

HIỂU RÕ BẢN CHẤT HÌNH HỌC CỦA BÀI TOÁN CỰC TRỊ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN ĐỂ GIẢI NHANH BÀI TOÁN TRẮC NGHIỆM.

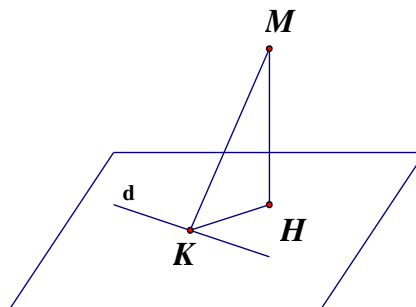
Để giải nhanh bài toán cực trị trong hình học tọa độ không gian, chúng ta cần tìm được vị trí đặc biệt của nghiệm hình đề cực trị (số đo góc, khoảng cách, độ dài) xảy ra. Khi biết vị trí đặc biệt đó, việc tính toán chỉ còn vài dòng đơn giản là ra kết quả. Sau đây các bài toán cực trị thường gặp , bản chất hình học của nó và công thức giải nhanh bài toán đó.

Bài toán 1: Viết phương trình mặt phẳng đi qua một đường thẳng d và cách một điểm $M \notin d$ một khoảng lớn nhất.

Giải: Gọi hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng và d lần lượt là H, K . Ta có khoảng cách từ M đến mặt phẳng là đoạn $MH \leq MK$. Vậy MH lớn nhất khi và chỉ khi H trùng K . Hay mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng chứa M và d .

Mặt phẳng cần tìm có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\left[\vec{u}_d; \overrightarrow{AM} \right], \vec{u}_d \right]$,

trong đó $A \in d$.



Ví dụ 1: Viết phương trình mp chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và cách $M(2;1;1)$ một khoảng lớn nhất.

Giải: Ta có $\vec{u}_d = (2;1;-1)$, $A = (1;0;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1;1;3)$. Vậy $\vec{n} = \left[\left[\vec{u}_d; \overrightarrow{AM} \right], \vec{u}_d \right] = (-6;-6;-18)$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $(x-1) + y + 3(z+2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 3z + 5 = 0$.

Ví dụ 2: Viết phương trình mp đi qua điểm $A(1;-2;1)$, song song với đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = z$ và cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất.

Gợi ý: $\vec{n} = \left[\left[\vec{u}_d; \overrightarrow{OA} \right], \vec{u}_d \right]$, phương trình mặt phẳng $11x - 16y + 10z - 53 = 0$

Ví dụ 3: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q): $2x - y + z - 1 = 0$ và cách điểm $M\left(\frac{1}{2}; 0; 2\right)$ một khoảng lớn nhất.

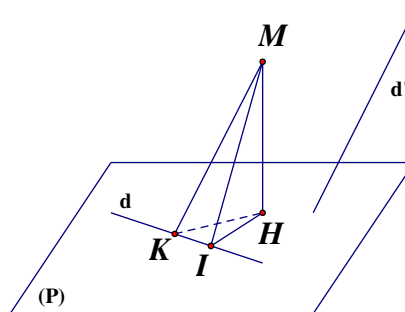
Gợi ý: Bản chất mp cần tìm vẫn đi qua đường thẳng cố định qua O và vuông góc với (P). Nên véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n} = \left[\left[\vec{n}_{(Q)}, \overrightarrow{OM} \right], \vec{n}_{(Q)} \right]$.

Ví dụ 4: Tìm a để khoảng cách từ $M(1;2;-2)$ đến mặt phẳng (P): $(1-a)x + (2-3a)y + az + 1 - a = 0$ lớn nhất.

Gợi ý: Ta có thể áp dụng công thức khoảng cách trực tiếp hoặc mp đã cho chứa đường thẳng cố định là $d: \begin{cases} x-2y+1=0 \\ -x-3y+z-1=0 \end{cases}$, $\vec{u}_d = (2;1;5)$ và đi qua $A(-1;0;0)$, do đó khoảng cách lớn nhất khi và chỉ khi $\vec{n}_p = \left[\left[\vec{u}_d; \vec{AM} \right]; \vec{u}_d \right]$, từ đó ta tìm được $a=2$.

Bài toán 2: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, tạo với đường thẳng d' (d' không song song với d) một góc lớn nhất.

Giải: Lấy K là điểm thuộc d, vẽ đường thẳng KM song song với d'. Gọi H và I là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d. Khi đó $\sin(d'; (P)) = \cos \widehat{KMH} = \frac{MH}{KM} \leq \frac{MI}{KM}$. Vậy góc giữa d và (P) lớn nhất khi và chỉ khi H trùng I, hay (P) là mặt phẳng nhận vectơ $\vec{IM}$ làm vectơ pháp tuyến, hay (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng chứa d, song song với d'.



Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm là $\vec{n} = \left[\left[\vec{u}_d; \vec{u}_{d'} \right]; \vec{u}_d \right]$.

Ví dụ 5: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và tạo với đường thẳng

$d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ một góc lớn nhất.

Giải: Ta có $\vec{n} = \left[\left[\vec{u}_d; \vec{u}_{d'} \right]; \vec{u}_d \right] = (3; -12; 3)$. (P) đi qua điểm $A(1; -1; 2)$ nên có phương trình $(x-1) - 4(y+1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 7 = 0$.

Ví dụ 6: Viết phương trình mặt phẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (P): $2x + y - z - 1 = 0$ và tạo với trục Oy một góc lớn nhất.

Gợi ý: Bản chất không thay đổi, mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\left[\vec{n}_p; \vec{j} \right]; \vec{n}_p \right] = (-2; 5; 1)$. Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $2x - 5y - z = 0$.

Ví dụ 7: Viết phương trình mặt phẳng đi qua O, song song với đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$ và tạo với mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 1 = 0$ một góc nhỏ nhất.

Gợi ý: Bản chất Bài toán vẫn là tìm phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng a (qua O và song song với d) và tạo với đường thẳng b vuông góc với mp(P) một góc lớn nhất. Vậy vectơ pháp tuyến mp

cần tìm là $\vec{n} = \left[\left[\vec{u}_d; \vec{n}_p \right]; \vec{u}_d \right] = (-12; -27; 17)$, nên phương trình mặt phẳng cần tìm là $12x + 27y - 17z = 0$.

Ví dụ 8: Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1; 2; -1), B(2; 1; 3)$ và tạo với trục Ox một góc lớn nhất.

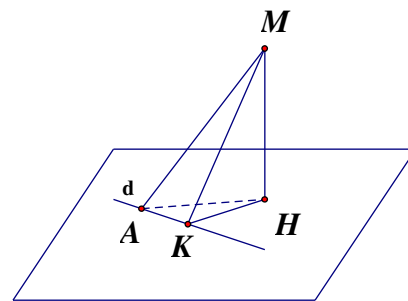
Gợi ý: Mặt phẳng cần tìm đi qua AB, cũng là mặt phẳng chứa đường thẳng AB cố định cho trước. Vậy $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{AB}; \vec{i} \right]; \overrightarrow{AB} \right] = (-17; -1; 4)$.

Bài toán 3: Viết phương trình đường thẳng d đi qua một điểm A cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước và cách một điểm M cho trước một khoảng nhỏ nhất. (AM không vuông góc với (P)).

Giải: Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d . Dễ thấy ngay $d(M; d) = MK \geq MH$. Khoảng cách này nhỏ nhất khi và chỉ khi $K \equiv H$. Hay d là đường thẳng đi qua A và hình chiếu H của M trên (P) .

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d cần tìm là

$$\vec{u}_d = \left[\left[\vec{n}_{(P)}; \overrightarrow{AM} \right]; \vec{n}_{(P)} \right].$$



Ví dụ 9: Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O , nằm trong mặt phẳng $(P): 2x - y + z = 0$ và cách điểm $M(1; 2; 1)$ một khoảng nhỏ nhất.

Giải: Ta có véc tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u}_d = \left[\left[\vec{n}_{(P)}; \overrightarrow{OM} \right]; \vec{n}_{(P)} \right] = (-4; -13; -5)$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\frac{x}{4} = \frac{y}{13} = \frac{z}{5}$.

Ví dụ 10: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 1; 2)$, vuông góc với đường thẳng

$a: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{4}$ và cách gốc tọa độ O một khoảng nhỏ nhất.

Gợi ý: Bản chất d vẫn là đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng cố định (qua A và vuông góc với a). Nên véc tơ chỉ phương vẫn là $\vec{u}_d = \left[\left[\vec{u}_a; \overrightarrow{OA} \right]; \vec{u}_a \right]$.

Ví dụ 11: Viết phương trình đường thẳng d đi qua O và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 1 = 0$ và cách điểm $M(1; -1; 2)$ một khoảng nhỏ nhất.

Gợi ý: Bản chất d vẫn là đường thẳng đi qua O và nằm trong mặt phẳng cố định (qua O và song song với (P)). Nên véc tơ chỉ phương vẫn là $\vec{u}_d = \left[\left[\vec{n}_{(P)}; \overrightarrow{OM} \right]; \vec{n}_{(P)} \right]$.

Ví dụ 12: Tìm cặp số nguyên dương (a, b) nhỏ nhất để khoảng cách từ O đến đường thẳng

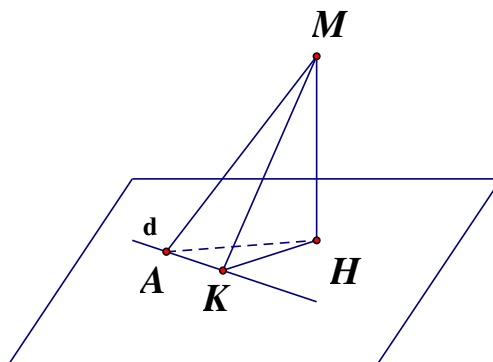
$$d: \begin{cases} x = 1 + a + at \\ y = 2 + b + bt \\ z = 1 + 2a - b + (2a - b)t \end{cases} \quad (a \neq 0) \text{ nhỏ nhất.}$$

Gợi ý: Đường thẳng d đã cho đi qua điểm cố định $A(1; 2; 1)$ và do $\vec{u}_d = (a; b; 2a - b) \perp \vec{n}(2; -1; -1)$ nên d nằm trong mặt phẳng (P) qua A có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Vậy véc tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u}_d = \left[[\vec{n}; \overrightarrow{OA}]; \vec{n} \right] = (-8; -11; -5)$. Vậy ta phải có $\frac{a}{8} = \frac{b}{11} = \frac{2a-b}{5} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 11 \end{cases}$.

Bài toán 4: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cho trước, nằm trong mặt phẳng (P) và cách điểm M (M khác A , MA không vuông góc với (P)) một khoảng lớn nhất.

Giải: Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d . Khi đó ta dễ thấy $d(M; d) = MK \leq MA$, khoảng cách $d(M; d)$ lớn nhất khi và chỉ khi K trùng A , hay d là đường thẳng nằm trong (P) , đi qua A và vuông góc với AM .

Đường thẳng d cần tìm có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = \left[\vec{n}_{(P)}; \overrightarrow{AM} \right]$.



Ví dụ 13: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 1; -1)$ cho trước, nằm trong mặt phẳng $(P): 2x - y - z = 0$ và cách điểm $M(0; 2; 1)$ một khoảng lớn nhất.

Giải: Ta có véc tơ chỉ phương đường thẳng cần tìm là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{AM}; \vec{n}_{(P)} \right] = (1; 3; -1)$. Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

Ví dụ 14: Viết phương trình đường thẳng d qua gốc tọa độ O , vuông góc với đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2} \text{ và cách điểm } M(2; 1; 1) \text{ một khoảng lớn nhất.}$$

Gợi ý: Véc tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u} = \left[\vec{u}_{d_1}; \overrightarrow{OM} \right]$

Ví dụ 15: Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 0; 2)$, song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 1 = 0$ và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất.

Gợi ý: Véc tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{OA}; \vec{n}_{(P)} \right]$.

Ví dụ 16: Tìm a để đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 2a + at \\ y = -2 + 2a + (1 - a)t \\ z = 1 + t \end{cases}$ (a là tham số) cách điểm $M\left(\frac{1}{2}; 1; 4\right)$ một

khoảng lớn nhất.

Gợi ý: Dựa vào phương trình tham số của đường thẳng d đã cho, ta thấy d đi qua điểm cố định $A(1; 0; 3)$ (ứng với $t=2$) và vuông góc với đường thẳng có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; 1; -1)$. Do đó véc tơ chỉ phương của đường thẳng d khi khoảng cách từ M đến nó lớn nhất là $\vec{u}_d = [\vec{u}_1; \vec{AM}] = \left(2; \frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Vậy

$$\text{ta có: } \frac{a}{2} = \frac{1-a}{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$$

Bài toán 5: Cho mặt phẳng (P) và điểm $A \in (P)$, và đường thẳng d (d cắt (P) và d không vuông góc với (P)). Viết phương trình đường thẳng d' đi qua A , nằm trong (P) và tạo với d một góc nhỏ nhất.

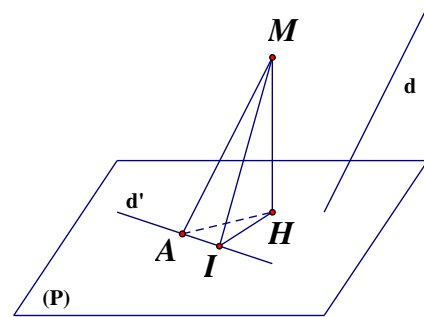
Giải: Từ A vẽ đường thẳng $AM \parallel d$. Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d' . Ta có

$$\cos(d; d') = \cos \widehat{MAH} = \frac{MH}{AM} \leq \frac{MI}{MA}.$$

Vậy góc $(d; d')$ bé nhất khi và chỉ khi I trùng H . Hay d' đi qua A và H , hay d' đi qua A và song song với hình chiếu vuông góc của d trên (P) .

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d' cần tìm là

$$\vec{u}_{d'} = \left[\vec{n}_{(P)}; \left[\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d \right] \right].$$



Ví dụ 17: Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O , nằm trong mặt phẳng

$$(P): 2x + y - z = 0 \text{ và tạo với đường thẳng } d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2} \text{ một góc nhỏ nhất.}$$

Giải: Véc tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u}_a = \left[\vec{n}_{(P)}; \left[\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d \right] \right] = (-10; 7; -13)$. Vậy

$$\text{phương trình đường thẳng cần tìm là: } \frac{x}{-10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{-13}.$$

Ví dụ 18: Viết phương trình đường thẳng đi qua O , vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$

và tạo với mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 1 = 0$ một góc lớn nhất.

Gợi ý: Bản chất vẫn là Bài toán toán 5, với véc tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là

$$\vec{u} = \left[\left[\vec{u}_d; \vec{n}_{(P)} \right]; \vec{u}_d \right].$$

Ví dụ 19: Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O, cắt đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ và tạo với trục Oy một góc nhỏ nhất.

Gợi ý: Bản chất đường thẳng cần tìm đi qua O và nằm trong $mp(O; d)$. Do đó véc tơ chỉ phương cần tìm là $\vec{u} = \left[\left[\overrightarrow{n_{(O;d)}}, \vec{j} \right]; \overrightarrow{n_{(O;d)}} \right]$.

Bài toán 6: Cho mặt phẳng (P) và điểm $A \in (P)$ và đường thẳng d cắt (P) tại điểm khác M khác A. Viết phương trình đường thẳng d' nằm trong (P), đi qua A và khoảng cách giữa d và d' lớn nhất.

Giải: Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với d'. Khi đó $d(d; d') = d((Q); d') = d(A, (Q))$.

Theo bài toán 1, khoảng cách này lớn nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\overrightarrow{u_d}; \left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{AB} \right] \right], B \in d$. Khi đó do $d' // (Q)$ và d' nằm trong (P), nên $\overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(Q)}}; \overrightarrow{n_{(P)}} \right]$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d cần tìm là $\overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \left[\overrightarrow{u_d}; \left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{AB} \right] \right] \right], B \in d$.

Ví dụ 20: Cho mặt phẳng (P): $2x + y + z - 3 = 0, A(0; 2; 1)$ và đường thẳng $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A, nằm trong (P) và khoảng cách giữa d và d' lớn nhất.

Giải: Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d' và cách A một khoảng lớn nhất. Khi đó ta có: $B(1; 0; 0) \in d'$,

$\overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\overrightarrow{u_{d'}}; \left[\overrightarrow{u_{d'}}; \overrightarrow{AB} \right] \right] = (-10; 4; 2)$, véc tơ chỉ phương của đường thẳng d cần tìm là

$\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(Q)}}; \overrightarrow{n_{(P)}} \right] = (2; 14; -18)$. Phương trình đường thẳng d là: $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{7} = \frac{z-1}{-9}$.

Bài toán 7: Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d // (P). Viết phương trình đường thẳng d' // d và cách d một khoảng nhỏ nhất.

Giải: Gọi A là điểm thuộc d, A' là hình chiếu của A trên (P). Khi đó đường thẳng d' cần tìm đi qua A' và song song với d.

Ví dụ 21: Cho mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mp(P), song với mặt phẳng (Q): $x - 2y + z + 2 = 0$ và cách gốc O một khoảng nhỏ nhất.

Gợi ý: Đường thẳng d cần tìm đi qua hình chiếu O' của O trên mp(P) và có véc tơ chỉ phương

$\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{n_{(Q)}} \right]$.

Bài toán 8: Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và cách điểm M (khác A) một khoảng lớn nhất.

Giải: Véc tơ pháp tuyến của mp cần tìm là $\vec{n} = \overrightarrow{AM}$.

Ví dụ 22: Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và cách điểm $M(2;1;1)$ một khoảng lớn nhất.

Giải: Véc tơ pháp tuyến của mp cần tìm là $\vec{n} = \overrightarrow{AM} = (1;1;-3)$. Do đó phương trình mặt phẳng cần tìm là $(x-1) + y - 3(z+2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z - 7 = 0$.

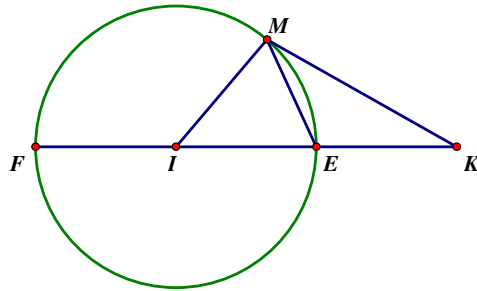
Bài toán 9: Các bài toán khác đòi hỏi chúng ta cần có trực giác hình học để giải nhanh.

Ví dụ 23: Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$, viết phương trình đường thẳng d' song song với d , cách d một khoảng bằng 3 và cách điểm $K(-3;4;3)$ một khoảng lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải: Giả sử mp(P) qua K và vuông góc với d cắt d tại I, d' tại M. Khi đó ta có $IM = 3$, trong mp(P): ta cần tìm M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $R=3$ cách K một khoảng nhỏ nhất, lớn nhất.

Gọi $I(1+2t;t;1+2t)$, $\overrightarrow{KI} = (4+2t;t-4;-2+2t)$, $\overrightarrow{u_d} = (2;1;2)$, $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Vậy $I(1;0;1)$ và $IK = 6 > 3$. Dễ thấy KM nhỏ nhất khi M trùng E, KM lớn nhất khi M trùng F. Để tìm $E(x;y;z)$ ta dùng véc tơ

$$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IK} \Leftrightarrow E = (-1;2;2).$$



Vậy phương trình đường thẳng d' cách K một khoảng nhỏ

nhất là $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{2}$. Tương tự phương trình

đường thẳng d' cách K một khoảng lớn nhất là $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$.

Ví dụ 24: Cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d' song song với

d , cách d một khoảng bằng $\sqrt{3}$ và cách đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{x-1}{1}$ một khoảng nhỏ nhất (lớn nhất)

Giải: đường thẳng d' cần tìm là một đường sinh của mặt trụ tròn xoay có trục là d , bán kính $R=\sqrt{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và song song với d . Dễ dàng thấy ngay, d' là giao mặt trụ trên với mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P) (trong trường hợp (P) không cắt mặt trụ).

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{u_\Delta}] = (3;3;3)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

$x + y + z - 3 = 0$. Lấy $I(3;3;3) \in d$, hình chiếu của I trên (P) là $H(1;1;1)$, $IH = 2\sqrt{3}$. Gọi

phương trình đường thẳng d' cần tìm đi qua M là $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$.

khoảng $R = 2\sqrt{2}$ và cách $M(0;1;2)$ một khoảng nhỏ nhất (lớn nhất).

$\vec{n} = [\vec{u_d}; \vec{IM}] = (1; -3; 1)$, nên có phương trình là:

Ví dụ 26. Cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$.

Giải: Gọi $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S), ta có: $MA = \sqrt{(a-3)^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 6a + 9}$

$$= \sqrt{4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 6a + 9 - 3(-9 - 2a + 8b)} = \sqrt{4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 24b + 36}$$
$$= 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 6b + 9} = 2\sqrt{a^2 + (b-3)^2 + c^2} = 2MB' \text{ với } B'(0; 3; 0).$$

Dễ dàng kiểm tra thấy B' nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu, M nằm trên mặt cầu, vậy $MA + 2MB = 2(MB' + MB)$ nhỏ nhất khi B', M, B thẳng hàng, hay giá trị nhỏ nhất là $2BB' = 4\sqrt{2}$.

BÀI TẬP

Câu 1: Cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Gọi d' là đường thẳng nằm

trong (P) , song song với d và khoảng cách giữa d và d' nhỏ nhất. Hỏi d' đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ B. $M\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ C. $M\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{6}; \frac{5}{6}\right)$ D. $M\left(\frac{2}{3}; -1; -\frac{2}{3}\right)$

Câu 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 0; 1), B(2; 1; 3)$ và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. (P) đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M(0; 2; -1)$ B. $M(1; 1; 1)$ C. $M(3; 2; 1)$ D. $M(-1; 1; 1)$

Câu 3: Gọi d là đường thẳng đi qua O và nằm trong mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1; -2; 1)$ một khoảng nhỏ nhất. Tính góc giữa d và trục tung.

- A. $\arccos \frac{2}{3}$ B. $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ C. $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$ D. $\arccos \frac{3}{\sqrt{5}}$

Câu 4: Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và tạo với trục Oz một góc lớn nhất. Hỏi mp(P) đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $M(1; 3; 2)$ B. $M(2; 1; 0)$ C. $M(4; 1; 1)$ D. $M(1; 1; 1)$

Câu 5: Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = 1 - (a + 2b)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ (a, b là các tham số đã biết). Biết khoảng cách

giữa d và Ox lớn nhất. Tính $\frac{a}{b}$.

- A. $\frac{a}{b} = 0$ B. $\frac{a}{b} = -\frac{5}{2}$ C. $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ D. $\frac{a}{b} = -4$

Câu 6: Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 + t \end{cases}$. Gọi d' là đường thẳng đi qua điểm $I(1; 2; 1)$ và tạo với d một góc

30° và cách điểm $J(0; 0; -2)$ một khoảng nhỏ nhất. Một véc tơ chỉ phương của d' là:

- A. $\vec{u} = (-1; 1; 0)$ B. $\vec{u} = (1; 1; 0)$ C. $\vec{u} = (-1; 0; 1)$ D. $\vec{u} = (-1; 1; 2)$

Câu 7: Cho hai điểm $A(0;0;3)$, $B(1;4;0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 2z + 9 = 0$. Gọi M thuộc mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của $|MA - 2MB|$.

- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $3\sqrt{6}$

Câu 8: Gọi d là đường thẳng đi qua O và song song với mặt phẳng $(P): 2x + 3y - z + 1 = 0$ và tạo với trục Ox một góc nhỏ nhất. Hỏi d đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M(5; -3; 1)$ B. $M(2; -3; -1)$ C. $M(4; 6; 2)$ D. $M(5; -6; 1)$

Câu 9: Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 0)$ và nằm trong mặt phẳng (xOy) và cách điểm $B(2; 1; 1)$ một khoảng lớn nhất. Tìm véc tơ chỉ phương của d.

- A. $\vec{u} = (1; 2; 0)$ B. $\vec{u} = (1; -1; 0)$ C. $\vec{u} = (1; 1; 0)$ D. $\vec{u} = (-2; 1; 0)$

Câu 10: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và song song với đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ và cách điểm $A(-1; 2; 3)$ một khoảng lớn nhất. Hỏi (P) song song với đường thẳng nào sau đây?

- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$ B. $\frac{x+3}{3} = \frac{y}{12} = \frac{z+1}{-4}$ C. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$ D. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-1}$

Câu 11: Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và điểm $M(2; -4; -1)$. Gọi d' là đường thẳng song song với d và cách d một khoảng bằng $R = \sqrt{2}$ và cách điểm M một khoảng nhỏ nhất. Hỏi d' đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $K(3; 2; 3)$ B. $K(0; -2; 5)$ C. $K(3; 1; 2)$ D.

Câu 12: Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 4)$, nằm trong mặt phẳng (P) $2x + y - 3 = 0$ và tạo với trục Oy một góc nhỏ nhất. Hỏi d đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M(-1; 6; 4)$ B. $M(-1; -6; 4)$ C. $M(-1; 6; -4)$ D. $M(1; 2; 6)$

Câu 13: Cho mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 4 = 0$, $A(1; 1; 1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A nằm trong (P) và cách O một khoảng nhỏ nhất. Hỏi d đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M(-1; 6; 0)$ B. $M(-1; 3; 3)$ C. $M(0; 3; 1)$ D. $M(0; 0; 4)$

Câu 14: Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1; -2; 1)$, vuông góc với trục Oy , và tạo với đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ một góc nhỏ nhất. } d \text{ nhận véc tơ nào làm véc tơ chỉ phương?}$$

- A. $\vec{u} = (1; 0; 2)$ B. $\vec{u} = (-1; 2; -1)$ C. $\vec{u} = (1; 0; 1)$ D. $\vec{u} = (-1; 0; 1)$

Câu 15: Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -2; 4)$, song song với mặt phẳng $x + y - z + 1 = 0$ và tạo với Oy một góc lớn nhất. Góc giữa d và Ox là:

- A. 60° B. 30° C. 45° D. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 16: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ và cách $A(1; -1; 1)$ một khoảng lớn nhất. Hỏi (P) nhận véc tơ nào dưới đây làm véc tơ pháp tuyến?

- A. $\vec{n} = (3; 1; -2)$ B. $\vec{n} = (1; -1; 0)$ C. $\vec{n} = (0; -2; 1)$ D. $\vec{n} = (1; 1; -1)$

Câu 17: Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox , và tạo với đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ một góc lớn nhất. Hỏi $mp(P)$ đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $A(3; -1; 1)$ B. $A(1; 3; 4)$ C. $A(1; 2; 1)$ D. $A(-1; 1; 2)$

Câu 18: Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1; 2; -1)$ vuông góc với trục Ox và cách điểm $M(2; 1; -2)$ một khoảng nhỏ nhất. Một véc tơ chỉ phương của d là:

- A. $\vec{u} = (3; -2; 1)$ B. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$ C. $\vec{u} = (0; 2; -1)$ D. $\vec{u} = (0; 1; 1)$

Câu 19: Gọi (P) là mặt phẳng qua gốc tọa độ O , vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x - y - z + 1 = 0$ và tạo với trục Oz một góc lớn nhất. Hỏi (P) đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $M(-2; 1; 1)$ B. $M(1; 2; -1)$ C. $M(1; 1; 1)$ D. $M(1; -1; 1)$

Câu 20: Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$ và cách điểm $A(2; -1; -1)$ một khoảng lớn nhất. Hỏi d đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M(3; -4; 1)$ B. $M(1; -2; 0)$ C. $M(2; 1; 2)$ D. $M(-2; -4; 0)$

Câu 21: Cho mặt phẳng (P): $x - y + z = 0$ và điểm $A(2;1;-1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và khoảng cách giữa Oy và d lớn nhất. Góc giữa d và Oz là:

- A. 45^0 B. $\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$ C. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ D. 60^0

Câu 22: Cho mặt phẳng (P): $x - y - 2z + 1 = 0$ và điểm $A(2;1;-1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P). Tính khoảng cách lớn nhất giữa Oy và d.

- A. $d(d; Oy) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ B. $d(d; Oy) = \frac{3}{\sqrt{5}}$ C. $d(d; Oy) = \frac{6}{\sqrt{5}}$ D. $d(d; Oy) = \frac{4}{\sqrt{5}}$

Câu 23: Cho hai điểm $A(0;0;3)$, $B(4;1;-2)$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 2z + 9 = 0$. Gọi M thuộc mặt cầu (S) sao cho $MA + 2MB$ nhỏ nhất. Hoành độ điểm M là:

- A. $x_M = 2$ B. $x_M = -3$ C. $x_M = -\frac{1}{2}$ D. $x_M = 5$

Câu 24: Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-2;4)$, song song với mặt phẳng $x + y - 2z + 1 = 0$ và tạo với Oy một góc lớn nhất. Một véc tơ chỉ phương của d là:

- A. $\vec{u} = (-1;5;2)$ B. $\vec{u} = (1;1;1)$ C. $\vec{u} = (5;1;3)$ D. $\vec{u} = (2;0;1)$

Câu 25: Cho mặt phẳng (P): $x - y + z - 1 = 0$ và điểm $A(2;1;0)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và khoảng cách giữa Ox và d lớn nhất. Một véc tơ chỉ phương của d là:

- A. $\vec{u} = (1;1;-1)$ B. $\vec{u} = (0;1;1)$ C. $\vec{u} = (1;1;1)$ D. $\vec{u} = (0;1;-1)$

Người gửi: Võ Trọng Trí

Trường THPT Anh Sơn 1- Nghệ An