqrt{3}(*)$$
Từ điều kiện ta thấy tồn tại tam giác ABC nhọn sao cho :
$$x=\tan\tfrac{A}{2}, y=\tan\tfrac{B}{2}, z=\tan\tfrac{C}{2}$$
$$(*)\Leftrightarrow \tan\tfrac{A}{2}+\tan\tfrac{B}{2}+\tan\tfrac{C}{2}\ge\sqrt{3}$$
Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, ta có điều phải chứng minh.□

8.14 Cho a, b, c là 3 số thực không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:
$$\left|\sum\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}}\right|\le 6$$

Lời giải. Áp dụng Cauchy Schwarz, ta có ngay
$$\left|\sum\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}}\right|\le\sqrt{3\left(\sum\frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2}\right)}.$$
Tiếp tục dùng Cauchy Schwarz, ta sẽ ngay điều phải chứng minh
$$\sum\frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2}\le\sum\left(\frac{9a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2}\right)=12.$$
Nên
$$\left|\sum\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}}\right|\le\sqrt{3\left(\sum\frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2}\right)}\le\sqrt{3\cdot 12}=6.$$
.□

8.15 (IRan 2011)Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho với mọi số thực x, y, z không âm ta có bất đẳng thức:
$$x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}\le k\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Lời giải. Cho $x=y=z$ ta có giá trị nhỏ nhất của k là $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.Ta đi chứng minh giá trị đó của k là đúng

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz :

$$VT^2 = (\sqrt{x}\sqrt{xy} + \sqrt{y}\sqrt{yz} + \sqrt{z}\sqrt{zx})^2 \leq (x+y+z)(xy+yz+zx)$$

Ta chỉ cần đi chứng minh

$$8(x+y+z)(xy+yz+zx) \leq 9(x+y)(y+z)(z+x) True$$

Ta có điều phải chứng minh .Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.□

8.16 Cho $a; b; c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM,Ta có:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} = \sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+c}\right)$$

Suy ra:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b} + \frac{a}{b+a} + \frac{c}{b+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}\right) = \frac{3}{2} \quad .\square$$

8.17 Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1+a^2}{1+b^2} + \frac{1+b^2}{1+c^2} + \frac{1+c^2}{1+a^2}$$

Lời giải. Trước hết từ giả thiết, ta suy ra $0 \leq a, b, c \leq 1$, từ đó có $a^2, b^2, c^2 \leq 1$.

Ta viết lại biểu thức P như sau:

$$P = \sum \frac{1}{1+a^2} + \sum \frac{a^2}{1+b^2},$$

từ đó kết hợp với hai đánh giá sau:

$$\frac{1}{a^2} \leq \frac{1+1-a^2}{1+a^2+1-a^2} = \frac{2-a^2}{2},$$

$$\frac{a^2}{1+b^2} \leq a^2,$$

ta suy ra

$$P \leq \sum \frac{2-a^2}{2} + \sum a^2 = 3 + \frac{1}{2}\sum a^2.$$

Mặt khác, để ý rằng do $a, b, c \in [0, 1]$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c = 1$, do vậy mà

$$P \leq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Cuối cùng với $a = b = 0$ và $c = 1$ (thoả mãn điều kiện) thì $P = \frac{7}{2}$ nên ta kết luận $\frac{7}{2}$ là giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Bài toán kết thúc.□

8.18 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + \sqrt{b} + \sqrt[4]{c} = 3$. Chứng minh rằng

$$A = \sqrt{1+a^4+(a-b)^2} + \sqrt{1+b^2+(b-c)^2} + \sqrt{1+c+(c-a)^2} \geq 3\sqrt{2}$$

Lời giải 1. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$A \geq \sqrt{(\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c})^2+(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2} \geq \sqrt{9+(a^2+b+\sqrt{c})^2}$$

Đến đây ta sử dụng đánh giá cơ bản sau với mọi ba số thực dương x, y, z

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \qquad (*)$$

để có

$$A \geq \sqrt{9+\frac{(a+\sqrt{b}+\sqrt[4]{c})^4}{9}} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

Lời giải 2. Từ biểu diễn của A ta suy ra

$$A \geq \sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c}.$$

Đến đây ta sử dụng đánh giá cơ bản sau với mọi hai số thực dương x, y

$$x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$$

để có

$$A \geq \frac{1+a^2}{\sqrt{2}}+\frac{1+b}{\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{c}}{\sqrt{2}} = \frac{3+a^2+b+\sqrt{c}}{\sqrt{2}}.$$

Tiếp tục sử dụng đánh giá $(*)$ ở trên, ta suy ra

$$A \geq \frac{3+\dfrac{(a+\sqrt{b}+\sqrt[4]{c})^2}{3}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

8.19 Cho a, b, c, d là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

Lời giải.

1. Chứng minh $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\dfrac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$.

   Để ý rằng ta có đẳng thức sau:

   $$2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = (a+b)(c+d)+(a+c)(b+d)+(a+d)(b+c).$$

   Từ đây ta áp dụng đánh giá cơ bản $xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}$ để có

   $$2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \leq \frac{3(a+b+c+d)^2}{4},$$

   và do đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

2. Chứng minh $\sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có ngay điều phải chứng minh:

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \geq \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

3. Chứng minh $\sqrt{\dfrac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \geq \sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(abc+bcd+cda+dab)^2 \leq \frac{2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^3}{27}.$$

Bất đẳng thức này mang tính đối xứng giữa các biến, nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c \geq d$. Với điều kiện đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}(abc+bcd+cda+dab)^2 &\leq (ab+bc+cd+da)(abc^2+bcd^2+cda^2+dab^2)\\ &= (ab+bc+cd+da)[ac(bc+da)+bd(ab+cd)]. \qquad (*)\end{aligned}$$

Mặt khác, từ $a \geq b \geq c \geq d$ ta suy ra $ac \geq bd$ và

$$bc+da-(ab+cd) = (a-c)(b-d) \geq 0,$$

hay $bc+da \geq ab+cd$. Do vậy theo bất đẳng thức Chebyshev, ta có

$$ac(bc+da)+bd(ad+cd) \leq \frac{1}{2}(ac+bd)(bc+da+ab+cd). \qquad (**)$$

Kết hợp hai đánh giá $(*)$ và $(**)$, ta được

$$\begin{aligned}(abc+bcd+cda+dab)^2 &\leq \frac{1}{2}(ac+bd)(bc+da+ab+cd)^2\\ &= \frac{1}{4}.2(ac+bd)(bc+da+ab+cd)(bc+da+ab+cd).\end{aligned}$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM để có

$$\begin{aligned}(abc+bcd+cda+dab)^2 &\leq \frac{1}{4}\left[\frac{2(ac+bd)+2(ab+bc+cd+da)}{3}\right]^3\\ &= \frac{2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^3}{27}.\end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

8.20 Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+3ab}} \geq \frac{9}{4}$$

Lời giải. Trước hết, do bất đẳng thức cần chứng minh mang tính đối xứng giữa các biến, nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $c = max\{a, b, c\}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+3ab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ca}+c\sqrt{c^2+3ab}}.$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz thì

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ca}+c\sqrt{c^2+3ab} &= \sqrt{a}\sqrt{a^3+3abc}+\sqrt{b}\sqrt{b^3+3abc}+\sqrt{c}\sqrt{c^3+3abc} \\ &\leq \sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+9abc)}, \end{aligned}$$

do đó ta suy ra

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+3ab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+9abc)}}.$$

Như vậy để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+9abc} \geq \frac{9}{4}.$$

Thực hiện phép biến đổi tương đương ta thu được

$$12[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)] \geq 5(a^3+b^3+c^3)+57abc.$$

Để ý rằng theo bất đẳng thức AM-GM thì $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$, do vậy

$$6(a^3+b^3+c^3+9abc) \geq 5(a^3+b^3+c^3)+57abc.$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$2[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)] \geq a^3+b^3+c^3+9abc,$$

hay $(3c-a-b)(a-b)^2+(a+b-c)(c-a)(c-b) \geq 0$. Tuy nhiên đánh giá này đúng do $c = max\{a, b, c\}$ và do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

8.21 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \geq a+b+c$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}}.$$

Như vậy để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} \leq a+b+c.$$

Bình phương hai vế và chú ý rằng theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz:

$$(a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a})^2 \leq (ab+bc+ca)(a+b+c),$$

ta cần chứng minh

$$a+b+c \geq ab+bc+ca.$$

Tiếp tục bình phương hai vế và để ý tới đánh giá cơ bản $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, ta cần phải kiểm tra đánh giá sau

$$ab+bc+ca \leq 3.$$

Tuy nhiên đánh giá trên đúng do $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 = 3$. Do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

$\boxed{\textbf{8.22}}$ Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $xy+x+y=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x}{y+1} + \frac{3y}{x+1} + \frac{xy}{x+y} - x^2 - y^2$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta suy ra $x = \dfrac{3-y}{y+1}$. Thế vào P, khai triển và rút gọn, ta được

$$P = \frac{-(y-3)\,y\,(y^4+2y^3+12y^2+14y+19)}{4\,(y+1)^2\,(y^2+3)} = \frac{-(y-3)\,y\left[(y-1)^4+6\,(y+1)\,(y^2+3)\right]}{4\,(y+1)^2\,(y^2+3)}.$$

Từ đó, ta sử dụng đánh giá hiển nhiên $(y-1)^4 \geq 0$ để có

$$P \leq \frac{-(y-3)\,y.6\,(y+1)\,(y^2+3)}{4\,(y+1)^2\,(y^2+3)} = \frac{3}{2}\left[\frac{-y\,(y-3)}{y+1}\right].$$

Đến đây chú ý rằng

$$\frac{-y\,(y-3)}{y+1} - 1 = \frac{-(y-1)^2}{y+1} \leq 0,$$

do vậy ta suy ra $P \leq \dfrac{3}{2}$.

Cuối cùng với $x=1$ và $y=1$ (thoả mãn điều kiện) thì $P = \dfrac{3}{2}$ nên ta suy ra $\dfrac{3}{2}$ là giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Bài toán kết thúc.□

$\boxed{\textbf{8.23}}$ Cho a, b, c là các số thực thay đổi trong đoạn $[0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} - abc$$

Lời giải. Chú ý rằng từ giả thiết ta có $abc \geq 0$ và

$$\frac{a}{1+bc} \leq \frac{a}{1+abc} \leq \frac{2a}{2+abc},$$

do vậy ta suy ra

$$P \leq \frac{2(a+b+c)}{2+abc}.$$

Đến đây trừ 2 vào mỗi vế để có

$$P-2 \leq \frac{2(a+b+c-abc-2)}{2+abc} = -\frac{2[(1-a)(1-b)+(1-c)(1-ab)]}{2+abc},$$

nhưng để ý rằng $(1-a)(1-b)+(1-c)(1-ab) \geq 0$ do $a, b, c \in [0, 1]$. Do vậy ta suy ra

$$P-2 \leq 0,$$

hay $P \leq 2$.

Cuối cùng với $a = b = 1$ và $c = 0$ (thoả mãn điều kiện) thì $P = 2$ nên ta kết luận 2 là giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Bài toán kết thúc.□

8.24 Cho a, b, c là các số thực thay đổi bất kì. Chứng minh rằng

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (ab+bc+ca-1)^2$$

Lời giải. Để ý rằng ta có đẳng thức sau

$$(b^2+1)(c^2+1) \geq (b+c)^2+(bc-1)^2,$$

do vậy $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = (a^2+1)[(b+c)^2+(bc-1)^2]$. Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz để có

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq [a(b+c)+bc-1]^2 = (ab+bc+ca-1)^2.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

8.25 Cho x, y, z là các số thực thay đổi trong khoảng $(0; 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+xz} \leq \frac{5}{x+y+z}$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh mang tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử $0 < z \leq y \leq x \leq 1$. Khi đó:

$$1+yz \leq 1+zx \leq 1+xy.$$

Do vậy ta có đánh giá

$$\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+xz} \leq \frac{x+y+z}{1+yz}.$$

Mặt khác để ý rằng

$$\frac{x+y+z}{1+yz} = \frac{x-1-(y-1)(z-1)-yz}{1+yz}+2,$$

nên từ giả thiết ta suy ra $\dfrac{x+y+z}{1+yz} \leq 2$. Như vậy

$$\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+xz} \leq 2. \qquad (*)$$

Hơn nữa, ta cũng có đẳng thức

$$\left(1 - \frac{x+y}{1+xy}\right) + \left(1 - \frac{y+z}{1+yz}\right) + \left(1 - \frac{z+x}{1+zx}\right) = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy} + \frac{(1-y)(1-z)}{1+yz} + \frac{(1-z)(1-x)}{1+zx},$$

từ đây ta kết hợp với giả thiết để có

$$\frac{x+y}{1+xy} + \frac{y+z}{1+yz} + \frac{z+x}{1+zx} \leq 3. \qquad (**)$$

Cộng vế theo vế hai đánh giá $(*)$ và $(**)$, ta được

$$\frac{x+y+z}{1+xy} + \frac{x+y+z}{1+yz} + \frac{x+y+z}{1+xz} \leq 5,$$

và do đó ta thu được bất đẳng thức ban đầu.

Phép chứng minh hoàn tất.□

8.26 Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $x + y \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{3x^2+4}{4x} + \frac{2+y^3}{y^2}$$

Lời giải.

Ta viết lại biểu thức P như sau:

$$P = \frac{2x^2 + (x^2+4)}{4x} + \frac{2y^3 + (y^3+y^3+8)}{4y^2}.$$

Từ đây ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM để có $x^2 + 4 \geq 4x$ và $y^3 + y^3 + 8 \geq 6y^2$, do vậy

$$P \geq \frac{2x^2+4x}{4x} + \frac{2y^3+6y^2}{4y^2} = \frac{x+y}{2} + \frac{5}{2}.$$

Đến đây ta sử dụng giả thiết $x + y \geq 4$ để được $P \geq \dfrac{9}{2}$.

Cuối cùng, với $x = 2$ và $y = 2$ (thoả mãn điều kiện) thì $P = \dfrac{9}{2}$ nên ta kết luận $\dfrac{9}{2}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Bài toán kết thúc.□

8.27 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}} = 2$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{\sqrt{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt{c+3a}} \leq 1$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$(\frac{9}{4}+\frac{27}{4})(a+3b) \geq (\frac{3}{2}\sqrt{a}+\frac{9}{2}\sqrt{b})^2,$$

từ đó suy ra $\sqrt{a+3b} \geq \dfrac{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{2}$. Thiết lập hai đánh giá tương tự và cộng lại, ta được

$$\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3c}}+\frac{1}{\sqrt{c+3a}} \leq \frac{2}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{2}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{2}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}. \qquad (*)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có đánh giá

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{16}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}},$$

hay $\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{3}{\sqrt{b}} \geq \dfrac{16}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$. Cộng đánh giá này với hai đánh giá tương tự khác, ta suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}} \geq \left[\frac{1}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+3\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{c}+3\sqrt{a}}\right]. \qquad (**)$$

Kết hợp hai đánh giá $(*)$ và $(**)$ cho ta

$$\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3c}}+\frac{1}{\sqrt{c+3a}} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right] = 1.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

8.28 Cho x, y, z là các số thực không âm thay đổi bất kì. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thay đổi thoả mãn $0 \leq a \leq b \leq c$, ta luôn có

$$(ax+by+cz)(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}) \leq \frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4(ax+by+cz)(cx+\frac{acy}{b}+az) \geq [(a+c)(x+y+z)]^2.$$

Áp dụng đánh giá cơ bản $4uv \leq (u+v)^2$, ta có

$$4(ax+by+cz)(cx+\frac{acy}{b}+az) \leq (ax+by+cz+cx+\frac{acy}{b}+az)^2.$$

Như vậy để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$ax+by+cz+cx+\frac{acy}{b}+az \leq (a+c)(x+y+z).$$

Thực hiện phép biến đổi tương đương, ta thu được $y(c-b)(b-a) \geq 0$. Tuy nhiên đây là đánh giá đúng do $0 \leq a \leq b \leq c$. Do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

8.29 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng
$$\frac{a^2}{(a+c)^2} + \frac{b^2}{(b+a)^2} + \frac{c^2}{(c+b)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{c}{a}, y = \frac{a}{b}, z = \frac{b}{c}$. Khi đó $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+y}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+z}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$
Để ý rằng ta có đẳng thức sau
$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+y}\right)^2 - \frac{1}{1+xy} = \frac{xy(x-y)^2 + (1-xy)^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)},$$
từ đó ta sử dụng giả thiết của x, y, z để có
$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+y}\right)^2 \geq \frac{1}{1+xy} = \frac{z}{z+1}.$$
Như vậy để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng
$$\frac{z}{z+1} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}.$$
Thực hiện phép biến đổi tương đương, ta thu được một đánh giá hiển nhiên đúng
$$(z-1)^2 \geq 0,$$
do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

8.30 Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} \geq \frac{3}{8}$$

Lời giải 1. Trước hết ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:
$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} + \frac{5}{(x+1)(y+1)(z+1)} \geq 1. \qquad (*)$$
Đặt $a = \frac{1}{x+1}; b = \frac{1}{y+1}; c = \frac{1}{z+1}; m = x+y+z; n = xy+yz+zx$. Khi đó $a, b, c, m, n > 0$ và từ giả thiết $xyz = 1$, ta suy ra
$$abc = (1-a)(1-b)(1-c),$$
hay $2abc = n - m + 1$. Bên cạnh đó để ý rằng ta cũng có đẳng thức sau:
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = m^3 - 3mn.$$
Trở lại việc chứng minh bất đẳng thức $(*)$, ta thấy rằng nó tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:
$$a^3 + b^3 + c^3 + 5abc \geq 1,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 8abc \geq 1,$$

$$m^3 - 3mn + 4(n - m + 1) \geq 1,$$

$$m^3 - 4m + 3 \geq n(3m - 4). \qquad (**)$$

Để chứng minh đánh giá $(**)$, ta xét các trường hợp của m như sau:

Trường hợp 1. $m < 1$.

Khi đó $m^3 - 4m + 3 = (1 - m)(3 - m - m^2) \geq 0 > n(3m - 4)$.

Trường hợp 2. $1 < m < \frac{4}{3}$.

Khi đó để ý rằng do $2abc = n - m + 1$ nên $n > m - 1 > 0$, do vậy

$$m^3 - 4m + 3 - n(3m - 4) > m^3 - 4m + 3 + (4 - 3m)(m - 1) = (m - 1)^3 > 0.$$

Trường hợp 3. $m \geq \frac{4}{3}$.

Khi đó từ đánh giá cơ bản

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx),$$

ta suy ra $m^2 \geq 3n$. Do vậy

$$m^3 - 4m + 3 - (3m - 4)n \geq m^3 - 4m + 3 - \frac{m^2(3m - 4)}{3} = \frac{(2m - 3)^2}{3} \geq 0.$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, đánh giá $(**)$ luôn đúng. Từ đó bất đẳng thức $(*)$ được chứng minh xong.

Đến đây ta sử dụng đánh giá $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz = 8$ để có

$$\frac{1}{(1 + x)^3} + \frac{1}{(1 + y)^3} + \frac{1}{(1 + z)^3} + \frac{5}{8} \geq 1,$$

và do vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức ban đầu.

Bài toán kết thúc.□

Lời giải 2. Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$3\left[\frac{1}{(1 + x)^3} + \frac{1}{(1 + y)^3} + \frac{1}{(1 + z)^3}\right]^2 \geq \left[\frac{1}{(1 + x)^2} + \frac{1}{(1 + y)^2} + \frac{1}{(1 + z)^2}\right]^3.$$

Mặt khác theo một kết quả đã chứng minh ở bài $\boxed{\textbf{8.13}}$ thì

$$\frac{1}{(1 + x)^2} + \frac{1}{(1 + y)^2} + \frac{1}{(1 + z)^2} \geq \frac{3}{4},$$

do vậy ta suy ra

$$3\left[\frac{1}{(1 + x)^3} + \frac{1}{(1 + y)^3} + \frac{1}{(1 + z)^3}\right]^2 \geq \frac{27}{64},$$

tương đương

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}\geq\frac{3}{8}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

8.31 Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $2x^2+y^2+xy\geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+y^2$$

Lời giải. Trước hết ta đặt

$$Q=\frac{x^2+y^2}{2x^2+y^2+xy}.$$

Với $y=0$ thì $Q=\frac{1}{2}$, từ đó $P=Q(2x^2+y^2+xy)\geq\frac{1}{2}$.

Với $y\neq 0$, ta chia cả tử và mẫu của biểu thức Q cho y^2 để có

$$Q=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1}=\frac{t^2+1}{2t^2+t+1},$$

trong đó $t=\frac{x}{y}$. Từ đây ta thực hiện phép biến đổi tương đương để thu được

$$(2Q-1)t^2+Qt+Q-1=0.$$

Xem biểu thức trên là phương trình theo ẩn t. Để phương trình này có nghiệm, ta cần có

$$\triangle=-Q^2+12Q-4\geq 0,$$

từ đó suy ra $\frac{6-2\sqrt{2}}{7}\leq Q\leq\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$. Do vậy

$$P=Q(2x^2+y^2+xy)\geq\frac{6-2\sqrt{2}}{7}.$$

So sánh $\frac{1}{2}$ và $\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$, ta suy ra $P\geq\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$.

Cuối cùng, với $x=\sqrt{\frac{4+\sqrt{2}}{14}}$ và $y=\sqrt{\frac{8-5\sqrt{2}}{14}}$ (thoả mãn điều kiện) thì $P=\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$ nên ta kết luận $\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Bài toán kết thúc.□

8.32 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\leq\frac{a+b+c}{2abc}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc}.$$

Như vậy $\dfrac{1}{a^2+bc} \leq \dfrac{1}{2a\sqrt{bc}}$. Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng lại, ta được

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ac} + \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2a\sqrt{bc}} + \frac{1}{2b\sqrt{ca}} + \frac{1}{2c\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}}{2abc}.$$

Cuối cùng, ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab} \leq a + b + c,$$

tuy nhiên đây lại là một đánh giá cơ bản.

Phép chứng minh hoàn tất.□

8.33 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq \dfrac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{a^2} + 4 \geq \frac{4}{a},$$

từ đó ta suy ra $\dfrac{1}{a^2} \geq \dfrac{4}{a} - 4$. Cộng đánh giá này với hai đánh giá tương tự khác, đồng thời lưu ý rằng ta có đánh giá cơ bản sau:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc,$$

ta được

$$P \geq 8abc + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} - 12 = \left(8abc + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}\right) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$8abc + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq 4.$$

Đồng thời ta cũng có đánh giá $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$. Từ đây

$$P \geq 4 + \frac{63}{2(a+b+c)}.$$

Lại lưu ý rằng $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \leq \dfrac{9}{4}$ nên $a+b+c \leq \dfrac{3}{2}$, do vậy

$$P \geq 4 + \frac{63}{3} = 25.$$

Cuối cùng với $a = b = c = \dfrac{1}{2}$ (thoả mãn điều kiện) thì $P = 25$ nên ta kết luận 25 là giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Bài toán kết thúc.□

8.34 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng
$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(b-c-a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Lời giải 1. Bất đẳng thức cần chứng minh mang tính thuần nhất nên ta chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{(3-2a)^2}{3a^2-6a+9} + \frac{(3-2b)^2}{3b^2-6b+9} + \frac{(3-2c)^2}{3c^2-6c+9} \geq \frac{1}{2}$$

Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số a, b, c luôn có hai số nằm cùng phía so với 1 trên trục số. Giả sử hai số đó là b và c. Thế thì

$$(b-1)(c-1) \geq 0,$$

từ đó suy ra $b^2 + c^2 \leq 1 + (b+c-1)^2 = 1 + (2-a)^2.$ $(*)$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{(3-2b)^2}{3b^2-6b+9} + \frac{(3-2c)^2}{3c^2-6c+9} \geq \frac{(6-2b-2c)^2}{3(b^2+c^2-2b-2c+6)} = \frac{4a^2}{3(b^2+c^2+2a)} \qquad (**)$$

Kết hợp hai đánh giá $(*)$ và $(**)$, ta suy ra

$$\frac{(3-2b)^2}{3b^2-6b+9} + \frac{(3-2c)^2}{3c^2-6c+9} \geq \frac{4a^2}{3[1+(2-a)^2+2a]} = \frac{4a^2}{3(a^2-2a+5)}$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$\frac{(3-2a)^2}{3a^2-6a+9} + \frac{4a^2}{3(a^2-2a+5)} \geq \frac{1}{2}.$$

Thực hiện phép biến đổi tương đương, ta thu được đánh giá đúng sau:

$$(a-1)^2(13a^2-18a+45) \geq 0.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

Lời giải 2. Dãy bất đẳng thức sau là tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\sum \left[\frac{a^2+(b+c)^2-2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2} - 1\right] \geq -\frac{5}{2},$$

$$\sum \frac{a(a+2b+2c)}{2a^2+(b+c)^2} \leq \frac{5}{2}.$$

Chú ý rằng theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$(2a^2 + (b+c)^2)(2+4) \geq 4(a+b+c)^2.$$

Do đó ta suy ra

$$\sum \frac{a(a+2b+2c)}{2a^2+(b+c)^2} \leq \frac{3}{2}\sum \frac{a(a+2b+2c)}{(a+b+c)^2} = \frac{3}{2}\frac{(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}.$$

Cuối cùng, cần phải chỉ ra rằng

$$\frac{(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \leq \frac{5}{3}.$$

Tuy nhiên bất đẳng thức này tương đương với một đánh giá cơ bản:

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

Lời giải 3. Sử dụng đánh giá cơ bản $(b+c)^2 \leq 2(b^2+c^2)$, ta suy ra

$$2a^2 + (b+c)^2 \leq 2(a^2+b^2+c^2).$$

Như vậy $\dfrac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \geq \dfrac{(a-b-c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$. Thiết lập hai đánh giá tương tự, ta suy ra

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(b-c-a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \geq \frac{(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(c-a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Cuối cùng, ta cần chỉ ra rằng

$$(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(c-a-b)^2 \geq a^2+b^2+c^2,$$

hay $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. Đây là một đánh giá đúng, do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Phép chứng minh hoàn tất.□

8.35 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b+c}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+c+a}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+a+b}} \leq \sqrt{3}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(a^2+b+c)(1+b+c) \geq (a+b+c)^2,$$

từ đó ta có $\dfrac{a^2}{a^2+b+c} \leq \dfrac{a\sqrt{1+b+c}}{a+b+c}$. Thiết lập hai đánh giá tương tự, ta suy ra

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b+c}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+c+a}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+a+b}} \leq \frac{a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+c+a}+c\sqrt{1+a+b}}{a+b+c}.$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz thì

$$\begin{aligned}a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+c+a}+c\sqrt{1+a+b} &= \sqrt{a}\sqrt{a+ab+ac}+\sqrt{b}\sqrt{b+bc+ba}+\sqrt{c}\sqrt{c+ca+cb}\\ &\le \sqrt{(a+b+c)[a+b+c+2(ab+bc+ca)]},\end{aligned}$$

do vậy ta suy ra

$$\begin{aligned}a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+c+a}+c\sqrt{1+a+b} &\le \frac{\sqrt{(a+b+c)[a+b+c+2(ab+bc+ca)]}}{a+b+c}\\ &= \sqrt{1+\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}}.\end{aligned}$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$ab+bc+ca \le a+b+c.$$

Bình phương hai vế và để ý tới đánh giá cơ bản $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$, ta được

$$ab+bc+ca \le 3.$$

Tuy nhiên đánh giá trên đúng do $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2 = 3$. Do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

8.36 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3 \ge a+b+c$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^3+1+1 \ge 3a.$$

Thiết lập hai đánh giá tương tự cho b và c và cộng lại, ta được

$$a^3+b^3+c^3+6 \ge 3(a+b+c).$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM thì $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} = 3$, do vậy

$$a^3+b^3+c^3+6 \ge a+b+c+6.$$

Rút gọn 6 ở hai vế ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

8.37 Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a^2+b^2+c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}+\frac{1}{1-ab} \ge 9$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{1-a^2}+\frac{b^2}{1-b^2}+\frac{c^2}{1-c^2}+\frac{bc}{1-bc}+\frac{ca}{1-ca}+\frac{ab}{1-ab} \ge 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\sum \frac{a^2}{1-a^2}+\sum \frac{bc}{1-bc} \geq \frac{(\sum a^2+\sum bc)^2}{\sum a^2(1-a^2)+\sum bc(1-bc)} = \frac{(\sum a^2+\sum bc)^2}{\sum a^2(b^2+c^2)+\sum bc(a^2+b^2+c^2-bc)}.$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$(\sum a^2+\sum bc)^2 \geq 3\sum a^2(b^2+c^2)+3\sum bc(a^2+b^2+c^2-bc).$$

Khai triển và rút gọn, ta thu được

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-a)(b-c)+c^2(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Tuy nhiên đây chính là bất đẳng thức Schur bậc bốn nên đó là một đánh giá đúng. Do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

8.38 Cho a, b, c là các số thực thay đổi bất kì. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca+\frac{(a-b)^2}{26}+\frac{(b-c)^2}{6}+\frac{(c-a)^2}{2009}$$

Lời giải. Dãy bất đẳng thức sau là tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh:

$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2ab+2bc+2ac+\frac{(a-b)^2}{13}+\frac{(b-c)^2}{3}+\frac{2(c-a)^2}{2009},$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq \frac{(a-b)^2}{13}+\frac{(b-c)^2}{3}+\frac{2(c-a)^2}{2009},$$

$$\frac{12(a-b)^2}{13}+\frac{2(b-c)^2}{3}+\frac{2007(c-a)^2}{2009} \geq 0.$$

Đánh giá cuối cùng hiển nhiên đúng cho mọi số thực a, b, c, do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

8.39 Cho a, b, c là các số thực thoả mãn đồng thời $a < b < c$,$a+b+c = 6$ và $ab+bc+ca = 9$. Chứng minh rằng

$$0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$$

Lời giải. Trước hết, từ giả thiết ta có

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) = 6^2-9.2 = 18.$$

Đầu tiên, ta chứng minh a, b, c là các số thực dương, nhờ sử dụng đánh giá

$$9 = ab+bc+ca < a(b+c)+\frac{(b+c)^2}{4} = a(6-a)+\frac{(6-a)^2}{4}.$$

Đánh giá này tương đương với

$$\frac{3a^2}{4} - 3a < 0,$$

từ đó ta suy ra $0 < a < 4$, do vậy $0 < a < b < c$. Khi đó ta cũng có

$$18 = a^2 + b^2 + c^2 < ac + bc + c^2 = c(a + b + c) = 6c,$$

hay $c > 3$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh $c < 4$ bằng phản chứng. Giả sử rằng $c \geq 4$, khi đó $c^2 \geq 4c$. Từ đây ta suy ra

$$18 = a^2 + b^2 + c^2 > \frac{(a + b)^2}{2} + 4c = \frac{(6 - c)^2}{2} + 4c,$$

tương đương

$$\frac{c^2}{2} - 2c < 0,$$

hay $0 < c < 4$, trái với điều giả sử. Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử là sai, do vậy $c < 4$, cũng có nghĩa $a < b < c < 4$.

Ta tiếp tục chứng minh $a < 1$ cũng bằng phản chứng. Giả sử rằng $1 \leq a < b < c < 4$, khi đó ta có các đánh giá

$$(a - 1)(a - 4) \leq 0,$$

$$(b - 1)(b - 4) < 0,$$

$$(c - 1)(c - 4) < 0$$

Cộng vế theo vế các đánh giá trên, ta sẽ được

$$a^2 + b^2 + c^2 < 5(a + b + c) - 12,$$

từ đó kết hợp với điều kiện để có $18 < 5.6 - 12 = 18$. Điều vô lí này chứng tỏ điều giả sử là sai, do vậy $a < 1$.

Từ $a < 1$ và $c < 4$, ta suy ra $b = 6 - a - c > 6 - 4 - 1 = 1$. Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta chỉ còn phải chỉ ra rằng $b > 3$. Giả sử ngược lại, tức là $b \geq 3$, khi đó ta có

$$(b - 3)(c - 3) \geq 0,$$

tương đương

$$bc \geq 3(b + c) - 9 = 3(6 - a) - 9 = 9 - 3a.$$

Từ đây ta suy ra

$$9 = ab + bc + ca = a(b + c) + bc \geq a(b + c) + 9 - 3a,$$

hay

$$a(b + c - 3) \leq 0.$$

Tuy nhiên đó lại là một đánh giá sai, do vậy điều giả sử ban đầu của chúng ta là sai, nên $b < 3$.

Tóm lại, ta đã chứng minh được $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$, do vậy bài toán kết thúc.□

8.40 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng
$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a+c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}>2$$

Lời giải. Đặt $a=x^3, b=y^3, c=z^3$. Khi đó $x, y, z>0$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành
$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3+z^3}}+\sqrt[3]{\frac{y^3}{z^3+x^3}}+\sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3+y^3}}>2.$$
Trước hết ta sẽ chứng minh rằng
$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3+z^3}}>\sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}}. \qquad (*)$$
Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau
$$\frac{x^6}{(y^3+z^3)^2}>\frac{x^6}{(y^2+z^2)^3},$$
$$(y^2+z^2)^3>(y^3+z^3)^2,$$
$$3y^2z^2(y^2+z^2)>2y^3z^3.$$
Tuy nhiên đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức AM-GM:
$$3y^2z^2(y^2+z^2)\geq 6y^3z^3>2y^3z^3,$$
do vậy bất đẳng thức $(*)$ được chứng minh.

Từ đó ta suy ra
$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3+z^3}}+\sqrt[3]{\frac{y^3}{z^3+x^3}}+\sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3+y^3}}>\sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}}+\sqrt{\frac{y^2}{z^2+x^2}}+\sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}}. \qquad (**)$$
Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, ta suy ra
$$\sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2(y^2+z^2)}}\geq\frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2}. \qquad (***)$$
Kết hợp $(**)$ với $(***)$ và hai đánh giá tương tự khác, ta suy ra
$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3+z^3}}+\sqrt[3]{\frac{y^3}{z^3+x^3}}+\sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3+y^3}}>\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=2.$$
Phép chứng minh hoàn tất.□

3.9 Bài 9.1 đến bài 9.40

9.1 Cho x, y, z là các số thực thay đổi trong khoảng $[0, 1]$. Chứng minh rằng
$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3$$

Lời giải. Sử dụng giả thiết, ta suy ra
$$(1 - x^2)(1 - y) \geq 0,$$
hay $1 + x^2y \geq x^2 + y$. Cộng đánh giá này với hai đánh giá tương tự khác, ta suy ra
$$3 + x^2y + y^2z + z^2x \geq x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z. \qquad (*)$$
Mặt khác, cũng từ giả thiết ta có
$$x(1 + 2x)(1 - x) \geq 0,$$
hay $x^2 + x \geq 2x^3$. Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng lại, ta được
$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq 2(x^3 + y^3 + z^3). \qquad (**)$$
Kết hợp $(*)$ và $(**)$, ta suy ra
$$3 + x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x^3 + y^3 + z^3),$$
từ đó ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

9.2 Cho a, b, c là các số thực thay đổi trong đoạn $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Chứng minh rằng
$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \leq 3$$

Lời giải. Đặt $x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1$. Khi đó $x, y, z \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ và ta cần chứng minh
$$2 \leq \frac{x+y-2}{z} + \frac{y+z-2}{x} + \frac{z+x-2}{y} \leq 3.$$
Trước hết ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ở vế trái. Ta viết lại bất đẳng thức đó như sau
$$(x + y + z - 2)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 5.$$
Đặt $s = x + y + z$, khi đó theo một đánh giá quen thuộc, ta có
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{s}.$$
Như vậy, ta cần chứng minh
$$\frac{9(s-2)}{s} \geq 5,$$

hay $s \ge \frac{9}{2}$. Tuy nhiên đây là một đánh giá đúng vì theo điều kiện, ta có

$$s = x + y + z \ge \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2},$$

do vậy bất đẳng thức cần chứng minh.

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ở vế phải. Bất đẳng thức này tương đương với

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \le 3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\frac{3}{2} \le x \le y \le z \le 2$. Khi đó để ý rằng

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = \frac{(2-y)(x^2-2y)}{2xy} \le 0,$$

do đó $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \le \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \le \frac{y}{2} + \frac{2}{y},$$

và

$$\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \le \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$$

Cộng vế theo vế các đánh giá trên lại, ta được

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \le x + \frac{4}{x} + \frac{y}{2} + \frac{2}{y}.$$

Cuối cùng, ta cần chỉ ra rằng

$$x + \frac{4}{x} + \frac{y}{2} + \frac{2}{y} \le 3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z},$$

tương đương

$$x + \frac{2}{x} + \frac{y}{2} \le 3 + \frac{2}{z}.$$

Đây là một đánh giá đúng vì là hệ quả của hai đánh giá sau

$$x + \frac{2}{x} - 3 = \frac{(x-1)(x-2)}{3} \le 0,$$

$$\frac{y}{2} \le 1 \le \frac{2}{z}.$$

Do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Tóm lại cả hai bất đẳng thức đã đều được chứng minh hoàn tất. Bài toán kết thúc. □

9.3 Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Lời giải. Sử dụng đánh giá cơ bản $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$, ta được

$$(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a})^2 \le 2(a+b-c+b+c-a) = 4b,$$

từ đó suy ra $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a} \le 2\sqrt{b}$. Cộng bất đẳng thức trên với hai đánh giá tương tự khác, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán kết thúc.□

9.4 Cho a, b, c là các số thực thay đổi trong khoảng $[1,2]$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3 \le 5abc$$

Lời giải 1. Bất đẳng thức cần chứng minh mang tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử $2 \ge a \ge b \ge c \ge 1$.

Đặt $f(a,b,c) = a^3+b^3+c^3-5abc$. Xét hiệu sau

$$f(a,b,c)-f(a,b,1) = c^3-5abc-1+5ab = (c-1)(1+c+c^2-5ab).$$

Để ý rằng $c-1 \ge 0$ và

$$1+c+c^2-5ab \le 1+c-4c^2 = -4(c-1)^2-3c+1 \le 0,$$

do vậy $(c-1)(1+c+c^2-5ab) \le 0$ hay $f(a,b,c) \le f(a,b,1)$.

Tiếp tục xét hiệu sau:

$$f(a,b,1)-f(a,1,1) = (b-1)(1+b^2+b-5a),$$

và với chú ý $(1+b^2+b-5a) \le 1-4b+b^2 = (b-1)(b-2)-b-1 \le 0$, ta suy ra $f(a,b,1) \le f(a,1,1)$. Như vậy

$$f(a,b,c) \le f(a,1,1) = a^3-5a+2 = (a-2)(a^2+2a-1),$$

từ đó ta suy ra $f(a,b,c) \le 0$, hay $a^3+b^3+c^3 \le 5abc$.

Bài toán kết thúc.□

Lời giải 2. Bất đẳng thức cần chứng minh mang tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử $2 \ge a \ge b \ge c \ge 1$. Khi đó dễ thấy

$$(b-a)(b-c) \le 0,$$

hay $b^2 \le b(a+c)-ac$. Từ đây ta suy ra

$$\begin{aligned} b^3 &\le b\left[b(a+c)-ac\right] = b^2(a+c)-abc \\ &\le \left[b(a+c)-ac\right](a+c)-abc = b(a+c)^2-ac(a+c)-abc. \end{aligned}$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$a^3 + c^3 + b(a+c)^2 - ac(a+c) - abc \leq 5abc,$$

hay

$$(a-c)^2(a+c) + b(a+c)^2 \leq 6abc.$$

Lưu ý rằng do $a, b, c \in [1, 2]$ nên $a \leq 2 \leq 2c \leq b + c$, từ đó dẫn đến

$$0 \leq a - c \leq b.$$

Và như vậy ta đã chứng minh được đánh giá trên vì

$$(a-c)^2(a+c) + b(a+c)^2 \leq b(a-c)(a+c) + b(a+c)^2 = 2ab(a+c) \leq 2ab(2c+c) = 6abc.$$

Chứng minh hoàn tất□

Lời giải 3. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \leq 5.$$

Bất đẳng thức này mang tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử $1 \leq a \leq b \leq c \leq 2$. Khi đó ta có đánh giá

$$(a-b)(b^2-c^2) \geq 0,$$

từ đây suy ra $b^3 \leq ab^2 + bc^2 - c^2a$ hay

$$\frac{b^2}{ca} \leq \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{c}{b}.$$

Mặt khác ta cũng có

$$\frac{a^2}{bc} \leq \frac{a^2}{ca} = \frac{a}{c},$$

và

$$\frac{c^2}{ab} \leq \frac{2c}{ab} \leq \frac{2c}{b}.$$

Từ các đánh giá trên, ta thu được

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \leq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

Vì $b \leq c \leq 2$ nên $\dfrac{2b}{c} \geq 1$ và $\dfrac{c}{b} \geq 1 > \dfrac{1}{2}$. Do vậy

$$\left(\frac{2b}{c} - 1\right)\left(\frac{c}{b} - \frac{1}{2}\right) \geq 0,$$

hay $\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} \leq \dfrac{5}{2}$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} \leq \dfrac{5}{2}$. Từ hai đánh giá này, ta được

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \leq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \leq 5.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

9.5 Cho a, b, c là các số thực không âm thay đổi bất kì. Chứng minh rằng
$$\left(1+\frac{4a}{b+c}\right)\left(1+\frac{4b}{a+c}\right)\left(1+\frac{4c}{b+a}\right) \geq 25$$

Lời giải. Dãy bất đẳng thức sau là tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh

$$(4a+b+c)(4b+c+a)(4c+a+b) \geq 25(a+b)(b+c)(c+a),$$

$$a^3+b^3+c^3+7abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Đánh giá cuối cùng đúng do $abc \geq 0$ và bất đẳng thức Schur bậc ba, do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

9.6 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng
$$ab^2+bc^2+ca^2 \leq 2+abc$$

Lời giải. Bất đẳng thức ban đầu mang tính hoán vị giữa các biến nên không mất tính tổng quát, ta giả sử b nằm giữa a và c. Từ đó ta có đánh giá

$$a(b-c)(b-a) \leq 0,$$

hay $ab^2+ca^2 \leq a^2b+abc$. Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$a^2b+bc^2 \leq 2.$$

Thay a^2+c^2 bởi $3-b^2$, đồng thời thực hiện biến đổi tương đương, ta được đánh giá

$$b^3+2 \geq 3b.$$

Đây là một đánh giá đúng bởi theo AM-GM, $b^3+1+1 \geq 3\sqrt[3]{b^3}=3b$. Do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

9.7 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kì. Chứng minh rằng
$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

Lời giải 1. Bất đẳng thức ban đầu mang tính thuần nhất nên ta chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9}+\frac{b^2+6b+9}{3b^2-6b+9}+\frac{c^2+6c+9}{3c^2-6c+9} \leq 8.$$

Để ý rằng ta có đánh giá sau

$$\frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{2(4a+3)}{2+(a-1)^2}\right]\le\frac{4(a+1)}{3}.$$

Thiết lập hai đánh giá tương tự và cộng lại, ta được

$$\frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9}+\frac{b^2+6b+9}{3b^2-6b+9}+\frac{c^2+6c+9}{3c^2-6c+9}\le\frac{4(a+b+c+3)}{3}=8.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

Lời giải 2. Chú ý rằng

$$3-\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2},$$

do đó ta cần phải chứng minh

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{1}{2}.$$

Tuy nhiên đây là một kết quả đã được chứng minh ở bài $\boxed{\textbf{8.18}}$. □

Lời giải 3. Đặt $x=\frac{b+c}{a}, y=\frac{c+a}{b}, z=\frac{a+b}{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(x+2)^2}{x^2+2}+\frac{(y+2)^2}{y^2+2}+\frac{(z+2)^2}{z^2+2}\le 8,$$

hay

$$\frac{(x-1)^2}{x^2+2}+\frac{(y-1)^2}{y^2+2}+\frac{(z-1)^2}{z^2+2}\ge\frac{1}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{(x-1)^2}{x^2+2}+\frac{(y-1)^2}{y^2+2}+\frac{(z-1)^2}{z^2+2}\ge\frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}$$

Như vậy, để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$2(x+y+z-3)^2\ge x^2+y^2+z^2+6,$$

hay $(x+y+z-6)^2+2(xy+yz+zx-12)\ge 0$. Tuy nhiên đây là một đánh giá đúng nhờ đánh giá sau:

$$(x+y+z-6)^2\ge 0$$

và đánh giá có được theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned}xy+yz+zx&=\frac{(b+c)(c+a)}{ab}+\frac{(b+c)(c+a)}{ab}+\frac{(b+c)(c+a)}{ab}\\&\ge 3\sqrt[3]{\left[\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\right]^2}\ge 12,\end{aligned}$$

do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

9.8 Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $13x + 5y + 12z = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy}{2x+y} + \frac{3yz}{2y+z} + \frac{6xz}{x+z}$$

Lời giải. Ta viết lại biểu thức P như sau:

$$P = \frac{1}{\dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{x}} + \frac{1}{\dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3y}} + \frac{1}{\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{6z}}.$$

Để ý rằng ta có đánh giá cơ bản sau

$$\frac{a+b+c}{9} \geq \frac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}},$$

từ đó ta áp dụng để có

$$P \leq \frac{2y + x + 6z + 3y + 12x + 6z}{9} = \frac{13x + 5y + 12z}{9} = 1.$$

Cuối cùng, với $x = y = z = \dfrac{3}{10}$ (thoả mãn điều kiện) thì $P = 1$ nên ta kết luận 1 là giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Bài toán kết thúc.□

9.9 Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1$$

Lời giải. Dãy bất đẳng thức sau là tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\left(10a^3 - 9a^5 - a\right) + \left(10b^3 - 9b^5 - b\right) + \left(10c^3 - 9c^5 - c\right) \geq 0,$$

$$a(1 - a^2)(9a^2 - 1) \geq 0.$$

Để ý rằng ta có đánh giá sau

$$(1 + a)(9a^2 - 1) - \frac{8}{3}.(3a - 1) = \frac{1}{3}.(3a + 5)(3a - 1)^2 \geq 0,$$

từ đó ta đưa bài toán về việc chứng minh

$$a(1 - a)(3a - 1) + b(1 - b)(3b - 1) + c(1 - c)(3c - 1) \geq 0,$$

hay $4(a^2 + b^2 + c^2) - 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 1$. Sử dụng giả thiết ta thu được bất đẳng thức

$$4(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3.$$

Thực hiện phép biến đổi tương đương, ta thu được đánh giá cơ bản sau

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc.$$

Do vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

9.10 Cho a, b, c là các số thực trong khoảng $[1; 2]$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \leq 10$$

Lời giải 1. Trước hết ta có

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}.$$

Bất đẳng thức ban đầu mang tính đối xứng giữa các biến nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $2 \geq a \geq b \geq c \geq 1$. Từ đây ta có các đánh giá sau

$$\frac{a}{c}+1-\frac{a}{b}+\frac{b}{c} = \left(\frac{a}{b}-1\right)\left(\frac{b}{c}-1\right) \geq 0,$$

$$\frac{c}{a}+1-\frac{b}{a}+\frac{c}{b} = \left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{c}{b}-1\right) \geq 0.$$

Như vậy ta suy ra

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \leq 5+2(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}),$$

và do đó để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \leq \frac{5}{2},$$

hay $(2a-c)(a-2c) \leq 0$. Tuy nhiên đây là đánh giá đúng do $2a > c$ và $a \leq 2 \leq 2c$, nên bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc. □

Nhận xét: Khi các biến a, b, c thuộc đoạn$[m, n]$ nào đó, ta thường hay đánh giá $(a-m)(b-m)(c-m) \geq 0$ hoặc $(a-n)(b-n)(c-b) \leq 0$ để tìm ra các mối liên hệ khác. Đánh giá trên có thể được xem là "đủ mạnh" (không phải tất cả trường hợp đều dùng được), vì dấu bằng xảy ra khi một biến bằng m hoặc n. (có hiệu quả khi chứng minh bất đẳng thức đối xứng mà dấu bằng đạt tại biên).

Lời giải 2. Bất đẳng thức ban đầu mang tính đối xứng giữa các biến nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $1 \leq a \leq b \leq c \leq 2$.

Dễ thấy bất đẳng thức ban đầu tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy sau:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 10abc,$$

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \leq 7abc,$$

$$(a-b)(b-c)(c+a)+b(2a-c)(2c-a)\geq 0.$$

Tuy nhiên đánh giá cuối cùng đúng do $a\leq b\leq c$, đồng thời $c\leq 2\leq 2a$ và $a\leq 2\leq 2c$. Từ đó ta suy ra bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài toán kết thúc.□

9.11 Cho x,y,z là các số thực dương.Chứng minh với mọi $0\leq a\leq b\leq c$, ta có:
$$(ax+by+cz)(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})\leq\frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+x)^2.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$4ac(ax+by+cz)(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})\leq\left((ax+by+cz)+ac(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})\right)^2$$
Khi đó ta cần chứng minh:
$$ax+by+cz+ac(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})\leq(a+c)(x+y+z)$$
Tương đương với:
$$ay+cy\geq by+\frac{acy}{b}\Leftrightarrow y(a-b)(b-c)\geq 0$$
.□

9.12 Cho ba số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2+b^2+c^2+3}{a+b+c-abc}\geq\frac{5}{2}$$

Lời giải.

Biến đổi như sau:

$a^2+b^2+c^2+3=a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)=(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)$

$a+b+c-abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(a+b)(b+c)(c+a)$

Ta đưa bất đẳng thức về dạng:
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{5}{2}$$
Không mất tính tổng quát, giả sử $c=max\{a;b;c\}$

Khi đó:$(a+b)^2\leq 2c(a+b)\leq 2\Rightarrow a+b<2$. Bây giờ để ý:

$\frac{1}{c+a}=\frac{a+b}{a^2+1}=a+b-\frac{a^2(a+b)}{a^2+1}\geq a+b-\frac{a(a+b)}{2}$ $\frac{1}{b+c}\geq a+b-\frac{b(a+b)}{2}$

Ta quy về chứng minh:$\frac{2}{x}+x(4-x)\geq 5$ với $a+b=x$

Tương đương:$(x-1)^2(x-2)\leq 0$ (đúng)

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $c=1;a=1;b=0$ và các hoán vị.□

9.13 Cho ba số thức dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\leq 3$. Chứng minh rằng:
$$a^2+b^2+c^2+3abc\leq 2(a+b+c)$$

Lời giải.

Đầu tiên ta xét trường hợp $a^2+b^2+c^2=3$

Khi đó, ta có: $3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2>a^2+b^2+c^2\Rightarrow 3\geq a+b+c>\sqrt{3}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:
$a+b+c-3abc \geq 3-(a+b+c)$ Hay $\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3abc \geq 3-(a+b+c)$
Ta có: $\dfrac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3abc \geq \dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{3} = \dfrac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{3}$
Và: $3-(a+b+c) = \dfrac{3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2}{3+a+b+c} = \dfrac{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{3+a+b+c}$
Như vậy ta chỉ cần chứng minh: $(a+b+c)(a+b+c+3) \geq 6$
Điều này hiển nhiên đúng do $\sqrt{3}(\sqrt{3}+3) > 6$
Dấu bằng chỉ xảy ra khi $a=b=c=1$
Nếu $a^2+b^2+c^2 < 3$ thì tồn tại $k>1$ sao cho: $(ka)^2+(kb)^2+(kc)^2 = 3$
Theo trên, ta có: $$k^2(a^2+b^2+c^2)+3k^3abc \leq 2k(a+b+c)$$
hay $$k(a^2+b^2+c^2)+3k^2abc \geq 2(a+b+c)$$
Mà $k>1$ nên $a^2+b^2+c^2+3abc < k(a^2+b^2+c^2)+3k^2abc$
Vậy ta có điều phải chứng minh.□

9.14 Cho ba số thực $a,b,c \in [0;1]$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}+abc \leq \frac{5}{2}$$

Lời giải.

Ta có các bất đẳng thức sau: $(1-a)(1-bc)+(1-b)(1-c) \geq 0 \Leftrightarrow abc+2 \geq a+b+c$
$\sum \dfrac{a}{1+bc} \leq \sum \dfrac{a}{1+abc}$
Như vậy ta chỉ cần chứng minh: $\dfrac{x+2}{x+1}+x \leq \dfrac{5}{2}$ với $x=abc$
Tương đương: $(x-1)(2x+1) \leq 0$ Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a=b=c=1$.□

9.15 Cho các số thực không âm $a;b;c$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$M = \frac{1+a^2}{1+b^2}+\frac{1+b^2}{1+c^2}+\frac{1+c^2}{1+a^2}$$

Lời giải.

Đặt $x=a^2+1, y=b^2+1, z=c^2+1$
Từ giả thiết ta có: $a,b,c \in [0,1] \Rightarrow x,y,z \in [1,2]$
Tìm Max: $M = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$
Không mất tính tổng quát:
Giả sử $x \geq y \geq z \Rightarrow (y-x)(y-z) \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z} \leq \dfrac{x}{z}+1$
Do $x,y,z \in [1,2] \Leftrightarrow (2x-z)(2z-x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x} \leq \dfrac{5}{2}$ do đó: $M \leq \dfrac{5}{2}+1 = \dfrac{7}{2}$.□

9.16 Cho các số thực dương $a;b;c$ thỏa mãn $abc=1$.Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a+b^2+c^3}+\frac{1}{b+c^2+a^3}+\frac{1}{c+a^2+b^3} \leq 1$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta có: $(a+b^2+c^3)(a+1+\dfrac{1}{c}) \geq (a+b+c)^2$

Do đó

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a+b^2+c^3}\le\sum_{cyc}\frac{a+1+\frac{1}{c}}{(a+b+c)^2}=\frac{\sum a+\sum ab+3}{(a+b+c)^2}\quad \text{vì}\quad abc=1$$

Bây giờ chúng ta chỉ cần chứng minh:

$$\sum_{cyc}\frac{\sum a+\sum ab+3}{(a+b+c)^2}\le 1\Leftrightarrow (a+b+c)^2\ge a+b+c+ab+bc+ca+3$$

Tương đương $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\ge a+b+c+3$ Bất đẳng thức cuối đúng vì:
$a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{3}\ge\dfrac{3\sqrt[3]{abc}(a+b+c)}{3}=a+b+c\quad$ và $\quad ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3.$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.\Box$

Câu hỏi mở:Các bạn có thể giải quyết bài này theo cách trên được không? Vì sao?

Cho các số thực dương $a;b;c$ thỏa mãn $abc=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b^2+c^3}+\frac{b}{b+c^2+a^3}+\frac{c}{c+a^2+b^3}\le 1$$

9.17 Cho các số thực không âm $a;b;c$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2}\le\frac{9}{2}$$

Lời giải.

Chúng ta đưa bất đẳng thức về :

$$\frac{ab}{1-ab}+\frac{bc}{1-bc}+\frac{ca}{1-ca}\le\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwaz:

$$\frac{ab}{1-ab}=\frac{2ab}{(1+c^2)+(a-b)^2}\le\frac{2ab}{1+c^2}\le\frac{1}{2}.\frac{(a+b)^2}{(c^2+a^2)+(c^2+b^2)}\le\frac{1}{2}.(\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2})$$

Tương tự ta có : $\sum\dfrac{ab}{1-ab}\le\dfrac{3}{2}.\Box$

9.18 Cho các số thực dương $a;b;c$ thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng:

$$4(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+5(a^2+b^2+c^2)\ge 27$$

Lời giải.

Ta có đánh giá sau:

$$\frac{4}{a}+5a^2-2a^3-7=\frac{(a-1)^2(4+a-2a^2)}{a}\ge 0$$

Bất đẳng thức trên đúng do $a<\sqrt[3]{3}$ nên $4+a-2a^2=a^2\left(\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{a}-2\right)>a^2\left(\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}-2\right)>0.$

Do đó ta có: $\dfrac{4}{a}+5a^2\ge 2a^3+7.$

Tương tự ta có: $\dfrac{4}{b}+5b^2\ge 2b^3+7;\dfrac{4}{c}+5c^2\ge 2c^3+7.$

Cộng các bất đẳng thức trên lại, ta được:

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 2(a^3+b^3+c^3)+21=27.$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

9.19 Cho các số thực dương $a; b; c$ thỏa mãn $a + b + c \le 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ac}{c+3a+2b}$$

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{9}{a+3b+2c} = \frac{(1+1+1)^2}{b+c+c+a+2b} \le \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{2b}$$

Do đó: $$\frac{ab}{a+3b+2c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{ab}{b+c} + \frac{ab}{c+a} + \frac{ab}{2b}\right)$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự, rồi cộng lại ta được:

$$A \le \sum \frac{1}{9}\left(\frac{ab}{b+c} + \frac{ab}{c+a}\right) + \frac{a+b+c}{18}$$

Mặt khác: $\sum \left(\frac{ab}{b+c} + \frac{ab}{c+a}\right) = a + b + c$

nên $$A \le \frac{a+b+c}{6} \le 1$$

Như vậy, giá trị lớn nhất của $A = 1$ khi $a = b = c = 2$. $\square$

9.20 Cho các số thực dương $a; b; c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Lời giải.

Đặt $x = a^2, y = b^2, z = c^2$. Khi đó ta cần chứng minh:

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\left(\sum \sqrt{\frac{x}{x+y}}\right)^2 \le \left(\sum (x+z)\right)\left(\sum \frac{x}{(x+y)(x+z)}\right) = \frac{4(x+y+z)(xy+yz+xz)}{(x+y)(y+z(z+x)}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$8(x+y+z)(xy+yz+xz) \le 9(x+y)(y+z)(x+z)$

Đây là bất đẳng thức quen thuộc . Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

9.21 Cho các số thực dương $x; y; zc$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+y+z}} + \frac{y^3+1}{\sqrt{y^4+z+x}} + \frac{z^3+1}{\sqrt{z^4+x+y}} \ge 2\sqrt{xy+yz+zx}$$

Lời giải.

Để ý rằng $x^4 + y + z = x\left[x^3 + yz(y+z)\right]$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\sum_{sym} \frac{x^3+1}{2\cdot\sqrt{x^4+y+z}\cdot\sqrt{xy+yz+zx}} = \sum_{sym} \frac{x^3+1}{2\cdot\sqrt{x^3+yz(y+z)}\cdot\sqrt{x^2(y+z)+xyz}}$$

$$\ge \sum_{sym} \frac{x^3+1}{x^3+yz(y+z)+x^2(y+z)+xyz}$$

$= \sum_{sym} \frac{x^3+1}{(x^2+yz)(x+y+z)} = \sum_{sym} \frac{x^3+xyz}{(x^2+yz)(x+y+z)} = \sum_{sym} \frac{x}{x+y+z} = 1$. Điều phải chứng minh. $\square$

9.22 Cho các số thực dương $a; b; c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(b-1)^2} + \frac{b^4}{(c-1)^2} + \frac{c^4}{(a-1)^2} \ge 48$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-swachz, ta có:

$$\frac{a^4}{(b-1)^2}+\frac{b^4}{(c-1)^2}+\frac{c^4}{(a-1)^2}\geq \frac{1}{3}\left(\sum \frac{a^2}{b-1}\right)^2$$

Ta chứng minh: $$\frac{1}{3}\geq 48\left(\sum \frac{a^2}{b-1}\right)^2 \Leftrightarrow \sum \frac{a^2}{b-1}\geq 12$$

Ta có: $$b\leq \frac{b^2+4}{4}\Rightarrow b-1\leq \frac{b^2}{4}\Rightarrow \frac{a^2}{b-1}\geq 4.\frac{a^2}{b^2}$$

Từ đó ta có: $\sum \frac{a^2}{b-1}\geq 4\sum \frac{a^2}{b^2}\geq 12$ (Đúng theo AM-GM□

9.23 Cho các số thực dương $a;b;c$ thỏa mãn:$a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Áp dụng kĩ thuật Cauchy ngược dấu ta có:

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\geq a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tương tự với 2 bất đẳng thức còn lại, ta có:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}\geq \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

9.24 Cho các số thực dương $a;b;c$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a+3}{a+bc}}+\sqrt{\frac{b+3}{b+ac}}+\sqrt{\frac{c+3}{c+ab}}\geq 3\sqrt{2}$$

Lời giải.

Ta có: $\sqrt{\frac{2(a+3)}{a+bc}}=\sqrt{2\left(\frac{a+b}{a^2+bc}+\frac{a+c}{a^2+bc}\right)}\geq \sqrt{\frac{a+b}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{a+c}{a^2+bc}}$

Như vậy vế trái không nhỏ hơn:

$$\sum\nolimits_{cyc}\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}\right)$$

Mà $$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}\geq \sqrt{\frac{8}{a+bc+b+ca}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(c+1)(a+b)}}$$

Như vậy chỉ cần chứng minh:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{c+1}}\geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ 2 bất đẳng thức:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{c+1}}\geq \frac{9}{\sqrt{c+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{a+1}}$$

Và $$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\leq \sqrt{3(a+b+c+3)}=3\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=1$.□

NHẬN XÉT: Bất đẳng thức tổng quat sau cũng đúng với cung điều kiện và $k\geq 0$

$$\left(\frac{a+1}{a+bc}\right)^k+\left(\frac{b+1}{b+ca}\right)^k+\left(\frac{c+1}{c+ab}\right)^k\geq 3$$

Chứng minh trường hợp tổng quát:

Sử dụng bất đẳng thức côsi cho 3 số, ta chỉ cần chứng minh:

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq (a+bc)(b+ac)(c+ab)$$

Sử dụng bất đẳng thức cô si cho 2 số :

$$(a+1)(b+c) = (ab+c)+(ac+b) \geq 2\sqrt{(ab+c)(ac+b)}$$
$$(b+1)(a+c) = (ab+c)+(bc+a) \geq 2\sqrt{(ab+c)(bc+a)}$$
$$(c+1)(a+b) = (ac+b)+(bc+a) \geq 2\sqrt{(ac+b)(bc+a)}$$

Nhân vế theo vế ta chỉ cần chứng minh:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.□

9.25 Cho các số thực không âm $x; y; zc$ thỏa mãn $x+y+z=3$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$x^2+x+2y+3z$$

Lời giải.

Ta có: $x^2+x+2y+3z \leq x^2+x+3(y+z) = x(x-2)+9 \leq 3.(3-2)+9 = 12$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=3; y=z=0$. □

9.26 Cho các số thực dương $a; b; c$. Chứng minh rằng:

$$(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b) \leq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)^2$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$2(a^4+b^4+c^4)+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 3ab(a^2+b^2)+3bc(b^2+c^2)+3ca(c^2+a^2)$$

Ta tách ra để chứng minh đơn giản với 2 biến như sau

$$a^4+b^4+4a^2b^2 \geq 3ab(a^2+b^2) \Leftrightarrow (a-b)^4+ab(a-b)^2 \geq 0$$

Tương tự ta cũng có: $a^4+c^4+4a^2c^2 \geq 3ac(a^2+c^2)$ và $b^4+c^4+4b^2c^2 \geq 3bc(b^2+c^2)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

9.27 Cho các số thực dương $a; b; c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{\sqrt{b^4+c^4}}+\frac{b^2-bc+c^2}{\sqrt{c^4+a^4}}+\frac{c^2-ca+a^2}{\sqrt{b^4+c^4}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$VT \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}{\sqrt{(c^4+a^4)(b^4+c^4)(c^4+a^4)}}}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh:

$$8[(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)]^2 \geq (c^4+a^4)(b^4+c^4)(c^4+a^4)$$

Ta có bất đăng thức: $2(a^2-ab+b^2)^2 \geq a^4+b^4 \Leftrightarrow (a-b)^4 \geq 0$

Nhân 3 bất đẳng thức này lại ta được:

$$8[(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)]^2 \geq (c^4+a^4)(b^4+c^4)(c^4+a^4)$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

9.28 Cho các số thực dương $a; b; c$. Chứng minh rằng:

$$15\sqrt[15]{\frac{32ab}{(3a+b)(5a+3b)}}+6\sqrt[3]{\frac{a}{5a+3b}}\le 18$$

Lời giải.

Áp dụng AM-GM ta có:

$$VT\le \frac{4a}{3a+b}+\frac{8b}{5a+3b}+13+\frac{8a}{5a+b}+2$$

Bây giờ ta chứng minh:

$$\frac{4a}{3a+b}+\frac{8(a+b)}{5a+3b}\le 3$$

Tức là $8(a+b)(3a+b)\le(5a+3b)^2\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$. (Luôn đúng)□

9.29 Cho hai số thực dương $a; b$ thỏa mãn $a^9+b^9=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\ge 2$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$a^3+b^3\geqslant 2ab\Leftrightarrow 3(a^3+b^3)^4\geqslant 8.3a^3b^3(a^3+b^3)$

Tương đương

$$3(a^3+b^3)^4\ge 8((a^3+b^3)^3-a^9-b^9)$$

Tương đương

$$3(a^3+b^3)^4+16\geqslant 8(a^3+b^3)^3$$

Đúng theo Cô si 4 số).Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.□

9.30 Cho hai số thực dương $a; b$. Chứng minh rằng:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3a}}\right)\le 2$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}}\leqslant\frac{a}{a+b}+\frac{a+b}{a+3b}$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{2b}{a+3b}$$

Cộng lại ta được:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\leqslant\frac{3}{4}+\frac{a}{2(a+b)}$$

Làm tương tự cộng lại có ngay:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3a}}\right)\le 2$$.□

9.31 Cho ba số thực không âm $a; b; c$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\le 4$. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{ab+1}{(a+b)^2}\ge 3$$

Lời giải.

Ta có:

$$\sum \frac{4ab+4}{(a+b)^2} \geq \sum \frac{4ab+a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2}{(a+b)^2} = 2\sum \frac{(c+a)(b+c)}{(a+b)^2}+6$$

Như vậy chỉ cần chứng minh:

$$\sum \frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2} \geq 3$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM-GM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.□

9.32 Cho ba số thực $a;b;c$ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$(\frac{a+b}{a-c})^2+(\frac{b+c}{b-a})^2+(\frac{c+a}{c-b})^2 \geq 1$$

Lời giải.

Đặt $x=\frac{a+b}{a-c}; y=\frac{b+c}{b-a}; z=\frac{c+a}{c-b}$

Khi đó: $$xyz=(x-1)(y-1)(z-1)=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a-c)(b-a)(c-b)}$$

Suy ra: $$xy+yz+zx=x+y+z-1$$

Từ bất đẳng thức: $(x+y+z-1)^2 \geq 0$, ta được:

$$x^2+y^2+z^2 \geq 2(x+y+z-xy-yz-zx)-1$$

Hay $$x^2+y^2+z^2 \geq 1$$.

Phép chứng minh hoàn tất. □

9.33 Cho hai số thực dương $a;b;c$ thỏa mãn $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}$$

Lời giải.

Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}=\frac{ab}{\sqrt{ab+c(a+b+c)}}=\frac{ab}{\sqrt{(b+c)(c+a)}} \leq \frac{ab}{2(b+c)}+\frac{ab}{2(c+a)}$$

Là tương tự cho các biểu thức còn lại, với chú ý:

$$\frac{ab}{2(b+c)}+\frac{ca}{2(b+c)}=\frac{a}{2}$$

Ta tìm được max của $P=1$ đạt được khi và chỉ khi $a=b=c$.□

9.34 Cho hai số thực dương $a;b;c$thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+bc}+\frac{b^2}{b+ca}+\frac{c^2}{c+ab} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có:

$$ab+bc+ca=abc$$

$$VT=\sum \frac{a^3}{a^2+abc}=\sum \frac{a^3}{(a+b)(a+c)}$$

Ta có: $$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{a+b}{8}+\frac{b+c}{8} \geq \frac{3}{4}(a+b+c)$$

Do đó ta có: $$\frac{a^2}{a+bc}+\frac{b^2}{b+ca}+\frac{c^2}{c+ab} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

9.35 Cho ba số thực dương $a; b; c$ thỏa mãn$a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:
$$\sum \frac{1}{1+ab} \geqslant \frac{9}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:
$$\sum \frac{ab}{1+ab} \leq 3 - \frac{9}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\sum \frac{ab}{1+ab} \leq \sum \frac{ab}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}\sum \sqrt{ab}$$
Bây giờ ta chỉ cần chứng minh:
$$\sum \sqrt{ab} + \frac{9}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \leq 6$$
Để đơn giản ta đặt $x = \sqrt{a}; y = \sqrt{b}; z = \sqrt{c}$.Khi đó: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ và:
$$xy + yz + zx + \frac{9}{x+y+z} \leq 6$$
Tương đương $xy + yz + zx + \dfrac{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}}{x+y+z} \leq 2(x^2+y^2+z^2)$

(Đem thuần nhất bất đẳng thức). Do bất đẳng thức thuần nhất nên chuẩn hóa $a + b + c = 1$.

Đặt $xy + yz + zx = A$. Ta có:$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2A, A \leq \dfrac{1}{3} < \dfrac{2}{5}$

Bất đẳng thức được viết lại:
$$A + \frac{(1-2A)\sqrt{3(1-2A)}}{1} \leq 2(1-2A)$$
Tương đương $3(1-2A)^3 \leq (2-5A)^2$ tương đương $0 \leq (1-3A)(1+A-8A^2)$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $1 - 3A \geq 0; 1 + A - 8A^2 > 1 - 9A^2 \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

9.36 Cho hai số thực $x; y$ thỏa mãn $xy \neq 0$ và $xy(x+y) = x^2 - xy + y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$$

Lời giải.

Với chú ý:
$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3+y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3} = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$$
Đặt $a = \dfrac{1}{x},\ \ b = \dfrac{1}{y}$.Điều kiện của bài toán có thể viết lại như sau :

$a + b = a^2 - ab + b^2$ và ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :$A = (a+b)^2$ với đánh giá:
$$a^2 - ab + b^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2 + \frac{3}{4}(a-b)^2 \geq \frac{1}{4}(a+b)^2$$
Ta thu được :$a + b \geq \dfrac{1}{4}(a+b)^2$hay là $0 \leq a + b \leq 4$

Từ đó suy ra $A \leq 16$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là16 đạt được khi $a = b$ hay $x = y = \dfrac{1}{2}$.□

9.37 Cho bai số thực dương $x; y; zc$ thỏa mãn$xy + yz + zx = xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\frac{3}{x^2y}+\frac{3}{y^2z}+\frac{3}{z^2x}$$

Lời giải.

Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$ thì $a+b+c=1$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$a^2+b^2+c^2\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a)$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a)$ (do $a+b+c=1$).

$\Leftrightarrow (a^3+ab^2)+(b^3+bc^2)+(c^3+ca^2)\geq 2a^2b+2b^2c+2c^2a$(đúng theo bđt Cauchy cho 2 số dương).□

9.38 Cho hai số thực dương $a; b; c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}\geq\frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức cauchy–Schawrz, ta có:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}=\sum\frac{c^2}{c^2(a+b)}+\frac{\sqrt[3]{abc}^2}{2abc}\geqslant\frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.□

9.39 Cho hai số thực $a; b; c$ thỏa mãn $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt[3]{ab+bc+ac}$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c\leq\sqrt{3}$$

Lời giải.

Dễ thấy $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$

Từ đó ta có:

$$\sqrt[2]{a^2+b^2+c^2}\leq\sqrt[3]{a^2+b^2+c^2}$$

tương đương với

$$(a^2+b^2+c^2)^3\leq(a^2+b^2+c^2)^2$$

tương đương

$$a^2+b^2+c^2\leq 1$$

tương đương

$$1\geq a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}$$

hay $a+b+c\leq\sqrt{3}$.□

9.40 Cho ba số thực dương $a; b; c$ cùng lớn hơn 2 và thảo mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng:

$$xyz+9\geq 4.(x+y+z)$$

Lời giải.

Trong 3 số x, y, z phải có 2 số cùng lớn hơn hoặc cùng nhỏ hơn so với 3, giả sử đó là x vày.

Khi đó $(x-3)(y-3)\geqslant 0\Leftrightarrow xy+9\geqslant 3(x+y)$

Mặt khác từ giả thiết suy ra $xyz=xy+z+zx$

Do vậy ta có $xyz + 9 \geqslant z(x+y) + 3(x+y)$
Ta cần chứng minh $z(x+y) + 3(x+y) \geqslant 4(x+y+z)$
Hay $z \geqslant \dfrac{x+y}{x+y-4}$
Giả sử ngược lại $z < \dfrac{x+y}{x+y-4}$ thì khi đó:
$1 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} > \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x+y-4}{x+y} \geq \dfrac{4}{x+y} + \dfrac{x+y-4}{x+y} = 1$(vô lý)
Do vậy ta có điều phải chứng minh.□

3.10 Bài 10.1 đến bài 10.40

10.1 Cho ba số thực không âm $a; b; c$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{4abc}{a^2b+b^2c+c^2a+abc} \geq 2$$

Lời giải.
Không mất tính tổng quát, giả sử b là số nằm giữa a và c. Khi đó ta có:
$$a^2b + b^2c + c^2a + abc = b(c+a)^2 + c(a-b)(c-b) \leq b(c+a)^2$$
Ta cần chứng minh bất đẳng thức:
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{4ca}{(c+a)^2} \geq 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{2(c^2+a^2)}{(c+a)^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{c^2+a^2} \geq \frac{2(ab+bc+ca}{(c+a)^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{a^2+c^2}{(c+a)^2} \geq d\frac{2b}{c+a}$$
$$\Leftrightarrow (ab+bc-a^2-c^2)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng . Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b = c$.□

10.2 Cho hai số thực dương $x; y$ thỏa mãn$x + y = 2$. Chứng minh rằng:
$$(x^4+y^4)(x^2+y^2)^4 \leqslant \frac{32}{x^{10}y^{10}}$$

Lời giải.
Cách giả 1:
$(x^4+y^4)(x^2+y^2)^4x^{10}y^{10} = \dfrac{1}{8}(x^4+y^4)(x^3y+xy^3)^4.(2x^2y^2)^3 \leqslant \dfrac{1}{8}.\dfrac{((x+y)^4)^8}{8^8} = 32$ (Theo cô si 8 số)
Cách giải 2:"
Bất đẳng thức trên thực chất là hệ quả của 2 bất đẳng thức sau: 1) $x^6y^6(x^4+y^4) \leq 2$
2) $xy(x^2+y^2) \leq 2$
Chứng minh 2): Ta có:$xy(x^2+y^2) \leq \dfrac{(x^2+y^2+2xy)^2}{8} = 2$

Chứng minh 1): Ta có:$x^6y^6(x^4+y^4) \le \dfrac{x^4y^4(x^4+y^4+2x^2y^2)^2}{8} = \dfrac{(xy(x^2+y^2))^4}{8} \le 2$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x=y=1$.□

10.3 Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn
$$a^2+b^2+c^2=3.$$
Chứng minh rằng:
$$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2 \le 3$$

Lời giải.

Gọi $(x;y;z)$ là một hoán vị của $(a;b;c)$ sao cho $x \ge y \ge z$.

Khi đó theo bất đẳng thức hoán vị ta có:
$$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2 \le x^3y^2+x^2yz^2+z^3y^2$$
do 2 dãy $x;y;z$ và $x^2y^2; z^2x^2; y^2z^2$ đơn điệu cùng chiều.

Như vậy ta sẽ chứng minh:
$$x^3y^2+yx^2z^2+z^3y^2 \le 3$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:
$$2x^3y^2 \le y(x^4+x^2y^2)$$
$$2z^3y^2 \le y(z^4+z^2y^2)$$
Chỉ còn cần chứng minh (với chú ý $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2=3$):
$$y(x^4+x^2y^2)+y(z^4+z^2y^2)+2yz^2x^2 \le 6$$
$$\Leftrightarrow y(x^2+z^2)(x^2+y^2+z^2) \le 6$$
$$\Leftrightarrow y(3-y^2) \le 2$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^2(y+2) \ge 0$$
Bất đẳng thức cuối luôn đúng, nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hay $a=b=c=1$.□

10.4 Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của
$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \le \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Với giả thiết $a+b+c=1$ thì:
$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}=\sqrt{\frac{ab}{1-a-b+ab}}=\sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}}=\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}$$
Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}=\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c+a}+\frac{b}{b+c}\right)$$
Tương tự ta cũng có:
$$\sqrt{\frac{bc}{a+bc}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+a}\right); \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+b}\right)$$
Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta được:
$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c+a}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}\right)=\frac{3}{2}$$
Đó chính là điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.□

10.5 Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:
$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Lời giải.

Lời giải 1.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:
$$2(a^2+b^2+c^2)^2 - 6(a^3b+b^3c+c^3a) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum \left(a^2-2ab+bc-c^2+ca\right)^2 \geq 0$$
Điều này hiển nhiên đúng. Bất đẳng thức được chứng minh.
Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc trong bộ 3 số sau và các hoán vị $(a, b, c) = k\left(\sin^2\frac{4\pi}{7}, \sin^2\frac{2\pi}{7}, \sin^2\frac{\pi}{7}\right)$.□

Lời giải 2.

Ta đã biết với mọi số thực x, y, z thì
$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$
chọn
$$x = a^2+bc-ab,\ y = b^2+ca-bc,\ z = c^2+ab-ca$$
ta thu được
$$\left[\sum(a^2+bc-ab)\right]^2 \geq 3\sum(a^2-bc-ab)(b^2+ca-bc)$$
Mặt khác, ta thấy rằng
$$\sum(a^2+bc-ab) = a^2+b^2+c^2$$
và
$$\sum(a^2-bc-ab)(b^2+ca-bc) = a^3b+b^3c+c^3a$$
Nên ta có
$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$
Phép chứng minh hoàn tất.
Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc trong bộ 3 số sau và các hoán vị $(a, b, c) = k\left(\sin^2\frac{4\pi}{7}, \sin^2\frac{2\pi}{7}, \sin^2\frac{\pi}{7}\right)$.□

Lời giải 3.

Bằng cách xét hiệu hai vế của bất đẳng thức, ta được

$$\begin{aligned}
&\left(\sum a^2\right)^2 - 3\sum a^2b \\
&= \sum\left[\frac{1}{2}a^2 - \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right).ab + \frac{\sqrt{5}}{2}ca + \left(\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{4}\right).b^2 + \left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right).bc - \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right).c^2\right]^2 \\
&= \sum\left[\frac{1}{3}.a^2 - \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}\right).ab + \frac{\sqrt{15}}{3}.ca + \left(\frac{\sqrt{15}}{6}-\frac{1}{6}\right).b^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{6}\right).bc - \left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{15}}{6}\right).c^2\right]^2 \\
&= \sum\left[\frac{1}{4}.a^2 - \left(\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{29}}{8}.ab\right) + \frac{\sqrt{29}}{4}.ca + \left(\frac{\sqrt{29}}{8}-\frac{1}{8}\right).b^2 + \left(\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{29}}{8}\right).bc - \left(\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{29}}{8}\right)c^2\right]^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc trong bộ 3 số sau và các hoán vị $(a, b, c) = k\left(\sin^2\frac{4\pi}{7}, \sin^2\frac{2\pi}{7}, \sin^2\frac{\pi}{7}\right)$.□

10.6 Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn
$$xy + yz + zx = 3.$$
Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Theo Bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$\begin{aligned}\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} &= \frac{1}{2xyz} + \frac{1}{2xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}\\ &\geq \frac{1}{2xyz} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}}.\end{aligned}$$
Mặt khác, cũng theo Bất đẳng thức AM-GM ta thấy rằng:
$$xyz = \sqrt{xy.yz.zx} \leq \sqrt{\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3} = 1$$
và
$$\begin{aligned}xyz(x+y)(y+z)(z+x) &= (xz+yz)(yx+zx)(zy+xy)\\ &\leq \left(\frac{xz+yz+yx+zx+zy+xy}{3}\right)^3\\ &= 8.\end{aligned}$$
Từ đó
$$\begin{aligned}\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} &\geq \frac{1}{2xyz} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}}.\\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$
Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.□

10.7 Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn
$$x + y + z \leq \frac{3}{2}.$$
Tìm giá trị nhỏ nhất của:
$$P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{4}{z^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{z^2} + \frac{4}{x^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2}}$$

Lời giải.

Sử dụng lần lượt bất đẳng thức Mincopski, Cauchy-Schwarz, AM-GM và kết hợp với giả thiết, ta có:

$$
\begin{aligned}
P &\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\right)^2} \\
&\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \frac{81}{(x+y+z)^2} + \frac{324}{(x+y+z)^2}} \\
&= \sqrt{\left[(x+y+z)^2 + \frac{81}{16(x+y+z)^2}\right] + \frac{6399}{16(x+y+z)^2}} \\
&\geq \sqrt{2.\frac{9}{4} + \frac{6399.4}{16.9}} \\
&= \frac{27}{2}.
\end{aligned}
$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{27}{2}$ khi $x = y = z = \dfrac{1}{2}$.□

10.8 Cho ba số thực dương a, b, c
Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+9b+6c} + \frac{bc}{b+9c+6a} + \frac{ca}{c+9a+6b} \leq \frac{a+b+c}{16}$$

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{16}{a+9b+6c} = \frac{(1+3)^2}{(3c+a)+3(3b+c)} \leq \frac{1}{3c+a} + \frac{3}{3b+c}.$$

Từ đó ta suy ra

$$\frac{ab}{a+9b+6c} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{ab}{3c+a} + \frac{3ab}{3b+c}\right)$$

Chứng minh tương tự với 2 biểu thức còn lại, sau đó cộng vế với vế, ta có:

$$
\begin{aligned}
&\frac{ab}{a+9b+6c} + \frac{bc}{b+9c+6a} + \frac{ca}{c+9a+6b} \\
&\leq \frac{1}{16}\left(\frac{ab}{3c+a} + \frac{3ab}{3b+c} + \frac{bc}{3a+b} + \frac{3bc}{3c+a} + \frac{ca}{3b+c} + \frac{3ca}{3a+b}\right) \\
&= \frac{a+b+c}{16}.
\end{aligned}
$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

10.9 Cho $a; b; c$ dương và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2a^2 + \frac{2}{a+1} + b^4} + \sqrt{2b^2 + \frac{2}{b+1} + c^4} + \sqrt{2c^2 + \frac{2}{c+1} + a^4} \geq 6$$

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức Minkowski, kết hợp với bất đẳng thức AM-GM và giả thiết, ta được

$$\sqrt{2a^2+\frac{2}{a+1}+b^4}+\sqrt{2b^2+\frac{2}{b+1}+c^4}+\sqrt{2c^2+\frac{2}{c+1}+a^4}$$
$$\geq \sqrt{2(a+b+c)^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}+\frac{1}{\sqrt{c+1}}\right)^2+(a+b+c)^2}$$
$$=\sqrt{27+2\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}+\frac{1}{\sqrt{c+1}}\right)^2}$$
$$\geq \sqrt{27+2\left[\frac{3}{\sqrt[6]{(a+1)(b+1)(c+1)}}\right]^2}$$
$$=\sqrt{27+\frac{18}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}}$$
$$\geq \sqrt{27+\frac{54}{a+1+b+1+c+1}}$$
$$=6.$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

10.10 Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng
$$cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+cos\left(\frac{B-C}{2}\right)+cos\left(\frac{C-A}{2}\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b+c}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)$$

Lời giải.

Bằng 1 số phép biến đổi lượng giác trong tam giác, ta có:

$$cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{cos\left(\frac{A-B}{2}\right)cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$$
$$=\frac{\cos A+\cos B}{2\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}}$$
$$=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{2\sqrt{\frac{1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2}}}$$
$$=\frac{\frac{(a+b)(c^2-(a-b)^2)}{abc}}{2\sqrt{\frac{c^2-(a-b)^2}{ab}}}$$
$$=\frac{(a+b)\sqrt{c^2-(a-b)^2}}{2c\sqrt{ab}}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{(a+b)\sqrt{c^2-(a-b)^2}}{2c\sqrt{ab}} \le \frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2abc^2}{c^2-(a-b)^2} \ge a^2+b^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{2ab(a-b)^2}{c^2-(a-b)^2} \ge (a-b)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2 \ge c^2.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do ABC là tam giác nhọn.

Vậy:

$$cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \le \frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$$

Thiết lập 2 biểu thức tương tự và cộng vế với vế, ta có:

$$cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+cos\left(\frac{B-C}{2}\right)+cos\left(\frac{C-A}{2}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b+c}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}}\right).$$

Đó chính là điều mà ta cần chứng minh.□

10.11 Cho ba số thực dương a, b, c.

Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge \sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2+a^2-ac}$$

Lời giải.

Cách 1:

Sử dụng Bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{b}+b \ge 2\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{b^2-bc+c^2}{c}+c \ge 2\sqrt{b^2-bc+c^2}$$
$$\frac{c^2-ca+a^2}{a}+a \ge 2\sqrt{c^2-ca+a^2}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge 2\left(\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2+a^2-ac}\right)-a-b-c$$

Lại có theo Bất đẳng thức Mikowsyki, ta có:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2+a^2-ac} \ge \sqrt{\left(a-\frac{b}{2}+b-\frac{c}{2}+c-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(a+b+c)^2}$$
$$= a+b+c.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

Cách 2:

Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh lại như sau:

$$2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right) \ge 2\left(\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c$$

Vậy để chứng minh bài toán ta cần chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau đây :

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\geq 2\left(\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}\right)$$

hay là:

$$\left(\frac{a^2-ab+b^2}{b}+b\right)+\left(\frac{b^2-bc+c^2}{c}+c\right)+\left(\frac{c^2-ca+a^2}{a}+a\right)$$
$$\geq 2\left(\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}\right)$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển hiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

10.12 Cho ba số thực $a,b,c\in(0;1)$.
Chứng minh rằng:

$$(a-a^2)(b-b^2)(c-c^2)\geq(a-bc)(b-ca)(c-ab)$$

Lời giải.

Ta có:

$$(a-a^2)(b-b^2)(c-c^2)=abc-abc^2+abc.(ab+bc+ca)-abc.(a+b+c)$$

và:

$$(a-bc)(b-ca)(c-ab)=abc-abc^2+abc.(a^2+b^2+c^2)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Khi đó, bất đẳng thức tương đương với:

$$\Leftrightarrow abc.(a^2+b^2+c^2)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\leq abc.(a+b+c)-abc.(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow abc.(a^2+b^2+c^2)-abc.(ab+bc+ca)\leq(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-abc.(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow abc.[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\leq b^2.(c-a)^2+c^2.(a-b)^2+a^2.(b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow S_a.(b-c)^2+S_b.(c-a)^2+S_c.(a-b)^2\geq 0\ (1).$$

Với: $S_a=a^2-abc; S_b=b^2-abc; S_c=c^2-abc.$

Mà:

$$S_a+S_b+S_c=a^2+b^2+c^2-3a^2b^2c^2\geq 3.(abc)^{\frac{2}{3}}-3(abc)^2\geq 0.(\text{do: } abc\in(0,1)).$$

Và:

$$S_a.S_b+S_b.S_c+S_c.S_a=\sum a^2b^2+3a^2b^2c^2-2abc.(ab+bc+ca)\geq 0.$$
$$(\text{vì: } a^2b^2+a^2b^2c^2\geq 2a^2b^2c; b^2c^2+a^2b^2c^2\geq 2b^2c^2a; c^2a^2+a^2b^2c^2\geq 2c^2a^2b)$$

Nên theo định lí S.O.S ta có Bất đẳng thức (1) đúng.

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

10.13 Cho ba số thực dương a,b,c.
Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+4a}+\frac{c+a}{c+a+16b}$$

Lời giải.

Đặt

$$\begin{cases} a+b+c=x \\ b+c+4a=y \\ c+a+16b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y-x}{3} \\ b=\dfrac{z-x}{15} \\ c=\dfrac{21x-5y-z}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{5y+z-6x}{15} \\ b+c=\dfrac{4x-y}{3} \\ c+a=\dfrac{16x-z}{15} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$P=\frac{y}{3x}+\frac{4x}{3y}+\frac{z}{15x}+\frac{16x}{15z}-\frac{4}{5}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{y}{3x}+\frac{4x}{3y}=\frac{1}{3}(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y})\geq\frac{4}{3}$$

và

$$\frac{z}{15x}+\frac{16x}{15z}=\frac{1}{15}(\frac{z}{x}+\frac{16x}{z})\geq\frac{8}{15}$$

Do đó:

$$P\geq\frac{4}{3}+\frac{8}{15}-\frac{4}{5}=\frac{16}{15}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4x=2y=z\Leftrightarrow a=\dfrac{5b}{3}=\dfrac{5c}{7}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{16}{15}$.□

10.14 Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$
Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+3}}\geq\frac{3}{2}$$

Lời giải.

Lời giải 1.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $ab+bc+ca\geq 3$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+3}}\geq\frac{a}{\sqrt{b^2+ab+bc+ca}}=\frac{a}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}\geq\frac{2a}{a+2b+c}$$

Thiết lập 2 biểu thức tương tự, rồi cộng vế với vế, ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+3}}\geq\frac{2a}{a+2b+c}+\frac{2b}{b+2c+a}+\frac{2c}{c+2a+b}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned}\frac{2a}{a+2b+c}+\frac{2b}{b+2c+a}+\frac{2c}{c+2a+b}&\geq\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}\\&=\frac{2(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)}\\&\geq\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

Lời giải 2.

Vì $a^2b^2c^2=1$ nên ta có thể thay bộ (a,b,c) bởi $\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{z}{x},\dfrac{y}{z}\right)$.

Khi đó ta đưa bất đẳng thức về dạng đồng bậc là

$$\frac{x}{\sqrt{3xy+yz}}+\frac{y}{\sqrt{3yz+zx}}+\frac{z}{\sqrt{3zx+xy}}\geq\frac{3}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sum\frac{x}{\sqrt{3xy+yz}}\right)^2\left[\sum x(3xy+yz)\right]\geq(x+y+z)^3$$

Vậy, ta cần chứng minh được

$$(x+y+z)^3\geq\frac{27}{4}(x^2y+y^2z+z^2x+xyz)$$

Giả sử z là số nằm giữa 3 số x,y,z. Khi đó ta có:

$$x(z-x)(z-y)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow xz^2+x^2y\leq x^2z+xyz$$

Sử dụng đánh giá trên và kết hợp với bất đẳng thức AM-GM, ta được:

$$x^2y+y^2z+z^2x+xyz\leq z(x+y)^2\overset{AM-GM}{\leq}\frac{4}{27}\left(z+2.\frac{x+y}{2}\right)^3=\frac{4(x+y+z)^3}{27}.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.\square$

10.15 Cho ba số thực dương a,b,c.
Chứng minh rằng:

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\geq 33$$

Lời giải.

Lời giải 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{2\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)}{abc}\geq 9\frac{3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left(\frac{a+b+c}{abc}-\frac{9}{a^2+b^2+c^2}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left[(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-9abc\right]\geq 0$$

Đây là 1 điều hiển nhiên đúng theo AM-GM, do đó phép chứng minh của ta hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c.\square$

Lời giải 2. Đặt $p=a+b+c, q=ab+bc+ac, r=abc$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$2\frac{p^3-3pq+3r}{r}+9\frac{p^2}{p^2-2q}\geq 33$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{p(p^2-3q)}{r}+9\frac{p^2}{p^2-2q}\geq 27$$

Ta có $r\leq\frac{pq}{9}$ nên:

$$2\frac{p(p^2-3q)}{r}+9\frac{p^2}{p^2-2q}\geq 18\frac{p^2-3q}{q}+9\left(1+\frac{2q}{p^2-2q}\right)$$

Ta sẽ chứng minh

$$18\frac{p^2-3q}{q}+9\left(1+\frac{2q}{p^2-2q}\right)\geq 27$$

$$\Leftrightarrow\frac{p^2}{q}+\frac{p}{p^2-2q}\geq 4$$

$$\Leftrightarrow(p^2-3q)^2\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng, vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

10.16 Cho ba số thực dương a, b, c.
Chứng minh rằng:
$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 4$$

Lời giải.
Bất đẳng thức có thể viết lại như sau
$$\frac{a+b}{2\sqrt[3]{abc}} + \frac{b+c}{2\sqrt[3]{abc}} + \frac{c+a}{2\sqrt[3]{abc}} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 4$$
Hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

10.17 Cho ba số thực dương x, y, z.
Chứng minh rằng:
$$\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{4xyz}{x^2y + y^2z + z^2x + xyz} \geq 4$$

Lời giải.
Giả sử z là số nằm giữa 3 số x, y, z. Khi đó ta có:
$$x(z-x)(z-y) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow xz^2 + x^2y \leq x^2z + xyz$$
Sử dụng đánh giá trên và kết hợp với bất đẳng thức AM-GM, ta được:
$$x^2y + y^2z + z^2x + xyz \leq z(x+y)^2 \overset{AM-GM}{\leq} \frac{4}{27}\left(z + 2.\frac{x+y}{2}\right)^3 = \frac{4(x+y+z)^3}{27}.$$
Sử dụng kết quả trên, và theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{4xyz}{x^2y + y^2z + z^2x + xyz} \geq 3.\frac{x+y+z}{3\sqrt[3]{xyz}} + \frac{27xyz}{(x+y+z)^3} \overset{AM-GM}{\geq} 4.$$
Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.□

10.18 Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.
Chứng minh rằng:
$$\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} \leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4ab + 4bc + 4ca}}$$

Lời giải.
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có
$$3\sqrt[3]{4(ab+bc+ca)} \leq 2+2+(ab+bc+ca) \leq abc+ab+bc+ca+a+b+c+1 = (a+1)(b+1)(c+1).$$
Vậy, ta cần chứng minh được
$$\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} \leq \frac{25}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$
Hay là
$$(a+1)^2(c+1) + (b+1)^2(a+1) + (c+1)^2(b+1) \leq 25$$
$$\Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 + (a+b+c)^2 + 3(a+b+c) + 3 \leq 25$$
$$\Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq 4$$
Bây giờ ta giả sử b là số nằm giữa 3 số a, b, c. Khi đó ta có:

$$a(b-a)(b-c) \le 0$$
$$\Leftrightarrow ab^2 + a^2c \le abc + a^2b$$

Sử dụng đánh giá trên, kết hợp với bất đẳng thức AM-GM, ta được:

$$\begin{aligned} ab^2 + bc^2 + ca^2 \le a^2b + bc^2 + abc &= b(a^2 + ac + c^2) \\ &\le b(a+c)^2 \\ &\le \frac{4}{27}\left(b + 2.\frac{a+c}{2}\right)^3 \\ &= \frac{4(a+b+c)^3}{27} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi (a, b, c) là một hoán vị của $(0, 1, 2)$.□

10.19 Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$.
Chứng minh rằng:

$$|a^3 + b^3 + c^3 - abc| \le 2\sqrt{2}$$

Lời giải.

Đặt $t = ab$ thì ta có $t = ab; |t| \le \dfrac{a^2+b^2}{2} \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} = 1$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} \left[a^3 + b^3 + c(c^2 - ab)\right]^2 &\le \left[(a+b)^2 + c^2\right]\left[(a^2 - ab + b^2)^2 + (c^2 - ab)^2\right] \\ &= 2(1+t)\left[(c^2 - ab)^2 + (2 - c^2 - ab)^2\right] \\ &= 2(1+t)\left(2c^4 + 2a^2b^2 + 4 - 4c^2 - 4ab\right) \\ &= 4(1+t)\left[t^2 - 2t + 2 + c^2(c^2 - 2)\right] \\ &\le 4(t+1)(t^2 - 2t + 2) \end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$(t+1)(t^2 - 2t + 2) \le 2 \Leftrightarrow t^2(t-1) \le 0 \qquad .$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0, c = \pm\sqrt{2}$.□

10.20 Cho ba số thực dương a, b, c.
Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + \frac{3abc}{a+b+c} \ge \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Lời giải.

Trước hết, ta có 2 bất đẳng thức phụ sau:

Ta có:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a+b+c} + \frac{1}{3}(ab + bc + ca) \ge \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$\Leftrightarrow 3(a^3 + b^3 + c^3) + (a+b+c)(ab + bc + ca) \ge 2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Luôn đúng theo Schur bậc 3.

Ta cũng có:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+\frac{2}{3}(ab+bc+ca)\geq a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow 3(a^4+b^4+c^4)+2(ab+bc+ca)^2\geq 3(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)$$

Bất đẳng thức cuối đúng do sử dụng Schur bậc 4 và vì $a^4+b^4+2a^2b^2=(a^2+b^2)^2\geq 2ab(a^2+b^2)$.

Trở lại bài toán, bất đẳng thức của bài toán mà ta cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}\geq\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}+\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+ab+bc+ca\geq\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

Thật vật bất đẳng thức này đúng sau khi cộng vế theo vế của 2 bất đẳng thức phụ mà ta đã chứng minh ở trên.

Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

10.21 Cho ba số thực không âm a,b,c,d,e.

Chứng minh rằng:

$$a^6b+b^6c+c^6d+d^6e+e^6a\geq abcde(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$$

Lời giải.

Nếu $abcde=0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Với $abcde\neq 0$ ta có bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a^5}{cde}+\frac{b^5}{dea}+\frac{c^5}{eab}+\frac{d^5}{abc}+\frac{e^5}{bcd}\geq a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a^5}{cde}+\frac{a^5}{cde}+c^2+d^2+e^2\geq 5\sqrt[5]{\frac{a^5}{cde}.\frac{a^5}{cde}.c^2.d^2.e^2}=5a^2$$

Thực hiện tương tự cho các hạng tử còn lại, sau đó cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$. □

10.22 Cho ba số thực dương a,b,c.

Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab}\leq\frac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b^2(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c^2(a+b)}{c^2+ab}+abc\sum\frac{1}{a^2+bc}\leq\frac{3(a+b+c)}{2}$$

Ta nhận thấy rằng bất đẳng thức này được suy trực tiếp từ 2 kết quả sau:

1) $\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b^2(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c^2(a+b)}{c^2+ab}\leq a+b+c$

2) $\frac{2}{a^2+bc}+\frac{2}{b^2+ca}+\frac{2}{c^2+ab}\leq\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$

Chứng minh 1):

Đặt $(x;y;z)\equiv(a^{-1};b^{-1};c^{-1})$, ta chuyển bất đẳng thức thành:

$$\frac{x+y}{z^2+xy}+\frac{y+z}{x^2+yz}+\frac{z+x}{y^2+zx}\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\leq y\leq z$, khi đó ta có:

$$\begin{aligned}VP - VT &= \left(\frac{1}{z} - \frac{x+y}{z^2+xy}\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{z+x}{y^2+zx}\right) + \left(\frac{1}{y} - \frac{y+z}{x^2+yz}\right)\\ &= \frac{(z-x)(z-y)}{z^3+xyz} + \frac{(y^2-x^2)(y-x)(zx+yz-xy)}{xy(x^2+yz)(y^2+zx)}\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Như vậy, bất đẳng thức 1) được chứng minh.

Chứng minh 2):

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{4}{a^2+bc} \leq \frac{2}{a\sqrt{bc}} \leq \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức tương tự ta có bất đẳng thức 2) được chứng minh.

Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

10.23 Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.
Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Lời giải.

Cách 1. Sử dụng hằng đẳng thức quen thuộc

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

Ta đưa bất đẳng thức về dạng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)^2$$

Theo bất đẳng thức AM-GM và giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2(ab+bc+ca) &\geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + 2\sqrt{3abc(a+b+c)}\\ &= 3\left(\frac{1}{abc} + \sqrt{abc} + \sqrt{abc}\right)\\ &\geq 9 = (a+b+c)^2.\end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{3}{abc}$$

Vì thế ta cần phải chứng minh

$$\frac{3}{abc} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Hay

$$abc(a^2+b^2+c^2) \leq 3$$

Đến đây ta có hai hướng tấn công.

Hướng 1. Dồn biến

Giả sử $c = min\{a, b, c\}$ thì $3 = a + b + c \geq 3c$, tức $c \leq 1$ dẫn đến $\dfrac{a+b}{2} \geq 1$

Đặt

$$f(a,b,c) = abc(a^2+b^2+c^2)$$

Ta có

$$f(a,b,c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) = c\left\{\left[ab(a^2+b^2) - \frac{(a+b)^4}{8}\right] + \left[abc^2 - \frac{(bc+ca)^2}{4}\right]\right\}$$

Mà theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$(a+b)^4 = (a^2+b^2+2ab)^2 \geq 8ab(a^2+b^2)$$

$$(bc+ca)^2 \geq 4bc.ca = 4abc^2$$

nên ta có

$$f(a,b,c) \leq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$$

cuối cùng ta chỉ còn chứng minh

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \leq 3$$

đặt $x = \dfrac{a+b}{2} \geq 1$, từ giải thiết ta rút ra được $c = 3 - 2x$. Xét

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) - 3 = -(4x^5 - 14x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 1) = -(x-1)^2[2x(x-1)(2x-1)+1] \leq 0$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.□

Hướng 2. Dùng bất đẳng thức cổ điển

Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh lại như sau

$$27 \geq 3.abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

Ta đưa bất đẳng thức về chứng minh

$$27 \geq (a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2 \leq \left(\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+ab+bc+ca}{3}\right)^3 = 27$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Cách 3. Đặt $x = ab + bc + ca$. Khi đó sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca), \quad (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

Ta có

$$0 < x \leq 3 \text{ và } abc \leq \frac{x^2}{9}$$

Vì thế

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{x^2}{a^2b^2c^2} - \frac{6}{abc}$$

Ta sẽ chứng minh

$$x^2 - 6abc \geq (9-2x)a^2b^2c^2$$

Thật vậy

$$VT - VP \geq x^2 - \frac{2x^2}{3} - \frac{x^2(9-2x)}{81} = \frac{x^2(x-3)^2(2x+3)}{81} \geq 0$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

10.24 Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

Lời giải.

Cách 1. Đặt $x = a^2,\ y = b^2,\ z = c^2$ thì $x + y + z = 3$ và bất đẳng thức trở thành

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx$$

Tương đương với

$$2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right) + x^2 + y^2 + z^2 \geq (x + y + z)^2$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} + x^2 \geq 3x$$

Vì thế mà

$$VT \geq 3(x + y + z) = (x + y + z)^2$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1.\square$

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2 (x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^3 = 27$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh được

$$(x^2 + y^2 + z^2).(xy + yz + zx)^2 \leq 27$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)^2 \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + xy + yz + zx}{3}\right)^3 = 27$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

10.25 Cho ba số thực dương a, b, c.
Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

Lời giải.

Trong 3 số a, b, c thì luôn tồn tại 2 số nằm cùng phía so với 1.

Giả sử 2 số đó là a và b.

Khi đó ta có:

$$c(a - 1)(b - 1) \geq 0$$

Mặt khác, ta thấy rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2ab - 2bc - 2ca = (a - b)^2 + (c - 1)^2 + 2c(a - 1)(b - 1) \geq 0.$$

Đó chính là điều ta cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1.\square$

10.26 Cho ba số thực a, b, c.
Chứng minh rằng:

$$(2 + a^2)(2 + b^2)(2 + c^2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

Lời giải.

Ta có: $(2 + a^2)(2 + b^2)(2 + c^2) = 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) + 8 + a^2b^2c^2$

Để ý rằng ta có các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + a^2b^2c^2 + 2 &\geq \left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \\ &\geq \left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{9abc}{a + b + c} \\ &\overset{Schur}{\geq} 2\left(ab + bc + ca\right).\end{aligned}$$

và:

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 3\left(ab+bc+ca\right).$$
$$2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3\right) \geq 2\left(2ab+2bc+2ca\right).$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta thu ngay điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

10.27 Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$.
Chứng minh rằng:
$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \leq \frac{9}{10}$$

Lời giải.

Cách 1:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$x^2+1=x^2+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \geq 10\sqrt[10]{\frac{x^2}{9^9}}=10\sqrt[5]{\frac{x}{3^9}}$$
Thiết lập 2 biểu thức tương tự, sau đó cộng vế theo vế, ta được:
$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{10}\left(\sqrt[5]{(3x)^4}+\sqrt[5]{(3y)^4}+\sqrt[5]{(3z)^4}\right).$$
Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM, ta nhận thấy rằng:
$$3x+3x+3x+3x+1 \geq 5\sqrt[5]{(3x)^4}.$$
Tương tự với y, z, và chú ý $x+y+z=1$, ta suy ra:
$$\sqrt[5]{(3x)^4}+\sqrt[5]{(3y)^4}+\sqrt[5]{(3z)^4} \leq 3$$
Từ đó:
$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \leq \frac{9}{10}$$
Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.□

Cách 2:

Ta có:
$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{72x}{100}+\frac{3}{50}$$
Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với 1 bất đẳng thức luôn đúng (với mọi x dương) sau:
$$-(4x+3)(3x-1)^2 \leq 0$$
Tương tự với y, z, sau đó cộng vế với vế, ta có:
$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \leq \frac{72}{100}(x+y+z)+\frac{9}{50}=\frac{9}{10}.$$
Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. □

10.28 Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.
Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \leq \sqrt{2}$$

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh rằng:
$$(a+b+c)^2 \leq 2(1+bc)^2$$

Thật vậy, kết hợp với giả thiết $a^2+b^2+c^2=1$ thì bất đẳng thức trên sẽ tương đương với:

$$2(ab+bc+ca)\le 1+4bc+2b^2c^2$$
$$\Leftrightarrow 2a(b+c)\le a^2+(b+c)^2+2b^2c^2$$
$$\Leftrightarrow (b+c-a)^2+2b^2c^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng.

Từ đó ta suy ra:

$$\frac{a}{1+bc}\le\frac{a\sqrt{2}}{a+b+c}$$

Tương tự 2 biểu thức còn lại và cộng vế theo vế ta được:

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\le\frac{a\sqrt{2}}{a+b+c}+\frac{b\sqrt{2}}{a+b+c}+\frac{c\sqrt{2}}{a+b+c}=\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

10.29 Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác.
Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{abc}{a+b-c}}+\sqrt{\frac{abc}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{abc}{c+a-b}}\ge ab+bc+ca$$

Lời giải.

Lời giải 1.

Đặt $x=b+c-a, y=c+a-b, z=a+b-c$, bất đẳng thức khi đó tương đương với

$$\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)\ge x+y+z.$$

Bình phương hai vế và quy đồng, ta được

$$(x+y)(y+z)(z+x)\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)^2\ge 8xyz(x+y+z)^2.$$

Đặt tiếp $m=\sqrt{x}, n=\sqrt{y}, p=\sqrt{z}$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(m^2+n^2)(n^2+p^2)(p^2+m^2)}{8m^2n^2p^2}\ge\left(\frac{m^2+n^2+p^2}{mn+np+pm}\right)^2.$$

Để ý rằng ta có nhận xét sau:

Với $x\ge y>0$ và $z>0$ thì ta có $\dfrac{x}{y}\ge\dfrac{x+z}{y+z}$

Từ nhận xét suy ra

$$\frac{m^2+n^2}{2mn}\ge\frac{m^2+n^2+p^2}{2mn+p^2}$$
$$\frac{m^2+p^2}{2mp}\ge\frac{m^2+n^2+p^2}{2mp+n^2}$$
$$\frac{p^2+n^2}{2pn}\ge\frac{m^2+n^2+p^2}{2pn+m^2}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$(m^2+n^2+p^2)(mn+mp+np)^2\ge(m^2+2np)(n^2+2mp)(p^2+2mn)$$
$$\Leftrightarrow (m-n)^2(m-p)^2(n-p)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

Lời giải 2.

Theo Bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có

$$abc(a+b+c)\ge\sum(a+b-c)c^3$$

Mặt khác, theo Bất đẳng thức Holder ta có:

$$\sum (a+b-c)c^3 = \sum \frac{c^3}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{a+b-c}}\right)^2} \geq \sum \frac{(a+b+c)^3}{\left(\sum \dfrac{1}{\sqrt{a+b-c}}\right)^2}$$

Kết hợp 2 điều trên, ta suy ra

$$abc(a+b+c) \geq \sum \frac{(a+b+c)^3}{\left(\sum \dfrac{1}{\sqrt{a+b-c}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{abc}{a+b-c}} + \sqrt{\frac{abc}{b+c-a}} + \sqrt{\frac{abc}{c+a-b}} \geq a+b+c$$

Đó chính là điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

10.30 Cho $k \geq 1$.
Chứng minh rằng:

$$k^k \geq (k+1)^{k-1}$$

Lời giải.

Vì $k = 1$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức nên ta chỉ cần xét $k > 1$

Lấy Logarit Nepe hai vế, ta được

$$k \ln k \geq (k-1)\ln(k+1).$$

Hay viết lại dưới dạng

$$\frac{\ln k}{k-1} \geq \frac{\ln(k+1)}{k}.$$

Đến đây có thể thấy ngay là ta cần chứng minh hàm sau nghịch biến

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \text{ với } x > 1.$$

Lấy đạo hàm $f(x)$ ta có

$$f'(x) = \frac{1 - \dfrac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}.$$

Lấy đạo hàm $g(x)$, ta có

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0.$$

Suy ra

$$g(x) < \lim_{x \to 1^+} g(x) = 0.$$

Suy ra

$$f'(x) < 0.$$

Từ đó ta có ngay hàm $f(x)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □.

10.31 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.
Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \tfrac{3}{2}$$

Lời giải.

Viết bất đẳng thức lại thành

$$\frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{b+c} + \frac{ab}{c+a} \geq \frac{3}{2}.$$

Dùng bất đẳng thức hoán vị, ta có

(hoặc cũng có thể chứng minh bằng phân tích dạng $M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0$)

$$\frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{b+c} + \frac{ab}{c+a} \geq \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

Như vậy (bước cuối dùng AM-GM)

$$\begin{aligned}\frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{b+c} + \frac{ab}{c+a} &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{b+c} + \frac{ab}{c+a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{b(c+a)}{a+b} + \frac{c(a+b)}{b+c} + \frac{a(b+c)}{c+a}\right]\\ &\geq \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{b(c+a)}{a+b}\cdot\frac{c(a+b)}{b+c}\cdot\frac{a(b+c)}{c+a}} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

10.32 Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1$$

.

Chứng minh rằng:

$$a+b+c \geq ab+bc+ca$$

Lời giải.

Cách 1:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$(a+b+1)(a+b+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}1 \leq \sum \frac{1}{a+b+1} &\leq \sum \frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2}\\ &\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq 2(a+b+c) + a^2+b^2+c^2\\ &\Leftrightarrow ab+bc+ca \leq a+b+c\end{aligned}$$

hay ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

Cách 2:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned}2 &\geq \sum(1 - \frac{1}{a+b+1}) = \sum \frac{a+b}{a+b+1}\\ &\geq \frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{(a+b)(a+b+1)+(b+c)(b+c+1)+(c+a)(c+a+1)}\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+a+b+c \geq (a+b+c)^2\\ &\Leftrightarrow ab+bc+ca \leq a+b+c\end{aligned}$$

hay ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Cách 3:

Giả sử tồn tại các số dương a,b,c sao cho:

$$\sum \frac{1}{a+b+1} \geq 1 \text{ và } a+b+c < ab+bc+ca.$$

Khi đó ta có:

$$\frac{1}{a+b+1} < \frac{\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}}{a+b+c+\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}} = \frac{ab+bc+ca}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{ab+bc+ca}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca} > 1 \\
&\Leftrightarrow 1 > \sum \left[1 - \frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca}\right] \\
&\Leftrightarrow 1 > \sum \frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca} \\
&\geq \frac{3}{4}\sum \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca} \\
&\geq \frac{3(a+b+c)^2}{\sum[(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca]} \\
&= \frac{3(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2+3(ab+bc+ca)} \geq 1
\end{aligned}$$

Điều cuối cùng là vô lí, do đó bài toán của ta đúng.

Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

10.33 Cho a, b, c là các số thực dương.
Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{12(a+b+c)} + \sqrt[3]{abc}$$

Lời giải.

Cách 1:

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2(a+b+c)^2}{6(a+b+c)} - \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{6(a+b+c)} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Hay:

$$(a+b+c)^2 + 3(ab+bc+ca) \geq 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c)$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=3$, bất đẳng thức trở thành

$$3+ab+bc+ca \geq 6\sqrt[3]{abc}$$

Sử đánh giá

$$ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)} = 3\sqrt{abc}$$

ta đưa bài toán về chứng minh

$$1+\sqrt{abc} \geq 2\sqrt[3]{abc}$$

Đặt $t=\sqrt[6]{abc} \leq 1$, ta có bất đẳng thức trên tương đương với

$$t^3+1 \geq 2t^2$$

hay là

$$(1-t)(1+x-x^2) \geq 0$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Cách 2:

Nhân $12(a+b+c)$ cho hai vế, ta sẽ được bất đẳng thức tương đương là
$$a^2+b^2+c^2+5(ab+bc+ca) \geq 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c).$$
Hay viết lại là
$$(a+b+c)^2+3(ab+bc+ca) \geq 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c).$$
Áp dụng AM-GM hai lần ta sẽ có ngay điều phải chứng minh
$$\begin{aligned}(a+b+c)^2+3ab+bc+ca) &\geq 2(a+b+c)\sqrt{3(ab+bc+ca)}\\ &\geq 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c).\end{aligned}$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

10.34 Cho các số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn $xy+yz+zx=3$.
Chứng minh rằng:
$$\frac{x+2y}{2x+4y+3z^2}+\frac{y+2z}{2y+4z+3x^2}+\frac{z+2x}{2z+4x+3y^2} \leq 1$$

Lời giải.

Vì
$$\frac{x+2y}{2x+4y+3z^2}=\frac{1}{3}-\frac{z^2}{3(2x+4y+3z^2)}$$
Nên bất đẳng thức trên tương đương với
$$\frac{x^2}{2y+4z+3x^2}+\frac{y^2}{2z+4x+3y^2}+\frac{z^2}{2x+4y+3z^2} \geq \frac{1}{3}$$
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có
$$\sum \frac{z^2}{2x+4y+3z^2} \geq \frac{\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}+\sqrt{z^3}\right)^2}{3(x^3+y^3+z^3)+6(xy+yz+zx)}$$
Vậy, ta cần chỉ ra rằng
$$\frac{\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}+\sqrt{z^3}\right)^2}{3(x^3+y^3+z^3)+6(xy+yz+zx)} \geq \frac{1}{3}$$
hay là
$$\sqrt{(xy)^3}+\sqrt{(yz)^3}+\sqrt{(zx)^3} \geq xy+yz+zx$$
Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\begin{aligned}&\sqrt{(xy)^3}+\sqrt{(yz)^3}+\sqrt{(zx)^3}\\ &=\left(\sqrt{(xy)^3}+\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{(yz)^3}+\sqrt{yz}\right)+\left(\sqrt{(zx)^3}+\sqrt{zx}\right)-\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)\\ &\geq 2\left(xy+yz+zx\right)-\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)\\ &\geq (xy+yz+zx)+(xy+yz+zx)-\sqrt{3\left(xy+yz+zx\right)}\\ &=(xy+yz+zx)+3-3\\ &=(xy+yz+zx)\end{aligned}$$
Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. □

10.35 Cho các số thực dương a, b, c.
Chứng minh rằng:
$$\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+ab+4b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+bc+4c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+ca+4a^2}} \leq 1$$

Lời giải.

Cách 1:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có :

$$\sum\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+ab+4b^2}} \le \left[\sum(4a^2+ac+4c^2)\right]\left[\sum\frac{a^2}{(4a^2+ab+4b^2)(4a^2+ac+c^2)}\right]$$

Do đó ta đi chứng minh:

$$\left[\sum(4a^2+ac+4c^2)\right]\left[\sum\frac{a^2}{(4a^2+ab+4b^2)(4a^2+ac+c^2)}\right] \le 1$$

Điều này tương đương với:

$$\left(8\sum a^2+\sum ab\right)\left[8\sum a^2b^2+abc(a+b+c)\right] \le \prod(4a^2+ab+4b^2)$$

Hay:

$$66a^2b^2c^2 \le 8abc(a^3+b^3+c^3)+8(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+3abc\left[a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\right]$$

Điều này đúng theo AM-GM.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. $\square$

Cách 2:

Để ý rằng:

$$(x+1)^2(4x^2+x+4)-4(x^2+x+1)^2 = x(x-1)^2 \ge 0$$

Nên ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2+x+4}} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Thiết lập 2 biểu thức tương tự, rồi cộng vế theo vế, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2+x+4}}+\frac{1}{\sqrt{4y^2+y+4}}+\frac{1}{\sqrt{4z^2+z+4}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{y+1}{y^2+y+1}+\frac{z+1}{z^2+z+1}\right)$$

Như vậy ta cần chứng minh

$$\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{y+1}{y^2+y+1}+\frac{z+1}{z^2+z+1} \le 2$$

Tương đương với

$$\frac{x^2}{x^2+x+1}+\frac{y^2}{y^2+y+1}+\frac{z^2}{z^2+z+1} \ge 1.$$

Bất đẳng thức này luôn đúng theo Vasile Cirtoaje.

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. $\square$

10.36 Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.
Chứng minh rằng:

$$(a-b)(b-c)(c-a)+2 \ge \frac{2}{3}(ab+bc+ca).$$

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là như sau

$$2-\frac{2}{3}(ab+bc+ca) \ge \left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

Đến đây, ta có thể giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$.

Để ý rằng

$$2-\frac{2}{3}(ab+bc+ca) = \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3}.$$

Nên ta cần chứng minh

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3} \ge \left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3} \geq \sqrt[3]{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}.$$

Như vậy ta cần chỉ ra rằng

$$\sqrt[3]{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}. \geq |(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

Hay tức là (sau khi đã xét trường hợp hai biến bằng nhau)

$$1 \geq |(a-b)(b-c)(c-a)|$$

Bất đẳng thức này đúng vì theo AM-GM và điều giả sử ta có

$$\begin{aligned}
|(a-b)(b-c)(c-a)| &= (a-b)(a-c)(b-c) \\
&\leq ab(a-b) = \sqrt{ab \cdot ab \cdot (a-b)^2} \\
&\leq \sqrt{\left(\frac{ab+ab+(a-b)^2}{3}\right)^3} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{3}\right)^3} \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Như vậy, ta có điều phải chứng minh. □

10.37 Cho a, b, c là các số thực dương.
Chứng minh rằng:

$$(a^3+b^3+c^3)^2-(a^4+b^4+c^4)(ab+bc+ca)$$

Lời giải.

Ta có đẳng thức

$$(a^3+b^3+c^3)^2-(a^4+b^4+c^4)(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}\sum[(a^2-b^2)^2+c^4](a-b)^2 \geq 0$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

10.38 Cho a, b, c, d là các số thực dương.
Chứng minh rằng:

$$4.\sqrt[16]{\frac{32a(a+b)(a+b+c)}{3(a+b+c+d)^3}}+\sqrt[4]{\frac{24bcd}{(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)}} \leq 5$$

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned}
&16.\sqrt[16]{\frac{32a(a+b)(a+b+c)}{3(a+b+c+d)^3}} \\
&= 16.\sqrt[16]{\frac{2a}{a+b}.\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}.\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}.\frac{4(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}.\frac{4(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}.\frac{4(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}} \\
&\leq \frac{2a}{a+b}+2.\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}+3.\frac{4(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}+10 \\
&= \frac{2a}{a+b}+\frac{3(a+b)}{a+b+c}+\frac{4(a+b+c)}{a+b+c+d}+10. \quad (1)
\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM thì:

$$4.\sqrt[4]{\frac{24bcd}{(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)}} = 4.\sqrt[4]{\frac{2b}{a+b}.\frac{3c}{a+b+c},\frac{4d}{a+b+c+d}}$$
$$\leq \frac{2b}{a+b} + \frac{3c}{a+b+c} + \frac{4d}{a+b+c+d} + 1. \ (2)$$

Cộng vế theo vế (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$. □

10.39 Cho x, y, z, t là các số thực không âm.
Chứng minh rằng:
$$3(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 4\sqrt{xyzt} \geq (x + y + z + t)^2$$

Lời giải.

Ta chứng minh bất đẳng thức tương đương (Tukervici):
$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xyzt \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + t^2x^2 + t^2y^2 + z^2t^2$$
Không mất tính tổng quát, giả sử $t = \min\{x; y; z; t\}$

Nếu $t = 0$ thì ta có:
$$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 \geq 0$$
Nếu $t > 0$,chuẩn hoá $t = 1$. Ta cần chứng minh:
$$x^4 + y^4 + z^4 + 2xyz + 1 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^2 + y^2 + z^2$$
Mặt khác, ta có bất đẳng thức với 3 biến dương:
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2(xy + yz + zx)$$
nên ta cần chỉ ra rằng
$$x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2 \geq 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$\Leftrightarrow (x - y)^2[(x + y)^2 - 2] + (y - z)^2[(y + z)^2 - 2] + (z - x)^2[(z + x)^2 - 2] \geq 0$$
Như vậy, phép chứng minh hoàn tất.

Có 2 trường hợp của đẳng thức :$x = y = z = t$ hoặc $x = y = z; t = 0$.□

10.40 Cho a, b, c là các số thực dương.
Chứng minh rằng:
$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 + 8.\frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{(a + b + c)^2}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:
$$\frac{(b - c)^2}{bc} + \frac{(c - a)^2}{ca} + \frac{(a - b)^2}{ab} \geq 8.\frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{(a + b + c)^2}$$
$$\Leftrightarrow \sum (b - c)^2 \left[a(a + b + c)^2 - 8abc\right] \geq 0$$
Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$

Ta có:
$$S_b + S_a = (a + b)(a + b + c)^2 - 16abc \geq 4c(a + b)^2 - 16abc \geq 0$$
$$S_b + S_c = (b + c)(a + b + c)^2 - 16abc \geq 4a(b + c)^2 - 16abc \geq 0$$
$$2S_b \geq S_b + S_c \geq 0 \Rightarrow S_b \geq 0$$
Nên theo định lí S.O.S ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□