



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

10 2017
Số 484

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

BA BA BA = CHÍN + CHÍN

Nhà Toán học Pháp

Jean-Baptiste
le Rond
d'Alembert
(1717-1783)





TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

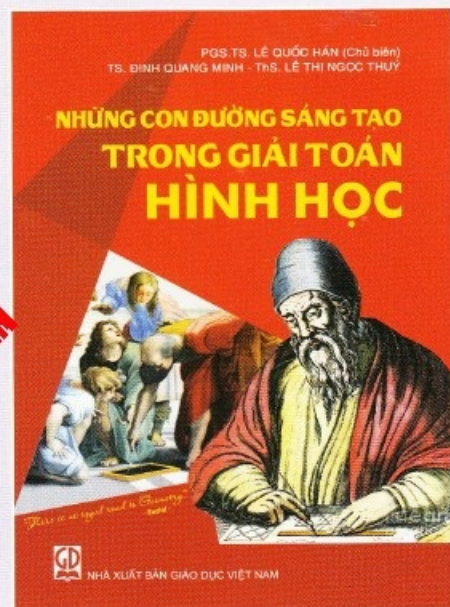
NHỮNG CON ĐƯỜNG SÁNG TẠO TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

(của các tác giả: PGS.TS. NGUYỄN Lê Quốc Hán (chủ biên), TS. Đinh Quang Minh, Th.S. Lê Thị Ngọc Thúy)

Sách dày 472 trang, khổ 17×24 cm, giá bìa 80.000 đồng. Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải những loại toán *hình học phổ thông* điển hình với gần 1000 bài toán hình học từ lớp 7 đến lớp 12 theo chương trình Bộ Giáo dục & Đào tạo hiện ban hành. Ngoài ra sách còn trình bày nguồn gốc những bài toán ấy và cách thức sáng tác các bài toán mới từ chúng. Có lẽ đây là nét khác biệt của cuốn sách này với phần lớn các sách tham khảo toán cùng loại.

Sách gồm ba phần chính. Phần *Hình học phẳng* dành cho các học sinh khá giỏi về toán; trong đó có nhiều bài toán không dễ, được chọn trong các đề thi Olympic Toán Quốc tế và Khu vực. Một số định lý và khái niệm quen thuộc và ít quen thuộc được đề cập khá chi tiết như: Định lý Thales, Định lý Pythagore, Định lý Ptolemy, Công thức Leibniz, Công thức Euler, Bài toán Torricelli, Bài toán Napoléon, Đường thẳng và đường tròn chính tâm Euler, Đường thẳng Simson, Điểm Lemoine, ... Phần *Hình học không gian* chủ yếu dành cho học sinh đại trà. Vì vậy bên cạnh các bài toán khó đánh dấu * là những bài toán chọn trong các đề thi Tuyển sinh Đại học hay Tốt nghiệp THPT mấy năm gần đây. Ngoài phương pháp chính là suy luận logic, thỉnh thoảng các tác giả sử dụng công cụ vectơ nếu thấy thật cần thiết. Phần *Mối liên hệ giữa hình học với các phân môn khác* như Lượng giác, Đại số; các tác giả tập trung vào phần *Tam giác lượng* với nhiều bài toán hay, và trong phần *Phương pháp hình học trong đại số* đề cập đến một số dạng toán hình học giải tích phẳng thường gặp trong các kỳ thi Tuyển sinh đại học hay Tốt nghiệp THPT.

Sách cố gắng trình bày dựa trên sự kết hợp hài hòa của văn phong tươi mát, độc đáo và sắc sảo của Polya với sự giản dị dễ hiểu mà thâm trầm sâu sắc của Hứa Thuần Phông. Có thể



xem đây là những suy nghiệm sâu sắc nhất của nhóm tác giả, đặc biệt là của NGUYỄN Lê Quốc Hán, chủ biên cuốn sách với 50 năm học và giải toán.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn Hình học vốn được xem là khó nhưng hấp dẫn này.

Mọi chi tiết xin liên hệ: **TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

● ĐT Biên tập: (024) 35121607

● ĐT/Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

● Email: toanhocuoitvietnam@gmail.com

● Website: www.nxbgd.vn/toanhocuoitre



PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG BẬC TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

MAI VĂN NĂM

(GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

Bất đẳng thức (BĐT) là dạng toán hay và khó, có rất nhiều phương pháp chứng minh như sử dụng các BĐT cổ điển: Cauchy, Bunyakovsky, Schur; phương pháp hàm số ... Nhưng nếu chú ý đến bậc của các biến trong BĐT rồi tìm cách cân bằng ta sẽ chứng minh được không mấy khó khăn. Sau đây là một số bài toán BĐT được chứng minh bằng cách đưa về cùng bậc.

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$4(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3) \geq 9 \quad (1)$$

(Đề TS 10 THPT chuyên Vĩnh Phúc năm học 2016 – 2017)

Lời giải. Đưa các số hạng về cùng bậc ba. Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3 \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 4(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2) - 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3. \end{aligned}$$

Mặt khác có $(a + b + c)^3 =$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2) + 6abc.$$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a^2b + bc^2 \geq 2abc$; $b^2c + ca^2 \geq 2abc$; $c^2a + ab^2 \geq 2abc$.

Cộng các BĐT này ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{2a^2}{a + b^2} + \frac{2b^2}{b + c^2} + \frac{2c^2}{c + a^2} \geq a + b + c \quad (2)$$

(Đề TS lớp 10 THPT chuyên TP. Hà Nội năm học 2016 – 2017)

Lời giải

Nhận xét: Đáp án của đề thi sử dụng BĐT Cauchy ngược nhưng nếu chú ý đến bậc của các biến ta có thể giải nhanh như sau. Ta có:

$$a + b^2 = a \cdot 1 + b^2 \leq \frac{a^2 + 1}{2} + b^2 = \frac{a^2 + 2b^2 + 1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{2a^2}{a + b^2} \geq \frac{4a^2}{a^2 + 2b^2 + 1} = \frac{4a^4}{a^4 + 2a^2b^2 + a^2};$$

$$\text{trong tự ta có: } \frac{2b^2}{b + c^2} \geq \frac{4b^4}{b^4 + 2b^2c^2 + b^2}$$

$$\text{và } \frac{2c^2}{c + a^2} \geq \frac{4c^4}{c^4 + 2c^2a^2 + c^2}.$$

Áp dụng BĐT Schwarz ta có:

$$\text{VT}(2) \geq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + a^2 + b^2 + c^2} = \frac{4 \cdot 3^2}{3^2 + 3} = 3.$$

$$\text{Mặt khác } (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9$$

$$\Rightarrow a + b + c \leq 3. \text{ Suy ra}$$

$$\frac{2a^2}{a + b^2} + \frac{2b^2}{b + c^2} + \frac{2c^2}{c + a^2} \geq a + b + c.$$

Bài toán 3. Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^3(b + c) + b^3(c + a) + c^3(a + b) \leq 6 \quad (3)$$

Lời giải. Nhận xét rằng các biểu thức trong VT của (3) có bậc là 4, do đó ta đưa VP về bậc 4. Từ giả thiết ta có $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 9$, do đó:

$$(3) \Leftrightarrow 3(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b) \leq 2(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(a^4 + b^4 + c^4) + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 3(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b) \geq 0.$$

$$\begin{aligned}
& \text{Xét } a^4 + b^4 + 4a^2b^2 - 3ab(a^2 + b^2) = \\
& = (a^2 + b^2)^2 + 2a^2b^2 - 3ab(a^2 + b^2) \\
& = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 3ab) + 2a^2b^2 \\
& = (a^2 + b^2)[(a-b)^2 - ab] + 2a^2b^2 \\
& = (a-b)^2(a^2 + b^2) - ab(a^2 + b^2) + 2a^2b^2 \\
& = (a-b)^2(a^2 + b^2) - ab(a-b)^2 \\
& = (a-b)^2(a^2 + b^2 - ab) \geq 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{tương tự có: } b^4 + c^4 + 4b^2c^2 - 3bc(b^2 + c^2) = \\
& = (b-c)^2(b^2 + c^2 - bc) \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c^4 + a^4 + 4a^2c^2 - 3ac(a^2 + c^2) = \\
& = (c-a)^2(c^2 + a^2 - ac) \geq 0.
\end{aligned}$$

Cộng các BĐT lại ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 4. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz \geq \frac{27}{4} \quad (4)$$

Lời giải. Nhận xét VT của (4) là bậc 3 nên ta đưa VP lên bậc 3. Ta có

$$\begin{aligned}
(4) & \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz \geq \frac{(x+y+z)^3}{4} \\
& \Leftrightarrow 4(x^3 + y^3 + z^3) + 15xyz \\
& \geq x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \\
& \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \\
& \geq x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y \\
& \Leftrightarrow (x^3 - x^2y - x^2z + xyz) + (y^3 - y^2x - y^2z + xyz) \\
& \quad + (z^3 - z^2x - z^2y + xyz) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) \\
& \quad + z(z-x)(z-y) \geq 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Giả sử $x \geq y \geq z > 0$ khi đó

$$\begin{aligned}
& x(x-y)(x-z) \geq y(x-y)(y-z) \\
& \Rightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) \geq 0,
\end{aligned}$$

mà $z(z-y)(z-x) \geq 0$, nên ta có

$$\begin{aligned}
& x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geq 0 \\
& \text{(đpcm).}
\end{aligned}$$

Chú ý: (*) chính là một dạng của BĐT Schur.

Bài toán 5. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4 \quad (5)$$

Lời giải. Nhận xét VT của (5) có bậc cao nhất là bậc 3, ta tìm cách đưa tất cả các số hạng về bậc 3. Ta có:

$$\begin{aligned}
(5) & \Leftrightarrow 9(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) + 27xyz \geq 4(x+y+z)^3 \\
& \Leftrightarrow 5(x^3 + y^3 + z^3) + 3xyz \\
& \geq 3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y).
\end{aligned}$$

Mặt khác ta luôn có:

$$\begin{aligned}
& x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y \\
& \text{(BĐT Schur - bài 4), do đó ta cần chứng minh:} \\
& 4(x^3 + y^3 + z^3) \geq 2(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) \\
& \Leftrightarrow (x^3 - x^2y + y^3 - y^2x) + (y^3 - y^2z + z^3 - z^2y) \\
& \quad + (z^3 - z^2x + x^3 - x^2z) \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow (x-y)(x+y) + (y-z)(y+z) + (z-x)(z+x) \geq 0 \\
& \text{(đpcm).}
\end{aligned}$$

Bài toán 6. (IMO 1984) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$.

$$\text{Chứng minh: } xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27} \quad (6)$$

Lời giải. Đưa cả hai vế về cùng bậc 3 ta được:

$$\begin{aligned}
(6) & \Leftrightarrow (xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz \\
& \leq \frac{7}{27}(x + y + z)^3 \\
& \Leftrightarrow 27(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 27xyz \\
& \leq 7(x^3 + y^3 + z^3) + 21(x+y)(y+z)(z+x) \\
& \Leftrightarrow 7(x^3 + y^3 + z^3) + 15xyz \\
& \geq 6(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y).
\end{aligned}$$

Mặt khác có:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y \quad (*)$$

nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\begin{aligned}
& 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y \\
& \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) + (y-z)^2(y+z) + (z-x)^2(z+x) \geq 0. \\
& \text{BĐT cuối luôn đúng, suy ra đpcm.}
\end{aligned}$$

Bài toán 7. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn

$a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3 \quad (7)$$

Lời giải. Nhận xét các biểu thức của VT có bậc 1, còn VP có bậc 0. Do đó tìm cách đưa về cùng bậc. Bình phương hai vế của BĐT (7) ta được

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Ta có: $\frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{b^2 c^2}{a^2} \geq 2b^2$; $\frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} \geq 2a^2$;

$$\frac{c^2 a^2}{b^2} + \frac{b^2 c^2}{a^2} \geq 2c^2.$$

Cộng các BĐT này lại ta có đpcm.

Bài toán 8. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1 \quad (8)$$

Lời giải

$$(8) \Leftrightarrow \frac{a^4}{a^3+2a^2b^2} + \frac{b^4}{b^3+2b^2c^2} + \frac{c^4}{c^3+2c^2a^2} \geq 1 \quad (8')$$

$$\text{VT}(8') \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}.$$

Ta cần chứng minh:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow 3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3)$$

(do $a + b + c = 3$)

$$\Leftrightarrow 2(a^4 + b^4 + c^4) - (a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b) \geq 0.$$

$$\text{Xét } a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 =$$

$$= a^3(a - b) + b^3(b - a) = (a - b)(a^3 - b^3)$$

$$= (a - b)^2(a^2 + b^2 + ab) \geq 0.$$

Tương tự:

$$b^4 - b^3c + c^4 - c^3b = (b - c)^2(b^2 + c^2 + bc) \geq 0;$$

$$c^4 - c^3a + a^4 - a^3c = (c - a)^2(c^2 + a^2 + ca) \geq 0.$$

Cộng các BĐT lại ta có đpcm.

Chú ý: Ta cũng có thể áp dụng cách ở bài 2 đưa cả tử và mẫu về bậc 2

Bài toán 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{2}{3} \quad (9)$$

Lời giải. Nhận xét rằng VT của (9) các biểu thức có bậc 1, nên VP ta đưa về bậc 1. Ta có:

$$(9) \Leftrightarrow \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a}{3} \right) + \left(\frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} - \frac{b}{3} \right) + \left(\frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} - \frac{c}{3} \right) \geq 0.$$

$$\text{Xét hiệu: } \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a}{3} = \frac{2a^3 - a^2b - ab^2}{3(a^2 + ab + b^2)}$$

$$= \frac{a^3 - b^3}{3(a^2 + ab + b^2)} + \frac{a^3 + b^3 - a^2b - ab^2}{3(a^2 + ab + b^2)}$$

$$= \frac{a - b}{3} + \frac{(a + b)(a - b)^2}{3(a^2 + ab + b^2)}.$$

Tương tự có:

$$\frac{b^3}{b^2 + cb + c^2} - \frac{b}{3} = \frac{b - c}{3} + \frac{(b + c)(b - c)^2}{3(b^2 + bc + c^2)};$$

$$\frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} - \frac{c}{3} = \frac{c - a}{3} + \frac{(c + a)(c - a)^2}{3(c^2 + ca + a^2)}.$$

Cộng các đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\frac{(a + b)(a - b)^2}{3(a^2 + ab + b^2)} + \frac{(b + c)(b - c)^2}{3(b^2 + bc + c^2)} + \frac{(c + a)(c - a)^2}{3(c^2 + ca + a^2)} \geq 0.$$

(đpcm).

(Xem tiếp trang 6)

VẬN DỤNG TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN ĐỂ CHỨNG MINH MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG

NGUYỄN VĂN HIẾU

(GV THCS Vinh Hưng, Phú Lộc, Thừa Thiên Huế)

Để giúp học sinh biết vận dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn vào việc chứng minh hai tam giác vuông đồng dạng, chúng ta nên cho học sinh khai thác chú ý ở SGK Toán 9 tập 1 trang 74: “Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin \alpha = \sin \beta$ (hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$; $\tan \alpha = \tan \beta$; $\cot \alpha = \cot \beta$) thì $\alpha = \beta$. Vì chúng là hai góc nhọn tương ứng của hai tam giác vuông đồng dạng.

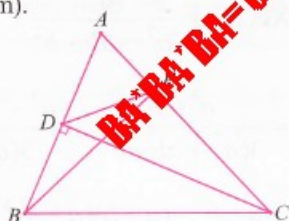
Vậy nếu hai tam giác vuông có $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$ của một cặp góc nhọn bằng nhau thì chúng đồng dạng với nhau. Nếu biết cách vận dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn một cách thích hợp thì việc chứng minh một số tính chất hình học của các hình là rất đơn giản và ngắn gọn. Sau đây là một vài thí dụ minh họa.

Bài toán 1. Cho $\triangle ABC$ có ba góc đều nhọn. Kẻ các đường cao BE và CD . Chứng minh rằng $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.

Lời giải (h.1). Ta có: $\cos \hat{A} = \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$; $\hat{A}$ chung

Vậy $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ (đpcm).

Tiếp theo chúng ta thử áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn để chứng minh tam giác sau đây là tam giác vuông, rồi kiểm tra lại bằng cách sử dụng định lý Pythagore.



Hình 1

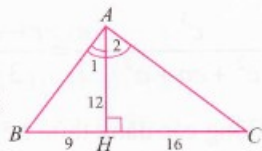
Bài toán 2. Cho $\triangle ABC$ có các góc B và C đều nhọn, kẻ đường cao AH . Biết $AH = 12\text{cm}$; $BH = 9\text{cm}$; $HC = 16\text{cm}$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông.

Lời giải (h.2). Các góc

$\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}, \hat{C}$ đều nhọn.

Ta có: $\tan \hat{A}_1 = \frac{BH}{AH} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$;

$\tan \hat{C} = \frac{AH}{HC} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}$.



Hình 2

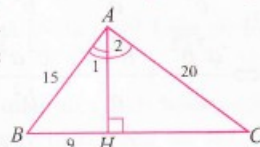
Từ $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{C} + \hat{A}_2 = 90^\circ \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 3. Cho $\triangle ABC$ có các góc B và C đều nhọn, kẻ đường cao AH . Biết $AB = 15\text{cm}$; $AC = 20\text{cm}$;

$BH = 9\text{cm}$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông.

Lời giải (h.3). Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông ABH , ta có:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 15^2 - 9^2 = 12^2 \Rightarrow AH = 12(\text{cm})$$



Hình 3

Tương tự: $HC = 16(\text{cm})$, ta lại giải như ở bài toán 2.

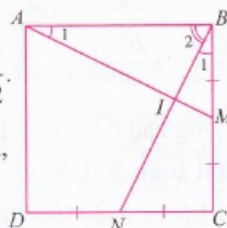
Bài toán 4. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Chứng minh rằng $AM \perp BN$.

Lời giải (h.4). Ta có:

$$\tan \hat{A}_1 = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}; \tan \hat{B}_1 = \frac{CN}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Mà $\hat{A}_1$ và $\hat{B}_1$ là hai góc nhọn, nên $\tan \hat{A}_1 = \tan \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$.

Từ đó dễ thấy $AM \perp BN$ (đpcm).



Hình 4

Bài toán 5. Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và CD . Chứng minh rằng $\widehat{AMN} = 90^\circ$.

Lời giải (h.5).

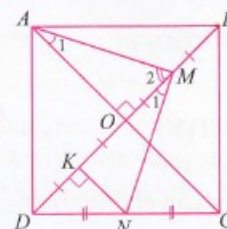
Từ N kẻ $NK \perp DB$, ta có:

$$\tan \hat{A}_1 = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2};$$

$$\tan \hat{M}_1 = \frac{NK}{KM} = \frac{1}{2}$$

nên $\tan \hat{A}_1 = \tan \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{M}_1$.

Từ đó $\widehat{AMN} = 90^\circ$.



Hình 5

Bài toán 6. (Bài tập 9 SGK/70 - Toán 9) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B . Tia DI và CB cắt nhau tại K . Kẻ đường thẳng qua D vuông góc với DI . Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L . Chứng minh rằng $\triangle DIL$ là tam giác vuông cân.

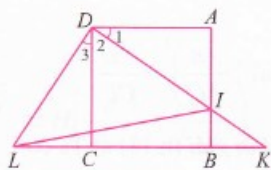
Lời giải (h.6) Ta có $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_3$ (cùng phụ với $\widehat{D}_2$).

$$\cos \widehat{D}_1 = \frac{DA}{DI} \text{ và } \cos \widehat{D}_3 = \frac{DC}{DL}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{DA}{DI} = \frac{DC}{DL}$$

$$\Rightarrow DI = DL \text{ (vì } DA = DC).$$

Vậy $\triangle DIL$ vuông cân tại D (đpcm).



Hình 6

Bài toán 7. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại đỉnh A . BD là đường trung tuyến. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC tại E . Chứng minh rằng $EB = 2EC$.

Lời giải (h.7) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CA = CK$. Kéo dài AH cắt BK tại M .

$$\text{Đặt } AB = 2a$$

$$\Rightarrow AD = DC = a, CK = 2a, AK = 4a$$

$$\text{Ta có: } \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 \text{ (cùng phụ với } \widehat{ADB})$$

$$\tan \widehat{B}_1 = \frac{AD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}; \tan \widehat{K} = \frac{AB}{AK} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \tan \widehat{B}_1 = \tan \widehat{K} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{K} = \widehat{A}_1$$

$$\Rightarrow \triangle MAK \text{ cân tại } M, \text{ mà } CA = CK$$

$$\Rightarrow MC \perp AK \Rightarrow MC \parallel AB \Rightarrow \begin{cases} MB = MK \\ CA = CK \end{cases}$$

$$\Rightarrow E \text{ là trọng tâm của } \triangle ABK \Rightarrow EB = 2EC \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 8. Cho $\triangle ABC$ có ba góc đều nhọn. Các đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Trên đoạn thẳng HB và HC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ là tam giác cân.

Lời giải (h.8) Ta có

$$\cos \widehat{A} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow AD \cdot AC = AE \cdot AB$$

$$\Rightarrow AM^2 = AN^2$$

$$\Rightarrow AM = AN. \text{ Vậy } \triangle AMN \text{ cân tại } A.$$

Bài toán 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$; $BC = b$ ($a > b$). Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = BC = b$. Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt CD tại N . Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt MN tại K . Chứng minh rằng $\widehat{NDK} = 45^\circ$.

Lời giải (h.9) Dễ thấy

$$\widehat{A}_1 = \widehat{K}_1 \text{ (cùng phụ với } \widehat{B}_1)$$

$$\tan \widehat{A}_1 = \frac{b}{a}; \tan \widehat{K}_1 = \frac{b}{MK}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b}{MK}$$

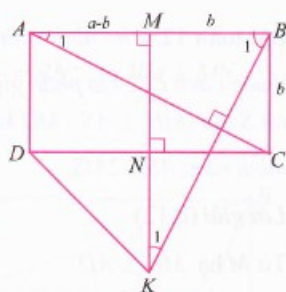
$$\Rightarrow a = MK \Rightarrow DC = KM$$

$$\Rightarrow DC - NC = KM - NM$$

$$(MBCN \text{ là hình vuông})$$

$$\Rightarrow DN = NK.$$

$$\text{Vậy } \triangle NDK \text{ vuông cân tại } N \Rightarrow \widehat{NDK} = 45^\circ.$$



Hình 9

Bài toán 10. Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Trên tia phân giác Oz của $\widehat{xOy}$ lấy một điểm M cố định. Một đường thẳng qua M cắt Ox tại A và Oy tại B . Chứng minh biểu thức $Q = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$ không đổi khi đường thẳng AB luôn thay đổi.

Lời giải (h.10)

$$\text{Kẻ } MH \perp Ox,$$

$$\text{đặt } MH = a \text{ để thấy}$$

$$MH = \frac{1}{2} OM = a$$

$$(\triangle HOM \text{ vuông cân}).$$

$$\text{Ta có: } \tan \widehat{A} = \frac{OB}{OA} = \frac{HM}{HA} \Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{a}{OA - a}, \text{ suy ra}$$

$$OA \cdot OB - a \cdot OB = a \cdot OA \Rightarrow OA \cdot OB = a \cdot (OA + OB).$$

$$\text{Từ đó } \frac{1}{a} = \frac{OA + OB}{OA \cdot OB} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Bài toán 11. Cho $\triangle ABC$ ($AB = AC$). M là trung điểm của BC . Kẻ $MH \perp AC$. Gọi I là trung điểm của MH . Chứng minh rằng $AI \perp BH$.

Lời giải (h.11) Kẻ $BD \perp AC$.

$$\text{Ta có } \widehat{C} = \widehat{M}_2 \text{ (cùng phụ với } \widehat{M}_1).$$

$$\text{Suy ra: } \cos \widehat{C} = \cos \widehat{M}_2$$

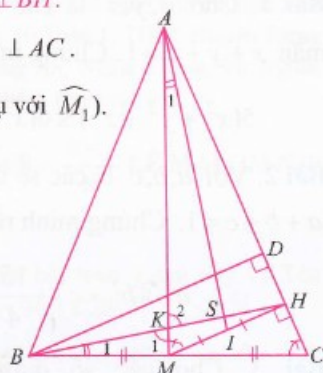
$$\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{MH}{AM}$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{2BC} = \frac{MH}{2AM}$$

$$\Rightarrow \frac{HC}{BC} = \frac{IM}{AM}$$

$$\Rightarrow \triangle HCB \sim \triangle IMA \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$$

$$\Rightarrow AI \perp BH \text{ tại } S \text{ (đpcm)}.$$



Hình 11

Bài toán 12. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy một điểm M thuộc cạnh BC . Tia phân giác của $\widehat{DAM}$ cắt cạnh CD tại S . Kẻ $MH \perp AS$, MH kéo dài cắt AD tại E . Chứng minh rằng $AS \leq 2MS$.

Lời giải (h.12)

Từ M hạ $MK \perp AD$.

Vì $AH \perp ME$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$,

nên $\triangle AEM$ cân tại A , suy ra:

$EM = 2HM$. Mà $MS \geq HM$

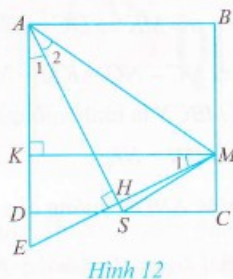
$\Rightarrow 2SM \geq 2HM \Rightarrow 2SM \geq EM$

Dễ thấy $\widehat{A_1} = \widehat{M_1} \Rightarrow \cos \widehat{A_1} = \cos \widehat{M_1}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AS} = \frac{MK}{ME} \Rightarrow AS = ME$ (vì $AD = MK$)

Từ (1) và (2) suy ra: $AS \leq 2MS$ (đpcm).

Bài toán 13. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$; $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Gọi D ; E lần lượt là hình chiếu của H trên AB ; AC . Chứng minh rằng:



Hình 12

(1)

(2)

$$a) \left(\frac{AB}{AC} \right)^3 = \frac{BD}{CE}$$

$$b) AH^3 = HD \cdot HE \cdot BC.$$

Lời giải (h.13) a) Ta có:

$$\left. \begin{aligned} AB^2 &= BH \cdot BC \\ AC^2 &= CH \cdot BC \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 = \frac{BH}{CH}$$

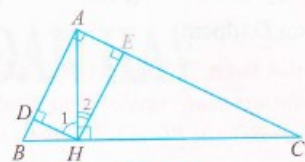
$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{AC} \right)^4 = \frac{BH^2}{CH^2} = \frac{BD \cdot AB}{CE \cdot AC} \Rightarrow \left(\frac{AB}{AC} \right)^3 = \frac{BD}{CE}.$$

$$b) \text{ Ta có: } \cos \widehat{H_1} = \frac{HD}{AH} = \frac{AB}{BC} \text{ (vì } \widehat{H_1} = \widehat{B} \text{)}$$

$$\cos \widehat{H_2} = \frac{HE}{AH} = \frac{AC}{BC} \text{ (vì } \widehat{H_2} = \widehat{C} \text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{HD \cdot HE}{AH^2} = \frac{AB \cdot AC}{BC^2} = \frac{AH \cdot BC}{BC^2} = \frac{AH}{BC}$$

$$\Rightarrow AH^3 = HD \cdot HE \cdot BC \text{ (đpcm).}$$



Hình 13

PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG BẬC...

(Tiếp theo trang 3)

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$5(x^2 + y^2 + z^2) \leq 6(x^3 + y^3 + z^3) + 1.$$

Bài 2. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{15}{4}abc \geq \frac{1}{4}.$$

Bài 3. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$7(xy + yz + zx) \leq 2 + 9xyz.$$

Bài 5. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c.$$

Bài 6. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq 3$.

Bài 7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

Bài 8. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 3xyz \leq 9.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2017 – 2018

VÒNG 1

(Dành cho tất cả các thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1. (1 điểm) Biết a và b là các số dương, $a \neq b$ và

$$\left[\frac{(a+2b)^2 - (b+2a)^2}{a+b} \right] : \left[\frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{a-b} - 3ab \right] = 3.$$

Tính $S = \frac{1+2ab}{a^2+b^2}$.

Câu 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình $(x^2 - 6x + 5)(\sqrt{x-2} - x + 4) = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x+2y} - 3) = 0 \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6 \end{cases}$.

Câu 3. (1,5 điểm) Cho phương trình $(x+m)^2 - 5(x+m) + 6 = 0$ (1)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi số thực m .

Tính $S = (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 + 5(x_1 + x_2 + 2m)$.

b) Biết $x_1 < x_2$, tìm m sao cho $x_2 < 1$ và $x_1^2 + 2x_2 = 2(m-1)$.

Câu 4. (2 điểm)

a) Nam kể với Bình rằng ông Nam có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ được chia thành bốn phần; hai phần (gồm các hình vuông $AMIQ$ và $INCP$ với M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA) để trồng các loại rau sạch, các phần còn lại trồng hoa. Diện tích phần trồng rau sạch là $1200m^2$ và phần để trồng hoa là $1300m^2$. Bình nói: “Chắc chắn bạn bị nhầm rồi!”. Nam: “Bạn nhanh thật! Mình đã nói nhầm phần

diện tích. Chính xác là phần trồng rau sạch có diện tích $1300m^2$, còn lại $1200m^2$ trồng hoa”. Hãy tính cạnh hình vuông $AMIQ$ (biết $AM < MB$) và giải thích vì sao Bình lại biết Nam bị nhầm?

b) Lớp 9T có 30 bạn, mỗi bạn dự định đóng góp mỗi tháng 70 000 đồng và sau 3 tháng sẽ đủ tiền mua tặng cho mỗi em ở “Mái ấm tình thương X” ba gói quà (giá tiền các món quà đều như nhau). Khi các bạn đóng đủ số tiền như dự trù thì “Mái ấm tình thương X” đã nhận chăm sóc thêm 9 em và giá tiền của mỗi món quà lại tăng thêm 5% nên chỉ tặng được mỗi em hai gói quà. Hỏi có bao nhiêu em của “Mái ấm tình thương X” được nhận quà?

Câu 5. (3 điểm) Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) tâm O , bán kính R ; $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$, H là trực tâm. AH, BH, CH lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P .

a) Tính AC theo R . Tính số đo $\widehat{HPN}$ và $\frac{MP}{MN}$.

b) Dựng đường kính AD, HD cắt (T) tại E (E khác D) và cắt BC tại F . Chứng minh các điểm A, N, H, P, E cùng thuộc một đường tròn và F là trung điểm của HD .

c) Chứng minh $AD \perp NP$. Tia OF cắt (T) tại I , chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle HBC$ và AI đi qua trung điểm của MP .

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh chuyên Toán; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2 điểm) Cho phương trình

$$x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 4m + 1 = 0 \quad (1)$$

a) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Chứng minh rằng $\left| \frac{x_1 + x_2}{2} \right| < 1$.

b) Giả sử các nghiệm x_1, x_2 khác 0, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2 \geq |x_1| + |x_2|.$$

Câu 2. (2 điểm) Cho x, y là hai số nguyên với $x > y > 0$.

a) Chứng minh rằng nếu $x^3 - y^3$ chia hết cho 3 thì $x^3 - y^3$ chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng nếu $x^3 - y^3$ chia hết cho $x + y$ thì $x + y$ không là số nguyên tố.

c) Tìm tất cả những giá trị k nguyên dương sao cho $x^k - y^k$ chia hết cho 9 với mọi x, y mà xy không chia hết cho 3.

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Cho ba số $a, b, c \geq -2$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 0$. Chứng minh rằng $a = b = c = 0$.

b) Trên mặt phẳng Oxy , cho ba điểm A, B, C phân biệt với $OA = OB = OC = 1$. Biết rằng $x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + 6x_A x_B x_C = 0$.

Chứng minh rằng $\min\{x_A, x_B, x_C\} < -\frac{1}{3}$ (kí hiệu x_M là hoành độ của điểm M).

Câu 4. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với tâm O . Gọi D là một điểm thay đổi trên cạnh BC (D khác B, C). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ACD lần lượt cắt AC và AB tại E và F (E, F khác A). Gọi K là giao điểm của BE và CF .

a) Chứng minh rằng tứ giác $AEKF$ nội tiếp.

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng nếu A, O, D thẳng hàng thì HK song song với BC .

c) Ký hiệu S là diện tích tam giác KBC . Chứng minh rằng

$$\text{Khi } D \text{ thay đổi trên cạnh } BC \text{ ta luôn có } S \leq \left(\frac{BC}{2} \right)^2 \tan \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng $BF \cdot BA - CE \cdot CA = BD^2 - CD^2$ và $ID \perp BC$.

Câu 5. (1 điểm) Lớp 9A có 6 học sinh tham gia một kỳ thi toán và nhận được 6 điểm số khác nhau là các số nguyên từ 0 đến 20. Gọi m là trung bình cộng các điểm số của 6 học sinh trên. Ta nói rằng hai học sinh (trong 6 học sinh trên) lập thành một cặp “hoàn hảo” nếu như trung bình cộng điểm số của hai em đó lớn hơn m .

a) Chứng minh rằng không thể chia 6 học sinh trên thành 3 cặp mà mỗi cặp đều “hoàn hảo”.

b) Có thể có được nhiều nhất là bao nhiêu cặp “hoàn hảo”.

NGUYỄN ĐỨC TẤN – NGUYỄN ANH HOÀNG
(TP. Hồ Chí Minh) *Giải thiệ*

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN THPT TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1. a) Ta có: $ab + bc + ca =$

$$\frac{1}{2}[(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] = \frac{1}{2}(9 - 29) = -10.$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \\ = (-10)^2 - 2 \cdot 11 \cdot 3 = 34.$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= 3 \cdot (29 + 10) = 117.$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 117 + 33 = 150.$$

$$\text{Do đó: } a^5 + b^5 + c^5 =$$

$$= (a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$- (a^3b^2 + a^3c^2 + a^2b^3 + b^3c^2 + a^2b^3 + b^2c^3)$$

$$= (a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$- [(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(a + b + c) - abc(ab + bc + ca)] \\ = 150 \cdot 29 - [34 \cdot 3 - 11 \cdot (-10)]$$

$$= 4350 - (102 + 110) = 4350 - 212 = 4138.$$

b) Ta có: $(m+n)^2 < (m+n)^2 + 3m + n < (m+n+2)^2$,
với $m, n \in \mathbb{N}^*$. Do đó: $(m+n)^2 < A < (m+n+2)^2$.
Mà A là số chính phương nên: $A = (m+n+1)^2$.

$$\text{Vậy: } (m+n)^2 + 3m + n = (m+n+1)^2$$

$$\Rightarrow 3m + n = 2(m+n) + 1 \Rightarrow m = n + 1.$$

$$\text{Từ đó } n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) = m(n^2 - n + 1) : m.$$

Câu 2. a) ĐK: $x \geq \frac{1}{3}$. Ta có:

$$2(x+2)\sqrt{3x-1} = 3x^2 - 7x - 3$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + 2(x+2)\sqrt{3x-1} + 3x-1 = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2+\sqrt{3x-1})^2 = 4x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2+\sqrt{3x-1} = 2x \\ x+2+\sqrt{3x-1} = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x-1} = x-2 \\ \sqrt{3x-1} = -3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x-1 = (x-2)^2 \end{cases}$$

(PT $\sqrt{3x-1} = -3x-2$ vô nghiệm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}.$$

Vậy nghiệm của PT đã cho là: $x = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$.

$$\text{b) } \begin{cases} x + \frac{1}{y} - \frac{10}{x} = -1 \\ 20y^2 - xy - y = 1 \end{cases} \quad (\text{ĐK: } xy \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{y} = \frac{10}{x} \\ xy + y + 1 = 20y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + \frac{x}{y} = 10 \\ \frac{x}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 20 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } v = \frac{1}{y}. \text{ Hệ PT trở thành: } \begin{cases} x^2 + x + xv = 10 \\ xv + v + v^2 = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+v)^2 + (x+v) = 30$$

$$\Leftrightarrow (x+v+6)(x+v-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow v = -6 - x \text{ hoặc } v = 5 - x.$$

$$\text{Nếu } v = -6 - x \text{ thì } \begin{cases} x^2 + x + x(-6-x) = 10 \\ v = -6 - x \end{cases}$$

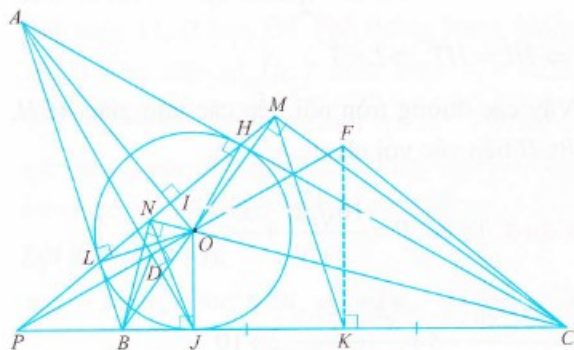
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 10 \\ v = -6 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \frac{1}{y} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } v = 5 - x \text{ thì } \begin{cases} x^2 + x + x(5-x) = 10 \\ v = 5 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 10 \\ v = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ v = \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ tứ giác $BLNO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ONB} = \widehat{OLB} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{OMC} = \widehat{ONB} = 90^\circ$, nên tứ giác $BCMN$ nội tiếp.



b) Gọi P là giao điểm của OD và LH , I là giao điểm của OA và LH , K là trung điểm của BC .

Từ $\triangle ODA \sim \triangle OIP$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OD}{OI} = \frac{OA}{OP} \Rightarrow OI \cdot OA = OD \cdot OP.$$

Vì $\triangle HOA$ vuông tại H , HI là đường cao nên:

$$OI \cdot OA = OH^2.$$

Do đó: $OD \cdot OP = OI \cdot OA = OH^2 = OJ^2$

$$\Rightarrow \triangle OJP \sim \triangle ODJ \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OJP} = \widehat{ODJ} = 90^\circ, \text{ nên } P \in BC.$$

Ta có $\widehat{BJN} = \widehat{JNO} + \widehat{JCO} = \widehat{JBO} + \widehat{JCO}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} = \widehat{KBM} + \widehat{OCH} \\ &= \widehat{KMB} + \widehat{OMH} = \widehat{KMH}. \end{aligned}$$

Từ $\widehat{BJN} = \widehat{KMH} \Rightarrow$ tứ giác $MNJK$ nội tiếp.

$$\triangle PNJ \sim \triangle PKM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{PN}{PK} = \frac{PJ}{PM}$$

$$\Rightarrow PK \cdot PJ = PN \cdot PM.$$

Ta có tứ giác $KJDF$ nội tiếp, nên $PK \cdot PJ = PD \cdot PF$.

Tứ giác $BCMN$ nội tiếp nên $PM \cdot PN = PB \cdot PC$.

Do đó: $PD \cdot PF = PB \cdot PC$.

Xét $\triangle PBD$ và $\triangle PFC$ có: $\widehat{BPD}$ chung, $\frac{PD}{PC} = \frac{PB}{PF}$

$$\Rightarrow \triangle PBD \sim \triangle PFC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{PBD} = \widehat{PFC}.$$

Vậy tứ giác $BCFD$ nội tiếp. Do vậy bốn điểm B, D, F, C cùng thuộc một đường tròn.

Câu 6. Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Có 1 điểm đã cho là đầu mút của ít nhất 4 đoạn thẳng màu xanh. Mà không có tam giác nào có 3 cạnh màu xanh. Do đó 4 đầu mút còn lại tạo thành 4 điểm mà 6 đoạn thẳng nối chúng đều màu đỏ.

Trường hợp 2: Cả 9 điểm đều là đầu mút của tối đa 3 đoạn thẳng màu xanh. Suy ra 9 điểm đều là đầu mút của ít nhất 5 đoạn thẳng màu đỏ.

Giả sử trong 9 điểm, mọi điểm đều kẻ từ đó ra được chỉ đúng 5 đoạn thẳng màu đỏ.

Gọi A là tập hợp các đầu mút màu đỏ. Do mỗi đoạn thẳng màu đỏ có 2 đầu mút màu đỏ nên số phần tử của tập hợp A là một số chẵn. Nhưng khi đó số phần tử của tập hợp A là 5. $9 = 45$ (vô lý!). Do đó có 1 điểm M trong 9 điểm trên là đầu mút của ít nhất 6 đoạn thẳng màu đỏ.

Gọi B là tập hợp các đầu mút còn lại của các đoạn thẳng màu đỏ nối với M . Ta chứng minh trong B luôn có một tam giác có 3 cạnh màu đỏ. Thật vậy, xét 1 điểm N tùy ý trong B , có ít nhất 5 đoạn thẳng nối với N . Trong 5 đoạn thẳng này có ít nhất 3 đoạn thẳng cùng màu.

- Trường hợp có 3 đoạn thẳng màu đỏ nối với N , tam giác tạo bởi 3 đầu mút còn lại luôn có 1 cạnh màu đỏ, cạnh đỏ này cùng với 2 đoạn thẳng nối với N tạo thành một tam giác có 3 cạnh màu đỏ.
- Trường hợp có 3 đoạn thẳng màu xanh nối với N , tam giác tạo bởi 3 đầu mút còn lại là tam giác có 3 cạnh màu đỏ.

Tam giác này cùng với điểm M tạo thành hình có 4 đỉnh mà 6 đoạn thẳng nối chúng đều có màu đỏ.

NGUYỄN ĐỨC TÂN – NGUYỄN ANH HOÀNG
(TP. Hồ Chí Minh) *Giới thiệu*

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2018

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Có 7 tấm bìa ghi 7 chữ “HIỀN”, “TÀI”, “LÀ”, “NGUYỄN”, “KHÍ”, “QUỐC”, “GIA”. Một người xếp ngẫu nhiên 7 tấm bìa cạnh nhau. Tính xác suất để khi xếp các tấm bìa được dòng chữ “HIỀN TÀI LÀ NGUYỄN KHÍ QUỐC GIA”.

- A. $\frac{1}{25}$. B. $\frac{1}{5040}$. C. $\frac{1}{24}$. D. $\frac{1}{13}$.

Câu 2. Cho phương trình

$$\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}.$$

Khi đặt $t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

- A. $4t^2 - 8t + 3 = 0$. B. $4t^2 - 8t - 3 = 0$.
C. $4t^2 + 8t - 5 = 0$. D. $4t^2 - 8t + 5 = 0$.

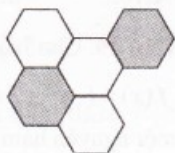
Câu 3. Trong các hàm số dưới đây, hàm nào **không** nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = -x^3 + 2x^2 - 7x$. B. $y = -4x + \cos x$.
C. $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$. D. $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}x}\right)^x$.

Câu 4. Với hai số thực dương a, b tùy ý và $\frac{\log_3 5 \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. $a = b \log_6 2$. B. $a = 36b$.
C. $2a + 3b = 0$. D. $a = b \log_6 3$.

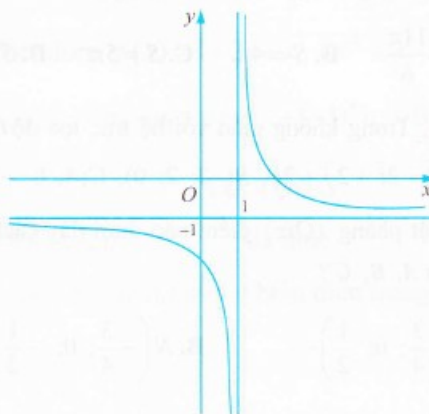
Câu 5. Quả bóng đá được dùng thi đấu tại các giải bóng đá Việt Nam tổ chức có chu vi 68,5cm. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu



trắng và đen, mỗi miếng có diện tích $49,83\text{cm}^2$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên?

- A. ≈ 40 (miếng da) B. ≈ 20 (miếng da)
C. ≈ 35 (miếng da) D. ≈ 30 (miếng da)

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



- A. $b < 0 < a$. B. $0 < b < a$.
C. $b < a < 0$. D. $0 < a < b$.

Câu 7. Cho hai hàm số $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 2^x$. Xét các mệnh đề sau:

- (I). Đồ thị hai hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.
(II). Tập xác định của hai hàm số trên là $\mathbb{R}$.
(III). Đồ thị hai hàm số cắt nhau tại đúng 1 điểm.
(IV). Hai hàm số đều đồng biến trên tập xác định của nó.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 8. Cho hình lập phương có cạnh bằng 40cm và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình lập phương và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính $S = S_1 + S_2$ (cm²).

- A. $S = 4(2400 + \pi)$. B. $S = 2400(4 + \pi)$.
C. $S = 2400(4 + 3\pi)$. D. $S = 4(2400 + 3\pi)$.

Câu 9. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần thực âm và phần ảo dương của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$.

Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = i^{2017} z_0$?

A. $M(3; -1)$.

B. $M(3; 1)$.

C. $M(-3; 1)$.

D. $M(-3; -1)$.

Câu 10. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.

A. $S = \frac{11\pi}{6}$. B. $S = 4\pi$. C. $S = 5\pi$. D. $S = \frac{7\pi}{6}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $B(-2; 2; 0)$, $C(4; 1; -1)$.

Trên mặt phẳng (Oxz) điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A, B, C ?

A. $M\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$. B. $N\left(-\frac{3}{4}; 0; -\frac{1}{2}\right)$.

C. $P\left(\frac{3}{4}; 0; -\frac{1}{2}\right)$. D. $Q\left(-\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 4$.

B. $a + b = 2$.

C. $a + b = -4$.

D. $a + b = -2$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $S.AHK$ và $S.ACD$ với H và K lần lượt là trung điểm của SC và SD . Tính độ dài đường cao h của khối chóp $S.ABCD$ và tỷ số $k = \frac{V_1}{V_2}$.

A. $h = a, k = \frac{1}{4}$.

B. $h = a, k = \frac{1}{6}$.

C. $h = 2a, k = \frac{1}{8}$.

D. $h = 2a, k = \frac{1}{3}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \ln^2(x^2 - 2x + 4)$. Tìm các giá trị của x để $f'(x) > 0$.

A. $x \neq 1$.

B. $x > 0$.

C. $x > 1$.

D. mọi x .

Câu 15. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}, \text{ với } a \neq 0. \text{ Tìm giá trị của}$$

a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.

A. $a = 1$. B. $a = \frac{1}{2}$. C. $a = -1$. D. $a = -\frac{1}{2}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như dưới đây:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m < 0$.

B. $m > 0$.

C. $0 < m < \frac{27}{4}$.

D. $m > \frac{27}{4}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho $A(1; 3; 2)$ là trung điểm của cạnh MN . Tính độ dài đoạn MN .

A. $MN = 4\sqrt{33}$.

B. $MN = 2\sqrt{26,5}$.

C. $MN = 4\sqrt{16,5}$.

D. $MN = 2\sqrt{33}$.

Câu 18. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$, với $x > 0$ nếu biết rằng $C_n^2 - C_n^4 = 44$.

A. 165.

B. 238.

C. 485.

D. 525.

Câu 19. Cho hai hàm số $F(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ và $f(x) = (-x^2 + 3x + 6)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

A. $a = 1, b = -7$.

B. $a = -1, b = -7$.

C. $a = -1, b = 7$.

D. $a = 1, b = 7$.

Câu 20. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $AA' = \frac{3a}{2}$. Biết hình chiếu

vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC . Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{2a^3}{3}$.
C. $V = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. D. $V = a^3 \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$.

Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.
B. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$.
C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x=1$.
D. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=1$.

Câu 22. Biết đường thẳng $y = -\frac{9}{4}x - \frac{1}{24}$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = \frac{13}{12}$. B. $y_0 = \frac{12}{13}$.
C. $y_0 = -\frac{1}{2}$. D. $y_0 = -2$.

Câu 23. Cho cấp số cộng (u_n) và gọi S_n là tổng n số đầu tiên của nó. Biết $S_7 = 77$ và $S_{12} = 192$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đó.

- A. $u_n = 5 + 4n$. B. $u_n = 3 + 2n$.
C. $u_n = 2 + 3n$. D. $u_n = 4 + 5n$.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3)$.

Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

- A. $l = 2\sqrt{13}$. B. $l = 2\sqrt{41}$.
C. $l = 2\sqrt{26}$. D. $l = 2\sqrt{11}$.

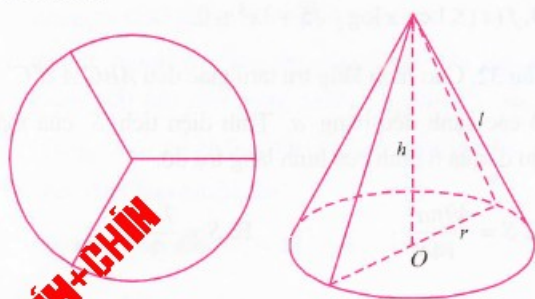
Câu 25. Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x - \sqrt{x^2 - 3x}}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn (C') : $x^2 + y^2 + 2(m-2)y - 6x + 12 + m^2 = 0$ và (C) : $(x+m)^2 + (y-2)^2 = 5$. Vectơ $\vec{v}$ nào dưới đây là vectơ của phép tịnh tiến biến (C) thành (C') ?

- A. $\vec{v} = (2; 1)$. B. $\vec{v} = (-2; 1)$.
C. $\vec{v} = (-1; 2)$. D. $\vec{v} = (2; -1)$.

Câu 27. Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60cm thành ba miền hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu?



- A. $V = \frac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít. B. $V = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.
C. $V = \frac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. D. $V = \frac{160\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) có tung độ là nghiệm phương trình $2f'(x) - x.f''(x) - 6 = 0$?

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 29. Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông An trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu?

- A. 108 triệu đồng. B. 54 triệu đồng.
C. 168 triệu đồng. D. 90 triệu đồng.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$, $A(2; 1; 4)$.

Gọi $H(a; b; c)$ là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^3 + b^3 + c^3$.

- A. $T = 8$. B. $T = 62$. C. $T = 13$. D. $T = \sqrt{5}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = 5^x \cdot 8^{2x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \log_2 5 + 2x^3 \leq 0$.
B. $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x + 6x^3 \log_5 2 \leq 0$.
C. $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \log_2 5 + 3x^3 \leq 0$.
D. $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \log_2 \sqrt{5} + 3x^3 \leq 0$.

Câu 32. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a . Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

- A. $S = \frac{49\pi a^2}{144}$. B. $S = \frac{7a^2}{3}$.
C. $S = \frac{7\pi a^2}{3}$. D. $S = \frac{49a^2}{144}$.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị là số dương?

- A. 2. B. 9. C. 3. D. 7.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)dx = 2$; $\int_0^3 f(x)dx = 6$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|)dx$.

- A. $I = \frac{2}{3}$. B. $I = 4$. C. $I = \frac{3}{2}$. D. $I = 6$.

Câu 35. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC , d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) . Tính $d = d_1 + d_2$.

- A. $d = \frac{2a\sqrt{22}}{11}$. B. $d = \frac{2a\sqrt{22}}{33}$.
C. $d = \frac{8a\sqrt{22}}{33}$. D. $d = \frac{8a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 36. Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y)$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

- A. $a+b = 6$. B. $a+b = 11$.
C. $a+b = 4$. D. $a+b = 8$.

Câu 37. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

- A. $S = \frac{343}{12}$. B. $S = \frac{793}{4}$.
C. $S = \frac{397}{4}$. D. $S = \frac{937}{12}$.

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

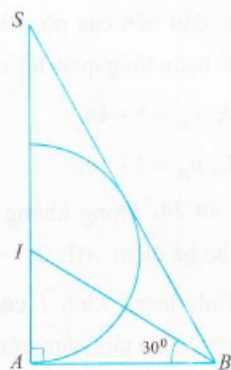
- A. $m > -3$. B. $m \leq 0$. C. $m \leq -3$. D. $m > 0$.

Câu 39. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp

$D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$. Tính giá trị T của $m.M$.

- A. $T = \frac{1}{9}$. B. $T = \frac{3}{2}$. C. $T = 0$. D. $T = -\frac{3}{2}$.

Câu 40. Cho tam giác SAB vuông tại A , $\widehat{ABS} = 60^\circ$, đường phân giác trong của $\widehat{ABS}$ cắt SA tại điểm I . Vẽ nửa đường tròn tâm I bán kính IA (như hình vẽ). Cho ΔSAB và nửa đường tròn trên cùng quay quanh SA tạo nên các khối tròn xoay có thể tích tương ứng V_1, V_2 .



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $4V_1 = 9V_2$. B. $9V_1 = 4V_2$.
C. $V_1 = 3V_2$. D. $2V_1 = 3V_2$.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\int_1^k (2x-1)dx = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A. $\begin{cases} k=1 \\ k=2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} k=1 \\ k=-2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} k=-1 \\ k=-2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} k=-1 \\ k=2 \end{cases}$

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 43. Một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = a$, diện tích S_1 . Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai là $A_1B_1C_1D_1$ có diện tích S_2 . Tiếp tục như thế, ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích S_3 và cứ tiếp tục như thế, ta được diện tích $S_4, S_5, \dots$. Tính $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$.

A. $S = \frac{2^{100} - 1}{2^{99} a^2}$ B. $S = \frac{a(2^{100} - 1)}{2^{99}}$

C. $S = \frac{a^2(2^{100} - 1)}{2^{99}}$ D. $S = \frac{a^2(2^{99} - 1)}{2^{99}}$

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$.

- A. $m > 9$. B. $m < 2$. C. $0 < m < 1$. D. $m \geq 1$.

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; 2; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với điểm gốc tọa độ sao cho M là trọng tâm tam giác ABC . Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) .

A. $3x + 2y + z + 14 = 0$. B. $2x + y + 3z + 9 = 0$.

C. $3x + 2y + z - 14 = 0$. D. $2x + y + z - 9 = 0$.

Câu 46. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Biết tập hợp các điểm A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4; 3)$ và bán kính $R = 3$. Đặt M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F = 4a + 3b - 1$. Tính giá trị $M + m$.

A. $M + m = 63$. B. $M + m = 48$.

C. $M + m = 50$. D. $M + m = 41$.

Câu 47. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$$

và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

A. $a + b = 16$.

B. $a + b = 11$.

C. $a + b = 14$.

D. $a + b = 13$.

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$.

Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

có bán kính $R = \sqrt{19}$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$

và mặt phẳng $(P): 3x - y - 3z - 1 = 0$. Trong các số $\{a; b; c; d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a + b + c + d = 43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc mặt phẳng (P) ?

A. $\{-12; -14; 75\}$. B. $\{6; 10; 20; 7\}$.

C. $\{-10; 4; 2; 47\}$. D. $\{3; 5; 6; 29\}$.

Câu 49. Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \cdot \dots \cdot f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \cdot \dots \cdot f(2n)}$.

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$.

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{2}$.

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{3}$.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 50. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$

thỏa mãn $\begin{cases} f(x) \cdot f(a-x) = 1 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; a] \end{cases}$ và $\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}$,

trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b + c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11; 22)$.

B. $(0; 9)$.

C. $(7; 21)$.

D. $(2017; 2020)$.

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)



SỬ DỤNG ĐẲNG THỨC ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN NGỌC TỨ
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Khi làm xong hay đọc xong một lời giải của một bài BĐT đẹp có ai tự hỏi tác giả bài đó lấy ý tưởng từ đâu, làm sao lại có được lời giải đẹp như vậy? Trong khi làm việc với BDT tôi thấy có khá nhiều bài toán hay có thể ý tưởng bắt nguồn từ các đẳng thức đơn giản, từ các đẳng thức ban đầu ta có thể tạo ra nhiều BDT khác. Bài viết này tôi xin giới thiệu một vài đẳng thức đơn giản dùng để chứng minh BDT. Đối với những bạn mới làm quen BDT, tôi nghĩ bài viết này sẽ giúp ích rất nhiều cho các bạn trong quá trình làm toán BDT sau này.

1. MỘT SỐ ĐẲNG THỨC

1. Đẳng thức 1

$$a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$$

$$b^2 + ab + bc + ca = (b+c)(b+a)$$

$$c^2 + ab + bc + ca = (c+a)(c+b)$$

2. Đẳng thức 2

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$$

Đẳng thức này có một số dạng khác như sau

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \quad (2.1)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc \quad (2.2)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc \quad (2.3)$$

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)} + \frac{bc}{(b+a)(c+a)} + \frac{ca}{(c+b)(a+b)} + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 1 \quad (2.4)$$

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 1 \quad (2.5)$$

Đề ý dạng (2.4), chúng ta thấy đối với một số bài toán mà đầu bài cho là: cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ thì chúng ta có thể đặt

$$(x, y, z) = \left(\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}\right) \quad \text{với } a, b, c > 0;$$

nếu đầu bài cho là: cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ thì chúng ta có thể đặt

$$(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}, \sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}}, \sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}}\right)$$

với $a, b, c > 0$.

3. Đẳng thức 3

$$a^2 + ab + b^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+b+c)$$

$$b^2 + bc + c^2 + ab + bc + ca = (b+c)(a+b+c)$$

$$c^2 + ca + a^2 + ab + bc + ca = (c+a)(a+b+c)$$

4. Đẳng thức 4 (đẳng thức tương đương)

$$ab + bc + ca + abc = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1,$$

từ đó ta có BDT tương đương

$$ab + bc + ca + abc \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \geq 1$$

với $a, b, c > 0$. Dạng đẳng thức tương đương trên với dạng sau cơ bản là giống nhau:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2 \Leftrightarrow ab + bc + ca + 2abc = 1.$$

Việc chứng minh đẳng thức tương đương hết sức đơn giản, chỉ bằng biến đổi tương đương.

5. Đẳng thức 5

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Hai dạng tương đương với dạng trên

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] + 6abc$$

6. Một số đẳng thức khác

• Cho a, b, c là ba số khác nhau từng đôi một, ta có

$$\frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-c} \cdot \frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-a} \cdot \frac{1}{a-b} = 0 \quad (6.1)$$

Chứng minh: Ta có

$$\frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-c} \cdot \frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-a} \cdot \frac{1}{a-b} = 0$$

$$\Leftrightarrow c-a+a-b+b-c=0: \text{ đúng.}$$

• Cho a, b, c là ba số khác nhau từng đôi một, ta có

$$\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b} = -1 \quad (6.2)$$

Chứng minh: Đặt $x = \frac{a+b}{a-b}, y = \frac{b+c}{b-c}, z = \frac{c+a}{c-a}$.

Ta có $(x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1)$

$\Rightarrow xy + yz + zx = -1$. Suy ra đpcm.

• Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$, ta có

$$\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = 1 \quad (6)$$

Chứng minh: Do $abc = 1$ nên

$$\frac{1}{bc+c+1} = \frac{abc}{bc+c+abc} = \frac{abc}{ab(b+1)}$$

$$\frac{1}{ca+a+1} = \frac{abc}{ca+a+abc} = \frac{bc}{bc+c+abc} = \frac{bc}{ab+b+1}$$

Từ đây suy ra đpcm.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Trong khuôn khổ bài viết, tôi chỉ đưa ra một số bài toán áp dụng. Tôi hy vọng các bạn sẽ tìm tòi nghiên cứu thêm để có thể vận dụng linh hoạt các đẳng thức đó.

Bài 1. Cho ba số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=3$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{a^2+7} + \frac{b}{b^2+7} + \frac{c}{c^2+7} \leq \frac{3}{8}$.

Lời giải. Áp dụng đẳng thức 1 và BĐT Cauchy ta

$$\text{có } \frac{a}{a^2+7} = \frac{a}{a^2+ab+bc+ca+4} = \frac{a}{(a+b)(a+c)+4}$$

$$\leq \frac{a}{4\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right).$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{b}{b^2+7} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} \right); \quad \frac{c}{c^2+7} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} \right)$$

Cộng vế với vế ba BĐT trên ta được

$$\frac{a}{a^2+7} + \frac{b}{b^2+7} + \frac{c}{c^2+7}$$

$$\leq \frac{1}{8} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} \right) = \frac{3}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra nếu $a = b = c = 1$. $\square$

Nhận xét. Đây là bài toán đơn giản, dễ nhìn ra cách làm như trên. Trong đánh giá cuối, tác giả đã "cố ý" dựa vào

$$\text{đẳng thức đơn giản là } \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} = 3.$$

Bài 2. Cho ba số không âm thỏa mãn

$(a+b)(b+c)(c+a) = 2$. Chứng minh rằng

$$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \leq 1.$$

Lời giải. Giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Ta có

$$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \leq (a^2+bc)(b^2+ca)(bc+ab)$$

$$\leq (a^2+bc) \cdot \frac{1}{4} \cdot (b^2+ca+bc+ab)^2$$

$$\leq (a^2+bc) \cdot \frac{1}{4} \cdot (b+a)^2 (b+c)^2$$

$$= \frac{a^2+bc}{4(a+c)^2} (b+a)^2 (b+c)^2 (a+c)^2 = \frac{a^2+bc}{(a+c)^2}.$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{a^2+bc}{(a+c)^2} \leq 1$. Thật vậy

$$\frac{a^2+bc}{(a+c)^2} \leq 1 \Leftrightarrow a^2+bc \leq a^2+2ac+c^2$$

$$\Leftrightarrow bc \leq 2ac+c^2 \quad (\text{đúng do: } a \geq b \geq c \geq 0).$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1, c = 0$ và các hoán vị của nó. $\square$

Nhận xét. Đây là một bài toán khá hay và chặt, các bạn có thể tham khảo lời giải khác trong quyển sách "Phân loại và phương pháp giải toán Bất đẳng thức" (Vasile – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh).

Bài 3. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng $(a+b)(b+c)(c+a) \geq (a+1)(b+1)(c+1)$.

Lời giải. Áp dụng đẳng thức 2 và BĐT Cauchy ta có $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$

$$\begin{aligned}
&= (a+b+c) \frac{ab+bc+ca}{3} + \frac{a+b+c}{3} (ab+bc+ca) \\
&\quad + \frac{1}{3} (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\
&\geq (a+b+c) \cdot \frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{3} + (ab+bc+ca) \frac{3\sqrt[3]{abc}}{3} \\
&\quad + \frac{1}{3} 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} - 1 \\
&= a+b+c+ab+bc+ca + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 - 1 \\
&= a+b+c+ab+bc+ca+2 \\
&= a+b+c+ab+bc+ca+abc+1 = (a+1)(b+1)(c+1).
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra nếu $a=b=c=1$. $\square$

Bài 4. Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$ab\sqrt{ab} + bc\sqrt{bc} + ca\sqrt{ca} \leq abc + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{(a^2+bc)^2(b^2+ca)^2(c^2+ab)^2}{abc}}$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$$ab\sqrt{ab} + bc\sqrt{bc} + ca\sqrt{ca} \leq \sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)}.$$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)}$

$$\leq abc + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{(a^2+bc)^2(b^2+ca)^2(c^2+ab)^2}{abc}} \quad (1)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)}$

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}{(abc)^2}} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)} \\
&\leq 1 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)^2 \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2} \quad (2)
\end{aligned}$$

Đặt $(x, y, z) = \left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right) \Rightarrow x, y, z > 0$ và $xyz = 1$.

BĐT (2) trở thành $\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)}$

$$\leq 1 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2} \quad (3)$$

Áp dụng đẳng thức 2 ta có

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)(xy+yz+zx) = (x+y)(y+z)(z+x) + xyz \\
&= (x+y)(y+z)(z+x) + 1 = \left[\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}\right]^3 + 1 \\
&= \left[\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} + 1\right] \times \\
&\quad \times \left[\sqrt[3]{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2} - \sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} + 1\right] \\
&\leq \left[\frac{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} + \sqrt[3]{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2} - \sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} + 1}{2}\right]^2 \\
&= \left[1 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}\right]^3.
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra (3). Đẳng thức xảy ra nếu $a=b=c$. $\square$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\sqrt{b^2+bc+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+ab+b^2}} \\
&\geq \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}.
\end{aligned}$$

Lời giải 1. Áp dụng BĐT Cauchy và đẳng thức 3 ta

có $(a^2+ab+b^2)(ab+bc+ca) \leq \frac{1}{4}(a+b)^2(a+b+c)^2$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sqrt{a^2+ab+b^2}} \geq \frac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{(a+b+c)} \cdot \frac{c}{a+b}.$$

Làm tương tự rồi cộng các BĐT cùng chiều và sử dụng BĐT Schwarz ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc} \frac{c}{\sqrt{a^2+ab+b^2}} \geq \frac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{(a+b+c)} \cdot \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \\
&= \frac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{(a+b+c)} \cdot \sum_{cyc} \frac{a^2}{ab+ac} \\
&\geq \frac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{(a+b+c)} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. $\square$

Lời giải 2. Ta có: $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$$= \sum_{cyc} a^2(b+c) + 3abc = \sum_{cyc} a(b^2+bc+c^2).$$

Theo BĐT Holder ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} \right) \left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} \right) \times \\ & \times \left[\sum_{cyc} a(b^2+bc+c^2) \right] \geq (a+b+c)^3 \\ \Rightarrow & \left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} \right)^2 \geq \frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \\ & = \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. $\square$

Bài 6. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+8}+\sqrt{b^2+8}+\sqrt{c^2+8} \leq a+b+c+6$$

Lời giải. Áp dụng đẳng thức 4 ta có:

$$ab+bc+ca+abc=4 \Leftrightarrow \frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1.$$

Ta cũng có: $\frac{12}{a+2}+a-2=\frac{a^2+8}{a+2}$,

$$\frac{12}{b+2}+b-2=\frac{b^2+8}{b+2}, \quad \frac{12}{c+2}+c-2=\frac{c^2+8}{c+2}.$$

Do đó áp dụng BĐT Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} & 12 \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \right) + a+b+c-6 \\ & = \frac{a^2+8}{a+2} + \frac{b^2+8}{b+2} + \frac{c^2+8}{c+2} \geq \frac{(\sqrt{a^2+8}+\sqrt{b^2+8}+\sqrt{c^2+8})^2}{a+b+c+6}. \end{aligned}$$

Suy ra $a+b+c+6 \geq \sqrt{a^2+8}+\sqrt{b^2+8}+\sqrt{c^2+8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. $\square$

Nhận xét. Ở lời giải trên đã đánh giá khéo léo như sau:

Xét $\frac{\alpha}{a+2}+a-2=\frac{a^2+\alpha-4}{a+2}$, tương tự:

$$\frac{\alpha}{b+2}+b-2=\frac{b^2+\alpha-4}{b+2}, \quad \frac{\alpha}{c+2}+c-2=\frac{c^2+\alpha-4}{c+2}.$$

Giả sử chọn được số α sao cho

$$a^2+\alpha-4>0, b^2+\alpha-4>0, c^2+\alpha-4,$$

khi đó áp dụng BĐT Schwarz ta có

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \right) + a+b+c-6 \\ & = \frac{a^2+\alpha-4}{a+2} + \frac{b^2+\alpha-4}{b+2} + \frac{c^2+\alpha-4}{c+2} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{(\sqrt{a^2+\alpha-4}+\sqrt{b^2+\alpha-4}+\sqrt{c^2+\alpha-4})^2}{a+b+c+6}.$$

Ta chọn α sao cho

$$\alpha \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \right) + a+b+c-6 = a+b+c+6$$

ta được $\alpha=12$ (thỏa mãn $a^2+\alpha-4>0$, $b^2+\alpha-4>0$, $c^2+\alpha-4$).

Bài 7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.$$

Lời giải. Ta có $4=a^2+b^2+c^2+abc \geq ab+bc+ca+abc$

Áp dụng BĐT tương đương trong đẳng thức 4, ta

$$\text{có: } 4 \geq ab+bc+ca+abc \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \geq 1,$$

$$\text{suy ra } \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} \leq 1.$$

Sử dụng BĐT Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} 1 & \geq \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} = \frac{a^2}{a^2+2a} + \frac{b^2}{b^2+2b} + \frac{c^2}{c^2+2c} \\ & \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)} \Rightarrow a+b+c \geq ab+bc+ca. \end{aligned}$$

Sử dụng BĐT Cauchy ta có:

$$a+b+c \geq ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \quad (\text{đpcm}).$$

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta luôn có $(a^3+b^3+c^3-3abc)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)^3$.

Lời giải. Áp dụng đẳng thức 5: $(a+b+c)^3 =$

$$= a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc,$$

ta có: $(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$

$$= (a+b+c)^2 (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2$$

$$= (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) \times$$

$$\times (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2$$

Đặt $x=a^2+b^2+c^2, y=ab+bc+ca \Rightarrow x \geq 0, x \geq y$.

Ta cần chứng minh BĐT $(x+2y)(x-y)^2 \leq x^3$.

Xét hai trường hợp:

* TH1: $x = 0$, BĐT luôn đúng.

* TH2: $x \neq 0$, khi đó:

$$(x+2y)(x-y)^2 \leq x^3 \Leftrightarrow \left(1+2\frac{y}{x}\right)\left(1-\frac{y}{x}\right)^2 \leq 1.$$

Đặt $t = \frac{y}{x} \leq 1$, BĐT đã cho trở thành:

$$(1+2t)(1-t)^2 \leq 1 \Leftrightarrow t^2(2t-3) \leq 0.$$

BĐT này đúng do $t \leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 0$ hoặc $ab + bc + ca = 0$. $\square$

Bài 9. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn

$abc = \frac{1}{8}$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^3 \left(\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{b^3+1} + \frac{1}{c^3+1} \right) \geq 9.$$

Lời giải. Áp dụng đẳng thức 5, BĐT Cauchy và dùng giả thiết $abc = \frac{1}{8}$, ta có:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &\geq a^3 + b^3 + c^3 + 3 = (a^3+1) + (b^3+1) + (c^3+1) \\ &\Rightarrow (a+b+c)^3 \left(\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{b^3+1} + \frac{1}{c^3+1} \right) \\ &\geq [(a^3+1) + (b^3+1) + (c^3+1)] \left(\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{b^3+1} + \frac{1}{c^3+1} \right) \geq 9. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$. $\square$

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Khi thay thế a, b, c bởi $|a|, |b|, |c|$ tương ứng ta thấy $abc = |a| \cdot |b| \cdot |c| = 1$ và vế trái của BĐT không thay đổi nên ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp $a, b, c > 0$ là đủ. Xét $a, b, c > 0$. Áp dụng BĐT Cauchy và đẳng thức (6.3) ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{1}{a^2+2b^2+3} &= \sum_{cyc} \frac{1}{(a^2+b^2)+b^2+1+2} \\ &\leq \sum_{cyc} \frac{1}{2ab+2b+2} \leq \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{1}{ab+b+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra nếu $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ hoặc $(a, b, c) = (-1, -1, 1)$ và các hoán vị của nó. $\square$

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực khác nhau từng đôi một, chứng minh rằng

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3} + \frac{b^3-c^3}{(b-c)^3} + \frac{c^3-a^3}{(c-a)^3} \geq \frac{9}{4}.$$

Lời giải. Ta có $\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3} + \frac{b^3-c^3}{(b-c)^3} + \frac{c^3-a^3}{(c-a)^3} \geq \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+bc+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+ca+a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \\ &\quad + \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ca}{(c-a)^2} \geq \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } x = \frac{a+b}{a-b}, y = \frac{b+c}{b-c}, z = \frac{c+a}{c-a}$$

Áp dụng đẳng thức (6.2) ta có $xy + yz + zx = -1$.

Do đó $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$$+ y^2 + z^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2.$$

$$\text{Mặt khác } \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a} \right)^2 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} \geq 2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} - 1 \right) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ca}{(c-a)^2} \geq -\frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a} \right)^2 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} \geq 2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} + 1 \right) \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{5}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó suy ra } &\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \\ &+ \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ca}{(c-a)^2} \geq \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} = 0$. $\square$

Bài 12. (VMO, 2008) Cho ba số thực không âm a, b, c khác nhau từng đôi một, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{4}{ab+bc+ca}.$$

Lời giải 1. Giả sử $a > b > c \geq 0$. Áp dụng đẳng thức (6.1) và BĐT $(x+y)^2 \geq 4xy$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} &= \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 \\ &\geq 4 \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right) = \frac{4}{(a-c)(b-c)} \geq \frac{4}{ab+bc+ca}. \end{aligned}$$

Lời giải 2. Giả sử $a > b > c \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} (ab+bc+ca) \left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right) \\ \geq ab \left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) = ab \left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \right) \\ = ab \left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{(a-b)^2+2ab}{a^2b^2} \right) = 2 + \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 4. \end{aligned}$$

MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} + 1 \geq \frac{8}{3} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

Bài 2. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{3}{2}$.

Bài 3. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng $9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

Bài 4. (APMO, 1998) Cho các số dương a, b, c .

Chứng minh rằng: $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$.

Bài 5. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng

$$\text{a) } a+b+c \leq 3. \quad \text{b) } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3.$$

$$\text{c) } \left(\frac{a}{2a+bc} \right)^2 + \left(\frac{b}{2b+ca} \right)^2 + \left(\frac{c}{2c+ab} \right)^2 \geq \frac{1}{3}.$$

Bài 6. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng

$$\text{a) } a+b+c \geq 3 \text{ (Romania JBTST, 2014).}$$

$$\text{b) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a+b+c.$$

c) $a+b+c \geq ab+bc+ca$ (Indian IMO, 1998), (Việt Nam IMO, 1996), (India, 1996).

Bài 7. (India, 2002) Cho ba số dương a, b, c .

Chứng minh rằng $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b}$.

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right)^2 + \frac{4}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq 2$$

Bài 9. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} (a+1)\sqrt{(b+1)(c+1)} + (b+1)\sqrt{(c+1)(a+1)} + \\ + (c+1)\sqrt{(a+1)(b+1)} \geq a+b+c+9. \end{aligned}$$

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn

$a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a^2+b^2+c^2.$$

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+8} + \sqrt{b(b+8)} + \sqrt{c(c+8)} \leq a+b+c+6.$$

Bài 12. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab+bc+ca+2abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4a^3+4b^3+3c} + \frac{1}{4a^3+4b^3+3c} + \frac{1}{4a^3+4b^3+3c} \leq \frac{6}{5}.$$

Bài 13. Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \frac{(b+c)(b^2+ca)}{b^2+bc+c^2} + \frac{(c+a)(c^2+ab)}{c^2+ca+a^2} + \\ + \frac{(a+b)(a^2+bc)}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{4(ab+bc+ca)}{a+b+c} \end{aligned}$$

Bài 14. Cho $a, b, c \in [1; 3]$ thỏa mãn $a+b+c=6$.

Chứng minh rằng $3(ab+bc+ca+1) \geq a^3+b^3+c^3$.

Bài 15. (JBMO TST, 2016). Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \geq b \geq 1 \geq c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\text{a) } 2 \leq ab+bc+ca \leq 3. \quad \text{b) } \frac{24}{a^3+b^3+c^3} + \frac{25}{ab+bc+ca} \geq 14.$$

Bài 16. Cho a, b, c là các số thực khác nhau từng đôi một, chứng minh rằng:

$$(a^2+b^2+c^2) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right] \geq \frac{9}{4}.$$



KỶ THI OLYMPIC HÌNH HỌC SHARYGIN (SHARYGIN GEOMETRY OLYMPIAD)

NGUYỄN BÁ ĐĂNG (Hà Nội)

Nhà toán học *Fedorovich Sharygin* sinh năm 1937 tại Matxcova, ông viết hơn ba mươi cuốn sách cho học sinh, đặc biệt về hình học. Cuốn đầu tiên ông viết năm 1981. Năm 1984 ông là Tổng biên tập Tạp chí *Toán học trong trường* của Liên Xô cũ. Sau năm 1991 ngoài viết sách ông còn đấu tranh cho sự phát triển tiến bộ về giáo dục ở Nga. Ông qua đời ngày 12 tháng 3 năm 2004.

Ngày năm đó, để đánh giá công lao theo đề nghị các nhà giáo dục sư phạm, các nhà toán học nước Nga, Bộ Giáo dục và Khoa học CHLB Nga đã tổ chức kỳ thi cho học sinh trung học từ lớp 8 đến lớp 10, mang tên *Sharygin Geometry Olympiad*.

Ban đầu, kì thi này chỉ dành cho các học sinh Nga tham dự đến năm 2007, với sức hút của nó, các học sinh nước ngoài cũng mong muốn tham dự kì thi này và ban tổ chức đã tạo điều kiện cho họ. Kì thi này gồm 2 vòng là ở loại và chung kết.

Vòng sơ loại: Thí sinh cần phải giải 8–16 bài cho khối lớp của mình, có tất cả 3 khối lớp là 8, 9, 10. Các thí sinh ở xa có thể giải và gửi bài qua e-mail cho ban tổ chức (khoảng cuối tháng 3 hàng năm) ban tổ chức sẽ chấm và chọn ra khoảng 30–40 bạn học sinh cao điểm nhất ở mỗi khối vào vòng chung kết.

Vòng chung kết: Các thí sinh sẽ thi trực tiếp 2 ngày thi mỗi ngày 4 câu câu hỏi, thời gian mỗi ngày thi là 4 giờ. Đề thi gồm 8 câu hỏi về hình học phẳng thuần túy, hình tổ hợp, hình học tính toán (bất đẳng thức hình học, lượng giác,...). Học sinh làm bài viết bằng Tiếng Anh, sau đó thí sinh sẽ phải thuyết trình trực tiếp bằng tiếng Anh cho giám khảo về bài làm của mình để họ chấm điểm.

Năm nay Ban tổ chức kỳ thi đã chọn 4 em đoàn Việt Nam tham dự vòng chung kết Sharygin: *Trương Tuấn Nghĩa* (lớp 8, Trường Hà Nội-Amsterdam), *Nguyễn Đỗ Minh Khôi* (lớp 11, THPT chuyên Lê Hồng Phong TP. Hồ Chí Minh), *Nguyễn Đức Thịnh* (lớp 10, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, Sóc Trăng), *Nguyễn Thiện Nhân* (lớp 9, PTNK TP. Hồ Chí Minh), kỳ thi diễn ra trong hai ngày cuối tháng 7 năm 2017. Kết quả: *Trương Tuấn Nghĩa* được giải Nhất; *Nguyễn Thiện Nhân* được giải Khuyến khích khối lớp 9; *Nguyễn Đức Thịnh*, giải Khuyến khích khối lớp 10. Do hệ thống Giáo dục của Nga có 11 năm, nên học sinh Việt Nam lớp 8, lớp 9 có thể dự thi lớp 8 hay học sinh lớp 11 dự thi lớp 10.

Xin giới thiệu một số bài thi từ những năm 2004 đến năm 2016 để các bạn tham khảo.

Bài 1. (Lớp 8) Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 50^\circ$, trên cạnh AC lấy các điểm M và N thỏa mãn $\widehat{ABM} = \widehat{CBN} = 10^\circ$. Tính tỉ số $\frac{CN}{AM}$.

Lời giải. (h.1)

Ta có $AC = AB \cdot \tan 50^\circ$;

$$\widehat{ABN} = \widehat{ABC} - \widehat{CBN} = 40^\circ$$

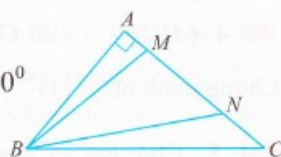
$$\Rightarrow AM = AB \cdot \tan 10^\circ,$$

$$AN = AB \cdot \tan 40^\circ$$

$$\Rightarrow CN = AC - AN = AB (\tan 50^\circ - \tan 40^\circ).$$

$$\text{Vậy } \frac{CN}{AM} = \frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{\tan 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ \sin 40^\circ} = 2.$$



Hình 1

Bài 2. (Lớp 9) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAO} = \widehat{DAC}$ thì đường chéo AC vuông góc với đường chéo BD .

Lời giải. (h.2) **Cách 1.** Tam giác AOB cân tại O

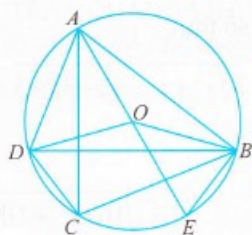
$$\Rightarrow \widehat{OAB} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AOB}) = 90^\circ - \widehat{ACB} \quad (1)$$

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên

$$\widehat{DAC} = \widehat{DBC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} \widehat{DBC} + \widehat{ACB} &= \widehat{DAC} + 90^\circ - \widehat{BAO} = 90^\circ \\ \Rightarrow AC \perp BD. \end{aligned}$$



Hình 2

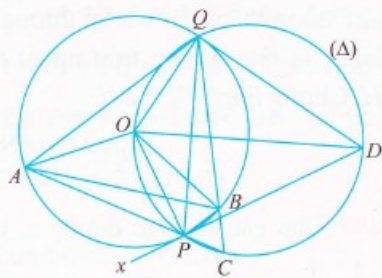
Cách 2. AO cắt đường tròn (O) tại E . Khi đó $\widehat{ABE} = 90^\circ$ và $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ (1)

$$\widehat{BAO} = \widehat{DAC} = \widehat{DBC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DBC} + \widehat{ACB} = \widehat{BAE} + \widehat{AEB} = 90^\circ$
 $\Rightarrow AC \perp BD$.

Bài 3. (Lớp 10) Cho đường tròn (Δ) và điểm O trên đường tròn đó, dựng đường tròn tâm (O) cắt đường tròn (Δ) tại P và Q , C là điểm trên đường tròn (Δ) , đường thẳng CP, CQ cắt đường tròn tâm (O) lần lượt tại A và B . Chứng minh rằng $AB \perp PQ$.

Lời giải. (h.3) Từ P kẻ đường thẳng vuông góc với OP cắt đường tròn (Δ) tại D thì PD là đường kính đường tròn $(\Delta) \Rightarrow DP$ và DQ là các tiếp tuyến của đường tròn (O) .



Hình 3

$$\widehat{QAP} = \widehat{QAB} + \widehat{BAP} = \frac{1}{2}(\widehat{QOB} + \widehat{BOP}) = \frac{1}{2}\widehat{QOP};$$

$$\widehat{AQB} = \widehat{AQP} + \widehat{PQB} = \frac{1}{2}(\widehat{AOP} + \widehat{POB}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB};$$

$\widehat{BQP} = \widehat{BAP}$ (cùng chắn cung $\widehat{BP}$ của đường tròn (O)).

DP là tiếp tuyến đường tròn (O) nên

$$\widehat{AQP} = \widehat{APx} = \widehat{DPC} \quad (1)$$

DQ là tiếp tuyến đường tròn (O) nên

$$\widehat{DQB} = \widehat{QAB} \quad (2)$$

Mặt khác D, Q, P, C cùng nằm trên đường tròn (Δ) nên $\widehat{DPC} = \widehat{DQC} = \widehat{DQB}$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{QAB} = \widehat{AQP} \Rightarrow \widehat{QAP} = \widehat{AQB}$

$$\Rightarrow \widehat{QOP} = \widehat{AOB} \Rightarrow \triangle OPQ = \triangle OAB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow PQ = AB.$$

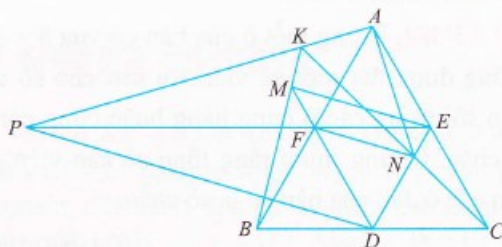
Bài 4. (Lớp 10) Cho tam giác đều ABC . Gọi D, E, F là chân các đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, B, C . Từ E, F và D lần lượt kẻ ba đường thẳng song song với nhau cắt DF tại M , DE tại N và EF tại P . Chứng minh rằng các đường thẳng BM, CN, PA đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải. (h.4) Gọi K là giao điểm của BM và CN . Tam giác DFN và tam giác DCN có

$$\widehat{FDC} = \widehat{NDC} = 60^\circ, DN \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle DFN = \triangle DCN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{DFN} = \widehat{DCN}$$

$$\Rightarrow \widehat{EFN} = 60^\circ - \widehat{DFN} = 60^\circ - \widehat{DCN} = \widehat{NCE}.$$



Hình 4

$$\text{Tương tự có } \triangle DBM = \triangle DEM \Rightarrow \widehat{DBM} = \widehat{DEM}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBF} = \widehat{MEF}.$$

$$\text{Từ giả thiết } FN \parallel ME \Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{EFN}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBF} = \widehat{ECN} \Rightarrow \widehat{KBA} = \widehat{KCA}$$

$$\Rightarrow K \text{ thuộc đường tròn ngoại tiếp } \triangle ABC.$$

AP và BM cắt nhau tại G , hoàn toàn chứng minh như trên ta có tứ giác $BGAC$ nội tiếp $\Rightarrow G$ trùng với $K \Rightarrow BM, CN, PA$ đồng quy tại điểm K trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

(Xem tiếp trang 36)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/484 (Lớp 6). Tính tổng

$$A = 3 + 4 + 6 + 9 + 13 + 18 + \dots + 4953$$

(các số hạng trong tổng A được xác định theo công thức $a_{n+1} = a_n + n$ với $n \in \mathbb{N}^*$).

NGUYỄN HÀM THÀNH

(GV THPT Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T2/484 (Lớp 7). Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn phương trình

$$(1+x!)(1+y!) = (x+y)!$$

trong đó ký hiệu $n! = 1.2. \dots n$.

LÊ XUÂN Đ

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T3/484. Trong một ô của bàn cờ vua 8×8 ô vuông được đặt một số viên sỏi hoặc số các viên sỏi trong các ô cùng hàng hoặc cùng cột là số chẵn. Chứng minh rằng tổng số các viên sỏi trên các ô đen của bàn cờ là số chẵn.

VŨ ĐÌNH HÒA

(GV Khoa Công nghệ thông tin, Trường ĐHSP Hà Nội)

Bài T4/484. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = BC\sqrt{2}$. M là một điểm trên cạnh CD (M khác D). Kẻ $BI \perp AM$ tại I . Gọi giao điểm của CI và DI với AB lần lượt là E và F . Chứng minh rằng AE, BF và AB là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/484. Giải phương trình

$$2x^4 - 8x^3 + 60x^2 - 104x - 240 = 0.$$

NGUYỄN THANH HẢI

(GV THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/484. Giải phương trình sau trên tập hợp số thực

$$3\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} + 2\sqrt{5x^2 + 5y^2 + 10x + 50y + 130} + \sqrt{5x^2 + 5y^2 - 30x + 45} = \sqrt{102x^2 + 102y^2 - 204x + 204y + 1360}.$$

HOÀNG SỸ LUYỆN

(Cao học 19, Đại học Vinh)

Bài T7/484. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

$$\ln \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \log_2 \frac{n+1}{2}.$$

Từ đó suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = +\infty$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/484. Giả sử đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB theo thứ tự tại D, E và F . Kẻ DG vuông góc với EF (G thuộc EF), gọi J là trung điểm của đoạn DG . Đường thẳng EJ cắt lại đường tròn (I) tại H . Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FGH . Chứng minh $IK \parallel BH$.

HỒ QUANG VINH

(Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ)

Bài T9/484. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{16}{x+y+z}$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức } P = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

TRẦN QUỐC LUẬT

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh)

TIỀN TỐI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/484. Với mỗi số nguyên dương n , ký hiệu $f(n)$ là tổng bình phương các ước số nguyên dương của n . Hãy tìm tất cả các số nguyên

$$\text{dương } n \text{ sao cho } \sum_{k=1}^n f(k) \geq \frac{10n^3 + 15n^2 + 2n}{24}.$$

TRẦN QUANG VINH

(SV K27C khoa Toán ĐHSP TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/484. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2} \\ x_{n+2}x_n = x_{n+1}^2 + 4^{-n} \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - \sqrt{5})^n x^n$.

NGUYỄN LÃI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T12/484. Cho tam giác ABC . Gọi (O) , I theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. AI cắt BC tại A_1 và cắt lại (O) tại A_2 . Tương tự ta có B_1, B_2 và C_1, C_2 . B_1C_1 và B_2C_2 cắt nhau tại A_3 ; A_1C_1 và A_2C_2 cắt nhau tại B_3 ; A_1B_1 và A_2B_2 cắt nhau tại C_3 .

Chứng minh A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường thẳng vuông góc với OI .

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài L1/484. Một hòn đá nhỏ được ném từ mặt đất với vận tốc ban đầu là v_0 theo phương hợp với phương ngang một góc α . Một con chim bay với vận tốc không đổi là v_0 theo đúng quỹ đạo của hòn đá. Tìm gia tốc của con chim tại điểm có độ cao bằng nửa độ cao cực đại của hòn đá. Bỏ qua lực cản của không khí.

VŨ THANH KHIẾT (Hà Nội)

Bài L2/484. Đặt điện áp $u = U\sqrt{2} \cos \omega t$ (V)

(trong đó U không đổi, ω có thể thay đổi được) vào hai đầu một đoạn mạch AB gồm điện trở thuần R , cuộn cảm thuần có độ tự cảm L và tụ điện có điện dung C , mắc nối tiếp. Cho biết $L = CR^2$. Thay đổi tần số góc của điện áp người ta tìm được hai giá trị là $\omega_1 = 50\pi$ (rad/s) và $\omega_2 = 80\pi$ (rad/s) ứng với hệ số công suất của mạch có giá trị bằng nhau. Với hai giá trị bằng nhau đó hãy xác định hệ số công suất của đoạn mạch.

THANH LÂM (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/484 (For 6th grade). Compute

$$A = 3 + 4 + 6 + 9 + 13 + 18 + \dots + 4953$$

(where the terms are determined by the formula

$$a_{n+1} = a_n + n, n \in \mathbb{N}^*).$$

Problem T2/484 (For 7th grade). Find all natural numbers x, y such that

$$(1 + x!)(1 + y!) = (x + y)!$$

where $n! = 1.2. \dots n$.

Problem T3/484. In each square in a 8×8 chess board we place some small stones such that the sum of the stones in any row or any column is even. Prove that the sum of the stones in the black squares is even.

Problem T4/484. Let $ABCD$ be a rectangle with $AB = BC\sqrt{2}$. Choose some point M on the line segment CD such that M is different from D . Draw $BI \perp AM$ ($I \in AM$). Assume that CI and DI intersect AB at E and F respectively. Prove that AE, BF and AB can be the lengths of the 3 sides of a right triangle.

Problem T5/484. Solve the equation

$$2x^4 - 8x^3 + 60x^2 - 104x - 240 = 0.$$

Problem T6/484. Find the real roots of the following equation

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} + 2\sqrt{5x^2 + 5y^2 + 10x + 50y + 130} \\ & + \sqrt{5x^2 + 5y^2 - 30x + 45} \\ & = \sqrt{102x^2 + 102y^2 - 204x + 204y + 1360}. \end{aligned}$$

(Xem tiếp trang 36)



Bài T1/480. Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho

$$x^y + y^z + z^x = 105.$$

Lời giải. Nhận xét. Nếu $(x; y; z) = (a; b; c)$ là một nghiệm của phương trình trên thì các bộ số hoán vị vòng quanh $(b; c; a)$ và $(c; b; a)$ cũng là nghiệm của phương trình này.

Từ nhận xét trên có thể giả sử rằng số nhỏ nhất trong ba số x, y, z là x , tức là $1 \leq x \leq y$ và $1 \leq x \leq z$ thì từ $x^y + y^z + z^x = 105$ (1) có $3x^x \leq 105$, hay là $x^x \leq 35$, suy ra $1 \leq x \leq 3$.

Xét ba trường hợp sau.

a) Với $x = 1$ thay vào (1) được $y^z + z = 104$ (2).

• Nếu $1 \leq y \leq z$, từ (2) có $y^y + y \leq 104 < 4^4 = 256$ nên $y \leq 3$. Với $y = 1$, thay vào (2) được $z = 103$, thỏa mãn. Với $y = 2$, thay vào (2) được $2^z + z = 104$, mà $2^6 + 6 = 70 < 104 < 2^7 = 128$ nên vô nghiệm.

Với $y = 3$, thay vào (2) được $3^z + z = 104$, mà $3^4 + 4 = 85 < 104 < 3^5 = 243$, nên vô nghiệm.

• Nếu $1 \leq z \leq y$, từ (2) có $z^z + z \leq 104 < 4^4 = 256$ nên $z \leq 3$. Với $z = 1$, thay vào (2) được $y = 103$, thỏa mãn. Với $z = 2$, thay vào (2) được $y^2 = 102$ nên vô nghiệm. Với $z = 3$, thay vào (2) được $y^3 = 101$ nên vô nghiệm.

b) Với $x = 2$ thay vào (1) được $2^y + y^z + z^2 = 105$ (3).

• Nếu $2 \leq y \leq z$, từ (3) có $2^y + y^y + y^2 \leq 105 < 4^4 = 256$ nên $y \leq 3$. Với $y = 2$, thay vào (3) được $2^z + z^2 = 101$, mà $2^6 + 6^2 = 100 < 101 < 2^7 = 128$ nên không có z thỏa mãn. Với $y = 3$, thay vào (3) được $3^z + z^2 = 97$ mà $3^4 + 4^2 = 97$, nên $z = 4$ thỏa mãn.

• Nếu $2 \leq z \leq y$, từ (3) có $2^z + z^z + z^2 \leq 105 < 4^4 = 256$ nên $z \leq 3$. Với $z = 2$, thay vào (3) được $2^y + y^2 = 101$ mà $2^6 + 6^2 = 100 < 101 < 2^7 = 128$ nên vô nghiệm. Với $z = 3$, thay vào (3) được $2^y + y^3 = 96$ và y chẵn, mà $2^4 + 4^3 = 80 < 96 < 2^5 = 112$ nên vô nghiệm.

c) Với $x = 3$ thay vào (1) được $3^y + y^z + z^3 = 105$ (4). Từ $3^5 = 143 > 105$ nên $3 \leq y \leq 4$.

• Nếu $y = 3$ từ (4) có $3^z + z^3 = 78$ và z lẻ,

mà $3^3 + 3^3 = 54 < 78 < 5^3 = 125$ nên vô nghiệm.

• Nếu $y = 4$ từ (4) có $4^z + z^3 = 24$ và z chẵn,

mà $4^2 + 2^3 = 24$, nên $z = 2$ thỏa mãn.

Sử dụng Nhận xét trên, bài toán có các nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 1; 103)$, $(1; 103; 1)$, $(103; 1; 1)$, $(2; 3; 4)$, $(3; 4; 2)$, $(4; 2; 3)$. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Từ nhận xét rằng bộ nghiệm của PT (1) có thể hoán vị vòng quanh, rất nhiều bạn đã đưa ra nhận định sai lầm là vai trò của x, y, z như nhau dẫn đến giả sử $x \leq y \leq z$ hoặc $z \leq y \leq x$. Chú ý rằng nếu vai trò của x, y, z như nhau thì có 6 bộ nghiệm, chứ không chỉ có 3 bộ nghiệm như khi hoán vị vòng quanh! Chẳng hạn, giả sử rằng $z \leq y \leq x$, khi cho $z = 2$ sẽ bỏ mất nghiệm $y = 4, x = 3$.

2) Bạn Đặng Khôi Nguyên, 5E, TH Khương Mai, Q. Thanh Xuân, Hà Nội, đã giải cách khác khi gọi x là số lớn nhất trong ba số x, y, z . Do $3.3^3 = 81 < 105$ nên $x \geq 4$. Xét hai trường hợp:

• Với $x \geq 5$ từ (1) có $y \leq 2$ và $z \leq 2$, dẫn tới nghiệm $(x; y; z)$ là $(103; 1; 1)$.

• Với $x = 4$ thì từ (1) có $y \leq 3$ và $z \leq 3$, dẫn tới nghiệm $(x; y; z)$ là $(4; 2; 3)$.

Hoán vị vòng quanh các nghiệm trên được kết quả.

VIỆT HẢI

Bài T2/480. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$. Trên các cạnh BC, AB và AC lần lượt lấy các điểm M, D, E tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MD + ME$.

Lời giải. Theo định lý

Pythagore ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Mà $AB = AC$ nên

$$2AB^2 = BC^2 = 2a^2 \text{ nên } AB = a.$$

Vẽ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$. Khi đó $MH \parallel AC$, $MK \parallel AB$.

Suy ra $MK = AH$ (tính chất đoạn chắn song song).

Lại có tam giác HMB vuông cân tại H nên $MH = BH$.

Ta có $MD \geq MH$, $ME \geq MK$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên). Do đó

$$MD + ME \geq MH + MK = BH + AH = AB = a.$$

Đẳng thức xảy ra khi $D \equiv H$ và $E \equiv K$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng $MD + ME$ bằng a khi D, E lần lượt là chân đường vuông góc của M trên AB, AC . $\square$

► **Nhận xét.** Đây là một bài toán cực trị hình học sử dụng mối quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên. Đa số các bạn gửi bài đến tòa soạn đều có lời giải đúng. Các bạn say đây có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** Tạ Kim Nam Tuấn, 6A2, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** Lê Văn Quang Trung, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Trung Phú, Cao Thị Ngọc Trâm, Phạm Đình Tâm, Võ Đàm Hương Giang, Lê Tuấn Kiệt, Phạm Thị Thu Nhung, Văn Quang Tuệ, 7A, Đỗ Phạm Thùy Trang, 7C, Nguyễn Thị Yến Nhi, 7D, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Bình Phước:** Đặng Đình Văn, 7/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài.

NGUYỄN THỊ QUỲNH ANH

Bài T3/480. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{z}} = 1 \\ \sqrt{y} - \frac{3}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \\ \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 3. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $x > 0, y > 0, z > 0$.

Cách 1. Đặt $\frac{1}{\sqrt{x}} = a; \frac{2}{\sqrt{y}} = b; \frac{3}{\sqrt{z}} = c$, với $a > 0, b > 0, c > 0$. Khi đó HPT đã cho trở thành

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - b + c = 1 \\ \frac{2}{b} - c + a = 2 \\ \frac{3}{c} - a + b = 3 \end{cases} \quad (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - ab + ca = a \\ 2 - bc + ab = 2b \\ 3 - ca + bc = 3c \end{cases} \quad (II)$$

Cộng theo vế ba phương trình của hệ (I) ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 6 \quad (*)$$

Cộng theo vế ba phương trình của hệ (II) ta được

$$a + 2b + 3c = 6 \quad (**).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2; \quad \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$$

đồng thời kết hợp với (*) và (**) suy ra

$$\begin{aligned} 36 &= \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \right) (a + 2b + 3c) \\ &= 14 + 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 6 \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + 3 \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \\ &\geq 14 + 2.2 + 6.2 + 3.2 = 36. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{c}{a} + \frac{a}{c} = 2 \\ a + 2b + 3c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó tìm được } \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{cases}$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (1; 4; 9)$.

Cách 2. Cộng theo vế hai phương trình đầu của HPT

$$\text{đã cho, ta được } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{y}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \left(\sqrt{y} + \frac{4}{\sqrt{y}} \right) - \frac{6}{\sqrt{y}} = 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với hai số dương, ta

$$\text{có } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2; \quad \sqrt{y} + \frac{4}{\sqrt{y}} \geq 4 \text{ suy ra}$$

$$6 - \frac{6}{\sqrt{y}} \leq 3 \Rightarrow \sqrt{y} \leq 2 \quad (1)$$

Do $\sqrt{y} \leq 2$ nên từ phương trình thứ hai của hệ suy ra

$$-\frac{3}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{z} \geq 3\sqrt{x} \quad (2)$$

Từ phương trình thứ ba của hệ, kết hợp với (1) và (2),

$$\text{ta có } 3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \leq 3 \Rightarrow 3x - 2\sqrt{x} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 1) \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \quad (3)$$

Từ phương trình đầu của HPT, kết hợp với (1) và (3), ta có

$$-\frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{z}} \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{z} \leq 3\sqrt{y} \leq 3. \quad 2 = 6 \Rightarrow \sqrt{z} \leq 3 \quad (4)$$

Từ (1), (3) và (4) suy ra $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 6$.

Mặt khác, cộng theo vế ba phương trình của HPT, ta được $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 6$.

Do đó đẳng thức ở (1), (3) và (4) xảy ra đồng thời.

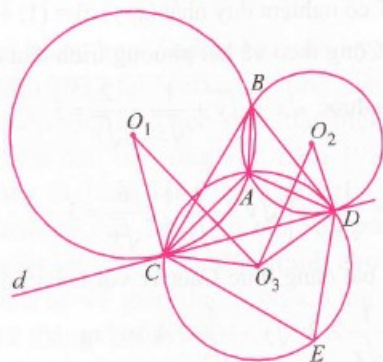
Từ đó tìm được nghiệm $(x; y; z) = (1; 4; 9)$. □

► **Nhận xét.** Đây là bài toán giải hệ phương trình ba ẩn có chứa căn, ta có thể đặt ẩn phụ để đưa về giải hệ phương trình không chứa căn và sử dụng bất đẳng thức mà đánh giá. Đa số các bạn gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Thanh Hóa:** Đỗ Cao Bách Tùng, 8B, THCS Trần Mai Ninh; **Phú Yên:** Đàm Ngọc Hiếu, 9H, THCS Trần Hưng Đạo; **Vĩnh Long:**

Nguyễn Võ Thuận, 9A1, THCS TTr. Tam Bình; Bình Phước: Đặng Đình Văn, 7/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/480. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại A và B. Đường thẳng d tiếp xúc với $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ lần lượt tại C và D. Gọi R_3, R_4 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng $R_1 \cdot R_2 = R_3 \cdot R_4$.



Lời giải. Gọi E là điểm đối xứng với B qua đường thẳng CD. Theo tính chất đối xứng ta có

$$\widehat{CBD} = \widehat{CED} \quad (1)$$

Mặt khác, theo tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, ta có $\widehat{ACD} = \widehat{ABC}$, $\widehat{ADC} = \widehat{ABD}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $\widehat{CAD} + \widehat{CED} = \widehat{CAD} + \widehat{CBD}$
 $= \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = \widehat{CAD} + \widehat{ACD} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.

Do đó tứ giác ACED nội tiếp (3)

Lại có, theo tính chất đối xứng, ta có $\Delta ABC = \Delta CED$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra

$$R_3 = R(ACD) = R(CDE) = R(CBD) = R_4 \quad (5)$$

Để ý rằng O_1O_3 và O_2O_3 tương ứng là trung trực của AC và AD, ta có

$$\widehat{CO_1O_3} = \frac{1}{2} \widehat{CO_1A} = \widehat{ACD} = \frac{1}{2} \widehat{AO_3D} = \widehat{O_2O_3D}.$$

Tương tự, $\widehat{DO_2O_3} = \widehat{O_1O_3C}$, do đó

$\Delta O_1O_3C \sim \Delta O_3O_2D$. Suy ra

$$\frac{O_1C}{O_3D} = \frac{O_3C}{O_2D} \Leftrightarrow \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_3}{R_2} \Leftrightarrow R_1 \cdot R_2 = R_3^2 \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $R_1 \cdot R_2 = R_3 \cdot R_4$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Từ chứng minh trên dẫn đến

$$\Delta ACD \sim \Delta CO_1O_3 \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{R_1}{R_3}, \text{ tương tự } \frac{BC}{BD} = \frac{R_1}{R_3}.$$

Do đó phân giác trong của hai góc $\widehat{CAD}, \widehat{CBD}$ cắt nhau tại một điểm thuộc CD. Bạn Nguyễn Hữu Nam, 9C, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hoá đưa ra nhận xét trên nhưng không chứng minh.

2) Không nhiều bạn tham gia giải bài toán trên. Ngoài bạn Nam, các bạn sau cũng cho lời giải đúng. **Quảng Ngãi:** Lê Tuấn Kiệt, 8C, THCS Phạm Văn Đồng; **Thanh Hoá:** Đỗ Cao Bách Tùng, Phạm Anh Đức, 8B, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** Trần Anh Quốc, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/480. Cho a, b, c là ba số thực dương và $\alpha, \beta, \lambda \geq 2$. Chứng minh

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{(a-b)^2}{\alpha(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{\beta(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{\lambda(a+b)(b+c)}.$$

Lời giải. Gọi về trái BĐT cần chứng minh là M. Ta

$$\text{có: } \frac{a-b}{b+c} - \frac{a-b}{c+a} = \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \geq 0;$$

$$\frac{b}{b+c} - \frac{b-c}{a+b} = \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} \geq 0;$$

$$\frac{c-a}{a+b} - \frac{c-a}{b+c} = \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \geq 0.$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được:

$$2M - 3 = \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}$$

$$M = \frac{3}{2} + \frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{2(a+b)(b+c)} \quad (*)$$

Theo giả thiết $\alpha, \beta, \lambda \geq 2$, do đó:

$$M \geq \frac{3}{2} + \frac{(a-b)^2}{\alpha(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{\beta(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{\lambda(a+b)(b+c)}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $\alpha = \beta = \lambda = 2$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Bài toán đã cho thực chất làm “chặt” hơn BĐT Nesbitt: Với ba số dương a, b, c ta luôn có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

2) Biến đổi về đẳng thức (*) là mấu chốt lời giải của bài toán, đa số các bạn đều làm theo hướng này. Một số bạn giải bằng cách dùng ẩn phụ, hoặc biến đổi rồi dùng BĐT Cauchy, tuy nhiên lời giải theo những cách này cũng vẫn dài.

Các bạn có lời giải tốt là: **Bắc Ninh:** Nguyễn Ngọc Khánh, 9A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh. **Phú Thọ:** Lê Na, 9A, THCS Thị trấn 2, H. Yên Lập. **Hà Nội:** Nguyễn Đặng Nhật Minh, 9C3, THCS Archimedes

Academy; **Lê Tuấn Tú**, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh. **Thanh Hóa:** **Đỗ Cao Bách Tùng**, **Phạm Anh Đức**, 8B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **Hà Tĩnh:** **Hoàng Quốc Khánh**, 9A, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ. **Quảng Ngãi:** **Lê Tuấn Kiệt**, 8C, THCS Phạm Văn Đồng, H. Nghĩa Hành. **Vĩnh Long:** **Đỗ Thiên Ân**, 9/2, THCS Lê Quý Đôn, **Nguyễn Võ Thuận**, 9A1, THCS Thị Trấn Tam Bình, H. Tam Bình.

NHƯ HOÀNG

Bài T6/480. Giải phương trình

$$4x^3 - 24x^2 + 45x - 26 = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}.$$

Lời giải. Điều kiện để phương trình có nghĩa là $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ tương đương với $1 \leq x \leq 3$.

Biến đổi phương trình đã cho về dạng

$$4(x-2)^3 - 3(x-2) = \sqrt{1-(x-2)^2}.$$

Đặt $t = x - 2, -1 \leq t \leq 1$, ta thu được phương trình tương đương là $4t^3 - 3t = \sqrt{1-t^2}$. (*)

Do $-1 \leq t \leq 1$, có thể đặt $t = \cos \alpha$ ($\alpha \in [0, \pi]$), ta thu được phương trình $4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha}$

$$\Leftrightarrow \cos 3\alpha = \sin \alpha \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Phương trình cuối cho ta $3\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi$ hoặc

$$3\alpha = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2k\pi. \text{ Ta có nghiệm } \alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

hoặc $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Do $\alpha \in [0, \pi]$, cho nên

$$\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \text{ với } k = 0 \text{ hoặc } k = 1, \text{ hoặc } \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

với $k = 1$. Ta thu được 3 nghiệm $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Thay $x = t + 2 = \cos \alpha + 2$, ta thu được 3 nghiệm của phương trình đã cho là $2 + \cos \frac{\pi}{8}, 2 + \cos \frac{5\pi}{8}, 2 + \cos \frac{3\pi}{4}$.

Lưu ý: Phương trình (*) cũng có thể giải bằng cách đặt điều kiện $4t^3 - 3t \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $0 \geq t \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bình phương hai vế và chuyển vế, phân tích thành thừa số để được phương trình

$$\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)\left(t^2 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)\left(t^2 - \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) = 0.$$

$$\text{Ta thu được } t^2 = \frac{1}{2}, t^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \text{ hoặc } t^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Kết hợp với điều kiện đầu bài và điều kiện khi bình phương 2 vế phương trình sau ($1 \geq t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc

$$0 \geq t \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
), ta thu được 3 nghiệm t là

$$t = -\frac{\sqrt{2}}{2}, t = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \text{ và } t = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Tương ứng với 3 nghiệm này là 3 nghiệm của x là

$$x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = 2 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \text{ và } x = 2 - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}. \square$$

➤ **Nhận xét.** Bài toán này có khá nhiều bạn gửi lời giải, nhưng có một số khá đông bạn giải sai. Đa số các bạn giải bằng cách bình phương hai vế của phương trình nhưng quên đặt điều kiện phụ để có phương trình tương đương. Một số bạn tuy quên đặt điều kiện phụ, nhưng có thử lại trực tiếp để có nghiệm đúng. Các bạn sau đây có đáp số đúng và lời giải đúng (có 2 bạn quên không ghi tên và địa chỉ):

Long An: **Phạm Quý Lộc**, 10 T1, **Lê Trí Phú**, 11T1, THPT Chuyên Long An; **Tiền Giang:** **Lê Hoàng Bảo**, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Hải Phòng:** **Bùi Anh Dũng**, 10T1, THPT An Dương, TP. Hải Phòng; **Quảng Ngãi:** **Lê Tuấn Kiệt**, 8C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Nguyễn Lê Minh Triết**, 12T1, THPT chuyên Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi; **Bến Tre:** **Lê Ngô Nhật Huy**, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Nghệ An:** **Bạch Quang Hiệu**, 11A1, THPT Cửa Lò; **Quảng Trị:** **Võ Thanh Long**, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** **Phan Hoàng Minh Đức**, 11 Toán2, **Hoàng Vũ Nam Tấn**, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Vĩnh Phúc:** **Kim Thị Hồng Linh**, **Nguyễn Lê Sơn**, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Đà Nẵng:** **Phạm Hiếu**, 10A, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Nam Định:** **Nguyễn Hùng Sơn**, 10A2, THPT Lê Quý Đôn, Trại Ninh, **Lê Phương Thanh**, 11 Toán2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** **Hoàng Văn Thái**, 11A3, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Đoàn Phú Thành**, **Trần Thị Phương Linh**, 10 Toán1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** **Lê Tiến Đạt**, 11B2, THPT Nông Công 1, **Đỗ Cao Bách Tùng**, 8B, **Nguyễn Hữu Nam** 9G, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Vĩnh Long:** **Lê Phương Thanh**, 12A2, **Nguyễn Ngọc Khánh Vy**, 11H, **Châu Minh Khánh**, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Hà Nội:** **Đoàn Thị Minh Hằng**, 11A1, THPT Ba Vì, **Hoàng Tùng**, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thái Bình:** **Trần Lê Phương Thảo**, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Bình Phước:** **Đặng Hữu Trung Hiếu**, **Lưu Trí Cường** 10T4, **Nguyễn Đình Thịnh**, **Nguyễn Trung Nam**, **Nguyễn Lê Phi Long**, 11T3, THPT chuyên Bình Long; **Quảng Nam:** **Đàm Thị Xuân Ý**, **Nguyễn Lê Thanh Hằng**, 10/1 THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Phạm Lý Nhật Dung**, **Đình**

Nguyễn Khánh, 10/1, Lê Hà Khiêm, 11T, THPT chuyên Lê Thánh Tông TP. Hội An.

VŨ ĐÌNH HOÀ

Bài T7/480. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 2ax - 1 = 0$ trong đó a là số nguyên.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{8}(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n})$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp với n là số tự nhiên tùy ý.

Lời giải. Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2ax - 1 = 0$ nên theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2a$; $x_1 x_2 = -1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n}) &= \frac{1}{8}(x_1^{2n} - x_2^{2n})^2(x_1^{2n} + x_2^{2n}) \\ &= \frac{1}{8}[(x_1^{2n} + x_2^{2n})^2 - 4](x_1^{2n} + x_2^{2n}) \quad (\text{do } x_1 x_2 = -1) \\ &= \frac{x_1^{2n} + x_2^{2n} - 2}{2} \cdot \frac{x_1^{2n} + x_2^{2n}}{2} \cdot \frac{x_1^{2n} + x_2^{2n} + 2}{2}. \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh: $S_n = x_1^{2n} + x_2^{2n}$ là số nguyên dương chẵn với mọi $n \in \mathbb{N}$ (*). Thật vậy:

- Với $n = 0$ thì $S_0 = 2$ là số nguyên dương chẵn.

- Với $n = 1$ thì $S_1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4a^2 + 2$

là số nguyên dương chẵn (do $a \in \mathbb{Z}$).

Giả sử mệnh đề (*) đúng đến n , nghĩa là S_n, S_{n-1} là các số nguyên dương chẵn. Ta cần chứng minh S_{n+1} là số nguyên dương chẵn. Ta có:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= x_1^{2(n+1)} + x_2^{2(n+1)} \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(x_1^{2n} + x_2^{2n}) - x_1^2 x_2^2 [x_1^{2(n-1)} + x_2^{2(n-1)}] \\ &= S_1 S_n - S_{n-1} \end{aligned}$$

là số nguyên dương chẵn.

Theo nguyên lý quy nạp, S_n là số nguyên dương chẵn với $\forall n \in \mathbb{N}$. Do $x_1^{2n} + x_2^{2n}$ là số nguyên dương

chẵn nên $\frac{x_1^{2n} + x_2^{2n} - 2}{2}, \frac{x_1^{2n} + x_2^{2n}}{2}, \frac{x_1^{2n} + x_2^{2n} + 2}{2}$ là ba số tự nhiên liên tiếp. Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

➤ **Nhận xét.** Có khá đông các bạn tham gia giải bài này, đa số các lời giải đều giải đúng và cách giải tương tự như lời giải trên. Một số bạn trình bày còn dài dòng. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Lê Sơn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên. **Hà Nội:** Nguyễn Minh

Hiếu, 12 Toán 1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội. **Nam Định:** Nguyễn Hùng Sơn, 10A2, THPT Lê Quý Đôn, Trục Ninh. **Thanh Hóa:** Thiếu Đình Minh Hùng, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa. **Nghe An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên, Đại học Vinh. **Thừa Thiên Huế:** Hoàng Vũ Nam Tấn, 11 Toán 1, Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Quảng Nam:** Trần Thiện Thu Uyên, Phạm Lý Nhật Duyệt, 10/1, Lê Hà Khiêm, 11T, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An. **Quảng Ngãi:** Đỗ Thị Mỹ Lan, 11T2, Lê Minh Triết, 12T1, THPT chuyên Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi. **Bình Phước:** Nguyễn Hoàng Đức, 11A, THPT chuyên Quang Trung. **Vĩnh Long:** Trần Linh, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm. **Long An:** Nguyễn Thị Ngân Trúc, 11T1, THPT chuyên Long An. **Lâm Đồng:** Võ Minh Quân, 10 Toán, THPT chuyên Thăng long, TP. Đà Lạt.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/480. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB theo thứ tự tại D, E và F . Giả sử X là giao điểm của các đường thẳng DE và AB , Y là giao điểm của đường thẳng CF và đường thẳng DE . Chứng minh rằng $IY \perp CX$.

Lời giải. Gọi Z là giao điểm thứ hai của CF và đường tròn (I) . Khi đó do $\widehat{CFE} = \widehat{CEZ}$ (cùng chắn $\widehat{EZ}$) nên

$$\triangle CEF \sim \triangle CZE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{EF}{EZ} = \frac{CF}{CE} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &\text{Tương tự có } \triangle CDF \sim \triangle CZD \\ &\Rightarrow \frac{DF}{DZ} = \frac{CF}{CD} \quad (2) \end{aligned}$$

Lại vì $CD = CE$,

nên từ (1) và (2) ta có

$$\frac{EF}{EZ} = \frac{DF}{DZ}.$$

Hay $EF \cdot DZ = EZ \cdot DF$,

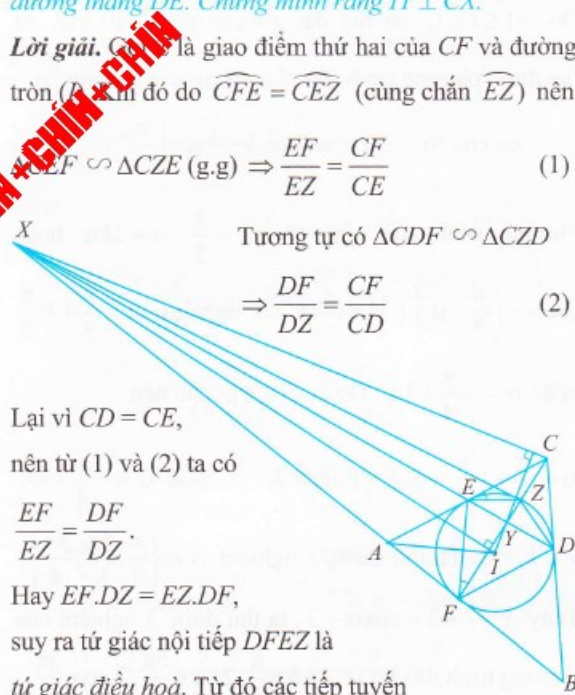
suy ra tứ giác nội tiếp $DFEZ$ là

tứ giác điều hòa. Từ đó các tiếp tuyến

với đường tròn (I) tại F, Z và đường thẳng DE phải đồng quy tại một điểm. Nghĩa là XZ là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

Tiếp theo xét cực – đối cực đối với đường tròn (I) . Theo định lý La Hire:

Ta thấy Y thuộc FZ là đường đối cực của điểm X nên đường đối cực của điểm Y phải đi qua X . (3)



Mặt khác Y thuộc DE là đường đối cực của điểm C nên đường đối cực của điểm Y phải đi qua C . (4)

Từ (3) và (4) suy ra CX là đường đối cực của điểm Y đối với đường tròn (I) . Theo tính chất về cực – đối cực ta thấy ngay $IY \perp CX$ (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Số lời giải gửi về Tòa soạn khá đông theo các hướng: Sử dụng định lý Brocard, tính chất tứ giác điều hoà; hàng điểm, chùm điều hoà, cực – đối cực. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Hoàng Tùng, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, Vũ Thanh Thảo, 11 Toán, THPT Sơn Tây; **Lào Cai:** Nguyễn Minh Hiệu, 12 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Trung Phương, Nguyễn Lê Sơn, Kim Thị Hồng Linh, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, Lê Phương Thanh, 11 Toán2, Nguyễn Thanh Huyền, 12 Toán2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hoá:** Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Lê Tiến Đạt, 11A1, THPT Nông Công I; **Nghệ An:** Trần Anh Quốc, 9A, THCS Đặng Thai Mai, Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh, Bạch Quang Hiệu, 11A1, THPT Cửa Lò, Nguyễn Thị Khánh Hoà, 10A1, THPT Quỳnh Hợp I; **Hà Tĩnh:** Hoàng Quốc Khánh, 10A1, THPT Đức Thọ; **Quảng Bình:** Hồ Anh, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** Hoàng Vũ Nam Tấn, 11T1, Nguyễn Trung Kiên, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** Nguyễn Thanh Hùng, Huỳnh Đình Ngọc Trác, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Tam Kỳ, Phạm Lý Nhật Duy, 10/1, Đinh Nguyễn Khánh, Lê Hà Khiêm, 11T1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Lê Minh Triết, 12T2, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Lê Nhất Sinh, 11A2, THPT Số 2 An Nhơn; **Đồng Tháp:** Nguyễn Phúc Tăng, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Phú Yên:** Phạm Minh Chiến, Nguyễn Kim Phương Trang, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Sóc Trăng:** Huỳnh Gia Bảo, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **An Giang:** Nguyễn Minh Uyên, 10T1, THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu; **Long An:** Nguyễn Thị Ngân Trúc, 11T1, THPT chuyên Long An; **Bình Phước:** Nguyễn Hoàng Đức, Nguyễn Tấn Tài, Trịnh Hoàng Hiệp, 11A; THPT chuyên Quang Trung; **Vĩnh Long:** Châu Minh Khánh, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/480. Giả sử a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $24ab + 44bc + 33ca \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Đặt $9a = x, 10b = y, 11c = z$ thì $a = \frac{x}{9}, b = \frac{y}{10}, c = \frac{z}{11}$

và ta thu được $P = \frac{9}{x} + \frac{10}{y} + \frac{11}{z}$ và $4xy + 6yz + 5zx \leq 15$.

Tiếp theo, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 15 số, ta có $15 \geq 4xy + 6yz + 5zx \geq 15\sqrt[15]{x^9 y^{10} z^{11}}$.

Suy ra $x^9 y^{10} z^{11} \leq 1$. (1)

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy và sử dụng (1), ta thu được

$$P = \frac{9}{x} + \frac{10}{y} + \frac{11}{z} = \underbrace{\frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{9 \text{ số hạng}} + \underbrace{\frac{1}{y} + \dots + \frac{1}{y}}_{10 \text{ số hạng}} + \underbrace{\frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z}}_{11 \text{ số hạng}} \\ \geq 30\sqrt[30]{\frac{1}{x^9 y^{10} z^{11}}} \geq 30.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay

$a = \frac{1}{9}, b = \frac{1}{10}, c = \frac{1}{11}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ là 30 khi $a = \frac{1}{9}, b = \frac{1}{10}, c = \frac{1}{11}$. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là dạng toán cơ bản về bất đẳng thức Cauchy nên có rất nhiều bạn giải trực tiếp theo cách trình bày ở trên. Một số bạn sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức Hölder cũng cho kết quả đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân; **Bình Phước:** Nguyễn Tấn Tài, Trịnh Hoàng Hiệp, Nguyễn Hoàng Đức, 11A, THPT chuyên Quang Trung; **Hà Nội:** Nguyễn Minh Hiếu, 12T1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, Hoàng Tùng, 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh:** Hoàng Quốc Khánh, 10A1, THPT Đức Thọ; **Thừa Thiên Huế:** Phan Hoàng Minh Đức, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Lâm Đồng:** Võ Minh Quân, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Long An:** Bùi Khánh Phong, Lê Trí Phú, 11T1, Phạm Quý Lộc, 10T1, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** Nguyễn Hùng Sơn, 10A2, THPT Lê Quý Đôn, Trục Ninh; **Trần Minh Hiếu,** 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Trần Anh Quốc, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Quảng Bình:** Hồ Anh, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Nam:** Phạm Thị Hồng Mỹ, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Trần Văn Tình, Phạm Lý Nhật Huy, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Quảng Trị:** Vũ Thanh Long, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thanh Hoá:** Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Đỗ Cao Bách Tùng, Phạm Anh Đức, 8B, THCS Trần Mai Ninh, Lê Tiến Đạt, 11A1, THPT Nông Công I; **Tiền Giang:** Lê Hoàng Bảo, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Vĩnh Long:** Châu Minh Khánh, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Trung Phương, Nguyễn Lê Sơn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/480. *Tìm tất cả các bộ gồm 19 số nguyên dương phân biệt có tổng bằng 2017 và tổng các chữ số của mỗi số đều bằng nhau.*

Lời giải. (Của bạn Nguyễn Minh Hiếu, 11 Toán 1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội).

Gọi 19 số đó là $a_1, \dots, a_{19}$ với $a_1 > a_2 > \dots > a_{19}$.

Kí hiệu $S(a)$ là tổng các chữ số của số $a \in \mathbb{N}^*$.

Dễ thấy $a \equiv S(a) \pmod{9}$ (1)

Theo giả thiết $\begin{cases} a_1 + \dots + a_{19} = 2017 \\ S(a_1) = S(a_2) = \dots = S(a_{19}) = t \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ (2)

Nếu $a_{19} > 99$ thì $a_1 + \dots + a_{19} > 99 + 100 + \dots + 117 > 2017$.

Vậy $a_{19} \leq 99$, khi đó $t \leq 9 + 9 = 18$.

Do (1) ta có $\sum_{i=1}^{19} (a_i - S(a_i)) = 2017 - 19t : 9$.

Kết hợp với $t \leq 18$ ta suy ra $t \in \{1, 10\}$.

Dễ thấy $t > 1$, nên $t = 10$. Vậy a_i có ít nhất hai chữ số.

Ta liệt kê dãy số (theo thứ tự tăng) có tổng các chữ số là 10. Dưới đây là 22 số đầu tiên:

19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 109, 118, 127, 136, 145, 154, 163, 172, 181, 190, 208, 217, 226.

Ta có $\sum_{i=2}^{19} a_i \geq 19 + 28 + \dots + 181 = 1800$.

Suy ra $a_1 \leq 217$. Vậy $a_1 \in \{190, 208, 217\}$.

i) Nếu $a_1 = 217$ thì (2) xảy ra khi

$$(a_2, a_3, \dots, a_{19}) = (181, 172, 163, \dots, 19).$$

ii) Nếu $a_1 = 208$. Khi đó

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{19} \geq 208 + 19 + 28 + \dots + 172 = 1827.$$

Suy ra $a_2 \leq 190$. Vậy $a_2 \in \{181, 190\}$.

Nếu $a_2 = 181$ thì $\sum_{i=1}^{19} a_i = 19 + \dots + 172 + 181 + 208 \neq 2017$.

Nếu $a_2 = 190$ thì $\sum_{i=1}^{19} a_i = 19 + \dots + 172 + 190 + 208 = 2017$

(thỏa mãn).

iii) Nếu $a_1 = 190$ thì $\sum_{i=1}^{19} a_i = 19 + 28 + \dots + 190 = 1990 \neq 2017$.

Vậy có hai bộ thỏa mãn điều kiện đầu bài là:

$\{19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 109, 118, 127, 136, 145, 154, 172, 181, 217\}$

và $\{19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 109, 118, 127, 136, 145, 154, 172, 190, 208\}$. $\square$

➤ Nhận xét. 1) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Bình Phước:** Nguyễn Tấn Tài, 11A, THPT chuyên Quang Trung; **Quảng Nam:** Đặng Thị Trà My, 10/1, Phan Tam Li Na, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hoá:** Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn.

2) Có tương đối ít bạn tham gia giải bài này, trong số đó có một số có lời giải chưa được trọn vẹn (chỉ tìm được một bộ số).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/480. Cho dãy số $(a_n), (n = 0, 1, 2, \dots)$ được xác định bởi $a_0 = 610, a_1 = 89$ và $a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n$ với $n = 0, 1, 2, \dots$. Tìm tất cả các giá trị của n để $2a_{n+1}a_n - 3$ là lũy thừa bậc bốn của một số nguyên.

Lời giải. Ta có $a_2 = 7a_1 - a_0 = 7.89 - 610 = 13, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 5$ và bằng quy nạp theo n

$a_4 = 1 < a_5 = 5 < a_6 < \dots$ là dãy các số nguyên dương.

Cũng từ giả thiết ta suy ra $a_{n+2} + a_n = 7a_{n+1}, \forall n \geq 0$.

$$\Rightarrow (a_{n+2} + a_n) \cdot a_n = 7a_{n+1}a_n = a_n \cdot 7a_{n+1} = a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-1})$$

$$\Rightarrow a_{n+2}a_n = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2, \forall n \geq 1.$$

$$\text{Do vậy với mọi } n \in \mathbb{N}, a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 =$$

$$a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = \dots = a_2a_0 - a_1^2 = 13.610 - 89^2 = 9.$$

$$\text{Bởi vậy } a_{n+1}^2 = (7a_n - a_{n-1})a_{n+1}$$

$$= 7a_n \cdot a_{n+1} - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = 7a_n \cdot a_{n+1} - (a_n^2 + 9)$$

$$\Rightarrow a_n \cdot a_{n+1} - 1 = \left(\frac{a_{n+1} + a_n}{3} \right)^2 \text{ đúng với mọi } n \geq 1 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } 2a_1a_0 - 3 = 2.89.610 - 3 = 108577,$$

$$18^4 < 108577 < 19^4.$$

$$\text{Xét } n \geq 1: 2a_n a_{n+1} - 3 = y^4 \quad (y \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = y^4, x = \frac{a_{n+1} + a_n}{3} \in \mathbb{N}^* \text{ (theo (1)).}$$

Ta sẽ chứng minh phương trình $2x^2 - 1 = y^4$ có nghiệm nguyên dương duy nhất $x = y = 1$ (suy ra $n = 3$ là số tự nhiên duy nhất thỏa mãn bài toán).

Phân chứng, giả sử phương trình $2x^2 - 1 = y^4$ có nghiệm nguyên dương $x > 1, y > 1$ ($x > 1 \Rightarrow y > 1$).

Ta thấy y là số nguyên dương lẻ lớn hơn 1 $\Rightarrow y^2 = 2a + 1$ ($a \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow 2x^2 = (2a+1)^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 2a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 + a^2.$$

$$\text{Chú ý } y^2 = 2a+1 = (a+1)^2 - a^2.$$

Ta sẽ chứng minh không tồn tại các số nguyên

$$\text{dương } p, q, x, y \text{ thoả mãn } \begin{cases} p^2 + q^2 = x^2 \\ p^2 - q^2 = y^2 \end{cases} \quad (2)$$

Phản chứng, ta xét các số nguyên dương p, q, x, y thoả mãn (2) mà $p^2 + q^2$ nhỏ nhất. Suy ra $(p, q) = 1$ và từ (2) ta có $x > y$ là hai số cùng tính chẵn, lẻ.

$$\text{Cũng từ (2) ta suy ra } p^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = m^2 + n^2 \quad (3)$$

trong đó $m = \frac{x+y}{2}, n = \frac{x-y}{2}$ là các số nguyên dương,

$$(m, n) = 1 \text{ vì nếu } m:d, n:d \text{ thì suy ra } x = m+n:d,$$

$$y = m-n:d, p^2 = m^2 + n^2:d^2 \Rightarrow p:d \Rightarrow q:d \quad (d \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ do } (p, q) = 1.$$

Từ (3), theo phương trình Pythagore, tồn tại các số

$$\text{nguyên dương } u, v \text{ thoả mãn } \begin{cases} m = u^2 - v^2, n = 2uv \\ m = 2uv, n = u^2 - v^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2q^2 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 4mn = 8uv(u^2 - v^2)$$

$$\Rightarrow q^2 = 4uv(u^2 - v^2) \Rightarrow q \text{ chẵn.}$$

$$\text{Đặt } q = 2z \quad (z \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow z^2 = uv(u^2 - v^2)$$

Chú ý $(m, n) = 1 \Rightarrow (u, v) = 1 \Rightarrow$ các số $u, v, u-v, u+v$ đôi một nguyên tố cùng nhau

$$\Rightarrow \exists k, l, r, s \in \mathbb{N}^* : u = k^2, v = l^2, u+v = r^2, u-v = s^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k^2 + l^2 = r^2 \\ k^2 - l^2 = s^2 \end{cases}, \text{ trong khi đó}$$

$$k^2 + l^2 = u + v < 4uv(u-v)(u+v) = q^2 < p^2 + q^2.$$

Mâu thuẫn với (p, q, x, y) là các số nguyên dương thoả mãn (2) và $p^2 + q^2$ nhỏ nhất.

Vậy $n = 3$ là số tự nhiên duy nhất thoả mãn bài toán. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán đại số, số học khó và rất phức tạp nhưng có nhiều lý luận hay. Trong các bạn gửi lời giải tới toà soạn chỉ có một bạn có lời giải đúng: **Quảng Nam: Phạm Lý Nhật Duy**, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T12/480. Cho tam giác ABC không cân và không vuông tại A . BE, CF là các đường cao. Các đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng đi qua A và theo thứ tự tiếp xúc với BC tại B, C . D là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2) . M, N theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BA, BD và (O_2) . P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của CA, CD và (O_1) . R là giao điểm của AD và EF . S là giao điểm của MP và NQ . Chứng minh $RS \perp BC$.

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

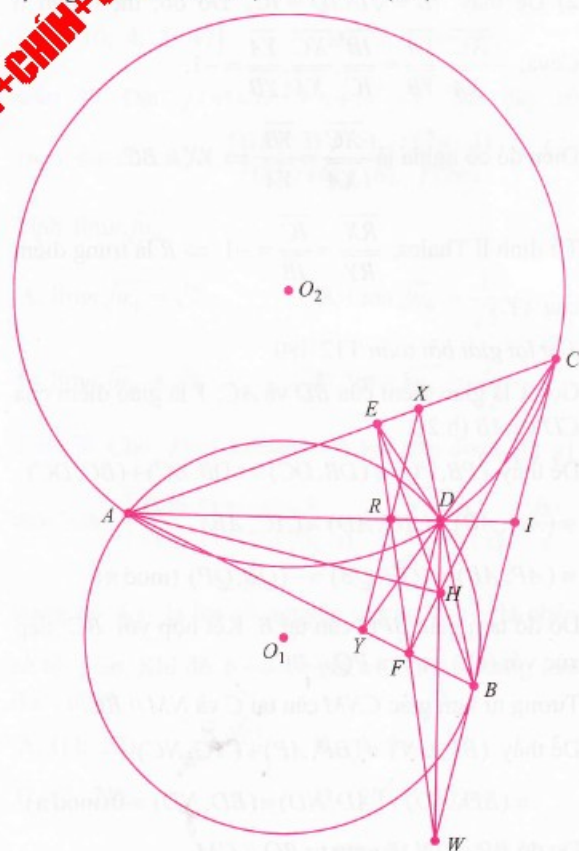
Bổ đề. Cho tam giác ABC , BE, CF là các đường cao. Các đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng đi qua A và theo thứ tự tiếp xúc với BC tại B, C . D là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2) . R là giao điểm của AD và EF . X là giao điểm của BD và AC . Y là giao điểm của CD và AB . Khi đó

1) R thuộc XY .

2) $XY \parallel BC$ và $RX = RY$.

Chứng minh

1) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC ; I, W theo thứ tự là giao điểm của AD, EF với BC (h.1).



Hình 1

Vì $BE \perp CE; BF \perp CF$ nên bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn. Dễ thấy

$$\begin{aligned}(DB, DC) &= (DB, BC) + (BC, DC) \\ &= (AD, AB) + (AC, AD) = (AC, AB) = (HB, HC) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó bốn điểm B, C, D, H cùng thuộc một đường tròn. Vậy $(DH, DA) = (DH, DB) + (DB, DA)$

$$= (CH, CB) + (BC, BA) = (CH, BA) = \frac{\pi}{2}.$$

Từ đó, chú ý rằng $HE \perp AE; HF \perp AF$, suy ra năm điểm A, H, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Vì BC, HD, EF theo thứ tự là trục đẳng phương của các cặp đường tròn $(BCEF), (BCDH); (BCDH), (AHDEF); (AHDEF), (BCEF)$ nên BC, EF, DH đồng quy. Nói cách khác D, H, W thẳng hàng.

$$\text{Vậy } (ADRI) = W(ADRI) = W(AHEB) = -1.$$

$$\text{Do đó } B(YXRC) = B(ADRI)$$

$$= (ADRI) = (DARI) = C(DARI) = C(YXRB).$$

Điều đó có nghĩa là R, X, Y thẳng hàng.

2) Dễ thấy $IB = \sqrt{IA \cdot ID} = IC$. Do đó, theo định lý

$$\text{Ceva, } -\frac{\overline{XC}}{\overline{XA}} \cdot \frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} \cdot \frac{\overline{XC}}{\overline{XA}} \cdot \frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = -1.$$

$$\text{Điều đó có nghĩa là } \frac{\overline{XC}}{\overline{XA}} = \frac{\overline{YB}}{\overline{YA}} \Rightarrow YX \parallel BC.$$

Từ định lý Thales, $\frac{\overline{RX}}{\overline{RY}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{IB}} = -1 \Rightarrow R$ là trung điểm của XY .

Trở lại giải bài toán T12/480.

Gọi X là giao điểm của BD và AC ; Y là giao điểm của CD và AB (h.2).

$$\begin{aligned}\text{Dễ thấy } (PB, PQ) &= (DB, DC) = (DB, BC) + (BC, DC) \\ &= (AD, AB) + (AC, AD) = (AC, AB) \\ &= (AP, AB) = (QP, QB) = -(QB, QP) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

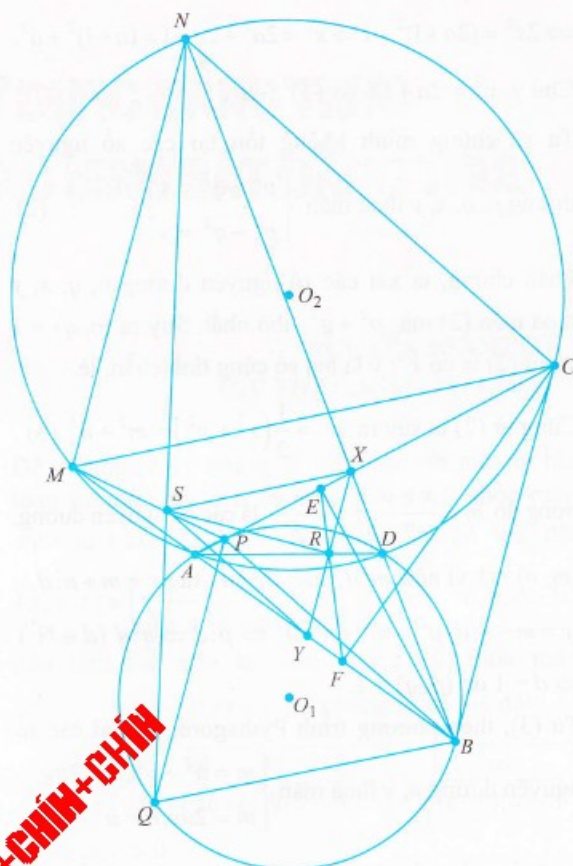
Do đó tam giác BPQ cân tại B . Kết hợp với BC tiếp xúc với (O_1) , suy ra $PQ \parallel BC$.

Tương tự tam giác CNM cân tại C và $NM \parallel BC$.

$$\begin{aligned}\text{Dễ thấy } (BP, CN) &= (BP, AP) + (AC, NC) \\ &= (BD, AD) + (AD, ND) = (BD, ND) = 0 \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó $BP \parallel CN$. Tương tự $BQ \parallel CM$.

Vậy $NM \parallel PQ; MC \parallel PQ; MC \parallel QB \parallel CN \parallel BP$.



Hình 2

Do đó các tam giác CMN, BPQ hoặc là ảnh của nhau qua một phép vị tự hoặc là ảnh của nhau qua một phép tịnh tiến.

$$\text{Vậy } \frac{\overline{XP}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{NC}} = -\frac{\overline{PB}}{\overline{NC}} = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{SP}}{\overline{SM}}.$$

Do đó $SX \parallel CM$. Tương tự, chú rằng $BP \parallel CN$, ta có $SY \parallel BP \parallel CN$. Theo bổ đề trên, chú ý rằng $MN \parallel BC$, ta có $XY \parallel BC \parallel MN$. Vậy các tam giác SXY, CMN đồng dạng (cùng hướng). Từ đó, chú ý rằng tam giác CMN cân tại C , suy ra tam giác SXY cân tại S (1)

Theo bổ đề trên, $RX = RY$ (2)

Từ (1) và (2), chú ý rằng $XY \parallel BC$, suy ra $SR \perp BC$. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán hay và khó, số bạn tham gia giải không nhiều, đa số lời giải phụ thuộc hình vẽ.

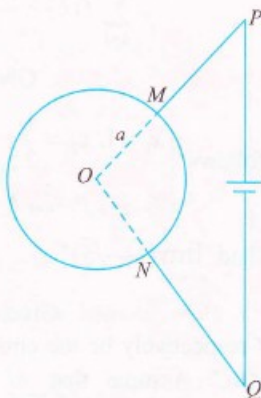
2) Lời giải trên dựa vào ý tưởng của bạn **Võ Minh Quân**, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng**.

3) Xin nêu tên tất cả các bạn: **Vĩnh Phúc:** Đỗ Trung Phương, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn

Trung Kiên, 11T2, Huỳnh Hữu Nhật, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam:** Lê Hà Khiêm, 11T, Đinh Nguyễn Khánh, 10T, Phạm Li Nhật Duy, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Lê Minh Triết, 12T1, THPT Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/480. Người ta mắc hai điểm bất kì của vòng dây dẫn đồng chất, tiết diện đều, tâm O bán kính a hai dây dẫn thẳng rất dài hướng theo phương bán kính của vòng dây. Hai đầu của hai dây dẫn thẳng được nối vào nguồn điện ở xa. Tính cảm ứng từ tại tâm vòng dây.



Lời giải. Áp dụng nguyên lý chồng chất từ trường:

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_{AMP} + \vec{B}_{ANQ}.$$

Vì cảm ứng từ tại một điểm nằm trên phương của một dây dẫn bằng 0, do đó ta có:

$$\vec{B}_d = 0 \Rightarrow \vec{B}_0 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Gọi I_1, I_2 lần lượt là độ dài của các đoạn dây (1), (2) (hình bên).

$\vec{B}_1$: có phương vuông góc với mặt phẳng đường tròn tâm O ; chiều hướng ngoài vào trong; Độ lớn:

$$B_1 = \frac{2\pi \cdot 10^{-7} I_1 I_1}{a \cdot 2\pi a} = \frac{10^{-7} I_1 I_1}{a^2}.$$

$\vec{B}_2$: có phương vuông góc với mặt phẳng đường tròn tâm O ; chiều hướng từ trong ra ngoài; Độ lớn:

$$B_2 = \frac{2\pi \cdot 10^{-7} I_2 I_2}{a \cdot 2\pi a} = \frac{10^{-7} I_2 I_2}{a^2}.$$

Vì $\vec{B}_1, \vec{B}_2$ cùng phương ngược chiều

$$\Rightarrow B_0 = |B_1 - B_2| = \frac{10^{-7}}{a^2} |I_1 I_1 - I_2 I_2|.$$

Gọi R_1, R_2 lần lượt là điện trở của các đoạn dây (1), (2). Vì $R_1 \parallel R_2 \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2$

Vòng dây là đồng chất tiết diện đều nên:

$$R_1 \sim I_1; R_2 \sim I_2 \Rightarrow I_1 I_1 = I_2 I_2 \Rightarrow B_0 = 0. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Chúc mừng hai bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: **Lào Cai:** Lý Nhật Linh, 11 Toán, THPT chuyên Lào Cai, TP. Lào Cai; **Thừa Thiên Huế:** Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

DINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/480. Mạch điện gồm tải Z_2 nối với điện trở R rồi nối vào nguồn điện xoay chiều có điện áp hiệu dụng U_1 . Khi đó, điện áp hiệu dụng và hệ số công suất trên tải là U_2 và $\cos \varphi_2 = 0,6$; điện áp hai đầu

R là $\Delta U = \frac{U_2}{4}$; hệ số công suất toàn mạch là

$\cos \varphi_1 = 0,8$. Bằng cách điều chỉnh tải Z_2 và điện áp nguồn, người ta làm cho công suất tiêu thụ trên R giảm 100 lần còn công suất tiêu thụ P_2 và hệ số $\cos \varphi_2$ trên tải không đổi. Khi đó, điện áp đầu nguồn phải tăng bao nhiêu lần?

Lời giải. Ban đầu $\vec{U}_1 = \Delta \vec{U} + \vec{U}_2$ suy ra

$$U_1 \cos \varphi_1 = \Delta U + U_2 \cos \varphi_2 = \frac{1}{4} U_2 + U_2 \cos \varphi_2$$

$$\text{hay } U_1 = \frac{U_2}{\cos \varphi_1} (0,25 + \cos \varphi_2) = \frac{17}{16} U_2 \quad (1)$$

Công suất tỏa nhiệt trên R giảm 100 lần:

$$\Delta P' = \Delta P / 100 \Rightarrow I' = \frac{I}{10} \text{ và } \Delta U' = \frac{\Delta U}{10} = \frac{U_2}{40} \quad (2)$$

$$\text{Lại có: } P_2 = U_2 I \cos \varphi_2 = U_2' I' \cos \varphi_2 \Rightarrow U_2' = 10 U_2 \quad (3)$$

Mặt khác $\vec{U}_1' = \vec{U}_2' + \Delta \vec{U}'$ suy ra

$$-\cos \varphi_2 = \frac{U_2'^2 + \Delta U'^2 - U_1'^2}{2 U_2' \cdot \Delta U'} \quad (4)$$

Từ các biểu thức trên ta tìm được:

$$U_1' = U_2 \sqrt{10^2 + \frac{1}{40^2} + 2 \cdot 0,6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{40}} = 10,015 U_2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (1) và (5) ta tính được: } \frac{U_1'}{U_1} \approx 9,43. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Rất tiếc không có bạn nào gửi lời giải cho bài Vật lý này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEM...

(Tiếp theo trang 25)

FOR HIGHSCHOOL

Problem T7/484. Prove that the following inequalities hold for every positive integer n

$$\ln \frac{n+1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \log_2 \frac{n+1}{2}.$$

And hence deduce that $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = +\infty$.

Problem T8/484. Assume that the incircle I of the triangle ABC is tangent to BC , CA and AB respectively at D , E and F . Draw DG perpendicular to EF (G belongs to EF). Let J be the midpoint of DG . The line EJ intersects the circle (I) at H . Let K be the circumcenter of the triangle FGH . Prove that $IK \parallel BH$.

Problem T9/484. Given positive numbers x, y, z satisfying $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{16}{x+y+z}$.

Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/484. For each positive integer n , let $f(n)$ be the sum of the squares of the positive divisors of n . Find all positive integers n such that

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \frac{10n^3 + 15n^2 + 2n}{24}.$$

Problem T11/484. Given the sequence (x_n) as

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2} \\ x_{n+2}x_n = x_{n+1}^2 + 4^{-n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Find $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - \sqrt{5})^n x^n$.

Problem T12/484. Given a triangle ABC . Let (O) and I respectively be the circumcircle and the incenter of ABC . Assume that AI intersects BC at A_1 and intersects (O) at another point A_2 . Similarly we get the points B_1, B_2 and C_1, C_2 . Suppose that B_1C_1 intersects A_1A_2 at A_3 ; A_1C_1 intersects A_2C_2 at B_3 ; A_1B_1 intersects A_2B_2 at C_3 . Prove that A_3, B_3, C_3 belong to a line which is perpendicular to OI .

KỲ THI OLYMPIC...

(Tiếp theo trang 25)

Bài 5. (Lớp 8) (Trần Quang Hùng, Việt Nam.) Cho hình vuông $ABCD$, P là điểm bất kỳ trên đường nhỏ DC của đường tròn ngoại tiếp hình vuông. PA, PB cắt đường chéo BD và AC tại K và L . Gọi M, N là hình chiếu của K, L trên cạnh CD , Q là giao điểm KN và LM . Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm AB .

Bổ đề. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A , hai đường thẳng BP, CQ vuông góc với BC thỏa mãn $BP = AB$ và $CQ = CA$ (P và Q không cùng phía với A đối với bờ BC), E là giao điểm BQ và CP , M và N là giao điểm AP và AQ với cạnh BC . Khi đó AE đi qua trung điểm MN .

Chứng minh. (h.5) Tam giác BAP cân nên $\widehat{BAP} = \widehat{BPA}$. Mặt khác $\widehat{MAC} = 90^\circ - \widehat{BAP}$, $\widehat{AMC} = \widehat{BMP} = 90^\circ - \widehat{BPA}$

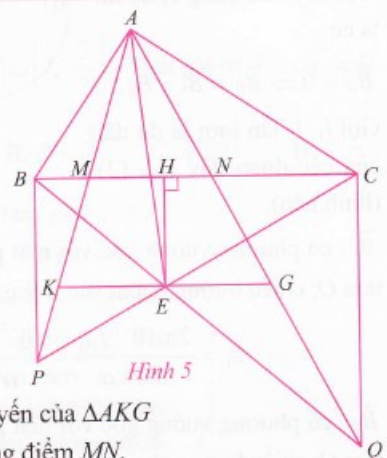
$$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{AMC} \Rightarrow \triangle CAM \text{ cân}$$

$$\Rightarrow CA = CM = CQ, \text{ tương tự có } BA = BN = BP.$$

Gọi K, G lần lượt là giao điểm của AP và AQ với đường thẳng qua E song song với BC , H là hình chiếu

$$\text{của } E \text{ trên } BC \text{ thì } \frac{EK}{CM} = \frac{PE}{PC} = \frac{BE}{BQ} = \frac{EH}{CQ}$$

$$\Rightarrow EK = EH. \text{ Tương tự có } EH = EG$$



Hình 5

$\Rightarrow AE$ là trung tuyến của $\triangle AKG$

$\Rightarrow AE$ đi qua trung điểm MN .

Trở lại bài toán 5 (h.6). Do KM vuông góc với CD

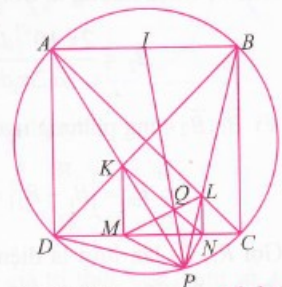
$$\Rightarrow \widehat{KMD} = 90^\circ,$$

$\widehat{APD} = 45^\circ \Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle PKD \Rightarrow MK = MP$.

Tương tự có $LN = PN$

$$\Rightarrow \widehat{MPN} = 90^\circ \Rightarrow \triangle MPN \text{ vuông tại } P.$$

Áp dụng bổ đề trên ta suy ra điều cần chứng minh.



Hình 6

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 25

Problem. Given a polynomial with non-negative integer coefficients $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

Suppose that $f(1) = 6$, $f(8) = 36945$. Compute

$$a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n.$$

Solution: Since $f(1) = 6$ and the coefficients a_i are natural numbers, we have $0 \leq a_i \leq 6$.

From this and $f(8) = a_0 + a_1 \cdot 8 + \dots + a_n 8^n = 36945$

we see that $a_0 + a_1 \cdot 8 + \dots + a_n 8^n$ is the (unique) octal representation of 36945.

We can easily find the octal representation of 36945

$$36945 = 8^5 + 8^4 + 8^2 + 2 \cdot 8 + 1.$$

Therefore $f(x) = 1 + 2x + x^2 + x^4 + x^5$ and hence

$$a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n = 0.$$

TỪ VỰNG

polynomial : đa thức

octal representation : biểu diễn trong hệ cơ số 8



Bài toán. Cho S là tập hợp tất cả các số phức thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = 2$ (1).

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

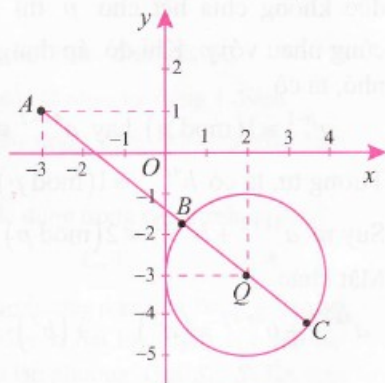
$$P(z) = |z + 3 - i|, z \in S \quad (2)$$

Lời giải. Chúng ta giải bài toán này bằng phương pháp hình học.

Gọi $A(-3; 1)$ và $Q(2; -3)$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức $-3 + i$ và $2 - 3i$. Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z .

Từ (1) ta thấy khoảng cách MQ luôn bằng 2 khi M thay đổi, nghĩa là tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z ($z \in S$) là đường tròn $(Q, 2)$. Bài toán trở thành tìm khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AM khi M thay đổi trên đường tròn $(Q, 2)$.

Giả sử đường thẳng qua A và Q cắt đường tròn $(Q, 2)$ tại B và C , trong đó B gần A hơn C (xem hình vẽ). Dễ thấy AM đạt giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) khi M ở vị trí B (tương ứng M ở vị trí C).



Do đó giá trị nhỏ nhất của $P(z) = |z + 3 - i|, z \in S$ là AB và bằng $AQ - QB = \sqrt{41} - 2$.

Tương tự, giá trị lớn nhất của biểu thức $P(z) = |z + 3 - i|, z \in S$ là AC và bằng $AQ + QC = \sqrt{41} + 2$.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn sau đã có bài dịch tốt, gửi bài đến Toà soạn sớm: **Hải Dương:** Nguyễn Đặng Sơn, 12A, THPT Nam Sách; **Quảng Nam:** Nguyễn Lê Thanh Hằng, 10/1, Trương Nhật Nguyên Bảo, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Đồng Tháp:** Lê Vũ Lam Hiền, 10A1, THPT Tháp Mười, Tháp Mười; **Vĩnh Long:** Lê Minh Quân, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ HẢI (Hà Nội)



VỀ MỘT TÍNH CHẤT ĐẸP CỦA SỐ NGUYÊN TỐ

CAO MINH QUANG (GV THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long)
NGUYỄN HỮU NGHĨA (GV Đại học Xây dựng Miền Tây, Vĩnh Long)

Số nguyên tố là một đối tượng cơ bản của số học mà bất kỳ một học sinh cấp THCS nào cũng biết. Các bài toán số học trong các kỳ thi học sinh giỏi cũng thường có liên quan đến các dạng về số nguyên tố. Trong phạm vi bài viết nhỏ này, chúng tôi xin trình bày một tính chất đẹp và hữu dụng của số nguyên tố.

1. Một số tính chất của số nguyên tố dạng $4k+3$

Tính chất 1. Cho p là một số nguyên tố có dạng $4k+3$ và a, b là các số nguyên dương. Khi đó, nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho p thì a và b đều chia hết cho p .

Chứng minh. Nếu a chia hết cho p thì suy ra b cũng chia hết cho p và ngược lại. Nếu a và b đều không chia hết cho p thì a, b nguyên cùng nhau với p . Khi đó, áp dụng định lý Fermat nhỏ, ta có

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ hay } a^{4k+2} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Tương tự, ta có $b^{4k+2} \equiv 1 \pmod{p}$.

Suy ra $a^{4k+2} + b^{4k+2} \equiv 2 \pmod{p}$.

Mặt khác

$$a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} : (a^2 + b^2) : p \quad (\text{mâu thuẫn}).$$

Tính chất 2. Mọi số nguyên dương có dạng $4m+3$ đều có ước nguyên tố dạng $4k+3$.

Chứng minh. Mọi ước của số nguyên $4m+3$ đều có dạng $4k+1$ hoặc $4k+3$. Nếu $4m+3$ không có ước nguyên tố dạng $4k+3$, tức là chỉ có ước nguyên tố dạng $4k+1$ thì khi đó $4m+3$ chia 4 sẽ có dư 1, điều này là vô lý.

Như vậy, để ứng dụng được các tính chất trên để giải toán ta phải cố gắng làm xuất hiện tổng bình phương của hai đại lượng nguyên, hoặc cũng có

thể chứng minh sự tồn tại của biểu thức dạng $4m+3$ trong các bài toán. Sau đây là một số bài toán minh họa.

2. Một số bài toán

Bài toán 1. (HOMC 2008, Junior) Giải phương trình $x^2 + y^2 = 3(x+y)$ trên tập các số nguyên dương.

Lời giải. Ta có $x^2 + y^2$ chia hết cho 3 nên x, y cùng chia hết cho 3. Đặt $x = 3m, y = 3n$, trong đó m, n là các số nguyên dương. Khi đó ta có PT: $m^2 + n^2 = m + n$.

Vì $m \geq 1, n \geq 1$ nên $m^2 + n^2 \geq m + n$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = n = 1$ hay $x = y = 3$.

Bài có nghiệm nguyên dương duy nhất là $(3; 3)$.

Bài toán 2. Cho n là một số nguyên dương sao cho $n \not\equiv 4 \pmod{11}$. Chứng minh rằng

$$n^2 + 3n + 5 \text{ không chia hết cho } 11.$$

Lời giải. Phản chứng, giả sử $A = n^2 + 3n + 5$ chia hết cho 11. Khi đó $2A$ cũng chia hết cho 11. Ta có $2A = 2n^2 + 6n + 10 = (n+7)^2 + (n-4)^2 - 55$.

Vì 11 là số nguyên tố có dạng $4k+3$ nên suy ra $n+7$ và $n-4$ cùng chia hết cho 11 (mâu thuẫn).

Bài toán 3. (HSG Đồng Tháp, 2013) Giải phương trình nghiệm nguyên $(x+y)^2 + 2 = 2x + 2013y$.

Lời giải. PT trên tương đương với

$$(x+y)^2 - 2(x+y) + 1 + 1 = 2011y$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)^2 + 1 = 2011y.$$

Từ đó suy ra $(x+y-1)^2 + 1$ chia hết cho 2011.

Vì 2011 là số nguyên tố có dạng $4k+3$ nên PT trên vô nghiệm.

Bài toán 4. [Phương trình Euler] Chứng minh rằng phương trình $4xy - x - y = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải. PT trên tương đương với

$(4x-1)(4y-1)=(2z)^2+1^2$. Vì vế trái của phương trình có chứa thừa số dạng $4m+3$ nên nó có ước nguyên tố dạng $p=4k+3$. Suy ra p là ước của 1 (vô lý). PT không có nghiệm nguyên dương.

Bài toán 5. (Phương trình Lebesgue) Giải phương trình $x^2 - y^3 = 7$ trong tập hợp các số tự nhiên.

Lời giải. Nếu y là số chẵn, tức là $y=2k$ thì $x^2=8k^3+7$ chia 8 dư 7 là điều không thể. Vậy y phải là số lẻ. Ta có

$$x^2+1=y^3+8 \Leftrightarrow x^2+1=(y+2)(y^2-2y+4).$$

Nếu y chia 4 dư 1 thì $y+2$ có dạng $4k+3$.

Nếu y chia 4 dư 3 thì y^2-2y+4 có dạng $4k+3$. Vì vậy, trong mọi trường hợp, vế trái đều có ước dạng $4k+3$ và do đó có ước nguyên tố dạng $4k+3$, điều này mâu thuẫn. PT đã cho không có nghiệm tự nhiên.

Bài toán 6. (Problem 464, Mathematical Excalibur, Hong Kong) Tìm số nguyên dương n sao cho với mỗi số n , tồn tại số nguyên m để $2^n - 1$ là ước của số $m^2 + 289$.

Lời giải. Trước hết $n=1$ là một giá trị nhận được. Với $n>1$, ta có $2^n - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ nên $2^n - 1$ có ước số nguyên tố $p=4k+3$. Suy ra p là ước của $m^2 + 17^2$, và do đó p là ước số của 17, vô lý. Vậy $n=1$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Bài toán 7. Tồn tại hay không số nguyên tố p sao cho $3^p + 19(p-1)$ là số chính phương?

Lời giải. Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $3^p + 19(p-1) = n^2$, trong đó n là một số nguyên dương. Nếu $p=2$ thì $n^2=28$ (vô lý). Nếu $p>2$, thì vì p là số nguyên tố nên p có dạng $4k+1$ hoặc $4k+3$.

Nếu $p=4k+1$ thì $3^p + 19(p-1) \equiv 3 \pmod{4}$ hay $n^2 \equiv 3 \pmod{4}$ (vô lý).

Nếu $p=4k+3$ thì ta có $3^p + 19(p-1) \equiv -16 \pmod{p}$, suy ra $n^2 + 16 \equiv 0 \pmod{p}$, do đó p là ước của

4 (vô lý). Vậy không tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn đề bài.

Bài toán 8. (HSG Hà Tĩnh, 2013) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $p^3 + \frac{p-1}{2}$ không phải là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải. Nếu $p=2$ thì $p^3 + \frac{p-1}{2}$ không nguyên.

Nếu $p=4k+1$ thì $p^3 + \frac{p-1}{2} = (4k+1)^3 + 2k$

là số lẻ, nên $p^3 + \frac{p-1}{2}$ không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Nếu $p=4k+3$. Giả sử $p^3 + \frac{p-1}{2} = x(x+1)$

$$\Leftrightarrow 2p(2p^2+1) = (2x+1)^2 + 1 \text{ với } x \in \mathbb{N}.$$

Suy ra $(2x+1)^2 + 1$ vô lý vì $p=4k+3$.

Từ các trường hợp trên, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 9. Cho n là một số nguyên dương chẵn và M là số nguyên dương có đúng n^2 ước dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng M là một lũy thừa bậc 4 của một số nguyên.

Lời giải. Giả sử $M = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_i^{n_i}$. Số ước dương của M là $\sigma(M) = (n_1+1)(n_2+1)\dots(n_i+1)$.

Suy ra $n^2 + 1 = (n_1+1)(n_2+1)\dots(n_i+1)$ (vì M có đúng n^2 ước dương lớn hơn 1).

Do n là số chẵn nên các giá trị $n_1, n_2, \dots, n_i$ đều chẵn. Khi đó mỗi số n_j sẽ có dạng $4k_j$ hoặc $4k_j + 2$. Giả sử tồn tại giá trị $n_i = 4k_i + 2$. Khi đó $n_i + 1 = 4k_i + 3$ sẽ có ước nguyên tố dạng $p = 4k + 3$. Suy ra p là ước của $n^2 + 1$, điều này là không thể. Do đó mỗi số n_j chỉ có dạng $4k_j$ hay M là một lũy thừa bậc 4 của một số nguyên.

Bài toán 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$, trong đó x, y là những số nguyên dương thỏa mãn điều kiện A chia hết cho 2010.

Lời giải. Ta có $2010 = 10 \cdot 3 \cdot 67$. Vì A chia hết cho 3 và 67 mà 3, 67 là các số nguyên tố có dạng $4k+3$ nên theo bổ đề ta có x chia hết cho 3 và 67. Vì $(3, 67) = 1$ nên $x:201$. Suy ra $x^2:201^2 = 40401$. Tương tự $y^2:40401$, suy ra $A:40401$.

Ta có $A \vdots 10$ và $(10, 40401) = 1$ nên $A \vdots 404010$, suy ra $A \geq 404010$. Chú ý rằng $10 = 1^2 + 3^2$ nên ta có thể tìm được $x = 201, y = 603$ để $A = 404010$. Vậy min $A = 404010$.

Bài toán 11. (Chọn ĐT Phổ thông Năng khiếu, 2013) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2013$, $u_{n+1} = u_n^3 - 4u_n^2 + 5u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm tất cả các số nguyên tố p thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $p \equiv 3 \pmod{4}$ và p là ước của $u_{2014} + 2009$.

Lời giải. Ta có

$$u_{n+1} - 2 = u_n^3 - 4u_n^2 + 5u_n - 2 = (u_n - 1)^2 (u_n - 2).$$

Do đó $\frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} = (u_n - 1)^2$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - 2}{u_1 - 2} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} \cdot \frac{u_n - 2}{u_{n-1} - 2} \cdots \frac{u_2 - 2}{u_1 - 2} \\ &= (u_n - 1)^2 (u_{n-1} - 1)^2 \cdots (u_1 - 1)^2. \end{aligned}$$

Do đó $u_{2014} + 2009$

$$\begin{aligned} &= (u_1 - 2)(u_{2013} - 1)^2 \cdot (u_{2012} - 1)^2 \cdots (u_1 - 1)^2 + 2011 \\ &= 2011 \left[(u_{2013} - 1)^2 \cdot (u_{2012} - 1)^2 \cdots (u_1 - 1)^2 + 1 \right] \end{aligned}$$

Vì p là ước của $u_{2014} + 2009$ nên

$$2011 \left[(u_{2013} - 1)^2 \cdot (u_{2012} - 1)^2 \cdots (u_1 - 1)^2 + 1 \right]$$

chia hết cho p .

Ta không thể có $(u_{2013} - 1)^2 \cdot (u_{2012} - 1)^2 \cdots (u_1 - 1)^2 + 1$ chia hết cho p nên 2011 chia hết cho p . Vậy $p = 2011$.

Bài toán 12. Tìm tất cả các số nguyên x, y sao

cho $\frac{x^2 + 1}{y^2 - 5}$ là một số nguyên dương.

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên x, y sao

cho $\frac{x^2 + 1}{y^2 - 5}$ là một số nguyên dương hay $x^2 + 1$

chia hết cho $y^2 - 5 > 0$. Vì một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có dư là 0 hoặc 1 nên $y^2 - 5$ chia 4 dư là 0 hoặc 3.

Nếu $y^2 - 5 \equiv 0 \pmod{4}$ thì $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$

hay $x^2 \equiv 3 \pmod{4}$ (vô lý).

Nếu $y^2 - 5 \equiv 3 \pmod{4}$ thì $y^2 - 5$ sẽ có ít nhất một ước nguyên tố p dạng $4k + 3$, suy ra $x^2 + 1$ sẽ có ước nguyên tố dạng $4k + 3$, điều này là không thể xảy ra. Vậy không tồn tại các số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 13. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^{2002} + y^{2002} = 2003^{2001} (x^3 + y^3).$$

Lời giải. Trước hết ta nhận thấy 2003 là một số nguyên tố có dạng $4k + 3$. Vì 2003 là ước số của $x^{2002} + y^{2002} = (x^{1001})^2 + (y^{1001})^2$ nên suy ra

$2003 \mid x^{1001}$ và $2003 \mid y^{1001}$ hay $2003 \mid x$ và $2003 \mid y$. Bây giờ đặt $x = 2003x_1$ và $y = 2003y_1$. Thay vào PT ban đầu, ta có

$$2003^{2002} (x_1^{2002} + y_1^{2002}) = 2003^{2004} (x_1^3 + y_1^3)$$

$$\Leftrightarrow x_1^{2002} + y_1^{2002} = 2003^2 (x_1^3 + y_1^3).$$

Bằng lý luận tương tự như trên, ta cũng có $2003 \mid x_1$ và $2003 \mid y_1$. Tiếp tục quá trình như

trên, ta có $2003^{1997} (x_2^{2002} + y_2^{2002}) = x_2^3 + y_2^3$.

Có ý rằng các giá trị x_2, y_2 đều là các nguyên nên $2003^{1997} (x_2^{2002} + y_2^{2002}) \geq x_2^3 + y_2^3$.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x_2 = y_2 = 0$ nên suy ra PT ban đầu có nghiệm nguyên duy nhất là $(0, 0)$.

Bài toán 14. (Ion Cucurezeanu) Cho n là một số lẻ lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình $x^n + 2^{n-1} = y^2$ không có nghiệm x, y đều là các số nguyên dương lẻ.

Lời giải. Phản chứng. Giả sử PT có nghiệm x, y đều là các số nguyên dương lẻ. PT đã cho được viết lại dưới dạng $x^n + 2^n = y^2 + 2^{n-1}$.

Vì x là một số lẻ nên $x = 4m + 1$ hoặc $x = 4m + 3$.

Nếu $x = 4m + 3$ thì $x^n + 2^n$ có dạng $4t + 3$ nên $x^n + 2^n$ có ước nguyên tố dạng $4k + 3$.

Nếu $x = 4m + 1$ thì $x^n + 2^n$ chia hết cho $x + 2 = 4m + 3$ (vì n là số lẻ), suy ra $x^n + 2^n$ có ước nguyên tố dạng $4k + 3$.

Do đó trong mọi trường hợp thì $x^n + 2^n$ luôn có ước nguyên tố p dạng $4k + 3$, suy ra p là ước của $y^2 + 2^{n-1}$, và do đó p là ước của 2^{n-1} (vô lý).

Bài toán 15. (Ion Cucurezeanu) Chứng minh rằng phương trình $x^3 - x^2 + 8 = y^2$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải. Vì $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ là số chẵn nên y là số chẵn.

Với x là số lẻ. Gọi $d = (x, y)$. Vì d là ước của x và y nên từ PT, suy ra d là ước của 8. Vì x lẻ nên d lẻ, suy ra $d = 1$. Ta viết PT lại dưới dạng $(x+2)(x^2 - 2x + 4) = x^2 + y^2$.

Nếu $x = 4m + 1$ thì $x + 2 = 4m + 3$.

Nếu $x = 4t + 3$ thì $x^2 - 2x + 4$ có dạng $4m + 3$. Do đó vế trái của PT luôn có ước nguyên tố p dạng $4k + 3$. Do đó x và y đều chia hết cho p .

Nhưng điều này không thể xảy ra vì $(x, y) = 1$.

Với x chẵn, ta đặt $x = 2u$ và $y = 2v$, $u, v \in \mathbb{Z}$.

Ta có PT $8u^3 - 4u^2 + 8 = 4v^2$ hay $2u^3 - u^2 + 2 = v^2$.

Nếu u lẻ thì $2u^3 - u^2 + 2 \equiv 3 \pmod{4}$; nếu u chẵn thì $2u^3 - u^2 + 2 \equiv 2 \pmod{4}$. Nhưng

$v^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$, suy ra PT không có nghiệm nguyên.

Bài toán 16. Cho p là số nguyên tố có dạng $4k + 3$. Chứng minh rằng không tồn tại tập hợp X gồm $p - 1$ số nguyên dương liên tiếp sao cho X có thể được phân hoạch thành hai tập con, trong đó tích tất cả các phần tử trong mỗi tập là bằng nhau.

Lời giải. Giả sử tồn tại tập hợp X thỏa mãn bài toán. Gọi $x + 1, x + 2, \dots, x + p - 1$ là các phần tử của X . Ta thấy các phần tử này không chia hết cho p . Từ đề bài ta suy ra tích các phần tử của X là số chính phương. Tức là tồn tại số nguyên n sao cho $(x+1)(x+2)\dots(x+p-1) = n^2$.

Mặt khác, sử dụng định lý Wilson, ta thu được

$$(x+1)(x+2)\dots(x+p-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

Suy ra $n^2 + 1$ chia hết cho p , điều này là vô lý vì p là số nguyên tố có dạng $4k + 3$. Bài toán được chứng minh.

BÀI TẬP

1. Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$x^2 + y^2 = 2003(x + y).$$

2. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 5 = y^3$ không có nghiệm nguyên.

3. Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$a^2 = b^c - 5.$$

4. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố thì $7p + 3^p - 4$ không thể là số chính phương.

5. Cho $T = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, 0 \leq 2x < y \leq 100, x^4 + y^4 : 49\}$.

Tính $|T|$.

6. Cho p là một số nguyên tố có dạng $4k + 3$ và x, y, z, t là các số nguyên dương sao cho

$$x^{2p} + y^{2p} + z^{2p} = t^{2p}.$$

Chứng minh rằng ít nhất một trong các số x, y, z, t chia hết cho p .

7. Cho p là một số nguyên tố có dạng $4k + 3$. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho

$$y^2 = x^3 - p^2x.$$

8. Cho p là số nguyên tố, n là số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương

$$x(x+1) = p^{2n}y(y+1).$$

9. Tìm tất cả nghiệm của phương trình $y^2 = x^3 + (x+4)^2$ trong tập hợp các số nguyên.

10. Chứng minh rằng nếu c là số nguyên dương lẻ thì phương trình $x^2 - y^3 = (2c)^3 - 1$ không có nghiệm nguyên dương.

11. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 = 5$ và $a_{n+1} = a_n^3 - 2a_n^2 + 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử p là một số nguyên tố thỏa mãn điều kiện $p \equiv 3 \pmod{4}$ và $p | (a_{2011} + 1)$. Chứng minh rằng $p = 3$.

12. [Titu Andreescu] Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n sao cho $n^7 + 7$ là một số chính phương.

13. [Balkan MO, 1998] Giải phương trình nghiệm nguyên $x^5 - 4 = y^2$.

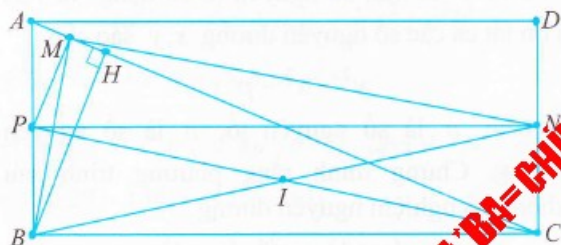


BÀI TOÁN 5. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên trên AC, M và N lần lượt là trung điểm của AH, CD. Chứng minh rằng: BM vuông góc với MN.

Cách giải 1. Từ N dựng đường thẳng song song với BC cắt AB tại P thì P là trung điểm của AB và BCNP là hình chữ nhật. Gọi giao điểm của BN và CP là I, lúc đó $IB = IC = IN = IP$ (1)

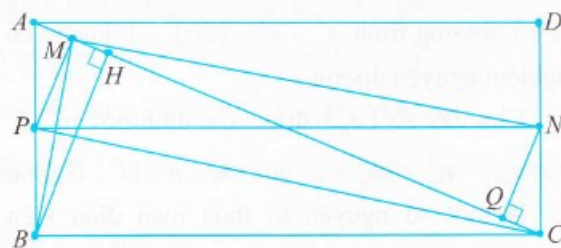
Mà $MP \perp AC \Rightarrow IC = IP = IM$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IB = IN = IM \Rightarrow BM \perp MN$.



Hình 1

Cách giải 2. Từ M kẻ đường thẳng song song với BH cắt AB tại P. Từ N kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại Q (h.2).



Hình 2

$\Delta AMP = \Delta CQN$ nên

$$AM = MH = QC, PM \parallel QN = \frac{BH}{2}$$

$$\begin{aligned} BM^2 + MN^2 &= BH^2 + MH^2 + NQ^2 + MQ^2 \\ &= BH^2 + \frac{AH^2}{4} + MP^2 + HC^2 \end{aligned}$$

$$= BH^2 + HC^2 + \frac{AH^2}{4} + \frac{BH^2}{4}$$

$$= BC^2 + \frac{AB^2}{4} = BC^2 + CN^2 \text{ (do } CN = \frac{AB}{2})$$

$$= BN^2 \Rightarrow BM \perp MN.$$

Cách giải 3.

$$\Delta BHA \sim \Delta CHB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{CH}{BH} \Rightarrow BH^2 = AH \cdot CH$$

$$\Rightarrow BH^2 = 2MH \cdot MQ \Rightarrow \frac{MH}{BH} = \frac{BH}{2MQ} \Rightarrow \frac{MH}{BH} = \frac{PM}{QM}$$

$$\Rightarrow \Delta BMH \sim \Delta QPM \Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{MQP}$$

$$\text{Mà } \widehat{MBH} = \widehat{BMP}, \widehat{MQP} = \widehat{NMQ}$$

$$\Rightarrow \widehat{BMP} = \widehat{NMQ} \Rightarrow \widehat{BMN} = 90^\circ \Rightarrow BM \perp MN.$$

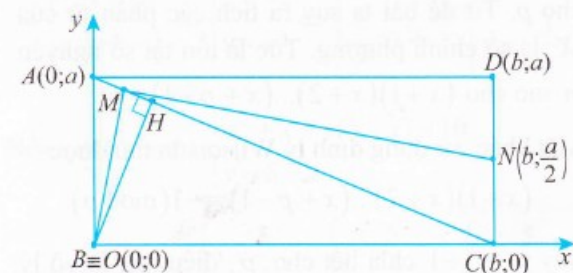
Cách giải 4.

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}) \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{MD} \text{ (do } \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{MC} = 0) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BH} \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &\text{(do } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{MC} = 0) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} \text{ (do } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MH} \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} \cdot (-\overrightarrow{MA}) = 0 \Rightarrow BM \perp MN. \end{aligned}$$

Cách giải 5. Chọn hệ trục tọa độ như hình 3 với $B(0; 0)$, $A(0; a)$, $C(b; 0)$. Suy ra $D(b; a)$, $N(b; \frac{a}{2})$.

$$AC: \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow AC: ax + by - ab = 0$$

$$BH: bx - ay = 0.$$



Hình 3

Toạ độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

Tạp chí TH&TT số 484, tháng 10/2017 giới thiệu với các bạn hai bài toán, một bài nằm trong kì thi Putnam năm 2010, một bài nằm trong kì thi MO của Canada năm 2015, cùng với các lời giải của chúng.

Bài 7. (Putnam mathematical Competition, 2010)

Tồn tại hay không dãy vô hạn các số thực $a_1, a_2, a_3, \dots$ sao cho $a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots = m$

với mọi số nguyên dương m ?

Lời giải. Cách 1. Không tồn tại một dãy nào như vậy. Bởi vì nếu tồn tại dãy $a_1, a_2, a_3, \dots$ thỏa mãn bài toán thì theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$8 = (a_1^2 + a_2^2 + \dots)(a_1^4 + a_2^4 + \dots) \geq (a_1^3 + a_2^3 + \dots)^2 = 9.$$

Điều này là vô lý.

Cách 2. Giả sử tồn tại một dãy $a_1, a_2, a_3, \dots$ như vậy. Nếu $a_k^2 \in [0; 1]$ với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$ thì

$$a_k^4 \leq a_k^2 \text{ với mọi } k \in \mathbb{Z}^+. \text{ Vì vậy:}$$

$$4 = a_1^4 + a_2^4 + \dots \leq a_1^2 + a_2^2 + \dots = 2: \text{ vô lý.}$$

Vì vậy tồn tại $k \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $a_k^2 > 1$. Khi đó với m đủ lớn thì $a_k^{2m} > 2m$. Do đó

$$a_1^{2m} + a_2^{2m} + \dots > 2m: \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy không tồn tại dãy nào thỏa mãn bài toán.

Cách 3. Từ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = 2$ suy ra với mỗi $k \in \mathbb{Z}^+$ ta có

$$a_k^2 \leq 2, \text{ và vì vậy } a_k^4 \leq 2a_k^2 \text{ (1). Đẳng thức trong}$$

$$(1) \text{ xảy ra khi } a_k^2 \in \{0; 2\}. \text{ Vì vậy để } \sum_{k=1}^{\infty} a_k^4 = 4$$

phải tồn tại một chỉ số k sao cho $a_k^2 = 2$ và những

số hạng a_k^2 còn lại phải bằng 0. Khi đó

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{2m} = 2^m \neq 2m \text{ với mọi số nguyên } m > 2. \text{ Mâu}$$

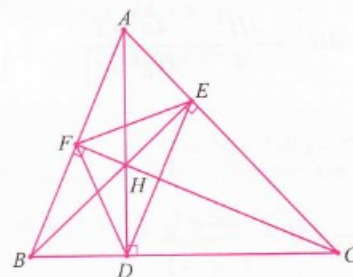
thuần này chứng tỏ không tồn tại dãy số nào thỏa mãn bài toán.

Bài 8. (Canada MO, 2015).

Cho tam giác nhọn ABC có D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, CA, AB và H là trực tâm. Chứng minh rằng

$$\frac{AB \cdot BC + BC \cdot CA + CA \cdot AB}{AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF} \leq 2 \quad (1)$$

Lời giải. Ký hiệu $BC = a, CA = b, AB = c$.



Cách 1. Ta có: $AH \cdot AD = AF \cdot AB = AE \cdot AC$

$$\text{nên } 2AH \cdot AD = AF \cdot AB + AE \cdot AC.$$

Tương tự: $2BH \cdot BE = BF \cdot BA + BD \cdot BC;$

$$2CH \cdot CF = CE \cdot CA + CD \cdot CB.$$

Cộng các đẳng thức trên ta thu được:

$$2(AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF) = AB(AF + BF) + AC(AE + CE) + BC(CD + BD).$$

$$\text{hay } 2(AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Do đó (1) trở thành:

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq 2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geq 0.$$

BĐT cuối luôn đúng nên (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Cách 2. Trong tam giác vuông ACF có $AF=AC \cos A$. Vì $BFHD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$AH.AD=AF.AB=AB.AC \cos A=bc \cos A.$$

Tương tự: $BH.BE=ac \cos B$; $CH.CF=ab \cos C$.

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{ab \cos C+bc \cos A+ca \cos B} \leq 2 \quad (2)$$

Theo định lý côsin ta có:

$$ab \cos C+bc \cos A+ca \cos B$$

$$=ab \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+bc \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ca \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Do đó (2) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geq 0.$$

BĐT cuối luôn đúng nên (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Cách 3. Do ΔBDH và ΔBEC đồng dạng nên $BH.BE=BD.BC$; ΔCDH và ΔCFB đồng dạng nên $CH.CF=CD.CB$

$$\Rightarrow BH.BE+CH.CF=BC(BD+CD)=a^2 \quad (3)$$

$$\text{Tương tự, } AH.AD+CH.CF=b^2 \quad (4)$$

$$AH.AD+BH.BE=c^2 \quad (5)$$

Cộng (3),(4),(5) và rút gọn cho 2 ta được

$$AH.AD+BH.BE+CH.CF=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$ab+bc+ca \leq \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}$$

$$=a^2+b^2+c^2.$$

$$\Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. 1) Có thể khái quát lời giải 2 của Bài toán 7 tới kết quả: Không tồn tại dãy vô hạn các số phức $a_1, a_2, a_3, \dots$ thỏa mãn điều kiện đã cho trong trường hợp chuỗi $a_1^k+a_2^k+a_3^k+\dots$ hội tụ tuyệt đối.

2) Lời giải cách 1 và cách 3 của Bài toán 8 có thể coi là một mặt dù một số kỹ thuật được sử dụng trong lời giải của hai cách có khác nhau. Khen ngợi em Châu Minh Khánh, 12T, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long, tỉnh Vĩnh Long đã đưa ra cách giải 3 của Bài toán 8.

TRẦN HỮU NAM (Hà Nội)

Mời các bạn tìm thêm những lời giải khác cho hai bài toán trên.

Sau đây là hai bài tập đề nghị. Các bạn hãy thử sức giải chúng với nhiều lời giải nhất có thể và gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.11.2017.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 11. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^y = y^{x-y}$.

Bài 12. Cho 9 điểm nằm trong một hình vuông đơn vị. Chứng minh rằng luôn tồn tại 3 điểm trong 9 điểm đó là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{8}$.

HỒ HẢI (Hà Nội)



MỘT NGUY BIẾN

VỀ CHUỖI VÔ HẠN

Điều nguy biến trong bài này có thể là khó đối với một số bạn. Câu trả lời cũng khá tinh tế và có thể nằm ngoài phạm vi kiến thức của một số bạn ở các lớp phổ thông. Do đó, để bạn đọc tiện theo dõi, trước tiên chúng tôi sẽ nhắc lại khái niệm chuỗi hội tụ. Cho dãy số vô hạn $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, tổng vô hạn được gọi là chuỗi số,

ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; u_n gọi là số hạng thứ n của chuỗi,

tổng $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi, dãy $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ gọi là dãy các

tổng riêng của chuỗi. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là hội tụ nếu giới hạn của dãy các tổng riêng tồn tại và hữu hạn:

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, khi đó S được gọi là tổng của chuỗi.

Nếu giới hạn của dãy các tổng riêng không tồn tại hoặc bằng ∞ thì chuỗi được gọi là phân kỳ. Bây giờ ta xét thí dụ sau:

Cho $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$= (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Tuy nhiên, nếu chúng ta nhóm các số hạng theo cách khác chúng ta sẽ nhận được:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$= 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \dots$$

$$= 1 - 0 - 0 - 0 - 0 - \dots$$

$$= 1.$$

Như vậy ta có: $S = 0$ và $S = 1$. Vậy $1 = 0$! Điều gì sai ở lập luận trong thí dụ này ?

Nếu điều này chưa đủ để bạn bối rối thì hãy xem lập luận trong thí dụ tiếp theo:

$$\text{Cho } S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \dots \quad (1)$$

Rõ ràng S là số dương.

$$\text{Ta cũng có: } S - 1 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \dots \quad (2)$$

Nhân cả hai vế của (1) với 2 ta nhận được:

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \dots \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được: $2S = S - 1$, từ đây suy ra $S = -1$. Đến đây ta kết luận rằng -1 là số dương vì chúng ta đã biết rằng S là số dương.

Các bạn sẽ nói gì về kết quả kỳ lạ này? Liệu có lỗi nào xảy ra ở đây không?

Thật ra sai lầm ở đây liên quan đến tính hội tụ của chuỗi số. Để làm rõ điều nguy biến trong hai thí dụ vừa xét, ta có thể so sánh công thức đúng trong thí dụ sau đây của một chuỗi hội tụ:

$$\text{Cho } S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

$$\text{Khi đó ta có: } 2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

Vậy $2S = S + S$ và $S = 2$, điều này là đúng.

Sự khác nhau của ba thí dụ chính là tính chất chuỗi hội tụ và chuỗi ta vừa xét là chuỗi hội tụ. Nhưng điều chúng ta đã làm với hai chuỗi phân kỳ ở hai thí dụ đầu tiên là không được phép (vì nếu làm như thế sẽ dẫn đến những kết quả sai).

KHÁNH HỮU (Hà Nội)

Giải đáp bài: VÀO TIỆM CẮT TÓC

(Đề đăng trên TH&TT số 482, tháng 8/2017)

Gọi số tiền ban đầu anh thợ có là x (nghìn đồng, $x > 0$).

Do A đặt vào đó đúng số tiền công, lúc đó số tiền anh thợ có là: $2x$ (nghìn đồng). A lấy đi 20 000 đồng tiền thừa nên sau khi A đi, số tiền anh thợ còn lại là: $2x - 20$ (nghìn đồng).

Tương tự, sau khi B đi, anh thợ còn lại:

$$2(2x - 20) - 20 = 4x - 60 \text{ (nghìn đồng).}$$

Sau khi anh C đi, anh thợ còn lại:

$$2(4x - 60) - 20 = 8x - 140 \text{ (nghìn đồng).}$$

Do trong ngăn kéo không còn đồng nào nên ta có phương trình $8x - 140 = 0 \Rightarrow x = 17,5$.

Vậy ban đầu anh thợ có 17 500 đồng.

Nhận xét: Hoan nghênh bạn Đoàn Phú Thành, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên có lời giải tốt.

LÊ BÍCH (Hà Nội)



TÌM CỰC TRỊ

CỦA HÀM ĐA THỨC !



GIẢI ĐÁP: BÀI TOÁN LŨY THỪA !

(Đề đăng trên TH&TT số 480, tháng 6 năm 2017)

Phân tích. Lời giải của bạn *Tân* sai ở chỗ:

$$\left(\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^{-3},$$

vì nếu α hoặc β không là số nguyên thì $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$ khi $a > 0$. Ở đây bạn *Tân* đã áp dụng tính chất này khi chưa biết $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}$ có dương hay không ?

Lời giải đúng. Ta có

$$\begin{aligned} K &= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^3 \left(\left(1 - \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^3 \left(\left(\frac{y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \cdot \left(\left(y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= y \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^3 \left(\left(y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= y \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right)^3 \left(\left(y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^{-3} \right) = \pm y. \end{aligned}$$

Nhận xét. Chỉ có một bạn sai, các bạn còn lại đều phát hiện được sai lầm và đưa ra cách giải đúng. Các bạn được khen kỳ này là: **Hùng Yên:** Hoàng Văn Thái, 11A3, THPT Dương Quảng Hàm. **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Lê Sơn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Yên. **Thừa Thiên Huế:** Dương Đông Thu, 11T2, Nguyễn Ngọc Thanh, 12T1, Lê Cẩm Huyền, 12 Lý, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre. **Vĩnh Long:** Lê Minh Quân, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long. **Lâm Đồng:** Võ Minh Quân, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long.

KIHI VI

Trong giờ chữa bài tập tìm cực trị của hàm số ở lớp 12A, Thầy giáo đưa ra bài tập sau:

Tìm các giá trị của m để hàm số

$$f(x) = -x^4 + (m^2 - 4)x^2 + (m + 2)x - 3m + 5$$

đạt cực đại tại $x_0 = 0$.

Sau đây là lời giải của bạn *Minh* và bạn *Hoàng*.

Lời giải của Minh: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -4x^3 + 2(m^2 - 4)x^2 + m + 2;$$

$$f''(x) = -12x^2 + 4(m^2 - 4)x.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x_0 = 0$

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 0 \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Lời giải của Hoàng: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -4x^3 + 2(m^2 - 4)x^2 + m + 2;$$

Hàm số đạt cực đại tại $x_0 = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

$$\Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Với $m = -2 \Rightarrow f(x) = -x^4 + 11$

$$f'(x) = -4x^3; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	-
f''			

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số đạt cực đại tại $x_0 = 0$.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Theo bạn, lời giải của bạn nào đúng, bạn nào sai, tại sao! Lời giải của bạn thế nào!

LÝ MINH PHƯƠNG

(GV THPT Phước Thiện, Nhơn Trạch, Đồng Nai)



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên

NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THÙY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Mai Văn Năm – Phương pháp đồng nhất trong chứng minh bất đẳng thức.

4 Nguyễn Văn Hiếu – Vận dụng số lượng giác của góc nhọn để chứng minh một số bài toán hình học phẳng.

7 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 phổ thông năng khiếu Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, năm học 2017-2018.

8 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên THPT TP. Hồ Chí Minh, năm học 2017-2018.

11 Thử sức trước kì thi 2018 - Đề số 1.

16 Phương pháp giải toán

Nguyễn Ngọc Tú – Sử dụng đẳng thức để chứng minh bất đẳng thức.

22 Nguyễn Bá Đương – Kỳ thi Olympic hình học Sharygin (Sharygin Geometry Olympiad).

Đề ra kỳ này

Problems in This Issue

T1/484, ..., T12/484, L1/484, L2/484.

26 Giải bài kỳ trước

Solutions to Previous Problems

37 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 25.

Bài dịch số 22 - Tiếng Anh qua các bài toán.

38 Bạn đọc tìm tòi

Cao Minh Quang, Nguyễn Hữu Nghĩa – Về một tính chất đẹp của số nguyên tố.

42 Nhiều cách giải cho một bài toán

44 Du lịch thế giới qua các bài toán hay

46 Giải trí toán học

Khánh Hữu – Một ngụ ý về dãy vô hạn.

Giải đáp: Vào tiệm cắt tóc.

47 Sai lầm ở đâu?

Giải đáp: Bài toán lũy thừa!

Lý Minh Phương – Tìm cực trị của hàm đa thức!

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN NGỌC ĐẠI

Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỂM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mỹ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: MAI ANH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Giới thiệu bộ sách

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THPT

Bộ sách "*Tài liệu chuyên Toán*" lớp 10, 11, 12 có tất cả 12 cuốn, mỗi lớp có 4 cuốn gồm 2 cuốn lý thuyết (Đại số - Giải tích và Hình học) và 2 cuốn bài tập. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình cho học sinh các trường THPT chuyên mà Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ban hành. Ở mỗi cuốn lý thuyết giới thiệu các chuyên đề bắt buộc của chương trình chuyên được trình bày khá sâu và chặt chẽ, có khá nhiều các ví dụ, bài tập là những bài thi của khối chuyên Toán, thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Toán Quốc tế. Trong mỗi cuốn bài tập, ngoài hướng dẫn giải khá đầy đủ các bài tập trong cuốn lý thuyết, còn có một số bài tập bổ sung để học sinh tham khảo. Các tác giả của bộ sách là các thầy giáo có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán, đều đã hoặc đang trực tiếp giảng dạy tại các trường THPT chuyên, khối chuyên Toán, các trường Đại học, Viện nghiên cứu, ... trên khắp cả nước, như: GS. Đoàn Quỳnh, GS.TS. Văn Như Cương, PGS. TS. Nguyễn Đăng Phát, PGS.TSKH Vũ Đình Hòa, GS.TSKH Hà Huy Khoái, TS. Nguyễn Minh Hà, GS.TSKH Đặng Hùng Thắng, PGS.TS. Nguyễn Vũ Lương, ThS. Đỗ Thanh Sơn, TS. Trần Nam Dũng, TS. Lê Bá Khánh Trình, ThS. Nguyễn Trọng Tuấn,...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ đáp ứng được phần lớn yêu cầu học tập của học sinh, việc giảng dạy của giáo viên ở các trường THPT chuyên; cũng như nhu cầu đọc của những người yêu thích Toán.



Địa chỉ liên hệ: - Phòng kinh doanh CTCP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội

Địa chỉ: Tầng 4, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

Tel: 02435121974 - Fax: 02435121973

- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trên cả nước



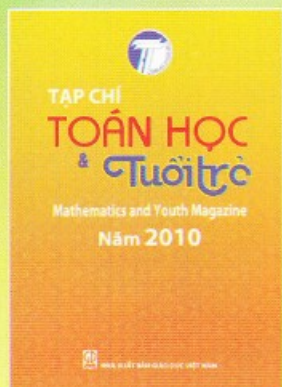
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

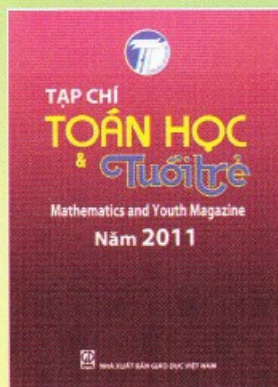
Bộ đóng tập

T. H. H.

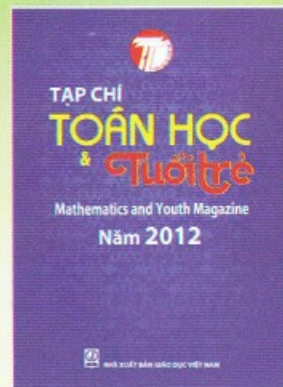
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



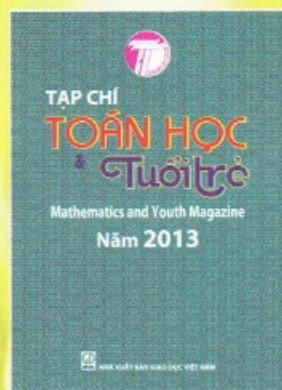
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



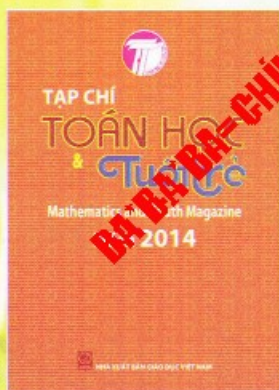
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



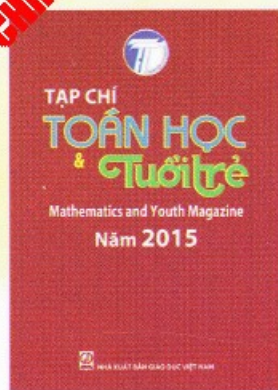
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



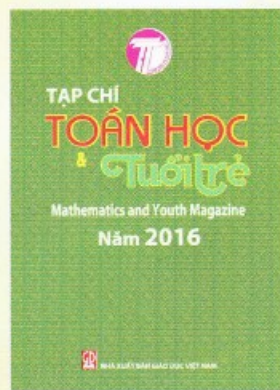
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Bạn đọc có thể đặt mua các cuốn Đóng tập này tại các cơ sở BƯU ĐIỆN trên toàn quốc hoặc đặt mua tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- ĐT Biên tập: (024) 35121607
- ĐT/Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
- Email: toanhocvatuoi trẻ vietnam@gmail.com
- Website: www.nxbgd.vn/toanhocvatuoi trẻ

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT10M7

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2017

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng