

GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM HÌNH KHÔNG GIAN
PHẦN: THỂ TÍCH
(Thành công là giúp người khác thành công hơn mình)

Like page <http://facebook.com/habacsqu> để nhận thêm nhiều tài liệu hơn nữa.
Video bài giảng được phát miễn phí tại <http://youtube.com/habacsqu>

Một số lưu ý:

Để tính nhanh được hình không gian phần thể tích, cũng như các phần khác, các bạn phải nắm được các khái niệm cơ bản như: mặt bên, mặt đáy, và chiều cao.

Trước tiên chúng ta cần phải thống nhất với nhau một số ý như sau:

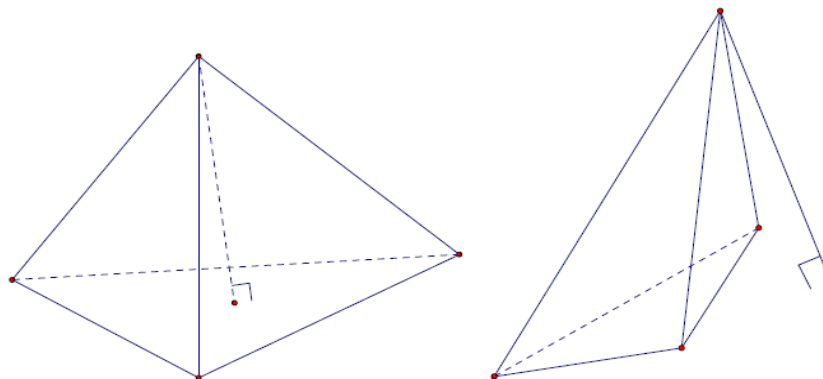
- + Đường cao là đường thẳng vuông góc kẻ từ đỉnh của hình cần tính tới mặt phẳng đáy.
- + Nếu đề cho cạnh nào đó vuông góc với đáy thì đó chính là đường cao.
- + Nếu đề cho mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao chắc chắn nằm trong mặt bên đó.
- + Không nên sử dụng phương pháp gán tọa độ vì rất mất thời gian. Chúng ta chỉ sử dụng hình không gian thuần túy để tính toán.
- + Khi tính toán, đề bài cho chiều dài các cạnh có chữ “a” thì chúng ta luôn coi nó là số 1 để tiện làm việc.

Trên đây là những lưu ý cần thiết để các bạn có thể giải nhanh được hình học không gian. Tuy nhiên, về mặt bản chất các bạn cần phải nắm được những kiến thức nền như quan hệ vuông góc, quan hệ song song mà chúng ta đã được học ở phần trước.

LÝ THUYẾT TỔNG QUÁT

(Phần 1: CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY)

- Ở phần này chúng ta chỉ cần chú ý đến đường cao của hình, đường cao là độ dài đoạn vuông góc hạ từ đỉnh xuống mặt đáy. Chân đường cao có thể nằm trong hoặc ở ngoài đáy.



- Các công thức tính nhanh trong hình học không gian:

Có rất nhiều công thức tính nhanh nhưng ở đây Thầy chỉ nêu ra một số công thức thường dùng để tính nhanh thôi nhé:

- Đường cao tam giác đều: $\text{cạnh} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Diện tích tam giác đều: $(\text{cạnh})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$
- Đường chéo hình vuông: $\text{cạnh} \cdot \sqrt{2}$
- Đường trung tuyến của tam giác vuông bằng một nửa cạnh huyền.
- Trong tam giác bất kỳ, đường trung bình (đoạn thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh bên có độ dài bằng một nửa cạnh còn lại).
- Các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Tính nhanh, thủ thuật, không có nghĩa là các bạn không học cũng biết làm nhanh, biết bấm máy tính, thành công thuộc về người chịu tìm hiểu, chịu mày mò, thì mới làm được. Thầy sẽ hướng dẫn các bạn các thao tác để làm sao chúng ta có thể **chọn được đáp án nhanh nhất và chính xác nhất** (trên nền các bạn đã nắm được những khái niệm cơ bản và những quan hệ vuông góc, quan hệ song song cơ bản mà chúng ta đã được học) giúp chúng ta hoàn thành tốt phần **HÌNH HỌC KHÔNG GIAN** trong năm nay.

CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA = 3a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = BC = 2a$, góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị nào sau đây:

A. $a^3\sqrt{6}$

B. $a^3\sqrt{2}$

C. $a^3\sqrt{3}$

D. $a^3\sqrt{5}/2$

Hướng dẫn giải

Phác họa hình ảnh theo đề bài. (Học sinh tự làm).

(Do SA vuông với đáy nên SA chính là đường cao và đề bài cho sẵn là $2a$ nên khỏi cần tìm chiều cao nữa.

Chúng ta tiến hành tìm diện tích đáy là diện tích tam giác ABC . Công thức:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \text{đáy} \cdot \text{chiều cao}$$

(Công thức trên không phải khi nào cũng xài được)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (\text{tích hai cạnh nào đó}) \cdot [\sin(\text{góc xen giữa hai cạnh đó})]$$

Ở bài này chúng ta sử dụng:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC}$$

Thế là xong phần tư duy nhé!)

Bắt đầu làm:

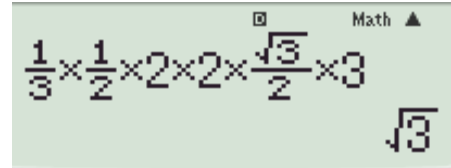
KỸ SƯ HỮU HỒNG

Cung cấp tài liệu ôn thi thpt

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3a = a^3 \sqrt{3}$$

Chọn C.

Chú ý: Phần này nếu thông thạo rồi các bạn có thể bấm máy phát ra luôn không phải nghĩ bằng cách cho a bằng 1. Và ghi nhớ rằng, thể tích luôn đi kèm với a^3 .



Bài 2: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với đáy, góc giữa SB và mặt phẳng SAC đáy là 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị nào?

A. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{12}$

B. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$

C. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{4}$

D. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{5}$

Hướng dẫn giải

Để làm nhanh được, chắc chắn các bạn cần phải nhớ kiến thức về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Nếu nhớ bạn sẽ biết ngay đó là góc $\widehat{BSI} = 30^\circ$. Còn nếu không, bạn sẽ rất khó khăn, Chứng minh như sau:

(Gọi I là trung điểm của AC)

Suy ra: $BI \perp AC$ (tam giác ABC đều).

Mà $BI \perp SA$ (vì $SA \perp ABC$).

Nên: $BI \perp SA$ và $BI \perp AC$ nên $BI \perp SAC$.

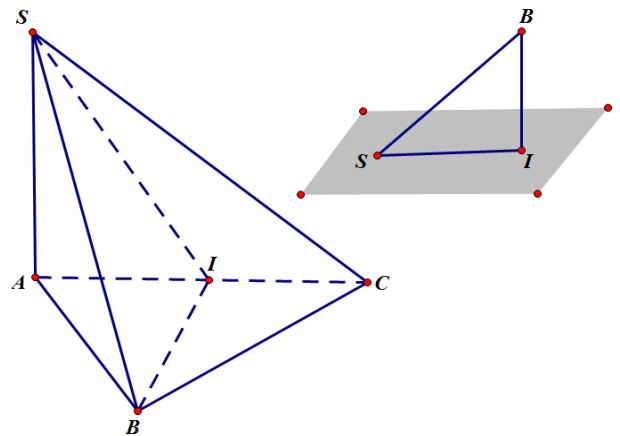
Suy ra, góc giữa SB và SAC là góc $\widehat{BSI} = 30^\circ$

Nếu bạn thành thạo, chỉ cần như sau:

Tam giác ABC đều nên diện tích là:

$$S_{ABC} = \frac{(\text{cạnh})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Tính SA :



BI là đường cao của tam giác đều ABC nên:

$$BI = (\text{cạnh}), \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SB \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$$

Tam giác SAB vuông tại B nên: $SA = \sqrt{SB^2 - BA^2} = a\sqrt{2}$.

Cuối cùng, thể tích bằng:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$$

Chọn A.

Bài 3: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy là tam giác vuông cân tại B. $AB = a$, SA vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30° . Gọi M là trung điểm của SC . Thể tích khối chóp $S.ABM$ là?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Hướng dẫn giải

Để làm được bài này các bạn cần phải nắm được quy tắc xác định góc giữa hai mặt phẳng. Nếu xác định được góc giữa hai mặt phẳng thành thạo thì bài này không có gì đáng ngại.

Còn nếu không biết thì bạn có thể làm như thế này:

Mặt phẳng (SBC) và (ABC) có giao tuyến BC.

Trong SBC có: $SB \perp BC$

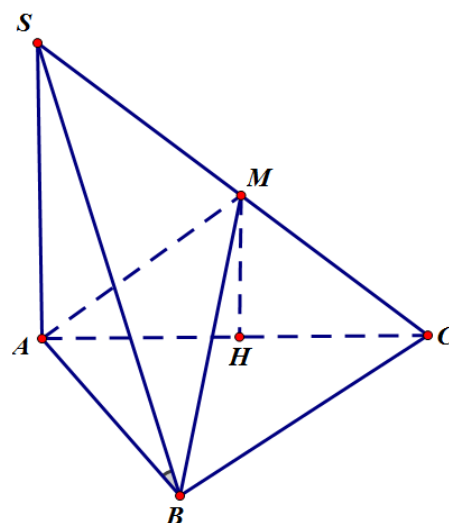
Trong ABC có: $AB \perp BC$

Nên góc giữa (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA} = 30^\circ$.

Rất mất thời gian, nếu rành rồi thì nhìn cái thấy luôn.

Tính nhanh như sau:

Chúng ta có thể tính thể tích khối chóp SABM bằng cách:



KỸ SƯ HƯ HỎNG

Cung cấp tài liệu ôn thi thpt

$$V_{SABM} = V_{SABC} - V_{MABC}$$

Tuy nhiên nếu xử lý theo cách này khá lồi thối và mất thời gian với các bạn học sinh trung bình thì có thể làm theo tỷ số thể tích như sau:

$$\frac{V_{SABM}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{AMB} = \frac{V_{SABC}}{2}$$

$$\frac{1}{3} \times \tan(30^\circ) \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Để tính thể tích của S.ABC rất đơn giản:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} (a \cdot \tan 30^\circ) \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{18}$$

$$\Rightarrow V_{AMB} = \frac{V_{SABC}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{36}$$

Bài 4: Cho hình chóp S.ABC, có đáy là tam giác vuông cân tại B. $AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối chóp S.BCMN.

A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$

Hướng dẫn giải

Ở bài này, đọc đề các bạn phải chú ý đến giả thiết, (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) ta sẽ thu được kết quả là **SA vuông góc với mặt phẳng đáy**.

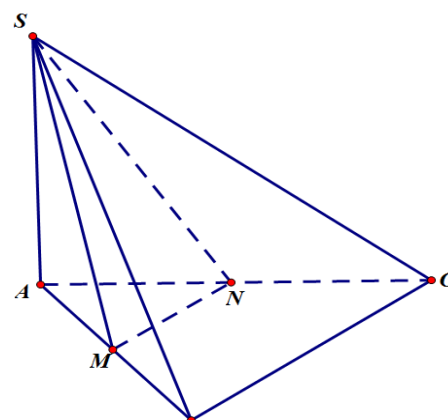
(Chúng ta có thể chứng minh điều này như sau:

(SAB) và (SAC) có giao tuyến là SA.

(SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy.

Nên ta thu được SA vuông góc với đáy).

Sau đó chúng ta mới tiến hành phác họa hình ảnh.



KỸ SƯ HỮU HỒNG

Cung cấp tài liệu ôn thi thpt

Giả thiết **mặt phẳng đi qua M và song song với BC cắt AC tại N** chúng ta có thể hiểu là **mặt phẳng (SMN) song song với BC**. Do đó chúng ta có hình vẽ **$MN // BC$** như sau:

Góc giữa (SBC) và (ABC) như bài trên chính là góc $\widehat{SBA}$.

Như vậy để tính được khối chóp S.BCMN chúng ta có thể tính như sau:

$$V_{SBCM N} = V_{SABC} - V_{SAMN}$$

Ngoài ra, các bạn còn có thể tính bằng công thức sau:

Chiều cao là SA, đáy là BCMN nên chúng ta có:

$$V_{SBCM N} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{BCM N}$$
$$= \frac{1}{3} (AB \cdot \tan 60^\circ) \cdot (BC + MN) \cdot \frac{MB}{2} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \sqrt{3} \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{\frac{a}{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$$

Một hàng duy nhất nhé! Chọn D.

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° . Thể tích khối chóp S.ABCD có giá trị nào sau đây?

A. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{a^3 \sqrt{5}}{3}$

Hướng dẫn giải

Ở ví dụ này là một ví dụ rất đơn giản. Nếu bạn rành rồi thì có thể không cần vẽ hình. Chỉ cần tưởng tượng trong đầu hình ảnh là xong. Nhưng ở đây Thầy vẫn tiến hành vẽ hình cho các bạn nhé

Như vậy, nhìn hình chúng ta biết ngay được góc giữa SC và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

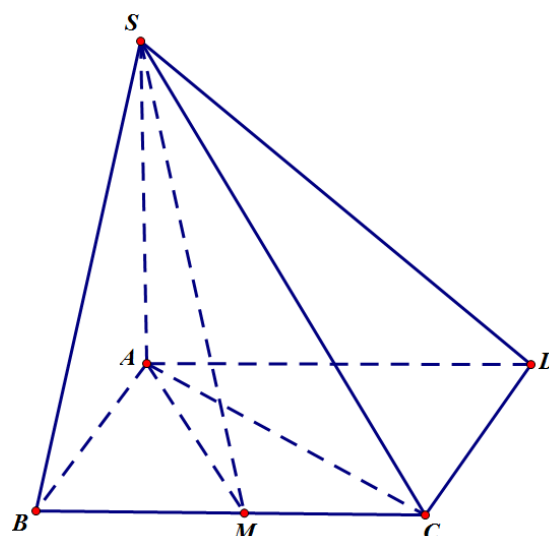
AC là đường chéo của hình vuông nên: $AC = a\sqrt{2}$.

Nhận xét: Tam giác SAC **vuông tại A** và có góc $\widehat{SCA} = 45^\circ$ nên **tam giác SAC vuông cân**. Nên ta được **$SA = AC = a\sqrt{2}$**

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot (a\sqrt{2}) \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

Chọn A.

Chú ý: Nếu bạn nào không phát hiện ra tính chất tam giác SAC vuông cân thì có thể tính $\tan 45^\circ$ bình thường cũng sẽ ra kết quả nhé.



Bài 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$, gọi M là trung điểm của BC , góc $\widehat{SMA} = 45^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ có giá trị nào sau đây?

A. $\frac{3a^3}{4}$

B. $\frac{5a^3}{6}$

C. $\frac{a^3}{3}$

D. $\frac{a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

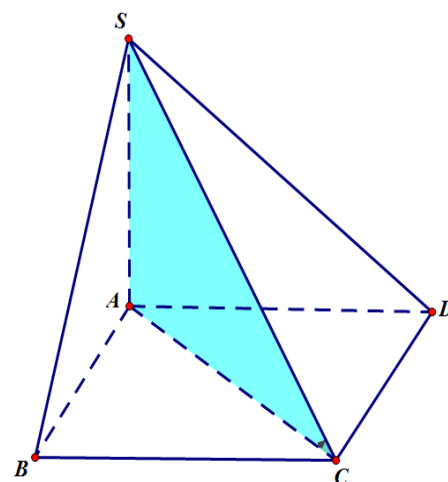
Sau một số ví dụ các bạn cũng đã nắm được phần nào cách giải nhanh. Bây giờ là cách mà chúng ta đi thi nhé!

Ta lắp luôn công thức cho nhanh:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD}$$

Tính từng cái rồi **“thả”** vào công thức là được nhé.

Trước tiên, chúng ta phải nhớ tính chất hình thoi “các đường chéo chính là các đường phân giác”.



KỸ SƯ HỮU HỒNG

Cung cấp tài liệu ôn thi thpt

Vậy các bạn sẽ có ngay: góc

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BAD} = 60^\circ$$

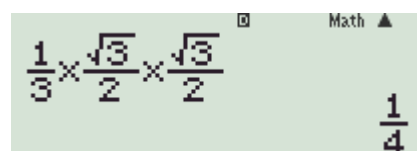
Dẫn đến, tam giác ABC là tam giác đều.

M lại là trung điểm của BC nên suy ra AM vuông góc với BC nên AM chính là đường cao của tam giác đều ABC. Suy ra:

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA \text{ (vì tam giác SAM vuông cân tại A).}$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AM = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$$



$$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}$$

Chọn D.

Bài 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$, gọi E là trung điểm của CD , H là hình chiếu vuông góc của S trên BE . Thể tích khối chóp $SABH$.

A. $\frac{7a^3}{15}$

B. $\frac{4a^3}{15}$

C. $\frac{a^3}{15}$

D. $\frac{2a^3}{15}$

Hướng dẫn giải

Đến đây thì bạn đừng lẩn tẩn gì nữa, vẽ hình xong chúng ta thấy ngay:

$$V_{SABH} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABH}$$

Chỉ còn diện tích tam giác ABH chưa có, chúng ta cùng đi tìm rồi thế vào công thức thể tích là xong!

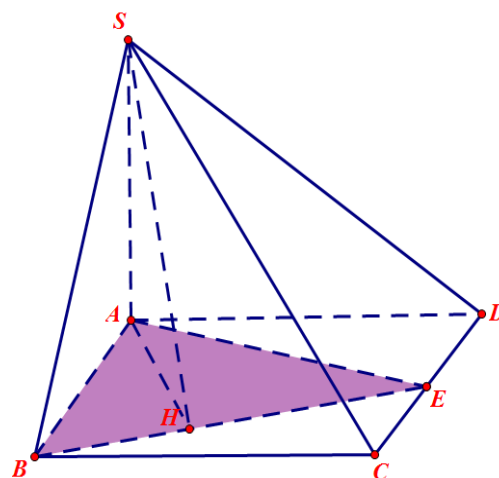
Chúng ta có nhận xét rất quan trọng là **$BE \perp AH$** .

(Để chứng minh điều này khá đơn giản.

$BE \perp SH$ và $BE \perp SA$

nên $BE \perp (SAH) \Rightarrow BE \perp AH$)

Tam giác **ABH** vuông tại **H** nên nếu tính được **AH** thì sẽ tìm được diện tích tam giác này. Để tính được **AH** có thể làm bằng nhiều cách, nhưng đơn giản nhất các bạn làm theo nhé.



Tính diện tích tam giác ABE.

$$S_{ABE} = S_{ABCD} - S_{ADE} - S_{BCE}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BE = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AH \cdot \sqrt{BC^2 + CE^2} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Tính diện tích tam giác ABH.

$$S_{ABH} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{5} \Rightarrow V_{SABH} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABH} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2}{5} = \frac{a^3}{15}$$

Chọn C.

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Các điểm A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SC, SD, SA, SB . Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính thể tích khối chóp $OA'B'C'D'$.

A. $\frac{7a^3}{24}$

B. $\frac{9a^3}{24}$

C. $\frac{a^3}{24}$

D. $\frac{5a^3}{24}$

Hướng dẫn giải

Ở bài này. Nếu các bạn muốn làm nhanh thì phải tính ý nhận ra thể tích khối chóp cần tính có đáy là mặt nào và chiều cao là cạnh nào. Ta có như sau:

$$V_{OA'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot OA' \cdot S_{A'B'C'D'}$$

Tại sao lại có điều này, rất đơn giản, ta lấy $A'B'C'D'$ là mặt phẳng đáy. Vì chúng ta nhận thấy ngay $OA' \perp A'B'C'D'$.

Chứng minh đơn giản như sau:

Mặt phẳng $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.

$SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp (A'B'C'D')$ mặt khác lại có $SA \parallel OA'$ (đường trung bình)

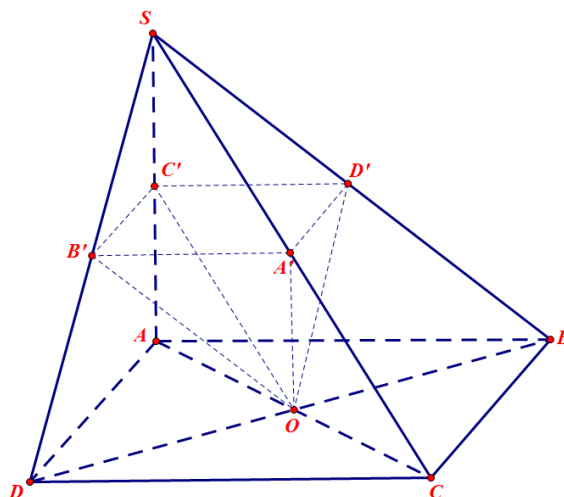
Suy ra: $OA' \perp A'B'C'D'$.

Chúng ta có ngay: $OA' = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$

$A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh $a/2$ nên diện tích $A'B'C'D'$ là: $S_{A'B'C'D'} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$

$$V_{OA'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot OA' \cdot S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^3}{24}$$

Chọn C.



MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC . Gọi I là giao điểm của BM và AC . Thể tích khối chóp $ANIB$ có giá trị?

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . M là điểm thuộc cạnh SA sao cho $AM = a\sqrt{3}/3$. Mặt phẳng (BCM) giao với SD tại N . Thể tích khối chóp $S.BCMN$ có giá trị?

A. $\frac{10a^3\sqrt{3}}{21}$

B. $\frac{10a^3\sqrt{3}}{23}$

C. $\frac{10a^3\sqrt{3}}{27}$

D. $\frac{10a^3\sqrt{3}}{33}$

Bài 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD . Thể tích khối chóp $OAIHK$ có giá trị nào sau đây?

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{21}$

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{23}$

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{33}$