

TÀI LIỆU TOÁN 12

TỔNG HỢP LÝ THUYẾT

ÔN THI THPT QUỐC GIA 2017

<i>Phần 1. Ứng dụng của đạo hàm</i>	<i>_01_</i>
<i>Phần 2. Hàm số lũy thừa, mũ, lôgarit</i>	<i>_15_</i>
<i>Phần 3. Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng</i>	<i>_21_</i>
<i>Phần 4. Số phức</i>	<i>_31_</i>
<i>Phần 5. Khối đa diện</i>	<i>_33_</i>
<i>Phần 6. Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu</i>	<i>_45_</i>
<i>Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz</i>	<i>_53_</i>

Nguyễn Văn Lực – Cần Thơ
FB: www.facebook.com/VanLuc168

I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- a) Nếu hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên K thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$
 b) Nếu hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên K thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$
- $[f(x) \text{ đồng biến trên } K] \Rightarrow [f'(x) \geq 0 \text{ với mọi } x \in K]$
 - $[f(x) \text{ nghịch biến trên } K] \Rightarrow [f'(x) \leq 0 \text{ với mọi } x \in K]$
 - $[f'(x) = 0 \text{ với mọi } x \in K] \Rightarrow [f(x) \text{ không đổi trên } K]$

Định lý 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên K
 b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên K
 c) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ **không đổi** trên K
- $[f'(x) > 0 \text{ với mọi } x \in K] \Rightarrow [f(x) \text{ đồng biến trên } K]$
 - $[f'(x) < 0 \text{ với mọi } x \in K] \Rightarrow [f(x) \text{ nghịch biến trên } K]$

Định lý 3: (Định lý mở rộng) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- a) Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn thuộc K thì hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên K .
 b) Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn thuộc K thì hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên K .

Định lý 4: Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), ta có

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

- a) Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)
đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 b) Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)
nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Phần 1. Ứng dụng của đạo hàm

NHẮC LẠI

Định lý: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ta có:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ \bullet \quad f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

VẤN ĐỀ 1: Xét chiều biến thiên của hàm số

Để xét chiều biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước như sau:

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Tính y' . Tìm các điểm mà tại đó $y' = 0$ hoặc y' không tồn tại (gọi là các điểm tới hạn)
- Lập bảng xét dấu y' (bảng biến thiên). Từ đó kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

VẤN ĐỀ 2: Tìm điều kiện để hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định (hoặc trên từng khoảng xác định)

Cho hàm số $y = f(x, m)$, m là tham số, có tập xác định D .

- Hàm số f đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$.
- Hàm số f nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D$.

Từ đó suy ra điều kiện của m .

Chú ý:

1) $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

2) Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ thì:

$$\begin{aligned} \bullet \quad y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \\ a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} & \bullet \quad y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \\ a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3) Định lý về dấu của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$:

- Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a .
- Nếu $\Delta = 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a (trừ $x = -\frac{b}{2a}$)
- Nếu $\Delta > 0$ thì $g(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và trong khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ khác dấu với a , ngoài khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ cùng dấu với a .

4) So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_1 < x_2 < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} & \bullet \quad 0 < x_1 < x_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} & \bullet \quad x_1 < 0 < x_2 &\Leftrightarrow P < 0 \end{aligned}$$

Phần 1. Ứng dụng của đạo hàm

5) Để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến (nghịch biến) $(x_1; x_2)$ bằng d thì ta thực hiện các bước sau:

- Tính y' .
- Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và nghịch biến:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Biến đổi } |x_1 - x_2| = d \text{ thành } (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2 \quad (2)$$

- Sử dụng định lý Viet đưa (2) thành phương trình theo m .
- Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

VẤN ĐỀ 3: Ứng dụng tính đơn điệu để chứng minh bất đẳng thức

Để chứng minh bất đẳng thức ta thực hiện các bước sau:

- Chuyển bất đẳng thức về dạng $f(x) > 0$ (hoặc $<$, $\geq$, $\leq$). Xét hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định do đề bài chỉ định.
- Xét dấu $f'(x)$. Suy ra hàm số đồng biến hay nghịch biến.
- Dựa vào định nghĩa sự đồng biến, nghịch biến để kết luận.

Chú ý:

- 1) Trong trường hợp ta chưa xét được dấu của $f'(x)$ thì ta đặt $h(x) = f'(x)$ và quay lại tiếp tục xét dấu $h'(x)$... cho đến khi nào xét dấu được thì thôi.
- 2) Nếu bất đẳng thức có hai biến thì ta đưa bất đẳng thức về dạng: $f(a) < f(b)$.
Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x)$ trong khoảng $(a; b)$.

VẤN ĐỀ 4: Chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất

Để chứng minh phương trình $f(x) = g(x)$ (*) có nghiệm duy nhất, ta thực hiện các bước sau:

- Chọn được nghiệm x_0 của phương trình.
- Xét các hàm số $y = f(x)$ (C_1) và $y = g(x)$ (C_2). Ta cần chứng minh một hàm số đồng biến và một hàm số nghịch biến. Khi đó (C_1) và (C_2) giao nhau tại một điểm duy nhất có hoành độ x_0 . Đó chính là nghiệm duy nhất của phương trình (*).

Chú ý: Nếu một trong hai hàm số là hàm hằng $y = C$ thì kết luận trên vẫn đúng.

Phần 1. Ứng dụng của đạo hàm

2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Định lý 1: (điều kiện cần để hàm số có cực trị)

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$

Định lý 2: (điều kiện đủ thứ I để hàm số có cực trị). Quy tắc 1

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại điểm x_0 .
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại điểm x_0 .

Định lý 3: (điều kiện đủ thứ II để hàm số có cực trị). Quy tắc 2

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác không tại điểm x_0 . Khi đó

- Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại điểm x_0
- Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại điểm x_0

Định lý 4:

- Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có hai điểm cực trị
 $\Leftrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
- Hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có ba điểm cực trị
 $\Leftrightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

VẤN ĐỀ 1: Tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 1: Dùng định lý 1.

- Tìm $f'(x)$.
- Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.
- Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i .

Quy tắc 2: Dùng định lý 2.

- Tính $f'(x)$.
 - Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm x_i ($i = 1, 2, \dots$).
 - Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots$).
- Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_i .

Phần 1. Ứng dụng của đạo hàm

Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_i .

VẤN ĐỀ 2: Tìm điều kiện để hàm số có cực trị

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$ hoặc tại x_0 không có đạo hàm.
2. Để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 thì $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0 .

Chú ý:

• Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó nếu x_0 là điểm cực trị thì ta có thể tính giá trị cực trị $y(x_0)$ bằng hai cách:

$$+ y(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$$

$$+ y(x_0) = Ax_0 + B, \text{ trong đó } Ax + B \text{ là phần dư trong phép chia } y \text{ cho } y'.$$

• Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'} = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ($aa' \neq 0$) có cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{b'}{a'}$.

Khi đó nếu x_0 là điểm cực trị thì ta có thể tính giá trị cực trị $y(x_0)$ bằng hai cách:

$$y(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad \text{hoặc} \quad y(x_0) = \frac{P'x_0}{Q'x_0}$$

• Khi sử dụng điều kiện cần để xét hàm số có cực trị cần phải kiểm tra lại để loại bỏ nghiệm ngoại lai.

• Khi giải các bài tập loại này thường ta còn sử dụng các kiến thức khác nữa, nhất là định lý Vi-et.

VẤN ĐỀ 3: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị

1) Hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

• Chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được: $f(x) = Q(x) \cdot f'(x) + Ax + B$.

• Khi đó, giả sử $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ là các điểm cực trị thì:
$$\begin{cases} y_1 = fx_1 = Ax_1 + B \\ y_2 = fx_2 = Ax_2 + B \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Các điểm $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ nằm trên đường thẳng $y = Ax + B$.

2) Hàm số phân thức $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$.

• Giả sử $(x_0; y_0)$ là điểm cực trị thì $y_0 = \frac{P'(x_0)}{Q'(x_0)}$.

• Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là: $y = \frac{P'(x)}{Q'(x)} = \frac{2ax + b}{d}$.

3. GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

VẤN ĐỀ 1: Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách lập bảng biến thiên

Cách 1: Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng.

- Tính $f'(x)$.
- Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Cách 2: Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số liên tục trên một đoạn $[a; b]$.

- Tính $f'(x)$.
- Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm được các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên $[a; b]$ (nếu có).
- Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.
- So sánh các giá trị vừa tính và kết luận.

$$M = \max_{[a;b]} f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

$$m = \min_{[a;b]} f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

VẤN ĐỀ 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách dùng bất đẳng thức

Cách này dựa trực tiếp vào định nghĩa GTLN, GTNN của hàm số.

- Chứng minh một bất đẳng thức.
- Tìm một điểm thuộc D sao cho ứng với giá trị ấy, bất đẳng thức vừa tìm được trở thành đẳng thức.

Một số kiến thức thường dùng:

$$a) f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

b) Bất đẳng thức Cô-si:

Với hai số a, b không âm ($a, b \geq 0$) ta luôn có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$

Với ba số a, b, c không âm ($a, b, c \geq 0$) ta luôn có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

c) Một số bất đẳng thức cơ bản thường dùng

$$1) a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$2) (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$3) (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Phần 1. Ứng dụng của đạo hàm

VẤN ĐỀ 3: Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách dùng miền giá trị

Xét bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x)$ trên một miền D cho trước.

Gọi y_0 là một giá trị tùy ý của $f(x)$ trên D , thì hệ phương trình (ẩn x) sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = y_0 & (1) \\ x \in D & (2) \end{cases}$$

Tùy theo dạng của hệ trên mà ta có các điều kiện tương ứng. Thông thường điều kiện ấy (sau khi biến đổi) có dạng: $m \leq y_0 \leq M$ (3)

Vì y_0 là một giá trị bất kì của $f(x)$ nên từ (3) ta suy ra được:

$$\min_D f(x) = m; \max_D f(x) = M$$

VẤN ĐỀ 4: Sử dụng GTLN, GTNN của hàm số trong PT, HPT, BPT

Giả sử $f(x)$ là một hàm số liên tục trên miền D và có $\min_D f(x) = m; \max_D f(x) = M$. Khi đó:

1) Hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = \alpha \\ x \in D \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq \alpha \leq M$.

2) Hệ bất phương trình $\begin{cases} f(x) \geq \alpha \\ x \in D \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow M \geq \alpha$.

3) Hệ bất phương trình $\begin{cases} f(x) \leq \beta \\ x \in D \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq \beta$.

4) Bất phương trình $f(x) \geq \alpha$ đúng với mọi $x \Leftrightarrow m \geq \alpha$.

5) Bất phương trình $f(x) \leq \beta$ đúng với mọi $x \Leftrightarrow M \leq \beta$.

4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

1. Định nghĩa:

• Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

• Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

• Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$ được gọi là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

2. Chú ý:

a) Nếu $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm số phân thức hữu tỷ.

• Nếu $Q(x) = 0$ có nghiệm x_0 thì đồ thị có tiệm cận đứng $x = x_0$.

• Nếu bậc $(P(x)) \leq$ bậc $(Q(x))$ thì đồ thị có tiệm cận ngang.

• Nếu bậc $(P(x)) =$ bậc $(Q(x)) + 1$ thì đồ thị có tiệm cận xiên.

b) Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của tiệm cận xiên, ta có thể áp dụng các công thức sau:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$$

$$\text{hoặc } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

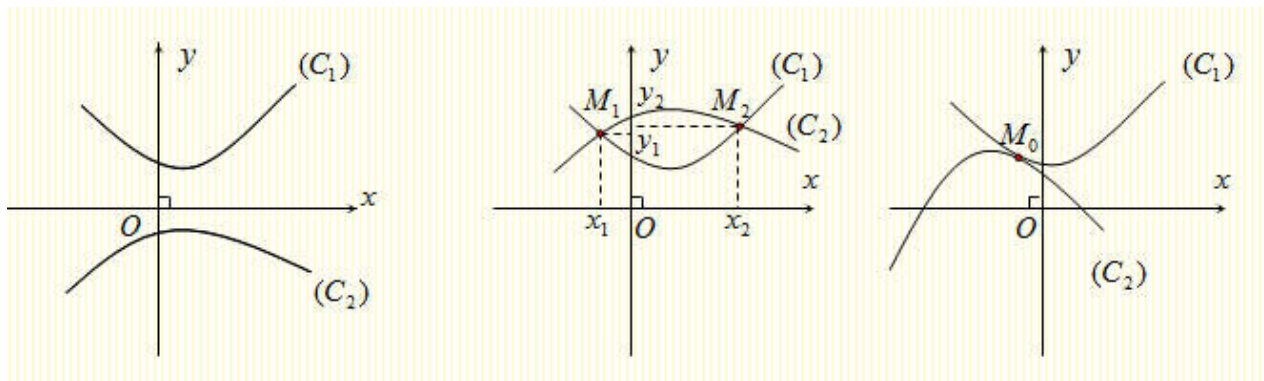
Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

- Tìm tập xác định của hàm số.
 - Xét sự biến thiên của hàm số:
 - + Tính y' .
 - + Tìm các điểm tại đó đạo hàm y' bằng 0 hoặc không xác định.
 - + Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
 - + Lập bảng biến thiên ghi rõ dấu của đạo hàm, chiều biến thiên, cực trị của hàm số.
 - Vẽ đồ thị của hàm số:
 - + Vẽ các đường tiệm cận (nếu có) của đồ thị.
 - + Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị như giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (trong trường hợp đồ thị không cắt các trục tọa độ hoặc việc tìm tọa độ giao điểm phức tạp thì có thể bỏ qua). Có thể tìm thêm một số điểm thuộc đồ thị để có thể vẽ chính xác hơn.
 - + Nhận xét về đồ thị: Chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng (nếu có) của đồ thị.
-

6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài toán tổng quát

Trong mp(Oxy). Hãy xét sự tương giao của đồ thị hai hàm số: $\begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \end{cases}$



(C_1) và (C_2) không có điểm chung (C_1) và (C_2) cắt nhau (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau

Phương pháp chung:

- * Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số đã cho:

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

- * Tùy theo số nghiệm của phương trình (1) mà ta kết luận về số điểm chung của hai đồ thị (C_1) và (C_2) .

Lưu ý:

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) .

Ghi nhớ: Số nghiệm của pt (1) bằng số giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) .

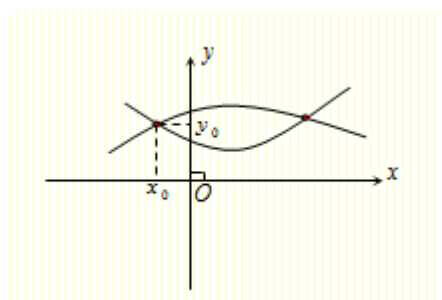
Chú ý 1 :

- * (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không có điểm chung
- * (1) có n nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) có n điểm chung

Chú ý 2 :

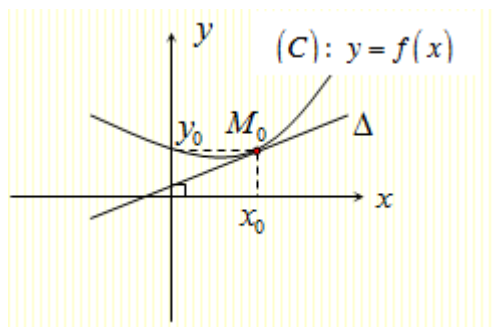
- * Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ điểm chung của (C_1) và (C_2) .

Khi đó tung độ điểm chung là $y_0 = f(x_0)$ hoặc $y_0 = g(x_0)$.



7. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Dạng 1: Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$



Phương pháp:

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0; y_0)$ có dạng:

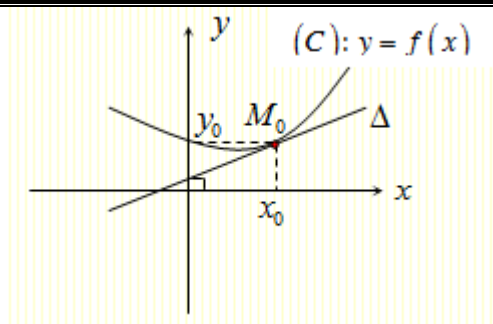
$$y - y_0 = k(x - x_0) \text{ hay } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Trong đó: x_0 : hoành độ tiếp điểm

y_0 : tung độ tiếp điểm và $y_0 = f(x_0)$

k : hệ số góc của tiếp tuyến và được tính bởi công thức: $k = f'(x_0)$

Dạng 2: Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước



Phương pháp: Ta có thể tiến hành theo các bước sau

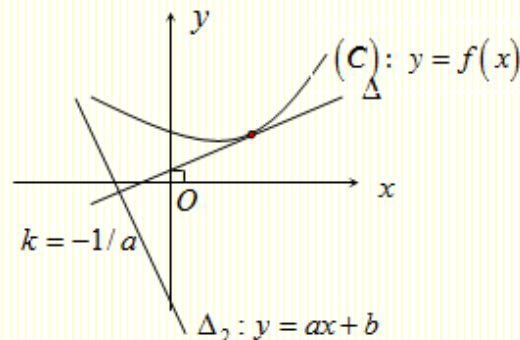
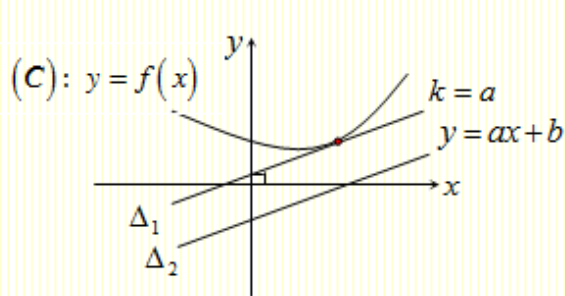
Bước 1: Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C)

Bước 2: Tìm x_0 bằng cách giải phương trình: $f'(x_0) = k$, từ đó suy ra $y_0 = f(x_0) = ?$

Bước 3: Thay các yếu tố tìm được vào phương trình: $y - y_0 = k(x - x_0)$ ta sẽ được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Phần 1. Ứng dụng của đạo hàm

Chú ý : Đối với dạng 2 người ta có thể cho hệ số góc k dưới dạng gián tiếp như : tiếp tuyến song song tiếp tuyến vuông góc với một đường thẳng cho trước .



Khi đó ta cần phải sử dụng các kiến thức sau:

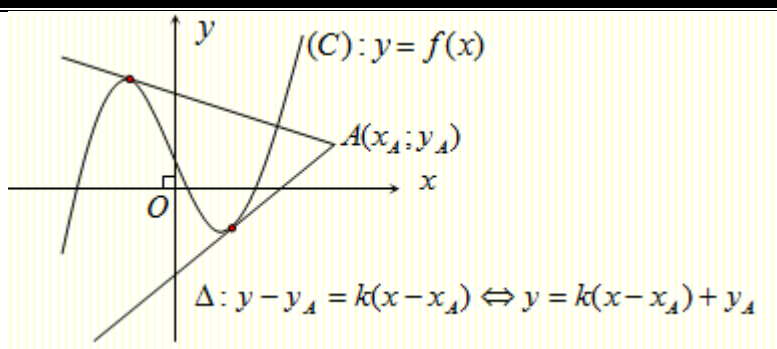
Định lý 1: Nếu đường thẳng (Δ) có phương trình dạng: $y = ax + b$ thì hệ số góc của (Δ) là:

$$k_{\Delta} = a$$

Định lý 2: Trong mp(Oxy) cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) . Khi đó:

$$\begin{aligned} \Delta_1 // \Delta_2 &\Leftrightarrow k_{\Delta_1} = k_{\Delta_2} \\ \Delta_1 \perp \Delta_2 &\Leftrightarrow k_{\Delta_1} \cdot k_{\Delta_2} = -1 \end{aligned}$$

Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$



Phương pháp : Ta có thể tiến hành theo các bước sau

Bước 1: Viết phương trình tiếp tuyến (d) với (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$

$$(d): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (*)$$

Bước 2: Định x_0 để (d) đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ Ta có:

$$(d) \text{ đi qua điểm } A(x_A; y_A) \Leftrightarrow y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + f(x_0) \quad (1)$$

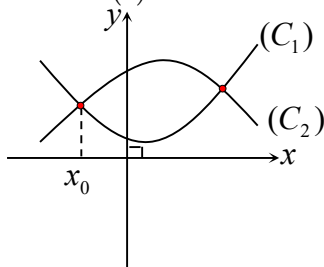
Bước 3: Giải phương trình (1) tìm x_0 . Thay x_0 tìm được vào $(*)$ ta sẽ được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

8. BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

Cơ sở của phương pháp

Xét phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ giao điểm của $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$



Bài toán: Bằng đồ thị hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình dạng:
 $f(x) = m$ (*)

Phương pháp:

Bước 1: Xem (*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

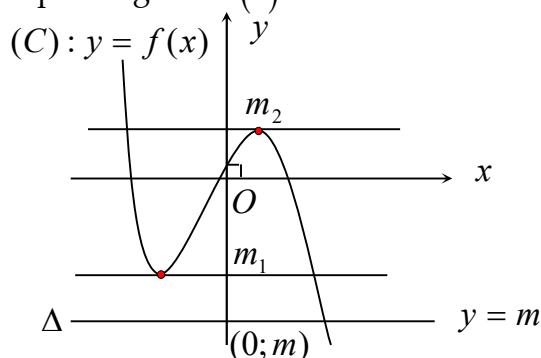
- $(C): y = f(x)$: (C) là đồ thị cố định
- $(\Delta): y = m$: (Δ) là đường thẳng đi động cùng phương Ox và cắt Oy tại $M(0;m)$

Bước 2: Vẽ (C) và (Δ) lên cùng một hệ trục tọa độ

Bước 3: Biện luận theo m số giao điểm của (Δ) và (C)

Từ đó suy ra số nghiệm của phương trình (*)

Minh họa:

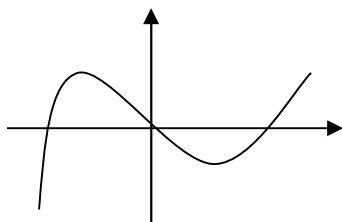


Dạng: $f(x) = g(m)$ giải tương tự

9. TÌM ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , tập hợp (C) tất cả các điểm có tọa độ $(x; f(x))$ với $x \in D$ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



Từ định nghĩa ta có: $(C) = \{M / M(x; y) \text{ với } x \in D \text{ và } y = f(x)\}$

$$M(x_0; y_0) \in (C) \Leftrightarrow x_0 \in D \text{ và } y_0 = f(x_0)$$

Phương pháp chung

Đặt $M(x_0, y_0) \in (C)$ với $y_0 = f(x_0)$ là điểm cần tìm;

Từ điều kiện cho trước ta tìm một phương trình chứa x_0 ;

Giải phương trình tìm x_0 , suy ra $y_0 = f(x_0) \rightarrow M(x_0; y_0)$.

II. HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ HÀM SỐ LOGARIT

§1. LŨY THỪA

1. Định nghĩa lũy thừa

Số mũ α	Cơ số a	Lũy thừa a^α
$\alpha = n \in \mathbb{N}^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = a.a.....a$ (n thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$)	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$)
$\alpha = \lim r_n$ ($r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*$)	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

2. Tính chất của lũy thừa

- Với mọi $a > 0, b > 0$ ta có:

$$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta} ; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} ; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha.\beta} ; \quad (ab)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

- $a > 1: a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta ; \quad 0 < a < 1: a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

- Với $0 < a < b$ ta có:

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0 ; \quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

Chú ý: + Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.

+ Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

3. Định nghĩa và tính chất của căn thức

- Căn bậc n của a là số b sao cho $b^n = a$.

- Với $a, b \geq 0, m, n \in \mathbb{N}^*, p, q \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} ; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0) ; \quad \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p (a > 0) ; \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{Nếu } \frac{p}{n} = \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} (a > 0) ; \text{ Đặc biệt } \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$$

- Nếu n là số nguyên dương lẻ và $a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Nếu n là số nguyên dương chẵn và $0 < a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Phần 2. Hàm số lũy thừa, mũ, lôgarit

Chú ý:

+ Khi n lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n . Kí hiệu $\sqrt[n]{a}$.

+ Khi n chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau.

4. Công thức lãi kép

Gọi A là số tiền gửi, r là lãi suất mỗi kì, N là số kì.

Số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là: $C = A(1+r)^N$

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA

Định nghĩa

Số mũ α	Hàm số $y = x^\alpha$	Tập xác định D
$\alpha = n$ (n nguyên dương)	$y = x^n$	$D = \mathbb{R}$
$\alpha = n$ (n nguyên âm hoặc $n = 0$)	$y = x^n$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
α là số thực không nguyên	$y = x^\alpha$	$D = (0; +\infty)$

Chú ý: Hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Đạo hàm

$$\bullet \quad \boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0)}; \quad \boxed{(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'}$$

Chú ý:
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{với } x > 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn} \\ \text{với } x \neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \end{array}\right).$$

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

§3. LÔGARIT

1. Định nghĩa

• Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$ ta có: $\boxed{\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b}$

Chú ý: $\log_a b$ có nghĩa khi $\begin{cases} a > 0, & a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

• Lôgarit thập phân: $\boxed{\lg b = \log b = \log_{10} b}$

Phần 2. Hàm số lũy thừa, mũ, lôgarit

- Lôgarit tự nhiên (lôgarit Nepe): $\ln b = \log_e b$ (với $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281$)

2. Tính chất

- $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^b = b$; $a^{\log_a b} = b$ ($b > 0$)
- Cho $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$. Khi đó:
 - + Nếu $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$
 - + Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

3. Các qui tắc tính lôgarit

Với $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$, ta có:

- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

4. Đổi cơ số

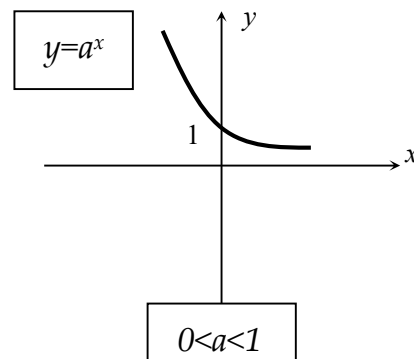
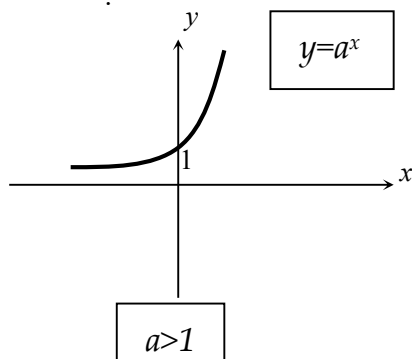
Với $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$, ta có:

- $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} \log_a c$ ($\alpha \neq 0$)

§4. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

1. Hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$.
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến, khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.
- Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.
- Đồ thị:

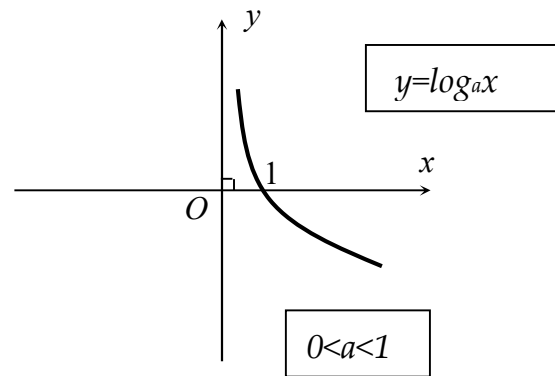
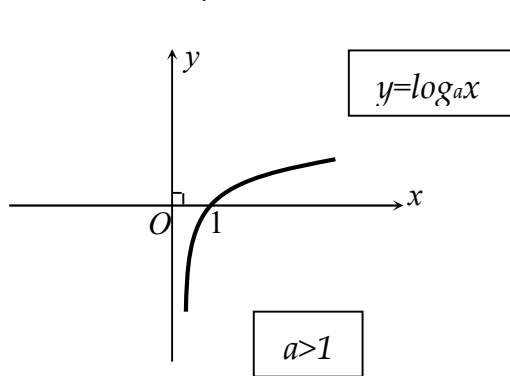


2. Hàm số lôgarit $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến, khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.

Phần 2. Hàm số lũy thừa, mũ, lôgarit

- Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.
- Đồ thị:



3. Đạo hàm

- $(a^x)' = a^x \ln a$; $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
- $(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = e^u \cdot u'$
- $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$; $(\log_a |u|)' = \frac{u'}{u \ln a}$
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$; $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$

§5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản:

Với $a > 0, a \neq 1$: $a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = \log_a b \end{cases}$

2. Một số phương pháp giải phương trình mũ

a) Đưa về cùng cơ số:

Với $a > 0, a \neq 1$: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Chú ý: Trong trường hợp cơ số có chứa ẩn số thì: $a^M = a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) = 0$

b) Lôgarit hoá:

$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = (\log_a b) \cdot g(x)$

c) Đặt ẩn phụ:

• **Dạng 1:** $P(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)}, t > 0 \\ P(t) = 0 \end{cases}$, trong đó $P(t)$ là đa thức theo t .

• **Dạng 2:** $\alpha a^{2f(x)} + \beta (ab)^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} = 0$

Phần 2. Hàm số lũy thừa, mũ, lôgarit

Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, rồi đặt ẩn phụ $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$

• **Dạng 3:** $a^{f(x)} + b^{f(x)} = m$, với $ab = 1$. Đặt $t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}$

d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ (1)

• Đoán nhận x_0 là một nghiệm của (1).

• Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến của $f(x)$ và $g(x)$ để kết luận x_0 là

nghiệm duy nhất: $\begin{cases} f(x) \text{ đồng biến và } g(x) \text{ nghịch biến (hoặc đồng biến nhưng nghiêm ngặt).} \\ f(x) \text{ đơn điệu và } g(x) = c \text{ hằng số} \end{cases}$

• Nếu $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

e) Đưa về phương trình các phương trình đặc biệt

• Phương trình tích $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

• Phương trình $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

f) Phương pháp đối lập

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ (1)

Nếu ta chứng minh được: $\begin{cases} f(x) \geq M \\ g(x) \leq M \end{cases}$ thì $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Phương trình lôgarit cơ bản

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

2. Một số phương pháp giải phương trình lôgarit

a) Đưa về cùng cơ số

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \end{cases}$

b) Mũ hoá

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)} = a^b$

c) Đặt ẩn phụ

d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

e) Đưa về phương trình đặc biệt

f) Phương pháp đối lập

Chú ý:

• Khi giải phương trình lôgarit cần chú ý điều kiện để biểu thức có nghĩa.

• Với $a, b, c > 0$ và $a, b, c \neq 1$: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

§6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

- Khi giải các bất phương trình mũ ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số mũ.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \\ 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:
 - Đưa về cùng cơ số.
 - Đặt ẩn phụ.
 -

Chú ý: Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

$$a^M > a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) > 0$$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

- Khi giải các bất phương trình lôgarit ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số lôgarit.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình lôgarit:
 - Đưa về cùng cơ số.
 - Đặt ẩn phụ.
 -

Chú ý: Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

$$\log_a B > 0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1) > 0; \quad \frac{\log_a A}{\log_a B} > 0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1) > 0$$

III. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

§1. NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

- Cho hàm số f xác định trên $\mathbf{K}$. Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên $\mathbf{K}$ nếu:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbf{K}$$

- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbf{K}$ thì họ nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbf{K}$ là:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

- Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{K}$ đều có nguyên hàm trên $\mathbf{K}$.

2. Tính chất

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$ • $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ • $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ ($k \neq 0$)

3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

$\int 0dx = C$ $\int dx = x + C$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ $\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($0 < a \neq 1$) $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ ($a \neq 0$) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$ ($a \neq 0$)	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C, (a \neq 0)$ $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$

4. Phương pháp tính nguyên hàm

a) Phương pháp đổi biến số

Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì:

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

b) Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{K}$ thì:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Phần 3. Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

VẤN ĐỀ 1: Tính nguyên hàm bằng cách sử dụng bảng nguyên hàm

Biến đổi biểu thức hàm số để sử dụng được bảng các nguyên hàm cơ bản.

Chú ý: Để sử dụng phương pháp này cần phải:

- Nắm vững bảng các nguyên hàm.
- Nắm vững phép tính vi phân.

VẤN ĐỀ 2: Tính nguyên hàm $\int f(x)dx$ bằng phương pháp đổi biến số

• Dạng 1: Nếu $f(x)$ có dạng: $f(x) = g[u(x)] \cdot u'(x)$ thì ta đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$.

Khi đó: $\int f(x)dx = \int g(t)dt$, trong đó $\int g(t)dt$ dễ dàng tìm được.

Chú ý: Sau khi tính $\int g(t)dt$ theo t , ta phải thay lại $t = u(x)$.

• Dạng 2: Thường gặp ở các trường hợp sau:

$f(x)$ có chứa	Cách đổi biến
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ hoặc $x = a \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

VẤN ĐỀ 3: Tính nguyên hàm bằng phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Với $P(x)$ là đa thức của x , ta thường gặp các dạng sau:

	$\int P(x).e^x dx$	$\int P(x).\cos x dx$	$\int P(x).\sin x dx$	$\int P(x).\ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$	$\sin x dx$	$P(x)$

VẤN ĐỀ 4: Tính nguyên hàm bằng phương pháp dùng nguyên hàm phụ

Để xác định nguyên hàm của hàm số $f(x)$, ta cần tìm một hàm $g(x)$ sao cho nguyên hàm của các hàm số $f(x) \pm g(x)$ dễ xác định hơn so với $f(x)$. Từ đó suy ra nguyên hàm của $f(x)$.

Bước 1: Tìm hàm $g(x)$.

Bước 2: Xác định nguyên hàm của các hàm số $f(x) \pm g(x)$, tức là:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = A(x) + C_1 \\ F(x) - G(x) = B(x) + C_2 \end{cases} \quad (*)$$

Bước 3: Từ hệ (*), ta suy ra $F(x) = \frac{1}{2}[A(x) + B(x)] + C$ là nguyên hàm của $f(x)$.

Phần 3. Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

VẤN ĐỀ 5: Tính nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

1. $f(x)$ là hàm hữu tỉ: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

– Nếu bậc của $P(x) \geq$ bậc của $Q(x)$ thì ta thực hiện phép chia đa thức.

– Nếu bậc của $P(x) <$ bậc của $Q(x)$ và $Q(x)$ có dạng tích nhiều nhân tử thì ta phân tích $f(x)$ thành tổng của nhiều phân thức (bằng phương pháp hệ số bất định).

Chẳng hạn:
$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

$$\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}, \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$$

2. $f(x)$ là hàm vô tỉ

$$+ f(x) = R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \rightarrow \text{đặt } t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$+ f(x) = R\left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\right) \rightarrow \text{đặt } t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$$

• $f(x)$ là hàm lượng giác

Ta sử dụng các phép biến đổi lượng giác thích hợp để đưa về các nguyên hàm cơ bản. Chẳng hạn:

$$+ \frac{1}{\sin(x+a).\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \cdot \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a).\sin(x+b)}, \left(\text{sử dụng } 1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)} \right)$$

$$+ \frac{1}{\cos(x+a).\cos(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \cdot \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\cos(x+a).\cos(x+b)}, \left(\text{sử dụng } 1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)} \right)$$

$$+ \frac{1}{\sin(x+a).\cos(x+b)} = \frac{1}{\cos(a-b)} \cdot \frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a).\cos(x+b)}, \left(\text{sử dụng } 1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)} \right)$$

+ Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$

+ Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$

+ Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \tan x$ (hoặc $t = \cot x$)

§2. TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

- Cho hàm số f liên tục trên $\mathbf{K}$ và $a, b \in \mathbf{K}$. Nếu F là một nguyên hàm của f trên $\mathbf{K}$ thì:

$F(b) - F(a)$ đgl tích phân của f từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho x , tức là:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots = F(b) - F(a)$$

- Ý nghĩa hình học: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng

$x = a, x = b$ là:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2. Tính chất của tích phân

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^0 f(x)dx &= 0 & \bullet \int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx & \bullet \int_a^b kf(x)dx &= k \int_a^b f(x)dx \quad (k : \text{const}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx & \bullet \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Nếu } f(x) \geq 0 \text{ trên } [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$\bullet \text{ Nếu } f(x) \geq g(x) \text{ trên } [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

3. Phương pháp tính tích phân

a) Phương pháp đổi biến số

$$\int_a^b f[u(x)] \cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

trong đó: $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{K}$, $y = f(u)$ liên tục và hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên $\mathbf{K}$, $a, b \in \mathbf{K}$.

b) Phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Nếu } u, v \text{ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên } \mathbf{K}, a, b \in \mathbf{K} \text{ thì: } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Phần 3. Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

Chú ý: – Cần xem lại các phương pháp tìm nguyên hàm.

– Trong phương pháp tích phân từng phần, ta cần chọn sao cho $\int_a^b vdu$ dễ tính hơn $\int_a^b u dv$.

VẤN ĐỀ 1: Tính tích phân bằng cách sử dụng bảng nguyên hàm

Biến đổi biểu thức hàm số để sử dụng được bảng các nguyên hàm cơ bản. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, rồi sử dụng trực tiếp định nghĩa tích phân:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Chú ý: Để sử dụng phương pháp này cần phải:

- Nắm vững bảng các nguyên hàm.
- Nắm vững phép tính vi phân.

VẤN ĐỀ 2: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số

Dạng 1: Giả sử ta cần tính $\int_a^b g(x)dx$.

Nếu viết được $g(x)$ dưới dạng: $g(x) = f[u(x)] \cdot u'(x)$ thì

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

Dạng 2: Giả sử ta cần tính $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Đặt $x = x(t)$ ($t \in K$) và $a, b \in K$ thoả mãn $\alpha = x(a), \beta = x(b)$

$$\text{thì} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_a^b f[x(t)]x'(t)dt = \int_a^b g(t)dt \quad (g(t) = f[x(t)] \cdot x'(t))$$

Dạng 2 thường gặp ở các trường hợp sau:

$f(x)$ có chứa	Cách đổi biến
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ hoặc $x = a \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ hoặc $x = a \cot t, \quad 0 < t < \pi$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{ a }{\sin t}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \frac{ a }{\cos t}, \quad t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Phần 3. Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

VẤN ĐỀ 3: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Với $P(x)$ là đa thức của x , ta thường gặp các dạng sau:

	$\int_a^b P(x).e^x dx$	$\int_a^b P(x).\cos x dx$	$\int_a^b P(x).\sin x dx$	$\int_a^b P(x).\ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$	$\sin x dx$	$P(x)$

VẤN ĐỀ 4: Tính tích phân các hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

Để tính tích phân của hàm số $f(x)$ có chứa dấu GTTB, ta cần xét dấu $f(x)$ rồi sử dụng công thức phân đoạn để tính tích phân trên từng đoạn nhỏ.

VẤN ĐỀ 5: Tính tích phân các hàm số hữu tỉ

Xem lại cách tìm nguyên hàm của các hàm số hữu tỉ.

VẤN ĐỀ 6: Tính tích phân các hàm số vô tỉ

Xem lại cách tìm nguyên hàm của các hàm số vô tỉ.

VẤN ĐỀ 7: Tính tích phân các hàm số lượng giác

Xem lại cách tìm nguyên hàm của các hàm số lượng giác.

VẤN ĐỀ 8: Tính tích phân các hàm số mũ và logarit

Sử dụng các phép toán về lũy thừa và logarit. Xem lại các phương pháp tìm nguyên hàm.

VẤN ĐỀ 9: Một số tích phân đặc biệt

Dạng 1. Tích phân của hàm số chẵn, hàm số lẻ

• Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

• Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số chẵn trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

Vì các tính chất này không có trong phần lý thuyết của SGK nên khi tính các tích phân có dạng này ta có thể chứng minh như sau:

Bước 1: Phân tích $I = \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ $\left(J = \int_{-a}^0 f(x)dx; K = \int_0^a f(x)dx \right)$

Bước 2: Tính tích phân $J = \int_{-a}^0 f(x)dx$ bằng phương pháp đổi biến. Đặt $t = -x$.

– Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì $J = -K \Rightarrow I = J + K = 0$

– Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $J = K \Rightarrow I = J + K = 2K$

Phần 3. Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

Dạng 2. Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx \quad (\text{với } \alpha \in \mathbb{R}^{++} \text{ và } a > 0)$$

Để chứng minh tính chất này, ta cũng làm tương tự như trên.

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_{-\alpha}^0 \frac{f(x)}{a^x + 1} dx + \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1} dx \quad \left(J = \int_{-\alpha}^0 \frac{f(x)}{a^x + 1} dx; K = \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1} dx \right)$$

Để tính J ta cũng đặt: $t = -x$.

Dạng 3. Nếu $f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

Để chứng minh tính chất này ta đặt: $t = \frac{\pi}{2} - x$

Dạng 4. Nếu $f(x)$ liên tục và $f(a+b-x) = f(x)$ hoặc $f(a+b-x) = -f(x)$

thì đặt: $t = a + b - x$

Đặc biệt, nếu $a + b = \pi$ thì đặt $t = \pi - x$

nếu $a + b = 2\pi$ thì đặt $t = 2\pi - x$

Dạng 5. Tính tích phân bằng cách sử dụng nguyên hàm phụ

Để xác định nguyên hàm của hàm số $f(x)$ ta cần tìm một hàm $g(x)$ sao cho nguyên hàm của các hàm số $f(x) \pm g(x)$ dễ xác định hơn so với $f(x)$. Từ đó suy ra nguyên hàm của $f(x)$. Ta thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Tìm hàm $g(x)$.

Bước 2: Xác định nguyên hàm của các hàm số $f(x) \pm g(x)$, tức là:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = A(x) + C_1 \\ F(x) - G(x) = B(x) + C_2 \end{cases} \quad (*)$$

Bước 3: Từ hệ (*), ta suy ra $F(x) = \frac{1}{2}[A(x) + B(x)] + C$ là nguyên hàm của $f(x)$.

VẤN ĐỀ 10: Thiết lập công thức truy hồi

Giả sử cần tính tích phân $I_n = \int_a^b f(x, n) dx$ ($n \in \mathbb{N}$) phụ thuộc vào số nguyên dương n . Ta thường gặp một số yêu cầu sau:

- Thiết lập một công thức truy hồi, tức là biểu diễn I_n theo các I_{n-k} ($1 \leq k \leq n$).
- Chứng minh một công thức truy hồi cho trước.
- Tính một giá trị I_{n_0} cụ thể nào đó.

§3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

1. Diện tích hình phẳng

- Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

- Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.
- Trục hoành.
- Hai đường thẳng $x = a, x = b$.

là:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx \quad (1)$$

- Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

- Đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

- Hai đường thẳng $x = a, x = b$ là: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (2)$

Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì:

$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

• Trong các công thức tính diện tích ở trên, cần khử dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Ta có thể làm như sau:

Bước 1: Giải phương trình: $f(x) = 0$ hoặc $f(x) - g(x) = 0$ trên đoạn $[a; b]$.

Giả sử tìm được 2 nghiệm c, d ($c < d$).

Bước 2: Sử dụng công thức phân đoạn:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^d |f(x)| dx + \int_d^b |f(x)| dx \\ &= \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \left| \int_d^b f(x) dx \right| \end{aligned}$$

(vì trên các đoạn $[a; c], [c; d], [d; b]$ hàm số $f(x)$ không đổi dấu)

- Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

- Đồ thị của $x = g(y), x = h(y)$ (g và h là hai hàm số liên tục trên đoạn $[c; d]$)
- Hai đường thẳng $x = c, x = d$.

$$S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$$

Phần 3. Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

2. Thể tích vật thể

• Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm các điểm a và b .

$S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Thể tích của B là:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

• Thể tích của khối tròn xoay:

Thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$(C): y = f(x), \text{ trục hoành, } x = a, x = b \quad (a < b)$$

sinh ra khi quay quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Chú ý: Thể tích của khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay xung quanh trục Oy :

$$(C): x = g(y), \text{ trục tung, } y = c, y = d$$

là:

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)dy$$

Phần 3. Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

IV. SỐ PHỨC

1. SỐ PHỨC & CÁC PHÉP TOÁN

1. **Số phức** là một biểu thức dạng $a + bi$, trong đó a, b là các số thực và số i thỏa mãn $i^2 = -1$. **Kí hiệu** $z = a + bi$.

• **i**: đơn vị ảo,

• **a**: phần thực,

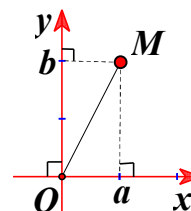
• **b**: phần ảo.

Chú ý:

- $z = a + 0i = a$ được gọi là số thực ($a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
- $z = 0 + bi = bi$ được gọi là số ảo (hay số thuần ảo)
- $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo

2. **Biểu diễn hình học của số phức.**

- $M(a; b)$ biểu diễn cho số phức $z \Leftrightarrow z = a + bi$



3. **Hai số phức bằng nhau.** Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

4. **Cộng và trừ số phức.** Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i$$

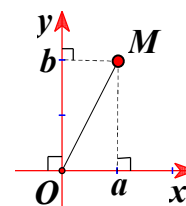
$$z - z' = (a - a') + (b - b')i$$

5. **Nhân hai số phức.** Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z.z' &= (aa' - bb') + (ab' + a'b)i \\ k(a + bi) &= ka + kbi \quad (k \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

6. **Môđun của số phức** $z = a + bi$

- Số thực $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\overline{OM}|$ gọi là môđun của số phức $z = a + bi$.
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overline{OM}|$ với $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức z .
- $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z.z'| = |z|.|z'|$;
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$;
- $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$.



7. **Số phức liên hợp** của số phức $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$

• $\bar{\bar{z}} = z$

• $|\bar{z}| = |z|$

• $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'$

• $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$

Phần 4. Số phức

- $z + \bar{z} = 2a$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

8. Chia hai số phức.

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

Thương của z' chia cho z ($z \neq 0$):
$$\frac{z'}{z} = \frac{z' \bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{z' \bar{z}}{|z|^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i$$

9. Căn bậc hai của số phức.

$w = x + yi$ là căn bậc hai của số phức $z = a + bi$ khi và chỉ khi $w^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$.

Số 0 có một căn bậc hai là số $w = 0$.

Số $z \neq 0$ có hai căn bậc hai đối nhau là w và $-w$.

Hai căn bậc hai của số thực $a > 0$ là $\pm\sqrt{a}$.

Hai căn bậc hai của số thực $a < 0$ là $\pm i\sqrt{-a}$.

10. Lũy thừa đơn vị ảo i

$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, \dots$, bằng quy nạp ta được:

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Do đó: $i^n \in \{-1; 1; -i; i\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

1. Căn bậc hai của số phức

- $z = 0$ có một căn bậc hai là 0
- $z = a$ là số thực dương có 2 căn bậc 2 là $\pm\sqrt{a}$
- $z = a$ là số thực âm có 2 căn bậc hai là $\pm\sqrt{|a|}i$

2. Phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ (a, b là số phức cho trước, $a \neq 0$).

Giải tương tự phương trình bậc nhất với hệ số thực

3. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c là số thực cho trước, $a \neq 0$).

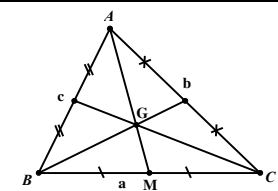
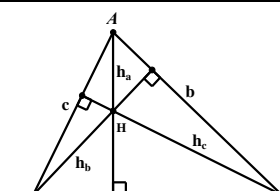
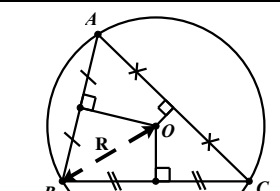
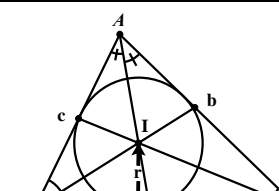
Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt thực $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta < 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt phức $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$
- $\Delta = 0$: Phương trình có 1 nghiệm kép là $x = -\frac{b}{2a}$

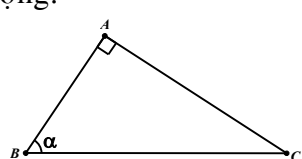
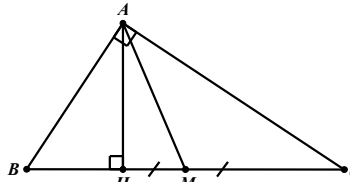
V. KHỐI ĐA DIỆN

CHUẨN BỊ KIẾN THỨC:

I- MỘT SỐ CÔNG THỨC HÌNH HỌC PHẪNG THƯỜNG SỬ DỤNG:

 Trọng tâm G của tam giác là giao điểm ba đường trung tuyến, và $AG = \frac{2}{3} AM$.	 Trực tâm H của tam giác ABC là giao điểm ba đường cao.	 Tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm ba đường trung trực.	 Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác trong.
--	---	---	---

1. Tam giác vuông ABC vuông tại A :

• Hệ thức lượng:  $\sin \alpha = \frac{AC}{BC} \quad \cos \alpha = \frac{AB}{BC}$ $\tan \alpha = \frac{AC}{AB} \quad \cot \alpha = \frac{AB}{AC}$ • Định lý Pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ • Diện tích: $S = \frac{1}{2} AB.AC$	 • Nghịch đảo đường cao bình phương: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ • Độ dài đường trung tuyến $AM = \frac{1}{2} BC$ • Công thức khác: $AB.AC = AH.BC \quad BA^2 = BH.BC \quad CA^2 = CH.CB$
---	--

2. Các công thức đặc biệt:

- Diện tích tam giác đều: $S = (\text{cạnh})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$
- Chiều cao tam giác đều: $h = \text{cạnh} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Độ dài đường chéo hình vuông: $l = \text{cạnh} \times \sqrt{2}$

3. Hệ thức lượng trong tam giác:

- Định lý Côsin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$
- Định lý sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Phần 5. Khối đa diện

4. Các công thức tính diện tích tam giác ABC :

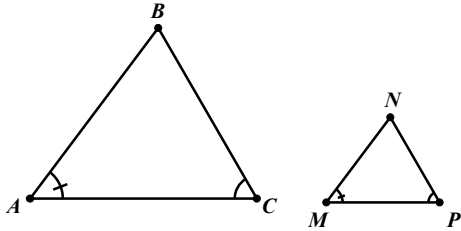
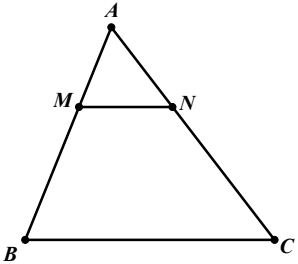
Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh tương ứng là a, b, c ; chiều cao tương ứng với các góc A, B, C là h_a, h_b, h_c ; r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp ΔABC ; Gọi S là diện tích ΔABC :

$$\begin{aligned} \bullet S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c & \bullet S &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ \bullet S &= \frac{abc}{4R} & \bullet S &= p\pi & \bullet S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (với } p = \frac{a+b+c}{2} \text{)} \end{aligned}$$

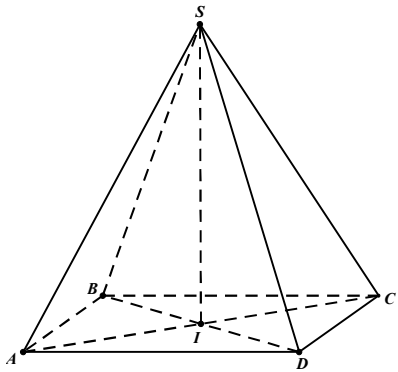
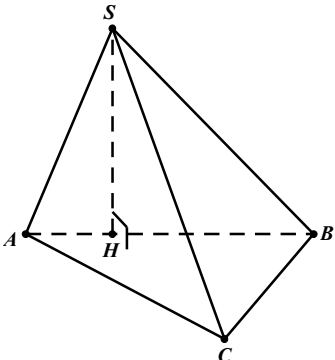
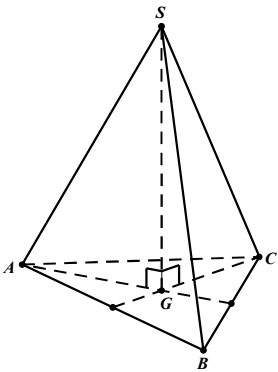
5. Diện tích các hình đặc biệt khác:

- Hình vuông: $S = \text{cạnh} \times \text{cạnh}$
- Hình thoi: $S = \frac{1}{2} (\text{chéo dài} \times \text{chéo ngắn})$
- Hình chữ nhật: $S = \text{dài} \times \text{rộng}$
- Hình thang: $S = \frac{1}{2} (\text{đáy lớn} + \text{đáy bé}) \times \text{chiều cao}$
- Hình tròn: $S = \pi R^2$
- Hình bình hành: $S = \text{đáy} \times \text{chiều cao}$

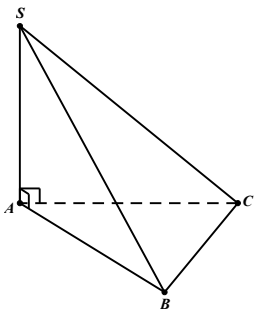
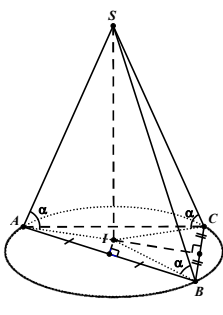
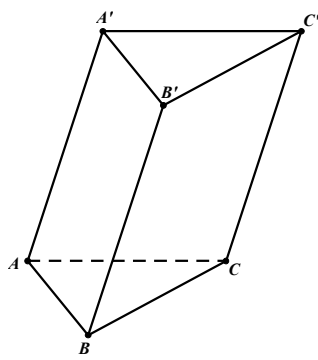
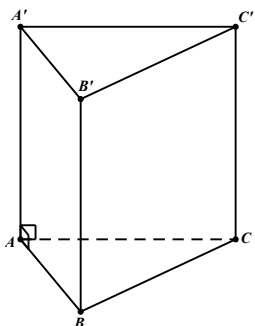
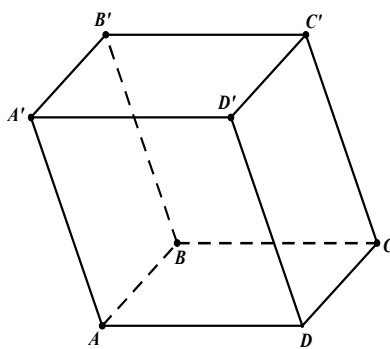
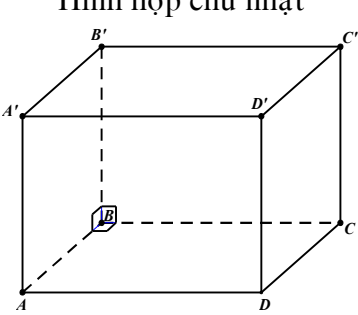
6. Hai tam giác đồng dạng và định lý Talet:

 $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ nếu chúng có hai góc <u>tương ứng</u> bằng nhau. - Nếu $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ thì $\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP}$	 $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$
---	--

II- MỘT SỐ HÌNH HÌNH HỌC KHÔNG GIAN THƯỜNG SỬ DỤNG:

Hình chóp tứ giác đều 	Hình chóp có $mp(SAB) \perp (ABC)$ 	Hình chóp tam giác đều 
--	--	---

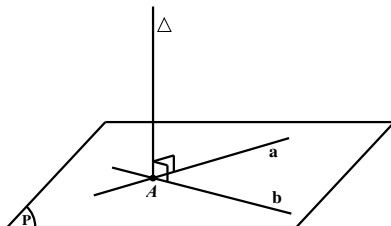
Phần 5. Khối đa diện

Hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên vuông góc mặt đáy. 	Hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh bên tạo với đáy một góc 90°. 	Lăng trụ thường 
Lăng trụ đứng  * Chú ý: Lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.	Hình hộp thường 	Hình hộp chữ nhật  * Chú ý: Hình lập phương là hình hộp có 6 mặt là hình vuông.

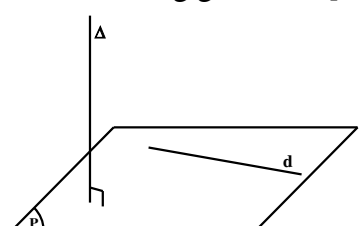
III- MỘT SỐ KIẾN THỨC THƯỜNG SỬ DỤNG:

1. Một số phương pháp chứng minh trong hình học không gian:

• Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:

Phương pháp: Để chứng minh đường thẳng Δ vuông góc $mp(P)$ ta chứng minh Δ vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau nằm trong $mp(P)$. 	Trình bày bài Ta có: $\begin{cases} \Delta \perp a \subset (P) \\ \Delta \perp b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (P)$
---	--

• Chứng minh hai đường thẳng vuông góc:

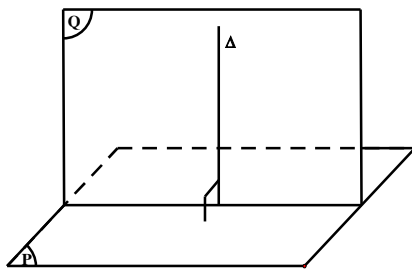
Phương pháp: Để chứng minh đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d ta chứng minh Δ vuông góc với $mp(P)$ chứa d. 	Trình bày bài Ta có: $\Delta \perp (P) \supset d \Rightarrow \Delta \perp d$
--	--

Phần 5. Khối đa diện

• Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc:

Phương pháp:

Để chứng minh $mp(Q) \perp mp(P)$ ta chứng minh $mp(Q)$ chứa một đường thẳng Δ vuông góc $mp(P)$.

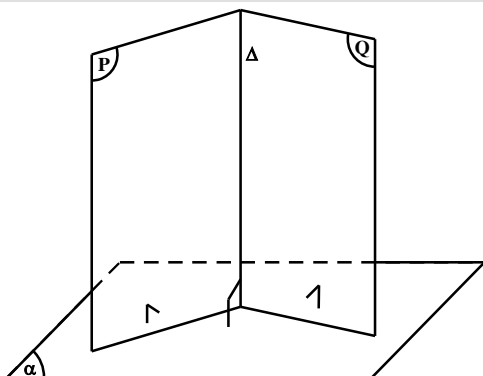


Trình bày bài

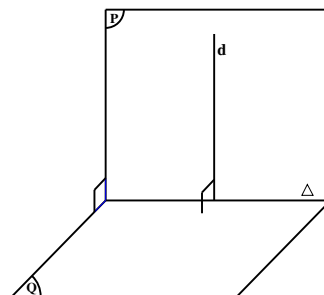
Ta có: $\begin{cases} \Delta \perp (P) \\ \Delta \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow (Q) \perp (P)$

2. Hai định lý về quan hệ vuông góc:

• **Định lý 1:** Nếu $mp(P)$ và $mp(Q)$ cùng vuông góc với $mp(\alpha)$ thì giao tuyến (nếu có) của chúng vuông góc $mp(\alpha)$.



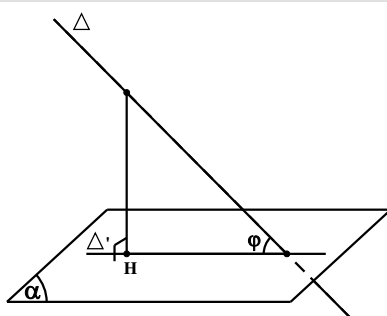
• **Định lý 2:** Cho $mp(P)$ vuông góc $mp(Q)$. Một đường thẳng d nằm trong $mp(P)$ vuông góc với giao tuyến Δ của (P) và (Q) thì d vuông góc $mp(Q)$.



3. Góc:

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Góc giữa đường thẳng Δ và $mp(\alpha)$ là góc giữa Δ và hình chiếu Δ' của nó trên $mp(\alpha)$.

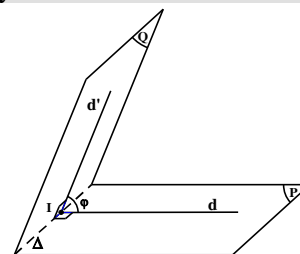


Trình bày bài

- Ta có Δ' là hình chiếu của Δ trên $mp(\alpha)$
- Suy ra: $(\Delta, (\alpha)) = (\Delta, \Delta') = \varphi$

Góc giữa hai mặt phẳng:

Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) , (β) và cùng vuông góc với giao tuyến.



Trình bày bài

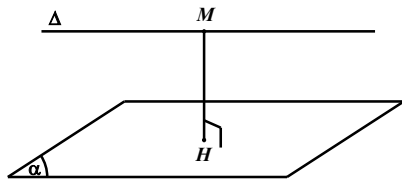
- Ta có $\begin{cases} (P) \cap (Q) = \Delta \\ (P) \supset d \perp \Delta \\ (Q) \supset d' \perp \Delta \end{cases}$
- Suy ra: $((P), (Q)) = (d, d') = \varphi$

Phần 5. Khối đa diện

4. Khoảng cách:

Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song:

Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và $mp(\alpha)$ song song với nó là khoảng cách từ một điểm M trên Δ đến $mp(\alpha)$.

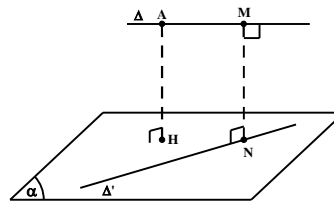


✎ Trình bày bài

$$d(\Delta, (\alpha)) = d(M, (\alpha)) = MH$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

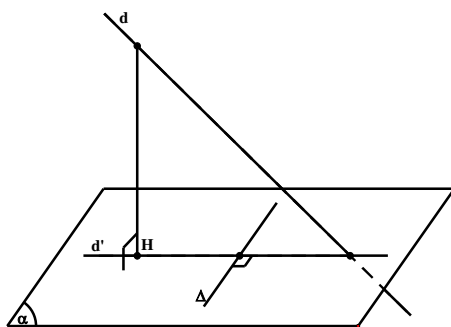
Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của Δ và Δ' và bằng với khoảng cách giữa Δ và $mp(\alpha)$ chứa Δ' và song song với Δ .



✎ Trình bày bài

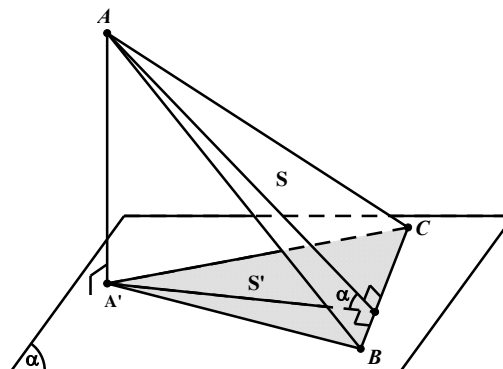
$$d(\Delta, \Delta') = d(\Delta, (\alpha)) = d(A, (\alpha)) = AH$$

5. Định lý ba đường vuông góc, công thức diện tích hình chiếu:



Gọi d' là hình chiếu của d trên (α) .

Ta có: $\Delta \perp d' \Leftrightarrow \Delta \perp d$



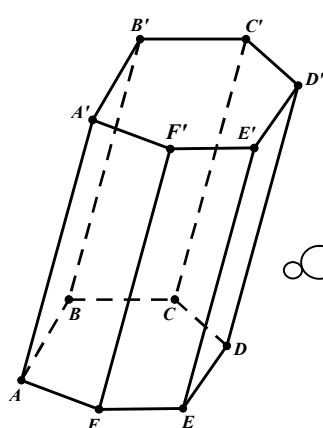
$$S' = S \cos \alpha$$

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

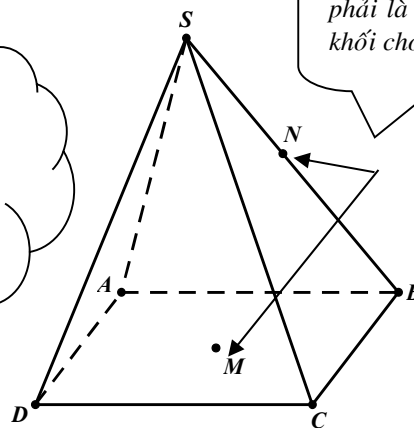
I - KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP:

• Khối lăng trụ (chóp) là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ (chóp) kể cả hình lăng trụ (chóp) ấy. Khối chóp cắt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cắt kể cả hình chóp cắt ấy.

• Điểm không thuộc khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cắt) được gọi là điểm ngoài của khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cắt). Điểm thuộc khối lăng trụ nhưng không thuộc hình lăng trụ ứng với khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cắt) đó được gọi là điểm trong của khối lăng trụ (khối chóp, khối chóp cắt).



... hình là phần vỏ bọc bên ngoài. Khối gồm phần vỏ bên ngoài và phần



II- KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN:

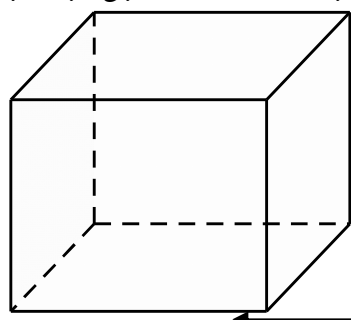
1. Khái niệm về hình đa diện:

• Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

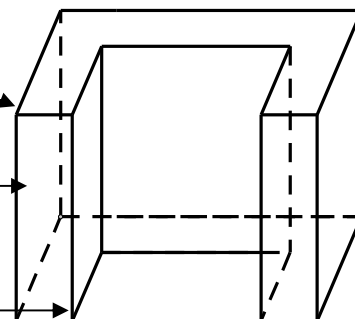
• Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.



Đỉnh

Cạnh

Mặt



2. Khái niệm về khối đa diện:

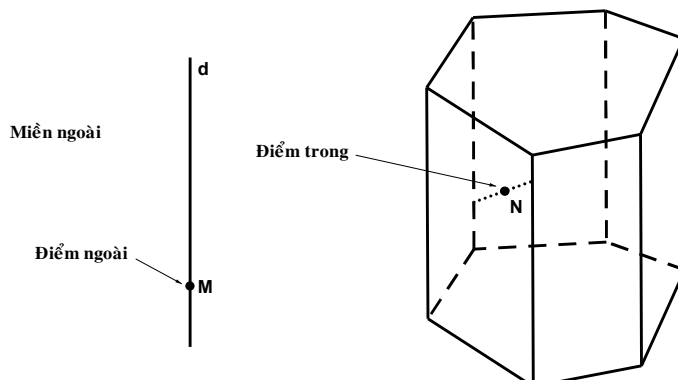
• Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

• Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện đó được gọi là điểm trong của

Phần 5. Khối đa diện

khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong, tập hợp những điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện.

• Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đấy.



III- HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU:

1. Phép dời hình trong không gian:

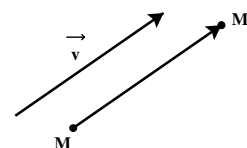
Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

* Một số phép dời hình trong không gian:

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$:

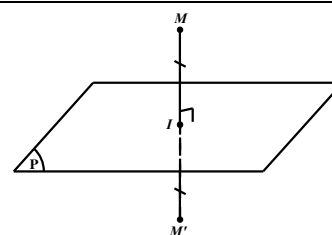
Là phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.



b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) :

Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM' .

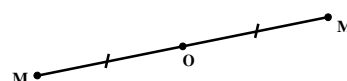
Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H) .



c) Phép đối xứng qua tâm O :

Là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm MM' .

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H) .

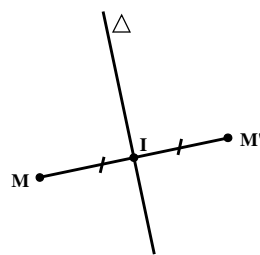


Phần 5. Khối đa diện

d) Phép đối xứng qua đường thẳng Δ (phép đối xứng trục Δ):

Là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM' .

Nếu phép đối xứng trục Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của (H)



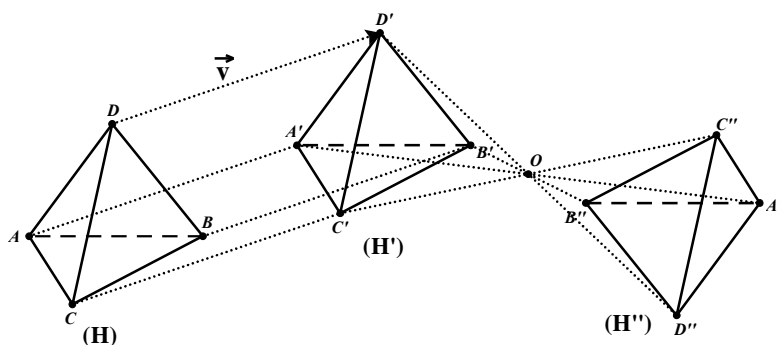
* **Nhận xét:**

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H') , biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H') .

2. Hai hình bằng nhau:

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

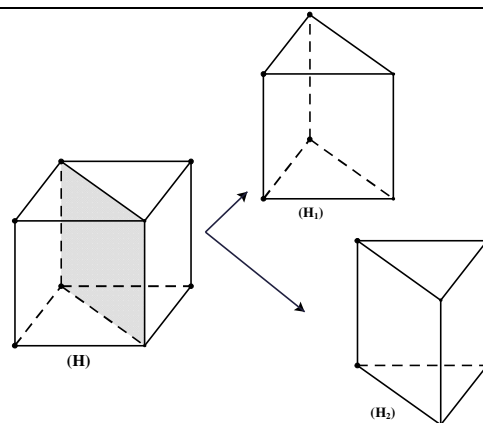
Ví dụ: Thực hiện liên tiếp hai phép dời hình: phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và phép đối xứng tâm O hình (H) biến thành hình (H'') . Ta có: hình (H) bằng hình (H'') .



IV- PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN:

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1) , (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) , hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H) .

Ví dụ: Ta có thể chia khối hộp chữ nhật thành hai khối lăng trụ đứng.

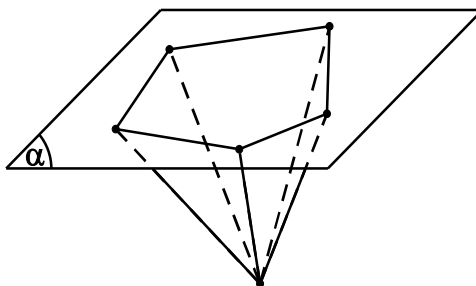


§2. KHỐI ĐA DIỆN LỖI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

I- KHỐI ĐA DIỆN LỖI:

Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H) . Khi đó đa diện xác định (H) được gọi là đa diện lồi.

* *Chú ý:* Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng chứa một mặt của nó.



II- KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU:

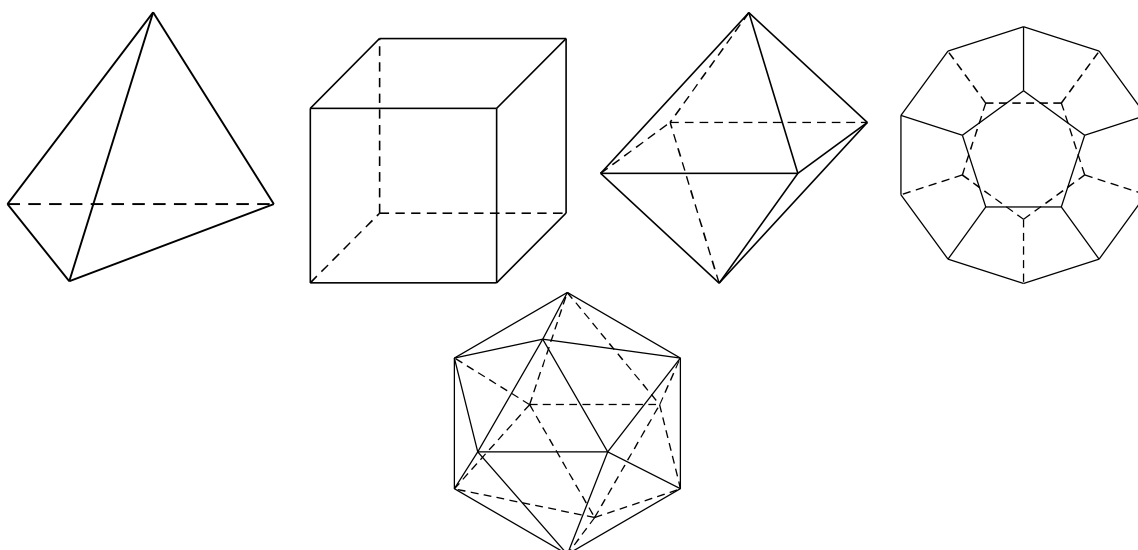
Định nghĩa: Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có tính chất sau đây:

- Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
- Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p; q\}$.

Định lý: Chỉ có năm loại khối đa diện đều. Đó là:

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
$\{3; 3\}$	Tứ diện đều	4	6	4
$\{4; 3\}$	Lập phương	8	12	6
$\{3; 4\}$	Bát diện đều	6	12	8
$\{5; 3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12
$\{3; 5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20



§3. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

I- KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN:

Có thể đặt tương ứng cho mỗi khối đa diện (H) một số dương duy nhất $V_{(H)}$ thỏa mãn tính chất sau:

a) Nếu (H) là khối lập phương có cạnh bằng 1 thì $V_{(H)} = 1$.

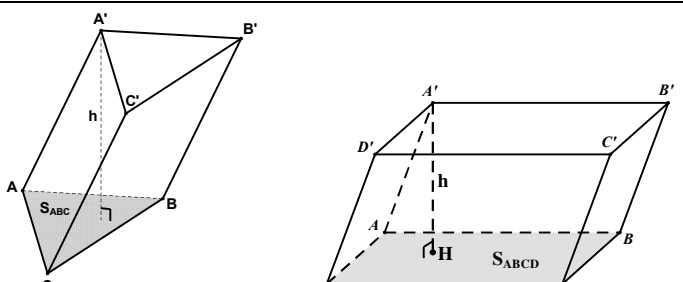
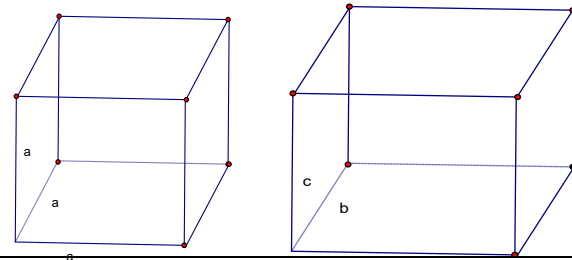
b) Nếu hai khối đa diện (H_1) và (H_2) bằng nhau thì $V_{(H_1)} = V_{(H_2)}$.

c) Nếu khối đa diện (H) được phân chia thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) thì $V_{(H)} = V_{(H_1)} + V_{(H_2)}$.

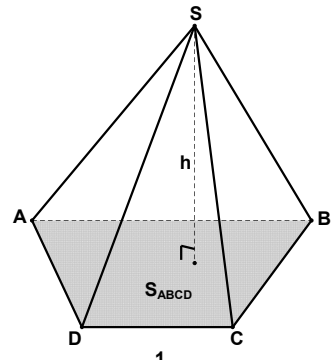
Số dương $V_{(H)}$ nói trên được gọi là thể tích khối đa diện (H) hay thể tích của hình đa diện giới hạn khối đa diện (H) .

Khối lập phương có cạnh bằng 1 được gọi là khối lập phương đơn vị.

II- THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI HỘP CHỮ NHẬT:

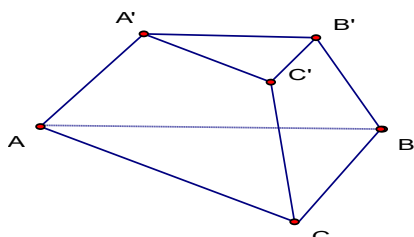
THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ: $V = B.h$ với B: diện tích đáy h: chiều cao	 $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \times h$ $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \times h$
Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$ với a, b, c là ba kích thước Thể tích khối lập phương: $V = a^3$ với a là độ dài cạnh	

III- THỂ TÍCH KHỐI CHÓP:

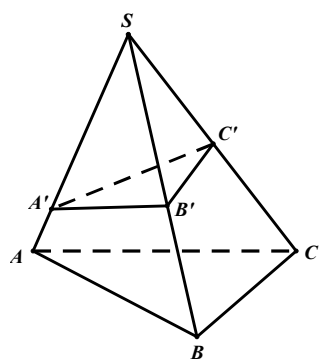
$V = \frac{1}{3} B.h$ với B: diện tích đáy h: chiều cao	 $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times h$
--	---

Phần 5. Khối đa diện

III- THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CỤT:

$V = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{BB'})$ với $\begin{cases} B, B' : \text{diện tích hai đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$	
--	--

V- CÔNG THỨC TỈ SỐ THỂ TÍCH ĐỐI VỚI HÌNH CHÓP TAM GIÁC:

Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Ta có tỉ số thể tích: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$ * Đặc biệt: Nếu $A' \equiv A$ ta có: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$	
---	---

Chú ý:

- Đường chéo của hình vuông cạnh a là $d = a\sqrt{2}$,
Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $d = a\sqrt{3}$,
Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,
- Đường cao của tam giác đều cạnh a là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).
- Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Phần 5. Khối đa diện

VI. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

☛ CHUẨN BỊ KIẾN THỨC:

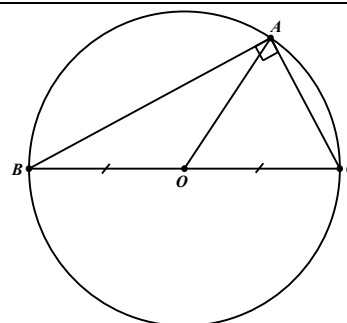
1. Đường tròn:

• Tất cả các điểm A nhìn đoạn thẳng BC dưới một góc vuông đều nằm trên đường tròn đường kính BC .

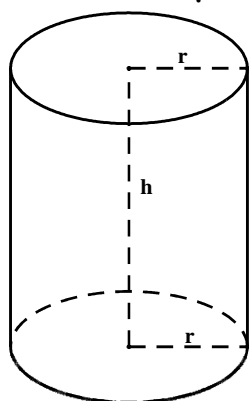
• Đường tròn (C) bán kính r có:

Chu vi: $C = 2\pi r$.

Diện tích: $S = 2\pi r^2$.



2. Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ:

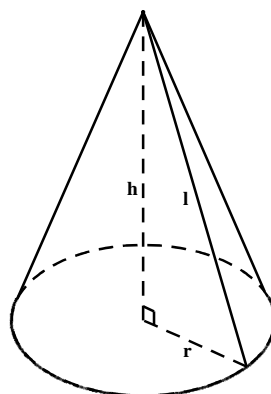


Hình trụ có bán kính đường tròn đáy r và chiều cao h có diện tích và thể tích được tính theo công thức:

$$S_{xq} = 2\pi rh$$

$$V = \pi r^2 h$$

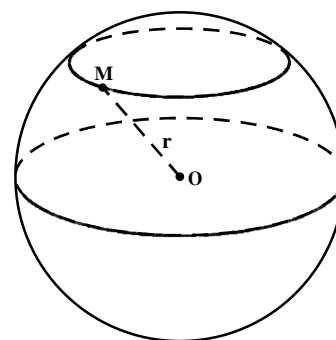
3. Diện tích xung quanh và thể tích hình nón:



Hình nón có bán kính đường tròn đáy r , độ dài đường sinh l và chiều cao h có diện tích và thể tích được tính theo công thức:

$$S_{xq} = \pi rl \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

4. Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu:



Mặt cầu bán kính r có diện tích và thể tích hình cầu tương ứng được tính theo công thức:

$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

5. Diện tích toàn phần:

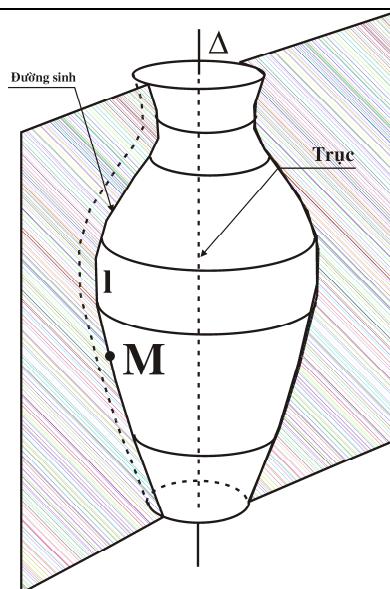
- Diện tích toàn phần của một hình đa diện là tổng diện tích của tất cả các mặt đa diện đó.
- Diện tích toàn phần của hình trụ là tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.
- Diện tích toàn phần của hình nón là tổng diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy.

§1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

I- SỰ TẠO THÀNH MẶT TRÒN XOAY:

Trong không gian cho mp(P) chứa đường thẳng Δ và đường cong l . Khi quay mp(P) quanh Δ một góc 360° thì mỗi điểm M trên l vạch ra một đường tròn có tâm thuộc Δ và nằm trên mặt phẳng vuông góc với Δ . Như vậy khi quay mặt phẳng (P) quanh đường thẳng Δ thì đường l sẽ tạo nên một hình được gọi là mặt tròn xoay.

- Đường l được gọi là đường sinh của mặt tròn xoay.
- Đường thẳng Δ được gọi là trục của mặt tròn xoay.

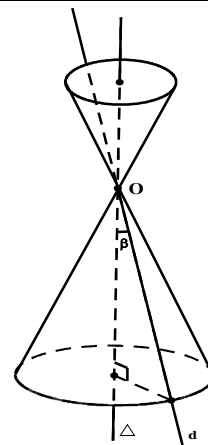


II- MẶT NÓN TRÒN XOAY:

1. Định nghĩa:

Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng d và Δ cắt nhau và tạo thành một góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng d sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O , gọi tắt là mặt nón.

- Đường thẳng Δ gọi là trục.
- Đường thẳng d gọi là đường sinh.
- Góc 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.



2. Hình nón tròn xoay và khối nón tròn xoay:

a) Cho tam giác OIM vuông tại I . Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình được gọi là hình nón tròn xoay, gọi tắt là hình nón.

- Hình tròn tâm I sinh bởi các điểm thuộc cạnh IM khi IM quay quanh trục OI được gọi là mặt đáy của hình nón.
- Điểm O gọi là đỉnh của hình nón.
- Độ dài đoạn OI gọi là chiều cao của hình nón (OI bằng khoảng cách từ O đến mặt đáy).
- Độ dài đoạn OM gọi là độ dài đường sinh của hình nón.
- Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh OM khi quay quanh trục OI gọi là mặt xung quanh của hình nón đó.

Phần 6. Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu

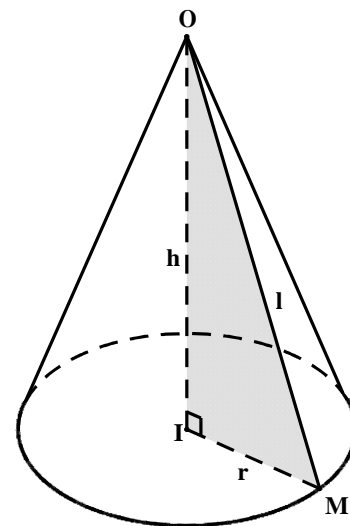
b) Khối nón tròn xoay hay khối nón là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Những điểm không thuộc khối nón gọi là những điểm ngoài của khối nón. Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón tương ứng gọi là những điểm trong của khối nón. Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.

c) Diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón: Gọi S_d , S_{xq} , V lần lượt là diện tích hình tròn đáy, diện tích xung quanh và thể tích của hình nón có:

- Chiều cao: h
- Bán kính hình tròn đáy: r
- Độ dài đường sinh: l

$$S_{xq} = \pi r l$$

$$V = \frac{1}{3} S_d \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

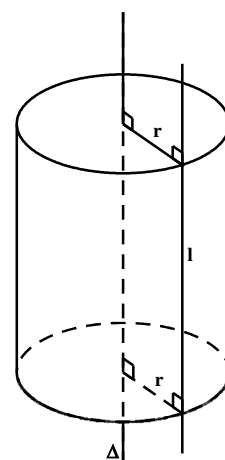


III- MẶT TRỤ TRÒN XOAY:

1. Định nghĩa:

Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r . Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ.

- Đường thẳng Δ gọi là trục.
- Đường thẳng l là đường sinh.
- r là bán kính của mặt trụ đó.



2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay:

a) Ta xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh nào đó, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ADCB$ sẽ tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay, hay gọi tắt là hình trụ.

- Khi quay quanh AB , hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là hai đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính của hình trụ.
- Độ dài đoạn CD gọi là độ dài đường sinh của hình trụ.
- Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay xung quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.
- Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của hình trụ.

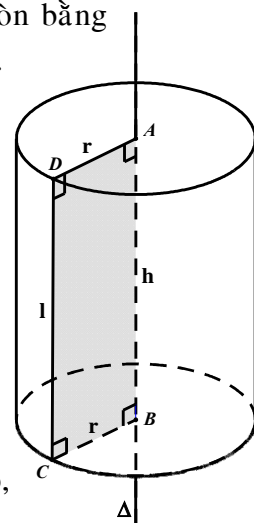
b) Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó. Những điểm không thuộc khối trụ gọi là những điểm ngoài của khối trụ. Những điểm thuộc khối trụ nhưng không thuộc hình trụ tương ứng gọi là những điểm trong của khối trụ. Mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của một hình trụ cũng là mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của khối trụ tương ứng.

c) Diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ: Gọi S_d , S_{xq} , V lần lượt là diện tích hình tròn đáy, diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ có:

- Chiều cao: h ;
- Bán kính: r
- Độ dài đường sinh: l

$$S_{xq} = 2\pi r l$$

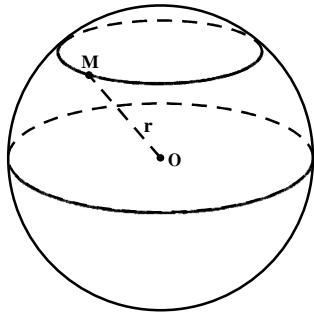
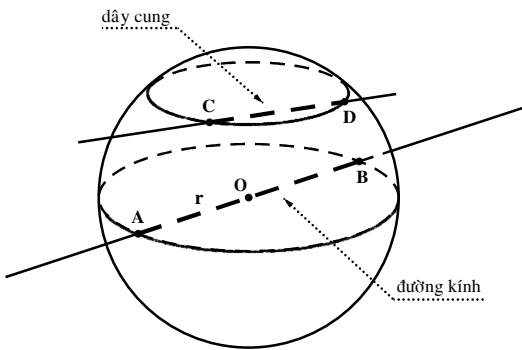
$$V = S_d \cdot h = \pi r^2 h$$



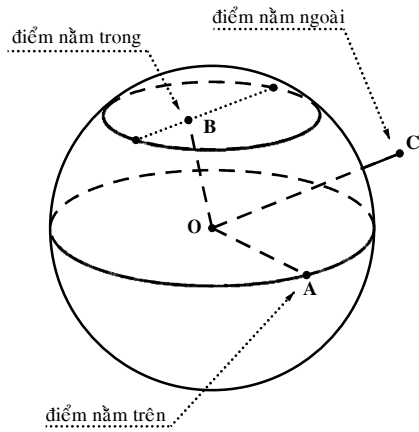
§2. MẶT CẦU

I- MẶT CẦU VÀ CÁC KHÁI NIỆM LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU:

1. Mặt cầu:

Tập hợp những điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng không đổi bằng r ($r > 0$) được gọi là mặt cầu tâm O bán kính r. - Mặt cầu tâm O, bán kính r được kí hiệu: $S(O; r)$ hay viết tắt là (S). - Ta có: $S(O; r) = \{M \mid OM = r\}$	 Hình biểu diễn của mặt cầu
- Nếu hai điểm C, D nằm trên mặt cầu $S(O; r)$ thì đoạn thẳng CD được gọi là dây cung của mặt cầu đó. - Dây cung AB đi qua tâm O được gọi là một đường kính của mặt cầu. Khi đó độ dài đường kính bằng $2r$.	

2. Điểm nằm trong và nằm ngoài mặt cầu:

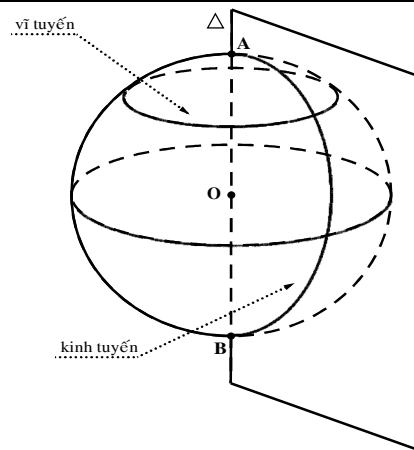
Cho mặt cầu $S(O; r)$ và một điểm A bất kì trong không gian. - Nếu $OA = r$ thì ta nói điểm A nằm trên mặt cầu $S(O; r)$ - Nếu $OA < r$ thì ta nói điểm A nằm trong mặt cầu $S(O; r)$ - Nếu $OA > r$ thì ta nói điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; r)$ Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O; r)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là khối cầu hoặc hình cầu tâm O bán kính r.	
---	---

Phần 6. Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu

3. Đường kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu:

Ta có thể xem mặt cầu là một mặt tròn xoay tạo nên bởi nửa đường tròn quay quanh trục chứa đường kính của nửa đường tròn đó.

- Giao tuyến của mặt cầu với nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là kinh tuyến.
- Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục được gọi là vĩ tuyến của mặt cầu.
- Hai giao điểm của mặt cầu với trục được gọi là hai cực của mặt cầu



II – GIAO CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG:

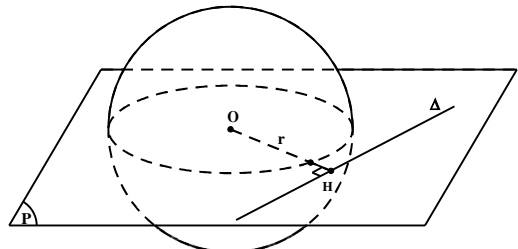
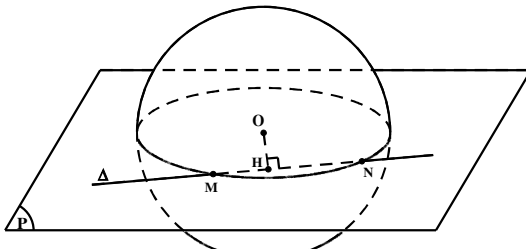
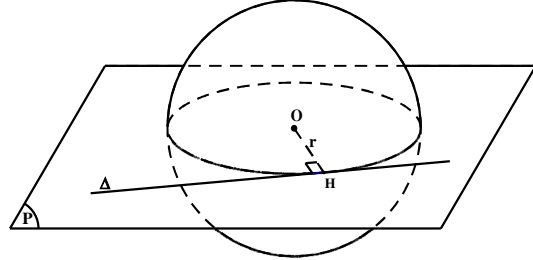
Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính r và mặt phẳng (P) . Ta có:

Mặt cầu (S) và mp (P) không có điểm chung $(P) \cap S(O; r) = \emptyset \Leftrightarrow d(O, (P)) > r$	Mặt cầu (S) và mp (P) có 1 điểm chung (mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S)) $(P) \cap S(O; r) = \{H\} \Leftrightarrow d(O, (P)) = r$ Khi đó: (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S), H gọi tiếp điểm
Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) tâm H, bán kính r' $(P) \cap S(O; r) = C(H; r') \Leftrightarrow d(O, (P)) < r$ • Tâm H là hình chiếu của O trên mp (P) • Bán kính $r' = \sqrt{r^2 - [d(O, (P))]^2}$	Mặt phẳng (P) đi qua tâm O của mặt cầu Khi đó giao tuyến của mp (P) và $S(O; r)$ là đường tròn $C(O; r)$ gọi là đường tròn lớn.

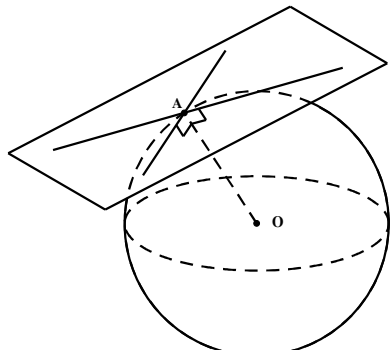
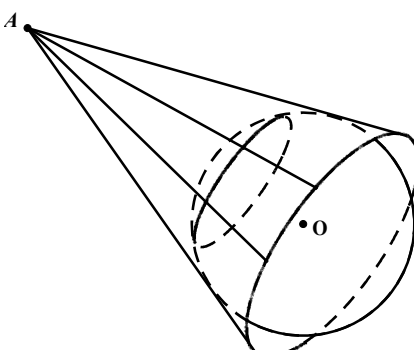
Phần 6. Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu

III – GIAO CỦA MẶT CẦU VỚI ĐƯỜNG THẲNG, TIẾP TUYẾN CỦA MẶT CẦU:

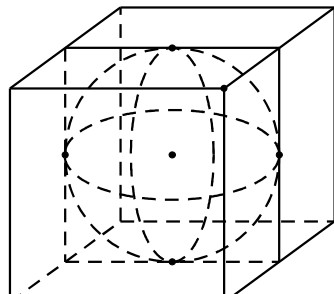
Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính r và đường thẳng Δ . Ta có:

<i>Đường thẳng Δ không cắt mặt cầu (S)</i>	<i>Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm</i>
 $\Delta \cap S(O; r) = \emptyset \Leftrightarrow d(O, \Delta) > r$	 $\Delta \cap S(O; r) = \{M, N\} \Leftrightarrow d(O, \Delta) < r$
<i>Đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S) tại H</i>	
 Khi đó: Δ gọi là tiếp tuyến của mặt cầu (S), H gọi là tiếp điểm.	

* Nhận xét:

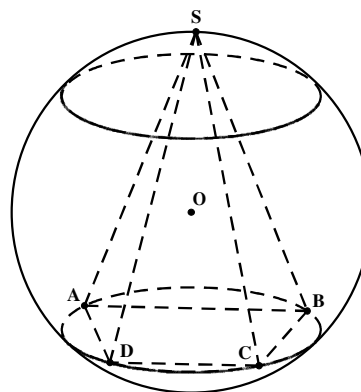
 Qua một điểm A nằm trên mặt cầu $S(O; r)$ có vô số tiếp tuyến của mặt cầu. Tất cả các tiếp tuyến này đều vuông góc với bán kính OA của mặt cầu tại A và đều nằm trên tiếp diện của mặt cầu tại A.	 Qua một điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; r)$ có vô số tiếp tuyến với mặt cầu. Các tiếp tuyến này tạo thành mặt nón đỉnh A. Khi đó độ dài các đoạn thẳng kẻ từ A đến các tiếp điểm đều bằng nhau.
---	--

* Mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình đa diện:

Mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện. Còn nói hình đa diện ngoại tiếp mặt cầu.	
--	--

Phần 6. Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu

Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu. Còn nói hình đa diện nội tiếp mặt cầu.



Mặt cầu tâm O bán kính r ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ khi và chỉ khi $OA = OB = OC = OD = OS = r$

IV- CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU:

Cho mặt cầu (S) có bán kính r , ta có:

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi r^2$
- Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

* Chú ý:

- Diện tích S của mặt cầu bán kính r bằng bốn lần diện tích hình tròn lớn của mặt cầu đó.
- Thể tích V của khối cầu bán kính r bằng thể tích khối chóp có diện tích đáy bằng diện tích mặt cầu và có chiều cao bằng bán kính của khối cầu đó.

Phần 6. Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu

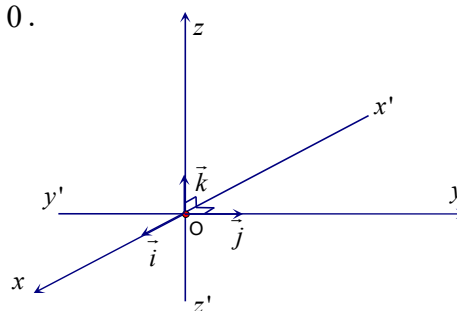
VII. TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN OXYZ

1. KIẾN THỨC TỌA ĐỘ ĐIỂM – TỌA ĐỘ VECTO

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox , Oy , Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O . Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox , Oy , Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là **hệ trục tọa độ vuông góc** trong không gian.

Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$.



Quy ước: Không gian mà trong đó có chọn hệ trục tọa độ Đề-Các vuông góc $Oxyz$ được gọi là không gian $Oxyz$ và ký hiệu là: $kg(Oxyz)$.

2. Tọa độ của vectơ

a) **Định nghĩa**: $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) **Tính chất**: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $k \in \mathbb{R}$

$$\bullet \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$$

$$\bullet k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$$

$$\bullet \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\bullet \vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$$

$$\bullet \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

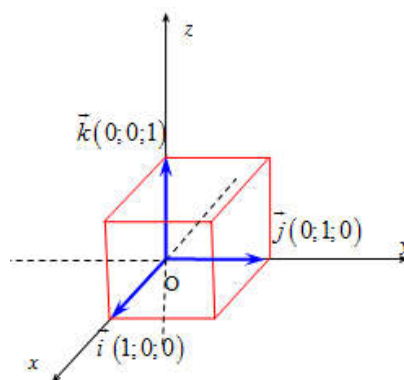
$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

$$\bullet \vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\bullet |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$$



Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

3. Tọa độ của điểm

a) **Định nghĩa:** $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)

Chú ý: • $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$

• $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$.

b) **Tính chất:** Cho $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$

• $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

• $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

• Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB : $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

• Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC :

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

• Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

III. Sự cùng phương của hai véc tơ:

Nhắc lại

• Hai véc tơ cùng phương là hai véc tơ nằm trên cùng một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

• **Định lý về sự cùng phương của hai véc tơ:**

* **Định lý 3:** Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$\vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow \exists ! k \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \vec{a} = k\vec{b}$$

Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì số k trong trường hợp này được xác định như sau:

$k > 0$ khi $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$

$k < 0$ khi $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}$

$$|k| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

* **Định lý 4:** A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$

* **Định lý 5:** Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

$$\vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

IV. Tích vô hướng của hai véc tơ:

Nhắc lại:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{a}^2 &= |\vec{a}|^2 \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

* **Định lý 6:** Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

* **Định lý 7:** Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ta có :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

* **Định lý 8:** Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ thì

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

* **Định lý 9:** Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

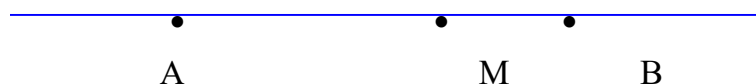
* **Định lý 10:** Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

V. Điểm chia đoạn thẳng theo tỷ số k:

Định nghĩa : Điểm M được gọi là chia đoạn AB theo tỷ số k ($k \neq 1$) nếu như :

$$\vec{MA} = k \cdot \vec{MB}$$



Định lý 11 : Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $\vec{MA} = k \cdot \vec{MB}$ ($k \neq 1$) thì

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k} \\ z_M = \frac{z_A - k \cdot z_B}{1 - k} \end{cases}$$

Đặc biệt : M là trung điểm của AB

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

Định lý 12: Cho tam giác ABC biết $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$

G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

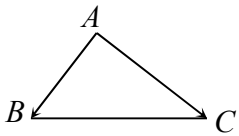
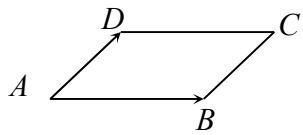
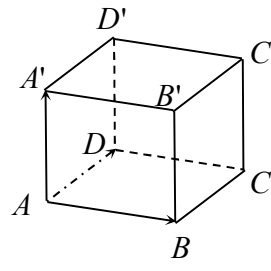
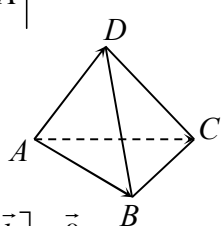
VI. Tích có hướng của hai véc tơ:

1. Định nghĩa: Tích có hướng của hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là một véc tơ được ký hiệu : $[\vec{a}; \vec{b}]$ có tọa độ là :

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

$$[\vec{a}; \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

2. Tính chất:

- $[\vec{a}; \vec{b}] \perp \vec{a}$ và $[\vec{a}; \vec{b}] \perp \vec{b}$
- $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |[\vec{AB}; \vec{AC}]|$ 
- $S_{\square ABCD} = |[\vec{AB}; \vec{AD}]|$  
- $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}; \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$
- $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}; \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$ 
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}; \vec{b}] = \vec{0}$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$
- A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{AB}; \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = 0$

VẤN ĐỀ 1: Các phép toán về tọa độ của vectơ và của điểm

- Sử dụng các công thức về tọa độ của vectơ và của điểm trong không gian.
- Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.

VẤN ĐỀ 2: Xác định điểm trong không gian. Chứng minh tính chất hình học.

Diện tích – Thể tích.

- Sử dụng các công thức về tọa độ của vectơ và của điểm trong không gian.
- Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.
- Công thức xác định tọa độ của các điểm đặc biệt.
- Tính chất hình học của các điểm đặc biệt:

• A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{AB} = k \vec{AC} \Leftrightarrow [\vec{AB}; \vec{AC}] = \vec{0}$

• $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$

• Cho $\triangle ABC$ có các chân E, F của các đường phân giác trong và ngoài của góc A

của $\triangle ABC$ trên BC . Ta có: $\vec{EB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \vec{EC}$, $\vec{FB} = \frac{AB}{AC} \cdot \vec{FC}$

• A, B, C, D không đồng phẳng $\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{AB}; \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

VẤN ĐỀ 3: Phương trình mặt cầu

Để viết phương trình mặt cầu (S) , ta cần xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu.

Dạng 1: (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R :

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Dạng 2: (S) có tâm $I(a; b; c)$ và đi qua điểm A :

Khi đó bán kính $R = IA$.

Dạng 3: (S) nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

– Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}; z_I = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

– Bán kính $R = IA = \frac{AB}{2}$.

Dạng 4: (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D (mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$):

– Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \quad (*)$$

– Thay lần lượt tọa độ của các điểm A, B, C, D vào $(*)$, ta được 4 phương trình.

– Giải hệ phương trình đó, ta tìm được $a, b, c, d \Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S) .

Dạng 5: (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước:

Giải tương tự như dạng 4.

Dạng 6: (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước:

– Xác định tâm J và bán kính R' của mặt cầu (T) .

– Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S) .

(Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài)

Chú ý: Với phương trình mặt cầu (S) :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \quad \text{với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$$

thì (S) có tâm $I(-a; -b; -c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu mặt cầu

Cho hai mặt cầu $S_1(I_1, R_1)$ và $S_2(I_2, R_2)$.

- $I_1 I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (S_1), (S_2) \text{ trong nhau}$
- $I_1 I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1), (S_2) \text{ ngoài nhau}$
- $I_1 I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (S_1), (S_2) \text{ tiếp xúc trong}$
- $I_1 I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1), (S_2) \text{ tiếp xúc ngoài}$
- $|R_1 - R_2| < I_1 I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1), (S_2) \text{ cắt nhau theo một đường tròn.}$

VẤN ĐỀ 5: Tập hợp điểm là mặt cầu – Tập hợp tâm mặt cầu

1. Tập hợp điểm là mặt cầu

Giả sử tìm tập hợp điểm M thỏa tính chất (P) nào đó.

– Tìm hệ thức giữa các tọa độ x, y, z của điểm M . Chẳng hạn có dạng:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

$$\text{hoặc: } x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

– Tìm giới hạn quỹ tích (nếu có).

2. Tìm tập hợp tâm mặt cầu

– Tìm tọa độ của tâm I , chẳng hạn: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} (*)$

– Khử t trong $(*)$ ta có phương trình tập hợp điểm.

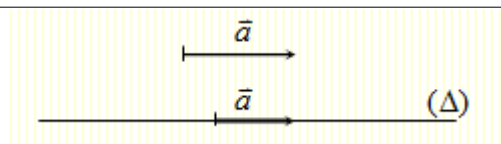
– Tìm giới hạn quỹ tích (nếu có).

2. MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

I. Các định nghĩa:

1. Véc tơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng:

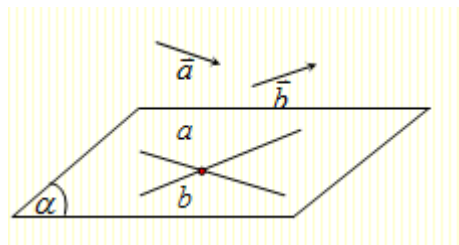
$\vec{a}$ là VTCP của đường thẳng (Δ) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \text{ có giá song song hoặc trùng với } (\Delta) \end{cases}$



Chú ý:

- Một đường thẳng có vô số VTCP, các véc tơ này cùng phương với nhau.
- Một đường thẳng (Δ) hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một VTCP của nó.

2. Cặp VTCP của mặt phẳng:



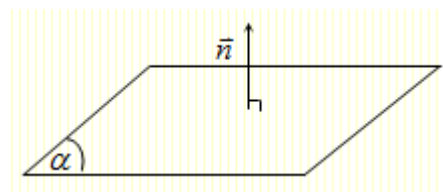
Cho mặt phẳng α xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau a và b . Gọi $\vec{a}$ là VTCP của đường thẳng a và $\vec{b}$ là VTCP của đường thẳng b . Khi đó:

Cặp $(\vec{a}, \vec{b})$ được gọi là cặp VTCP của mặt phẳng α

Chú ý:

- Một mặt phẳng α hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một cặp VTCP của nó.

3. Véc tơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng:



$\vec{n}$ là VTPT của mặt phẳng α $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \text{ có giá vuông góc với mp}\alpha \end{cases}$

Chú ý:

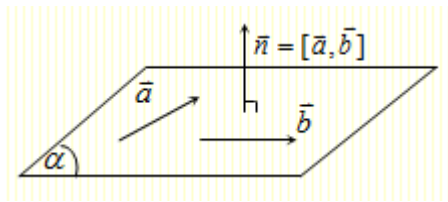
- Một mặt phẳng có vô số VTPT, các véc tơ này cùng phương với nhau.
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một cặp VTPT của nó.

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

4. Cách tìm tọa độ một VTPT của mặt phẳng khi biết cặp VTCP của nó:

Định lý: Giả sử mặt phẳng α có cặp VTCP là: $\begin{cases} \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \end{cases}$ thì mp α có một VTPT là:

$$\vec{n} = [\vec{a}; \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

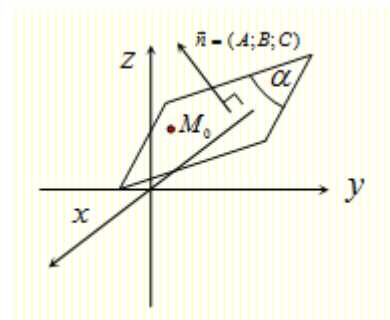
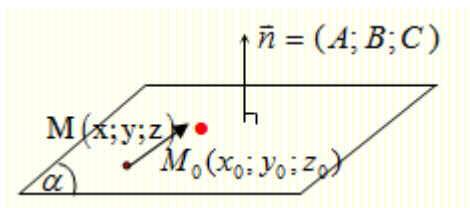


II. Phương trình của mặt phẳng:

Định lý 1: Trong $Kg(Oxyz)$. Phương trình mặt phẳng α

đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



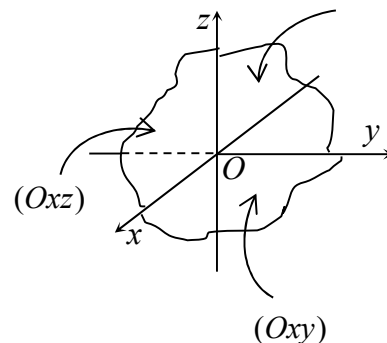
Định lý 2: Trong $Kg(Oxyz)$. Phương trình dạng:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

là phương trình tổng quát của một mặt phẳng.

Chú ý:

- Nếu $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ thì (α) có một VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$
- $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha): Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ (Oyz)



Các trường hợp đặc biệt:

1. Các trường hợp riêng

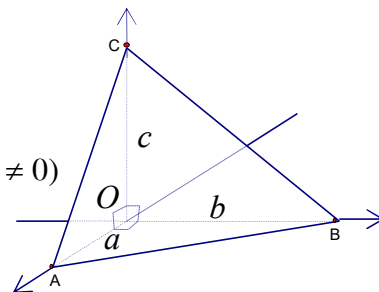
Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc tọa độ O
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel Ox$ hoặc $(\alpha) \supset Ox$
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha) \parallel Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oyz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oyz)$

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

2. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn:

Phương trình mặt phẳng cắt các trục Ox , Oy , Oz tại $\begin{cases} A(a; 0; 0) \\ B(0; b; 0) \\ C(0; 0; c) \end{cases}$ ($a, b, c \neq 0$)

là:
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



III. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng :

1. Một số quy ước và ký hiệu:

Hai bộ n số: $\begin{cases} (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{cases}$ được gọi là tỷ lệ với nhau nếu có số $t \neq 0$ sao cho $\begin{cases} a_1 = tb_1 \\ a_2 = tb_2 \\ \vdots \\ a_n = tb_n \end{cases}$.

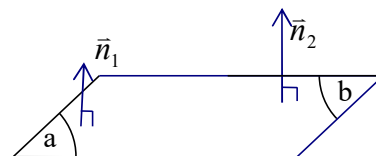
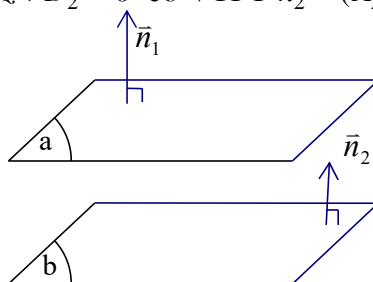
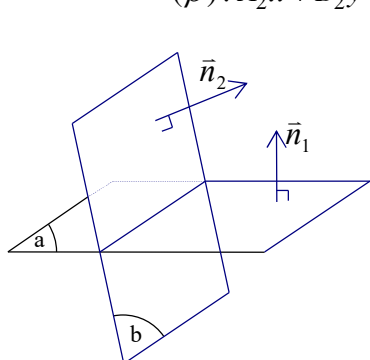
Ký hiệu: $a_1 : a_2 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n$ hoặc $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

2. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho hai mặt phẳng α, β xác định bởi phương trình :

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{có VTPT } \vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$$

$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad \text{có VTPT } \vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$$



$$(\alpha) \text{ cắt } (\beta) \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2 \quad (\text{hay: } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ hoặc } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ hoặc } \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{A_1}{A_2})$$

$$(\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

$$(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

Đặc biệt:

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

III. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

IV. Chùm mặt phẳng

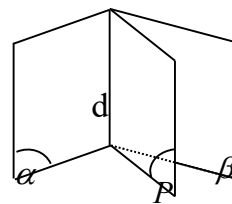
❖ Tập hợp tất cả các mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là một chùm mặt phẳng

❖ Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ và } (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Khi đó nếu (P) là mặt phẳng chứa (d) thì phương trình mặt phẳng (P) có dạng

$$(P): m.(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n.(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad m^2 + n^2 \neq 0$$



VẤN ĐỀ 1: Viết phương trình mặt phẳng

Để lập phương trình mặt phẳng (α) ta cần xác định một điểm thuộc (α) và một VTPT của nó.

Dạng 1: (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$:

$$(\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dạng 2: (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có cặp VTCP $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\text{Khi đó một VTPT của } (\alpha) \text{ là } \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}].$$

Dạng 3:

(α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$:

$$(\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dạng 4: (α) đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C :

$$\text{Khi đó ta có thể xác định một VTPT của } (\alpha) \text{ là: } \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$$

Dạng 5: (α) đi qua một điểm M và một đường thẳng (d) không chứa M :

– Trên (d) lấy điểm A và VTCP $\vec{u}$.

$$\text{– Một VTPT của } (\alpha) \text{ là: } \vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}]$$

Dạng 6: (α) đi qua một điểm M và vuông góc với một đường thẳng (d) :

VTCP $\vec{u}$ của đường thẳng (d) là một VTPT của (α) .

Dạng 7: (α) đi qua 2 đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 :

– Xác định các VTCP $\vec{a}, \vec{b}$ của các đường thẳng d_1, d_2 .

$$\text{– Một VTPT của } (\alpha) \text{ là: } \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}].$$

– Lấy một điểm M thuộc d_1 hoặc $d_2 \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Dạng 8: (α) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 (d_1, d_2 chéo nhau):

– Xác định các VTCP $\vec{a}, \vec{b}$ của các đường thẳng d_1, d_2 .

$$\text{– Một VTPT của } (\alpha) \text{ là: } \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}].$$

– Lấy một điểm M thuộc $d_1 \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Dạng 9: (α) đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 :

– Xác định các VTCP $\vec{a}, \vec{b}$ của các đường thẳng d_1, d_2 .

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Dạng 10: (α) đi qua một đường thẳng (d) và vuông góc với một mặt phẳng (β) :

– Xác định VTCP $\vec{u}$ của (d) và VTPT $\vec{n}_\beta$ của (β) .

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{n}_\beta]$.

– Lấy một điểm M thuộc $d \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Dạng 11: (α) đi qua điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau (β) , (γ) :

– Xác định các VTPT $\vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma$ của (β) và (γ) .

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n} = [\vec{u}_\beta, \vec{n}_\gamma]$.

Dạng 12: (α) đi qua đường thẳng (d) cho trước và cách điểm M cho trước một khoảng k cho trước:

– Giả sử (α) có phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

– Lấy 2 điểm $A, B \in (d) \Rightarrow A, B \in (\alpha)$ (ta được hai phương trình (1), (2)).

– Từ điều kiện khoảng cách $d(M, (\alpha)) = k$, ta được phương trình (3).

– Giải hệ phương trình (1), (2), (3) (bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại).

Dạng 13: (α) là tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H :

– Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R .

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n} = \overrightarrow{IH}$

Chú ý: Để viết phương trình mặt phẳng cần nắm vững các cách xác định mặt phẳng đã học ở lớp 11.

VẤN ĐỀ 2: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

VẤN ĐỀ 3: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

Hình chiếu của một điểm trên mặt phẳng.

Điểm đối xứng của một điểm qua mặt phẳng.

• Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

• Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Chú ý: Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.

• Điểm H là hình chiếu của điểm M trên $(P) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH}, \vec{n} \text{ cùng phương} \\ H \in (P) \end{cases}$

• Điểm M' đối xứng với điểm M qua $(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

VẤN ĐỀ 4: Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α) , (β) có phương trình: $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
 $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Góc giữa (α) , (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Chú ý: • $0^\circ \leq \widehat{((\alpha), (\beta))} \leq 90^\circ$. • $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

VẤN ĐỀ 5: Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu.

Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt cầu $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

- (α) và (S) không có điểm chung $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) > R$
- (α) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$ (α) là tiếp diện

Để tìm tọa độ tiếp điểm ta có thể thực hiện như sau:

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của (S) và vuông góc với (α) .
- Tìm tọa độ giao điểm H của d và (α) .

H là tiếp điểm của (S) với (α) .

- (α) cắt (S) theo một đường tròn $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) < R$

Để xác định tâm H và bán kính r của đường tròn giao tuyến ta có thể thực hiện như sau:

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của (S) và vuông góc với (α) .
- Tìm tọa độ giao điểm H của d và (α) .

H là tâm của đường tròn giao tuyến của (S) với (α) .

Bán kính r của đường tròn giao tuyến: $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$

3. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. Phương trình của đường thẳng:

1) Vector chỉ phương của đường thẳng:

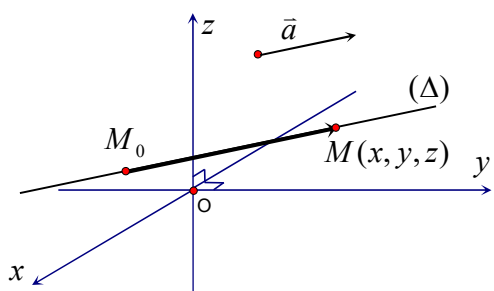
Định nghĩa: Cho đường thẳng d . Nếu vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d thì vector $\vec{a}$ được gọi là vector pháp tuyến của đường thẳng d . Kí hiệu: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

☞ Chú ý:

- 1) $\vec{a}$ là VTCP của d thì $k \cdot \vec{a}$ ($k \neq 0$) cũng là VTCP của d
- 2) Nếu d đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của d
- 3) Trục Ox có vector chỉ phương $\vec{a} = \vec{i} = (1; 0; 0)$
- 4) Trục Oy có vector chỉ phương $\vec{a} = \vec{j} = (0; 1; 0)$
- 5) Trục Oz có vector chỉ phương $\vec{a} = \vec{k} = (0; 0; 1)$

2. Phương trình tham số của đường thẳng:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$. Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm VTCP là :



$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng:

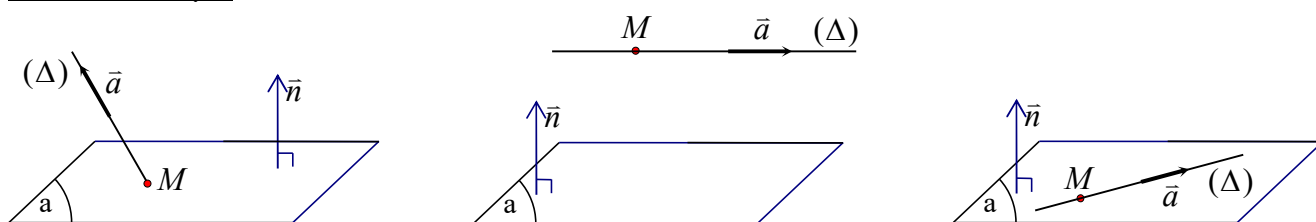
Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm VTCP là :

$$(\Delta): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

II. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :

PP HÌNH HỌC



Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

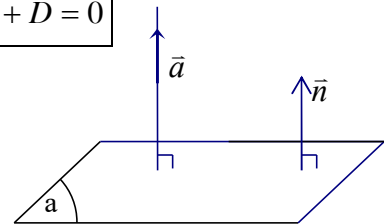
Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho: đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \end{cases}$ có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

và qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$

Khi đó:

$$\begin{aligned} (\Delta) \text{ cắt } (\alpha) &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0 \\ (\Delta) // (\alpha) &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases} \\ (\Delta) \subset (\alpha) &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Đặc biệt: $(\Delta) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương
 $\Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = A : B : C$



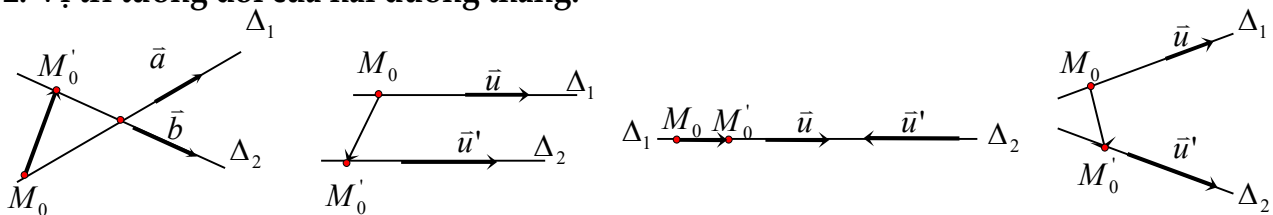
PP ĐẠI SỐ: Muốn tìm giao điểm M của (Δ) và (α) ta giải hệ phương trình: $\begin{cases} pt(\Delta) \\ pt(\alpha) \end{cases}$ tìm

x, y, z . Suy ra: $M(x, y, z)$

Thế (1), (2), (3) vào phương trình $mp(P)$ và rút gọn đưa về dạng: $at + b = 0$ (*)

- d cắt $mp(P)$ tại một điểm $\Leftrightarrow Pt$ (*) có một nghiệm t .
- d song song với $(P) \Leftrightarrow Pt$ (*) vô nghiệm.
- d nằm trong $(P) \Leftrightarrow Pt$ (*) có vô số nghiệm t .
- d vuông góc $(P) \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:



PP HÌNH HỌC

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho hai đường thẳng:

$(\Delta_1): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$ và qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$

$(\Delta_2): \frac{x-x'_0}{a'} = \frac{y-y'_0}{b'} = \frac{z-z'_0}{c'}$ có VTCP $\vec{u'} = (a'; b'; c')$ và qua $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$

- (Δ_1) và (Δ_2) đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u'}] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0$

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

- (Δ_1) cắt (Δ_2) $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0 \\ a:b:c \neq a':b':c' \end{cases}$
- $(\Delta_1) // (\Delta_2)$ $\Leftrightarrow a:b:c = a':b':c' \neq (x'_0 - x_0):(y'_0 - y_0):(z'_0 - z_0)$
- $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$ $\Leftrightarrow a:b:c = a':b':c' = (x'_0 - x_0):(y'_0 - y_0):(z'_0 - z_0)$
- (Δ_1) và (Δ_2) chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} \neq 0$
- $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$ $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$

PP ĐẠI SỐ: Muốn tìm giao điểm M của (Δ_1) và (Δ_2) ta giải hệ phương trình: $\begin{cases} pt(\Delta_1) \\ pt(\Delta_2) \end{cases}$

tìm x, y, z . Suy ra: $M(x, y, z)$

3) Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu:

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có

tâm $I(a; b; c)$, bán kính R .

PP HÌNH HỌC

B1. Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến đường thẳng d là

$$h = d(I, d) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{IM_0}, \vec{a} \right] \right|}{\left| \vec{a} \right|}$$

B2. So sánh $d(I, d)$ và bán kính R của mặt cầu:

- Nếu $d(I, d) > R$ thì d không cắt (S)
- Nếu $d(I, d) = R$ thì d tiếp xúc (S)
- Nếu $d(I, d) < R$ thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N và MN vuông góc với đường kính (bán kính) mặt cầu

PP ĐẠI SỐ: Thế (1), (2), (3) vào phương trình (S) và rút gọn đưa về phương trình bậc hai theo t (*)

- Nếu phương trình (*) vô nghiệm thì d không cắt (S)
- Nếu phương trình (*) có một nghiệm thì d tiếp xúc (S)
- Nếu phương trình (*) có hai nghiệm thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N

Chú ý: Để tìm tọa độ M, N ta thay giá trị t vào phương trình đường thẳng d

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

III. Góc trong không gian:

1. Góc giữa hai mặt phẳng:

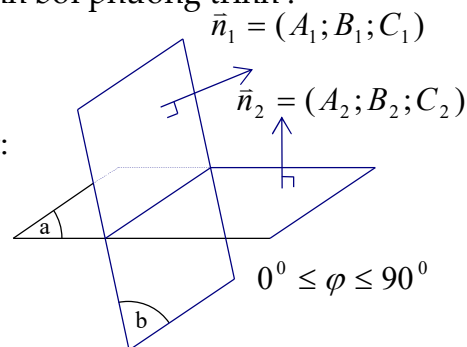
Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho hai mặt phẳng α, β xác định bởi phương trình:

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) & (β) ta có công thức:

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



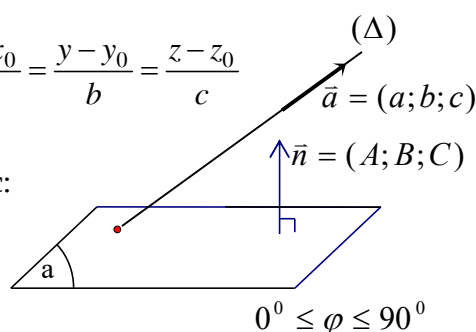
2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ) & (α) ta có công thức:

$$\sin \varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

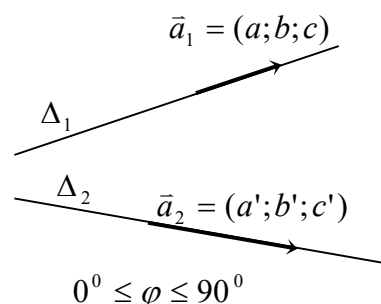


3. Góc giữa hai đường thẳng:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho hai đường thẳng:

$$(\Delta_1): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$(\Delta_2): \frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$$



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ_1) & (Δ_2) ta có công thức:

$$\cos \varphi = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

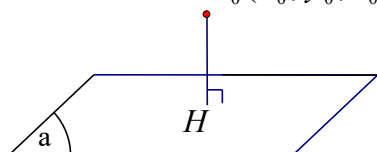
IV. Khoảng cách:

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$

Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính bởi công thức:

$$M_0(x_0; y_0; z_0)$$

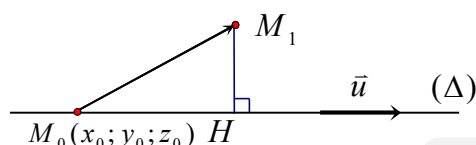


$$d(M_0; \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP

$\vec{u} = (a; b; c)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_1 đến (Δ) được tính bởi công thức:



$$d(M_1, \Delta) = \frac{|\vec{M_0M_1} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

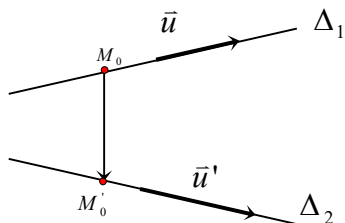
3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho hai đường thẳng chéo nhau :

(Δ_1) có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$ và qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$

(Δ_2) có VTCP $\vec{u}' = (a'; b'; c')$ và qua $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$

Khi đó khoảng cách giữa (Δ_1) và (Δ_2) được tính bởi công thức



$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{\left| \left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \right|}$$

VẤN ĐỀ 1: Lập phương trình đường thẳng

Để lập phương trình đường thẳng d ta cần xác định một điểm thuộc d và một VTCP của nó.

Dạng 1: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Dạng 2: d đi qua hai điểm A, B :

Một VTCP của d là $\overrightarrow{AB}$.

Dạng 3: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước:

Vì $d // \Delta$ nên VTCP của Δ cũng là VTCP của d .

Dạng 4: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước:

Vì $d \perp (P)$ nên VTPT của (P) cũng là VTCP của d .

Dạng 5: d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$:

• Cách 1: Tìm một điểm và một VTCP.

– Tìm tọa độ một điểm $A \in d$: bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases} (P) \\ (Q) \end{cases}$ (với việc

chọn giá trị cho một ẩn)

– Tìm một VTCP của d : $\vec{a} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$

• Cách 2: Tìm hai điểm A, B thuộc d , rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Dạng 6: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 :

Vì $d \perp d_1, d \perp d_2$ nên một VTCP của d là: $\vec{a} = [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}]$

Dạng 7: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ .

• Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ .

$$\begin{cases} H \in \Delta \\ \overrightarrow{M_0 H} \perp \vec{u}_\Delta \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H .

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

• Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d ; (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa d . Khi đó $d = (P) \cap (Q)$

Dạng 8: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 :

• Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1, M_2 \in d_2$. Từ điều kiện M, M_1, M_2 thẳng hàng ta tìm được M_1, M_2 . Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d .

• Cách 2: Gọi $(P) = (M_0, d_1), (Q) = (M_0, d_2)$. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$. Do đó, một VTCP của d có thể chọn là $\vec{a} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$.

Dạng 9: d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 :

Tìm các giao điểm $A = d_1 \cap (P), B = d_2 \cap (P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB .

Dạng 10: d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 :

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d_1 , mặt phẳng (Q) chứa Δ và d_2 .

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 11: d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

• Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1, M_2 \in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm được M, N .

Khi đó, d là đường thẳng MN .

• Cách 2:

– Vì $d \perp d_1$ và $d \perp d_2$ nên một VTCP của d có thể là: $\vec{a} = [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}]$.

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1 , bằng cách:

+ Lấy một điểm A trên d_1 .

+ Một VTPT của (P) có thể là: $\vec{n}_P = [\vec{a}, \vec{a}_{d_1}]$.

– Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và d_2 .

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 12: d là hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (P) :

• Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) bằng cách:

– Lấy $M \in \Delta$.

– Vì (Q) chứa Δ và vuông góc với (P) nên $\vec{n}_Q = [\vec{a}_\Delta, \vec{n}_P]$.

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 13: d đi qua điểm M , vuông góc với d_1 và cắt d_2 :

• Cách 1: Gọi N là giao điểm của d và d_2 . Từ điều kiện $MN \perp d_1$, ta tìm được N .

Khi đó, d là đường thẳng MN .

• Cách 2:

– Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d_1 .

– Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa M và d_2 .

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

VẤN ĐỀ 2: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Để xét VTTĐ giữa hai đường thẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

- Phương pháp hình học: Dựa vào mối quan hệ giữa các VTCP và các điểm thuộc các đường thẳng.
- Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng.

VẤN ĐỀ 3: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt phẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

- Phương pháp hình học: Dựa vào mối quan hệ giữa VTCP của đường thẳng và VTPT của mặt phẳng.
- Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt phẳng.

VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt cầu ta có thể sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp hình học: Dựa vào khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng và bán kính.
- Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt cầu.

VẤN ĐỀ 5: Khoảng cách

1. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d

- Cách 1: Cho đường thẳng d đi qua M_0 và có VTCP $\vec{a}$.

$$d(M, d) = \frac{[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}]}{|\vec{a}|}$$

- Cách 2:
 - Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng d .
 - $d(M, d) = MH$.

- Cách 3:
 - Gọi $N(x; y; z) \in d$. Tính MN^2 theo t (t tham số trong phương trình đường thẳng d).

– Tìm t để MN^2 nhỏ nhất.

– Khi đó $N \equiv H$. Do đó $d(M, d) = MH$.

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 .

d_1 đi qua điểm M_1 và có VTCP $\vec{a}_1$, d_2 đi qua điểm M_2 và có VTCP $\vec{a}_2$

$$d(d_1, d_2) = \frac{[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2}}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2]}$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 bằng khoảng cách giữa d_1 với mặt phẳng (α) chứa d_2 và song song với d_1 .

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

4. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng (α) song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì trên d đến mặt phẳng (α) .

VẤN ĐỀ 6: Góc

1. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các VTCP $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

Góc giữa d_1, d_2 bằng hoặc bù với góc giữa $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

$$\cos(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

2. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho đường thẳng d có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α) .

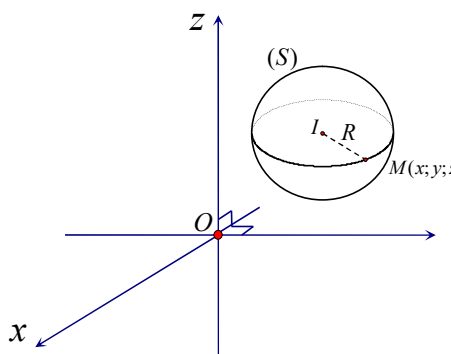
$$\sin(\widehat{d, (\alpha)}) = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

4. MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

I. Phương trình mặt cầu:

1. Phương trình chính tắc:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$. Phương trình của mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R là:



$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của mặt cầu

Đặc biệt: Khi $I \equiv O$ thì $(C): x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

2. Phương trình tổng quát:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$. Phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu (S) có

tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

II. Giao của mặt cầu và mặt phẳng:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) có phương trình:

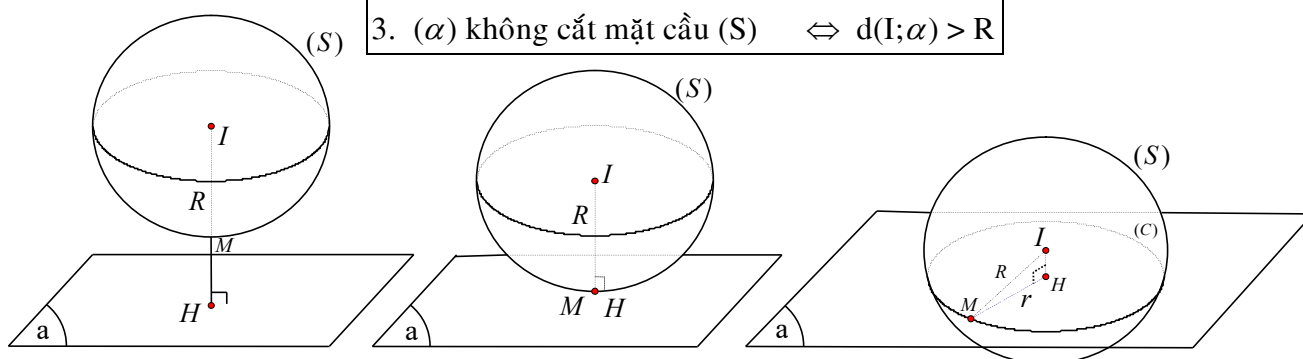
$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Gọi $d(I; \alpha)$ là khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng α

Ta có:

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| 1. (α) cắt mặt cầu (S) | $\Leftrightarrow d(I; \alpha) < R$ |
| 2. (α) tiếp xúc mặt cầu (S) | $\Leftrightarrow d(I; \alpha) = R$ |
| 3. (α) không cắt mặt cầu (S) | $\Leftrightarrow d(I; \alpha) > R$ |



Chú ý:

Khi α cắt mặt cầu (S) thì sẽ cắt theo một đường tròn (C) . Đường tròn (C) này có:

- Tâm là hình chiếu vuông góc của tâm mặt cầu trên mặt phẳng α

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

- Bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}(I, \alpha)$

Để viết phương trình mặt cầu (S) , ta cần xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu.

Dạng 1: (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R : $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Dạng 2: (S) có tâm $I(a; b; c)$ và đi qua điểm A :

Phương pháp:

- Khi đó bán kính $R = IA$.

Dạng 3: (S) nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

Phương pháp:

- Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$; $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- Bán kính $R = IA = \frac{AB}{2}$.

Dạng 4: (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D (mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$):

Phương pháp:

- Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng:
 $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ (*).
- Thay lần lượt tọa độ của các điểm A, B, C, D vào (*), ta được 4 phương trình.
- Giải hệ phương trình đó, ta tìm được $a, b, c, d \Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S) .

Dạng 5: (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước:

Phương pháp: Giải tương tự như dạng 4.

Dạng 6: (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước:

Phương pháp:

- Xác định tâm I và bán kính R' của mặt cầu (T) .
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S) .
(Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài)

Chú ý: Với phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ với

$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì (S) có tâm $I(-a; -b; -c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Cho hai mặt cầu $S_1(I_1, R_1)$ và $S_2(I_2, R_2)$.

- $I_1 I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (S_1), (S_2)$ trong nhau
- $I_1 I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1), (S_2)$ ngoài nhau
- $I_1 I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (S_1), (S_2)$ tiếp xúc trong
- $I_1 I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1), (S_2)$ tiếp xúc ngoài
- $|R_1 - R_2| < I_1 I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1), (S_2)$ cắt nhau theo một đường tròn (đường tròn giao tuyến).

Dạng 7: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, tiếp xúc với mặt phẳng (P) cho trước.

Phương pháp:

- Ta có bán kính mặt cầu $R = d(I; (P))$

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

- Kết luận phương trình mặt cầu.

Dạng 8: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, cắt mặt phẳng (P) cho trước theo giao tuyến là một đường tròn thỏa điều kiện .

- Đường tròn có diện tích cho trước.
- Đường tròn có chu vi cho trước.
- Đường tròn có bán kính cho trước.

Phương pháp:

- Từ công thức diện tích đường tròn $S = \pi r^2$ hoặc chu vi đường tròn $P = 2\pi r$ ta tìm được bán kính đường tròn giao tuyến r .
- Tính $d = d(I, (P))$
- Tính bán kính mặt cầu $R = \sqrt{d^2 + r^2}$
- Kết luận phương trình mặt cầu.

Dạng 8: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, cắt mặt phẳng (P) cho trước theo giao tuyến là một đường tròn thỏa điều kiện .

Phương pháp:

- Ta có bán kính mặt cầu $R = d(I, (P))$
- Kết luận phương trình mặt cầu.

Dạng 9: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, cắt mặt phẳng (P) cho trước theo giao tuyến là một đường tròn thỏa điều kiện .

- Đường tròn có diện tích cho trước.
- Đường tròn có chu vi cho trước.
- Đường tròn có bán kính cho trước.

Phương pháp:

- Từ công thức diện tích đường tròn $S = \pi r^2$ hoặc chu vi đường tròn $P = 2\pi r$ ta tìm được bán kính đường tròn giao tuyến r .
- Tính $d = d(I, (P))$
- Tính bán kính mặt cầu $R = \sqrt{d^2 + r^2}$
- Kết luận phương trình mặt cầu.

Dạng 10: Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ cho trước và có tâm $I(a;b;c)$ cho trước.

Phương pháp

Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) ta có $R = d(I, \Delta)$.

Dạng 11: Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ tại tiếp điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ thuộc Δ và có tâm I thuộc đường thẳng d cho trước.

Phương pháp

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng Δ .
- Tọa độ tâm $I = (P) \cap d$ là nghiệm của phương trình.
- Bán kính mặt cầu $R = IM = d(I, \Delta)$.
- Kết luận về phương trình mặt cầu (S)

Phần 7. Tọa độ không gian Oxyz

Dạng 12: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B thỏa mãn điều kiện:

- a. Độ dài AB là một hằng số.
- b. Tam giác IAB là tam giác vuông.
- c. Tam giác IAB là tam giác đều.

Phương pháp

Xác định $d(I, \Delta) = IH$, vì ΔIAB cân tại I nên $HB = \frac{AB}{2}$

a. Bán kính mặt cầu $R = \sqrt{IH^2 + HB^2}$

b. Bán kính mặt cầu $R = \frac{IH}{\sin 45^\circ}$

c. Bán kính mặt cầu $R = \frac{IH}{\sin 60^\circ}$