

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1(C)$. Đường thẳng đi qua điểm $A(-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là:

- A. $y = -x$. B. $y = 2x + 3$. C. $x - 4y + 5 = 0$. D. $x - 2y + 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$y' = 3x^2 - 6x.$$

$$NX: y = \frac{1}{3}(x+1).y' + (-2x+1).$$

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị $(\Delta): y = -2x + 1$.

Đường thẳng (d) vuông góc (Δ) có phương trình: $y = \frac{1}{2}x + b$.

$$\text{Do } A(-1;1) \in (d) \Rightarrow 1 = -\frac{1}{2} + b \Rightarrow b = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } (d): y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

$$\text{Hay } (d): x - 2y + 3 = 0.$$

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{(x-2)^0} + \log_2(8-x^2)$?

- A. $D = (2; 2\sqrt{2})$. B. $D = (2; 8)$. C. $D = (2\sqrt{2}; +\infty)$. D. $D = (2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-2 > 0 \\ 8-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 2\sqrt{2}.$$

Câu 3. Khối tứ diện đều là khối đa diện đều loại nào?

- A. $\{4;3\}$. B. $\{3;4\}$. C. $\{3;3\}$. D. $\{5;3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 4. Cho $P = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{-1}$. Biểu thức rút gọn của P là:

- A. $2x$. B. x . C. $x + y$. D. $x - y$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$P = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x} + \frac{y}{x}} \right)^{-1} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \left[\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right)^2 \right]^{-1} = x.$$

Câu 5. Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0; x=2$, cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq 2)$ ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích của phần vật thể B .

- A. $V = \frac{4}{3}$. B. $V = \frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $V = 4\sqrt{3}$. D. $V = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$V = \int_0^2 \frac{(x\sqrt{2-x})^2 \sqrt{3}}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 x^2 (2-x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C$. B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$.
C. $\int f(x) dx = \cos 3x + C$. D. $\int f(x) dx = -3 \cos 3x + C$

Hướng dẫn giải.

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C.$$

Chọn B.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = x^4 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 - 1$ có bao nhiêu điểm chung?

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 0.

Hướng dẫn giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 + x^2 = -x^2 - 1 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 0$ (vô nghiệm)

Suy ra đồ thị hai hàm số không có điểm chung.

Chọn D.

Câu 8. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x}$ có nghiệm.

- A. $m \geq -\frac{6}{7}$. B. $m \geq \frac{6}{7}$. C. $m < \frac{6}{7}$. D. $m < -\frac{6}{7}$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{Ta có } 4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x} \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{1}{28} \right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{5}{7} \right)^{\cos^2 x} \leq m.$$

$$\text{Đặt } t = \cos^2 x, t \in [0; 1] \text{ thì BPT trở thành: } 4 \cdot \left(\frac{1}{28} \right)^t + \left(\frac{5}{7} \right)^t \leq m.$$

$$\text{Xét } f(t) = 4 \cdot \left(\frac{1}{28} \right)^t + \left(\frac{5}{7} \right)^t \text{ là hàm số nghịch biến trên } [0; 1].$$

$$\text{Suy ra: } f(1) \leq f(t) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{6}{7} \leq f(t) \leq 5.$$

Từ đó BPT có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq \frac{6}{7}$.

Chọn B.

Câu 9. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (2-i)^2(1+i)$.

- A. $\bar{z} = -7+i$. B. $\bar{z} = 7-i$. C. $\bar{z} = -7-i$. D. $\bar{z} = 7+i$.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $z = (3-4i)(1+i) = 7-i \Rightarrow \bar{z} = 7+i$.

Chọn D.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x - 2m = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; 1)$. B. $m \in (2; +\infty)$. C. $m \in [1; +\infty)$. D. $m = 1$.

Hướng dẫn giải.

Đặt $t = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x > 0$ thì phương trình trở thành: $\frac{1}{t} + t - 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = t + \frac{1}{t}$.

Xét $f(t) = t + \frac{1}{t} \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (do $t > 0$).

BBT:

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		0	
		-	+
$f(t)$	$+\infty$	2	$+\infty$

Từ đó PT có nghiệm $\Leftrightarrow 2m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Chọn C.

Câu 11. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = \frac{1}{4}x^3 - x$ và tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -2 .

- A. 27. B. 21. C. 25. D. 20.

Hướng dẫn.

Ta có: $y' = \frac{3}{4}x^2 - 1 \Rightarrow y'(-2) = 2$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 2x + 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1}{4}x^3 - x = 2x + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Diện tích cần tìm là: $S = \int_{-2}^4 \left(\frac{1}{4}x^3 - x - (2x + 4) \right) dx = 27$.

Chọn A.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và thể tích bằng a^3 . Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

- A. $h = 3a$. B. $h = a$. C. $h = \sqrt{3}a$. D. $h = 2a$.

Hướng dẫn.

$$\text{Ta có: } V = \frac{1}{3} S.h \Rightarrow h = \frac{3V}{S} = \frac{3a^3}{a^2} = 3a.$$

Chọn A.

Câu 13. Kí hiệu z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $6z^2 - 12z + 7 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ tìm điểm biểu diễn của số phức $w = iz_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}$?

A. (0; -1).

B. (1; 1).

C. (0; 1).

D. (1; 0).

Hướng dẫn.

$$\text{Ta có: } 6z^2 - 12z + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}i \\ z = 1 - \frac{\sqrt{6}}{6}i \end{cases}$$

$$w = iz_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} = i \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{6}i \right) - \frac{1}{\sqrt{6}} = i = 0 + 1.i$$

Chọn C.

Câu 14. Tính thể tích của hình cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

A. $\frac{a^3 \pi \sqrt{3}}{8}$.

B. $\frac{a^3 \pi \sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3 \pi}{4}$.

D. $\frac{a^3 \pi \sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn.

$$\text{Bán kính mặt cầu là } ABCD.A'B'C'D' \text{ là } R = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{(A'A)^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 2a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Thể tích cần tìm là: } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

Chọn B.

Câu 15. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên R và $\int_0^1 f(x) dx = 2017$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx$.

A. $\frac{2}{2017}$.

B. $\frac{2017}{2}$.

C. 2017.

D. $-\frac{2017}{2}$.

Hướng dẫn.

$$\text{Đặt: } t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2 \cos 2x dx; \text{ Ta có: } I = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{2017}{2}$$

Chọn B.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cot x - 1}{m \cot x - 1}$ đồng biến trên khoảng

$$\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right).$$

A. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; 0)$.

C. $m \in (1; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = \frac{-(1+\cot^2 x)(m \cot x - 1) + m(1+\cot^2 x)(\cot x - 1)}{(m \cot x - 1)^2} = \frac{(1+\cot^2 x)(1-m)}{(m \cot x - 1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \cot x - 1 \neq 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \\ y' = \frac{(1+\cot^2 x)(1-m)}{(m \cot x - 1)^2} > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{\cot x} = \tan x \\ 1-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Chọn B.

Câu 17. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ và $F(0) = 2$. Tính $F(e)$.

A. $F(e) = \frac{1}{2} \ln(2e+1)$.

B. $F(e) = \ln \sqrt{2e+1} + 2$.

C. $F(e) = \ln(2e+1) - 2$.

D. $F(e) = \frac{1}{2} \ln(2e+1) - 2$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $F(e) - F(0) = \int_0^e \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(2x+1) \Big|_0^e = \frac{1}{2} \ln(2e+1)$.

$\Rightarrow F(e) = \frac{1}{2} \ln(2e+1) + F(0) = \frac{1}{2} \ln(2e+1) + 2$.

Chọn D.

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên $[-1; 2]$.

A. $\min_{[-1;2]} f(x) = -e^2$. B. $\min_{[-1;2]} f(x) = -2e^2$. C. $\min_{[-1;2]} f(x) = 2e^4$. D. $\min_{[-1;2]} f(x) = 2e^2$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $f'(x) = 2xe^{2x} + 2(x^2 - 2)e^{2x} = 2(x^2 + x - 2)e^{2x}$.

Do đó: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (do $x \in [-1; 2]$).

Mà: $f(-1) = -e^{-2}$, $f(2) = 2e^4$, $f(1) = -e^2$ nên $\min_{[-1;2]} f(x) = -e^2$.

Chọn A.

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + x + 2}{2x+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số không có cực trị.

B. Cực tiểu của hàm số bằng -6 .

C. Cực đại của hàm số bằng 1 .

D. Cực tiểu của hàm số bằng -3 .

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = \frac{-4x^2 - 4x - 3}{(2x+1)^2} = \frac{-(2x+1)^2 - 2}{(2x+1)^2} < 0, \forall x \neq -\frac{1}{2}$ nên hàm số không có cực trị.

Chọn A.

Câu 20. Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2017\sqrt{5-x^2}}{x^2 - 5x + 6}$ bằng?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải:

Hàm số có tập xác định là $D = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \setminus \{2\}$.

Do đó không có các quá trình $x \rightarrow \pm\infty$ và $x \rightarrow 3$.

Do $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2017\sqrt{5-x^2}}{x^2-5x+6} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2017\sqrt{5-x^2}}{x^2-5x+6} = +\infty$ nên $x=2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có 1 tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

Chọn C.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$. Tìm một vec tơ chỉ

phương của đường thẳng d ?

A. $\vec{u} = (0; 2; -1)$

B. $\vec{u} = (0; 1; -1)$

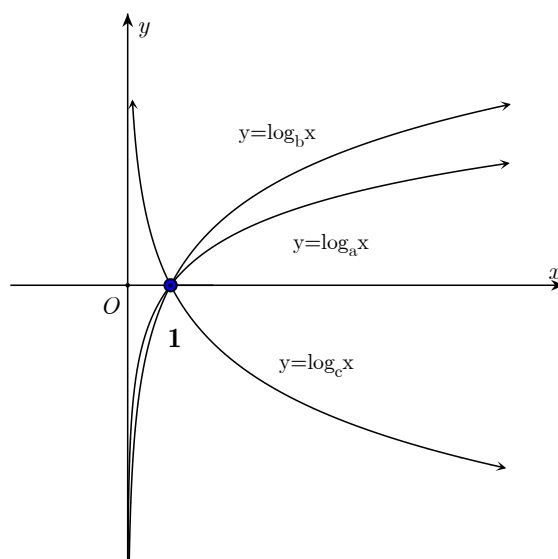
C. $\vec{u} = (0; 2; 0)$

D. $\vec{u} = (0; 1; 1)$

Hướng dẫn giải:

Để thấy d có một vec tơ chỉ phương là $\vec{u} = (0; 1; -1)$ Ta chọn đáp án B

Câu 22. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ



Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. $\log_b x < 0 \Leftrightarrow x \in 1; +\infty$

B. Hàm số $y = \log_c x$ đồng biến trên $0; 1$

C. Hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $0; 1$

D. $b > a > c$

Hướng dẫn giải:

A. sai vì $\log_b x < 0 \Leftrightarrow x \in 0; 1$

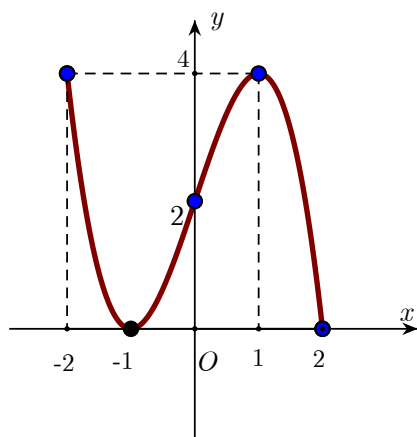
B. sai vì $y = \log_c x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

C. sai vì $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

D. đúng vì đồ thị $y = \log_b x$ nằm trên $y = \log_a x$, còn $y = \log_c x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Ta chọn đáp án D

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên



Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây ?

A. $x = -1$

B. $x = 1$

C. $x = -2$

D. $x = 2$

Hướng dẫn giải :

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$, đồ thị ta thấy $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Ta chọn đáp án A

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-1;0;5)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn AB ?

A. $I(2;2;6)$

B. $I(2;1;3)$

C. $I(1;1;3)$

D. $I(-1;-1;1)$

Hướng dẫn giải :

Dựa vào công thức trung điểm $I(x_I; y_I; z_I)$ của đoạn AB .

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \text{ ta suy ra đáp án là C. } I(1;1;3)$$

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	3	-1	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho phương trình $f(x) = m$ có 4 nghiệm phân biệt ?

A. $(-1; +\infty)$

B. $(3; +\infty)$

C. $[-1; 3]$

D. $-1; 3$

Hướng dẫn giải :

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$ để phương trình $f(x) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thì $m \in (-1; 3)$. Ta chọn đáp án D.

Câu 26. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2 + 3i) + i = z$

A. $|z| = \frac{1}{10}$.

B. $|z| = \sqrt{10}$.

C. $|z| = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

D. $|z| = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $z^2 + 3i + i = z \Leftrightarrow z^2 + 3i = -i \Leftrightarrow z = \frac{-i}{1+3i} = -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$.

$$\Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Câu 27. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+4}{1-2x}$.

A. $y = -\frac{3}{2}$.

B. $x = 3$.

C. $x = \frac{1}{2}$.

D. $y = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{1-2x} = -\frac{3}{2}$. Suy ra đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(16x^2 + 1) - m + 1$ nghịch biến trên khoảng $-\infty; \infty$.

A. $m \in (-\infty; -3]$.

B. $m \in [3; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -3)$.

D. $m \in [-3; 3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y = \ln(16x^2 + 1) - m + 1$

$$y' = \frac{32x}{16x^2 + 1} - m + 1$$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{32x}{16x^2 + 1} - m + 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cách 1: $\frac{32x}{16x^2 + 1} - m + 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 32x - m + 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -16(m+1)x^2 + 32x - m + 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -16(m+1) < 0 \\ \Delta' = 16^2 - 16(m+1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -16m^2 - 32m + 240 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \leq -5 \Leftrightarrow m \geq 3 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Cách 2: $\frac{32x}{16x^2 + 1} - m + 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{32x}{16x^2 + 1} \leq m + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m + 1 \geq \max_{\mathbb{R}} g(x), \text{ với } g(x) = \frac{32x}{16x^2 + 1}$$

Ta có: $g'(x) = \frac{-512x^2 + 32}{16x^2 + 1}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{4}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0, g\left(\frac{1}{4}\right) = 4, g\left(-\frac{1}{4}\right) = -4$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$	
$g' x$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g x$	0	-4	4	0	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max_{\mathbb{R}} g(x) = 4$

Do đó: $m + 1 \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $2x - y + z + 2017 = 0$ và $x + y - z + 5 = 0$. Tính số đo độ góc giữa đường thẳng d và trục Oz .

A. 60° .

B. 0° .

C. 45° .

D. 30° .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hai mặt phẳng vuông góc với d lần lượt có các vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = 2; -1; 1$ và $\vec{n}_2 = 1; 1; -1$ nên đường thẳng d có vector chỉ phương là: $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = 0; 3; 3$.

Trục Oz có vector chỉ phương là $\vec{k} = 0; 0; 1$.

$$\cos \vec{u}; \vec{k} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{k}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \vec{u}; \vec{k} = 45^\circ.$$

Đây là góc nhọn nên góc giữa d và trục Oz cũng bằng 45° .

Câu 30. Cho $\log_a x = \frac{1}{2} \log_a 16 - \log_{\sqrt{a}} \sqrt{3} + \log_{a^2} 4$ (với $a > 0, a \neq 1$). Tính x .

A. $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{16}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\log_a x = \frac{1}{2} \log_a 16 - \log_{\sqrt{a}} \sqrt{3} + \log_{a^2} 4 \Leftrightarrow \log_a x = \log_a 4 - 2 \log_a \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log_a 4$

$$\Leftrightarrow \log_a x = \log_a 4 - \log_a 3 + \log_a 2 = \log_a \left(\frac{4}{3} \cdot 2 \right) = \log_a \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}.$$

Câu 31. Giả sử $\int_3^5 \frac{dx}{x^2 - x} = a \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$. Tính giá trị biểu thức $S = -2a + b + 3c^2$.

A. $S = 3$.

B. $S = 6$.

C. $S = 0$.

D. $S = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\int_3^5 \frac{dx}{x^2 - x} = \int_3^5 \frac{dx}{x(x-1)} = \int_3^5 \frac{dx}{x-1} - \int_3^5 \frac{dx}{x} = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \Big|_3^5 = \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{2}{3} = \ln 4 - \ln 5 - \ln 2 + \ln 3 = \ln 2 + \ln 3 - \ln 5$$

suy ra $a = -1; b = 1; c = 1$

Vậy $S = 2 + 1 + 3 = 6$.

Câu 32. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}-1}(x^2 - 2x + 1) > 0$.

A. Vô số.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

$$\log_{\sqrt{3}-1}(x^2 - 2x + 1) > 0 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}-1}(x^2 - 2x + 1) > \log_{\sqrt{3}-1} 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < 1$$

$$x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

Vì x nguyên, $x \neq 1 \Rightarrow x = \emptyset$

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu tâm M và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 81$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Mặt cầu tâm } M \text{ và tiếp xúc với mặt phẳng } (P) \Rightarrow R = d(M; (P)) = \frac{|1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3$$

$$\text{Phương trình mặt cầu là: } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9.$$

Câu 34. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm của BC . Góc giữa AA' và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3}{2}$.

B. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$.

C. $V = \frac{3a^3}{2}$.

D. $V = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

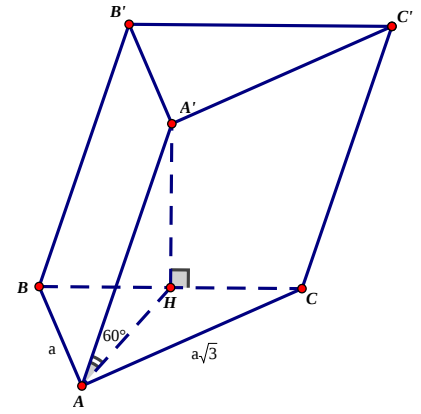
Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow AH = \frac{BC}{2} = a$$

$$A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V = a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$$



Câu 35. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Khối hộp là khối đa diện lồi.
- B. Khối lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.
- C. Khối tứ diện là khối đa diện lồi.
- D. Hình tạo bởi hai hình lập phương chỉ chung nhau một đỉnh là một hình đa diện.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương án A, B, C đúng.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(2) = 2$ và $f(4) = 2018$. Tính

$$I = \int_1^2 f'(2x) dx.$$

- A. $I = -1008$.
- B. $I = 2018$.
- C. $I = 1008$.
- D. $I = -2018$.

Chọn C.

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow t = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow t = 4$$

$$\text{Khi đó: } I = \frac{1}{2} \int_2^4 f'(t) dt = \frac{1}{2} [f(t)]_2^4 = \frac{1}{2} [f(4) - f(2)] = \frac{1}{2} (2018 - 2) = 1008$$

Câu 37. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Hãy tìm tọa độ biểu diễn số phức z .

- A. $(1; 2)$.
- B. $(1; -2)$.
- C. $(-1; -2)$.
- D. $(-1; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 38. Cho hình thang vuông $ABCD$ có độ dài hai đáy $AB = 2a$, $DC = 4a$, đường cao $AD = 2a$. Quay hình thang $ABCD$ quanh đường thẳng AB thu được khối tròn xoay (H) . Tính thể tích V của khối (H) .

- A. $V = 8\pi a^3$.
- B. $V = \frac{20\pi a^3}{3}$.
- C. $V = 16\pi a^3$.
- D. $V = \frac{40\pi a^3}{3}$.

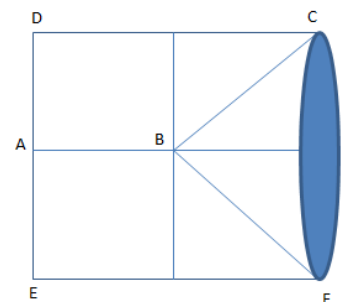
Chọn D.

Thể tích V của khối (H) bằng thể tích của khối trụ $DCFE$

trừ thể tích khối nón BCF .

Vậy thể tích cần tìm:

$$V = V_{DCFE} - V_{BCF} = \pi (2a)^2 \cdot 4a - \frac{1}{3} \pi (2a)^2 \cdot 2a = \frac{40\pi a^3}{3}.$$



Câu 39. Cho số phức z thỏa mãn $(1-3i)z + (1+i)^2 \bar{z} = 5-i$. Tính môđun của z .

A. $|z| = \frac{\sqrt{20}}{3}$.

B. $|z| = \sqrt{10}$.

C. $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $|z| = \frac{\sqrt{29}}{3}$.

Chọn D.

Đặt $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$

Thay vào : $(1-3i)z + 2i\bar{z} = 5-i$ ta được

$$(1-3i)(x+iy) + 2i(x-iy) = 5-i$$

$$\Leftrightarrow x + iy - 3ix + 3y + 2ix + 2y = 5-i$$

$$\Leftrightarrow x + 5y + i(-x + y) = 5-i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = 5 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } |z| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{3}.$$

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) tâm I có phương trình $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 18$. Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A, B. Tính diện tích tam giác IAB.

A. $\frac{8\sqrt{11}}{3}$.

B. $\frac{16\sqrt{11}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{11}}{6}$.

D. $\frac{8\sqrt{11}}{9}$.

Chọn A.

Đường thẳng d đi qua điểm $C(1;0;-3)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (-1;2;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R = 3\sqrt{2}$

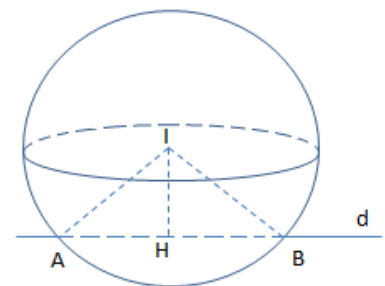
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d .

$$\text{Khi đó: } IH = \frac{|\overrightarrow{IC}; \vec{u}|}{|\vec{u}|} \quad \text{Với } \overrightarrow{IC} = (0; -2; -2); [\overrightarrow{IC}; \vec{u}] = (6; 2; -2)$$

$$\text{Vậy } IH = \frac{\sqrt{6^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{\sqrt{66}}{3}$$

$$\text{Suy ra: } HB = \sqrt{18 - \frac{22}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy: } S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{66}}{3} \cdot \frac{8\sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{11}}{3}.$$



Câu 41. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-2; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

☑ **Chọn đáp án A.**

Ta có $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -2$. Do hệ số $a > 0$.

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 2 = 0$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu trên.

A. $I(1; -2; 1)$.

B. $I(-1; -2; -1)$.

C. $I(-1; 2; -1)$.

D. $I(-1; -2; 1)$.

Hướng dẫn giải

☑ **Chọn đáp án C.**

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$
 $\Rightarrow I(-1; 2; -1)$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1), B(0; 4; 0)$, mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y - 2z + 2017 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.

A. $2x - y - z - 4 = 0$.

B. $2x + y - 3z - 4 = 0$.

C. $x + y - z + 4 = 0$.

D. $x + y - z - 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

☑ **Chọn đáp án D.**

Cách 1: Đáp án A, B và C loại do mặt phẳng không đi qua điểm A.

Cách 2: Gọi M là giao điểm của AB và mặt phẳng (P) , H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) . Ta có $AMH = \alpha$ là góc tạo bởi AB và mặt phẳng (P) .

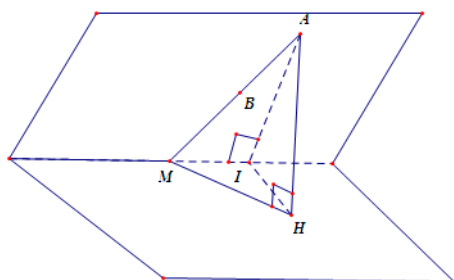
Kẻ AI vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) . Ta có $AIH = \beta$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) . Ta dễ dàng chứng minh, góc tạo bởi giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) nhỏ nhất bằng AMH là góc tạo bởi AB và mặt phẳng (P) .

Ta có $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Gọi $\vec{n}(A; B; C)$ là VTPT của mặt phẳng (Q) , khi đó:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + 2B + C = 0 \\ \frac{|2A - B - 2C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow C = A - 2B$. Thay vào (2) ta được $A^2 - 2AB + B^2 = 0 \Leftrightarrow A = B \Rightarrow C = -A$

Khi đó $\vec{n}(A; A; -A) = A(1; 1; -1)$. Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $x + y - z - 4 = 0$.



Câu 44. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(1+i\sqrt{3})z+2$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=16$.

B. $r=4$.

C. $r=25$.

D. $r=9$.

Hướng dẫn giải

☒ **Chọn đáp án B.**

Ta có:

$$w=(1+i\sqrt{3})z+2 \Leftrightarrow w-(1+i\sqrt{3})-2=(1+i\sqrt{3})(z-1) \Leftrightarrow |w-(3+i\sqrt{3})|=|(1+i\sqrt{3})(z-1)|$$

$$\Leftrightarrow |w-(3+i\sqrt{3})|=4. \text{ Vậy số phức } w \text{ nằm trên đường tròn có bán kính } r=4.$$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z}{4}$ và

$d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. d_1 và d_2 vuông góc với nhau và cắt nhau. B. d_1 và d_2 song song với nhau.

C. d_1 và d_2 trùng nhau.

D. d_1 và d_2 chéo nhau.

Hướng dẫn giải

☒ **Chọn đáp án D.**

Đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z}{4}$ có VTCP $\vec{u}_1=(2;1;4)$.

Đường thẳng $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}$ có VTCP $\vec{u}_2=(1;2;-1)$.

Ta thấy $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương nên đáp án **B, C** sai.

Phương trình tham số của $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=7+t \\ z=4t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x=-1+s \\ y=2+2s \\ z=2-s \end{cases}$

Xét hệ $\begin{cases} 1+2t=-1+s \\ 7+t=2+2s \\ 4t=2-s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-s=-2 \\ t-2s=-5 \\ 4t=2-s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{3} \\ s=\frac{8}{3} \\ 4\cdot\frac{1}{3} \neq 2-\frac{8}{3} \end{cases}$ hệ vô nghiệm. Suy ra d_1 và d_2 chéo nhau.

Câu 46. Một hình nón có thiết diện tạo bởi mặt phẳng qua trục của hình nón là một tam giác vuông cân với cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón.

A. $V=2\pi\sqrt{2}a^3$.

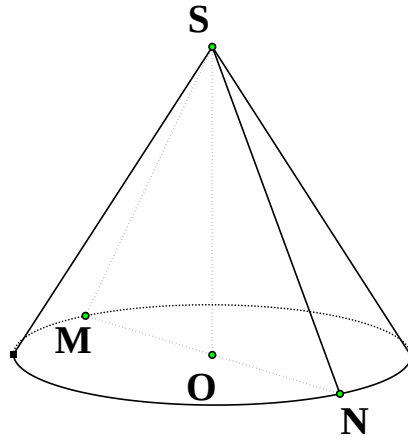
B. $V=2\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{9}$.

C. $V=\frac{2\pi\sqrt{2}a^3}{3}$.

D. $V=\frac{2\pi a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có tam giác SMN cân tại S . Giả thiết tam giác, suy ra tam giác SMN vuông cân tại S . Thiết diện qua trục nên tâm O đường tròn đáy thuộc cạnh huyền MN .

Vậy hình nón có bán kính đáy $R = \frac{1}{2}MN = a\sqrt{2}$, đường cao $h = \frac{1}{2}MN = a\sqrt{2}$. Thể tích khối nón

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{2\pi\sqrt{2}a^3}{3}.$$

Câu 47. Huyện A có 300 nghìn người. Với mức tăng dân số bình quân $1,2\%$ /năm thì sau n năm dân số sẽ vượt lên 330 nghìn người. Hỏi n nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. 8 năm. B. 9 năm. C. 7 năm. D. 10 năm.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Số dân của huyện A sau n năm là $x = 300.000(1+0,012)^n$.

$$x > 300.000 \Leftrightarrow 300.000(1+0,012)^n > 330.000 \Leftrightarrow n > \log_{1,012} \frac{33}{30} \Leftrightarrow n > 7,99.$$

Câu 48. Tìm các nghiệm của phương trình $2^{x-2} = 8^{100}$.

- A. $x = 204$. B. $x = 102$. C. $x = 302$. D. $x = 202$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$2^{x-2} = 8^{100} \Leftrightarrow 2^{x-2} = 2^{300} \Leftrightarrow x-2 = 300 \Leftrightarrow x = 302$$

Câu 49. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)\ln x$.

- A. $y' = \frac{1+x^2(1+2\ln x)}{x}$. B. $y' = 2x + \frac{1}{x}$. C. $y' = \frac{1+x^2(1-2\ln x)}{x}$. D. $y' = x\ln x + \frac{x^2+1}{x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

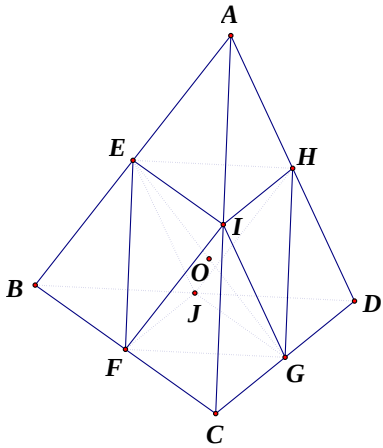
$$\text{Ta có: } y' = (x^2 + 1)' \ln x + (\ln x)' (x^2 + 1) = 2x \ln x + \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{1 + x^2(1 + 2\ln x)}{x}.$$

Câu 50. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình bát diện đều có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của tứ diện $ABCD$.

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Bát diện đều $IEFGHJ$ có cạnh $IE = \frac{1}{2}BC = a$ nội tiếp trong mặt cầu tâm O bán kính $R = \frac{1}{2}EG = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

----- HẾT -----