

Ths. Trần Đình Cư
GV Chuyên luyện thi THPT Quốc gia, TP Huế

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN:

CHỦ ĐỀ 4,5,6: NÓN TRỤ CẦU

- 100 CÂU HỎI CÓ ĐÁP ÁN

- TẤT CẢ ĐỀU CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT

- CUNG CẤP MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH NHANH

HUẾ, 9/03/2017

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 4. HÌNH NÓN, MẶT NÓN, KHỐI NÓN	3
CHỦ ĐỀ 5. MẶT TRỤ - HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ.....	17
CHỦ ĐỀ 6. MẶT CẦU - HÌNH CẦU VÀ KHỐI CẦU.....	30

CHỦ ĐỀ 4. HÌNH NÓN, MẶT NÓN, KHỐI NÓN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa mặt nón

Cho đường thẳng Δ . Xét một đường thẳng d cắt Δ tại O và không vuông góc với Δ (Hình 1).

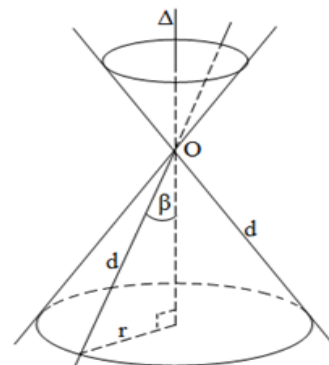
Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng d như thế khi quay quanh Δ gọi là **mặt nón tròn xoay** (hay đơn giản là mặt nón).

Δ gọi là trục của mặt nón.

d gọi là đường sinh của mặt nón.

O gọi là đỉnh của mặt nón.

Nếu gọi β là góc giữa d và Δ thì 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón ($0^\circ < 2\beta < 180^\circ$).

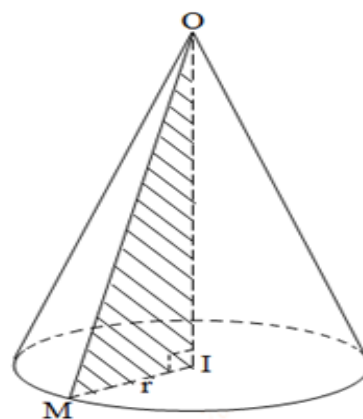


Hình 1

2. Hình nón tròn xoay

Cho $\triangle OIM$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón) (hình 2).

Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón. Hình tròn tâm I , bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.



Hình 2

3. Công thức diện tích và thể tích của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h , bán kính đáy r và đường sinh là l thì có:

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l$

Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi r^2$

Diện tích toàn phần hình tròn: $S = S_d + S_{xq}$

Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

4. Tính chất

Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng đi qua đỉnh thì có các trường hợp sau xảy ra:
Mặt phẳng cắt mặt nón theo 2 đường sinh $\rightarrow$ Thiết diện là tam giác cân.

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi đó là mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.

Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng không đi qua đỉnh thì có các trường hợp sau xảy ra:

- + Nếu mặt phẳng cắt vuông góc với trục hình nón → giao tuyến là một đường tròn.
- + Nếu mặt phẳng cắt song song với 2 đường sinh hình nón → giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.
- + Nếu mặt phẳng cắt song song với 1 đường sinh hình nón → giao tuyến là 1 đường parabol.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gọi l, R, h lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng

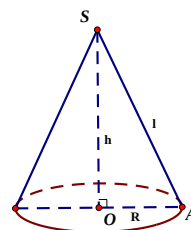
- A. $l^2 = h^2 + R^2$ B. $\frac{1}{l^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{R^2}$ C. $R^2 = h^2 + l^2$ D. $l^2 = hR$

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông SOA ta có

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 \text{ hay } l^2 = h^2 + R^2$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 2. Gọi l, R, h lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón (N). Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N) là

- A. $S_{xq} = \pi Rl$ B. $S_{xq} = \pi Rh$ C. $S_{xq} = 2\pi Rl$ D. $S_{xq} = \pi R^2h$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $S_{xq} = \pi Rl$. Vậy ta chọn đáp án A.

Câu 3. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón (N). Diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón (N) là

- A. $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$ B. $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$
C. $S_{tp} = \pi Rl + 2\pi R^2$ D. $S_{tp} = \pi Rh + \pi R^2$

Hướng dẫn giải

$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi Rl + \pi R^2$. Vậy ta chọn đáp án A.

Câu 4. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của khối nón (N). Thể tích V của khối nón (N) là

- A. $V = \pi R^2h$ B. $V = \frac{1}{3}\pi R^2h$ C. $V = \pi R^2l$ D. $V = \frac{1}{3}\pi R^2l$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Vậy ta chọn đáp án B.

Câu 5. Cho hình nón có bán kính đáy là $4a$, chiều cao là $3a$. Diện tích xung quanh hình nón là

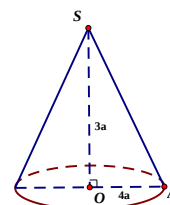
- A. $40\pi a^2$ B. $20\pi a^2$ C. $24\pi a^2$ D. $12\pi a^2$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi 4a \cdot 5a = 20\pi a^2.$$

Vậy chọn đáp án B.



Câu 6. Cho hình nón có bán kính đáy là $3a$, chiều cao là $4a$. Thể tích của hình nón là

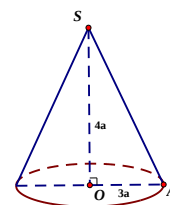
- A. $12\pi a^3$ B. $36\pi a^3$ C. $15\pi a^3$ D. $12\pi a^3$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9a^2 \cdot 4a = 12\pi a^3.$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 7. Cho hình nón có bán kính đáy là $4a$, chiều cao là $3a$. Diện tích toàn phần hình nón là

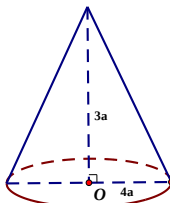
- A. $38\pi a^2$ B. $32\pi a^2$ C. $36\pi a^2$ D. $30\pi a^2$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{xq} + S_d = \pi Rl + \pi R^2 \\ &= \pi \cdot 4a \cdot 5a + \pi \cdot 16a^2 = 36\pi a^2. \end{aligned}$$

Vậy chọn đáp án C



Câu 8. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa một cạnh bên và đáy bằng 60° , diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp tam giác ABC là

- A. $\frac{13\pi a^2}{12}$ B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{13}}{12}$ C. $\frac{\pi a^2}{12}$ D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{13}}{\sqrt{12}}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $S_{xq} = \pi Rl$

Với

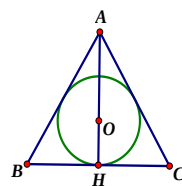
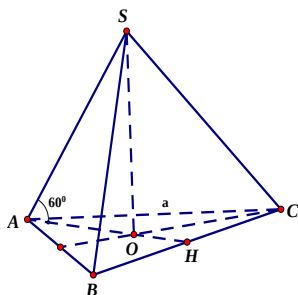
$$R = OH = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$l = SH = \sqrt{SO^2 + OH^2}$$

$$= \sqrt{\left(AO \cdot \tan 60^\circ \right)^2 + OH^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$$

Vậy $S_{xq} = \pi \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi a^2 \sqrt{13}}{12}$. **Vậy chọn đáp án B.**



Câu 9. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa **mặt bên** và đáy bằng 60° , diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và **đáy** là hình tròn **nội tiếp** tam giác ABC là

A. $\frac{\pi a^2}{4}$

B. $\frac{\pi a^2}{6}$

C. $\frac{\pi a^2}{3}$

D. $\frac{5\pi a^2}{6}$

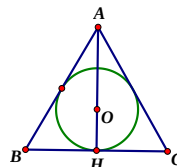
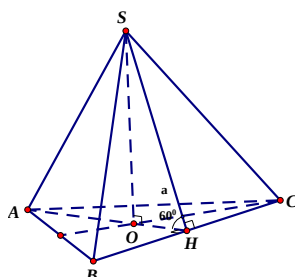
Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức

$$S_{xq} = \pi Rl$$

Với

$$R = OH = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



$$l = SH = \frac{OH}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $S_{xq} = \pi \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi a^2}{6}$. **Vậy chọn đáp án B.**

Câu 10. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa **mặt bên** và đáy bằng 60° . Thể tích khối nón nội tiếp trong hình chóp là:

A. $\frac{\pi a^3}{36}$

B. $\frac{\pi a^3}{72}$

C. $\frac{\pi a^3}{48}$

D. $\frac{\pi a^3}{24}$

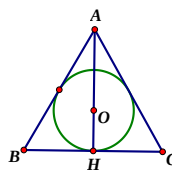
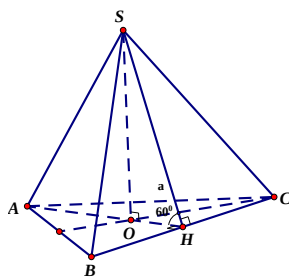
Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Với

$$R = OH = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



$$h = SO = OH \tan 60^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{72}. \text{ Vậy chọn đáp án B.}$$

Câu 11. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa **cạnh bên** và đáy bằng 60° , diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và **đáy** là hình tròn ngoại tiếp hình chóp là

A. $3\pi a^2$

B. $\frac{\pi a^2}{3}$

C. $\frac{2\pi a^2}{3}$

D. $2\pi a^2$

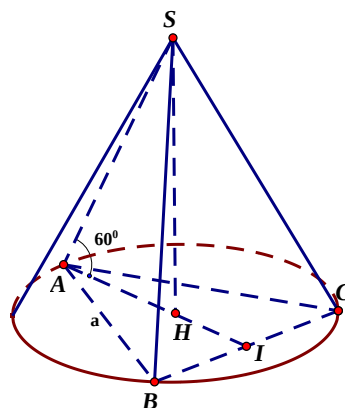
Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $S_{xq} = \pi Rl$

$$\text{Với } R = AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$l = SA = \frac{AH}{\cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi a^2}{3}$$



Vậy chọn đáp án C.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp là

A. $\pi a^2 \sqrt{2}$

B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\pi a^2}{2}$

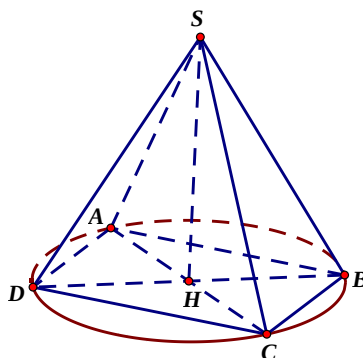
D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

Hình nón ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có đỉnh là S và đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Lúc đó:

$$R = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ và } l = SA = a$$



Vậy $S_{xq} = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$. Vậy chọn đáp án D.

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp ABCD là

A. $\frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{8}$ B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{6}$ D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{4}$

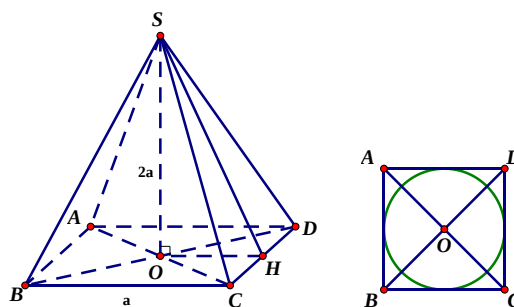
Hướng dẫn giải

Với $R = OH = \frac{a}{2}$ và

$$l = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{17a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

Vậy $S_{xq} = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{17}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{4}$

Vậy chọn đáp án D.



Câu 14. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Diện tích xung quanh của hình nón là

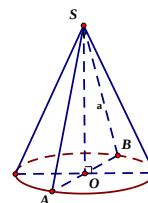
A. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$ B. $2\pi a^2$ C. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$$

Vậy chọn đáp án A



Câu 15. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh huyền $2a$. Thể tích của khối nón bằng

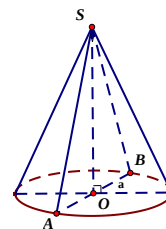
A. $\frac{\pi a^3}{3}$ B. $\frac{2\pi a^3}{3}$ C. πa^3 D. $2\pi a^3$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{3}$$

Vậy chọn đáp án A



Câu 16. Diện tích toàn phần của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến đường sinh bằng $\sqrt{3}$ và thiết diện qua trục là tam giác đều là

A. 6π

B. 12π

C. 18π

D. 16π

Hướng dẫn giải

Đặt cạnh của tam giác đều SAB là a.

Ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow a = 4$$

$$\text{Vậy } S_{tp} = \pi \cdot 2 \cdot 4 + \pi \cdot 2^2 = 12\pi.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 17. Cho hình nón có đường sinh l, góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy là 30° . Diện tích xung quanh của hình nón này là

A. $\frac{\pi\sqrt{3}l^2}{4}$

B. $\frac{\pi\sqrt{3}l^2}{2}$

C. $\frac{\pi\sqrt{3}l^2}{8}$

D. $\frac{\pi\sqrt{3}l^2}{6}$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi l \cdot \cos 30^\circ \cdot l = \frac{\pi l^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 18. Thể tích V của khối nón (N) có chiều cao bằng a và độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{5}$ là

A. $V = \frac{4}{3} \pi a^3$

B. $V = 4\pi a^3$

C. $V = \frac{5}{3} \pi a^3$

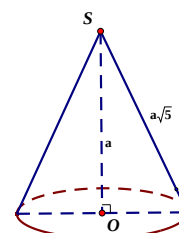
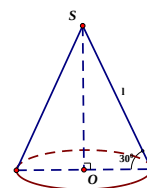
D. $V = \frac{2}{3} \pi a^3$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } R = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \pi (2a)^2 \cdot a = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 19. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60° . Diện tích của thiết diện này bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

C. $2a^2$

D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

Hướng dẫn giải

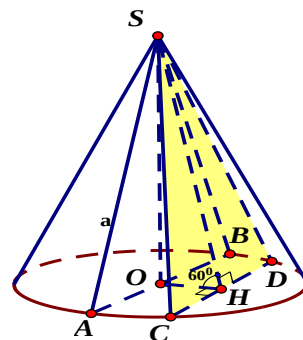
Diện tích thiết diện là $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}SH.CD$

Ta có: $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = SO$

$$SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$CD = 2CH = 2\sqrt{R^2 - OH^2} = 2\sqrt{\frac{a^2}{2} - \left(SO \cdot \tan 30^\circ\right)^2} = 2\sqrt{\frac{a^2}{2} - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

Vậy diện tích $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **Chọn đáp án B.**



Câu 20. Hình nón có đường cao 20cm, bán kính đáy 25cm. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và có khoảng cách đến tâm là 12cm. Diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình nón là

A. 450(cm²)

B. 500(cm²)

C. 600(cm²)

D. 550(cm²)

Hướng dẫn giải

Theo đề:

$h = 20, R = 25, OH = 12$

Ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2}$$

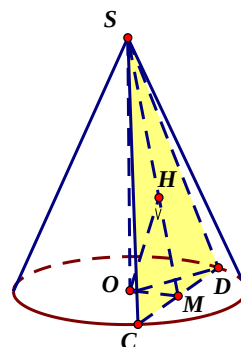
$$\Leftrightarrow \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225}$$

$\Rightarrow OM = 15$

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$$

$$CD = 2CM = 2\sqrt{R^2 - OM^2} = 2\sqrt{25^2 - 15^2} = 40$$

Vậy $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}SM.CD = \frac{1}{2}.40.25 = 500$. **Chọn đáp án B.**



Câu 21. Khối nón (N) có chiều cao bằng $3a$. Thiết diện song song và cách mặt đáy một đoạn bằng a , có diện tích bằng $\frac{64}{9}\pi a^2$. Khi đó, thể tích của khối nón (N) là

A. $48\pi a^3$

B. $\frac{25}{3}\pi a^3$

C. $16\pi a^3$

D. $\frac{16}{3}\pi a^3$

Hướng dẫn giải

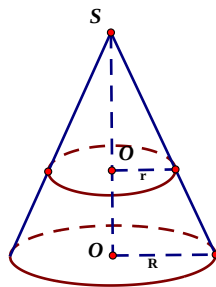
Diện tích của thiết diện

$$S = \pi r^2 = \frac{64}{9}\pi a^2 \Rightarrow r = \frac{8}{3}a$$

$$\text{Ta có: } \frac{r}{R} = \frac{2}{3} \Rightarrow R = \frac{3}{2}r = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3}a = 4a$$

Vậy thể tích khối chóp là:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 16a^2 \cdot 3a = 48a^3. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$



Câu 22. Một khối nón có thể tích bằng 4π và chiều cao là 3. Bán kính đường tròn đáy của hình nón là

A. 2

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. 1

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 4\pi \Rightarrow R^2 = \frac{12}{h} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow R = 2. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$

Câu 23. Cho khối nón có chu vi đường tròn đáy là 6π , chiều cao bằng $\sqrt{7}$. Thể tích của khối nón là

A. 12π

B. $9\pi\sqrt{7}$

C. $3\pi\sqrt{7}$

D. 36π

Hướng dẫn giải

Chu vi đường tròn đáy là: $2\pi R = 6\pi \Leftrightarrow R = 3$.

$$\text{Thể tích khối nón là: } V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot \sqrt{7} = \frac{9\sqrt{7}\pi}{3} = 3\sqrt{7}\pi. \text{ Vậy chọn đáp án C.}$$

Câu 24. Cho hình nón có diện tích xung quanh 25π , bán kính đường tròn đáy bằng 5. Độ dài đường sinh bằng

A. 5

B. 1

C. 3

D. $\frac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } S_{xq} = \pi Rl = 25\pi \Rightarrow l = \frac{25}{R} = \frac{25}{5} = 5. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$

Câu 25. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón này là

A. $3\pi\sqrt{3}$

B. $\pi\sqrt{3}$

C. 3π

D. $3\pi\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$l = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6} \text{ và } R = \sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra: } h = \sqrt{6-3} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó: } V = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} = \pi\sqrt{3}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 26. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có diện tích bằng 4. Diện tích xung quanh của hình nón là

A. 8π

B. $8\pi\sqrt{2}$

C. $2\pi\sqrt{2}$

D. $4\pi\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$S_{\Delta SPQ} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot l^2 = 4 \Leftrightarrow l = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Và } R = 2$$

$$\text{Suy ra: } S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\pi\sqrt{2}$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 27. Một khối nón có thể tích bằng 30π , nếu giữ nguyên chiều cao và tăng bán kính khối nón đó lên 2 lần thì thể tích của khối nón mới bằng

A. 60π

B. 120π

C. 40π

D. 480π

Hướng dẫn giải

Gọi $V_1 = \frac{1}{3} \pi R_1^2 h_1$ là thể tích khối nón ban đầu.

$$\text{Gọi } V_2 = \frac{1}{3} \pi R_2^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi (2R_1)^2 h_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^2 h_1$$

Như vậy $V_2 = 4V_1 = 120\pi$. Vậy chọn đáp án B.

Câu 28.

Cho hình nón có đáy là đường tròn có đường kính 10. Mặt phẳng vuông góc với trục cắt hình nón theo giao tuyến là một đường tròn như hình vẽ. Thể tích của khối nón có chiều cao bằng 6 là

A. 8π

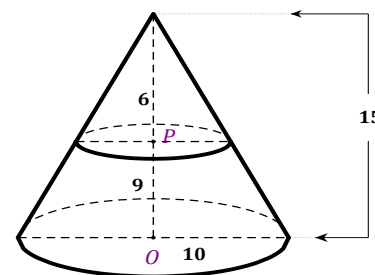
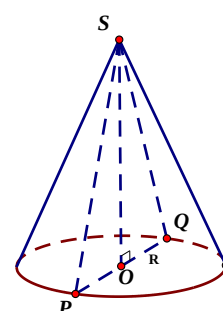
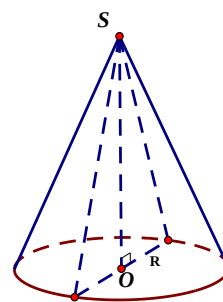
B. 24π

C. $\frac{200\pi}{9}$

D. 96π

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{r}{R} = \frac{6}{15} \Rightarrow r = \frac{6}{15} R = \frac{6}{15} \cdot 10 = 4$$



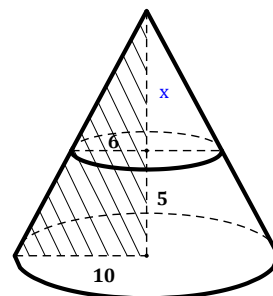
Vậy thể tích khối chóp là: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 16 \cdot 6 = 96\pi$. Vậy chọn đáp án D.

Câu 29.

Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 10, mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón cắt hình nón theo một đường tròn có bán kính bằng 6, khoảng cách giữa mặt phẳng này với mặt phẳng chứa đáy của hình nón (N) là 5.

Chiều cao của hình nón (N) là

- A. 12,5 B. 10
C. 8,5 D. 7



Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{x}{x+5} = \frac{6}{10} \Rightarrow x = 7,5$. Chiều cao của hình nón là: $7,5 + 5 = 12,5$

Vậy ta chọn đáp án A.

Câu 30. Cho hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón là

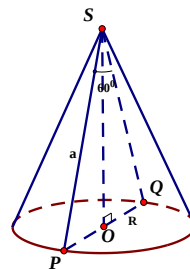
- A. $\frac{\pi a^2}{2}$ B. $\frac{3\pi a^2}{2}$ C. $\frac{5\pi a^2}{2}$ D. $\frac{\pi a^2}{3}$

Hướng dẫn giải

Vì góc ở đỉnh 60° nên thiết diện đi qua trục là tam giác đều cạnh a.

Do đó: $R = \frac{a}{2}$. Vậy $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2}{2}$.

Vậy chọn đáp án A.



Câu 31. Cho hình nón có chiều cao h và đường sinh hợp với trục một góc 45° . Diện tích xung quanh của hình nón là:

- A. $\frac{\sqrt{2}\pi h^2}{3}$ B. $\sqrt{2}\pi h^2$ C. $\frac{\sqrt{2}\pi h^2}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}\pi h^2}{3}$

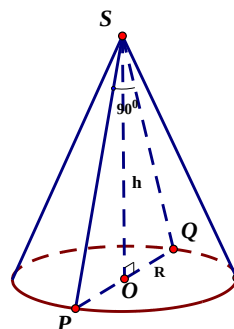
Hướng dẫn giải

Vì hình nón có chiều cao h và đường sinh hợp với trục một góc 45° nên góc ở đỉnh hình nón là 90° , nên thiết diện đi qua trục là tam giác vuông cân.

Do đó: $R = h$ và $l = h\sqrt{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi h \cdot h\sqrt{2} = \sqrt{2}\pi h^2.$$



Vậy chọn đáp án B.

Câu 32. Cho hình chóp lục giác đều $S.ABCDEF$ có cạnh bên bằng $2a$ và tạo với đáy một góc 60° . Diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp là

A. $2\pi a^2$.

B. $4\pi a^2$.

C. $6\pi a^2$.

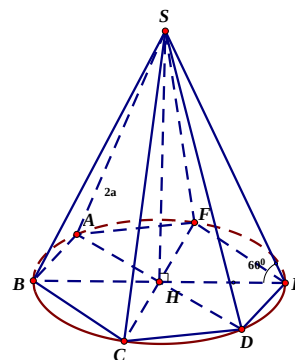
D. πa^2 .

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra mặt chéo của hình chóp là tam giác đều. Do đó hình nón ngoại tiếp hình chóp có bán kính đáy $R = HA = a$ và đường sinh $l = SA = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp là

$$S_{xq} = \pi Rl = 2\pi a^2.$$



Vậy chọn đáp án A.

Câu 33. Cho hình chóp lục giác đều $S.ABCDEF$ có cạnh bên bằng $2a$ và tạo với đáy một góc 60° . Diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp là

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{4}$

C. $\frac{\pi a^2}{4}$

D. $\frac{\pi a^2}{2}$

Hướng dẫn giải

Bán kính đáy của khối nón là $R = HI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

(Do tam giác HDE đều).

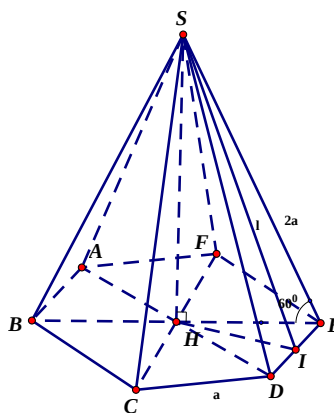
Chiều cao của hình nón

$$SH = \sqrt{SE^2 - HE^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Vậy thể tích khối nón là:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$$

Vậy chọn đáp án B.



Câu 34. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Hãy tính diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh là tâm O của hình vuông A'B'C'D' và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông ABCD. Đáp án là:

A. $\frac{\sqrt{5}\pi a^2}{2}$

B. $\frac{\pi a^2}{4}$

C. $\frac{\sqrt{5}\pi a^2}{4}$

D. $\frac{\pi a^2}{2}$

Hướng dẫn giải

Bán kính đáy hình nón là $R = \frac{a}{2}$

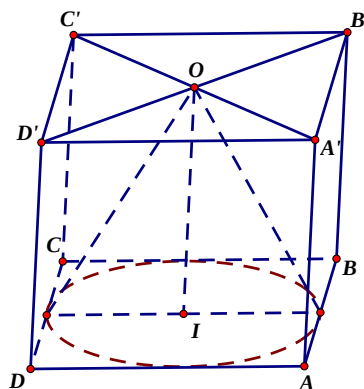
Đường sinh của hình nón là

$$l = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}\pi a^2}{4}$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 35. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\angle SAO = 30^\circ$, $\angle SAB = 60^\circ$. Diện tích xung quanh của hình nón là

A. πa^2

B. $3\pi a^2$

C. $3\pi a^2\sqrt{3}$

D. $\pi a^2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

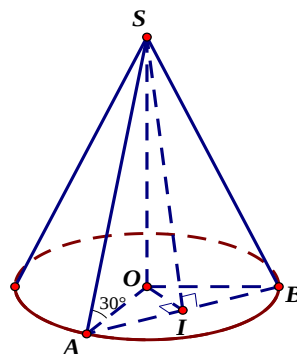
Gọi I là trung điểm của AB, ta có

$OI \perp AB$, $SI \perp AB$, $OI = a$,

$$AO = SA \cdot \cos \angle SAO = SA \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} SA$$

$$\text{và } AI = SA \cdot \cos \angle SAI = SA \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} SA.$$

$$\Rightarrow \frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



$$\text{Mà } \frac{AI}{AO} = \cos \angle IAO \Rightarrow \cos \angle IAO = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \angle IAO = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{OI}{OA} = \frac{a}{OA}.$$

$$\text{Vậy } OA = \frac{3a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } SAO, \text{ ta có: } SA = \frac{OA}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = a\sqrt{2}$$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón đã cho là: $S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{3}$.

Vậy chọn đáp án D.

CHỦ ĐỀ 5. MẶT TRỤ - HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

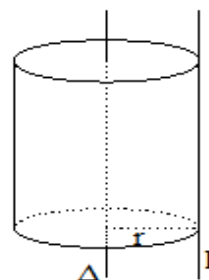
I. Mặt trụ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1: Mặt trụ là hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi xoay quanh đường thẳng Δ song song và cách l một khoảng R . Lúc đó, Δ được gọi là trục, R gọi là bán kính, l gọi là đường sinh.

Định nghĩa 2: Mặt trụ là tập hợp tất cả những điểm cách đường thẳng Δ cố định một khoảng R không đổi.

Đường thẳng Δ được gọi là trục của mặt trụ, R được gọi là bán kính của mặt trụ.

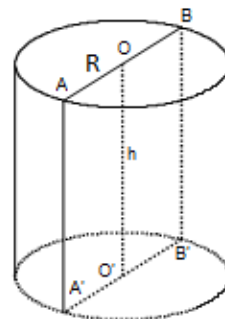


2. Tính chất

II. Hình trụ

Hình trụ là hình giới hạn bởi mặt trụ và hai đường tròn bằng nhau, là giao tuyến của mặt trụ và 2 mặt phẳng vuông góc với trục.

Hình trụ là hình tròn xoay khi sinh bởi bốn cạnh của hình một hình chữ nhật khi quay xung quanh một đường trung bình của hình chữ nhật đó.



Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi.R.l$

Diện tích toàn phần hình trụ: $S_{tp} = 2\pi.R.l + 2\pi.R^2$

III. Khối trụ

Khối trụ là hình trụ cùng với phần bên trong của hình trụ đó.

Thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính R và đường cao h là: $V = \pi R^2.h$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gọi l , h , R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ.

Đẳng thức luôn đúng là:

A. $l = h$

B. $R = h$

C. $l^2 = h^2 + R^2$

D. $R^2 = h^2 + l^2$

Hướng dẫn giải

Rõ ràng $l = h$. Như vậy ta chọn đáp án A.

Câu 2. Gọi l , h , R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ

(T). Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ (T) là

A. $S_{xq} = \pi R^2 h$

B. $S_{xq} = \pi R h$

C. $S_{xq} = \pi R l$

D. $S_{xq} = 2\pi R l$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $S_{xq} = 2\pi R l$. Vậy chọn đáp án D.

Câu 3. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần S_p của hình trụ (T) là

- A. $S_p = \pi Rl + \pi R^2$ B. $S_p = 2\pi Rl + 2\pi R^2$ C. $S_p = \pi Rl + 2\pi R^2$ D. $S_p = \pi Rh + \pi R^2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $S_{tp} = S_{xq} + S_{2d}$ hay $S_p = 2\pi Rl + 2\pi R^2$. Vậy chọn đáp án B

Câu 4. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của khối trụ (T). Thể tích V của khối trụ (T) là

- A. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 l$ B. $V = 4\pi R^3$ C. $V = \pi R^2 h$ D. $V = \frac{4}{3}\pi R^2 h$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $V = Bh = \pi R^2 h$. Vậy chọn đáp án C.

Câu 5. Cho hình trụ có bán kính đáy 5 cm chiều cao 4 cm . Diện tích toàn phần của hình trụ này là:

- A. $90\pi(\text{cm}^2)$ B. $92\pi(\text{cm}^2)$ C. $94\pi(\text{cm}^2)$ D. $96\pi(\text{cm}^2)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $R = 5, h = 4$. Áp dụng công thức $S_p = 2\pi Rl + 2\pi R^2$

$S = 2\pi \cdot 5 \cdot 4 + 2\pi \cdot 5^2 = 90\pi$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 6. Cho hình trụ có bán kính đáy 3 cm , đường cao 4 cm . Diện tích xung quanh của hình trụ này là

- A. $24\pi(\text{cm}^2)$ B. $22\pi(\text{cm}^2)$ C. $20\pi(\text{cm}^2)$ D. $26\pi(\text{cm}^2)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $R = 3, h = 4$. Áp dụng công thức $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 7. Một hình trụ có bán kính đáy 6 cm , chiều cao 10 cm . Thể tích của khối trụ này là

- A. $320\pi(\text{cm}^3)$ B. $360\pi(\text{cm}^3)$ C. $340\pi(\text{cm}^3)$ D. $300\pi(\text{cm}^3)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $R = 6, h = 10$. Áp dụng công thức $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 10 = 360\pi$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 8. Thể tích V của khối trụ có chiều cao bằng a và đường kính đáy bằng $a\sqrt{2}$ là

- A. $V = \frac{1}{2}\pi a^3$ B. $V = \frac{1}{3}\pi a^3$ C. $2\pi a^3$ D. $V = \frac{1}{6}\pi a^3$

Hướng dẫn giải

Ta có: $d = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $h = a$.

Áp dụng công thức $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{2}$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 9. Hình trụ (T) được sinh ra khi quay hình chữ nhật ABCD quanh cạnh AB. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và $\angle ACB = 45^\circ$. Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ (T) là

- A. $S_{tp} = 4\pi a^2$ B. $S_{tp} = 10\pi a^2$ C. $S_{tp} = 12\pi a^2$ D. $S_{tp} = 8\pi a^2$

Hướng dẫn giải

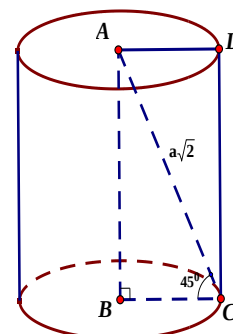
$S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$. Như vậy ta cần tìm bán kính và độ dài đường sinh.

Tam giác ABC vuông cân tại B $\Rightarrow BC = a$ và $AB = a$.

Như vậy:

$$S_{tp} = 2\pi a \cdot a + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 10. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\frac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\frac{R}{2}$. Diện tích thiết diện của hình trụ với $mp(\alpha)$ là:

- A. $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3R^2\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{2R^2\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải

Theo đề ta có $h = \frac{3R}{2}$; $OH = \frac{R}{2}$

Diện diện là hình chữ nhật ABCD

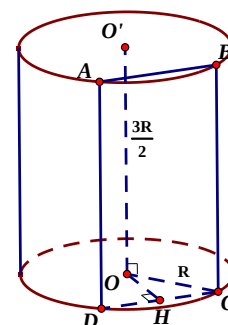
$$S_{ABCD} = DC \cdot AB = 2HC \cdot AB = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 11. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a$. Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a\sqrt{3}$. Thể tích của hình trụ ngoại tiếp khối lăng trụ này là:

- A. $6\pi a^3$ B. $4\pi a^3$ C. $2\pi a^3$ D. $8\pi a^3$

Hướng dẫn giải

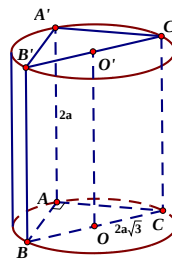


Ta có: $R = a\sqrt{3}$ và $h = 2a$.

Áp dụng công thức

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot (a\sqrt{3})^2 \cdot 2a = 6\pi a^3.$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 12. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , mặt bên là các hình vuông. Diện tích toàn phần của hình trụ ngoại tiếp khối lăng trụ là

A. $4\pi a^2$

B. $\frac{2\pi a^2}{3}(\sqrt{3}+1)$

C. $2\pi a^2$

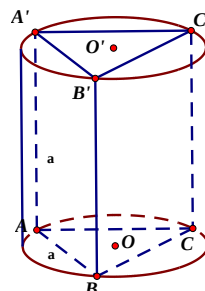
D. $\frac{3\pi a^2}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $R = AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a + 2\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

$$= \frac{2(1+\sqrt{3})\pi a^2}{3}$$



Vậy chọn đáp án B.

Câu 13. Cho hình chữ nhật ABCD có cạnh $AB = 2a$, $AD = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Quay hình chữ nhật ABCD quanh trục MN ta được khối trụ tròn xoay. Thể tích khối trụ là:

A. $4\pi a^3$

B. $2\pi a^3$

C. πa^3

D. $3\pi a^3$

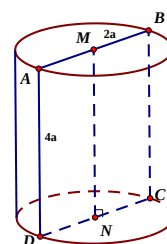
Hướng dẫn giải

Ta có: $R = a$ và $h = 4a$.

Áp dụng công thức

$$V = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot 4a = 4\pi a^3.$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 14. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Diện tích toàn phần của khối trụ là:

A. $a^2\pi\sqrt{3}$

B. $27\pi a^2$

C. $\frac{a^2\pi\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{13a^2\pi}{6}$

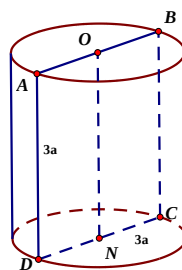
Hướng dẫn giải

Ta có: $R = \frac{3a}{2}$ và $l = 3a$.

Áp dụng công thức

$$S_{tp} = 2\pi \cdot \frac{3a}{2} \cdot 3a + 2\pi \cdot (3a)^2 = 27\pi a^2.$$

Vậy chọn đáp án B.



Câu 15. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật ABCD có AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ. Biết $AB = 4a$, $AC = 5a$. Thể tích của khối trụ là:

A. $16\pi a^3$

B. $8\pi a^3$

C. $4\pi a^3$

D. $12\pi a^3$

Hướng dẫn giải

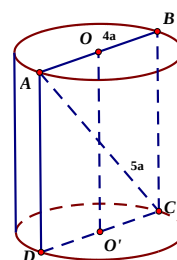
Ta có:

$$AB = 4a, AC = 5a \Rightarrow BC = 3a = h \text{ và } R = 2a$$

Áp dụng công thức

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 4a^2 \cdot 3a = 12\pi a^3.$$

Vậy chọn đáp án D.



Câu 16. Cho một khối trụ có chiều cao bằng 8cm, bán kính đường tròn đáy bằng 6cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 4cm. Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

A. $16\sqrt{5}\text{cm}$

B. $32\sqrt{3}\text{cm}$

C. $32\sqrt{5}\text{cm}$

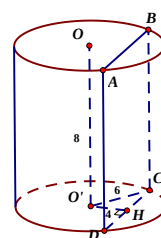
D. $16\sqrt{3}\text{cm}$

Hướng dẫn giải

Diện tích thiết diện

$$S_{ABCD} = BC \cdot CD = BC \cdot 2CH = 8 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{5} = 32\sqrt{5}.$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 17. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật ABCD có AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ. Biết $AD = 12$ và góc ACD bằng 60° . Thể tích của khối trụ là:

A. 1296

B.

C. 24π

D. 112π

Hướng dẫn giải

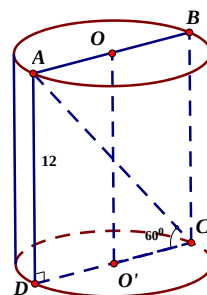
Áp dụng công thức $V = \pi R^2 h$

Với

$$h = 12 \quad R = \frac{CD}{2} = \frac{AD \tan 30^\circ}{2} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V = \pi (6\sqrt{3})^2 \cdot 12 = 1296$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 19. Cho một khối trụ có bán kính đường tròn đáy bằng 6. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục ta được thiết diện là hình chữ nhật ABCD có A, B thuộc cùng một đáy của khối trụ. Biết $AB = 10$. Khoảng cách từ trục của khối trụ đến thiết diện được tạo thành là:

A. $\sqrt{15}$

B. $\sqrt{11}$

C. $2\sqrt{5}$

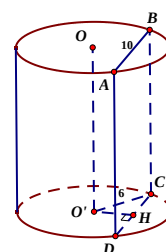
D. $\sqrt{41}$

Hướng dẫn giải

Khoảng cách từ trục đến mặt phẳng thiết diện là

$$OH = \sqrt{R^2 - CH^2} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

Vậy chọn đáp án B.



Câu 20. Cho một khối trụ có khoảng cách giữa hai đáy bằng 10, biết diện tích xung quanh của khối trụ bằng 80π . Thể tích của khối trụ là:

A. 160π

B. 164π

C. 64π

D. 144π

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$h = 10 = l; S_{xq} = 2\pi Rl = 80\pi \Rightarrow R = 4$$

$$\text{Áp dụng công thức } V = \pi R^2 h = \pi \cdot 16 \cdot 10 = 160$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 21. Cho một khối trụ có độ dài đường sinh bằng 10, biết thể tích của khối trụ bằng 90π . Diện tích xung quanh của khối trụ là:

A. 81π

B. 60π

C. 78π

D. 36π

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } l = 10 = h \quad \text{và} \quad V = \pi R^2 h \Leftrightarrow 90\pi = \pi R^2 \cdot 10 \Rightarrow R = 3.$$

$$\text{Áp dụng công thức } S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi \cdot 3 \cdot 10 = 60$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 22. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2AD = 2$. Quay quanh hình chữ nhật ABCD lần lượt quanh AD và AB ta được 2 hình trụ tròn xoay có thể tích V_1, V_2 . Hệ thức nào sau đây đúng

A. $V_1 = V_2$

B. $V_2 = 2V_1$

C. $V_1 = 2V_2$

D. $2V_1 = 3V_2$

Hướng dẫn giải

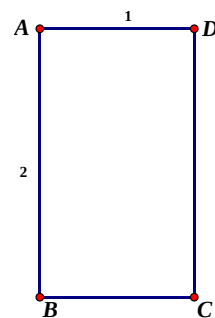
- Quay hình chữ nhật quanh AD thì ta được hình trụ có bán kính $R_1 = AB = 2, h_1 = 1$

$$\Rightarrow V_1 = \pi R_1^2 h_1 = 4\pi$$

- Quay hình chữ nhật quanh AB thì ta được hình trụ có bán kính $R_2 = BC = 1, h_2 = 2$

$$\Rightarrow V_2 = \pi R_2^2 h_2 = \pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 23. Cho hình trụ tam giác đều, có tất cả các cạnh bằng a. Xét hình trụ tròn xoay ngoại tiếp hình trụ đó. Xét hai mệnh đề sau:

I) Thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông

II) Thể tích hình trụ là $V = \frac{\pi a^3}{3}$.

Hãy chọn câu đúng

A. Chỉ I)

B. Chỉ (II)

C. Cả 2 câu sai

D. Cả 2 câu đều đúng

Hướng dẫn giải

Xét đáy của hình trụ là đường tròn có bán

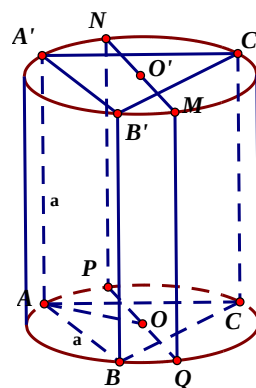
$$\text{kính } R = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow PQ = \frac{2a}{\sqrt{3}}, NP = a$$

Như vậy thiết diện qua trục là hình chữ nhật MNPQ.

Suy ra: Mệnh đề I) đúng.

$$\text{Mặt khác: } V_{\text{trụ}} = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{a^2}{3} \cdot a = \frac{\pi a^3}{3}$$

Vậy chọn đáp án B.



Câu 24. Một hình trụ tròn xoay, bán kính đáy bằng R, trục $OO' = \frac{R\sqrt{6}}{2}$. Một đoạn thẳng

$AB = R\sqrt{2}$ với $A \in (O), B \in (O')$. Góc giữa AB và trục hình trụ là:

A. 30°

B. 45°

C. 60°

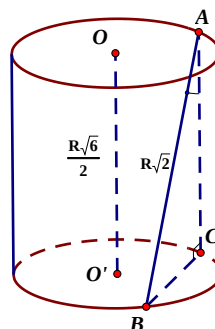
D. 75°

Hướng dẫn giải

Góc giữa AB và trục hình trụ BAC

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{R\sqrt{6}}{2}}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 25. Một hình trụ tròn xoay bán kính $R = 1$. Trên 2 đường tròn (O) và (O') lấy điểm A

và B sao cho $AB = 2$ và góc giữa AB và trục OO' bằng 30° . Xét hai mệnh đề sau:

I) Thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông

II) Thể tích hình trụ là $V = \pi a^3$.

Hãy chọn câu đúng

A. Chỉ I)

B. Chỉ II)

C. Cả 2 câu sai

D. Cả 2 câu đều đúng

Câu 26. Cho $ABB'A'$ là thiết diện song song với trục OO' của hình trụ (A,B thuộc đường tròn tâm O). Cho biết $AB = 4, AA' = 3$ và thể tích của hình trụ bằng 24π . Khoảng cách d từ O đến mặt phẳng là:

A. $d = \sqrt{3}$

B. $d = \sqrt{2}$

C. $d = 2$

D. $d = 5\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Khoảng cách d từ O đến mặt phẳng thiết diện là OH.

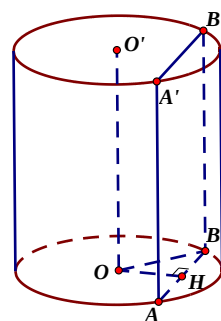
Ta có: $h = AA' = 3$

Áp dụng công thức

$$V = \pi R^2 h = 24\pi \Rightarrow R^2 = 8 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

Lúc đó: $OH = \sqrt{8 - 4} = 2$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 27. Thiết diện qua trục của hình trụ (T) là một hình vuông có cạnh bằng a. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ (T) là

A. $S_{xq} = \pi a^2$

B. $S_{xq} = \frac{1}{2} \pi a^2$

C. $S_{xq} = 2\pi a^2$

D. $S_{xq} = a^2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $R = \frac{a}{2}$ và $l = a$. Nên $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \pi a^2$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 28. Một hình trụ (T) có diện tích xung quanh bằng 4π và thiết diện qua trục của hình trụ này là một hình vuông. Diện tích toàn phần của (T) là

- A. 6π B. 12π C. 10π D. 8π

Hướng dẫn giải

Gọi a là cạnh của hình vuông. Lúc đó: $R = \frac{a}{2}, l = a$

Áp dụng công thức $S_{xq} = 4\pi \Leftrightarrow 2\pi Rl = 4\pi \Leftrightarrow \frac{a}{2} \cdot a = 2 \Leftrightarrow a = 2$

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 4\pi + 2\pi = 6\pi$. **Vậy chọn đáp án A.**

Câu 29. Một hình trụ có bán kính 5cm và chiều cao 7cm . Cắt khối trụ bằng một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm . Diện tích thiết diện tạo bởi khối trụ và mặt phẳng bằng

- A. 56cm^2 B. 54cm^2 C. 52cm^2 D. 58cm^2

Hướng dẫn giải

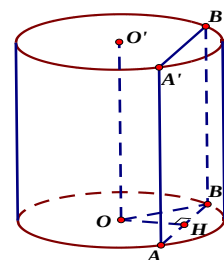
Ta có: $OH = 3, h = 7 = AA'$ và $R = 5$

Thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$

Lúc đó:

$$S_{ABB'A'} = AB \times AA' = 2HB \cdot AA' = 2 \cdot \sqrt{5^2 - 3^2} \cdot 7 = 2 \cdot 4 \cdot 7 = 56$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 30. Một hình trụ có chu vi của đường tròn đáy $4\pi a$, chiều cao a . Thể tích của khối trụ này bằng

- A. $4\pi a^3$ B. $2\pi a^3$ C. $16\pi a^3$ D. $\frac{4}{3}\pi a^3$

Hướng dẫn giải

Ta có $2\pi R = 4\pi a \Leftrightarrow R = 2a$. Áp dụng công thức $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 4a^2 \cdot a = 4\pi a^3$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 31. Hình trụ có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}$ và thể tích bằng 24π . Chiều cao hình trụ này bằng

- A. 2 B. 6 C. $2\sqrt{3}$ D. 1

Hướng dẫn giải

Ta có: $V = \pi R^2 h \Leftrightarrow \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 h = 24\pi \Rightarrow h = 2$. **Vậy chọn đáp án A.**

Câu 32. Một hình trụ có chu vi của đường tròn đáy là c , chiều cao của hình trụ gấp 4 lần chu vi đáy. Thể tích của khối trụ này là

- A. $\frac{c^3}{\pi}$ B. $\frac{2c^3}{\pi}$ C. $4\pi c^3$ D. $\frac{2c^2}{\pi^2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $c = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{c}{2\pi}$, $h = 4c$.

Áp dụng công thức $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{c^2}{4\pi^2} \cdot 4c = \frac{c^3}{\pi}$. Vậy chọn đáp án A

Câu 33. Một khối trụ có thể tích là 20. Nếu tăng bán kính lên 2 lần thì thể tích của khối trụ mới là

A. 80

D. 40

C. 60

D. 120

Hướng dẫn giải

Gọi V_1 là thể tích khối trụ ban đầu. Ta có $V_1 = \pi R_1^2 h_1$

Gọi V_2 là thể tích khối trụ lúc sau. Ta có $V_2 = \pi (2R_1)^2 h_1 = 4\pi R_1^2 h_1$

Như vậy thể tích sẽ tăng lên 4 lần. Do đó, vậy chọn đáp án A.

Câu 34. Một hình trụ có đường kính của đáy bằng với chiều cao của nó. Nếu thể tích của khối trụ bằng 2π thì chiều cao của hình trụ là

A. 2

D. $\sqrt[3]{24}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt[3]{4}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h = 2\pi \Leftrightarrow h^3 = 8 \Rightarrow h = 2$. Vậy chọn đáp án A

Câu 35. Cho hình trụ có trục O_1O_2 . Một mặt phẳng (α) song song với trục O_1O_2 , cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật ABCD. Gọi O là tâm của thiết diện đó, bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD bằng bán kính đường tròn đáy hình trụ. Góc O_1OO_2 bằng

A. 30°

D. 60°

C. 45°

D. 90°

Hướng dẫn giải

ABCD là hình chữ nhật có tâm O $\Rightarrow$ O là trung điểm của AC.

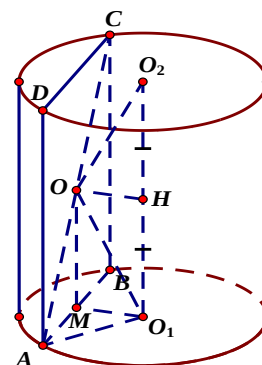
Gọi M là trung điểm của AB, ta có $O_1M \perp AB$, $OM \perp AB$ và theo giả thiết $AO = AO_1$.

$\Rightarrow$ Hai tam giác vuông MAO và MAO₁ có MA chung, $OA = O_1A$ nên chúng bằng nhau.

$\Rightarrow OM = O_1M$ (1)

Ta có $OM \parallel BC \Rightarrow OM \perp (O_1AB) \Rightarrow$ Tam giác OMO₁ vuông tại M (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tam giác OMO₁ vuông cân tại M



$$\Rightarrow \angle OO_1M = 45^\circ \Rightarrow \angle OO_1O_2 = 45^\circ \quad (3)$$

Gọi H là trung điểm của OO_1 , ta có $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1H}$

$$\Rightarrow OMO_1H \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow OH \perp OO_1 \Rightarrow \text{Tam giác } OO_1O_2 \text{ cân tại } O \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ Tam giác OO_1O_2 vuông cân tại O $\Rightarrow \angle OO_1O_2 = 90^\circ$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 36. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính r và chiều cao $h = r\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O' sao cho OA vuông góc với O'B. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với OO'. Khoảng cách giữa trục OO' và (α) là

A. $\frac{r\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{r\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{r\sqrt{2}}{4}$

D. $r\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Vì trục OO' vuông góc với hai đáy nên $OO' \perp OA$ và $OO' \perp O'B$.

Vậy tam giác AOO' vuông tại O và BO'O vuông tại O'.

Theo giả thiết ta có $AO \perp O'B$ mà $AO \perp OO'$

$$\Rightarrow AO \perp (OO'B)$$

$$\Rightarrow AO \perp OB$$

$$\Rightarrow \text{Tam giác } AOB \text{ vuông tại } O.$$

Tương tự, tam giác AO'B vuông tại O'.

$$\text{Ta có } BB' \parallel OO' \Rightarrow (ABB') \parallel OO'$$

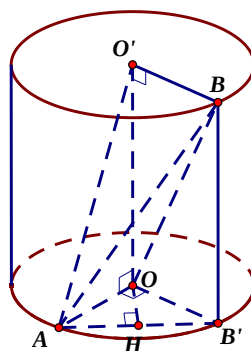
$$\text{Vậy mp}(\alpha) \text{ chính là mặt phẳng } (ABB') \text{ và } d(OO', (\alpha)) = d(O, (\alpha))$$

$$(\text{vì } OO' \parallel (\alpha)). \text{ Gọi H là trung điểm của } AB', \text{ ta có } \begin{cases} OH \perp AB' \\ OH \perp BB' \end{cases}$$

$$\Rightarrow OH \perp (ABB') \equiv (\alpha) \Rightarrow OH = d(O, (\alpha)) = d(OO', (\alpha))$$

$$\text{Tam giác } AOB' \text{ vuông cân tại } O \text{ và } OA = OB' = r \text{ nên } OH = \frac{1}{2}AB' = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } d(OO', (\alpha)) = \frac{r\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$



Câu 37. Cho hình trụ T có bán kính R và chiều cao cũng bằng R. Một hình vuông ABCD có hai cạnh AB và CD lần lượt là hai dây cung của hai đường tròn đáy, cạnh AD và BC không phải là đường sinh của hình trụ T. Độ dài cạnh của hình vuông đó theo R là

A. $\frac{R\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{R\sqrt{5}}{2}$

C. $R\sqrt{\frac{5}{2}}$

D. $\frac{R}{5}$

Hướng dẫn giải

Vẽ hai đường sinh CC' và DD' của hình trụ, ta có: $D'C' // DC$ và $D'C' = DC$

ABCD là hình vuông nên $AB // DC$ và $AB = DC$

$\Rightarrow AB // D'C'$ và $AB = D'C'$

$\Rightarrow ABC'D'$ là hình bình hành.

Mà $ABC'D'$ nội tiếp đường tròn (O) nên $ABC'D'$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow AC'$ là đường kính của (O)

$\Rightarrow AC' = 2R$

Gọi a là cạnh của hình vuông ABCD, ta có $AC = a\sqrt{2}$

Tam giác ACC' vuông tại $C' \Rightarrow AC^2 = AC'^2 + CC'^2$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = 4R^2 + R^2 = 5R^2 \Leftrightarrow a = R\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Vậy chọn đáp án C

Câu 38. Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm , trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$.

A. $\frac{a^3}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

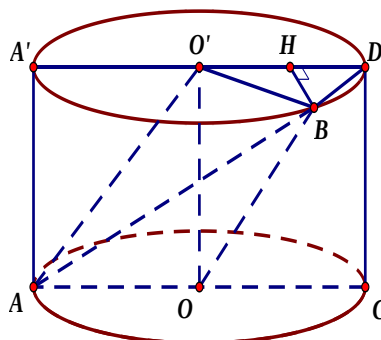
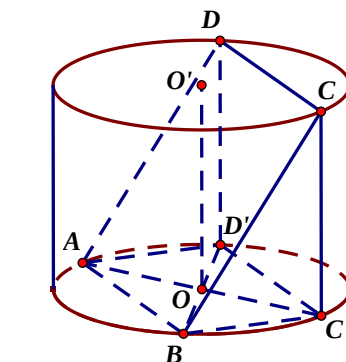
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn giải

Vẽ đường sinh AA' và gọi D là điểm đối xứng của A' qua O', H là hình chiếu vuông góc của B trên $A'D$, ta có $BH \perp AO$ (vì $BH \perp A'D // AO$) và $BH \perp OO' \Rightarrow BH \perp (OO'A) \Rightarrow BH$ là đường cao của khối chóp $B.AOO'$

$$\text{Vậy } V_{OO'AB} = V_{B.AOO'} = \frac{1}{3}BH.S_{\Delta AOO'}$$



Tam giác AA'B vuông ở A' nên

$$A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

Tam giác A'BD vuông ở B nên

$$BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$$

$$\Rightarrow BD = O'D = O'B = a \Rightarrow \text{Tam giác BO'D là tam giác đều cạnh } a \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy thể tích khối tứ diện OO'AB là:

$$V_{OO'AB} = \frac{1}{3}BH.S_{\Delta AOO'} = \frac{1}{3}BH \cdot \frac{1}{2}OA.OO' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 39. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông ABCD cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng (ABCD) tạo với đáy hình trụ góc 45° . Thể tích của khối trụ là

A. $\frac{\pi a^3}{16}$

D. $\frac{3\pi a^3}{16}$

C. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{16}$

D. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$

Hướng dẫn giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

Khi đó $OM \perp AB$ và $O'N \perp CD$.

Giả sử I là giao điểm của MN và OO'.

Đặt $R = OA$ và $h = OO'$. Khi đó ΔIOM vuông cân tại O nên:

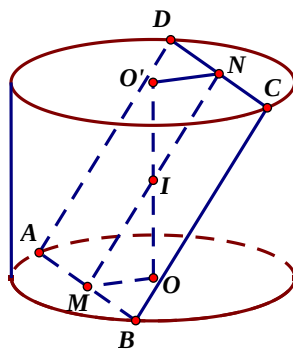
$$OM = OI = \frac{\sqrt{2}}{2}IM \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Ta có:

$$R^2 = OA^2 = AM^2 + MO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$$

$$\Rightarrow V = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{3a^2}{8} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16} \text{ (đvtt)}$$

Vậy chọn đáp án D.



CHỦ ĐỀ 6. MẶT CẦU - HÌNH CẦU VÀ KHỐI CẦU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC KHÁI NIỆM

Kí hiệu : $S(O;R)$ là mặt cầu S tâm O , bán kính R .

1. Định nghĩa mặt cầu: $S(O,R) = \{M \mid OM = R\}$

2. Các thuật ngữ:

- Bán kính: $A \in S(O;R) \Rightarrow OA$ là một bán kính của mặt cầu.
- Đường kính: $A, B \in S(O;R)$ và O, A, B thẳng hàng $\Rightarrow$ đoạn thẳng AB là một đường kính của mặt cầu.
- Điểm trong: Nếu $OE < R \Rightarrow E$ là điểm trong của mặt cầu.
- Điểm ngoài: Nếu $OF > R \Rightarrow F$ là điểm ngoài của mặt cầu.
- Mặt phẳng qua tâm mặt cầu gọi là **mặt kính**. Giao tuyến của mặt cầu và mặt kính là đường tròn $C(O,R)$ - gọi là **đường tròn lớn**.
- Khối cầu $S(O;R)$ hoặc hình cầu $S(O,R)$ là tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O,R)$ và các điểm nằm trong mặt cầu đó.

Ta có thể định nghĩa : Khối cầu $S(O,R) = \{M \mid OM \leq R\}$

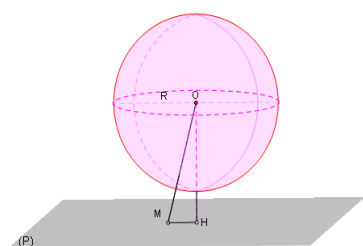
3. Yếu tố xác định mặt cầu: Biết tâm và bán kính hoặc biết một đường kính của mặt cầu.

Chú ý: Mặt cầu đường kính AB : $S(AB) = \{M \mid \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$

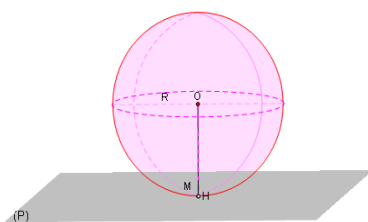
II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

Kí hiệu: $d(O, (P)) = OH$ là khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (P) .

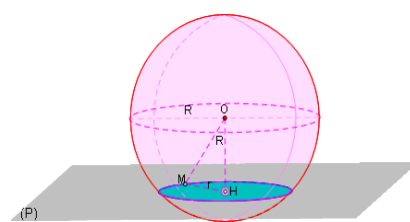
$C(H, r)$ là đường tròn (C) tâm H bán kính r .



$OH > R \Rightarrow$ mặt phẳng không cắt mặt cầu



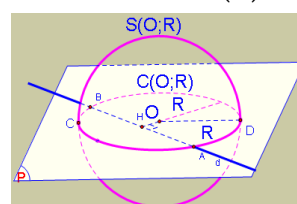
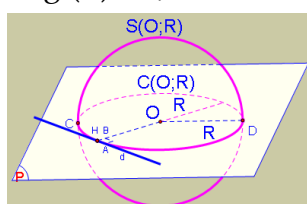
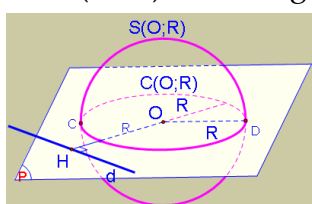
$OH = R \Rightarrow$ mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu



$OH < R \Rightarrow$ mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn tâm H bán kính $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

1. Xét mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng (Δ) . Gọi H là hình chiếu của O lên (Δ) và $d = OH$.



$d > R \Rightarrow d$ không cắt mặt cầu
 $d = R \Rightarrow d$ tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm
 $d < R \Rightarrow d$ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt

Chú ý:

- Đường thẳng (d) tiếp xúc với $S(O;R)$ tại $H \Leftrightarrow (d) \perp OH$.
- Có vô số đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H và các đường thẳng này nằm trên tiếp diện của mặt cầu tại H .

2. **Định lí:** Nếu A là điểm ngoài của mặt cầu thì qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu. Khi đó:

- Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm là bằng nhau.
- Tập hợp các tiếp điểm này là một đường tròn.

IV. CÔNG THỨC

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$
 - Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
- (R là bán kính mặt cầu)

V. MỘT SỐ ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Điều kiện để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là **đa giác đáy nội tiếp** được trong đường tròn.
- **Hình lăng trụ đứng** có đáy nội tiếp được trong đường tròn thì có mặt cầu ngoại tiếp nó.
- Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên.

VI. MỘT SỐ DẠNG MẶT CẦU NGOẠI TIẾP THƯỜNG GẶP

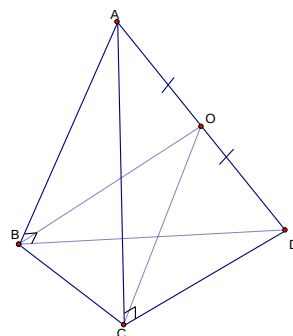
DẠNG 1. Hình chóp có các đỉnh nhìn hai đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông

Phương pháp

Chẳng hạn cho tứ diện $ABCD$ có $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$.

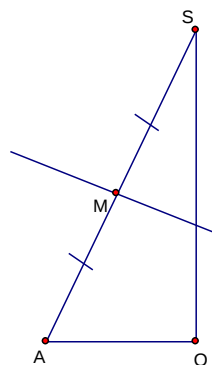
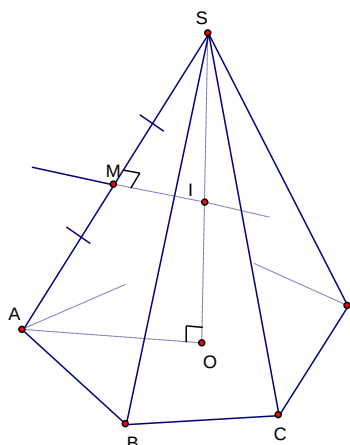
Lúc đó mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ có:

Tâm O (O là trung điểm của AD) và bán kính $R = \frac{AD}{2}$. Thật vậy, hai tam giác vuông ABD và ACD có chung cạnh huyền AD . Nên $OA = OB = OC = OD = \frac{AD}{2}$.



DẠNG 2. Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau

Phương pháp



Hình chóp $S.ABC\dots$ có các cạnh bên bằng nhau ($SA = SB = SC = \dots$)

- Vẽ $SO \perp (ABC\dots)$, SO là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- Trong mặt phẳng (SOA) , đường trung trực của SA cắt SO tại I
 $\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC\dots$
- Bán kính của mặt cầu nói trên là $R = IA = IS$ và ta có:

$$SA \cdot SM = SO \cdot SI \text{ (Hai tam giác } SAO \text{ và } SIM \text{ đồng dạng), do đó: } R = SI = \frac{SM \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO}$$

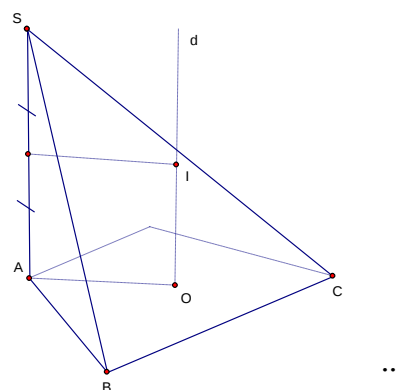
DẠNG 3. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Phương pháp

Hình chóp $S.ABC\dots$ có

- * Một cạnh bên vuông góc với đáy, chẳng hạn
 $SA \perp (ABC)$
- * $ABC\dots$ nội tiếp đường tròn(O)

- Vẽ trục đường tròn ngoại tiếp $ABC\dots$
đó là đường thẳng d qua O và vuông góc với (ABC) .
- Trong (d, SA) , đường trung trực của SA cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC\dots$
- Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{AO^2 + OI^2} = \sqrt{AO^2 + \frac{SA^2}{4}}$

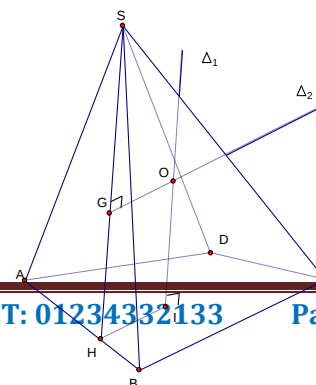


DẠNG 4. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy

Phương pháp

Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có một mặt bên vuông góc với mặt đáy(Giả sử là $(SAB) \perp (ABCD)$) ta thực hiện như sau:

- Dựng trục Δ_1 của đường tròn nội tiếp ΔSAB
- Dựng trục Δ_2 của đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$



- Ta có Δ_1 và Δ_2 cùng thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB
- $\Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 = O$, O là tâm mặt cầu ngoại tiếp.
- Trong cách dựng ta có ΔSGO vuông tại G và $R = OS$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA = 2a và vuông góc với (ABCD). Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABCD là:

- A. $\pi a^3 \sqrt{6}$ B. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{6}}$ C. $\frac{4\sqrt{6}}{3} \pi a^3$ D. $\frac{3}{4} \frac{\pi a^3}{\sqrt{6}}$

Hướng dẫn giải

Gọi O là trung điểm SC.

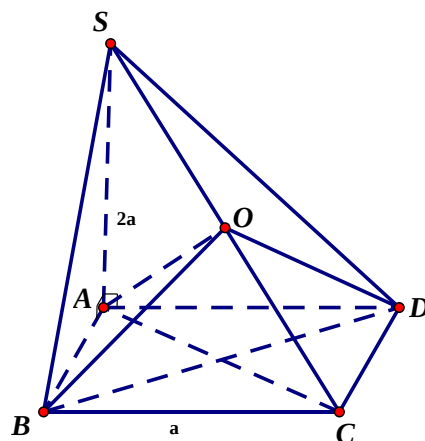
Các $\Delta SAC, \Delta SCD, \Delta SBC$ lần lượt vuông tại A, D, B.

Ta có:

$$R = \frac{SC}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Suy ra: } V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{2} \right)^3 = \pi a^3 \sqrt{6}.$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 2. Cho tứ diện ABCD có DA = 5a và vuông góc với (ABC), ΔABC vuông tại B và AB = 3a, BC = 4a. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

- A. $36\pi a^2$ B. $25\pi a^2$ C. $50\pi a^2$ D. $100\pi a^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là trung điểm của CD.

ΔDAC vuông tại A

$$\Rightarrow OA = OC = OD = \frac{1}{2} CD \quad (1)$$

$$\Delta DBC \text{ vuông tại B} \Rightarrow OB = \frac{1}{2} CD \quad (2)$$

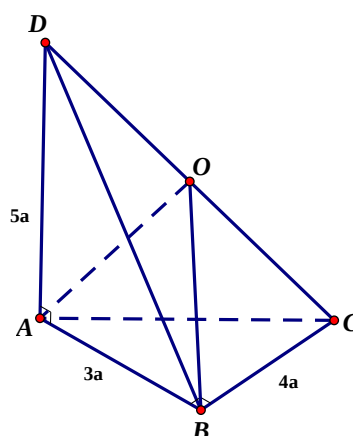
Từ (1) và (2) ta được :

$$OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2} CD$$

$$\Leftrightarrow A, B, C, D \text{ thuộc mặt cầu } S(O; \frac{CD}{2})$$

Ta có

$$R = \frac{CD}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{AD^2 + AC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{AD^2 + AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{25a^2 + 9a^2 + 16a^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}.$$



Từ đó: $S = 4\pi \left(\frac{5a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 50\pi a^2$. Vậy chọn đáp án C

Câu 3. Cho hình chóp S.ABC có $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = a\sqrt{2}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là

A. $2a$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $2a\sqrt{2}$

D. $a\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm SC

$SA \perp AC$ nên A thuộc mặt cầu đường kính SC

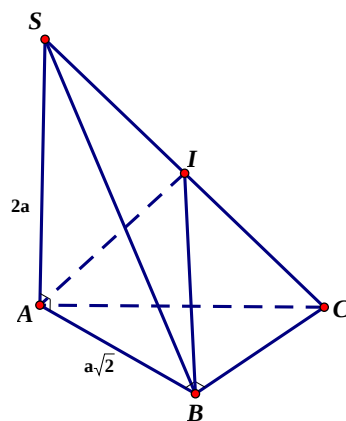
$BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp SB \Rightarrow B$ thuộc mặt cầu đường kính SC. Như vậy tâm mặt cầu là trung điểm I của SC còn bán kính mặt cầu là $R = \frac{SC}{2}$.

Ta có

$$AC = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow R = a\sqrt{2}$$

Vậy chọn đáp án D.



Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 30° . Thể tích mặt của ngoại tiếp hình chóp là

A. $\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi a^3$

B. $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi a^3$

C. $\frac{4\sqrt{6}}{27}\pi a^3$

D. $\frac{27}{\sqrt{6}}\pi a^3$

Hướng dẫn giải

Theo đề

$$[SA, (ABCD)] = \angle SAO = 30^\circ$$

Gọi M là trung điểm của SA. Trung trực của SA cắt SO tại I $\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

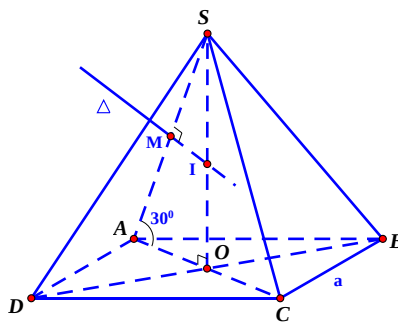
$$\text{Ta có: } SI \cdot SO = SM \cdot SA \Rightarrow SI = \frac{SM \cdot SA}{SO}$$

$$\text{Với } AO = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$AS = \frac{AO}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad SO = SA \sin 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{6}} \Rightarrow SI = \frac{\frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{\sqrt{6}}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Do đó: } V = \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}\pi a^3 = \frac{8\sqrt{6}}{27}\pi a^3.$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{3\sqrt{6}}{6}$

D. $\frac{3\sqrt{6}}{8}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức giải nhanh: $R = \frac{b^2\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$ với $a = 2, b = 2\sqrt{3}$ ta được

$$R = \frac{(2\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{2\sqrt{3(2\sqrt{3})^2 - 2^2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}. \text{ Vậy chọn đáp án B.}$$

Công thức tính nhanh: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b. Lúc đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp được tính theo công thức: $R = \frac{b^2\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$.

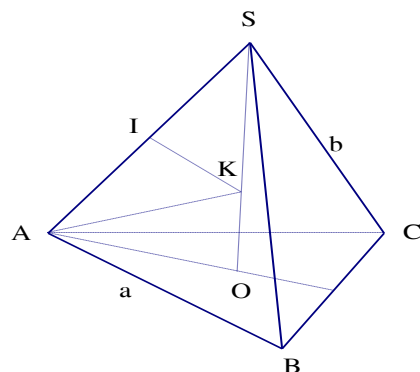
Chứng minh

Gọi O là hình chiếu của S lên mp(ABC) thì O là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Mặt phẳng trung trực của SA cắt SA tại I và cắt SO tại K. Khi đó $SK = KA = KB = KC$ và do đó K là tâm của mặt cầu ngoại tiếp.

Hai tam giác đồng dạng SIK và SOA cho ta:

$$\frac{SK}{SA} = \frac{SI}{SO} \Rightarrow SK = \frac{SI \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO}$$



Tam giác vuông SOA: $SO^2 = SA^2 - AO^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{3}$.

Suy ra: $SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$. Vậy $SK = R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}} = \frac{b^2\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$

Từ đó ta suy ra được công thức tính nhanh thể tích khối cầu và diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều tam giác cạnh đáy là a, cạnh bên là b như sau:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{b^2\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}\right)^3 = \frac{b^6\sqrt{3}\pi}{2(\sqrt{3b^2 - a^2})^3};$$

$$S = 4\pi \cdot \frac{b^4}{2(b^2 - \frac{a^2}{3})} = \frac{6\pi b^4}{3b^2 - a^2}$$

Câu 6. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại A , $AB=a$, $AC=2a$, $SA=SB=SC$ và mặt bên (SAB) hợp với đáy (ABC) một góc 60° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{48\pi}{489}a^2$

B. $\frac{289\pi}{48}a^2$

C. $\frac{489}{24}\pi a^3$

D. $\frac{389}{12}\pi a^2$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác SBC .

Ta có $SA=SB=SC$ nên S nằm trên trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi O là trung điểm của BC .

Vì tam giác ABC vuông tại A nên O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Do đó: SO chính là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay $SO \perp (ABC)$.

Theo đề: $[(SAB), (ABC)] = \angle SIO = 60^\circ$, với K là trung điểm của AB .

Ta có $OK = \frac{AC}{2} = a$. Trong tam giác vuông SKO có

$$SO = KO \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

Trong mặt phẳng (SBC) , đường trung trực của SC cắt SO tại J

$\Rightarrow J$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC .

Mặt khác:

$$\begin{cases} JS = JB = JC & (\text{Vì } J \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác } SBC) \\ JA = JB = JC & (\text{Vì } J \text{ thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow JS = JA = JB = JC \Rightarrow J$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

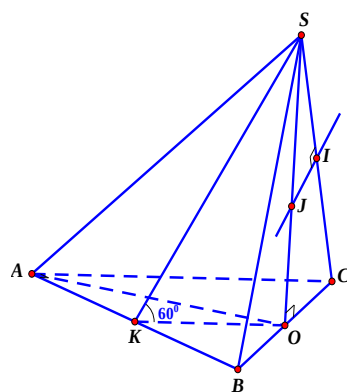
Lúc đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = SJ$.

$\triangle SIJ$ đồng dạng $\triangle SOC$ (I là trung điểm của SC)

$$\Rightarrow \frac{JS}{CS} = \frac{SI}{SO} \Leftrightarrow JS = \frac{CS \cdot SI}{SO} = \frac{1}{2} \frac{SC^2}{SO} = \frac{1}{2} \frac{SO^2 + OC^2}{SO}$$

$$\text{với } \begin{cases} OC = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \\ SO = a\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow JS = \frac{1}{2} \frac{3a^2 + \frac{5a^2}{4}}{a\sqrt{3}} = \frac{17a}{8\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{17\sqrt{3}a}{24}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{17a}{8\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{289\pi}{48}a^2$.



Câu 7. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Bán kính của mặt cầu nội tiếp tứ diện đều ABCD là

A. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$

B. $\frac{a}{12}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{12}$

D. $a\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

Gọi O là hình chiếu của D lên mp(ABC),

O là trọng tâm của tam giác đều ABC.

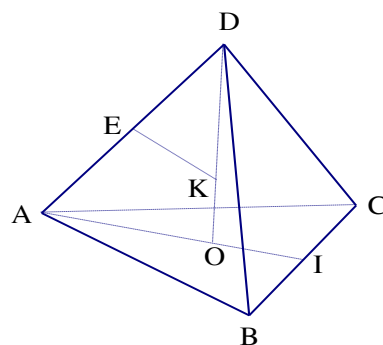
Mặt phẳng trung trực của đoạn AD cắt AD tại E và cắt DO tại K. Ta có KD = KA = KB = KC nên K là tâm của mặt cầu nội tiếp tứ diện đều vì :

$$\begin{aligned} d(K, (DAB)) &= d(K, (DBC)) = d(K, (DAC)) \\ &= d(K, (ABC)) = OK \end{aligned}$$

Ta có : $AO = \frac{2}{3} AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OD = \sqrt{DA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vì $\triangle DEK$ đồng dạng $\triangle DOA$ ta có : $\frac{DK}{DA} = \frac{DE}{DO} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow DK = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Vậy $OK = OD - DK = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. **Vậy chọn đáp án A.**



Câu 8. Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên 2a. Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp trên là :

A. $\frac{448\pi^3\sqrt{14}}{1029}$

B. $\frac{448\pi a^3}{1029}$

C. $\frac{\pi a^3\sqrt{14}}{1029}$

D. $448\pi a^3\sqrt{14}$

Hướng dẫn giải

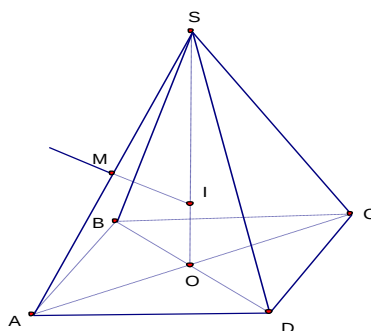
Ta có : $SO^2 = SC^2 - \frac{2a^2}{4} = 4a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{7a^2}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}$

Dựng trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Dựng trung trực của SA $\Rightarrow d \perp SA$ tại trung điểm M. Xét (SAO) có d cắt SO tại I, ta có :

$$SI = IA; IA = IB = IC = ID$$

$$\Rightarrow IS = IA = IB = IC = ID$$



$\Rightarrow$ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD có tâm là I và bán kính $r = SI$.

$$\triangle SIM \sim \triangle SAO \Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SM \cdot SA}{SO} \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{14}}{7}.$$

Vậy : $r = SI = \frac{2a\sqrt{14}}{7}$. Suy ra $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{448\pi a^3\sqrt{14}}{1029}$. Chọn đáp án A

Câu 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy. Xác định bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

A. $R = \frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{6}}$

B. $R = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

C. $R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

D. $R = \frac{2a\sqrt{21}}{\sqrt{6}}$

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm hình vuông, G là trọng tâm của tam giác SAB ($G \in SH$). Ta dễ dàng chứng minh được $IH \perp (SAB)$.

Dựng trục Δ_1 của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD (với Δ_1 đi qua I)

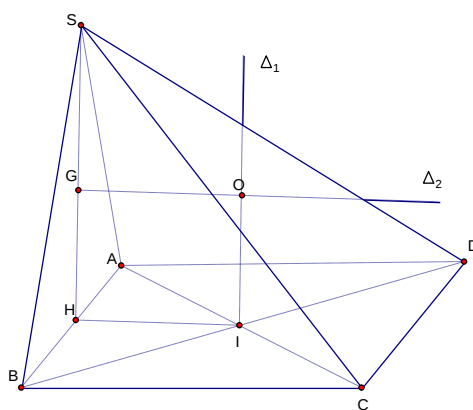
Dựng trục Δ_2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB (với Δ_2 đi qua G)

$\Rightarrow \Delta_1$ và Δ_2 cùng thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

$$\Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 = O \Rightarrow \begin{cases} O \in \Delta_1 \Rightarrow OA = OB = OC = OD \\ O \in \Delta_2 \Rightarrow OA = OB = OS \end{cases}$$

$\Rightarrow O$ cách đều các đỉnh của hình chóp S.ABCD $\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Ta có: $OS = \sqrt{SG^2 + OG^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. Vậy: $R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. Vậy chọn đáp án C.



Câu 10. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = SA = SB = a$; $SC = b$ ($0 < b < \sqrt{3}a$), $(SBC) \perp (ABC)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC theo a và b.

A. $R = \frac{b^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}$

B. $R = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 3b^2}}$

C. $R = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + b^2}}$

D. $R = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}$

Hướng dẫn giải

Gọi D là trung điểm BC $\Rightarrow AD \perp BC$ (Vì ABC cân tại A) $\Rightarrow AD \perp (SBC)$. Gọi E trung điểm SB $\Rightarrow AE \perp SB$ (Vì SAB đều)

$\Rightarrow DE \perp SB$ (Định lý 3 đường vuông góc)

SC//DE (DE đường trung bình tam giác)

$\Rightarrow SC \perp SB$. Vậy tam giác SBC vuông tại S

AD là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SB nên tâm O mặt cầu ngoại tiếp SABC thuộc AD. Mặt khác O cách đều A; B; C nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vậy bán kính R mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$$BC = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \cos C = \frac{DC}{AC} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2a} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{2a};$$

$$R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}.$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 11. Cho hình chóp S.ABC có cạnh bên SA vuông góc với, góc giữa cạnh bên SB với đáy là 60° . ΔABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, $\angle ACB = 30^\circ$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $\frac{\sqrt{21}a}{2}$

B. $\frac{\sqrt{21}a}{4}$

C. $\sqrt{21}a$

D. $\frac{\sqrt{21}a}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm cạnh AC. Trong mp(SAC) kẻ $Ix \parallel SA$.

Ta có Ix là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, Ix cắt SC tại O.

Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

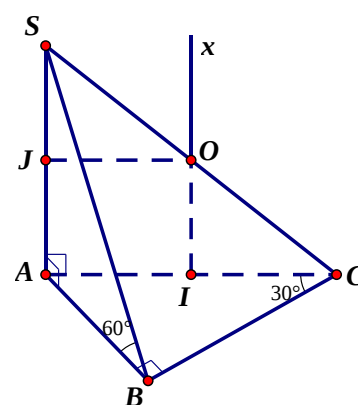
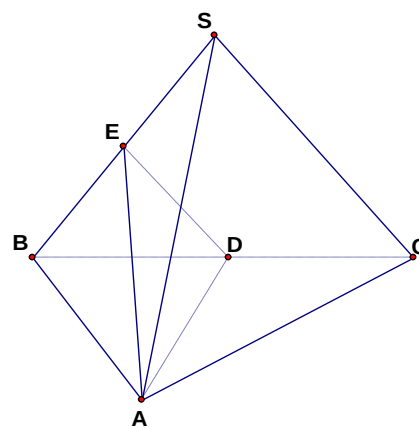
Bán kính $R = OA$.

$$\angle SBA = (\angle SB, (ABC)) = 60^\circ$$

$$\Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = 3a, AC = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{3}a$$

Gọi J là trung điểm của SC $\Rightarrow AIOJ$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow R = AO = \sqrt{AJ^2 + AI^2} = \frac{\sqrt{21}a}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$



Câu 12. Cho hình chóp S.ABCD. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Đáy ABCD là tứ giác nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính r, $SA = h$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là

A. $2\sqrt{4r^2 + h}$

B. $\frac{\sqrt{4r^2 + h}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{4r^2 + h}}{\sqrt{2}}$

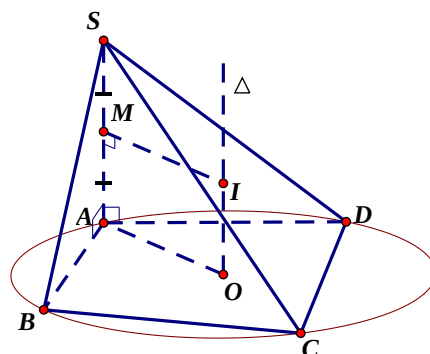
D. $\sqrt{4r^2 + h}$

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm của SA, (α) là mặt phẳng trung trực của SA, Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD và $I = \Delta \cap (\alpha)$

$$\begin{cases} I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IC = ID \\ I \in (\alpha) \Rightarrow IS = IA \end{cases}$$

$\Rightarrow IS = IA = IB = IC = ID$ nên I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD



Tứ giác MAOI là hình chữ nhật nên $OI = AM = \frac{SA}{2} = \frac{h}{2}$

$$IA^2 = OA^2 + OI^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow R = IA = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} = \frac{\sqrt{4r^2 + h^2}}{2}.$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 13. Trong mặt phẳng (P) cho nửa lục giác đều ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD = 2R. Qua A kẻ đường thẳng Ax vuông góc với (P), trên Ax lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (P) bằng 60° . Bán kính hình cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D là

A. $2\sqrt{13}R$

B. $\frac{\sqrt{13}R}{4}$

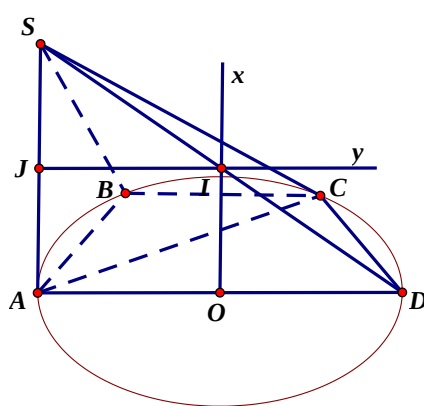
C. $\frac{\sqrt{13}R}{2}$

D. $\frac{\sqrt{13}R}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải

Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AD, ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Kẻ Ox song song với SA, ta có Ox là trục đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD.

Trong tam giác SAD, từ trung điểm J của SA, kẻ Jy song song với AD, ta có Jy là đường trung trực của cạnh SA. Gọi I là giao điểm của Ox và Jy.



Ta có $\begin{cases} I \in Ox \Rightarrow IA = IB = IC = ID \\ I \in Jy \Rightarrow IS = IA \end{cases} \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D, bán

kính hình cầu này là $r = IA$.

$$SCA = ((SCD), (P)) = 60^\circ \Rightarrow AC = AD \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}R, SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 3R$$

$$\text{Tứ giác AOIJ là hình chữ nhật nên } AI = \sqrt{AJ^2 + AO^2} = \frac{\sqrt{13}R}{2}$$

Vậy bán kính mặt cầu là $r = \frac{\sqrt{13}R}{2}$. **Vậy chọn đáp án C.**

Câu 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Cạnh bên $SD \perp (ABCD)$ và $SD = a$. Gọi E là trung điểm của DC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE là

A. $2\sqrt{11}a$

B. $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}a$

C. $\frac{\sqrt{11}}{4}a$

D. $\frac{\sqrt{11}}{2}a$

Hướng dẫn giải

Vì $AB = DE = AD = a$ và $\angle DAB = 90^\circ$ nên ABED là hình vuông.

Tam giác BDC có $EB = ED = EC = a$ nên vuông tại B, $BE \perp CD$ nên trung điểm M của BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC.

Dựng Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC thì Δ song song với SD.

Dựng mặt phẳng trung trực cạnh SC, cắt Δ tại I.

Điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE.

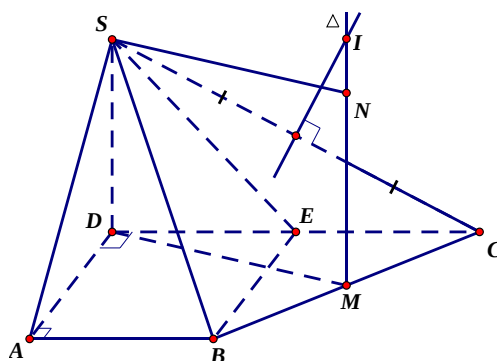
Kẻ $SN \parallel DM$ cắt MI tại N, ta có SDMN là hình chữ nhật với $SD = a$ và

$$DM^2 = \frac{DB^2 + DC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2 + DC^2}{2} - \frac{EC^2 + EB^2}{4} = \frac{5a^2}{2}$$

$$\text{Ta có } SI^2 = SN^2 + NI^2 = SN^2 + (NM - IM)^2 = \frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2$$

$$\text{Mà } IC^2 = IM^2 + MC^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2} \text{ và } R = IC = IS \text{ nên}$$

$$\frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow IM = \frac{3}{2}a$$



Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE là:

$$R = \sqrt{IM^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{2}a. \text{ Vậy chọn đáp án D.}$$

Câu 15. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Biết $BAC = \alpha$, $BC = a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện ABCMN là

- A. $\frac{4\pi}{\sin^2 \alpha} a^2$ B. $\frac{4\pi}{\cos^2 \alpha} a^2$ C. $\frac{2\pi}{\cos^2 \alpha} a^2$ D. $\frac{2\pi}{\sin^2 \alpha} a^2$

Hướng dẫn giải

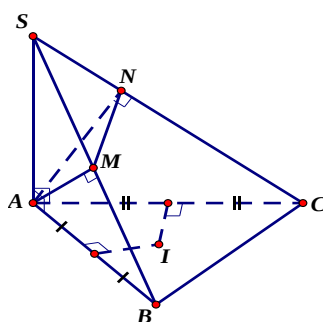
Vì tam giác AMB vuông tại M nên tâm mặt cầu đi qua ba điểm A, M, B nằm trên Δ_1 là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB, tức là trung trực của AB (xét trong mp(ABC))

Tương tự tâm mặt cầu đi qua A, C, N nằm trên Δ_2 là trung trực của AC trong mặt phẳng (ABC).

Gọi $I = \Delta_1 \cap \Delta_2$ thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I cách đều tất cả các điểm A, B, C, M, N nên các điểm đó nằm trên mặt cầu (S) tâm I, bán kính R.

Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \sin \alpha}$. Diện tích mặt

cầu $S = 4\pi R^2 = \frac{4\pi}{\sin^2 \alpha} a^2$. **Vậy chọn đáp án A.**



Câu 16. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy $AB = a$, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là

- A. $R = \frac{4a}{3}$ B. $R = \frac{2a}{3}$ C. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ D. $R = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải

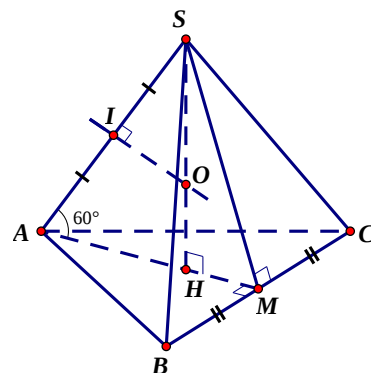
Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), ta có H là tâm của ΔABC .

Nên SH là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Trong ΔSAH dựng đường trung trực Ix của cạnh SA. Gọi $O = Ix \cap SH$

$$\begin{cases} O \in SH \\ O \in Ix \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC \\ OS = OA \end{cases} \Rightarrow O \text{ là tâm mặt cầu ngoại}$$

tiếp hình chóp S.ABC.

Bán kính $R = SO$.



Ta có

$$\angle SAH = (\angle SA, (AC)) = 60^\circ, AH = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad (M \text{ là trung điểm cạnh } BC)$$

$$\Rightarrow SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a, SA = \frac{AH}{\cos 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

$$\text{Do } \triangle SIO \sim \triangle SHA \Rightarrow \frac{SI}{SH} = \frac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \frac{SA \cdot SI}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{2a}{3}$$

Vậy bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \frac{2a}{3}$. **Vậy chọn đáp án B.**

Câu 17. Cho tứ diện đều ABCD có tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là O và H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD). Tỉ lệ $k = \frac{OA}{OH}$ là

A. $k = 2$

B. $k = 3$

C. $k = 4$

D. $k = 5$

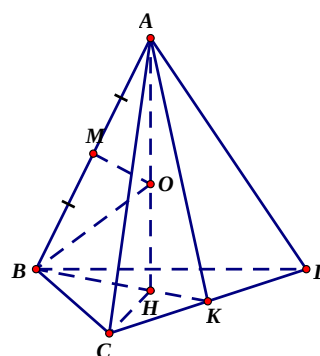
Hướng dẫn giải

Do tứ diện ABCD đều nên các khối chóp O.ABC, O.ACD, O.ABD, O.BCD có thể tích bằng nhau.

$$V_{A.BCD} = 4V_{O.BCD} \Leftrightarrow \frac{1}{3} AH \cdot S_{BCD} = 4 \cdot \frac{1}{3} OH \cdot S_{BCD}$$

$$\Leftrightarrow AH = 4OH \Rightarrow k = \frac{OA}{OH} = \frac{AH - OH}{OH} = \frac{3OH}{OH} = 3$$

Vậy chọn đáp án B.



Câu 18. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có đường cao $SO = h$, $\angle SAB = 45^\circ$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $R = 3h$

B. $R = 3h$

C. $R = \frac{2}{3}h$

D. $R = \frac{3}{2}h$

Hướng dẫn giải

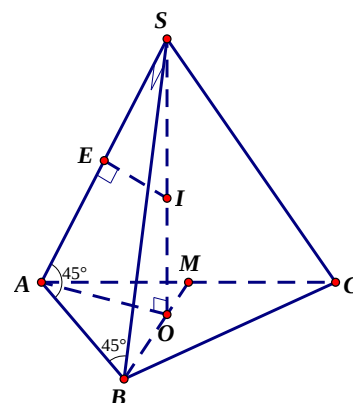
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta có $SO \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (SOA) dựng đường trung trực (d) của SA cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Thật vậy, $I \in SO$ là trục của tam giác ABC nên $SA = SB = SC$

$$I \in (d) \Rightarrow IA = IS \Rightarrow IA = IB = IC = IS$$

$\triangle SOA \sim \triangle SEI$ (E là trung điểm của AB)



$$\Rightarrow \frac{SO}{SE} = \frac{SA}{SI} \Rightarrow R = SI = \frac{SA \cdot SE}{SO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA^2}{SO}$$

Tam giác SAB cân tại S có $SAB = 45^\circ \Rightarrow$ Tam giác này vuông cân tại S.

$$\text{Đặt } SA = x, \text{ khi đó } AB = x\sqrt{2}, OA = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{x\sqrt{6}}{3}$$

Trong tam giác vuông SOA:

$$SA^2 - OA^2 = SO^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{6x^2}{9} = h^2 \Leftrightarrow x^2 = 3h^2 \Rightarrow R = \frac{1}{2} \cdot \frac{3h^2}{h} = \frac{3h}{2}.$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 19. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh bên bằng $2a$, mặt bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là

A. $\frac{4\pi a^3}{63}$

B. $\frac{\pi a^3}{63\sqrt{21}}$

C. $\frac{4\pi a^3}{63\sqrt{21}}$

D. $\frac{4\pi a^3}{\sqrt{21}}$

Hướng dẫn giải

Đặt $AB = x$. Gọi O là tâm của đáy, suy ra $SO \perp (ABC)$

Gọi M là trung điểm đoạn BC, suy ra $BC \perp (SAM)$ nên góc

giữa mặt bên và mặt đáy là $SMA = 60^\circ$

Gọi F là trung điểm của cạnh SA, trong mặt phẳng (SAM), đường trung trực của SA cắt SO tại I.

Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC và bán kính là $R = SI$.

$$\text{Ta có: } AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}, OA = \frac{2}{3}AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}, OM = \frac{1}{3}AM = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Trong tam giác SAO, ta có: } SO^2 = SA^2 - AO^2 = 4a^2 - \frac{x^2}{3}$$

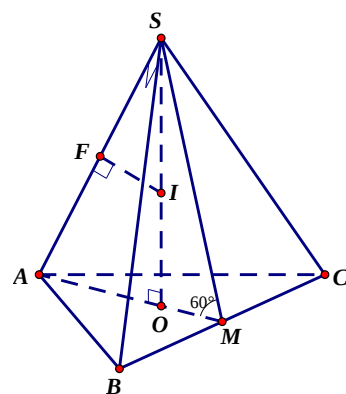
$$\text{Trong tam giác SOM, ta có: } SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{x}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{x^2}{4} = 4a^2 - \frac{x^2}{3} \Leftrightarrow \frac{7x^2}{12} = 4a^2 \Leftrightarrow x = \frac{4a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Ta có } \triangle SFI \sim \triangle SOA, \text{ suy ra: } \frac{SI}{SA} = \frac{SF}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{2a^2}{\frac{2a\sqrt{21}}{7}} = \frac{a}{\sqrt{21}}$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp là } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi a^3}{63\sqrt{21}}.$$

Vậy chọn đáp án C.



Câu 20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\angle BAD = 60^\circ$ và các cạnh bên $SA = SB = SD$, $\angle BSD = 90^\circ$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện SBCD là

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}a$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}a$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}a$

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}a$

Hướng dẫn giải

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình thoi ABCD.

Theo bài ra ta có tam giác ABD là tam giác đều cạnh a

$\Rightarrow BD = a$.

Mà tam giác SBD vuông tại S nên $SB = SD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $SO = \frac{a}{2}$.

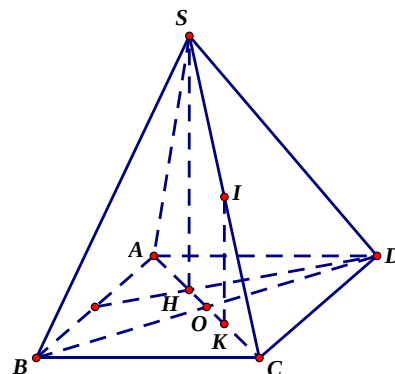
Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (do các cạnh bên $SA = SB = SD$)

Ta có

$$SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}a, SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

Gọi K là tâm của tam giác đều BCD thì K là trung điểm của HC, trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD đi qua K và song song với SH nên là trung trực của HC cắt SC tại I. Ta có I là trung điểm của SC nên $IS = IC$, do đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện SBCD.

Bán kính của mặt cầu là $R = \frac{1}{2}SC = \frac{\sqrt{6}}{4}a$. **Vậy chọn đáp án B.**



Câu 21. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 45° . Một mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại A và tiếp xúc với cạnh bên BS kéo dài tại H. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm I của mặt cầu và trung điểm đường cao BD của đáy. Bán kính mặt cầu đó là

A. $R = \frac{a(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{3}$

B. $a(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$

C. $R = \frac{a(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2}$

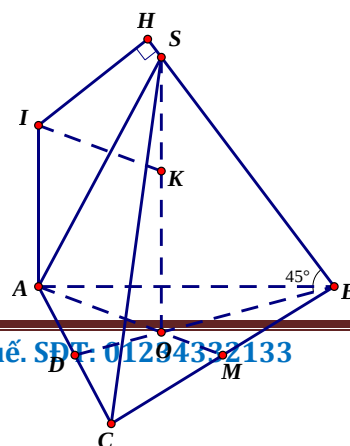
D. $R = \frac{a(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{4}$

Hướng dẫn giải

Gọi R là bán kính của mặt cầu.

Ta có: $IA \perp (ABC)$, $BS \perp IH$, $IA = IH = R$.

Gọi O là tâm của đáy, hạ



$IK \perp SO$. $SBO = 45^\circ \Rightarrow SO = OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SB = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ Tứ giác IAOK là hình chữ nhật nên

$$IA = OK = R; IK = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$SK = SO - IA = \frac{a\sqrt{3}}{3} - R;$$

$$HS = BH - BS = BA - BS = a - \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vì $IH^2 + HS^2 = IK^2 + SK^2$ nên suy ra

$$R^2 + \left(a - \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - R\right)^2 \text{ Ta tìm được } R = \frac{a(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2}.$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 22. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD = a$, $BAC = 120^\circ$, $CAD = 60^\circ$, $DAB = 90^\circ$. Xác định bán kính mặt cầu **nội tiếp** tứ diện.

A. $\frac{a}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

B. $\frac{a}{2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}$

C. $\frac{\sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

D. $\frac{\sqrt{2}a}{2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^\circ = 3a^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3}a$$

Tam giác ACD đều nên $CD = a$.

Vì $\triangle ABD$ vuông cân tại A nên $BC = \sqrt{2}a$.

Ta có: $BC^2 + CD^2 = 3a^2 = BC^2 \Rightarrow \triangle BCD$ vuông tại D.

Gọi H là trung điểm của BC thì $AH \perp BC$

$$AH = AB.\sin 30^\circ = \frac{a}{2}; DH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

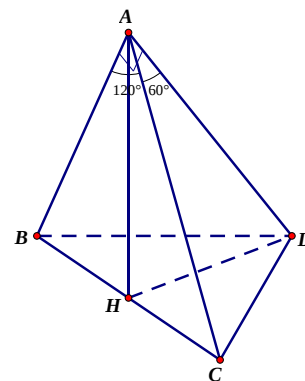
$$\Rightarrow AH^2 + DH^2 = a^2 = AD^2 \Rightarrow AH \perp HD$$

Do đó $AH \perp (BCD)$ nên AH là đường cao của tứ diện ABCD.

$$\text{Thể tích tứ diện: } V = \frac{1}{3}AH.S_{\triangle BCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Diện tích toàn phần của tứ diện:

$$\Sigma S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})a^2}{2}$$



Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp, ta có: $r = \frac{3V}{\sum S} = \frac{\sqrt{2}a}{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 23. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và $\angle ASB = \alpha$. Bán kính mặt cầu **nội tiếp** hình chóp là:

A. $\frac{a\sqrt{\sin \alpha}}{2\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)}$

B. $\frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)}$

C. $\frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}$

D. $\frac{a\sqrt{\sin \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}$

Hướng dẫn giải

Ta có tâm I của mặt cầu nội tiếp thuộc đường thẳng SH . Gọi M là trung điểm của AB , ta có $AB \perp (SHM)$ tại M .

Gọi I là chân đường phân giác trong của góc SMH ($I \in SH$)

Ta có I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp. Bán kính $r = IH$.

Để tính bán kính r ta có thể tính theo hai cách sau:

Cách 1. Dựa vào tính chất của đường phân giác, ta có:

$$\frac{IS}{IH} = \frac{MS}{MH} \Rightarrow \frac{SH}{IH} = \frac{MS+MH}{MH} \Rightarrow IH = \frac{SH \cdot MH}{MS+MH};$$

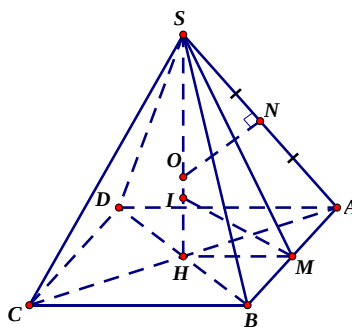
$$SM = \frac{a}{2} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}, MH = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là: } r = IH = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Vậy chọn đáp án C.

Cách 2. Dựa vào công thức $r = \frac{3V}{\sum S}$.

$$\text{Thể tích khối chóp: } V = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{3 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$



$$\Sigma S = 4S_{\Delta SAB} + S_{ABCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} SM \cdot AB + a^2 = \frac{a^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Bán kính } r = \frac{3V}{\Sigma S} = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}$$

Lưu ý: Cho hình chóp có thể tích là V và diện tích toàn phần là S . Trong hình chóp nội tiếp một hình cầu có bán kính r . Chứng minh rằng: $r = \frac{3V}{S}$.

Giải

Gọi O là tâm hình cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCDE$.

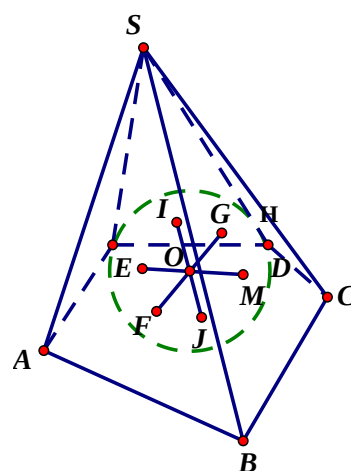
Hình cầu tiếp xúc với mặt đáy và tất cả các mặt bên. Vẽ OF , OG , OH ... OK vuông góc với mặt đáy và các mặt bên.

Ta có: $OF = OG = OH = \dots = OK = r$.

Vậy, thể tích hình chóp $S.ABCDE$ bằng tổng các thể tích của hình chóp con có chung đỉnh O và có đáy lần lượt là đáy hình chóp lớn và các mặt bên.

Ta có:

$$\begin{aligned} V_{O.ABCDE} + V_{O.SBC} + V_{O.SCD} + \dots + V_{O.SAB} &= V_{S.ABCDE} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} S_{ABCE} \cdot r + \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot r + \frac{1}{3} S_{SCD} \cdot r + \dots + \frac{1}{3} S_{SAB} \cdot r &= V \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} (S_{ABCE} + S_{SBC} + S_{SCD} + \dots + S_{SAB}) &= V \\ \Leftrightarrow \frac{r}{3} \cdot S &= V \Leftrightarrow r = \frac{3V}{S} \end{aligned}$$



Câu 24. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao $SO = 1$ và cạnh đáy của tam giác ABC bằng $2\sqrt{6}$. Điểm M , N lần lượt là trung điểm của cạnh AB , AC tương ứng. Bán kính hình cầu **nội tiếp** hình chóp $S.AMN$ là

A. $\frac{3}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$ B. $\frac{1}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$ C. $\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ D. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

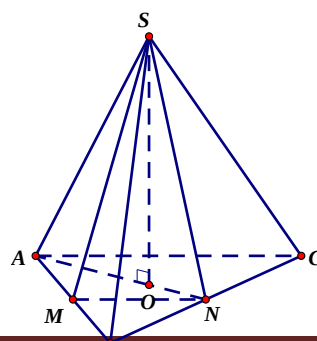
Hướng dẫn giải

Ta có MN là đường trung bình của tam giác đều nên:

$$S_{AMN} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích hình chóp $S.AMN$:

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{AMN} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.AMN$.

$$\text{Ta có: } \Sigma S = S_{AMN} + S_{SAN} + S_{SAM} + S_{SMN} = \frac{14\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Mà } V = \frac{1}{3}r \cdot \Sigma S \Rightarrow r = \frac{3V}{\Sigma S} = \frac{3}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$, biết $AB = BC = AC = BD = a$, $AD = b$, hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo a và b là

A. $\frac{4\pi a^2}{3a^2 - b^2}$

B. $\frac{\pi a^2}{3a^2 + b^2}$

C. $\frac{4\pi}{3a^2 - b^2}$

D. $\frac{4\pi a^2}{3a^2 + b^2}$

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của CD , ta có $BI \perp CD$ (vì tam giác BCD cân tại B)

$(BCD) \perp (ACD)$ theo giao tuyến CD , $BI \subset (BCD)$ và $BI \perp CD$

$$\Rightarrow BI \perp (ACD)$$

Hai tam giác vuông AIB và DIB bằng nhau vì có cạnh góc vuông chung BI , $BA = BD$

$$\Rightarrow AI = ID \Rightarrow AI = IC = ID = \frac{CD}{2}$$

$\Rightarrow$ Tam giác ACD vuông tại A .

Ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và $BI \perp (ACD)$, suy ra BI là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD .

Trong mp(BCD), đường trung trực của BD cắt BI tại O , ta có:

$$\begin{cases} OB = OD \text{ (vì } O \text{ thuộc đường trung trực của } BD) \\ OA = OC = OD \text{ (vì } O \in BI) \end{cases}$$

$$\Rightarrow OA = OB = OC = OD$$

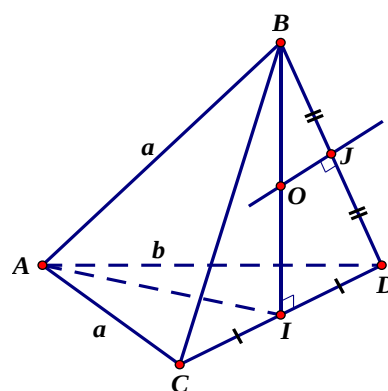
$\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, bán kính của mặt cầu này là $R = OB$.

Ta có $\triangle BJO \sim \triangle BID$ (J là trung điểm của BD)

$$\Rightarrow \frac{OB}{DB} = \frac{BJ}{BI} \Leftrightarrow OB = \frac{DB \cdot BJ}{BI} = \frac{BD^2}{2BI} = \frac{a^2}{2\sqrt{AB^2 - AI^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2}}$$

$$\text{Tam giác } ACD \text{ vuông tại } A \Rightarrow CD^2 = AC^2 + AD^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow OB = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2 + b^2}{4}}} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}} \quad (0 < b < a\sqrt{3})$$



$$\text{Vậy } R = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}$$

$$\text{Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } ABCD \text{ là: } S = 4\pi R^2 = \frac{4\pi a^2}{3a^2 - b^2} \quad (0 < b < a\sqrt{3})$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 26. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $SA = SB = a$, $\angle ASB = \alpha$ và mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Bán kính mặt cầu ngoại tiếp S.ABC là

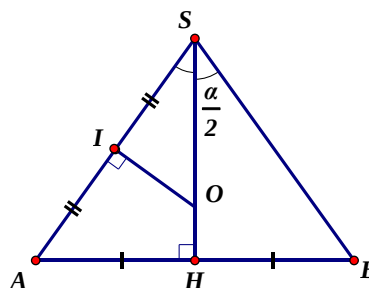
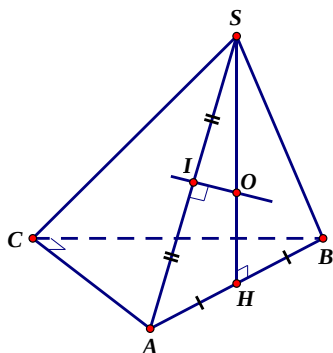
A. $R = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$

B. $R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$

C. $R = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$

D. $R = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}}$

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của AB.

$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (vì tam giác ABC vuông tại C) và $SH \perp AB$ (vì tam giác SAB cân tại S)

$(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB, $SH \subset (SAB)$ và $SH \perp AB$

$\Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong mp(SAB), đường trung trực của SA cắt SH tại O, ta có:

$$\begin{cases} OS = OA & (\text{vì O thuộc trục đường tròn ngoại tiếp của tam giác SAB}) \\ OA = OB = OC & (\text{vì O thuộc trục đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC, bán kính mặt cầu này là $R = OS = OA = \dots$ (O cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB)

$$\text{Tam giác SAH vuông tại H} \Rightarrow SH = SA \cdot \cos \angle ASH = a \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\triangle SIO \sim \triangle SHA \Rightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SI}{SH} \Leftrightarrow SO = \frac{SA \cdot SI}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} \quad (\text{I là trung điểm của SA})$$

$$\Leftrightarrow SO = \frac{a^2}{2a \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC có bán kính $R = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Vậy chọn đáp án C.

Cách khác

Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC cũng là bán kính R đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Theo định lí cosin, ta có:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos \alpha = 2a^2(1 - \cos \alpha) = 4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Theo định lí sin, ta có: } \frac{AB}{\sin \alpha} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{AB}{2 \sin \alpha} = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

Câu 27. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB=a$, $AD=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$, $(SAB) \perp (ABCD)$ và $SA=SB=a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD là

A. $4\pi a^3$

B. $\frac{4\pi}{3}a^3$

C. $\frac{3\pi}{4}a^3$

D. $3\pi a^3$

Hướng dẫn giải

Vì tam giác SAB cân tại S và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên gọi H là trung điểm của AB thì $SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD là đường thẳng Δ đi qua O và song song với SH. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB.

Vì $HO \perp (SAB)$ nên trục đường tròn ngoại tiếp tam giác

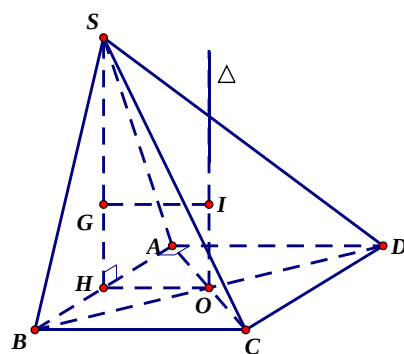
SAB là đường thẳng qua G và song song với HO, cắt Δ tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD. Tứ giác GHOI là hình chữ nhật.

$$\text{Ta có } GH = \frac{1}{3}SH = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\text{Nên } IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{GH^2 + \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{a^2 + \frac{8}{3}a^2}{4}} = a$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD là $R=IA$ nên thể tích khối cầu là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}a^3. \text{ Vậy chọn đáp án B.}$$



Câu 28. Cho tứ diện SABC có cạnh $SA \perp (ABC)$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau. Biết $SB = a\sqrt{2}$, $BSC = 45^\circ$, $ASB = \alpha$ ($0 < \alpha < 90^\circ$). Bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là

A. a

B. $2a$

C. $3a$

D. $4a$

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, ta có $(SBC) \perp (SAB)$ và $(ABC) \perp (SAB)$ (vì $SA \perp (ABC)$)

Mà BC là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) nên $BC \perp (SAB)$

$$\Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \angle SAC = \angle SBC = 90^\circ$$

$\Rightarrow A$ và B ở trên mặt cầu đường kính SC. Do đó mặt cầu ngoại tiếp SABC có tâm là trung điểm của SC và bán kính là

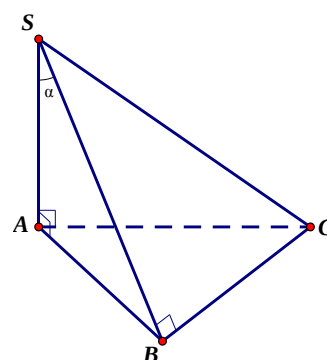
$$R = \frac{SC}{2}.$$

Tam giác SBC vuông cân tại B (vì $SB \perp BC$ và $BSC = 45^\circ$)

$$\Rightarrow SC = SB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a$$

Vậy bán kính của hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là $R = \frac{SC}{2} = a$.

Vậy chọn đáp án A.



Câu 29. Trong mặt phẳng (α) cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên đường thẳng Ax vuông góc với (α) ta lấy điểm S tùy ý, dựng mặt phẳng (β) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Mặt phẳng (β) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp đa diện ABCDB'C'D' là

A. $4\pi a^2$

B. πa^2

C. $2\pi a^2$

D. $3\pi a^2$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB' \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } AB' \perp SC \quad (2)$$

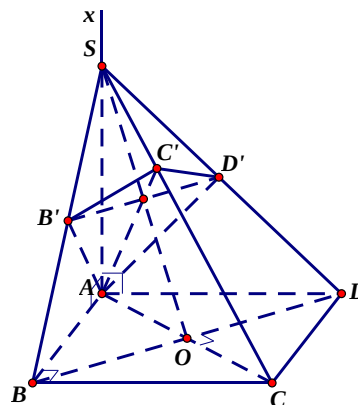
Từ (1) và (2) suy ra:

$$AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp B'C$$

Chứng minh tương tự ta có $AD' \perp D'C$.

$$\text{Vậy } \angle ABC = \angle AB'C = \angle AC'C = \angle AD'C = \angle ADC = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Năm điểm B, B', C', D', D cùng nằm trên mặt cầu đường kính AC.



⇒ Bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên mặt cầu đường kính AC

Gọi R là bán kính mặt cầu, ta có: $R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Diện tích của mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$. **Vậy chọn đáp án C**

Câu 30. Cho hình chóp S.ABC có các mặt SBC và ABC là các tam giác đều cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{2}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là

A. $\frac{a}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $a\sqrt{2}$

D. $\frac{a}{\sqrt{2}}$

Giải

Theo giả thiết, ta có:

$$SB = SC = BC = AC = AB = a \text{ và } SA = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} SA^2 = AB^2 + SB^2 \\ SA^2 = AC^2 + SC^2 \end{cases}$$

⇒ Tam giác SAB vuông tại B và tam giác SAC vuông tại C

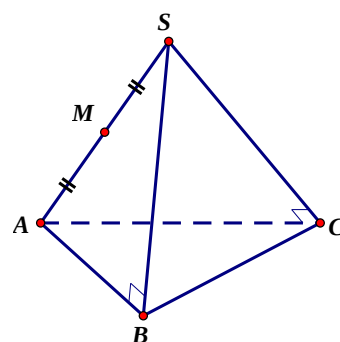
$$\Rightarrow MB = \frac{SA}{2} = MA = MS \text{ và}$$

$$MC = \frac{SA}{2} = MA = MS$$

$$\Rightarrow MS = MA = MB = MC$$

⇒ M là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC, bán kính của mặt cầu này là

$$R = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ **Vậy chọn đáp án B.**}$$



Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao $SH = 3a$ và cạnh đáy bằng a. Bán kính mặt cầu **nội tiếp** hình chóp là

A. $\frac{2+\sqrt{37}}{12}a$

B. $\frac{1+\sqrt{37}}{12}a$

C. $\frac{-1+\sqrt{37}}{12}a$

D. $\frac{-2+\sqrt{37}}{12}a$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức giải nhanh: $r = \frac{xh}{x + \sqrt{4h^2 + x^2}}$ với $h = 3a$, $x = a$

Ta được: $R = \frac{a \cdot 3a}{a + \sqrt{4(3a)^2 + a^2}} = \frac{-1+\sqrt{37}}{12}a$. **Vậy chọn đáp án C.**

Công thức giải nhanh: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao $SH = h$ và cạnh đáy bằng x. Lúc đó bán kính mặt cầu **nội tiếp** hình chóp được tính theo công thức:

$$r = \frac{xh}{x + \sqrt{4h^2 + x^2}}$$

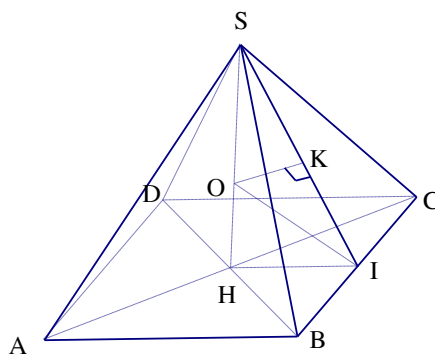
Chứng minh

Gọi H là tâm của hình vuông cạnh x, SH = h. Gọi I là trung điểm của BC.

Trong ΔSHI phân giác của

SIH ắt SH tại O, từ O kẻ $OK \perp SI$, ta có $OK \perp (SBC)$, và $OH = OK$ nên O cách đều mặt đáy và mặt bên (SBC).

Tương tự O cũng cách đều các mặt bên còn lại.



Vậy O là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp và

$$OH = OK = r. \text{ Ta có: } \frac{OH}{OS} = \frac{IH}{IS} \Rightarrow \frac{OH}{OS} = \frac{IH}{IS + IH} \Rightarrow OH = \frac{IH \cdot SH}{SI + IH}$$

$$\text{Trong } \Delta SHI \text{ có: } SI^2 = SH^2 + HI^2 = h^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow SI = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + x^2}$$

$$\text{Vậy: } r = OH = \frac{\frac{x}{2}h}{\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + x^2}} = \frac{xh}{x + \sqrt{4h^2 + x^2}}$$

Câu 32. Cho hình chóp S.ABC có 4 đỉnh đều nằm trên một mặt cầu, $SA = 1$, $SB = 2$, $SC = 3$ và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{14}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{14}}{6}$

D. $\frac{\sqrt{14}}{8}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Áp dụng công thức giải nhanh } R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{Ta tìm được } R = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án A.}$$

Công thức giải nhanh: Cho hình chóp S.ABC có 4 đỉnh đều nằm trên một mặt cầu, $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc.

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp là: } R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{Diện tích mặt cầu ngoại tiếp: } S = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{Thể tích khối cầu ngoại tiếp: } V = \frac{1}{6} \pi(a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Chứng minh

Gọi I là trung điểm AB. Kẻ Δ vuông góc với mp(SAB) tại I. Dựng mp trung trực của SC cắt Δ tại O $\Rightarrow$ OC = OS (1). I là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ SAB (vì Δ SAB vuông tại S) $\Rightarrow$ OA = OB = OS (2)

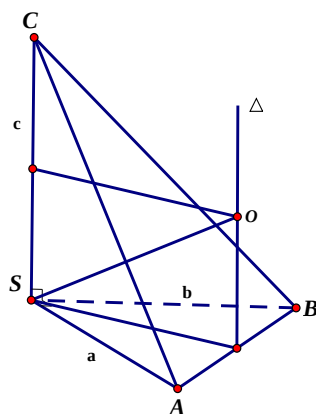
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ OA = OB = OC = OS.

Vậy: A, B, C, S thuộc S(O; OA)

$$R = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\frac{SC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}}$$

$$S = 4\pi \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}} \right)^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2);$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}} \right)^3 = \frac{1}{6}\pi(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Câu 33. Cho lăng trụ tam giác đều có đáy là tam giác đều có cạnh đáy bằng $2\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $\sqrt{5}$. Thể tích mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ là

A. $\frac{19\sqrt{273}}{15}$

B. $\frac{71\sqrt{273}}{35}$

C. $\frac{92\sqrt{273}}{53}$

D. $\frac{91\sqrt{273}}{54}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức giải nhanh: $V = \frac{1}{18\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$ với $a = 2\sqrt{3}$ và $b = \sqrt{5}$ ta được:

$$V = \frac{1}{18\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(4(2)^2 + 3(5)^2)^3} = \frac{91\sqrt{273}}{54}.$$

Vậy chọn đáp án D.

Công thức tính nhanh: Cho lăng trụ tam giác đều có đáy là tam giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp	Thể tích mặt cầu ngoại tiếp	
$R = \frac{\sqrt{4a^2 + 3b^2}}{2\sqrt{3}}$	$V = \frac{1}{18\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$	

Chứng minh

Gọi O và O' là tâm của ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì OO' là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $\Delta A'B'C'$. Gọi I là trung điểm của OO' thì $IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình trụ. Bán kính mặt cầu là $R = IA$

Tam giác vuông AOI có: $AO = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $OI = \frac{1}{2}OO' = \frac{1}{2}AA' = \frac{b}{2}$

$$\Rightarrow AI^2 = OA^2 + OI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4} = \frac{4a^2 + 3b^2}{12} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{4a^2 + 3b^2}}{2}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{4a^2 + 3b^2}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{(4a^2 + 3b^2)^{\frac{3}{2}}}{8} = \frac{\pi}{6}(4a^2 + 3b^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$AI^2 = \frac{4a^2 + 3b^2}{12} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{4a^2 + 3b^2}}{2} = R$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{4a^2 + 3b^2}}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}(4a^2 + 3b^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{6}\sqrt{(4a^2 + 3b^2)^3}$$

BDKT và LT THPT Quốc gia Môn Toán

ĐC: P5. Dãy 22. Tập thể Xá tắc-Đường Ngô Thời Nhậm. TP Huế

Ths. Trần Đình Cư. SĐT: 01234332133

Facebook: Trần Đình Cư.

Page face: <https://www.facebook.com/trandinhcu01234332133/>

Khai giảng các lớp hè: 10,11,12

Bắt đầu từ ngày 01/06/2017. Có thể gọi điện để đặt chỗ trước. Lớp học chất lượng cao (Không quá 20 học sinh)

Để sử dụng file word, quý thầy cô vui lòng đóng góp chút kinh phí để tạo động lực cho tác giả ra đời những chuyên đề khác hay hơn

STT	TÊN TÀI LIỆU	GIÁ	MÃ SỐ
1	KĨ THUẬT GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM SỐ PHỨC_123 Tặng 6 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 1-6}	60K	SO PHUC_123
2	CHỦ ĐỀ 1_KHỐI ĐA DIỆN {26 Trang} Tặng 5 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 7-11}	50K	HHKG_KDD
3	CHỦ ĐỀ 2_THỂ TÍCH KHỐI CHÓP {59 Trang} Tặng 10 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 12-21}	110 K	HHKG_TTKC
4	CHỦ ĐỀ 3_THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ {34 Trang} Tặng 5 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 22-26}	70K	HHKG_TTLT
5	CHỦ ĐỀ 456_NÓN TRỤ CẦU {56 Trang} Tặng 10 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 27-36}	110 K	HHKG_NTC
6	CHỦ ĐỀ 7_KHOẢNG CÁCH {68 Trang} Tặng 12 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 37-49}	130 K	HHKG_KC
7	CHỦ ĐỀ 8_GÓC {21 Trang} Tặng 5 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 50-54}	50K	HHKG_GOC
8	CHỦ ĐỀ 9_CỰC TRỊ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN VÀ CÁC KHỐI LỒNG NHAU {29 Trang} Tặng 8 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 55-63}	80k	HHKG_CT

Hướng dẫn thanh toán

Quý thầy cô thanh toán cho mình qua ngân hàng. Sau khi chuyển khoản, mình sẽ lập tức gửi tài liệu cho quý thầy cô.

Nếu trong ngày mà thầy cô chưa nhận được thì vui lòng gọi điện trực tiếp cho mình.

Thầy cư. SĐT: 01234332133

NGÂN HÀNG			
TÊN TÀI KHOẢN	TRẦN ĐÌNH CƯ	TRẦN ĐÌNH CƯ	TRẦN ĐÌNH CƯ
SỐ TÀI KHOẢN	4010205025243	0161000381524	55110000232924
CHI NHÁNH	THỪA THIÊN HUẾ	THỪA THIÊN HUẾ	THỪA THIÊN HUẾ
Nội dung: Họ và tên_email_ma tài liệu			

Ví dụ: Nguyễn Thị B_nguyenthib@gmail.com_HHKG_TTKC

Lưu ý:

Thầy cô đọc kỹ file PDF trước khi mua, tài liệu mua chỉ dùng với mục đích cá nhân, không được bán lại hoặc chia sẻ cho người khác.

CHÚC QUÝ THẦY CÔ DẠY TỐT VÀ THÀNH CÔNG TRONG SỰ NGHIỆP TRỒNG NGƯỜI