



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

6 2017
Số 480

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

Giải thưởng Wolf năm 2017



Charles Fefferman



Richard Schoen

Người được nhận Giải thưởng Wolf sẽ do Tổng thống Israel trao giải trong một buổi lễ đặc biệt tại tòa nhà Quốc hội Israel ở Jerusalem.



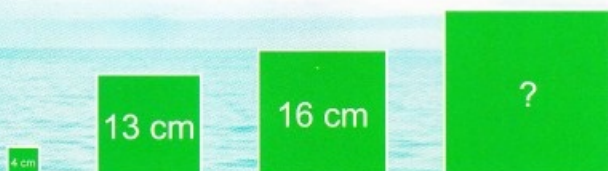


ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2017

Đợt 2

LTS. Trên Tạp chí TH&TT số 479 (tháng 5/2017) Tòa soạn đã giới thiệu 3 bài Đố vui Đợt 1. Trong số 480 (tháng 6/2017) này chúng tôi tiếp tục giới thiệu 3 bài Đố vui của Đợt 2. Bạn hãy gửi lời giải 3 bài Đố vui Đợt 1 về Tòa soạn trước ngày 31/7/2017 và lời giải 3 bài Đố vui Đợt 2 về Tòa soạn trước ngày 31/8/2017 (theo dấu Bưu điện). Lời giải 3 bài Đợt 1 sẽ đăng trên TH&TT số 482 (tháng 8/2017), lời giải 3 bài Đợt 2 và danh sách các bạn đoạt giải cuộc thi này sẽ đăng trên TH&TT số 483 (tháng 9/2017).

Bài 1. CẮT GHÉP HÌNH VUÔNG



Ba tấm bìa hình vuông có cạnh tương ứng là 4 cm, 13 cm và 16 cm với mặt trên màu xanh, mặt dưới màu trắng. Có bao nhiêu cách cắt ba tấm bìa đó thành các đa giác (lồi hoặc lõm) với hai cạnh chung đỉnh bất kỳ vuông góc với nhau để ghép lại được một hình vuông màu xanh cạnh 21 cm sao cho số đa giác bị cắt ra theo bạn là ít nhất? Biết rằng hai kiểu cắt ghép coi là như nhau nếu mỗi đa giác bị cắt ra của kiểu này chồng khít lên một đa giác cùng màu của kiểu kia.

VIỆT HẢI (Hà Nội)

Bài 2. THÁNG 6 NĂM 2017

Trên bảng ta viết tất cả các số từ 1 đến 2017. Hỏi xóa ngẫu nhiên nhiều nhất bao nhiêu số để trên bảng chắc chắn tồn tại 7 số trong đó có một số là tổng của các số còn lại?

NGUYỄN HIỆP (Hà Nội)

Bài 3. XÓA NHỮNG CHỮ SỐ NÀO ?

Cho số $A=1234567891011...100101102$

(gồm các số tự nhiên viết liên tục từ 1, 2, 3, ..., đến 102). Hãy xóa bỏ 102 chữ số trong số A để được số:

- có giá trị lớn nhất;
- có giá trị nhỏ nhất.

NHƯ HOÀNG (Hà Nội)

THÔNG BÁO

Được sự cho phép của Bộ Thông tin và Truyền thông và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, bắt đầu từ số 481 (tháng 7/2017) mỗi số *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* sẽ tăng từ 40 trang ruột lên 48 trang ruột và giá bìa được điều chỉnh là 15000 đồng. Để đáp ứng nhu cầu của bạn đọc, tạp chí sẽ mở rộng thêm một số chuyên mục mới, hấp dẫn như: **Nhiều cách giải cho một bài toán, Du lịch Thế giới qua các bài toán hay, ...**

Nhân dịp này Tòa soạn Tạp chí mong các nhà khoa học, các thầy cô giáo, các em học sinh và bạn đọc yêu Toán tham gia viết và gửi bài cho các chuyên mục của Tạp chí.

Tạp chí trân trọng cảm ơn.

TH&TT



TRUNG HỌC CƠ SỞ

KHAI THÁC BÀI TOÁN VỀ

TAM GIÁC VUÔNG VÀ CÁC ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

VŨ HỮU BÌNH (Hà Nội)

Mỗi bài toán - một kho tàng
Càng khai thác chúng, ta càng thấy hay.

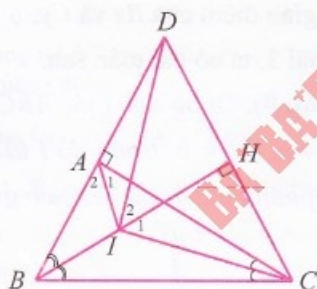
I. NHIỀU TÍNH CHẤT PHONG PHÚ TỪ MỘT BÀI TOÁN

★ **Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A có I là giao điểm của các đường phân giác trong. Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Gọi H là giao điểm của BI và CD . Hãy kể một số tính chất có trong hình vẽ.

Giải tóm tắt (h.1). Tính chất 1 (các góc đặc biệt): $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 45^\circ$; $\widehat{BIC} = 135^\circ$;

$$\widehat{I_1} = \widehat{I_2} = 45^\circ; \widehat{CID} = 90^\circ;$$

$$\widehat{DIB} = 135^\circ; \widehat{DAI} = 135^\circ.$$



Hình 1

Tính chất 2 (các tam giác đặc biệt): $\triangle BCD$ cân tại B , $\triangle IHC$ và $\triangle IHD$ vuông cân tại H , $\triangle CID$ vuông cân tại I .

Tính chất 3 (các quan hệ độ dài):

$$BC = BD, IC = ID, HC = HD.$$

Tính chất 4 (tam giác đồng dạng):

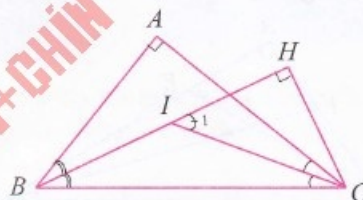
Do $\widehat{DIB} = \widehat{DAI} = 135^\circ$ nên $\triangle DIB \sim \triangle DAI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DI}{DA} = \frac{DB}{DI} \Rightarrow DI^2 = DA \cdot DB. \text{ Do } DI = CI \text{ nên } CI^2 = DA \cdot DB.$$

II. KHAI THÁC BÀI TOÁN THEO HƯỚNG TÍNH TOÁN VÀ CHỨNG MINH

★ **Bài 2** (lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A , các tia phân giác trong của các góc B và C cắt nhau tại I . Biết $IB = \sqrt{2}$, $IC = 2$, tính độ dài BC .

Lời giải (h.2). Kẻ $CH \perp BI$. Xét tam giác vuông IHC có $HC^2 + HI^2 = IC^2 = 2^2 = 4$.



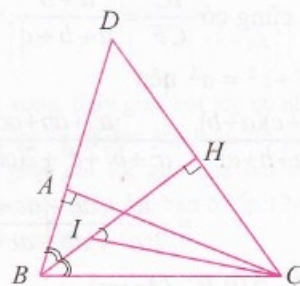
Hình 2

Do $\widehat{I_1} = 45^\circ$ nên $HC = HI$. Do đó $2HC^2 = 4$. Suy ra $HC = HI = \sqrt{2}$.

Ta có $BC^2 = HB^2 + HC^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2 = 10$ nên $BC = \sqrt{10}$.

★ **Bài 3** (lớp 8). Cho tam giác ABC vuông tại A , các tia phân giác trong của các góc B và C cắt nhau tại I . Biết $AB = 7$, $CI = 15\sqrt{2}$, tính độ dài BC .

Lời giải (h.3). Kẻ $CH \perp BI$, cắt BA tại D . Tam giác BCD có đường cao BH là đường phân giác nên là tam giác cân, suy ra $BD = BC$ và $HD = HC$.



Hình 3

Tam giác CIH vuông cân tại H nên $CI = HC\sqrt{2}$
 $\Rightarrow 15\sqrt{2} = HC\sqrt{2} \Rightarrow HC = 15 \Rightarrow CD = 30$.

Đặt $BC = BD = x$ thì

$$AD = x - 7, AC^2 = BC^2 - AB^2 = x^2 - 49.$$

Từ $AD^2 + AC^2 = CD^2$ ta có

$$(x - 7)^2 + (x^2 - 49) = 30^2.$$

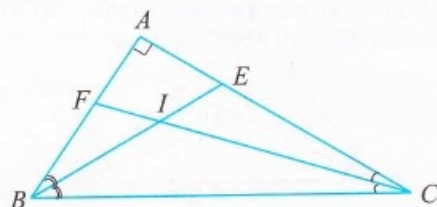
Rút gọn được $x^2 - 7x - 450 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 25)(x + 18) = 0.$$

Suy ra $x = 25$, vậy $BC = 25$.

★ **Bài 4 (lớp 8).** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 18$, $AC = 24$, các đường phân giác trong BE và CF cắt nhau tại I . Tính độ dài các đoạn thẳng AE , EC , AF , FB , IE , IB , IF , IC .

Hướng dẫn (h.4). Dùng tính chất đường phân giác của tam giác.



Hình 4

Đáp số: $AE = 9$, $EC = 15$, $AF = 8$, $FB = 10$,
 $IE = 3\sqrt{5}$, $IB = 6\sqrt{5}$, $IF = 2\sqrt{10}$, $IC = 6\sqrt{10}$.

★ **Bài 5 (lớp 8).** Cho tam giác ABC vuông tại A , các đường phân giác trong BE và CF cắt nhau tại I . Chứng minh hệ thức $BE \cdot CF = 2IB \cdot IC$.

Lời giải (h.4). Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Ta

$$\text{tính được } \frac{CE}{AE} = \frac{a}{c}, \frac{CE}{AC} = \frac{a}{a+c}, CE = \frac{ab}{a+c},$$

$$\frac{IB}{IE} = \frac{a}{CE} = \frac{a+c}{b}, \frac{IB}{BE} = \frac{a+c}{a+b+c}.$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } \frac{IC}{CF} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Ta lại có $b^2 + c^2 = a^2$ nên

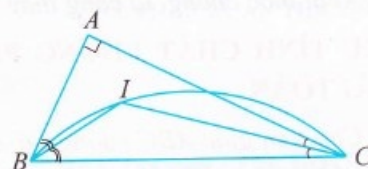
$$\begin{aligned} \frac{IB}{BE} \cdot \frac{IC}{CF} &= \frac{(a+c)(a+b)}{(a+b+c)^2} = \frac{a^2 + ab + ac + bc}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)} \\ &= \frac{a^2 + ab + ac + bc}{2(a^2 + ab + ac + bc)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $BE \cdot CF = 2IB \cdot IC$ (đpcm).

III. KHAI THÁC BÀI TOÁN THEO HƯỚNG TÌM QUỸ TÍCH VÀ DỰNG HÌNH

★ **Bài 6 (lớp 9).** Tìm quỹ tích giao điểm I các tia phân giác trong các góc của tam giác ABC vuông tại A có cạnh BC cố định.

Đáp án. Quỹ tích của điểm I là 2 cung chứa góc 135° đối xứng nhau dựng trên cạnh BC (trừ 2 điểm B, C) (h.5). Khai thác bài 2, ta có bài toán sau.



Hình 5

★ **Bài 7 (lớp 7 - 8).** Dựng tam giác ABC vuông tại A biết $IB = a$, $IC = b$, trong đó I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC .

Cách dựng (xem h.5)

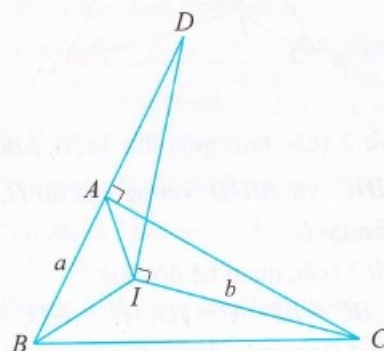
Dựng $\triangle IBC$ có $\widehat{BIC} = 135^\circ$, $IB = a$, $IC = b$.

Dựng các tia Bx , Cy sao cho $\widehat{IBx} = \widehat{IBC}$, $\widehat{ICy} = \widehat{ICB}$.

Dựng A là giao điểm của Bx và Cy .

Khai thác bài 3, ta có bài toán sau.

★ **Bài 8 (Lớp 9).** Dựng tam giác ABC vuông tại A biết $AB = a$, $CI = b$, trong đó I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC .



Hình 6

Phân tích và lời giải. Đây là một bài toán dựng hình tương đối khó. Ta sẽ dựng được $\triangle ABC$ nếu dựng được đoạn thẳng BC . Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$ (h.6), cần dựng đoạn

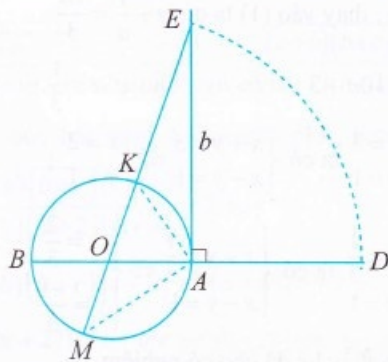
thẳng BD . Liên hệ với bài 1, ta có $DA.DB = CI^2$ (tính chất 4 của bài 1), lại có $CI = b$ nên nếu dựng được điểm D sao cho $DA.DB = b^2$ thì giải được bài toán.

Ta xét bài toán phụ sau:

Cho đoạn thẳng BA . Dựng điểm D thuộc tia đối của tia AB sao cho $DA.DB = b^2$ (b là độ dài cho trước).

Cách dựng (h.7). Dựng $AE \perp AB$ và lấy $AE = b$. Gọi O là trung điểm của AB . Trên tia OA dựng điểm D sao cho $OD = OE$.

Chứng minh. Gọi K, M là giao điểm của EO với đường tròn đường kính AB (K nằm giữa E và O).

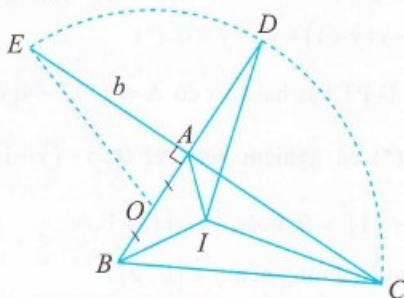


Hình 7

Ta có AE là tiếp tuyến, EKM là cát tuyến của đường tròn đường kính AB , nên $EK.EM = AE^2$ (dùng hệ thức lượng trong đường tròn hoặc $\triangle EAK \sim \triangle EMA$). Ta lại có $EK = DA$, $KM = AB$ nên $DA.DB = EK.EM = AE^2 = b^2$.

Bài toán phụ được chứng minh xong. Trở lại với bài 8.

Cách dựng (h.8).



Hình 8

- Dựng đoạn thẳng $BA = a$.

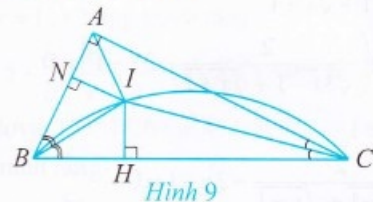
- Dựng điểm D trên tia đối của tia AB sao cho $DA.DB = b^2$ (xem cách dựng ở bài toán phụ, nét dựng thể hiện trên hình).

- Dựng cung tròn tâm B bán kính BD , cung này cắt đường thẳng EA ở C .

Chứng minh. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác vuông ABC . Ta sẽ chứng minh $CI = b$. Thật vậy, ta có $CI^2 = DA.DB$ (tính chất 4 của bài 1), $DA.DB = b^2$ (theo cách dựng) nên $CI^2 = b^2$, suy ra $CI = b$ (đpcm).

IV. KHAI THÁC BÀI TOÁN THEO HƯỚNG TÌM CỰC TRỊ

★ Bài 9 (lớp 9). Trong các tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC cố định, I là giao điểm các đường phân giác trong, tam giác nào có độ dài đoạn thẳng AI lớn nhất?



Hình 9

Lời giải (h.9). Kẻ $IH \perp BC$, $IN \perp AB$, ta có $IH = IN$. Tam giác ANI vuông cân tại N nên $AI = IN\sqrt{2} = IH\sqrt{2}$. Do đó độ dài đoạn AI lớn nhất $\Leftrightarrow IH$ lớn nhất. Do $\widehat{BIC} = 135^\circ$ nên I chuyển động trên cung chứa góc 135° dựng trên cạnh BC cố định. Do đó IH lớn nhất $\Leftrightarrow I$ là điểm chính giữa của cung chứa góc. Khi đó $IB = IC$ và $AB = AC$. Vậy AI có độ dài lớn nhất khi tam giác ABC vuông cân tại A .

Các thí dụ trên cho ta nhiều bài toán hay khi khai thác bài toán về tam giác vuông và các đường phân giác. Các bạn hãy khai thác bài toán đó để tìm thêm cho mình những kết quả mới nhé!

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10

THPT chuyên Hà Tĩnh NĂM HỌC 2016 - 2017

(Đề thi đăng trên TH&TT số 479, tháng 5 năm 2017)

Câu 1. Ta có: $c^2 + 2(ab - bc - ac) = 0$

$$\Rightarrow a^2 = a^2 + c^2 + 2(ab - bc - ac)$$

$$= (a^2 - 2ac + c^2) + 2(ab - bc) = (a - c)^2 + 2b(a - c) \\ = (a - c)(a - c + 2b).$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 2ac + c^2 = (a^2 - 2ac + c^2) + a^2 = (a - c)^2 + a^2 \\ = (a - c)^2 + (a - c)(a - c + 2b) = 2(a - c)(a + b - c)$$

$$\text{Tương tự: } 2b^2 - 2bc + c^2 = 2(b - c)(a + b - c).$$

$$\text{Do đó: } \frac{2a^2 - 2ac + c^2}{2b^2 - 2bc + c^2} = \frac{2(a - c)(a + b - c)}{2(b - c)(a + b - c)} = \frac{a - c}{b - c}$$

(với $b \neq c$, $a + b \neq c$).

Câu 2. a) ĐK: $x \geq \frac{1}{3}$. Khi đó $\sqrt{3x-1} - \sqrt{x+1} = 3x^2 - 2x - 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+1}} = (x-1)(3x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{2}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+1}} - 3x - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+1}} - 3x - 1 = 0 \end{cases}$$

Do $x \geq \frac{1}{3}$, suy ra $\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+1} \geq 1$, nên

$$\frac{2}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+1}} < 2.$$

Với $x \geq \frac{1}{3}$ thì $3x+1 \geq 2$, suy ra

$$\frac{2}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+1}} - 3x - 1 < 0 \text{ với } x \geq \frac{1}{3}.$$

Suy ra PT $\frac{2}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+1}} - 3x - 1 = 0$ vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của PT là $S = \{1\}$.

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 3(x-y) + 3(x+y) + \frac{3}{x+y} = 13 \\ 9(x+y)^2 + 3(x-y)^2 + \frac{9}{(x+y)^2} = 85 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x+y = a \neq 0 \\ x-y = b \end{cases}. \text{ Khi đó: } \begin{cases} 3a + \frac{3}{a} = 13 - 3b \quad (1) \\ 9\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 103 - 3b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b^2 - 13b + 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = \frac{11}{2} \end{cases}.$$

Xét $b = \frac{11}{2}$, thay vào (1) ta có $6a^2 + 7a + 6 = 0$
(PT này vô nghiệm).

Xét $b = 1$, thay vào (1) ta có $a + \frac{1}{a} = \frac{10}{3}$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 10a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \text{ hoặc } a = \frac{1}{3}.$$

$$\bullet \text{ Với } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases};$$

$$\bullet \text{ Với } \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} x+y = \frac{1}{3} \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Thử lại ta thấy hệ đã cho có nghiệm

$$(x; y) \in \left\{ (2; 1); \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Câu 3. a) Ta có: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x^3+y^3-z^2=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=z \\ x^3+y^3=z^2 \end{cases} \Rightarrow x^3+y^3 = (x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) - (x+y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2-x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2-x-y = 0 \text{ (do } x+y > 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x(y+1) + y^2 - y = 0 \quad (*)$$

Xem (*) là PT bậc hai ẩn x có $\Delta = (y+1)^2 - 4(y^2 - y)$

Do PT (*) có nghiệm nên $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 \leq \frac{4}{3}$,

suy ra $(y-1)^2 = 0$ hoặc $(y-1)^2 = 1$.

Vì y nguyên dương nên $y \in \{1; 2\}$.

• Với $y = 1$, thay vào (*) được: $\begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi $x = 2$, ta có $z = 3$.

• Với $y = 2$, thay vào (*) được:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 2.$$

+ Khi $x = 1$, ta tìm được $z = 3$.

+ Khi $x = 2$, ta tìm được $z = 4$.

Thử lại ta được các bộ ba số $(x; y; z)$ thỏa mãn đề bài là: $(1; 2; 3), (2; 1; 3), (2; 2; 4)$.

b) Ta có $a + \sqrt{2016a + bc}$

$$= a + \sqrt{(a+b+c)a + bc} = a + \sqrt{(a+b)(a+c)}$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có: $(a+b)(a+c)$

$$= \left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 \right] \cdot \left[(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{a})^2 \right] \geq (\sqrt{ac} + \sqrt{ab})^2$$

$$\Rightarrow a + \sqrt{(a+b)(a+c)} \geq a + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{2016a + bc}} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

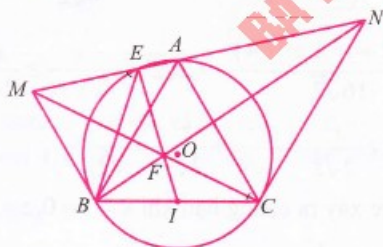
$$\text{Tương tự } \frac{b}{b + \sqrt{2016b + ac}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}};$$

$$\frac{c}{c + \sqrt{2016c + ab}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Suy ra $P \leq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = 1$, đẳng thức xảy ra khi

$a = b = c = 672$.

Câu 4. a) Ta có MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) suy ra $MB \perp OB$.



Mặt khác $\triangle ABC$ đều nên $AC \perp OB \Rightarrow MB \parallel AC$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{NAC}$. Tương tự, $\widehat{MAB} = \widehat{ANC}$.

Do đó: $\triangle ABM \sim \triangle NCA$ (g.g). Vì $\triangle ABM \sim \triangle NCA$

$$\text{nên } \frac{MB}{BA} = \frac{AC}{CN} \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{BC}{CN} \Rightarrow MB \cdot CN = BC^2.$$

b) Ta có $BM \parallel AC \Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$, do

$\widehat{ACB} = 60^\circ$ nên $\widehat{MBC} = 120^\circ$. Tương tự, $\widehat{BCN} = 120^\circ$.

Do đó $\widehat{MBC} = \widehat{BCN}$ ($= 120^\circ$).

Theo câu a) thì $\frac{MB}{BC} = \frac{BC}{CN}$ nên $\triangle BCM \sim \triangle CNB$

(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{FMB}$.

Ta có $\widehat{MFB} = \widehat{FBC} + \widehat{FCB}$, mà $\widehat{FBC} = \widehat{FMB}$ nên

$$\widehat{MFB} = \widehat{FMB} + \widehat{FCB} = 180^\circ - \widehat{MBC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Mặt khác $\widehat{MEB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ (vì tứ giác $ACBE$ nội tiếp).

Do đó $\widehat{MFB} = \widehat{MEB} \Rightarrow MEFB$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi $I = EF \cap BC$.

Vì $\widehat{FBI} = \widehat{FMB}$ nên IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MFB$ hay IB là tiếp tuyến của đường

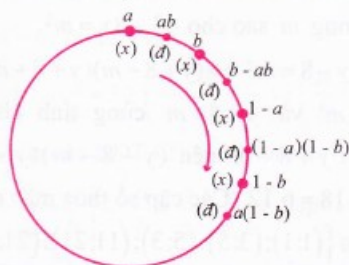
tròn ngoại tiếp tứ giác $MEFB \Rightarrow IB^2 = IF \cdot IE$ (1)

Tương tự tứ giác $EFCN$ nội tiếp, đường thẳng IC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EFCN$.

Suy ra $IC^2 = IF \cdot IE$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $IB = IC$.

Vậy đường thẳng EF đi qua điểm I cố định.

Câu 5. Gọi a là giá trị của một điểm màu xanh ($a \neq 0$), khi đó giá trị của điểm màu đỏ đứng cạnh nó theo chiều kim đồng hồ được viết dạng ab (b là giá trị của điểm màu xanh) với $b \neq 0$ xem hình dưới.



Theo quy luật điểm màu xanh và màu đỏ, ta suy ra giá trị của 6 điểm tiếp theo theo chiều kim đồng hồ thứ tự sẽ là: $b; b-ab; 1-a; (1-a)(1-b); (1-b); a(1-b)$.

Khi đó tổng của 8 số trên là

$$a + ab + b + (b - ab) + (1 - a) + (1 - a)(1 - b) + (1 - b) + a(1 - b) = 3$$

Mặt khác theo quy luật đó, giá trị điểm thứ 9 theo chiều kim đồng hồ là a . Như vậy 1000 số trên được chia thành 125 nhóm, mỗi nhóm gồm 8 số theo quy luật trên. Suy ra tổng giá trị 1000 điểm trên bằng $125 \times 3 = 375$.

LÊ THẾ THÔNG

(GV THPT Lê Quảng Chí, Kỳ Anh, Hà Tĩnh) *Giới thiệu*

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HSG LỚP 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI NĂM HỌC 2016 - 2017

(Đề thi đăng trên TH&TT số 479, tháng 5 năm 2017)

Bài 1. 1) Biến đổi $n^5 + 5n^3 - 6n = n(n-1)(n+1)(n^2+6)$

Chứng minh được $n(n-1)(n+1):6$.

Chứng minh được $n(n^2-1)(n^2+6):5$.

Vì $(5,6)=1$ nên $n^5 + 5n^3 - 6n:30$.

2) Giả sử tồn tại cặp số (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài. Không mất tính tổng quát ta coi $x \geq y$, khi đó:

$$x^2 < x^2 + 8y \leq x^2 + 8x < (x+4)^2$$

Vì $x^2 + 8y$ là số chính phương nên xảy ra các trường hợp sau:

TH1: $x^2 + 8y = (x+1)^2 \Leftrightarrow 8y = 2x+1$ vô lý, vì khác tính chẵn lẻ.

TH2: $x^2 + 8y = (x+3)^2 \Leftrightarrow 8y = 6x+9$ vô lý, vì khác tính chẵn lẻ.

TH3: $x^2 + 8y = (x+2)^2 \Leftrightarrow 8y = 4x+4 \Leftrightarrow x = 2y-1$.

Vì $y^2 + 8x$ là số chính phương suy ra tồn tại số nguyên dương m sao cho $y^2 + 8x = m^2$

$$\Leftrightarrow y^2 + 16y - 8 = m^2 \Leftrightarrow (y+8-m)(y+8+m) = 72.$$

Vì $y+8-m$ và $y+8+m$ cùng tính chẵn lẻ và $y+8-m < y+8+m$ nên $(y+8-m)(y+8+m) = 2.36 = 4.18 = 6.12$. Các cặp số thỏa mãn đầu bài là

$$(x, y) \in \{(1; 1); (3; 5); (5; 3); (11; 21); (21; 11)\}.$$

Bài 2. 1) ĐK: $\frac{3}{x} \leq 2x \leq \frac{6}{x}$.

$$\text{Ta có } \sqrt{2x - \frac{3}{x}} \leq \frac{2x - \frac{3}{x} + 1}{2} \text{ và } \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \leq \frac{\frac{6}{x} - 2x + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \leq \frac{3}{2x} + 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy nghiệm của PT đã cho là $x = \frac{3}{2}$.

$$2) \text{ ĐK: } \begin{cases} xy > 0 \\ x \geq y \\ x \geq -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \geq y \end{cases}$$

Nhân hai vế của hai PT của hệ ta có:

$$(x+y) - (x-y) = 2 \Rightarrow y = 1.$$

Thế $y = 1$ vào PT thứ nhất của hệ ta có

$$\sqrt{\frac{4x}{5}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \frac{4x}{5} = x+1+x-1-2\sqrt{x^2-1}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{5} = \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{16}. \text{ Kết hợp ĐK suy ra } x = \frac{5}{4}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{5}{4}; 1\right)$.

Bài 3. 1) Ta có $x+y+z \leq 2+xy$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \leq 4 + 4xy + x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx + x^2y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-z)^2 + x^2y^2 \geq 0 \text{ (BĐT đúng)}.$$

$$2) \text{ Ta có: } x+y+z \leq 2+xy \Rightarrow \frac{z}{2+xy} \leq \frac{z}{x+y+z}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y}{2+xz} \leq \frac{y}{x+y+z}; \frac{x}{2+yz} \leq \frac{x}{x+y+z}.$$

$$\text{Suy ra } P \leq \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x = y = 1, z = 0$.

Vậy $\max P = 1$. Mặt khác $x(2+yz)$

$$\leq \left(\frac{x^2+2}{2\sqrt{2}}\right) \left(2 + \frac{y^2+z^2}{2}\right) = \frac{(x^2+2)(y^2+z^2+4)}{4\sqrt{2}}$$

$$\leq \frac{(x^2+2+y^2+z^2+4)^2}{16\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2+yz} \geq \frac{x^2}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{x^2}{2\sqrt{2}} + \frac{y^2}{2\sqrt{2}} + \frac{z^2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x = y = 0, z = \sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } \min P = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bài 4. 1) Vì P là trực tâm $\triangle BCM$ suy ra

$$\widehat{BPC} = 180^\circ - \widehat{BMC}$$

mà $\widehat{BMC} = \widehat{BHC}$ và $\widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ suy ra $\widehat{BPC} = \widehat{BAC}$, nên P thuộc đường tròn (O) .

Vậy bốn điểm A, B, C, P cùng thuộc một đường tròn.

2) Dựng đường kính AD của đường tròn (O) .

(Xem tiếp trang 27)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSPTP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2016 - 2017

VÒNG 1

(Dành cho tất cả các thí sinh; Thời gian làm bài 120 phút)

Câu 1 (2 điểm). a) Cho phương trình

$$x^2 - 2mx - m - 1 = 0 \quad (m \text{ là tham số}).$$

- Chứng minh rằng phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbb{R}$.

- Tìm m để $x_1^2 + 2mx_2 - m + \frac{1}{x_2^2 + 2mx_1 - m} = 2$.

b) Cho biểu thức

$$P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}-x-1}\right), \quad (x \geq 0; x \neq 1).$$

- Rút gọn P .

- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $Q = P - (\sqrt{x} + 1)$ có giá trị nguyên.

Câu 2 (2 điểm). Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(D): y = 3x + 4$.

a) Vẽ (P) và (D) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy . Tìm tọa độ giao điểm của chúng bằng phép toán.

b) Viết phương trình đường thẳng (D') tiếp xúc với parabol (P) tại $A(-1; 1)$.

Câu 3 (2 điểm). a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+1)^2 = 2y+5 \\ (y+1)^2 = 2x+5 \end{cases}$$

b) " 220.000 ha lúa bị ảnh hưởng hạn, mặn - Bộ Nông nghiệp và phát triển nông thôn cho biết có

250.000 hộ gia đình với khoảng 1 triệu nhân khẩu không có nước ngọt sinh hoạt đặc biệt vùng ven biển như tỉnh Bến Tre ... " (nguồn trích dẫn báo Tuổi Trẻ ngày 20/04/2016).

Người ta dùng 3 máy bơm I, II, III để bơm nước chống hạn cho cánh đồng. Nếu cả 3 máy bơm cùng bơm thì xong sớm hơn máy I bơm một mình là 28 ngày, xong sớm hơn máy II bơm một mình là 48 ngày và bằng một nửa thời gian máy III bơm một mình. Hỏi mỗi máy nếu bơm riêng một mình thì mất bao nhiêu ngày mới xong công việc?

Câu 4 (4 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC không qua O . Điểm A bất kỳ trên cung lớn BC (không trùng B, C). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt BC tại M . Phân giác của góc AMB cắt OA tại I . Đường tròn $(I; IA)$ cắt AB, AC lần lượt tại E và D . Gọi N là hình chiếu của I trên BC , J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng BC tiếp xúc với đường tròn (I) tại N .

b) Chứng minh rằng ED song song với BC .

c) Gọi K là điểm chính giữa cung nhỏ BC . Chứng minh rằng A, N, K thẳng hàng và $KA \cdot KN = KB^2$.

d) Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của phân giác góc ACB và ABC với đường tròn (O) . Gọi H là giao điểm của KP với AB , G là giao điểm của KQ với AC . Chứng minh rằng HG đi qua J .

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (2 điểm). a) Quãng đường từ A đến B dài 50km. Một người dự định đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi đi được 2 giờ, do xe bị hỏng nên người ấy phải dừng lại 30 phút để sửa xe. Vì vậy muốn đến B đúng thời gian đã định, người đó phải tăng vận tốc thêm 2km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đi xe đạp.

b) Giải phương trình: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} - \sqrt{x+25} = 0$.

Câu 2 (1 điểm). a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta luôn có $n^7 - n$ chia hết cho 42.

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $\frac{x-3}{x^2+1}$ là số nguyên.

Câu 3 (1 điểm). a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+a^2)} \geq 2(a+b+c).$$

b) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

Câu 4 (1 điểm). Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$.

a) Tính giá trị của $xy+yz+zx$ và chứng minh rằng

$$\frac{2}{3} \leq z \leq 2.$$

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P = x^3 + y^3 + z^3.$$



Giai Wolf 2017



Charles Fefferman (trái), Đại học Princeton và *Richard Schoen* (phải), Đại học California, Irvine đã giành được giải thưởng Wolf năm 2017 trong toán học cho "những đóng góp đột phá trong giải tích và hình học". Giải thưởng 100000 USD được chia cho hai người.

Charles Fefferman có những đóng góp lớn với nhiều lĩnh vực, như giải tích phức nhiều biến, phương trình đạo hàm riêng và vấn đề subelliptic. Ông giới thiệu các kỹ thuật cơ bản trong giải tích điều hòa và khám phá ứng dụng cho một loạt các lĩnh vực như động lực học vật chất, hình học phổ và vật lý toán. Ngoài ra ông còn giải quyết các vấn đề lớn liên quan đến các cấu trúc phức tạp, tinh tế cho các phương trình đạo hàm riêng. *Fefferman* nhận giải Fields năm 1978, giải thưởng Bergman năm 1982 và giải thưởng tưởng niệm Bocher năm 2008.

Richard Schoen được công nhận là "người tiên phong" và tạo động lực trong hình học giải tích. Các công trình của ông về hàm điều hòa và mặt cực tiểu đã có ảnh hưởng lâu dài. Lời giải của ông cho vấn đề Yamabe là cơ sở để phát hiện một mối liên hệ sâu sắc với thuyết tương đối tổng quát. Thông qua công việc của mình trong hình học giải tích, *Schoen* đã có đóng góp rất lớn cho sự hiểu biết của chúng ta về mối tương quan giữa phương trình đạo hàm riêng và hình học vi phân. *Schoen* nhận giải tưởng niệm Bocher năm 1989, là thành viên Viện Hàn lâm khoa học, thành viên của AMS, American Academy of Arts, Sciences, và hiệp hội Mỹ vì sự tiến bộ của khoa học. Ông hiện là một Phó chủ tịch của AMS.

Giải thưởng Wolf, được đưa ra lần đầu tiên năm 1978, được trao bởi quỹ Wolf. Người trúng giải sẽ nhận giải từ Tổng thống Israel trong một buổi lễ đặc biệt tại tòa nhà Quốc hội Israel ở Jerusalem.

TRƯƠNG QUANG AN

(GV THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi) *Sưu tầm*

Câu 5 (3 điểm). Cho đường tròn tâm O bán kính R có hai đường kính vuông góc với nhau là AB và CD . Trên cung nhỏ BC lấy điểm E (khác B, C), AE cắt CD tại F . Gọi giao điểm của CB và AE là G , giao điểm của ED và AB là H .

- Chứng minh rằng AE là phân giác của góc CED và tứ giác $FOBE$ nội tiếp.
- Chứng minh GH song song với CD .
- Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHE .

Câu 6 (1 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Gọi BE và CF là các phân giác trong của tam giác ABC .

- Chứng minh rằng tam giác AEF có ba góc nhọn.
- Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng EF . Gọi H, D, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC . Chứng minh rằng $MH = MD + MK$.

Câu 7 (1 điểm). Cho các số tự nhiên a, b, c, d bất kỳ. Chứng minh rằng tích của 6 số: $a - b, b - c, c - d, d - a, a - c, b - d$ là một số nguyên chia hết cho 12.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

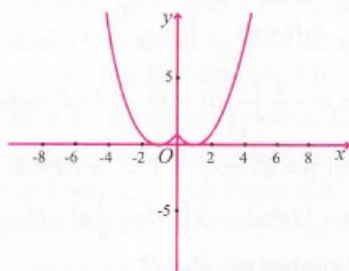
(TP. Hồ Chí Minh) *Sưu tầm và giới thiệu*

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 10

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1.



Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$ B. $y = x^4 + 2x^2 + 1$
C. $y = x^2 - 2|x| + 1$ D. $y = x^2 + 2|x| + 1$

Câu 2. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$. Xét bốn mệnh đề sau:

- I. Điều kiện cần và đủ để hàm số có đúng 1 cực trị là $ab > 0$.
II. Điều kiện cần và đủ để hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$.
III. Điều kiện cần và đủ để hàm số có đúng 1 cực trị là $ab = 0$.
IV. Điều kiện cần và đủ để hàm số có 3 cực trị là $ab \leq 0$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. I B. II C. III D. IV

Câu 3. Điều kiện nào dưới đây cho bốn số thực a, b, c, d ($c \neq 0$) để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trong mỗi

khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right), \left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$?

- A. $ad > bc$ B. $ad < bc$ C. $ac > bd$ D. $ac < bd$

Câu 4. Hàm số nào sau đây có đúng một cực trị?

- A. $y = x^{\frac{2}{3}}$ B. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$

- C. $y = \frac{2x+3}{x-1}$ D. $y = x - \ln x$

Câu 5. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+x-1}-x}{x^2-1}$ là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 6. Hỏi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ tạo thành một tam giác gì?

- A. Thường B. Chỉ cân C. Vuông cân D. Đều

Câu 7. Cho đường cong (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x$. Khẳng định nào sau đây SAI?

- A. Đồ thị (C) có một tâm đối xứng.
B. Đồ thị (C) cắt Ox tại 3 điểm.
C. Đồ thị (C) tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 2x - 1$.
D. Đồ thị (C) tiếp xúc trục hoành.

Câu 8. Tìm số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - mx^2 + x + 2017$ đồng biến trong tập số thực $\mathbb{R}$?

- A. $0 < m \leq 1$ B. $0 \leq m \leq 1$
C. $0 < m < 1$ D. $m < 0 \vee m > 1$

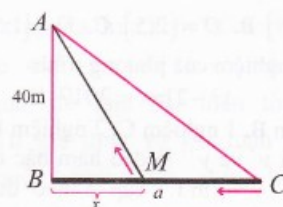
Câu 9. Xác định tham số thực a để phương trình $x\sqrt{x} + 3x - a = 0$ có nghiệm? Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

- A. $a \leq 0$ B. $a > 0$ C. $0 \leq a \leq 4$ D. $a \geq 0$

Câu 10. Cho biểu thức $f = \frac{y^2}{x+2}$, trong đó x, y là hai số thực tùy ý thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Giá trị lớn nhất $f_{\max}$ của biểu thức trên bằng:

- A. $f_{\max} = 4 + 2\sqrt{3}$ B. $f_{\max} = 4 - 2\sqrt{3}$
C. $f_{\max} = -2 + \sqrt{3}$ D. $f_{\max} = 2\sqrt{3} - 4$

Câu 11. Một hồ nước có hình dạng tam giác ABC vuông tại B. Chiều dài $AB = 40\text{m}$, $BC > AB$. Vì hai bờ hồ AB và AC bị chặn không đi được, do đó một người muốn đi từ C sang A thì phải chạy bộ đến vị trí M thuộc bờ CB rồi từ M bơi sang A. Hỏi người ấy phải chạy bộ từ C đến vị trí M cách B bao nhiêu mét để đến đích A nhanh nhất, biết rằng vận tốc chạy bộ là 5 m/s và vận tốc bơi là 3 m/s .



- A. 40m B. 30m C. 20m D. 10m

Câu 12. Cho biểu thức $T = \frac{(a-b)(1-\sqrt{ab})}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}$, trong đó

a, b là hai số thực dương khác nhau. Khi $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} = 1$, giá trị đúng của T là:

- A. $T = 1$ B. $T = \sqrt{2}$ C. $T = \sqrt{3}$ D. $T = 2$

Câu 13. Cho hai số thực dương a, b khác 1 thỏa mãn $a^m = b^n$ (*) trong đó m, n là hai số thực khác 0. Từ (*) suy ra kết quả nào sau đây SAI?

- A. $a = \sqrt[n]{b^m}$ B. $\frac{m}{n} = \frac{\ln b}{\ln a}$ C. $a = \sqrt[m]{b^n}$ D. $\frac{n}{m} = \log_b a$

Câu 14. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\log_x 4 = 2 \Rightarrow x = \pm 2$ là nghiệm.
B. $\log_2 x = \log_x 2 \Rightarrow x = 2$ là nghiệm duy nhất.
C. $\log_2 x^2 = 2 \Rightarrow x = 2$ là nghiệm duy nhất.

D. $2\sqrt[3]{x} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = 8$ là nghiệm.

Câu 15. Cho $\lg 3 = a, \lg 2 = b$. Khẳng định nào sau đây SAI?

A. $\log_2 3 = \frac{a}{b}$

B. $\log_5 3 = \frac{a}{1-b}$

C. $\lg 2,25 = \frac{a}{b}$

D. $\lg 1,2 = a + 2b - 1$

Câu 16. Cho $0 < a, b \neq 1$ thỏa mãn:

+ Đồ thị hàm số $y = a^x$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang khi $x \rightarrow +\infty$.

+ Đồ thị $y = \log_b x$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng khi $y \rightarrow -\infty$.

Khẳng định đúng của a và b là:

A. $0 < a < 1, 0 < b < 1$

B. $a > 1, 0 < b < 1$

C. $a > 1, b > 1$

D. $0 < a < 1, b > 1$

Câu 17. Gọi $y^{(n)}$ là đạo hàm bậc n của hàm số $y = xe^x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $y^{(2017)} - y^{(2015)} = 2y^{(2016)}$

B. $y^{(2017)} + y^{(2016)} = 2y^{(2015)}$

C. $y^{(2017)} + y^{(2015)} = 2y^{(2016)}$

D. $y^{(2016)} + y^{(2015)} = 2y^{(2017)}$

Câu 18. Tập nghiệm S của bất phương trình $(17 - 12\sqrt{2})^x \leq (3 + \sqrt{8})^{x^2}$ là:

A. $S = (-\infty, 0) \cup [2; +\infty)$

B. $S = [0; +\infty)$

C. $S = (-\infty, -2] \cup [0; +\infty)$

D. $S = [-2; 0]$

Câu 19. Tập D nào dưới đây là miền xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_{0,5}(\log_2(x-1))} + 1$?

A. $D = (-\infty; 5]$

B. $D = (2; 5]$

C. $D = (1; 5]$

D. $D = [2; +\infty)$

Câu 20. Số nghiệm của phương trình

$x^2 - 2\ln x = 2017$ là:

A. vô nghiệm B. 1 nghiệm C. 2 nghiệm D. 3 nghiệm

Câu 21. Gọi y' và y'' là đạo hàm bậc nhất và bậc hai của hàm số $y = x \ln x$. Tập S nào dưới đây là tập nghiệm của phương trình $y' - y'' = 0$?

A. $S = \{1; e\}$

B. $S = \{1\}$

C. $S = \{1; 2\}$

D. $S = \{2; e\}$

Câu 22. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $y = 2^x \cdot 3^x$ thỏa mãn $F(\log_6 2) = \frac{2}{\ln 6}$. $F(x)$ là hàm số nào?

A. $F(x) = \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{2}{\ln 2}$

B. $F(x) = \frac{6^x}{\ln 6} + C$

C. $F(x) = \frac{2^x \cdot 3^x}{\ln 2 \cdot \ln 3}$

D. $F(x) = \frac{2^x \cdot 3^x}{\ln 6}$

Câu 23. Cho $f(x)$ là một hàm số chẵn xác định trong $\mathbb{R}$ và $\int_{-2}^0 f(x)dx = 1, \int_{-1}^2 f(x)dx = 3$. Giá trị của $I = \int_{-1}^0 f(x)dx$ bằng:

A. $I = 1$

B. $I = 2$

C. $I = -1$

D. $I = 4$

Câu 24. Để tìm $I = \int \sqrt[3]{x} dx$ có 3 bạn làm 3 cách khác nhau như sau:

Bạn 1: $I = \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$.

Bạn 2: Đặt $\begin{cases} u = x^{\frac{1}{3}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} dx \\ v = x \end{cases}$.

Vậy $I = x \cdot x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^{\frac{2}{3}}} dx = x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{3} I + C \Rightarrow I = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C_1$.

Bạn 3: Đặt $u = \sqrt[3]{x} \Rightarrow u^3 = x \Rightarrow 3u^2 du = dx$

$\Rightarrow I = \int 3u^2 u du = 3 \int u^3 du = \frac{3}{4} u^4 + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$.

Cách giải của bạn nào đúng?

A. Bạn 1 B. Bạn 2 C. Bạn 3 D. Cả 3 bạn đều đúng

Câu 25. Tính tất cả các giá trị thực của a để

$\int_1^a \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$.

A. Chỉ $a = e$

B. $a = e, a = \frac{1}{e}$

C. Chỉ $a = \frac{1}{e}$

D. $a = 1, a = e$

Câu 26. Một vật đang chuyển động với vận tốc ban đầu a (m/s) ($a \in \mathbb{R}^+$) rồi thay đổi vận tốc chậm dần đều

với vận tốc $v(t) = -20t + a$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu thay đổi vận tốc. Hỏi vận tốc ban đầu của vật chạy là bao nhiêu để từ khi vật thay đổi vận tốc đến khi dừng hẳn thì vật đã chạy được 10(m)?

A. 20 (m/s) B. 10 (m/s) C. 30 (m/s) D. 40 (m/s)

Câu 27. Số n nguyên dương nào sau đây thỏa mãn

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \sin 2x dx = \frac{1}{32}$?

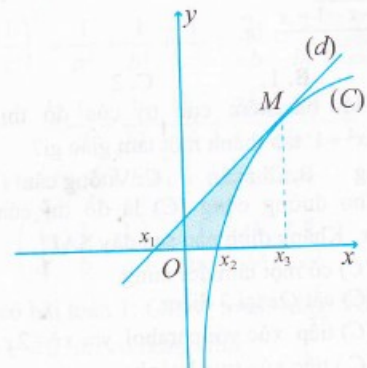
A. $n = 1$

B. $n = 2$

C. $n = 3$

D. $n = 4$

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trong khoảng K có đồ thị (C) được vẽ trong hình dưới và $y = h(x)$ là phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm M có hoành độ $x_3 \in K$.



Trục Ox cắt (d) và (C) lần lượt tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 . Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi 3 đường (C) , (d) và trục Ox được tính theo các biểu thức sau:

I. $S = \int_{x_1}^{x_3} h(x)dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx$

II. $S = \int_{x_1}^{x_3} h(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} [h(x) - f(x)]dx$

III. $S = \int_{x_1}^{x_3} [h(x) - f(x)]dx$.

Hỏi trong 3 biểu thức tính S trên có bao nhiêu biểu thức tính đúng?

- A. 0 biểu thức B. 1 biểu thức
C. 2 biểu thức D. 3 biểu thức

Câu 29. Cho A, B, C là ba điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $1+2i, 7+10i, -3+5i$. Tam giác ABC là tam giác gì?

- A. Thường B. Cân C. Đều D. Vuông

Câu 30. Cho số phức $z = 1+i$. Phép toán nào dưới đây có kết quả là một số phức thuần ảo?

- A. $z^2 + (\bar{z})^2$ B. $z^3 + (\bar{z})^3$ C. $\frac{z-\bar{z}}{z+z}$ D. $(z+\bar{z})(z-\bar{z})$

Câu 31. Tìm số thực m lớn nhất để nghiệm phức z của phương trình $z^2 - 2z + 1 + m^2 = 0$ thỏa mãn $|z| \leq \sqrt{5}$?

- A. $m = -\sqrt{2}$ B. $m = \sqrt{2}$ C. $m = 2$ D. $m = -2$

Câu 32: Khai triển $S = |z-1|^2$ có kết quả nào dưới đây luôn luôn đúng với mọi số phức z ?

- A. $S = z^2 - 2|z| + 1$ B. $S = |z|^2 - 2|z| + 1$
C. $S = z^2 - 2z + 1$ D. $S = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1$

Câu 33. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện nào dưới đây trong mặt phẳng phức là các đường thẳng?

- A. $|z| + |\bar{z}| = 2$ B. $|z + \bar{z}| = |z - \bar{z}|$
C. $|z| = 2|\bar{z}|$ D. $z\bar{z} = |z| + |\bar{z}|$

Câu 34. Cho số phức z thay đổi sao cho $|z|=1$ thì giá trị lớn nhất của $|z+1+i|$ bằng:

- A. $\sqrt{2}-1$ B. $\sqrt{3}-1$ C. $\sqrt{2}+1$ D. $\sqrt{3}+1$

Câu 35. Cho tứ diện đều có cạnh bằng a . Khẳng định nào sau đây SAI?

- A. Chiều cao của tứ diện bằng $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.
B. Diện tích của một mặt tứ diện bằng $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

C. Thể tích của tứ diện bằng $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

D. Diện tích toàn phần của tứ diện bằng $\sqrt{3}a^2$.

Câu 36. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đường cao $SH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ và thể tích hình chóp $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. Độ dài cạnh đáy AB và cạnh bên SA của hình chóp bằng:

- A. $AB = a, SA = \sqrt{\frac{3}{2}}a$ B. $AB = a, SA = a$
C. $AB = a, SA = 2a$ D. $AB = \sqrt{\frac{3}{2}}a, SA = a$

Câu 37. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đường cao $SH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ và thể tích hình chóp $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. Bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng:

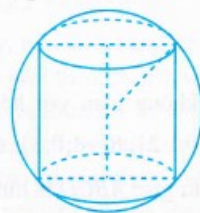
- A. $r = \frac{a}{1+\sqrt{3}}$ B. $r = \frac{\sqrt{2}a}{1+\sqrt{3}}$
C. $r = (1+\sqrt{3})a$ D. $r = \frac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

Câu 38. Thiết diện qua trục của hình nón (S) có bán kính đáy R là một tam giác đều. Thể tích V của khối nón (S) đó bằng:

- A. $V = \sqrt{3}\pi R^3$ B. $V = \frac{\pi R^3}{3}$
C. $V = \frac{\pi R^3}{\sqrt{3}}$ D. $V = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{4}$

Câu 39. Cho một hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao nội tiếp trong một hình cầu, nghĩa là hai đường tròn đáy của hình trụ nằm trên mặt cầu (như hình vẽ). Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình trụ và

hình cầu trên. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:



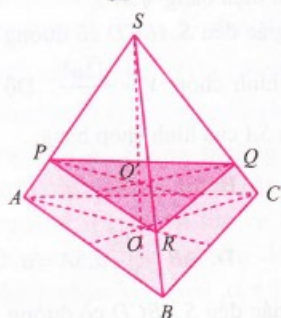
- A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{8}$ D. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

Câu 40. Cho hình chóp đa giác đều có cạnh bên bằng a tạo với đáy hình chóp một góc 30° , bán kính R mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

- A. $R = a$ B. $R = \sqrt{3}a$ C. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ D. $R = \frac{a}{2}$

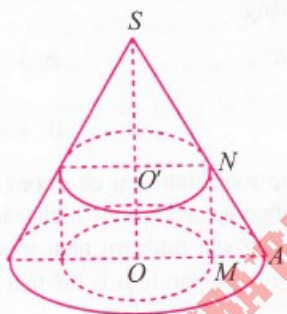
Câu 41. Một cái phễu đựng nước có dạng hình tứ diện đều $S.ABC$. Gọi O là tâm của đáy ABC . Lấy ABC làm đáy, SO có chiều thẳng đứng, đổ một lượng nước vào phễu để mực nước đến vị trí O' trên SO sao cho để khi

lật đầu ngược lại của cái phễu thì mực nước vẫn ở vị trí O' . Tỉ số $\frac{SO'}{SO}$ bằng bao nhiêu?



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Câu 42. Cho hình nón đỉnh S có đường tròn đáy bán kính bằng R , thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông. Một hình trụ (T) nội tiếp hình nón trên sao cho một đáy hình trụ là hình tròn nằm trong mặt phẳng và đồng tâm với hình tròn đáy của hình nón, đáy còn lại của (T) là hình tròn tiếp xúc mặt xung quanh hình nón (hình vẽ). Thể tích lớn nhất của hình trụ (T) bằng:



- A. $V_T = \frac{4\pi}{27} R^3$ B. $V_T = \frac{4\pi}{27} R^2$
C. $V_T = \frac{4R^3}{27}$ D. $V_T = 4\pi R^3$

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(-1;0;3)$, $C(3;1;4)$. Điểm D nào dưới đây để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành?

- A. $D(4;1;-1)$ B. $D(4;3;2)$ C. $D(4;2;3)$ D. $D(3;1;4)$

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(-1;0;3)$, $C(3;1;4)$. Điểm M nào dưới đây nằm trên cạnh BC để diện tích tam giác AMB gấp hai lần diện tích tam giác AMC ?

- A. $M(7;2;5)$ B. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$
C. $M(-7;-2;-5)$ D. $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{11}{3}\right)$

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 2 = 0$ tiếp xúc với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. $2x + 2y + z - 4 = 0$ B. $2x + y + 2z - 3 = 0$
C. $2x + y + 2z - 5 = 0$ D. $x + 2y + 2z - 5 = 0$

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ và đường thẳng d_2 là giao

tuyến của hai mặt phẳng $x + y + z + 2016 = 0$, $x - 2y + z + 2017 = 0$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1, d_2 là:

- A. cắt nhau B. song song nhau
C. trùng nhau D. chéo nhau

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$. Đường thẳng nào sau đây qua $M(2;1;-3)$ và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho độ dài AB lớn nhất?

- A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = -3 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$
C. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ D. $\frac{x+5}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{3}$

Câu 48. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z + 2017 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $x + y + z - 1 = 0$, $x - 2y + z - 4 = 0$. Vị trí của d và (P) là:

- A. d cắt (P) B. $d \subset (P)$ C. $d // (P)$ D. $d \perp (P)$

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;-3;-5)$.

Trên mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ lấy điểm M rồi tính $S = |\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}|$. Giá trị nhỏ nhất của S bằng:

- A. $\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. 3 D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với đỉnh $A(4;1;0)$, trực tâm $H(8;1;0)$ và $M(1;1;0)$ là trung điểm cạnh BC . Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tọa độ là:

- A. $I(-1;1;0)$ B. $I(1;1;0)$ C. $I(-1;1;1)$ D. $I(-1;0;1)$

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 9

1C	2D	3B	4A	5B	6D	7B	8A	9C	10C	11B	12A	13D	14B	15C	16D	17A
18B	19D	20C	21A	22B	23B	24A	25B	26C	27A	28B	29D	30B	31D	32A	33A	34B
35C	36A	37C	38A	39B	40D	41B	42A	43C	44D	45B	46A	47D	48A	49C	50B	

Câu 3. Ta có $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$. Chọn B.

Câu 4. Ta có $(1+2i)^2(1-i) = (-3+4i)(1-i) = 1+7i$.

Suy ra số phức z có phần ảo là 7. Chọn A.

Câu 8. Ta có $\left(\frac{1}{3}e^{x^3+2017}\right)' = x^2e^{x^3+2017} = f(x)$.

Chọn A.

Câu 10. Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và O là tâm của của đáy $ABCD$

$$SO = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{a^3\sqrt{3}}{12}\right)}{a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Cạnh bên

$$SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{11}}{4}.$$

Chọn C.

Câu 11. TXĐ $D = [0; 2]$.

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[0; \frac{3}{2}\right].$$

x	0	1	$\frac{3}{2}$
y'	+	0	-
y			

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số đã cho ta suy ra $\max_{x \in [0; \frac{3}{2}]} y = y(1) = 1$. Chọn B.

Câu 12. Ta có $f'(x) = 2017e \cdot 2 \cdot \ln x \cdot (\ln x)' = \frac{4034e}{x} \ln x$

$$\Rightarrow f'(e) = \frac{4034e}{e} \ln e = 4034. \text{ Chọn A.}$$

Câu 13. Không chọn phương án A và B vì $H \notin (P)$. Không chọn phương án C vì $H \in (P)$ nhưng $\overrightarrow{AH} = (3; 5; 7)$ không cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; -1)$ của (P) . Chọn D.

Câu 14. Vì hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 3x + 2) = \pm\infty$. Chọn B.

Câu 15. Gọi R, R' lần lượt là bán kính của quả bóng cao su trước và sau khi bơm.

Thể tích của quả bóng cao su trước và sau khi bơm lần

$$\text{lượt là } V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3, V_2 = \frac{4}{3}\pi R'^3.$$

$$\text{Theo giả thiết có: } \frac{V_2}{V_1} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{R'}{R}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{R'}{R} = \sqrt[3]{2}.$$

Chọn C.

Câu 16. Trục lăn sơn nước lăn tròn một vòng tạo nên trên sân phẳng một diện tích xung quanh của trục. Diện tích xung quanh của trục lăn là

$$S_{xq} = 5\pi \cdot 23 = 115\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

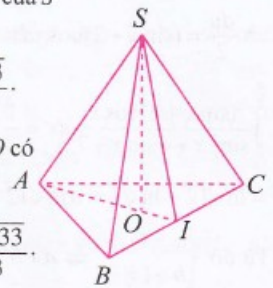
Trục lăn tròn 15 vòng có diện tích là $1725\pi \text{ cm}^2$. Chọn D.

Câu 18. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) . Ta có

$$AO = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Xét tam giác SOA vuông tại O có

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$



Thể tích của khối chóp cần tìm là

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{33}}{3} = \frac{a^3\sqrt{11}}{24}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 19. Thế $z = 1+i$ vào $z^2 + bz + c = 0$, sau đó khai triển thu gọn lại ta được

$$(2+b)i + b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 20. PT mặt phẳng (MNP) : $\frac{x}{-5} + \frac{y}{-5} + \frac{z}{10} = 1$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - z + 10 = 0. \text{ Ta có } \begin{cases} Q \notin (MNP) \\ R \in (MNP) \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 21. Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu hãm phanh. Gọi T là thời điểm ô tô dừng. Ta có

$$v(T) = 0 \Rightarrow -38T + 19 = 0 \Rightarrow T = 0,5.$$

Như vậy, khoảng thời gian từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn của ô tô là 0,5 giây. Trong khoảng thời gian 0,5 giây đó, ô tô di chuyển được quãng đường là

$$L = \int_0^{0,5} (-38t + 19)dt = (-19t^2 + 19t) \Big|_0^{0,5} = 4,75 \text{ (m)}.$$

Chọn A.

Câu 22. Từ giả thiết ta suy ra $A(1; -1), B(2; 1),$

$C(-1; 0), \overrightarrow{AB} = (1; 2), \overrightarrow{AC} = (-2; 1)$. Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại A. Chọn B.}$$

Câu 24. $2017 \ln(x-1) = \log(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \dots \tan 89^\circ)$

$$= \log((\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots) \\ = \log((\tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \cot 2^\circ) \dots) = \log 1 = 0.$$

Chọn A.

Câu 25. $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$\text{hay } x = 2. \quad 16^{\frac{1}{x-2}} = 0,25^{\frac{3x-11}{x^2-4}} \Leftrightarrow 4^{\frac{2}{x^2-4}} = 4^{\frac{11-3x}{x^2-4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{x^2-4} = \frac{11-3x}{x^2-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ -3x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Chọn B.}$$

Câu 26. Ta có $\log(4x-4) < \log x + \log(x-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log 4 + \log(x-1) < \log x + \log(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow x > 4. \text{ Chọn C.}$$

Câu 27. Đặt $u = \sin^2 x + 4 \sin x + 7$

$$\Rightarrow \frac{du}{2} = (\sin x + 2) \cos x dx. \text{ Do đó}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 2) \cos x}{\sin^2 x + 4 \sin x + 7} dx = \frac{1}{2} \int_7^{12} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} (\ln 12 - \ln 7)$$

$$= \ln \sqrt{12} - \ln \sqrt{7} = a \ln \sqrt{12} + (b-1) \ln \sqrt{7}.$$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} a = 1 \\ b-1 = -1 \end{cases} \Rightarrow a+b = 1. \text{ Chọn A.}$$

Câu 28. Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết cho ta

$$\sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 4 + 2\sqrt{2}i \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

(loại 2 phương án A, C).

Tiếp đó, ta suy ra được $a = 1$. Chọn B.

Câu 29. Không chọn phương án A và B vì $N \notin (P)$.

Không chọn phương án C vì $N \in (P)$ nhưng

$\overline{MN} = (0; 7; -3)$ không cùng phương với vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 1; -2)$ của đường thẳng d . Chọn D.

Câu 30. Ta có: $\frac{1}{64} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \Rightarrow n = 3.$

$$\ln m = \int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln |2x-1| \Big|_1^5 = \ln 3 \Rightarrow m = 3.$$

Do đó $n = m$. Chọn B.

Câu 31. Chọn $t = 0$ vào năm 1950, tức là $P(0) = 2,56$ (đơn vị tỉ người). Suy ra $P(10) = 3,04$ và ta cũng có

$$3,04 = 2,56 \cdot e^{10k} \Rightarrow k = \frac{1}{10} \ln \frac{3,04}{2,56}. \text{ Hàm tăng trưởng}$$

$$\text{dân số thế giới là } P(t) = 2,56 \cdot e^{\left(\frac{1}{10} \ln \frac{3,04}{2,56}\right)t}.$$

Dự đoán vào năm 2020 sẽ là

$$P(70) = 2,56 \cdot e^{\left(\frac{1}{10} \ln \frac{3,04}{2,56}\right)70} \approx 8,52 \text{ tỉ người.}$$

Chọn D.

Câu 32. Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} 1-3x \geq 0 \\ x+1 > 0 \\ \log_2(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ -1 < x \neq 0 \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 33. Xét hàm số $g(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ trên

$$D = [-5; 5]. \quad g'(x) = 3x^2 + 6x - 72, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \in D \\ x = -6 \notin D \end{cases}.$$

Ta có $g(-5) = 400, g(-4) = -86, g(5) = -70$. Từ đó có

$M = 400, m = 0$. Suy ra $M + m = 400$. Chọn A.

Câu 34. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8(\sin^6 x + \cos^6 x) = 8\left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x\right) \\ &= 8\left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = 5 + 3 \cos 4x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 5x + \frac{3}{4} \sin 4x + C. \text{ Vì } f(0) = 1 \text{ nên } C = 1.$$

Chọn B.

Câu 35. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(a-2)x} - 1}{x} = 2017 \Rightarrow (a-2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(a-2)x} - 1}{(a-2)x} = 2017$$

$$\Rightarrow a = 2019. \text{ Chọn C.}$$

Câu 36. Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$ (1)

Lại có: $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

$S.ABC$ có đường kính:

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2} = 3a.$$

Thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{SC}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3a}{2}\right)^3 = \frac{9\pi a^3}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 37. Ta có $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = 4^2 - 2 \cdot 6 = 4$

$$\Rightarrow \frac{z_1^2 + z_2^2}{(z_1 + z_2)^{2017}} = \frac{4}{4^{2017}} = \frac{1}{4^{2016}} = \frac{1}{2^{4032}}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 39. Thể tích V của khối tròn xoay cần tìm là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left(\frac{3x+5}{2x+2}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{x+1}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 \left(\frac{9}{4} + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\ &= \pi \left(\frac{9x}{4} + 3 \ln |x+1| - \frac{1}{x+1}\right) \Big|_0^2 = \left(\frac{31}{6} + 3 \ln 3\right) \pi. \end{aligned}$$

Chọn B.

Câu 40. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$, khi đó O, O' lần lượt là đỉnh của khối nón và tâm của đường tròn đáy của khối nón.

Khối nón có chiều cao $h = OO' = a$ và bán kính đáy

$$r = \frac{a}{2}. \text{ Diện tích toàn phần của khối nón đó:}$$

$$S_{\text{tp}} = S_{\text{sq}} + \pi r^2 = \pi r(l + r) = \pi r(\sqrt{h^2 + r^2} + r) \\ = \frac{\pi a}{2} \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{5} + 1). \text{ Chọn D.}$$

Câu 41. Ta có $y' = e^x(\cos x - \sin x)$, $y'' = -2e^x \sin x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Thấy $y''\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) > 0$ nếu k lẻ; $y''\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) < 0$ nếu k chẵn. Do đó hàm số đã cho đạt cực đại tại các điểm $x = \frac{\pi}{4} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$. Suy ra $(\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{2}^2 = 2$.

Mặt khác $\begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2m\pi \in [0; 5\pi] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}$. Chọn B.

Câu 42. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $I(-1; 1)$. Để MN ngắn nhất khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2x + m$ đi qua điểm $I(-1; 1)$ tức là $1 = 2(-1) + m \Leftrightarrow m = 3$. Chọn A.

Câu 43. Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = \overrightarrow{OH} = (2; -1; -2)$. Mặt phẳng (Q) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; -1; 0)$. Gọi φ là góc hợp bởi mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) . Ta có

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{9} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ. \text{ Chọn C.}$$

Câu 44. $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 12m = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hay $x = 2m$. Ycbt có $2m > 3 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$. Chọn D.

Câu 45. Điều kiện để

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4az + 9a = 0$$

là mặt cầu:

$$1^2 + (-2)^2 + (2a)^2 - 9a > 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 9a + 5 > 0 (*)$$

Với ĐK (*) thì (S) có bán kính $R = \sqrt{4a^2 - 9a + 5}$.

Theo giả thiết

$$2\pi R = 2\sqrt{3}\pi \Leftrightarrow R = \sqrt{3} \Leftrightarrow 4a^2 - 9a + 5 = 3$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \text{ hay } a = \frac{1}{4}. \text{ Đối chiếu với ĐK (*) và } a \in \mathbb{Z} \text{ ta}$$

chọn $a = 2$. Chọn B.

Câu 46. Tuy hàm số $f_1(x) = x$ và $f_2(x) = e^{2017x}$ là các hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nhưng tích hai hàm đó lại không đồng biến trên $\mathbb{R}$. Chọn A.

Câu 47. Ta có

$$K = (x_M - 2y_M + 2z_M - 10)(x_N - 2y_N + 2z_N - 10) \\ = (-6)(-12) > 0.$$

Do đó $M(0; 1; 3)$, $N(10; 6; 0)$ cùng phía đối với mặt phẳng (P) . Ta có $|IM - IN| \leq MN$, nên $|IM - IN|$ lớn nhất $\Leftrightarrow MN \cap (P) = I$.

$$\text{PT đường thẳng } MN: \begin{cases} x = 10t \\ y = 1 + 5t \quad (*) \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Thay (*) vào PT mặt phẳng (P) ta tìm được $t = -1$. Từ đó có $I(-10; -4; 6)$. Chọn D.

Câu 48. Ta có $y' = 2m - 1 + (3m + 2)\sin x$.

Bài toán đưa về

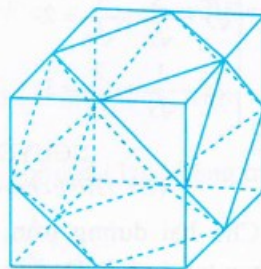
$$g(t) = 2m - 1 + (3m + 2)t \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 3 \leq 0 \\ 5m + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -\frac{1}{5}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 49. Gọi cạnh hình lập phương có độ dài a .

Thể tích một khối tứ diện như đầu bài cho là:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{8}\right) = \frac{a^3}{48}.$$



Trong hình lập phương đã cho có tất cả 8 khối tứ diện như thế. Thể tích khối đa diện còn lại là $V_1 = a^3 - 8V_1 = \frac{5a^3}{6}$.

Tỉ số thể tích phần còn lại so với khối lập phương là $\frac{5}{6}$. Chọn C.

Câu 50. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) là

$$k = y' = 3ax^2 + 2bx + c = f(x). \text{ Ta thấy } x_0 = -\frac{b}{3a} \text{ chính}$$

là hoành độ đỉnh của tam thức bậc hai $f(x)$. Theo tính chất của tam thức bậc hai khi $a > 0$ thì $k = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0$. Chọn B.

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/480 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho $x^y + y^z + z^x = 105$.

CAO NGỌC TOÀN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T2/480 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$. Trên các cạnh BC, AB và AC lần lượt lấy các điểm M, D, E tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của $MD + ME$.

BÙI VĂN TUYÊN (Hà Nội)

Bài T3/480. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{z}} = 1 \\ \sqrt{y} - \frac{3}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \\ \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 3 \end{cases}$$

NGUYỄN DUY LIÊN

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/480. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại A và B . Đường thẳng d tiếp xúc với $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ lần lượt tại C và D . Gọi R_3, R_4 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và BCD . Chứng minh rằng $R_1 \cdot R_2 = R_3 \cdot R_4$.

LÊ QUỐC HÁN

(GV Khoa Toán, Đại học Vinh, Nghệ An)

Bài T5/480. Cho a, b, c là ba số thực dương và $\alpha, \beta, \lambda \geq 2$. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

$$\geq \frac{3}{2} + \frac{(a-b)^2}{\alpha(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{\beta(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{\lambda(a+b)(b+c)}$$

NGÔ VĂN THÁI

(GV THPT Phạm Quang Thâm, Vũ Thư, Thái Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/480. Giải phương trình:

$$4x^3 - 24x^2 + 45x - 26 = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} \quad (1)$$

BÙI ĐÌNH HIẾU

(K52 Khoa KT - KĐQT Đại Học Ngoại Thương, Hà Nội)

Bài T7/480. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 2ax - 1 = 0$ trong đó a là số nguyên. Chứng minh rằng: $\frac{1}{8}(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n})$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp với n là số tự nhiên tùy ý.

PHAN LÊ NHẬT DUY

(GV THCS Lâm Mộ Quang, Vĩnh Mỹ, Phú Lộc, Thừa Thiên Huế)

Bài T8/480. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB theo thứ tự tại D, E và F . Giả sử X là giao điểm của các đường thẳng DE và AB , Y là giao điểm của đường thẳng CF và đường thẳng DE . Chứng minh rằng $IY \perp CX$.

HỒ QUANG VINH (Hà Nội)

Bài T9/480. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $24ab + 44bc + 33ca \leq 1$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

HOÀNG ĐỨC NGUYỄN

(K15 Cao học Toán ĐHSPT Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/480. Tìm tất cả bộ gồm 19 số nguyên dương phân biệt có tổng bằng 2017 và tổng các chữ số của mỗi số đều bằng nhau.

ĐÀO XUÂN LUYỆN

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T11/480. Cho dãy số $(a_n), (n=0, 1, 2, \dots)$ được xác định bởi $a_0 = 610, a_1 = 89$ và $a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n$ với $n = 0, 1, 2, \dots$. Tìm tất cả các giá trị của n để $2a_{n+1}a_n - 3$ là lũy thừa bậc bốn của một số nguyên.

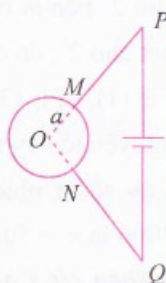
PHẠM HẢI ĐĂNG

(Kim Đường, Ứng Hòa, Hà Nội)

Bài T12/480. Cho tam giác ABC không cân và không vuông tại A . BE , CF là các đường cao. Các đường tròn (O_1) , (O_2) cùng đi qua A và theo thứ tự tiếp xúc với BC tại B , C . D là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2) . M , N theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BA , BD và (O_2) . P , Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của CA , CD và (O_1) . R là giao điểm của AD và EF . S là giao điểm của MP và NQ . Chứng minh $RS \perp BC$.

LÊ VIỆT AN (Nhà 15, xóm 2, thôn Ngọc Anh, Phú Thượng, Phú Vang, Thừa Thiên Huế)

Bài L1/480. Người ta mắc hai điểm bất kì của vòng dây dẫn đồng chất, tiết diện đều, tâm O bán kính a hai dây dẫn thẳng rất dài hướng theo phương bán kính của vòng dây. Hai đầu của hai dây dẫn thẳng được nối vào



nguồn điện ở xa. Tính cảm ứng từ tại tâm vòng dây.

HOÀNG CÔNG MINH
(GV THPT Khoái Châu, Hưng Yên)

Bài L2/480. Mạch điện gồm tải Z_2 nối với điện trở R rồi nối vào nguồn điện xoay chiều có điện áp hiệu dụng U_1 . Khi đó, điện áp hiệu dụng và hệ số công suất trên tải là U_2 và $\cos \varphi_2 = 0,6$;

điện áp hai đầu R là $\Delta U = \frac{U_2}{4}$; hệ số công suất

toàn mạch là $\cos \varphi_1 = 0,8$. Bằng cách điều chỉnh tải Z_2 và điện áp nguồn, người ta làm cho công suất tiêu thụ trên R giảm 100 lần còn công suất tiêu thụ $\mathcal{P}_2$ và hệ số $\cos \varphi_2$ trên tải không đổi. Khi đó, điện áp đầu nguồn phải tăng bao nhiêu lần?

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/480 (For 6th grade). Find positive integers x, y, z such that $x^y + y^z + z^x = 105$.

Problem T2/480 (For 7th grade). Given a right triangle ABC with the right angle A , $AB = AC$ and $BC = a\sqrt{2}$. Let M , D , and E be arbitrary points on the sides BC , AB , and AC respectively. Find the minimum value of $MD + ME$.

Problem T3/480. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{z}} = 1 \\ \sqrt{y} - \frac{3}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \\ \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 3 \end{cases}$$

Problem T4/480. Two circles $(O_1; R_1)$ and $(O_2; R_2)$ intersect at A and B . A line d is tangent to $(O_1; R_1)$ and $(O_2; R_2)$ at C and D respectively.

Let R_3, R_4 respectively be the circumradii of ACD and BCD . Prove that $R_1 \cdot R_2 = R_3 \cdot R_4$.

Problem T5/480. Suppose that a, b, c are three positive numbers and given $\alpha, \beta, \lambda \geq 2$. Prove

$$\text{that } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{(a-b)^2}{\alpha(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{\beta(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{\lambda(a+b)(b+c)}$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/480. Solve the equation

$$4x^3 - 24x^2 + 45x - 26 = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}.$$

Problem T7/480. Let x_1, x_2 be two solutions of the equation $x^2 - 2ax - 1 = 0$ where a is an integer. Prove that for every natural number n , $\frac{1}{8}(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n})$ is always a product of three consecutive natural numbers.

(Xem tiếp trang 27)



Bài T1/476. Cho tổng

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+9} = \frac{p}{q}$$

với $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản (mẫu số ở các số

hạng trong tổng là 10 số tự nhiên liên tiếp). Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để q chia hết cho 2006.

Lời giải. Đặt $M = n(n+1)(n+2)\dots(n+9)$

$$= n.m_1 = (n+1)m_2 = (n+2)m_3 = \dots = (n+9)m_{10}$$

$$\text{thì } \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+9} = \frac{p}{q}$$

$$= \frac{m}{M} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_{10}}{M}$$

trong đó mẫu số chung là $M = qd$, từ số là $m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{10} = pd$, còn $(M, m) = d$ và $(p, q) = 1$. Để q chia hết cho $2006 = 2.17.59$ thì $M = qd = n(n+1)(n+2)\dots(n+9)$ phải chia hết cho 59. Do 59 là số nguyên tố nên 59 phải là ước của một thừa số $n+r$ của M với $0 \leq r \leq 9$. Số n nhỏ nhất thỏa mãn điều này là $n = 50$ khi $n+9 = 59$, lúc đó

$$M = 50.51.52.53.54.55.56.57.58.59$$

$$= 50m_1 = 51m_2 = 52m_3 = \dots = 59m_{10}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng khi số $n = 50$ thì q chia hết cho 2006.

• Số $m_{10} = 50.51.52.53.54.55.56.57.58$ không chia hết cho 59, còn 9 số còn lại $m_1, m_2, \dots, m_9$ đều chia hết cho 59 nên $m = m_1 + m_2 + \dots + m_9 + m_{10}$ không chia hết cho 59, suy ra 59 không là ước số chung của m và M , do đó q chia hết cho 59 (1).

• Số $m_2 = 50.52.53.54.55.56.57.58.59$ không chia hết cho 17, còn 9 số còn lại $m_1, m_3, \dots, m_{10}$ đều chia hết cho $51 = 3.17$ nên $m = m_1 + m_2 + \dots + m_9 + m_{10}$ không chia hết cho 17, suy ra 17 không là ước số chung của m và M , do đó q chia hết cho 17 (2).

• Xét lũy thừa của 2: Số $50 = 2.25$, $52 = 2^2.13$, $54 = 2.27$, $56 = 2^3.7$, $58 = 2.29$ nên

$M = 50.51.52.53.54.55.56.57.58.59 = 2^8.h$ với số h lẻ, số m_7 chỉ chia hết cho 2^5 , còn các số $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_8, m_9, m_{10}$ đều chia hết cho 2^6 nên m chỉ chia hết cho 2^5 mà không chia hết cho 2^6 , do đó q chia hết cho 2^3 (3)

Từ (1), (2), (3) và các số 2, 17, 59 đều là số nguyên tố suy ra q chia hết cho $2.17.59 = 2006$. Vậy số tự nhiên n nhỏ nhất để q chia hết cho 2006 là $n = 50$. $\square$

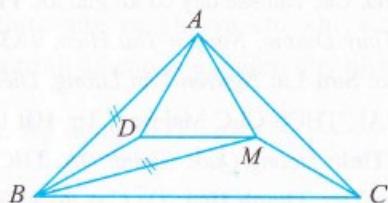
➤ **Nhận xét.** Có thể xét mẫu số là bội số chung nhỏ nhất của $50.51.\dots.59$ và làm tương tự như trên. Các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Thanh Hằng, 6A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** Hoàng Lê Bích Ngọc, 6A, THCS Thái Thịnh, Q. Đống Đa.

VIỆT HẢI

Bài T2/476. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Lấy điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $BM = BA$ và $\widehat{ABM} = 30^\circ$. Chứng minh: $MA = MC$.

Lời giải. Cách 1 (của đa số các bạn).

Tam giác AMB cân tại B có $\widehat{ABM} = 30^\circ$ nên $\widehat{BAM} = \widehat{BMA} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{CAM} = 15^\circ$. Dựng tam giác đều AMD (D nằm trong tam giác ABM), ta có $DA = DM$, suy ra $\triangle ABD = \triangle MBD$ (c.c.c), do đó $\widehat{ABD} = \widehat{MBD} = 15^\circ$. Lại có $\widehat{BAD} = 15^\circ$ nên tam giác BAD cân tại D . Mặt khác, $\triangle BAD = \triangle CAM$ (c.g.c) suy ra tam giác CAM cân tại M , tức là $MA = MC$ (đpcm).



Cách 2. Dựng tam giác đều BCD sao cho A và D nằm cùng nửa mặt phẳng bờ BC .

Cách 3. Dựng tam giác đều ACD sao cho B và D nằm khác phía đối với AC .

Bạn đọc tự vẽ hình và chứng minh theo các cách 2 và 3, tương tự cách 1. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán đơn giản và có nhiều cách giải, tất cả đều vẽ thêm hình phụ (tam giác đều). Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Sơn La:** Đoàn Phương Linh, Vũ Thanh Tâm, Bùi Mai Anh, Đỗ Thu Trang, Phạm Thị Minh Nhật, 7A1, THCS CLC Mai Sơn, Mai Sơn; **Vĩnh Phúc:** Tạ Kim Nam Tuấn, 6A2, Nguyễn Thị Thanh Hằng, 6A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Phú Thọ:** Đào Văn Chiến, Đào Nhân Độ, Đặng Thái Tuấn, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An:** Ngô Minh Quân, 7A, Lê Hải Phong, Lê Thùy Linh, Lê Anh Đức, Lê Văn Quang Trung, Nguyễn Cảnh Mạnh, Lê Văn Mạnh, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Phạm Nguyễn Hùng Nguyên, 7A, Nguyễn Thị Hà Chi, 7B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Bình Phước:** Đặng Đình Văn, 7/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Cần Thơ:** Trần Phương Trân, 7A7, THCS Thốt Nốt, Q. Thốt Nốt.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/476. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2(ab+bc+ca) - abc$.

Lời giải. **Cách 1.** Theo nguyên lý Dirichlet, trong 3 số $a-1, b-1, c-1$ luôn có 2 số có tích không âm. Vì vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0$ (1). Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow ab \geq a+b-1 \Leftrightarrow abc \geq ac+bc-c.$$

Áp dụng BĐT Cauchy và sử dụng giả thiết $a+b+c=3$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= 2(ab+bc+ca) - abc \\ &\leq 2(ab+bc+ca) - ac - bc + c = 2ab + c(a+b) + c \\ &\leq 2 \cdot \frac{(a+b)^2}{4} + c(a+b) + c = \frac{(3-c)^2}{2} + c(3-c) + c \\ &= \frac{c^2}{2} - 3c + \frac{9}{2} + 3c - c^2 + c = 5 - \frac{(c-1)^2}{2} \leq 5. \end{aligned}$$

$$P=5 \Leftrightarrow a=b=c=1. \text{ Vậy } \max P=5.$$

Cách 2. Vì P là đa thức đối xứng theo 3 biến a, b, c nên ta có thể giả thiết $a \geq b \geq c$. Khi đó

$$3a \geq a+b+c \geq 3c \Leftrightarrow 3a \geq 3 \geq 3c \Leftrightarrow a \geq 1 \geq c$$

$$\Rightarrow (a-1)(c-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 < ac \leq a+c-1 = 3-b-1 = 2-b.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= 2(ab+bc+ca) - abc \\ &= 2b(a+c) + 2ac - abc = 2b(3-b) + ac(2-b) \\ &\leq 2b(3-b) + (2-b)^2 = -b^2 + 2b + 4 \\ &= 5 - (b-1)^2 \leq 5. \end{aligned}$$

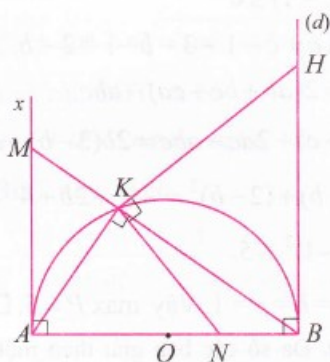
$$P=5 \Leftrightarrow a=b=c=1. \text{ Vậy } \max P=5. \square$$

➤ **Nhận xét.** Đa số các bạn giải theo một trong hai cách trên. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Nguyễn Hà Khánh Nam, 8A2, Nguyễn Đăng Nhật Minh, 8C2, THCS Archimedes Academy. **Phú Thọ:** Nguyễn Thùy Dương, Nguyễn Thu Hiền, Bùi Thị Quỳnh, 9A3, THCS Lâm Thao, H. Lâm Thao. **Sơn La:** Trần Văn Chiến, Nguyễn Văn Lương, Diêm Đăng Hoàng, Nguyễn Trung Thế, 9A1, THCS chất lượng cao Mai Sơn, TTr. Hát Lót. **Thanh Hóa:** Đỗ Cao Bách Tùng, 8B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **Nghệ An:** Nguyễn Quốc Đạt, 9C, THCS Nguyễn Trường Tộ, TP. Vinh. **Hà Tĩnh:** Hoàng Quốc Khánh, 9A, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ. **Phú Yên:** Đàm Ngọc Hiếu, 9H, THCS Trần Hưng Đạo, H. Đông Hòa. **Bến Tre:** Thái Ngọc Vinh Hiền, 9/3, THCS Phú Phụng, H. Chợ Lách. **Đồng Tháp:** Nguyễn Phúc Tằng, 9A10, THCS Kim Hồng, TP. Cao Lãnh. **Vĩnh Long:** Nguyễn Võ Thuấn, 9A1, THCS Ttr. Tam Bình, H. Tam Bình.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/476. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB cố định. Vẽ tia Ax là tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn (tia Ax thuộc nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB). Gọi M là điểm thay đổi trên tia Ax (M không trùng với A). Đoạn thẳng MB cắt nửa đường tròn tại điểm K khác B . Trên tia AB xác định điểm N sao cho $AN = AM$. Chứng minh rằng khi M thay đổi thì đường thẳng đi qua K và vuông góc với KN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. Giả sử $AM < AB$, khi đó N nằm trên đoạn AB . Trường hợp $AM \geq AB$ hoàn toàn tương tự.



Kẻ tiếp tuyến (d) tại B của đường tròn (O) . Gọi H là giao điểm của (d) với đường thẳng qua K , vuông góc với KN .

Vì $\widehat{NKH} = \widehat{NBH} = 90^\circ$ nên tứ giác $HKNB$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{ANK} = \widehat{BHK}$ (1)

Mặt khác, theo tính chất của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ta có $\widehat{NAK} = \widehat{HBK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ANK \sim \triangle BHK$, ta có

$$\frac{BH}{AN} = \frac{BK}{AK} \quad (3)$$

$$\triangle AKB \sim \triangle MKA, \text{ ta có } \frac{BK}{AK} = \frac{AB}{AM} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } \frac{BH}{AN} = \frac{AB}{AM}.$$

Mà $AM = AN$ nên $BH = AB$. Từ đó suy ra H cố định. Vậy đường thẳng qua K , vuông góc với AN luôn đi qua điểm H cố định. $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt. **Phú Thọ:** Nguyễn Thuỳ Dương, Nguyễn Thu Hiền, 9A3, THCS Lâm Thao; **Sơn La:** Nguyễn Văn Lương, Diễm Đăng Hoàng, 9A1, THCS CLC Mai Sơn, Ttr. Hát Lót, Mai Sơn; **Hà Tĩnh:** Hoàng Quốc Khánh, 9A, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ; **Thanh Hoá:** Đỗ Cao Bách Tùng, 8B, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hoá; **Phú Yên:** Đàm Ngọc Hiếu, Đào Tấn Hào, 9H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hoà.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/476. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{2x^3 - 2x^2 + x} + 2\sqrt[4]{3x - 2x^2} = x^4 - x^3 + 3 \quad (*)$$

Lời giải. Điều kiện xác định

$$\begin{cases} 2x^3 - 2x^2 + x \geq 0 \\ 3x - 2x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x((x-1)^2 + x^2) \geq 0 \\ x(3-2x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Cách 1. Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số và 4 số không âm, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^3 - 2x^2 + x} &= \sqrt{(2x^3 - 2x^2 + x) \cdot 1} \\ &\leq \frac{2x^3 - 2x^2 + x + 1}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt[4]{3x - 2x^2} &= 2\sqrt[4]{(3x - 2x^2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \\ &\leq 2 \cdot \frac{3x - 2x^2 + 1 + 1 + 1}{4} = \frac{3x - 2x^2 + 3}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

Đẳng thức ở (1) và (2) xảy ra đồng thời khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x^3 - 2x^2 + x = 1 \\ 3x - 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x^2 + 1) = 0 \\ (x-1)(2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Cộng theo vế của (1) và (2), ta có

$$\begin{aligned} &\sqrt{2x^3 - 2x^2 + x} + 2\sqrt[4]{3x - 2x^2} \\ &\leq \frac{2x^3 - 2x^2 + x + 1}{2} + \frac{3x - 2x^2 + 3}{2} \\ &= x^3 - 2x^2 + 2x + 2. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} (x^4 - x^3 + 3) - (x^3 - 2x^2 + 2x + 2) &= (x^2 + 1)(x-1)^2 \geq 0 \\ \text{nên } x^4 - x^3 + 3 &\geq x^3 - 2x^2 + 2x + 2, \text{ đẳng thức xảy ra} \\ &\Leftrightarrow x = 1. \text{ Vì vậy} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2x^3 - 2x^2 + x} + 2\sqrt[4]{3x - 2x^2} \leq x^4 - x^3 + 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Cách 2. Áp dụng BĐT $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, và xét

với $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^3 - 2x^2 + x} &= \sqrt{x(2x^2 - 2x + 1)} \\ &\leq \sqrt{\frac{(2x^2 - x + 1)^2}{4}} = \frac{2x^2 - x + 1}{2} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt[4]{3x - 2x^2} &= 2\sqrt[4]{x(3 - 2x)} \leq 2\sqrt[4]{\frac{(3 - x)^2}{4}} = \sqrt{2(3 - x)} \\ &\leq \sqrt{\frac{(5 - x)^2}{4}} = \frac{5 - x}{2} \quad (4) \end{aligned}$$

Cộng theo vế của (3) và (4), ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^3 - 2x^2 + x} + 2\sqrt[4]{3x - 2x^2} \\ \leq \frac{2x^2 - x + 1}{2} + \frac{5 - x}{2} = x^2 - x + 3 \end{aligned}$$

Kết hợp với (*) ta thu được $x^4 - x^3 + 3 \leq x^2 - x + 3$

$$\Leftrightarrow x(x-1)^2(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases} \quad (\text{do } 0 \leq x \leq \frac{3}{2}).$$

Nhận thấy, $x = 0$ không thỏa mãn (*), khi $x = 1$ thì hai vế của (*) bằng nhau. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán ứng dụng bất đẳng thức để giải phương trình bằng cách đánh giá vế trái không lớn hơn vế phải. Đa số các bạn gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Nguyễn Đặng Nhật Minh, 8C2, THCS Archimedes Academy; **Phú Thọ:** Nguyễn Thùy Dương, Bùi Thị Quỳnh, 9A3, THCS Lâm Thao; **Sơn La:** Nguyễn Văn Lượng, Nguyễn Trung Thế, 9A1, THCS Chất lượng cao Mai Sơn, TK9, Tr. Hát Lót, Mai Sơn; **Phú Yên:** Đàm Ngọc Hiếu, 9H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hòa; **Bến Tre:** Ngô Quốc Bảo, 7/1, THCS Mỹ Hòa, TP. Bến Tre; **Đồng Tháp:** Nguyễn Phúc Tăng, 9A10, THCS Kim Hồng, TP. Cao Lãnh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/476. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3^x + 2^y = 5 \\ 3^y + 2^x = 5 \end{cases}$$

Lời giải. Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ, suy ra

$$3^x - 2^x = 3^y - 2^y \quad (1)$$

Nếu $x \leq 0$ thì

$$3^x \leq 2^x \Rightarrow 3^x - 2^x = 3^y - 2^y \leq 0 \Rightarrow y \leq 0.$$

Với $x \leq 0; y \leq 0 \Rightarrow 3^x + 2^y \leq 3^0 + 2^0 < 5$ không thỏa mãn hệ.

Do đó nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì $x > 0$.

Khi đó $3^x - 2^x = 3^y - 2^y > 0 \Rightarrow y > 0$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t - 2^t, t \in (0; +\infty)$:

$$f'(t) = 3^t \ln 3 - 2^t \ln 2 > 0, \forall t \in (0; +\infty).$$

Hàm số $f(t) = 3^t - 2^t$ đồng biến trong $(0; +\infty)$.

Với $x > 0; y > 0$, từ (1) ta có

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Thay vào một phương trình trong hệ, ta được

$$3^x + 2^x = 5 \quad (2)$$

Hàm số $g(x) = 3^x + 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g(1) = 5$ nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = 1$, suy ra $x = y = 1$.

Với $x = y = 1$, cả hai phương trình trong hệ đều thỏa mãn. Vậy hệ phương trình trong đầu bài có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$. $\square$

► **Nhận xét.** Một số bạn xét hàm số $f(t) = 3^t - 2^t$ và cho rằng $f'(t) = 3^t \ln 3 - 2^t \ln 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ để suy ra hàm số $f(t) = 3^t - 2^t$ luôn đồng biến là không đúng. Dễ thấy bất phương trình $3^t \ln 3 - 2^t \ln 2 < 0$ có nghiệm. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Bắc Ninh:** Nguyễn Duy Thông, 12A1-K10, THPT Yên Phong 2; **Quảng Nam:** Nguyễn Hoàng Hải, Nguyễn Huy Hải, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nam Định:** Lê Tiến Đạt, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/476. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) là các số dương. Đặt $S = a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n$, $P = a_1 a_2 \dots a_n$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{S - a_1^n + P} + \frac{1}{S - a_2^n + P} + \dots + \frac{1}{S - a_n^n + P} \leq \frac{1}{P}.$$

Lời giải. Của nhiều bạn. Áp dụng BĐT Cauchy cho n số $a_2^n, a_2^n, a_3^n, \dots, a_n^n$, ta có:

$$2a_2^n + a_3^n + \dots + a_n^n \geq n \sqrt[n]{a_2^n \cdot a_2^n \cdot a_3^n \dots a_n^n} = n a_2 a_3 \dots a_n.$$

Tương tự, ta có:

$$a_2^n + 2a_3^n + \dots + a_n^n \geq n \sqrt[n]{a_2^n \cdot a_3^{2n} \dots a_n^n} = n a_2 a_3^2 \dots a_n$$

$$a_2^n + \dots + a_{n-1}^n + 2a_n^n \geq n \sqrt[n]{a_2^n \cdot a_3^n \dots a_n^{2n}} = n a_2 a_3 \dots a_n^2.$$

Cộng theo về các BĐT, ta có

$$n(a_2^n + a_3^n + \dots + a_n^n) \geq n a_2 a_3 \dots a_n (a_2 + a_3 + \dots + a_n).$$

Áp dụng BĐT này, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{S - a_1^n + P} &= \frac{1}{a_2^n + a_3^n + \dots + a_n^n + a_1 a_2 \dots a_n} \\ &\leq \frac{1}{a_2 a_3 \dots a_n (a_2 + \dots + a_n) + a_1 a_2 \dots a_n} \\ &= \frac{1}{a_2 a_3 \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n)} = \frac{a_1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n)}. \end{aligned}$$

Tương tự cho $i = 2, n$ ta có

$$\frac{1}{S - a_i^n + P} \leq \frac{a_i}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n)}.$$

Cộng theo về các BĐT, ta được bất đẳng thức cần chứng minh. $\square$

► **Nhận xét.** Nhiều bạn gửi lời giải bài toán này. Vài bạn sơ suất khi giải, ví dụ dùng BĐT Chebyshev mà không đặt điều kiện về dãy phải đơn điệu. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hưng Yên:** Nguyễn Lê Huy, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Quảng Nam:** Huỳnh Minh Trí, Trần Thiện Thu Uyên, Trần Văn Tình, Lê Thảo Huyền, 10/1, Nguyễn Huy Hải, Nguyễn Phạm Minh Trí, Trương Nhật Nguyên Bảo, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nam Định:** Lê Tiến Đạt, Trần Minh Hiếu, 11 Toán 2,

THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đắk Nông:** Nguyễn Tuấn Hải, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, TX. Gia Nghĩa; **Lâm Đồng:** Võ Minh Quân, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Thanh Hóa:** Đỗ Cao Bách Tùng, 8B, THPT Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Vĩnh Phúc:** Phùng Thị Xuân Thủy, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Yên; **Vĩnh Long:** Trần Linh, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nghệ An:** Bạch Quang Hiếu, 11A1, THPT Cửa Lò; Nguyễn Hữu Thắng, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Lê Đình Hiếu, 10, Trần Tiến Mạnh, 11A1 THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Nội:** Hoàng Tùng, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, Nguyễn Văn Dũng, 11A14 THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Sóc Trăng:** Nguyễn Đức Thịnh, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T8/476. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} &2(\sin A + \sin B + \sin C) \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \\ &\leq \frac{45}{4} + (\cos A + \cos B + \cos C) \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right). \end{aligned}$$

Lời giải. Ta có $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \cos \frac{C}{2}.$$

$$\text{Tương tự có } \sin B + \sin C \leq 2 \cos \frac{A}{2}; \sin C + \sin A \leq 2 \cos \frac{B}{2}.$$

Từ đó

$$0 < \sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có

$$0 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \quad (2)$$

$$(\text{lưu ý: } \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} > 0).$$

Từ (1) và (2) kết hợp với BĐT Bunyakovsky thu được

$$(\sin A + \sin B + \sin C) \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right)$$

$$\leq \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right)^2 \leq 3 \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (3 + \cos A + \cos B + \cos C) \text{ và}$$

$$(\cos A + \cos B + \cos C)^2$$

$$\leq (\cos A + \cos B + \cos C) \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right).$$

Từ đây ta thấy BĐT ở đề bài được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$3(3 + \cos A + \cos B + \cos C) \leq \frac{45}{4} + (\cos A + \cos B + \cos C)^2.$$

Thật vậy, đặt $T = \cos A + \cos B + \cos C$ thì BĐT trên tương đương với

$$3(3+T) \leq \frac{45}{4} + T^2 \Leftrightarrow \left(T - \frac{3}{2} \right)^2 \geq 0 \text{ (BĐT này đúng)}$$

Vậy BĐT ở đề bài được chứng minh, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều. $\square$

➤ **Nhận xét.** Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng, tuy nhiên nhiều bạn trình bày lời giải còn dài. Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** Hoàng Tùng, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Lào Cai:** Bùi Phương Thảo, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Bình:** Lê Hoàng Long, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Nam:** Trương Nhật Nguyên Bảo, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Vĩnh Long:** Châu Minh Khánh, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/476. 1) Tìm min $\left\{ \max_{a,b} |ax^2 + bx + 1| \right\}$.

2) Tìm min $\left\{ \max_{a,b} |ax^2 + x + b| \right\}$.

Lời giải. 1) Kí hiệu $f(a,b) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |ax^2 + bx + 1|$.

Ta có $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow f(a,b) \geq 1$, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$. Mặt khác $f(0,0) = 1$.

Vậy $\min_{a,b} f(a,b) = 1$.

2) Kí hiệu $g(a,b) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |ax^2 + x + b|$.

Ta có $|a \cdot 1^2 + 1 + b| = |a + b + 1|$,

$|a \cdot (-1)^2 + (-1) + b| = |a + b - 1|$ và

$\max\{|a + b + 1|, |a + b - 1|\} = |a + b| + 1 \geq 1$.

Suy ra $g(a,b) \geq 1$, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.

Chú ý $g(0,0) = 1$. Vậy $\min_{a,b} g(a,b) = 1$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán về giá trị tuyệt đối dạng cơ bản, đơn giản. Nhiều học sinh rất “ngại” các bài toán về phần này. Trong số các bạn gửi lời giải tới Tòa soạn chỉ có hai bạn có lời giải đúng: **Nghệ An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Nam:** Trần Thiện Thu Uyên, 11T, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/476. Cho số tự nhiên $a \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho $a^n + 1$ chia hết cho n .

Lời giải. (Của bạn Đỗ Trung Phương, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc). Ta có hai trường hợp:

• TH1: $a+1$ có ước nguyên tố lẻ p .

Ta chứng minh $a^{p^k} + 1 \vdots p^k, \forall k \in \mathbb{N}^*$ (1)

Quy nạp với $k=1, a^p + 1 \vdots a+1 \vdots p$. Vậy (1) đúng với $k=1$. Giả sử (1) đúng với $k=l$. Ta chứng minh (1) đúng với $k=l+1$.

Ta có $a^{p^{l+1}} + 1 = (a^{p^l})^p + 1$

$= (m+1)(m^{p-1} - m^{p-2} + \dots - m + 1) = (m+1)B$, ở đây $m = a^{p^l}$. Theo giả thiết quy nạp $m+1 \vdots p^l$.

Lại có $m+1 \vdots p \Rightarrow m \equiv -1 \pmod{p}$. Vậy

$$B = m^{p-1} - m^{p-2} + \dots - m + 1$$

$$\equiv 1 + 1 + \dots + 1 = p \equiv 0 \pmod{p}.$$

Do đó $(m+1)B \vdots p^{l+1}$, tức là $a^{p^{l+1}} + 1 \vdots p^{l+1}$. Vậy (1) đúng cho $k=l+1$. Do đó với $n = p^k (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $a^n + 1 \vdots n$.

• TH2: $a+1=2^s$. Khi đó a^2+1 có một ước nguyên tố lẻ p . Thật vậy nếu trái lại $a^2+1=2^t$. Do $a \geq 2$ nên $t \geq 2$. Vậy $a^2+1 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow a^2 \equiv 3 \pmod{4}$ vô lý. Đặt $b=a^2$. Ta có $b+1 \vdots p$. Theo trường hợp 1 ta có $b^{p^k}+1 \vdots p^k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ hay $a^{2p^k}+1 \vdots p^k$. Mặt khác a lẻ nên $a^{2p^k}+1 \vdots 2$. Do đó $a^{2p^k}+1 \vdots 2p^k, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Vậy $n=2p^k (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $a^n+1 \vdots n$. $\square$

► **Nhận xét.** Không có nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Tuy nhiên tất các bạn gửi đều giải đúng và chính xác. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Quảng Nam:** Nguyễn Huy Hải, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nghệ An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Bình:** Lê Hoàng Long, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/476. Cho số thực a khác 0, khác -1 . Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x)+ay)=(a^2+a)x+f(f(y)-x), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Ta chứng minh f là song ánh. Trước tiên, ta chứng minh f là toàn ánh. Thật vậy, ứng với mỗi $y \in \mathbb{R}$ cho trước, đặt

$$u = \frac{f(0)-y}{a^2+a}, \quad v = -\frac{f(u)}{a} \quad \text{và} \quad w = f(v)-u.$$

Khi đó, thế $x=u, y=v$ vào (1), ta thu được

$$\begin{aligned} f(w) &= f(f(v)-u) = f(f(u)+av) - (a^2+a)u \\ &= f(0) - (a^2+a)u = f(0) - (f(0)-y) = y, \text{ tức } f \end{aligned}$$

là toàn ánh.

Tiếp theo, ta chứng minh f là đơn ánh.

Giả sử $f(x_1)=f(x_2)$. Vì f là toàn ánh nên ứng với mỗi cặp $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ luôn tồn tại $y \in \mathbb{R}$

để $f(y)=x_1+x_2 \Leftrightarrow x_2=f(y)-x_1$. Theo (1), ta thu được $(a^2+a)x_1+f(x_2)$

$$= (a^2+a)x_1+f(f(y)-x_1)=f(f(x_1)+ay)$$

$$= f(f(x_2)+ay)=(a^2+a)x_2+f(f(y)-x_2)$$

$$= (a^2+a)x_2+f(x_1) \text{ hay}$$

$$(a^2+a)x_1+f(x_2)=(a^2+a)x_2+f(x_1) \Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Vậy nên f là đơn ánh. Do đó f là song ánh.

Thế $x=0$ vào (1), ta thu được

$$f(f(0)+ay)=f(f(y)) \Leftrightarrow f(0)+ay=f(y)$$

$$\Leftrightarrow f(y)=ay+f(0), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(t)=at+b$ với $b \in \mathbb{R}$ tùy ý. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn (1).

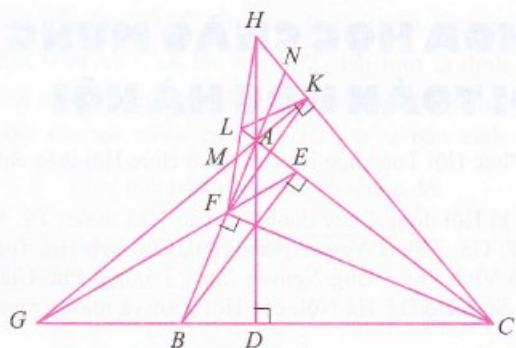
Kết luận. Vậy ta luôn có $f(t)=at+b, b \in \mathbb{R}$. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán về phương trình hàm một biến tự do, mở rộng bài toán đề nghị trong IMO shortlist 2002 (ứng với trường hợp $a=1$). Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Lâm Đồng:** Võ Minh Quân, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Nam Định:** Lê Tiến Đạt, Trần Minh Hiếu, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Bình:** Lê Hoàng Long, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** Nguyễn Đức Thịnh, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/476. Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$ và đường cao AD, BE, CF ; EF cắt BC tại G . K là hình chiếu của C trên AG . AD cắt CK tại H . AC cắt HF tại L . Chứng minh rằng A là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác FKL .

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Minh Hiệu, 11T, THPT chuyên Lào Cai).



Gọi $M = AG \cap FH$; $N = AB \cap CH$. Dễ thấy $F(HKNC) = (HKNC) = A(GDBC) = (GDBC) = -1$. Kết hợp với $FN \perp FC$, suy ra FN và FC là phân giác của các góc tạo bởi FH và FK (1). Dễ thấy $K(LFHM) = (LFHM) = A(LFHM) = (CBDG) = -1$. Kết hợp với $KH \perp KM$, suy ra KH và KM là phân giác của các góc tạo bởi KL và KF (2). Từ (1) và (2), chú ý rằng $A = FN \cap KM$, suy ra A hoặc là tâm đường tròn nội tiếp hoặc là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác FKL . $\square$

► **Nhận xét.** 1) Kết luận chính xác của bài toán này là “ A hoặc là tâm đường tròn nội tiếp hoặc là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác FKL ”.

2) Số bạn tham gia giải khá nhiều, tuy nhiên lời giải của một vài bạn hơi dài.

3) Các bạn sau đây có lời giải tương đối ngắn:

Vĩnh Phúc: Kim Thị Hồng Linh, Phùng Thị Xuân Thủy, 10A1, Lê Sơn, Đỗ Trung Phương, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Quảng Nam:** Lê Huyền Thảo, Huỳnh Minh Trí, 10/1, Trương Nguyễn Bảo, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Trần Thiện Thu Uyên, 10T, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An; **Lâm Đồng:** Võ Minh Quân, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Sóc Trăng:** Nguyễn Đức Thịnh, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/476. Khi tập luyện trong nhà thi đấu, cầu thủ sút đi một quả bóng theo đường thẳng với vận tốc ban đầu v_0 , sao cho bóng chỉ trượt - không quay và không bị nảy lên khỏi mặt sân. Giả thiết quả bóng là một hình cầu có mật độ khối lượng được phân bố đồng đều trên bề mặt. Ma sát lăn và lực cản của không khí không đáng kể, sân tập đủ rộng và phẳng. Xác định vận tốc của quả bóng, khi mà nó bắt đầu lăn không trượt.

Lời giải. Gia tốc của tâm quả bóng:

$$a = -\frac{F_{ms}}{m} = -\frac{\mu mg}{m} = -\mu g.$$

Lực ma sát trượt cũng gây ra mômen làm quả bóng quay tâm với gia tốc góc γ :

$$\gamma = \frac{F_{ms} R}{I} = \frac{\mu mg \cdot R}{\frac{2}{3} m R^2} = \frac{3}{2} \frac{\mu g}{R}.$$

Khi quả bóng bắt đầu lăn không trượt, vận tốc của điểm tiếp xúc bằng 0, hay:

$$v = \omega R \Leftrightarrow v_0 - \mu g t = \gamma t \cdot R = \frac{3}{2} \mu g t.$$

Suy ra thời điểm lăn không trượt: $t = \frac{2}{5} \frac{v_0}{\mu g}$.

Vận tốc tâm bóng khi lăn không trượt:

$$v = v_0 - \mu g t = \frac{3}{5} v_0. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Rất tiếc không có bạn nào gửi lời giải về Tòa soạn.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/476. Cho đoạn mạch điện có R, L, C mắc nối tiếp, gồm điện trở $R = 100 \Omega$, cuộn cảm thuần và tụ điện có điện dung C thay đổi được. Điện áp xoay chiều đặt vào giữa hai đầu đoạn mạch có tần số 50 Hz. Khi thay đổi C thì thấy có hai giá trị C_1 và $3C_1$ đoạn mạch đều cho cùng một công suất và hai dòng điện vuông pha với nhau. Lấy $\pi^2 = 10$. Tính độ tự cảm L của cuộn cảm thuần.

HỘI THẢO KHOA HỌC CHÀO MỪNG 30 NĂM HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI

Vào các ngày 20, 21/5/2017 tại Thị trấn Tam Đảo, tỉnh Vĩnh Phúc Hội Toán học Hà Nội đã tổ chức Hội thảo chào mừng 30 năm thành lập Hội.

Đến dự Hội thảo có GS. TSKH. *Trần Văn Nhung*, Tổng Thư kí Hội đồng Chức danh Giáo sư Nhà nước, TS. *Vũ Đình Chuẩn*, Vụ trưởng Vụ Giáo dục Trung học, Bộ GD&ĐT; GS. TSKH *Nguyễn Văn Mậu*, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, Bà *Dương Thị Tuyền*, Nguyên Phó Chủ tịch tỉnh Vĩnh Phúc, Ông *Nguyễn Xuân Trường*, Phó Giám đốc Sở GD&ĐT Vĩnh Phúc; TS. *Nguyễn Hữu Độ*, Giám đốc Sở GD&ĐT Hà Nội, các Hội viên và những người yêu Toán của TP. Hà Nội.

Sau màn văn nghệ chào mừng, PGS. TS. *Nguyễn Minh Tuấn*, Tổng Thư ký Hội đã khai mạc, giới thiệu các đại biểu về dự. Hội thảo đã được nghe phát biểu của PGS. TS. *Trần Huy Hồ*, Phó Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội về lịch sử xây dựng và phát triển Hội giai đoạn 1999 - 2017.

Tiếp theo phát biểu đề dẫn của GS. TSKH. *Nguyễn Văn Mậu*, dưới sự điều khiển của PGS. TS. *Tạ Duy Phương* và PGS. TS. *Nguyễn Minh Tuấn*, Hội thảo được nghe các báo cáo khoa học của PGS. TS. *Đàm Văn Nhi*, TS. *Nguyễn Văn Ngọc*, TS. *Vũ Tiến Việt*, TS. *Nguyễn Việt Hải*, ThS. *Nguyễn Bá Đương*.

Hội thảo chào mừng 30 năm thành lập Hội đã kết thúc tốt đẹp, để lại nhiều ấn tượng sâu sắc cho mỗi hội viên tham gia. Thành tích hoạt động của Hội Toán học trong 30 năm qua được các nhà khoa học trên cả nước ghi nhận. Hội đã tập hợp được một đội ngũ trí thức làm toán và yêu toán trên toàn quốc lớn mạnh thúc đẩy công tác nghiên cứu, giảng dạy và ứng dụng toán học, tuyên truyền và phổ biến kiến thức toán học trong cộng đồng xã hội, góp phần vào công cuộc công nghiệp hóa, hiện đại hóa Thủ đô và đất nước.

PGS. TS. TRẦN HUY HỒ

(Phó Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội)



Lời giải. Ta có $\mathcal{P} = Rl^2$, vì R không đổi nên:

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow Z_1 = Z_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{C_1\omega} - Z_L = Z_L - \frac{1}{3C_1\omega} \Leftrightarrow Z_L = \frac{2}{3C_1\omega}.$$

Cường độ dòng điện trong hai trường hợp này vuông pha nhau tức là mỗi dòng điện đều lệch

pha so với điện áp là $\frac{\pi}{4}$.

$$\text{Vậy: } \tan \frac{\pi}{4} = \frac{Z_L - Z_C}{R} \text{ hay } \frac{\frac{2}{3C_1\omega} - \frac{1}{3C_1\omega}}{100} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3C_1\omega} = 100. \text{ Do đó } Z_L = \frac{2}{3C_1\omega} = 200$$

$$\Rightarrow L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{200}{100\pi} = \frac{2}{\pi} \text{ (H)}. \quad \square$$

►**Nhận xét.** Chúc mừng ba bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: **Nghệ An:** *Bùi Thị Quỳnh Anh*, xóm 4, Quỳnh Lương, Quỳnh Lưu; **Hải Dương:** *Nguyễn Đặng Sơn*, 12A, THPT Nam Sách; **Vĩnh Long:** *Trần Minh Quân*, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long.

ĐẶNG THỊ THÁI QUỲNH

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T8/480. The incircle I of the triangle ABC is tangent to BC , CA , and AB at D , E , and F respectively. Suppose that X is the intersection of the lines DE and AB , and Y is the intersection of the lines CF and DE . Prove that $IY \perp CX$.

Problem T9/480. Given three positive numbers a , b , c such that $24ab + 44bc + 33ca \leq 1$. Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/480. Find all sets of 19 distinct positive integers such that for each set the sum of all the numbers is 2017 and the sums of all the digits of the numbers are all equal.

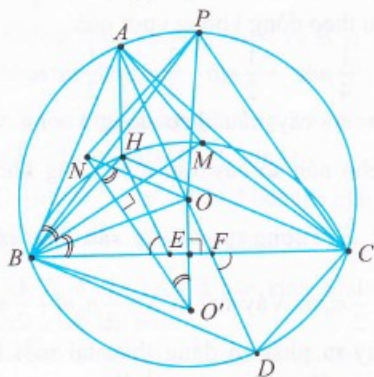
HƯỚNG DẪN GIẢI ... (Tiếp theo trang 6)

Chứng minh được tứ giác $BHCD$ là hình bình hành. Chứng minh được $\triangle BHE = \triangle CDF$ (c.g.c), suy ra $\widehat{BEH} = \widehat{CFD} \Rightarrow HE \parallel DF$. Mà $HE \parallel AO$ và A, O, D thẳng hàng, nên A, O, F thẳng hàng.
3) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHC$.

Vì $ON \perp AB, NO' \perp BM \Rightarrow \widehat{O'NO} = \widehat{ABM}$.

Vì $OO' \perp BC, NO' \perp BM \Rightarrow \widehat{NO'O} = \widehat{CBM}$.

$\Rightarrow \widehat{O'NO} = \widehat{OO'N} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$, suy ra $\triangle NOO'$ cân tại O .



Vì $ON \perp AB, OO' \perp BC \Rightarrow \widehat{NOO'} = 180^\circ - \widehat{ABC}$.

Problem T11/480. The sequence (a_n) , $(n=0,1,2,\dots)$ is determined as follows $a_0 = 610$, $a_1 = 89$ và $a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n$ with $n=0,1,2,\dots$. Find all n such that $2a_{n+1}a_n - 3$ is a fourth power of an integer.

Problem T12/480. Given a triangle ABC where $AB \neq AC$ and $\widehat{A} \neq 90^\circ$. Let BE and CF be the altitudes from B and C . Let $(O_1), (O_2)$ be the circles which pass through A and are tangent to BC at B, C respectively. Assume that D is the second intersection of (O_1) and (O_2) . Let M, N (resp. P, Q) respectively be the second intersections of BA, BD (resp. CA, CD) and (O_2) (resp. (O_1)). Let R be the intersection of AD and EF , S the intersection of MP and NQ . Show that $RS \perp BC$.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

Vì $\widehat{BOP} = 2\widehat{BCP} = 2(90^\circ - \widehat{MBC}) = 180^\circ - \widehat{ABC}$,

suy ra $\widehat{BOP} = \widehat{NOO'}$. Từ đó $\triangle PON = \triangle BOO'$ (c.g.c)
 $\Rightarrow PN = BO' = BO = PO$.

Bài 5. Vì A lấy tám thẻ đánh số n thì B lấy tám thẻ đánh số $2n+2$, nên $n \leq 49$. Chia 49 tám thẻ này thành các nhóm: $\{1,4\}$; $\{3,8\}, \dots, \{23,48\}$ (12 nhóm đôi); $\{2,6\}$; $\{10,22\}$; $\{14,30\}$; $\{18,38\}$ (4 nhóm đôi) và $\{25\}$, $\{27\}, \dots, \{49\}$, $\{26\}$, $\{34\}$, $\{42\}$, $\{46\}$ (17 nhóm đơn). Vậy ta có 33 nhóm mà hai nhóm bất kì không có thẻ chung và mọi tám thẻ A lấy phải thuộc một trong 33 nhóm này. Nếu A lấy 34 tám thẻ trở lên thì theo nguyên tắc Dirichlet luôn tồn tại 2 tám thẻ cùng một nhóm hai phần tử nên B không có tám thẻ để lấy vì vậy số tám thẻ mà A có thể lấy nhỏ hơn 34. Mặt khác A có thể lấy 33 tám thẻ gồm các tám thẻ có số 1, 3, 5, ..., 23, 10, 14, 18, 25, 27, ..., 49, 26, 34, 42, 46. Vậy số tám thẻ lớn nhất mà A có thể lấy là 33.

LÊ ĐẠI HẢI

(Phòng GDPT, Sở GD&ĐT Hà Nội) Giới thiệu



MỘT PHƯƠNG PHÁP

GIẢI CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

VŨ ĐÌNH HÒA

(GV Khoa Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài viết này tôi muốn trao đổi với các bạn trẻ yêu toán một cách tiếp cận giải bài toán tổ hợp. Thông thường, một bài toán tổ hợp khó là bài toán mà chúng ta không tìm được yếu tố toán học để giải nó. Một trong các bài toán đó là bài số 4 của kỳ thi học sinh giỏi Toán Quốc gia năm 2016. Bài toán này được dư luận chung đánh giá là một bài toán hay, từ một điều kiện cho trước rất lỏng lẻo suy ra được một tính chất chặt chẽ của hình chữ nhật. Bài toán này là một bài toán khó, vì các bạn đều không biết bấu bấu vào đâu để giải bài toán này. Kinh nghiệm là trong các trường hợp này, chúng ta phải mò xè nó để tìm ra đặc trưng của bài toán. Yếu tố toán học trong bài toán này chính là sự khác loại của cây trồng tại một ô với số đông các cây chiếm ưu thế trong dòng hoặc trong cột chứa nó. Sau đây xin giới thiệu với các bạn lời giải của bài toán.

BÀI TOÁN (Bài số 4 kỳ thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia năm 2016). Người ta trồng hai loại cây khác nhau trên một miếng đất hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ô vuông (mỗi ô trồng một cây). Một cách trồng cây được gọi là **ẩn tượng** nếu như:

i) Số lượng cây được trồng của hai loại cây bằng nhau;
ii) Số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi hàng không nhỏ hơn một nửa số ô của hàng đó và số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi cột không nhỏ hơn một nửa số ô của cột đó.

a) Hãy chỉ ra một cách trồng cây ẩn tượng khi $m = n = 2016$.

b) Chứng minh nếu có một cách trồng cây ẩn tượng thì cả m và n đều là bội của 4.

Lời giải. Ta thay một loại cây là số +1 và loại kia là -1.

a) Vì số 2016 là số khá lớn, cho nên rõ ràng chúng ta phải xét hình chữ nhật có kích thước nhỏ hơn có thể trồng ẩn tượng được. Câu b) của bài toán gợi ý rằng có thể trồng cây ẩn tượng trong hình vuông 4×4 . Có hai cách sử dụng hình vuông này. Hoặc là ta chia hình vuông 2016×2016 thành các hình vuông 4×4 , hoặc là ta xét hình vuông 4×4 hình vuông, mỗi hình vuông nhỏ có kích thước 504×504 ô vuông. Bảng 4×4 ô vuông có một cách trồng ẩn tượng như hình bên. Từ bảng hình vuông này, ta ghép lại thành bảng

+1	-1	-1	-1
+1	+1	-1	+1
+1	-1	+1	+1
-1	-1	-1	+1

2016×2016 ô vuông có cách trồng cây ẩn tượng. Hoặc ta coi mỗi ô là một hình vuông lớn kích thước 504×504 ô vuông và trồng trong hình vuông ứng với +1 (hoặc -1) toàn bộ 504×504 cây loại +1 (hoặc toàn bộ là -1). Và hai cách này là hai cách trồng cây thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

b) Để chứng minh b), ta chứng minh rằng khi có cách trồng cây ẩn tượng thì ii) đều phải trở thành đẳng thức cho mọi hàng và cột.

Ký hiệu m^+ số hàng mà số cây +1 nhiều hơn cây -1.

Ký hiệu m^- số hàng mà số cây -1 nhiều hơn cây +1.

Ký hiệu $m_0 = \min(m^+, m^-)$.

Ký hiệu n^+ số cột mà số cây +1 nhiều hơn cây -1.

Ký hiệu n^- số cột mà số cây -1 nhiều hơn cây +1.

Ký hiệu $n_0 = \min(n^+, n^-)$.

Ta ký hiệu S là số các cây gọi là **xấu** (là cây trái loại với loại cây chiếm đa số trên dòng hoặc trên cột chứa nó - đây chính là tính chất toán học cho ta lời giải bài toán). Mỗi cây trên dòng +1 (dòng nhiều +1 hơn -1) cắt cột -1 (cột có nhiều -1 hơn là +1) là một cây xấu (theo cột hoặc theo dòng) nên ta có $S \geq m^+ \times n^- + m^- \times n^+$. Thay m^+, m^- bởi m_0 , ta có $S \geq m_0 \cdot n$. Tương tự $S \geq n_0 \cdot m$, cho nên:

$$2S \geq m_0 n + n_0 m \Leftrightarrow S \geq \frac{1}{2}(m_0 n + n_0 m) \quad (*)$$

Mặt khác, áp dụng giả thiết, số cây -1 trên m^+ dòng +1 không nhiều hơn $\frac{1}{4}nm^+$, và số cây +1 trên các

dòng -1 không vượt quá $\frac{1}{2}mn - \frac{3}{4}m^+$, cho nên tổng số cây xấu theo dòng không vượt quá:

$$\frac{1}{4}nm^+ + \frac{1}{2}mn - \frac{3}{4}m^+ = \frac{1}{2}m^-n.$$

Tương tự, số cây xấu theo dòng không vượt quá $\frac{1}{2}m^+n$, cho nên số cây xấu theo dòng không vượt

quá $\frac{1}{2}m_0n$. Tương tự, số cây xấu theo cột không

vượt quá $\frac{1}{2}n_0m$. Vậy suy ra $S \leq \frac{1}{2}n_0m + \frac{1}{2}m_0n$.

Từ (*) suy ra phải có đẳng thức tại mỗi bất đẳng thức. Từ các đẳng thức này, dễ dàng suy ra m, n đều là bội của 4 (đpcm).



RÈN LUYỆN TƯ DUY SÁNG TẠO CHO HỌC SINH KHÁ, GIỎI THCS TRONG DẠY HỌC CHUYÊN ĐỀ ĐA THỨC VÀ ỨNG DỤNG

NGUYỄN VĂN TRIỀU (Phòng GD&ĐT Đông Hưng, Thái Bình)
TRẦN ĐỨC CƯỜNG (Văn phòng HĐND huyện Đông Hưng, Thái Bình)

Da thức và ứng dụng là một nội dung khó nhưng cũng là nội dung dạy học mà GV có nhiều cơ hội phát triển tư duy cho HS, đặc biệt là tư duy sáng tạo. Có thể rèn luyện tư duy sáng tạo cho HS THCS khá giỏi thông qua nội dung đa thức và ứng dụng theo các hướng sau:

1. Tập luyện cho HS cách nhìn một bài toán dưới nhiều hình thức khác nhau

Ta đã biết, tính mềm dẻo và tính độc đáo là một trong những đặc trưng quan trọng của tư duy sáng tạo. Một trong những biểu hiện của tính mềm dẻo trong tư duy là khả năng nhìn nhận vấn đề theo nhiều cách khác nhau. Do vậy, trong quá trình dạy học toán, việc GV giúp HS nhận thức được rằng cùng một nội dung có thể diễn đạt dưới nhiều hình thức khác nhau và tập luyện cho họ cách nhìn nhận một bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau sẽ giúp cho người học có được tính mềm dẻo trong tư duy và trong quá trình đó người học có thể tìm ra sự độc đáo trong việc giải quyết bài toán.

Điều này không chỉ giúp HS tìm ra lời giải, kết quả của bài toán mà còn làm cho HS có khả năng tiếp nhận nhiều thứ, những thứ trong phạm vi tình huống của bài toán với cả những kiến thức, kỹ năng ngoài phạm vi bài toán nhưng có liên quan đến tình huống bài toán, những dữ kiện đang phục vụ cho bài toán và cả những kiến thức, kỹ năng sẽ được áp dụng trong tương lai, trong các bài toán khác.

Thí dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 3.$$

Lời giải. Cách 1: $f(x) = (x^4 - x^2) + 3x^2 - 3$

$$= x^2(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 3)$$

$$= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3).$$

Cách 2: $f(x) = (x^4 + 3x^2) - (x^2 + 3)$

$$= x^2(x^2 + 3) - (x^2 + 3)$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3).$$

Cách 3: $f(x) = (x^4 - 1) + 2x^2 - 2$

$$= (x^4 - 1) + 2(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3).$$

Cách 4: $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - 4 = (x^2 + 1)^2 - 4$

$$= (x^2 + 1 - 2)(x^2 + 1 + 2)$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3).$$

Cách 5: $f(x) = (x^4 - 9) + 2x^2 + 6$

$$= (x^2 - 3)(x^2 + 3) + 2(x^2 + 3) = (x^2 + 3)(x^2 - 3 + 2)$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3).$$

Cách 6: $f(x) = (3x^4 - 3) - 2x^4 + 2x^2$

$$= 3(x^4 - 1) - 2x^2(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 2x^2(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3).$$

Cách 7: Đặt $y = x^2$ thì $f(x)$ trở thành $y^2 + 2y - 3$.

Xét thấy tổng các hệ số của đa thức biến y bằng 0 nên đa thức biến y có nghiệm $y = 1$.

Từ đó $y^2 + 2y - 3 = (y - 1)(y + 3)$ nên

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3).$$

Cách 8: Xét thấy tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ bằng 0 nên $f(x)$ có nghiệm $x = 1$. Khi đó

$$f(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + 3x + 3)$$

$$= (x - 1)[x^2(x + 1) + 3(x + 1)].$$

Vậy $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)$.

Nhận xét. Ta thấy, nếu tách hạng tử thứ 2 của đa thức $f(x)$ ta sẽ được lời giải theo cách 1 và cách 2, nếu tách hạng tử thứ 3 của đa thức $f(x)$ ta sẽ được lời giải theo cách 3, cách 4 và cách 5, nếu tách hạng tử thứ 1 của đa thức $f(x)$ ta sẽ được lời giải theo cách 6, nếu sử dụng phương pháp xét nghiệm của đa thức ta sẽ có lời giải theo cách 7 và cách 8. Như vậy việc tìm ra lời giải của một bài toán theo nhiều hướng khác nhau sẽ cho ta nhiều lời giải khác nhau với cùng một kết quả mong muốn cho cùng một bài toán.

2. Rèn luyện cho HS khả năng nhanh chóng chuyển hướng quá trình tư duy tùy thuộc vào từng tình huống cụ thể

Trong quá trình tư duy, nhiều khi HS gặp khó khăn, vướng mắc ở một thao tác tư duy nào đó, nếu cứ tiếp tục thì dễ dẫn đến bế tắc, do đó cần làm cho HS có

sự linh hoạt trong vận dụng các thao tác tư duy, dễ dàng thay đổi các thao tác tư duy cho phù hợp với tình huống cụ thể.

Thí dụ 2. Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên, biết rằng $f(0)$, $f(1)$ là các số lẻ. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

Phân tích. Thông thường với những bài toán đơn giản để chứng minh đa thức không có nghiệm nguyên HS có thể tìm cụ thể ra nghiệm và lập luận được rằng các nghiệm đó không nguyên hoặc sử dụng nhận xét: Nếu $\alpha \neq \pm 1$ là nghiệm của đa thức

$f(x)$, với α là số nguyên thì $\frac{f(1)}{1-\alpha}$ và $\frac{f(-1)}{1+\alpha}$ đều

là số nguyên. Tuy nhiên với một bài toán mang tính tổng quát như bài toán đã cho việc tìm ra nghiệm cụ thể là nhiệm vụ không khả thi. Do vậy, GV cần hướng HS đến suy nghĩ là bài toán chứng minh chính là bài toán đã biết kết quả, nhiệm vụ bây giờ là dùng lập luận để chỉ ra được kết quả đó là đúng. Khi đó HS có thể nghĩ đến dùng phương pháp phản chứng để giải bài toán này.

Lời giải. Giả sử a là nghiệm nguyên của $f(x)$. Do đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên, nên với mọi x ta có $f(x) = (x-a) \cdot Q(x)$ trong đó $Q(x)$ là đa thức có các hệ số nguyên.

Xét $f(0) = (-a) \cdot Q(0)$ và $f(1) = (1-a) \cdot Q(1)$.
Do $f(0)$ là số lẻ nên $(-a)$ phải là số lẻ và $f(1)$ là số lẻ nên $(1-a)$ phải là số lẻ.

Ta thấy: $(-a)$ và $(1-a)$ đồng thời là số lẻ, điều này vô lý, vậy điều giả sử là sai. Suy ra đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên là đúng (dpcm).

Thí dụ 3. Cho các đa thức

$$A = x^4 y^2 + 2x^2(y^2 + 2) + 4xy + y^2 \quad \text{và} \quad B = 4x^3 y.$$

Chứng minh rằng $A \geq B$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Phân tích. Với dạng toán này HS thường xét hiệu $A - B$ và biến đổi về dạng tổng của các biểu thức không âm hoặc áp dụng các bất đẳng thức đã biết để chỉ ra: $A - B \geq 0$ hay $A \geq B$. Tuy nhiên nếu áp dụng suy nghĩ này vào bài toán đã cho thì việc biến đổi sẽ khó và phức tạp, nhưng GV có thể hướng HS đến suy nghĩ: $A - B$ là đa thức bậc 6 theo hai biến x, y ; là đa thức bậc 4 theo biến x , nhưng là đa thức bậc 2 theo biến y . Do đó chúng ta có thể xét hiệu $A - B$ như tam thức bậc hai theo y và sau đó đánh giá tam giác bậc hai đã xét thì có thể giải quyết được bài toán đã cho.

Lời giải. Đặt $f(y) = A - B$

$$= x^4 y^2 + 2x^2(y^2 + 2) + 4xy + y^2 - 4x^3 y$$

$$= (x^4 + 2x^2 + 1)y^2 + 4(x - x^3)y + 4x^2.$$

Ta thấy $f(y)$ là tam thức bậc hai có hệ số của y^2 là:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 > 0 \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Xét $\Delta' = 4(x - x^3)^2 - (x^4 + 2x^2 + 1) \cdot 4x^2$

$$= 4x^2 - 8x^4 + 4x^6 - 4x^6 - 8x^4 - 4x^2$$

$$= -16x^4 \leq 0 \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Do vậy $f(y) = A - B \geq 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, hay $A \geq B$.

• Khi tính giá trị của đa thức một biến có bậc lớn mà giá trị của biến là một biểu thức phức tạp hoặc thỏa mãn điều kiện nào đó thì HS không nên nghĩ đến việc thay trực tiếp các giá trị của biến vào đa thức mà cần vận dụng linh hoạt các biến đổi để đưa đa thức hoặc điều kiện đã cho thành biểu thức hay các điều kiện đơn giản hơn, thuận tiện cho việc tính toán.

Thí dụ 4. Tính giá trị biểu thức

$$B = (4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2)^{2018} + 2017$$

$$\text{tại } x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = \sqrt{2} \Rightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0. \quad \text{Lại có:}$$

$$\begin{aligned} B &= (4x^5 + 4x^4 - x^3 - 4x^3 - 4x^2 + x + 4x^2 + 4x - 1)^{2018} + 2017 \\ &= [x^3(4x^2 + 4x - 1) - x(4x^2 + 4x - 1) + (4x^2 + 4x - 1) - 1]^{2018} + 2017. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } B = (-1)^{2018} + 2017 = 2018.$$

3. Rèn luyện HS kỹ năng dự đoán trong quá trình dạy học

Một trong các biểu hiện đỉnh cao của tư duy sáng tạo là sáng tạo ra cái mới, do vậy tập luyện cho HS thói quen dự đoán ra cái mới là một trong những yêu cầu cao của quá trình tư duy.

Cô GS. Nguyễn Cảnh Toàn đã viết: “Đừng nghĩ rằng “mò mẫm” thì có gì là “sáng tạo”, nhiều nhà khoa học lớn phải dùng đến nó. Không dạy “mò mẫm” thì người thông minh nhiều khi phải bó tay chỉ vì không nghĩ đến hoặc không biết “mò mẫm””.

Trong bài toán chứng minh BĐT, bài toán tìm GTLN, GTNN của đa thức có điều kiện của biến, chúng ta có thể dựa vào điều kiện của biến để dự đoán ra những mối liên hệ mới, từ đó đặt ẩn phụ và đưa bài toán về dạng đơn giản hơn mà có thể đánh

giá được trực tiếp không cần sử dụng đến các kiến thức cao.

Thí dụ 5. Cho $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \geq 6 \quad (*)$$

Phân tích. Từ điều kiện $x + y + z = 3$ và yêu cầu phải chứng minh (*) ta có thể dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$, dẫn đến ta đặt $x = 1 + a$, $y = 1 + b$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) thì $z = 1 - a - b$. Khi đó yêu cầu chứng minh trở nên đơn giản hơn: BĐT cần chứng minh từ 3 biến x, y, z về 2 biến a, b .

Lời giải. Đặt $x = 1 + a$, $y = 1 + b$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) thì từ điều kiện $x + y + z = 3$ ta có $z = 1 - a - b$.

$$\begin{aligned} &\text{Khi đó } x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \\ &= (1+a)^2 + (1+b)^2 + (1-a-b)^2 \\ &+ (1+a)(1+b) + (1+b)(1-a-b) + (1+a)(1-a-b) \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 6 \geq 6 \quad \left(\text{do } \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3b^2}{4} \geq 0\right) \end{aligned}$$

với mọi a, b .

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{b}{2} = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$, khi đó

$$x = y = z = 1. \text{ Vậy với } x + y + z = 3 \text{ thì } x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \geq 6, \text{ dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Thí dụ 6. Cho $a + b = c + d$. Chứng minh rằng $c^2 + d^2 + cd \geq 3ab$.

Phân tích. Từ điều kiện $a + b = c + d$ và yêu cầu phải chứng minh $c^2 + d^2 + cd \geq 3ab$. Ta có thể dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d$, dẫn đến ta đặt $c = a + x$ thì $d = b - x$ (với $x \in \mathbb{R}$). BĐT cần chứng minh trở nên đơn giản hơn (chuyển từ chứng minh BĐT 4 biến sang BĐT 3 biến).

Lời giải. Đặt $c = a + x$ (với $x \in \mathbb{R}$) thì từ điều kiện $a + b = c + d$ suy ra $d = b - x$. Ta có

$$\begin{aligned} c^2 + d^2 + cd &= (a+x)^2 + (b-x)^2 + (a+x)(b-x) \\ &= \left(a - b + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} + 3ab \geq 3ab \end{aligned}$$

$$\left(\text{do } \left(a - b + \frac{x}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3x^2}{4} \geq 0 \text{ với mọi } a, b, x\right).$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + \frac{x}{2} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ x = 0 \end{cases}$, khi đó

$$a = b = c = d.$$

Vậy với $a + b = c + d$ thì $c^2 + d^2 + cd \geq 3ab$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d$.

Thí dụ 7. Cho chín số $x_1, x_2, \dots, x_9$ thỏa mãn $x_i \in [-1; 1]$ ($i = 1, 2, \dots, 9$) và $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_9^3 = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = x_1 + x_2 + \dots + x_9$.

Lời giải. Ta có

$$4x_1^3 - 3x_1 + 1 = 4(x_1 + 1)\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ vì } x_1 \geq -1.$$

$$4x_2^3 - 3x_2 + 1 = 4(x_2 + 1)\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ vì } x_2 \geq -1$$

.....

$$4x_9^3 - 3x_9 + 1 = 4(x_9 + 1)\left(x_9 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ vì } x_9 \geq -1.$$

Cộng vế với vế của các BĐT trên ta được:

$$4(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_9^3) - 3(x_1 + x_2 + \dots + x_9) + 9 \geq 0.$$

Lại do $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_9^3 = 0$ nên

$$P = x_1 + x_2 + \dots + x_9 \leq 3.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ một trong chín số đã cho bằng (-1) và tám số còn lại đều bằng $\frac{1}{2}$.

Vậy $\max P = 3 \Leftrightarrow$ một trong chín số đã cho bằng (-1) và tám số còn lại bằng nhau đều bằng $\frac{1}{2}$.

Nhận xét. Ta thấy sự mò mẫm, dự đoán và xuất phát từ đa thức $4x^3 - 3x + 1$. Vấn đề đặt ra là tại sao không phải từ một đa thức khác? Cơ sở nào để tìm ra được đa thức $4x^3 - 3x + 1$? Ta có thể tìm được đa thức tổng quát để giải bài toán tổng quát hay không?, ... Từ giả thiết và kết luận của bài toán chúng ta buộc phải tìm mối liên hệ giữa $(x_1 + x_2 + \dots + x_9)$ và $(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_9^3)$. Muốn vậy, ta phải tìm mối liên hệ giữa các số x_i và x_i^3 .

Đặt $x^3 + cx + d = (x+a)(x+b)^2$. Khai triển rồi đồng

nhất hai vế, ta được: $b = -\frac{1}{2}a$, $c = -\frac{3}{4}a^2$, $d = \frac{1}{4}a^3$.

Từ đó ta có:

$$x^3 - \frac{3}{4}a^2x + \frac{1}{4}a^3 = (x+a)\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 \geq 0$$

với mọi $x \geq -a$, hay

$$4x^3 - 3a^2x + a^3 = 4(x+a)\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 \geq 0 \quad (*)$$

với mọi $x \geq -a$.

Do $x \in [-1; 1]$ nên chọn $a = 1$ là giá trị thuận lợi nhất để có (*).

Khi đó $4x^3 - 3x + 1 \geq 0$ với $x \geq -1$, và đây là mấu chốt của bài toán cụ thể đã cho, còn đối với các bài toán tổng quát thì điều mấu chốt sẽ là hệ thức (*).

Ta có bài toán tổng quát: Cho các số $x_i \in [-m; m]$,

với $i = \overline{1; n}$ và $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

4. Giúp HS sáng tạo ra các bài toán mới dựa trên bài toán đã biết hoặc phát hiện ra ứng dụng mới của một kết quả bài toán

Để giúp HS có được tư duy sáng tạo GV nên tạo cho HS thói quen tạo ra bài toán mới dựa trên bài toán đã biết bằng cách thay đổi các yếu tố hoặc khai thác các ứng dụng của bài toán đã biết để giải quyết các bài toán quen thuộc một cách hiệu quả hơn.

Thí dụ 8. Xuất phát từ bất đẳng thức

$$m^2 + mn + n^2 \geq 0 \text{ với mọi } m, n.$$

• Nếu thay $m = x - 1$; $n = 1 - y$ thì ta có:

$$(x-1)^2 + (x-1)(1-y) + (1-y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 \geq 0.$$

Khi đó ta có bài toán 1: Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 \geq 0 \text{ với mọi } x, y.$$

Và tiếp tục ta có thể cho m, n là những biểu thức khác nhau, ... ta sẽ được những bài toán mới.

• Từ $(m-n)^2 \geq 0$ ta có:

$$\left(m^2 + mn + n^2 \right) (m-n)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m^2 + mn + n^2 \right) (m-n)(m-n) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m^3 - n^3 \right) (m-n) \geq 0 \Leftrightarrow m^4 + n^4 \geq m^3n + mn^3.$$

Ta có bài toán 2: Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3 \text{ với mọi } a, b.$$

• Với bài toán 2, tương tự ta có:

$$b^4 + c^4 \geq b^3c + bc^3 \text{ và } a^4 + c^4 \geq a^3c + ac^3. \text{ Khi đó:}$$

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b).$$

Nếu a, b, c không âm ta có:

$$b+c \geq 2\sqrt{bc}, \quad a+c \geq 2\sqrt{ca}, \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Khi đó ta có bài toán 3: Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3\sqrt{bc} + b^3\sqrt{ca} + c^3\sqrt{ab}$$

với mọi a, b, c không âm.

• Với bài toán 2, nếu thay $a = x^2, b = y^2$ với $x, y \neq 0$,

$$\text{ta có: } (x^2)^4 + (y^2)^4 \geq (x^2)^3 y^2 + x^2 (y^2)^3$$

$$\Leftrightarrow x^8 + y^8 \geq x^6 y^2 + x^2 y^6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^8}{x^2 y^2} + \frac{y^8}{x^2 y^2} \geq x^4 + y^4 \Leftrightarrow \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} \geq x^4 + y^4.$$

Khi đó ta có bài toán 4: Chứng minh rằng với mọi

$$x, y \neq 0 \text{ ta có: } x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}.$$

• Từ $x^8 + y^8 \geq x^6 y^2 + x^2 y^6$ ta có:

$$\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} \geq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) \geq 0.$$

Khi đó ta có bài toán 5: Chứng minh rằng, với $xy > 0$ ta luôn có:

$$\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Và tiếp tục bằng cách thay m, n, a, b ở các BĐT trên bởi những biểu thức, giá trị khác và dùng một số thao tác kỹ thuật như: Nhân hai vế của BĐT với số không âm; chia hai vế của BĐT cho cùng một số dương; cộng từng vế nhiều BĐT cùng chiều, hay thêm hoặc bớt đi hai vế của một BĐT với cùng một số, ... thì ta sẽ thu được nhiều kết quả hơn.

Thí dụ 9. Ta có hằng đẳng thức:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \quad (*)$$

Nếu chỉ quan sát đẳng thức (*) trong trạng thái tĩnh thì quả thực khó có thể rút ra được một điều gì thú vị ngoài tính cân đối của nó. Nếu ta nhìn đẳng thức (*) với trạng thái động, nghĩa là chẳng hạn thay các đối

tượng a, b, c bởi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ thì ta có đẳng thức:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ac} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} \end{aligned} \quad (**)$$

Trong (**) ta cho $a+b+c=0$, ta được

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Khi đó ta có bài toán 1: Chứng minh rằng: Với $abc \neq 0$ và $a+b+c=0$ thì có đẳng thức

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right| \quad (1)$$

- Từ bài toán 1 và với nhận xét:

$$(a+b)^2 = [-(a+b)]^2 \text{ và } -(a+b) = c,$$

ta có bài toán 2: Chứng minh rằng với $ab(a+b) \neq 0$ ta có đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right| \quad (2)$$

- Từ (1) khi ta thay a, b, c bởi bộ 3 số

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \text{ ta có bài toán 3: Chứng minh rằng}$$

với $ab(a+b) \neq 0$ ta có đẳng thức:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2}} = \left| a + b - \frac{ab}{a+b} \right| \quad (3)$$

- Từ (1) và đẳng thức $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau từng đôi một, ta có

$$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} = \left| \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right| \in \mathbb{Q}$$

Khi đó ta có bài toán 4: Cho a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$S = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \text{ là số hữu tỉ.}$$

- Áp dụng (2) và do $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2 + b^2} > 0$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

Khi đó ta có bài toán 5: Rút gọn biểu thức sau:

$$P = \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} + \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}}.$$

- Vì $1 + (n-1) + (-n) = 0$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ nên

$$\sqrt{1 + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= (n-2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ta có bài toán 6: Tính S_{2017} biết

$$S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}}.$$

Thí dụ 10. Tìm đa thức bậc ba $f(x)$ sao cho $f(x) - f(x-1) = x^2$. Áp dụng hãy tính tổng:

$$T = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

Lời giải. Vì đa thức $f(x)$ là đa thức bậc ba nên $f(x)$ có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Từ điều kiện $f(x) - f(x-1) = x^2$, ta có:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d - [a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d] &= x^2 \\ \Leftrightarrow a[x^3 - (x-1)^3] + b[x^2 - (x-1)^2] + c[x - (x-1)] + d - d &= x^2 \\ \Leftrightarrow a[x - x + 1][x^2 + x(x-1) + (x-1)^2] &+ b[x - x + 1][x + x - 1] + c[x - x + 1] = x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a[x^2 + x(x-1) + (x-1)^2] + b[2x - 1] + c &= x^2 \\ \Leftrightarrow 3ax^2 + (2b - 3a)x + (a - b + c) &= x^2 \end{aligned}$$

Áp dụng phương pháp hệ số bất định ta có:

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 2b - 3a = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d \quad (d \text{ tùy ý}).$$

- Áp dụng tính tổng: $T = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Từ $x^2 = f(x) - f(x-1)$, cho x lần lượt các giá trị 1, 2, 3, ..., n ta được:

$$1^2 = f(1) - f(1-1) = f(1) - f(0)$$

$$2^2 = f(2) - f(2-1) = f(2) - f(1)$$

$$\dots \dots \dots n^2 = f(n) - f(n-1).$$

Do đó $T = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

$$= f(n) - f(0) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Như vậy thông qua bài toán tìm $f(x)$ gọi cho ta cách tính các tổng trên khá đơn giản. Bằng phương pháp tương tự, ta có các bài toán:

1) Tìm đa thức bậc bốn $f(x)$ sao cho $f(x) - f(x-1) = x^3$.

Áp dụng hãy tính tổng: $T = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

2) Tìm đa thức bậc năm $f(x)$ sao cho $f(x) - f(x-1) = x^4$.

Áp dụng hãy tính tổng: $T = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4$.

Sự phát triển tư duy nói chung và tư duy sáng tạo nói riêng trong môn Toán ở THCS không chỉ trong nội dung đa thức và ứng dụng của đa thức mà còn có thể thông qua các nội dung Toán khác. Do đó, trong quá trình dạy học môn Toán ở THCS GV nên tận dụng các cơ hội có thể để phát triển tư duy cho HS nhằm nâng cao hiệu quả dạy học.

$$b) \frac{b+c-a}{c+a-b} + \frac{c+a-b}{a+b-c} + \frac{a+b-c}{b+c-a} \geq \frac{p}{\sqrt[3]{pr^2}}.$$

$$c) \frac{\tan \frac{A}{2}}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{C}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{A}{2}} \geq \frac{4R+r}{\sqrt[3]{p^2r}}.$$

Lời giải. Sử dụng kết quả (0.1) kết hợp với các kết quả dưới đây ta sẽ được các BĐT cần chứng minh.

$$a) a+b+c=2p, abc=4SR=4prR.$$

$$b) (b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=2p \text{ và}$$

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = \frac{16S^2}{(a+b+c)} = \frac{16p^2r^2}{2p} = 8pr^2.$$

$$c) \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{4R+r}{p} \text{ và}$$

$$d) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{p}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{\tan \frac{A}{2}}{\tan \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{C}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{A}{2}} \geq \frac{\frac{4R+r}{p}}{\frac{r}{p}} = \frac{4R+r}{\sqrt[3]{p^2r}}.$$

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3}{a+b+c} \geq 4.$$

Lời giải. Sử dụng BĐT Cauchy, ta có

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3.$$

Sử dụng kết quả (1), tiếp tục kết hợp BĐT Cauchy,

$$\begin{aligned} \text{ta có } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3}{a+b+c} &\geq a+b+c + \frac{3}{a+b+c} \\ &= \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b+c}{3} + \frac{3}{a+b+c} \\ &\geq 4\sqrt[4]{\frac{(a+b+c)^3}{3^3} \cdot \frac{3}{(a+b+c)}} = 4\sqrt[4]{\frac{(a+b+c)^2}{3^2}} \geq 4\sqrt[4]{\frac{3^2}{3^2}} = 4. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 4. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

BĐT này được A.M. Nesbitt phát biểu lần đầu tiên vào năm 1903 trên tạp chí "Educational Times" và người ta thường gọi là BĐT Nesbitt. Đây là một kết quả rất đẹp, và là một ví dụ kinh điển cho việc thể hiện ứng dụng của các phương pháp chứng minh BĐT. BĐT Nesbitt đã được rất nhiều người quan tâm và tìm các cách giải; hiện đã có trên 50 cách chứng minh khác nhau cho bài toán này. Trên Tạp chí Toán Học Tuổi Trẻ số 358 (tháng 4 – 2007), tác

giả Vũ Đình Hòa cũng đã giới thiệu cho bạn đọc một tổng quát của BĐT Nesbitt, đó chính là BĐT Shapiro được phát biểu dưới dạng sau:

Với mọi $x_i \geq 0, x_i + x_{i+1} > 0 (i=1, 2, \dots, n), x_{n+1} = x_1$

$$\text{thì ta có } \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu một cách chứng minh rất đẹp cho BĐT Nesbitt.

Lời giải. Đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ thì $a, b, c > 0, abc=1$.

BĐT Nesbitt được viết lại là

$$\frac{a}{ac+1} + \frac{b}{ba+1} + \frac{c}{cb+1} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2b + b^2c + c^2a) \geq (a+b+c) + (ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \geq (a+b+c) + (ab+bc+ca).$$

BĐT này luôn đúng theo các BĐT (2) và (4).

Bài toán 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Lời giải. Trước hết, áp dụng BĐT Schur, ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq (a^2b + b^2c + c^2a) + (a^2c + c^2b + b^2a).$$

Với $abc=1$, ta thu được

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3 \geq \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c}\right).$$

Nhưng theo các BĐT (2) và (4) ta có:

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c}\right) \geq 2(ab+bc+ca).$$

Bài toán 6. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng $(x^2 + 2yz)(y^2 + 2zx)(z^2 + 2xy)$

$$\geq xyz(x+2z)(y+2x)(z+2y)$$

Lời giải. Chia hai vế của BĐT trên cho $x^2y^2z^2$, ta được

$$\left(1 + 2\frac{yz}{x^2}\right)\left(1 + 2\frac{zx}{y^2}\right)\left(1 + 2\frac{xy}{z^2}\right) \geq \left(1 + 2\frac{z}{x}\right)\left(1 + 2\frac{y}{z}\right)\left(1 + 2\frac{x}{y}\right).$$

Đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ thì $a, b, c > 0$ và $abc=1$.

BĐT trên trở thành

$$\left(1 + 2\frac{c}{a}\right)\left(1 + 2\frac{a}{b}\right)\left(1 + 2\frac{b}{c}\right) \geq (1+2a)(1+2b)(1+2c)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$\geq (a+b+c) + 2(ab+bc+ca)$$

Theo các BĐT (1) và (4), suy ra BĐT cuối đúng.

Bài toán 7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{a^2+a} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$3 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq 1.$$

Kết hợp BDT Schwarz và các BDT (1), (2) ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{a^2+a} &= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{a+\frac{a}{b}} + \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^2}{b+\frac{b}{c}} + \frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2}{c+\frac{c}{a}} \\ &\geq \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2}{(a+b+c) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)} \\ &\geq \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2}{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}}}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Bài toán 8. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2(c+1)} + \frac{b}{c^2(a+1)} + \frac{c}{a^2(b+1)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Kết hợp BDT Schwarz và các BDT (1), (2), ta nhận được

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^2(c+1)} + \frac{b}{c^2(a+1)} + \frac{c}{a^2(b+1)} &\geq \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2}{a(c+1) + b(a+1) + c(b+1)} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2}{(a+b+c) + (ab+bc+ca)} \geq \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2}{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)} \\ &= \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}}}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Bài toán 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng $a^{\frac{a}{b}} b^{\frac{b}{c}} c^{\frac{c}{a}} \geq 1$.

Lời giải. BDT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{b} \cdot a \ln a + \frac{1}{c} \cdot b \ln b + \frac{1}{a} \cdot c \ln c \geq 0.$$

Xét hàm số $f(x) = x \ln x, x \in (0, +\infty)$. Khi đó

$$f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Suy ra f là hàm lồi trên $(0, +\infty)$. Áp dụng BDT

Jensen tổng quát, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{b} \cdot a \ln a + \frac{1}{c} \cdot b \ln b + \frac{1}{a} \cdot c \ln c}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}} &\geq \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}} \ln \left(\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}} \right) \\ \text{hay } \frac{1}{b} \cdot a \ln a + \frac{1}{c} \cdot b \ln b + \frac{1}{a} \cdot c \ln c &\geq \left(\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}} \right) \ln \left(\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}} \right) \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Bài toán 10. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{x+2}{y+2} + \frac{y+2}{z+2} + \frac{z+2}{x+2}.$$

Lời giải. Bằng cách đặt $a = \frac{x}{2}, b = \frac{y}{2}, c = \frac{z}{2}$ thì $a, b, c > 0, abc = 1$ và BDT trở thành

$$\begin{aligned} a+b+c &\geq \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} \\ \text{hay } (a+b+c)(a+1)(b+1)(c+1) &\geq (a+1)^2(c+1) + (b+1)^2(a+1) + (c+1)^2(b+1). \end{aligned}$$

Sử dụng phép biến đổi đại số, ta đưa về dạng tương đương là $abc(a+b+c) + (a^2b + b^2c + c^2a) - 2(a+b+c) + 3abc - 3 \geq 0$.

Vì $abc = 1$ nên BDT trên có thể đưa về dạng

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq a + b + c.$$

BDT cuối cùng chính là BDT (4).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hay $x = y = z = 2$.

Bài toán 11. Tìm giá trị lớn nhất của số thực dương T sao cho với mọi a, b, c dương và thỏa mãn điều kiện $abc = 1$ thì BĐT sau luôn đúng

$$\frac{a+b}{b(2+a)} + \frac{b+c}{c(2+b)} + \frac{c+a}{a(2+c)} \geq T.$$

Lời giải. Cho $a = b = c = 1$, ta có $T \leq 2$. Ta sẽ chứng minh 2 là giá trị lớn nhất có thể có của số thực dương T , hay ta phải chứng minh với $a, b, c > 0$ và $abc = 1$ thì bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a+b}{b(2+a)} + \frac{b+c}{c(2+b)} + \frac{c+a}{a(2+c)} \geq 2.$$

Sử dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{b(2+a)} + \frac{b+c}{c(2+b)} + \frac{c+a}{a(2+c)} \\ & \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a+b}{b(2+a)} \cdot \frac{b+c}{c(2+b)} \cdot \frac{c+a}{a(2+c)}} = 3 \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+2)(b+2)(c+2)}} \end{aligned}$$

Để kết thúc bài toán, ta chỉ cần phải chứng minh

$$3 \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+2)(b+2)(c+2)}} \geq 2 \text{ hay}$$

$$27(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+2)(b+2)(c+2).$$

$$\Leftrightarrow 46abc + 27(a^2b + b^2c + c^2a) + 27(ab^2 + bc^2 + ca^2) -$$

$$-16(ab + bc + ca) - 32(a + b + c) - 64 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 27(a^2b + b^2c + c^2a) + 27(ab^2 + bc^2 + ca^2) -$$

$$-16(ab + bc + ca) - 32(a + b + c) - 18 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 27\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 27\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) -$$

$$-16(ab + bc + ca) - 32(a + b + c) - 18 \geq 0$$

Sử dụng các kết quả (1), (3), (4) và BĐT Cauchy, ta có:

$$\bullet \quad 27\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 27(a + b + c)$$

$$\bullet \quad 5\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 5(a + b + c)$$

$$\bullet \quad 16\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 16(ab + bc + ca)$$

$$\bullet \quad 6\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 18$$

Cộng các BĐT trên ta thu được điều phải chứng minh.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c ; R, r, p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và nửa chu vi của tam giác. Chứng minh các BĐT sau

$$a) \quad \frac{\cot \frac{A}{2}}{\cot \frac{B}{2}} + \frac{\cot \frac{B}{2}}{\cot \frac{C}{2}} + \frac{\cot \frac{C}{2}}{\cot \frac{A}{2}} \geq \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}.$$

$$b) \quad \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}} \geq (2R - r) \sqrt[3]{\frac{2}{Rr^2}}.$$

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ và số thực $n \leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{3n}{a+b+c} \geq 3 + n.$$

3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^3 + b} + \frac{b}{c^3 + c} + \frac{c}{a^3 + a} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$ và n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng $a^{n+1}b + b^{n+1}c + c^{n+1}a \geq a^n b + b^n c + c^n a$.

5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$5 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

6. [Moldova, 1999] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}.$$

7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a+b}{b+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{c+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+1}} \geq 3.$$

8. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+3}} + \sqrt{\frac{b}{c+3}} + \sqrt{\frac{c}{a+3}} \geq \frac{3}{2}.$$

9. [T7/375, THPT] Cho k là số nguyên dương và a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \leq 1$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b^k} + \frac{b}{c^k} + \frac{c}{a^k} \geq a + b + c$.

10. [T4/376, TH&TT] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{3}{2}(a + b + c - 1).$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

Bài số 21

Problem. Construct a function such that its graph has 4 (and only 4) following asymptotes:

$$y = -3; y = 2; x = 0; \text{ and } x = 1.$$

Solution. We will construct a function as follows

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \geq 1 \\ -3 & \text{if } x \leq 0 \\ \dots & \text{otherwise} \end{cases}$$

It is clear that $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ and $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$.

Then by definition, its graph will have 2 horizontal asymptotes $y = -3$ and $y = 2$. We now focus on "vertical asymptotes". We will use the trigonometry

function $y = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ since its graph has

vertical asymptotes $x = -\frac{\pi}{2}$ and $x = \frac{\pi}{2}$ which are

similar to the requirements. We need to change from

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ to $(0; 1)$. To do that, we replace $y = \tan x$

by $y = \tan \pi(x - 0.5)$. We multiply by π to adjust the

period from π to 1 and we subtract 0.5 to shift the

graph to the right 0.5 unit. Therefore, the following function

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \geq 1 \\ -3 & \text{if } x \leq 0 \\ \tan \pi(x - 0.5) & \text{otherwise} \end{cases}$$

will satisfy the requirements.

Question. Can we construct a function $f(x)$ such that its graph on $[0; 1]$ has infinitely many vertical asymptotes?

TỪ VỰNG

graph	: đồ thị của hàm số
asymptote	: tiệm cận
horizontal asymptote	: đường tiệm cận ngang
vertical asymptote	: đường tiệm cận đứng
trigonometry function	: hàm số lượng giác
period	: chu kỳ (hàm số)

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)



Bài toán. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

Lời giải. Chúng ta sử dụng phương pháp biến đổi biến số. Ta cần xử lý phần "căn thức", cụ thể là biến đổi $\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x(1-x)}$. Dạng của căn thức và

khoảng thay đổi $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$ của x gợi cho ta cách đặt $x = \sin^2(t)$, với $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Với phép biến đổi này thì $dx = 2 \sin(t) \cos(t) dt$, từ đó

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin(t) \cos(t) dt}{\sqrt{\sin^2(t)(1-\sin^2(t))}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin(t) \cos(t) dt}{|\sin(t)| \cdot |\cos(t)|} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin(t) \cos(t) dt}{\sin(t) \cos(t)} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

(chú ý rằng do ta chọn $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$, nên cả hai giá trị $\sin(t)$ và $\cos(t)$ đều dương).

Lưu ý. Chúng ta có thể sử dụng kỹ thuật "thêm bớt để thành một bình phương" sau đó sử dụng phương pháp đổi biến số

để quy tích phân ban đầu về dạng $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ và có thể tính tích phân này thông qua $\sin^{-1}(t)$.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài sớm đến Tòa soạn: **Hà Nội:** Nguyễn Hương Giang, 10A13, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Hải Dương:** Nguyễn Đăng Sơn, 11A, THPT Nam Sách, Nam Sách; **Nam Định:** Vũ Thị Diệp, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thừa Thiên Huế:** Phan Cảnh Minh Phước, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI (Hà Nội)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI NGẮN GỌN !

(Đề đăng trên TH&TT số 476, tháng 2 năm 2017)

Phân tích. 1) Trong PT của d_1, d_2 đều kí hiệu tham số là t nhưng ta phải hiểu rằng hai giá trị t đó hoàn toàn độc lập với nhau. Khi gọi $A = \Delta \cap d_1, B = \Delta \cap d_2$ thì A là điểm thuộc d_1 ứng với giá trị $t = a$, còn B là điểm thuộc d_2 ứng với giá trị $t = b$, chưa chắc $a = b$. Vì thế việc gọi tọa độ của điểm A, B cùng phụ thuộc vào chung một tham số t dẫn tới việc tính $\overline{AB} = (-3t; -1+3t; -4t)$ là không đúng.

2) Nếu $\overline{AB} \neq \vec{0}$ là một vtcp của Δ và Δ đi qua $M(1;0;5)$ thì đường thẳng này có PT tham số

$$\begin{cases} x = 1 + x_{\overline{AB}} \cdot t \\ y = y_{\overline{AB}} \cdot t \\ z = 5 + z_{\overline{AB}} \cdot t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \text{ Do đó, nếu trong lời giải trên, giả}$$

sử việc xác định $\overline{AB} = (-3t; -1+3t; -4t)$ là một vtcp của Δ là đúng thì PT tham số mà bạn học sinh đó thu được cũng không đúng.

Lời giải đúng. Gọi $A(1+2a; 3-2a; 1+a) = \Delta \cap d_1$,

$B(1-b; 2+b; 1-3b) = \Delta \cap d_2$. Vì A, B, M thẳng hàng nên $\overline{MA} = (2a; 3-2a; a-4)$ và $\overline{MB} = (-b; 2+b; -3b-4)$ cùng phương, tức là

$$\begin{cases} 2a(2+b) = -b(3-2a) \\ 2a(-3b-4) = -b(a-4) \\ (3-2a)(-3b-4) = (a-4)(2+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = -\frac{8}{15} \end{cases}$$

Lúc này $\overline{MB} = \frac{2}{15}(4; 11; -18) \Rightarrow \vec{u} = (4; 11; -18)$ là một

vtcp của Δ . Vậy Δ có PT $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 11t \\ z = 5 - 18t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Cách khác. d_1 đi qua $M_1(1;3;1)$, có một vtcp $\vec{u}_1 = (2; -2; 1)$; d_2 đi qua $M_2(1;2;1)$, có một vtcp $\vec{u}_2 = (-1; 1; -3)$. Gọi (P) là mp chứa M và d_1 .

Ta có $\overline{M_1M} = (0; -3; 4)$ và $\vec{n}_1 = [\overline{M_1M}, \vec{u}_1] = (5; 8; 6)$ là một vtcp của (P) . Gọi (Q) là mp chứa M và d_2 .

Ta có $\overline{M_2M} = (0; -2; 4)$, $[\overline{M_2M}, \vec{u}_2] = (2; -4; -2)$ nên $\vec{n}_2 = (1; -2; -1)$ là một vtcp của (Q) . Vì $\Delta = (P) \cap (Q)$ nên $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (4; 11; -18)$ là một vtcp của Δ .

Vậy Δ có PT tham số $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 11t \\ z = 5 - 18t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Nhận xét. Chỉ có bạn Nguyễn Trung Kiên, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế phát hiện được sai lầm và đưa ra cách giải đúng.

KIHI VI



BÀI TOÁN LŨY THỪA !

Trong giờ bài tập lũy thừa ở lớp 12A1. Thầy giáo có nêu bài tập sau: Rút gọn biểu thức

$$K = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^3 \left(1 - 2\sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

với $x, y > 0, x \neq y$.

Sau khi ghi bài tập trên bảng, bạn Tân liền xung phong lên bảng giải. Sau đây là lời giải của bạn Tân

Bài giải của Tân: Ta có

$$\begin{aligned} K &= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^3 \left(\left(1 - \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right)^{\frac{-3}{2}} = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^3 \left(\frac{y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} \right)^{-2} \\ &= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}} \right)^{-2} \cdot \left(\left(y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= y \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^3 \left(\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} = y \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^3 \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^{-3} = y. \end{aligned}$$

Khi Tân giải xong, thầy giáo hỏi lớp có nhận xét gì? Cả lớp kiểm tra lại và đi đến kết luận lời giải của Tân là đúng. Thầy giáo nói lời giải của bài toán này chưa đúng. Các bạn hãy giúp các bạn ở lớp 12A1 tìm chỗ sai trong lời giải trên nhé.

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bình Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Phó Tổng Giám đốc phụ trách NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

TS. PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Vũ Hữu Bình – Khai thác bài toán về tam giác vuông và các đường phân giác.

4 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Hà Tĩnh, năm học 2016 – 2017.

6 Hướng dẫn giải Đề thi chọn HSG lớp 9 TP. Hà Nội, năm học 2016 – 2017.

7 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên, ĐHSPT TP. Hồ Chí Minh, năm học 2016 – 2017.

8 Tin tức – Giải Wolf 2017.

9 Thử sức trước kỳ thi - Đề số 10.

13 Đáp án và hướng dẫn giải đề số 9.

16 Đề ra kỳ này

Problems in This Issue

T1/480, ..., T12/480, L1/480, L2/480.

18 Giải bài kỳ trước

Solutions to Previous Problems

26 Tin vắn – Hội thảo Khoa học chào mừng 30 năm Hội Toán học Hà Nội.

28 Bạn đọc tìm tòi

Vũ Đình Hòa – Một phương pháp giải các bài toán tổ hợp.

29 Diễn đàn dạy học toán

**Nguyễn Văn Triu – Trần Đức Cường
Rèn luyện tư duy sáng tạo cho học sinh khá, giỏi THCS trong dạy học chuyên đề đa thức và ứng dụng.**

34 Phương pháp giải toán

Cao Minh Quang – Ấn sau một bất đẳng thức đẹp.

38 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 21.

Bài dịch số 18 - Tiếng Anh qua các bài toán.

39 Sai lầm ở đâu?

Giải đáp: Lời giải ngắn gọn!

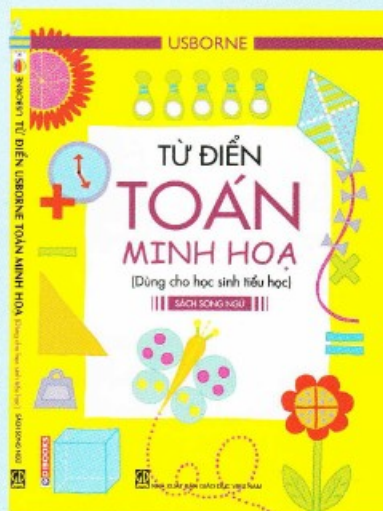
Nguyễn Anh Vũ – Bài toán lũy thừa!

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

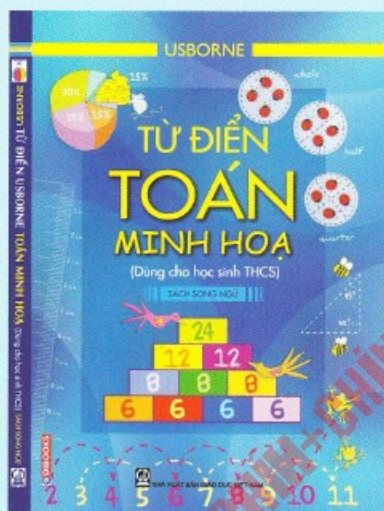
TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU

BỘ TỪ ĐIỂN USBORNE MINH HOẠ

SÁCH SONG NGỮ
ANH-VIỆT



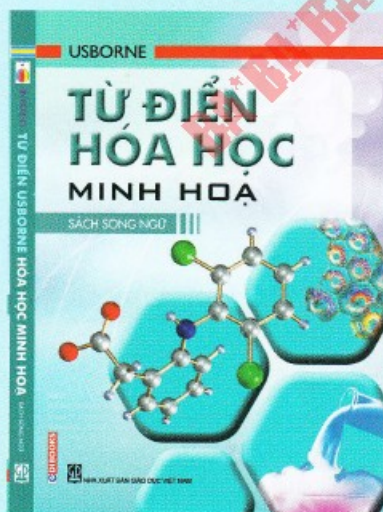
Từ điển Toán minh họa
(dùng cho học sinh Tiểu học)
Nguyễn Chí Thành... (dịch)
17x24 cm, 272 trang
160.000đ



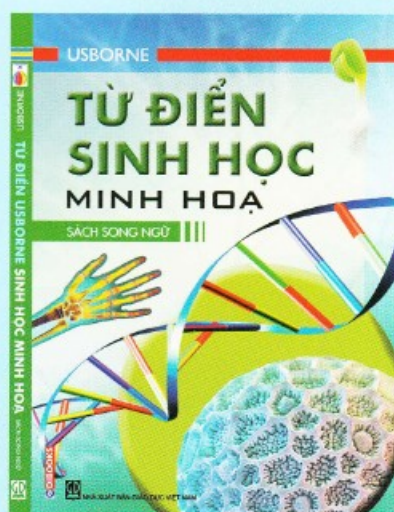
Từ điển Toán minh họa
(dùng cho học sinh THPT)
Nguyễn Chí Thành... (dịch)
17x24 cm, 272 trang
160.000đ



Từ điển Vật lý minh họa
Đặng Văn Sửu (dịch)
17x24 cm, 272 trang
160.000đ



Từ điển Hóa học minh họa
Ngô Tuấn Cường... (dịch)
17x24 cm, 258 trang
160.000đ



Từ điển Sinh học minh họa
Nguyễn Việt Linh (dịch)
17x24 cm, 272 trang
160.000đ



CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI
HANOI EDUCATION INVESTMENT AND DEVELOPMENT, JSC

Tòa nhà Văn phòng HEID, ngõ 12, Láng Hạ - Thành Công - Ba Đình - Hà Nội
Tel : (04) 35123939 - Phòng Kinh doanh - Tel : (04) 35122636, Fax : (04) 35122504



TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lý, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lý lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ để giải quyết hơn, cách “đưa

khó về dễ, đưa lạ về quen”, cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ... tất cả những điều đó đều là những kỹ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Buu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 04.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 04. 35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT6M7

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2017

Giá: 12.500 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng