GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM HÌNH KHÔNG GIAN
PHẦN: THỂ TÍCH
(Thành công là giúp người khác thành công hơn mình)

*Like page **http://facebook.com/habacsgu** để nhận thêm nhiều tài liệu hơn nữa.*
*Video bài giảng được phát miễn phí tại **http://youtube.com/habacsgu***

Phần 2: HÌNH CÓ MẶT BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

*Trước khi làm một bài hình có mặt bên vuông góc với mặt đáy các bạn nên nhớ, nếu mặt bên vuông góc với đáy, thì **đường cao sẽ nằm trong mặt bên đó**.*

Để xác định đường cao này, chỉ cần gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh, lên mặt phẳng đáy, hoặc cạnh đáy của mặt bên là xong nhé.

Đường cao thường vẽ về bên trái hoặc phía trong cùng của hình chóp.

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1: *Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, cho $AB = 3a, BC = 4a$. Hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) vuông góc với nhau. Cho $SB = 2a\sqrt{3}$, góc $\widehat{SBC} = 30^o$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có giá trị nào sau đây?*

A. $2a^3\sqrt{3}$ ***B***. $3a^3\sqrt{3}$ ***C***. $4a^3\sqrt{3}$ ***D***. $a^3\sqrt{3}$

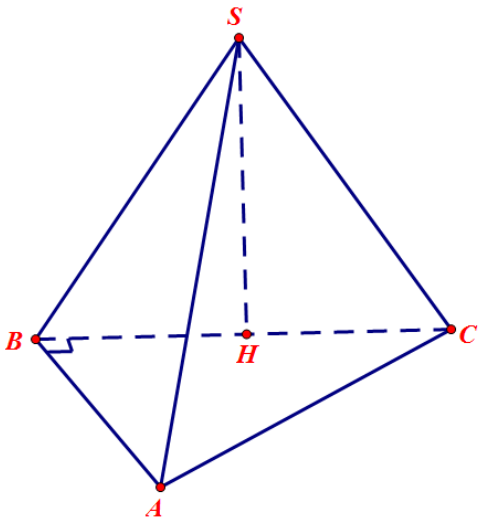
Hướng dẫn giải

Trước tiên, muốn xử lý tốt bài này chúng ta phác họa hình vẽ, và ghi nhớ rằng mặt vuông góc với đáy vẽ phía trong cùng hoặc bên trái của hình nhé.

Và như chúng ta đã biết, mặt bên vuông với đáy thì chỉ cần một động tác là chúng ta xác định được ngay đường cao.

Kẻ ***SH vuông góc với BC*** *suy ra* ***SH vuông với (ABC)*** *nên* ***SH là đường cao.***

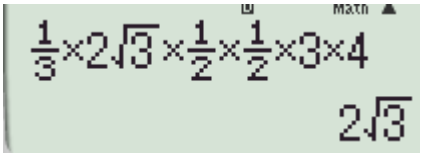
Do $\widehat{SBC} = 30^o$ *nên không cần mất công đi tính SH trước mà chúng ta thay hẳn vào công thức thể tích luôn.*



Ta có:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.SB.sin30^o.\frac{1}{2}.BA.BC$$

$$= \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.3a.4a = \mathbf{2a^3\sqrt{3}}$$



Chọn ***A****.*

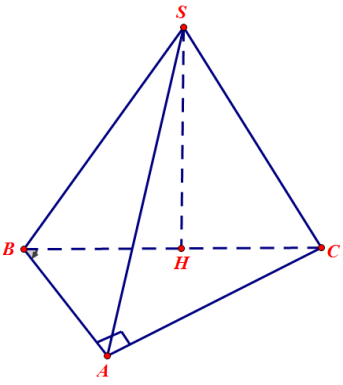
Ví dụ 2: *Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A. Góc ABC=30^o, tam giác SBC là tam giác đều có cạnh bằng a. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp S.ABC theo a có giá trị là bao nhiêu?*

A*.* $3a^3/16$ ***B****.* $a^3/16$ ***C****.* $3a^3/8$ ***D****.* $a^3/8$

Hướng dẫn giải

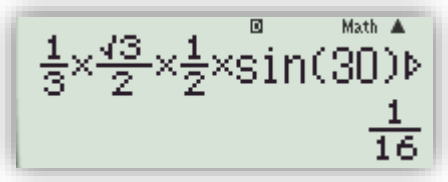
Ở bài này nếu bạn nào rành rồi thì tưởng tượng ra hình rồi bấm máy luôn cũng xong nữa. Nhưng chúng ta vẫn vẽ hình cho dễ nói chuyện nhé.

Để xác định đường cao chỉ việc vẽ ***SH vuông góc với BC****, thì* ***SH vuông với (ABC)*** *và* ***SH chính là đường cao****.*



Nhận thấy ngay, tam giác SBC là tam giác đều cạnh a.

SH chính là đường cao của tam giác đều nên $SH = a\sqrt{3}/2$.



Lắp luôn công thức:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.SH.\frac{1}{2}.AC.AB$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.BC.sin30^o.BC.cos30^o$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.a.sin30^o.a.cos30^o = \boldsymbol{\frac{a^3}{16}}$$

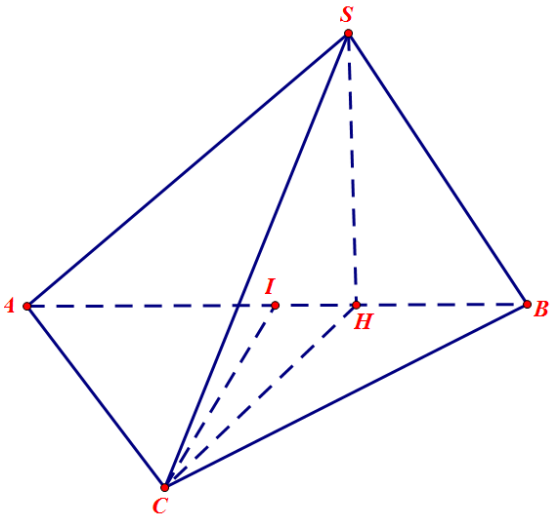
Chọn ***B.***

Ví dụ 3: *Cho hình chóp* $S.ABC$ *có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng* (ABC) *là điểm H thuộc AB sao cho* $HA = 2HB$*, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng* (ABC) *bằng* 60^o*. Thể tích của khối chóp* $S.ABC$ *có giá trị là:*

A. $\frac{a^3\sqrt{7}}{24}$ ***B.*** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ ***C.*** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ ***D.*** $\frac{a^3\sqrt{7}}{12}$

Hướng dẫn giải

Ở bài này, chú ý dữ kiện, ***hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC),*** *mà* ***hình chiếu lại nằm trên AB*** *nên bắt buộc* ***SH vuông góc với (ABC)****. Từ đó ta vẽ hình.*



Một chú ý nữa là góc giữa SC và (ABC) *bằng* 60^o*.*

Chúng ta xác định ngay, góc đó là góc $\widehat{SCH} = 60^o$*.*

Diện tích đáy là diện tích tam giác đều nên:

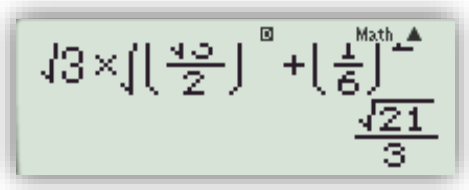
$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Vấn đề khó nhất đặt ra ở bài này là tính được chiều cao SH. Để làm được điều này, chúng ta gọi I là trung điểm của AB.

Chúng ta sẽ đi tính CH.

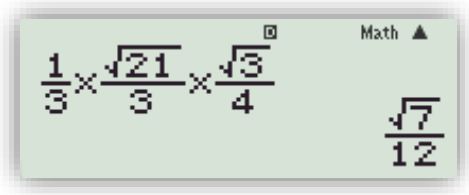
Ở đây để làm nhanh, hãy chú ý đến dữ kiện:

$$HA = 2HB$$



Ta có: $IH = IB - HB = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}AB = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$

Tính nhanh như sau:



$$SH = CH.tan60^o = \sqrt{3}.\sqrt{CI^2 + IH^2}$$

$$= \sqrt{3}..\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

Cuối cùng:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^3\sqrt{21}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$$

*Chọn **D**.*

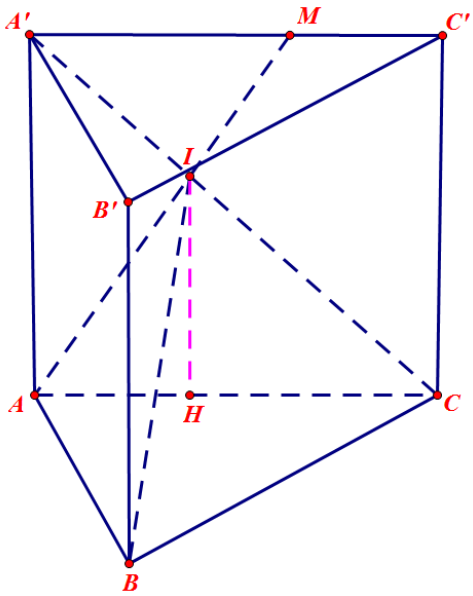
Ví dụ 4: *Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B. $AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. M là trung điểm của $A'C'$. Gọi I là giao điểm của AM và $A'C$. Thể tích khối chóp $IABC$ có giá trị là?*

A. $\frac{4a^3}{9}$ **B.** $\frac{4a^3}{7}$ **C.** $\frac{7a^3}{9}$ **D.** $\frac{a^3}{7}$

Hướng dẫn giải

Ở bài này, chắc chắn phải vẽ hình trước, vì hình lăng trụ rất khó hình dung nhé.

Nhớ: ***Lăng trụ đứng thì nó đứng chứ không xiên nhé.*** ☺



Hình đề bài cho là lăng trụ đứng, nên các mặt bên vuông góc với đáy nên chúng ta có ngay, mặt phẳng (IAC) ***vuông góc với*** (ABC).

Đơn giản chỉ cần kẻ ***IH vuông góc BC (hoặc*** $IH//AA'$***)*** *đều như nhau.*

Suy ra: ***IH vuông góc với*** (ABC) *nên* ***IH chính là đường cao*** *của hình chóp* $IABC$.

Bây giờ chỉ việc tính mà thôi!

$$V_{IABC} = \frac{1}{3}.IH.S_{ABC}$$

Để dễ nhìn thì chúng ta tính từng thông số một cho đơn giản:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.BA.BC = \frac{1}{2}.a.\sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{1}{2}.a.\sqrt{A'C^2 - AA'^2 - AB^2}$$

$$= \frac{1}{2}.a.\sqrt{9a^2 - 4a^2 - a^2} = a^2$$

(Giải thích thêm)

Tam giác ABC vuông tại B nên ta có: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$

Tac giác A'AC vuông tại A nên ta có: $AC^2 = A'C^2 - AA'^2$

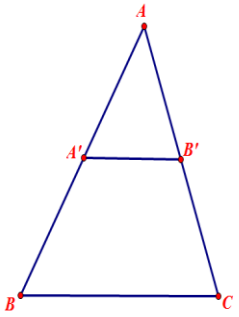
Còn lại là chiều cao IH, để tính được IH, chúng ta sử dụng định lý Thales:

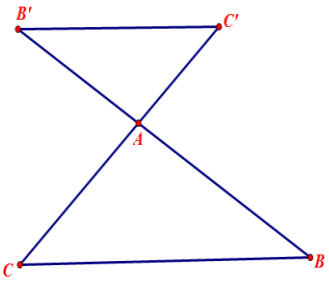
Nhắc lại: (Xem hình)

Nếu $AB//A'B'$ ***ta có các kết quả như sau:***

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Áp dụng cho cả hai hình.





Hình thứ hai chính là hệ quả của định lý Thales nhé.

Áp dụng vào bài chúng ta có như sau:

Xét tam giác CAA': (sử dụng cái màu xanh thôi)

$$\frac{IH}{AA'}=\frac{CI}{CA'}=\frac{CH}{CA}\Rightarrow IH=CI.\frac{AA'}{CA}=CI.\frac{2a}{3a}$$

Để có được CI, chúng ta áp dụng định lý Thales đảo như sau:

$$\frac{IA'}{IC}=\frac{IM}{IA}=\frac{A'M}{AC}=\frac{1}{2}$$

$$(Do\ AC=2A'M)$$

$$\Rightarrow IC=2IA'\Rightarrow IC=\frac{2}{3}A'C=\frac{2}{3}.3a=2a\Rightarrow IH=2a.\frac{2a}{3a}=\frac{4a}{3}$$

Cuối cùng:

$$V_{IABC}=\frac{1}{3}.IH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{4a}{3}.a^2=\frac{4a^3}{9}$$

Chọn ***A.***

Ví dụ 5: *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 2a. Tam giác SAB vuông tại S. Cạnh bên $SA=a$, mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M và N lần lượt là ttrung điểm của AB và BC. Thể tích khối chóp $S.BMDN$.*

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ ***B.*** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ ***C.*** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ ***D.*** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn giải

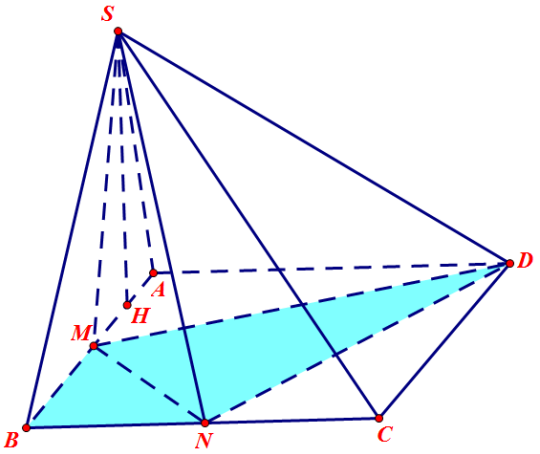
Trước tiên chúng ta vẽ hình, ở đây khác với hình chóp tam giác, mặt bên phía trong cùng, còn hình chóp tứ giác thì mặt bên nằm bên tay trái nhé. Vẽ như thế rất dễ nhìn và dễ tính nha các bạn.

Qua hình chúng ta nhận xét ngay được đường cao của hình chóp này là: ***SH****.*

(Vì mình kẻ SH vuông với AB, và dĩ nhiên SH vuông góc với đáy, điều này khỏi CM).

Như vậy, ta có ngay công thức thể tính của bài này:

$$V_{SMNDN} = \frac{1}{3}.SH.S_{BMDN}$$



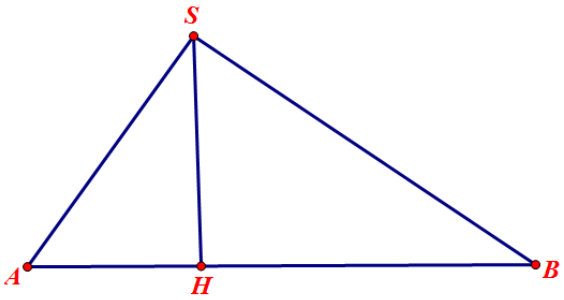
Diện tích đáy quá đơn giản:

$$S_{BMDN} = S_{ABCD} - S_{AMD} - S_{CND}$$

$$= 4a^2 - \frac{1}{2}.AM.AD - \frac{1}{2}.NC.DC$$

$$= 4a^2 - \frac{1}{2}.a.2a - \frac{1}{2}.a.2a = 2a^2$$

Để tính được SH chúng ta hãy cùng xem hình vẽ phụ cho ***tam giác SAB (SAB vuông ở S).***

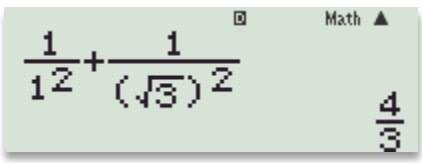


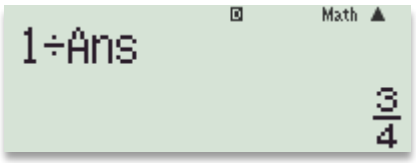
Đề bài cho $SA = a, AB = 2a$ nên tính ngay được $SB = a\sqrt{3}$. Áp dụng công thức tính SH:

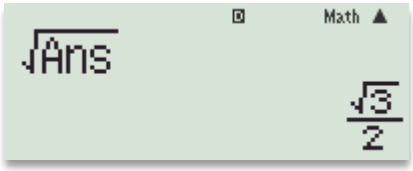
$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2}$$

Những bước tính thông thường Thầy đã chỉ các bạn cách tính rồi, đoạn tính SH này nhiều bạn còn quy đồng rồi chia, như thế rất mất thời gian khi có phân số, chúng ta ấn máy tính để tính luôn như sau, trước hết bỏ hết a đi nhé.

Ấn máy tính:







Nhìn có vẻ sơ đẳng và đơn giản, nhưng khi các bạn tính toán những cạnh chứa căn và phân số phức tạp, cách bấm này sẽ rất khó sai! ***(Hạn chế thời gian và phép tính chính là mấu chốt của việc giải nhanh toán)***

$$\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow \boldsymbol{SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Cuối cùng ta tính được thể tích ***S.BMDN:***

$$V=\frac{1}{3}.SH.S_{BMDN}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Chọn B.

Ví dụ 6: *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAD đều, mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N. P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Thể tích của khối chóp CMNP có giá trị là?*

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{32}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{96}$

Hướng dẫn giải

Trước tiên các bạn hãy vẽ hình ra, đề bài yêu cầu tính thể tích của CMNP, hay còn có thể gọi nhanh là ***NPCN****. Có nghĩa là chúng ta đã lấy M làm đỉnh của hình chóp này.*

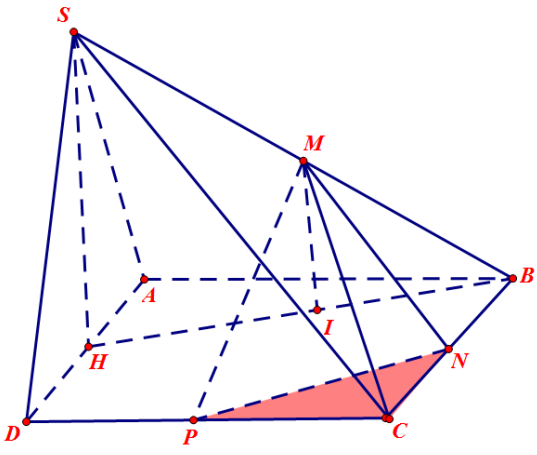
(Để tính được thể tích này chúng ta cần xác định đường cao và diện tích đáy, ở đây, nếu khéo léo các bạn sẽ biết ngay được đường cao bằng một nửa SH).

Gọi ***H là trung điểm của AD,*** *suy ra* ***SH vuông góc AD****.*

Kẻ ***MI vuông góc với BH*** *(I thuộc BH) khi đó dễ dàng ta chứng minh được* ***MI vuông với mặt phẳng đáy*** *và quan trọng nhất* ***MI chính là đường cao của hình chóp*** *cần tính.*

M là trung điểm, MI lại song song với SH *(do cùng vuông góc đáy) nên MI chính là* ***đường trung bình*** *của tam giác SBH. Nên ta có:*

$$\boldsymbol{MI=\frac{1}{2}SH}$$



Tam giác SAD đều nên ta dễ dàng có được $SH = a\sqrt{3}/2$.

$$\Rightarrow \boldsymbol{MI = \frac{a\sqrt{3}}{4}}$$

Giờ chỉ tính thể tích của khối chóp MPCN.

$$\boldsymbol{V_{MPCN} = \frac{1}{3}.MI.S_{PCN} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{2}.PC.CN = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}}$$

Chọn ***C.***

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Câu 1: *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SD=3a/2. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của AB. Thể tích khối chóp S.ABCD có giá trị nào sau đây:*

A. $a^3/3$ ***B***. $2a^3/3$ ***C***. $2a^3$ ***D***. $2a^3/5$

Câu 2: *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D. Cho AB=AD=2a, CD=a, góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng 60º. Gọi I là trung điểm của AD, 2 mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông với với đáy. Thể tích khối chóp S.ABCD là?*

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ ***B***. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ ***C***. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ***D***. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$