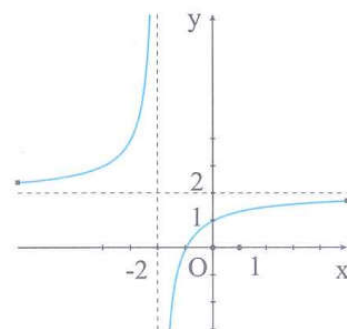


Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; +\infty)$ B. $(-\infty; -2)$
C. $(-\infty; 0)$ D. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$



Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		+	-	0	+
y		$+\infty$	2	$+\infty$	3

Arrows in the original image indicate the path of the function: from $-\infty$ at $x = -\infty$ up to $+\infty$ at $x = -1$, then down to 2 at $x = 0$, then up to $+\infty$ at $x = 1$, and finally up to 3 at $x = +\infty$.

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4

Câu 3. Cho hàm số $y = a^x$, với $0 < a \neq 1$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $y' = a^x \ln a$
B. Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$
C. Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$.
D. Đồ thị hàm số $y = a^x$ có tiệm cận đứng là trục tung

Câu 4. Phương trình $\log_3(x + 1) = 2$ có nghiệm là

- A. $x = 4$ B. $x = 8$ C. $x = 9$ D. $x = 27$

Câu 5. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \cos x$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$ B. $\int f(x) dx = 1 - \sin x + C$
C. $\int f(x) dx = x \sin x + \cos x + C$ D. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - \sin x + C$

Câu 6. Nếu $\int_1^3 f(x) dx = 5$, $\int_3^5 f(x) dx = -2$ thì $\int_1^5 f(x) dx$ bằng

A. 2 B. -2 C. 3 D. 4

Câu 7. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$ là

A. 12 B. -1 C. 1 D. -12

Câu 8. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 9. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có bán kính đáy $r = 3$ và độ dài đường sinh $l = 5$

A. $S_{xq} = 18\pi$ B. $S_{xq} = 24\pi$ C. $S_{xq} = 30\pi$ D. $S_{xq} = 15\pi$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB .

A. $G\left(-1;\frac{1}{3};1\right)$ B. $G\left(1;-\frac{1}{3};1\right)$ C. $G\left(1;\frac{1}{3};-1\right)$ D. $G\left(\frac{1}{3};1;-1\right)$

Câu 11. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z + 3 = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{1}$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. d song song với (α) B. d vuông góc với (α)
C. d nằm trên (α) D. d cắt (α)

Câu 12. Mặt phẳng đi qua 3 điểm $M(1;0;0)$, $N(0;-1;0)$, $P(0;0;2)$ có phương trình là

A. $2x - 2y + z - 2 = 0$ B. $2x + 2y + z - 2 = 0$ C. $2x - 2y + z = 0$ D. $2x + 2y + z = 0$

Câu 13. Có bao nhiêu cách xếp 6 học sinh vào một bàn dài có 6 chỗ?

A. $6!$ cách B. 6 cách C. A_6^6 cách D. C_6^6 cách

Câu 14. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$. Tổng của 2020 số hạng đầu bằng

A. 4 080 400 B. 4 800 399 C. 4 399 080 D. 4 080 399

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 1 B. -2 C. 4 D. 3

Câu 16. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ trên $[0;3]$. Giá trị của biểu thức $M + m$ bằng

A. 7 B. $2(\sqrt{2} - 1)$ C. 12 D. $2(\sqrt{2} + 1)$

Câu 17. Gọi $M(a,b)$ là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{4}{3}$ sao cho tiếp tuyến của

(C) tại M có hệ số góc lớn nhất. Tổng $2a + 4b$ bằng

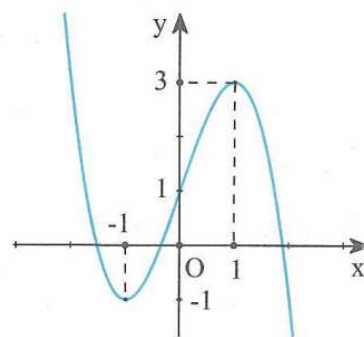
A. -5 B. 5 C. 0 D. 13

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ

thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên.

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là

- A. 0 B. 2
C. 1 D. 3



Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			5			3	

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 3 3 3

Hàm số $g(x) = f(x) + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -3)$ B. $(0; +\infty)$ C. $(-3; -2)$ D. $(1; 3)$

Câu 20. Ông B dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5%/năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ gộp vào vốn ban đầu. Hỏi số tiền A (triệu đồng, $A \in \mathbb{N}$) nhỏ nhất mà ông B cần gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ để mua xe máy trị giá 48 triệu đồng là

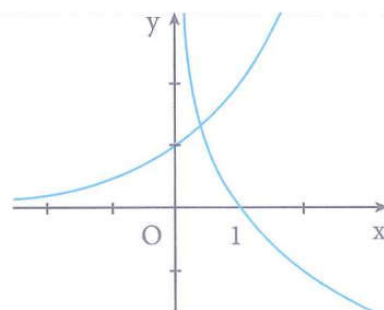
- A. 230 triệu đồng B. 231 triệu đồng C. 250 triệu đồng D. 251 triệu đồng

Câu 21. Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$
B. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$
C. $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$
D. $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$

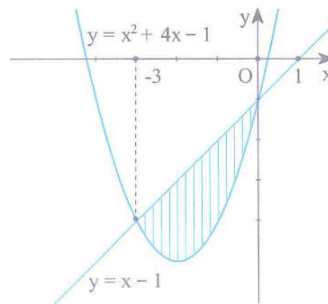
Câu 22. Cho hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a, b > 1$ B. $0 < a, b < 1$
C. $0 < a < 1 < b$ D. $0 < b < 1 < a$



Câu 23. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên bằng bao nhiêu?

- A. 4
B. $\frac{9}{2}$
C. $\frac{7}{3}$
D. $\frac{5}{2}$



Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z + \frac{1+5i}{1+i} = 7+10i$

Môđun của số phức $w = z^2 + 20 + 3i$ là

- A. 5
B. 3
C. 25
D. 4

Câu 25. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$. Tính $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A. $A = 20$
B. $A = 10$
C. $A = 30$
D. $A = 50$

Câu 26. Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ biết $AB = a, SA = a$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$
B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$
C. $\frac{a^3}{3}$
D. a^3

Câu 27. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 8 cm . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Quay hình vuông $ABCD$ xung quanh MN được hình trụ (T) . Diện tích toàn phần của hình (T) là

- A. $64\pi(\text{cm}^2)$
B. $80\pi(\text{cm}^2)$
C. $96\pi(\text{cm}^2)$
D. $192\pi(\text{cm}^2)$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -2; 5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x - 3y + 2z + 5 = 0$ là

- A. $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{2}$
B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{2}$
C. $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{-2}$
D. $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{2}$

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;1;-1); B(1;1;2); C(1;-1;0); D(0;0;1)$. Tính độ dài đường cao AH của hình chóp $A.BCD$.

- A. $3\sqrt{2}$
B. $2\sqrt{2}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

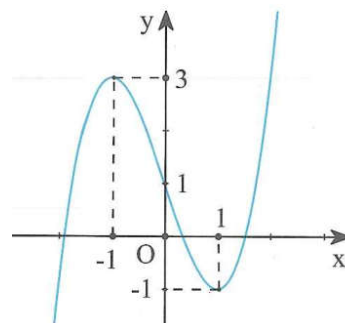
Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' là

- A. $\frac{a}{2}$
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 31. Mỗi bạn An, Bình chọn ngẫu nhiên 3 chữ số trong tập $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Tính xác suất để trong hai bộ ba chữ số mà An và Bình chọn ra có đúng một chữ số giống nhau.

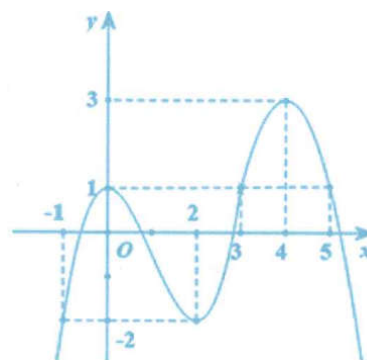
- A. $\frac{7}{40}$ B. $\frac{9}{10}$ C. $\frac{6}{25}$ D. $\frac{21}{40}$

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $f(x) = 3x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.



- A. $f(-1) + 3 < m < f(1) - 3$
 B. $f(-1) - 3 < m < f(1) + 3$
 C. $f(1) + 3 < m < f(-1) - 3$
 D. $f(0) - 1 < m < f(0) + 1$

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(-f(\sin x))$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Giá trị của $M - m$ bằng



- A. 6 B. 3
 C. -6 D. -3

Câu 34. Cho phương trình $9^{x^2-2x+1} - 2m \cdot 3^{x^2-2x+1} + 3m - 2 = 0$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt là

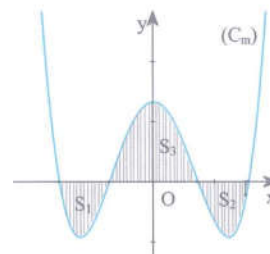
- A. $[2; +\infty)$ B. $(1; +\infty)$ C. $(2; +\infty)$ D. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

Câu 35. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = e, f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $10 < f(5) < 11$ B. $4 < f(5) < 5$ C. $11 < f(5) < 12$ D. $3 < f(5) < 4$

Câu 36. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực.

giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ. Gọi S_1, S_2 và S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm m để $S_1 + S_2 = S_3$



- A. $m = -\frac{5}{2}$ B. $m = -\frac{5}{4}$
 C. $m = \frac{5}{2}$ D. $m = \frac{5}{4}e$

Câu 37. Tập hợp các số phức $w = (1+i)z + 1$ với z là số phức thỏa mãn $|z-1| \leq 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

- A. 4π B. 2π C. 3π D. π

Câu 38. Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 3 lần đường kính của đáy, một viên bi và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi là một khối cầu có đường kính bằng đường kính phía trong của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó (như hình vẽ) thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu (bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh).



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$
C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{5}{9}$

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6y - 10z + 39 = 0$. Từ một điểm M thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm N . Tính khoảng cách từ M tới gốc tọa độ biết rằng $MN = 4$.

- A. 5 B. 3 C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{11}$

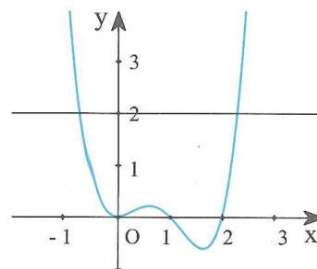
Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3}{3}$. Tính góc φ giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) .

- A. $\varphi = 45^\circ$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\varphi = 30^\circ$. D. $\varphi = 90^\circ$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Đồ thị hàm số $y = \frac{f(x) \cdot \sqrt{x^2 + x}}{[f(x) - 2](x^2 - 1)(x^2 - 4)(2x + 1)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 5 B. 3
C. 6 D. 4



Câu 42. Đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2 + OB^2 = 2$, O là gốc tọa độ. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 2 - 2\sqrt{2})$ B. $(0; 2 + 2\sqrt{2})$ C. $(2 - \sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2})$ D. $(2 + 2\sqrt{2}; +\infty)$

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là 0, 1, 2 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(4x - 4x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$$
 có hai nghiệm thực phân biệt?

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 3$ và

$$f(x) + f(2 - x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_0^2 xf'(x)dx \text{ bằng}$$

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $-\frac{10}{3}$

Câu 46.(Chuyên Khoa học tự nhiên Hà Nội - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 4]$ thỏa

$$\text{mãn } f''(x)f(x) + \frac{[f(x)]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}} = [f'(x)]^2 \text{ và } f(x) > 0 \text{ với mọi } x \in [0; 4]. \text{ Biết rằng } f'(0) = f(0) = 1,$$

giá trị của $f(4)$ bằng

- A. e^2 B. $2e$ C. e^3 D. $e^2 + 1$

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$. Tính giá trị Mm .

- A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{39}{4}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $\frac{13}{4}$

Câu 48. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA', BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA' = 4A'M, BB' = 4B'N$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể

tích của khối chóp $C'.A'B'NM, V_2$ là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{5}$ B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$ C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$ D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{6}$

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $x^2 + y^2 + z^2 + 2mx - 2(m-1)y - mz + m - 2 = 0$ là phương trình của mặt cầu (S_m) . Biết với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tìm bán kính I của đường tròn đó.

- A. $r = \frac{1}{2}$ B. $r = \sqrt{2}$ C. $r = \sqrt{3}$ D. $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$, $D(1;2;3)$ và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $OM = \frac{3\sqrt{21}}{4}$

B. $OM = \sqrt{26}$

C. $OM = \sqrt{14}$

D. $OM = \frac{5\sqrt{17}}{4}$

Đáp án

1-B	2-B	3-D	4-B	5-A	6-C	7-A	8-D	9-D	10-C
11-B	12-A	13-A	14-A	15-A	16-D	17-C	18-C	19-D	20-B
21-B	22-D	23-B	24-A	25-A	26-B	27-C	28-B	29-D	30-C
31-D	32-A	33-B	34-C	35-A	36-D	37-B	38-D	39-D	40-C
41-B	42-A	43-C	44-C	45-D	46-A	47-A	48-B	49-B	50-C

LỜI GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Đáp án B**

Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy hàm không xác định tại $x = -2$ và cả hai nhánh của đồ thị đều đi từ dưới đi lên (nhìn theo hướng từ trái sang phải), do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$

Câu 2: Đáp án B

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 3$ khi $x \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang khi $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 3: Đáp án D

Đồ thị hàm số $y = a^x$, với $0 < a \neq 1$ có tiệm cận ngang là trục hoành và không có tiệm cận đứng.

Câu 4: Đáp án B

Điều kiện. $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Ta có $\log_3(x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = 3^2 \Leftrightarrow x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 8$

Câu 5: Đáp án A

Ta có $\int f(x) dx = \int (x + \cos x) dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$

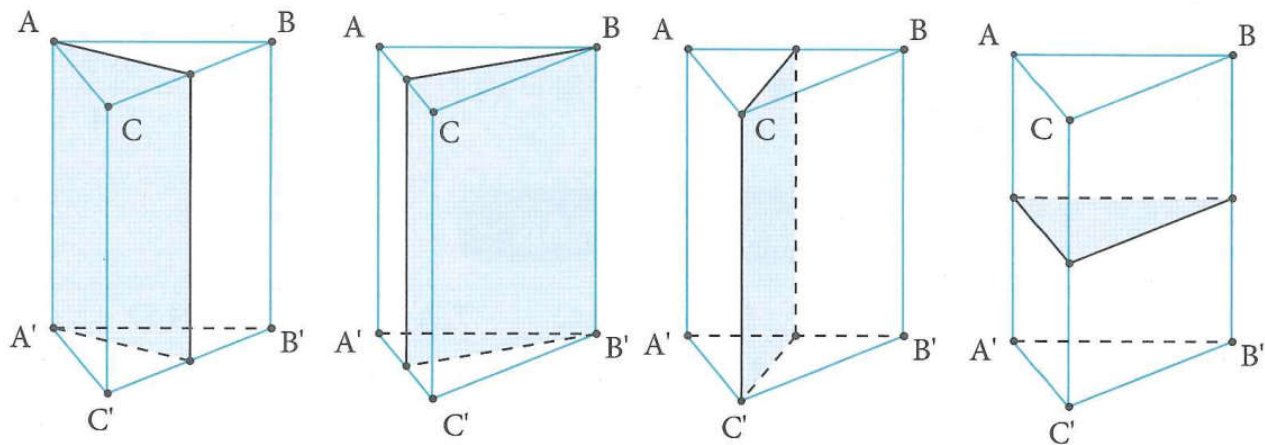
Câu 6: Đáp án C

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = 5 - 2 = 3$$

Câu 7: Đáp án A

$w = 3z_1 - 2z_2 = 3(1+2i) - 2(2-3i) = -1+12i$. Vậy phần ảo của số phức w là 12

Câu 8: Đáp án D



Hình lăng trụ tam giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng.

Câu 9: Đáp án D

Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l là

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi \text{ (đvdt)}.$$

Câu 10: Đáp án C

$$\text{Giả sử } G(x_G; y_G; z_G) \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+1+2}{3} = 1 \\ y_G = \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3} \\ z_G = \frac{0+(-2)+(-1)}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow G\left(1; \frac{1}{3}; -1\right)$$

Câu 11: Đáp án B

Ta có $\vec{n}_\alpha = (1; 2; -1), \vec{u}_d = (-1; -2; 1) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = -\vec{u}_d \Rightarrow (\alpha) \perp d$

Câu 12: Đáp án A

Phương trình viết theo đoạn chắn đi qua 3 điểm $M(1; 0; 0), N(0; -1; 0), P(0; 0; 2)$ là

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow 2x - 2y + z - 2 = 0$$

Câu 13: Đáp án A

Có $6!$ cách xếp 6 học sinh vào bàn ngang 6 chỗ

Câu 14: Đáp án A

Áp dụng công thức tổng n số hạng đầu của cấp số cộng ta có:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 2020 \cdot 1 + 2020 \cdot 2019 = 4080400$$

Câu 15: Đáp án A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = x^2 - 4x + 3, y' = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	+	0	- 0	+
y	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	1	$+\infty$

$$\Rightarrow y_{CT} = 1$$

Câu 16: Đáp án D

$$y' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}; y' = 0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$y(1)=2; y(0)=\sqrt{5}; y(3)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\text{So sánh 4 giá trị trên với nhau} \Rightarrow M = 2\sqrt{2}; m = 2 \Rightarrow M + m = 2(\sqrt{2} + 1)$$

Câu 17: Đáp án C

$$\text{Tính } y' = -x^2 - x + 2$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(a; b)$ là

$$y'(a) = -a^2 - a + 2 = -\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Hệ số góc } y'(a) \text{ lớn nhất (dấu } = \text{ xảy ra) khi chỉ khi } \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

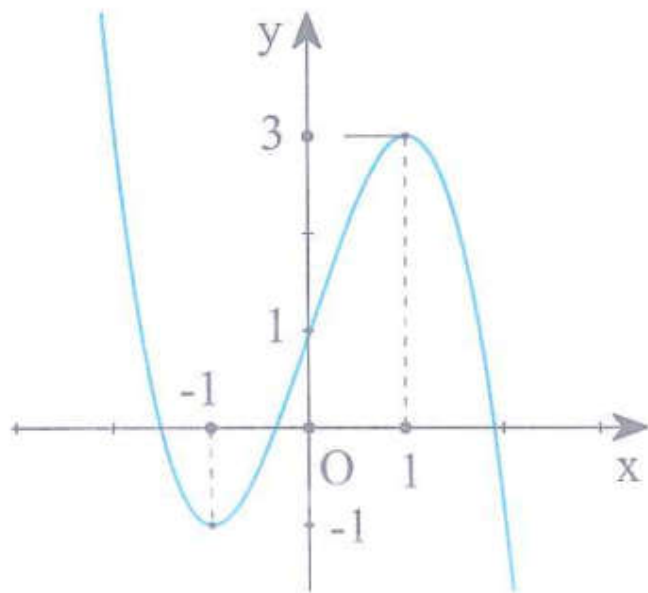
$$\text{Thay } x = a = -\frac{1}{2} \text{ và hàm số đã cho, ta có: } b = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2a + 4b = 0$$

Câu 18: Đáp án C

Ta có $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}$, do đó số nghiệm của phương trình đã cho bằng với số giao điểm của

đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$



Dựa vào đồ thị, ta có đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại 1 điểm.

Câu 19: Đáp án D

Ta có $g'(x) = f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm $g(x) = f(x) + 2020$ chính là bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

Câu 20: Đáp án B

Sau 3 năm số tiền ông B có được cả gốc lẫn lãi là: $A(1+0,065)^3$. Theo giả thiết ông B có số tiền lãi 48 triệu đồng nên ta có phương trình:

$$A(1+0,065)^3 = A + 48 \Leftrightarrow A = \frac{48}{(1,065)^3 - 1} \approx 231$$

Câu 21: Đáp án B

Ta có $a^2 + b^2 = 8ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 10ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 10ab$

$$\Rightarrow \log(a+b)^2 = \log(10ab)$$

$$\Rightarrow 2\log(a+b) = (1 + \log a + \log b)$$

$$\Rightarrow \log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$$

Câu 22: Đáp án D

Từ hình vẽ ta có:

Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $a > 1$

Hàm số $y = \log_b x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên $0 < b < 1 \Rightarrow 0 < b < 1 < a$

Câu 23: Đáp án B

Ta thấy $\forall x \in [-3; 0]$ thì $x - 1 \geq x^2 + 4x - 1$ nên

$$S = \int_{-3}^0 [(x-1) - (x^2 + 4x - 1)] dx = \int_{-3}^0 (-x^2 - 3x) dx = \frac{9}{2}$$

Câu 24: Đáp án A

Ta có

$$(2-i)z + \frac{1+5i}{1+i} = 7+10i \Leftrightarrow (2-i)z + 3+2i = 7+10i \Leftrightarrow (2-i)z = 4+8i$$

$$\text{Suy ra } z = \frac{4+8i}{2-i} = 4i \text{ nên } w = (4i)^2 + 20 + 3i = 4 + 3i. \text{ Vậy } |w| = 5$$

Câu 25: Đáp án A

Phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$ (1) có hai nghiệm phức là $z_1 = 1+3i$ và $z_2 = 1-3i$.

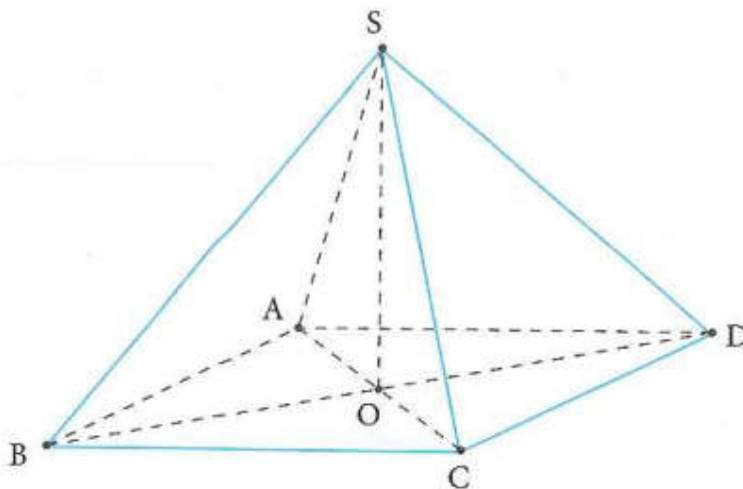
$$\text{Ta có: } A = |(1-3i)^2| + |(1+3i)^2| = |-8-6i| + |-8+6i| = 20.$$

Vậy $A = 20$

Câu 26: Đáp án B

$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

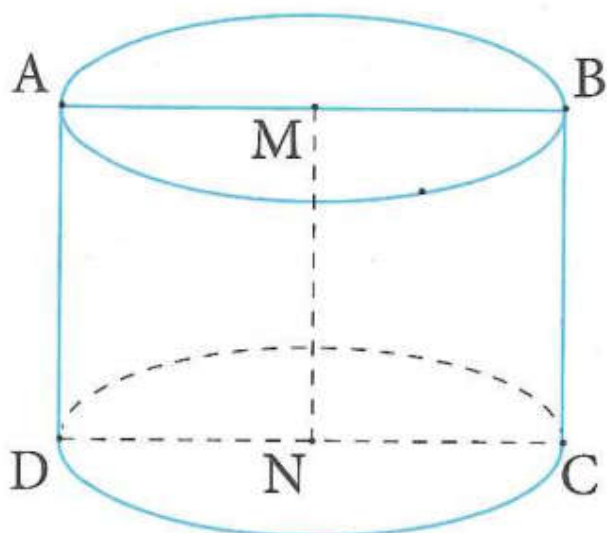
$$\text{Ta có } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD}$$



$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \text{ (đvtt)}$$

Câu 27: Đáp án C

Quay hình vuông $ABCD$ xung quanh MN ta được hình trụ như hình vẽ. Khi đó:



$$r = \frac{AB}{2} = 4\text{cm}, l = h = AD = 8\text{cm}$$

$$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 4 \cdot 8 + 2\pi \cdot 4^2 = 96\pi (\text{cm}^2)$$

Câu 28: Đáp án B

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x - 3y + 2z + 5 = 0$ nên d có vector chỉ phương là $\vec{u}_d(4; -3; 2)$.

Do đó phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{2}$

Câu 29: Đáp án D

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-1; 0; -3); \overrightarrow{BC} = (0; -2; -2); \overrightarrow{BD} = (-1; -1; -1)$.

$$[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (0; 2; -2) \Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BA} = 6$$

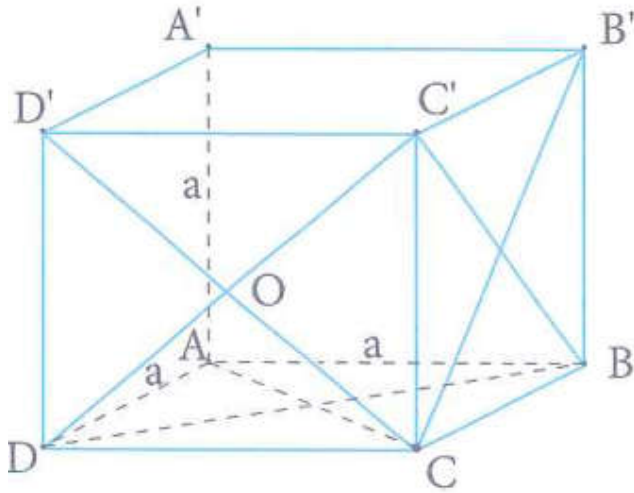
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BA}| = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1 \text{ (đvtt)}$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{2} \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{BCD} \Rightarrow AH = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Câu 30: Đáp án C

Ta có $(D'AC) // (BA'C')$ nên $d(CD'; BC') = d((D'AC); (BA'C'))$
 $= d(D'; (BA'C')) = d(A; (BA'C'))$



Từ đây ta tính $d(A; (BA'C')) = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Câu 31: Đáp án D

Không gian mẫu $|\Omega| = C_{10}^3 \cdot C_{10}^3 = 14400$.

Gọi A là biến cố “Trong hai bộ ba chữ số mà An và Bình chọn ra có đúng một chữ số giống nhau”.

Chọn số giống nhau ở cả hai bạn An và Bình là: 10 cách.

Chọn hai số còn lại của An là: C_9^2 cách.

Chọn hai số còn lại của Bình là: C_7^2 cách.

Vậy $|A| = 10 \cdot C_9^2 \cdot C_7^2 = 7560 \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{21}{40}$

Câu 32: Đáp án A

Ta có $f(x) = 3x + m \Leftrightarrow f(x) - 3x = m$.

Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$ thì đường thẳng $y = m$ phải cắt đồ thị hàm số

$g(x) = f(x) - 3x, x \in (-1; 1)$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 3x, x \in (-1; 1)$.

Có $g'(x) = f'(x) - 3$.

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy, với $x \in (-1; 1)$ thì $-1 < f'(x) < 3 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 3 < 0$.

Do đó, ta có bảng biến thiên như hình bên

x	-1	1
$g'(x)$		-
$g(x)$	$g(-1)$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên, suy ra giá trị cần tìm là $g(-1) < m < g(1) \Leftrightarrow f(-1) + 3 < m < f(1) - 3$.

Câu 33: Đáp án B

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \Rightarrow \sin x \in [-1; 0]$$

Nhìn đồ thị $f(x)$ ta thấy, với $x \in [-1; 0]$ thì $-2 \leq f(x) \leq 1$.

$$\text{Vì } \sin x \in [-1; 0] \Rightarrow -2 \leq f(\sin x) \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -f(\sin x) \leq 2$$

Mặt khác, nhìn đồ thị $f(x)$ ta thấy với $-1 \leq x \leq 2$ thì $-2 \leq f(x) \leq 1$.

$$\text{Vì } -1 \leq -f(\sin x) \leq 2 \Rightarrow -2 \leq f(-f(\sin x)) \leq 1 \Rightarrow M = 1, m = -2 \Rightarrow M - m = 3.$$

Câu 34: Đáp án C

$$\text{Đặt } t = 3^{(x-1)^2} \geq 1.$$

$$\text{Phương trình trở thành } t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2}{2t - 3} (*)$$

($t = \frac{3}{2}$ không phải là nghiệm của phương trình).

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{t^2 - 2}{2t - 3} \text{ trên } [1; +\infty) \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{2t^2 - 6t + 4}{(2t - 3)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	1	1,5	2	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	1	$+\infty$	2	$+\infty$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 và khác $\frac{3}{2}$. Dựa vào bảng biến thiên ta có $m > 2$

Câu 35: Đáp án A

Xét $x \in (0; +\infty)$ và $f(x) > 0$ ta có: $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{f(x)} d(f(x)) = \frac{2}{3} \int \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} d(3x+1)$$

$$\Rightarrow \ln(f(x)) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C}$$

Theo bài ra ta có: $f(1) = e$ nên $e^{\frac{4}{3} + C} = e \Rightarrow C = -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} - \frac{1}{3}}$

Do đó $f(5) \approx 10,3123 \Rightarrow 10 < f(5) < 11$

Câu 36: Đáp án D

Giả sử $x = b$ là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$. Khi đó ta có $b^4 - 3b^2 + m = 0$ (1).

Nếu xây ra $S_1 + S_2 = S_3$ thì

$$\int_0^b (x^4 - 3x^2 + m) dx = 0 \Rightarrow \frac{b^5}{5} - b^3 + mb = 0 \Rightarrow \frac{b^4}{5} - b^2 + m = 0 \quad (2) \quad (\text{do } b > 0)$$

Từ (1) và (2), trừ vế theo vế ta được $\frac{4}{5}b^4 - 2b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{5}{2}$ (do $b > 0$)

Thay trở lại vào (1) ta được $m = \frac{5}{4}$

Câu 37: Đáp án B

Ta đặt $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì $w = (1+i)z + 1 \Leftrightarrow w = (1+i)(z-1) + i + 2$

$$\Leftrightarrow |w - i - 2| = |(z-1)(1+i)|$$

$$\Leftrightarrow |w - i - 2| = |z-1| \cdot |1+i|$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2} \cdot |z-1|)^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S = \pi R^2 = 2\pi$$

Câu 38: Đáp án D

Gọi R là bán kính khối trụ, $6R$ là chiều cao khối trụ, chiều cao khối nón là $4R$.

Thể tích khối cầu và khối nón là $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 4R = \frac{8}{3}\pi R^3$

Thể tích khối trụ $V_2 = \pi R^2 \cdot 6R = 6\pi R^3$

Tỉ số thể tích nước còn lại và nước ban đầu là $\frac{V_2 - V_1}{V_2} = \frac{6 - \frac{8}{3}}{6} = \frac{5}{9}$

Câu 39: Đáp án D

Xét mặt cầu (S) : $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 20 \Rightarrow I(5; -3; 5), R = 2\sqrt{5}$.

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) : $d(I; (P)) = \frac{|5 - 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 6$

Khi đó $MN^2 + IN^2 = MN^2 + R^2 = 4^2 + (2\sqrt{5})^2 = 36 = d^2 \Rightarrow IM \perp (P)$

Suy ra phương trình của IM : $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{2}$; $M \in IM \Rightarrow M(t+5; -3-2t; 2t+5)$

Mà $M \in (P) \Rightarrow t+5-2(-2t-3)+2(2t+5)-3=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow M(3; 1; 1) \Rightarrow OM = \sqrt{11}$

Câu 40: Đáp án C

Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA \perp (ABCD)$.

Do đó $SA = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = a$.

Tam giác SAD vuông tại A nên $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có $CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Vậy diện tích tam giác SCD là: $S_{SCD} = \frac{1}{2} SD \cdot CD = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$.

Gọi I là hình chiếu của B lên mặt phẳng (SCD) khi đó $(\widehat{SB, (SCD)}) = (\widehat{SB, SI}) = \widehat{BSI}$.

Mặt khác, $BI = \frac{3V_{B.SCD}}{S_{SCD}} = \frac{3V_{S.ABCD}}{2S_{SCD}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

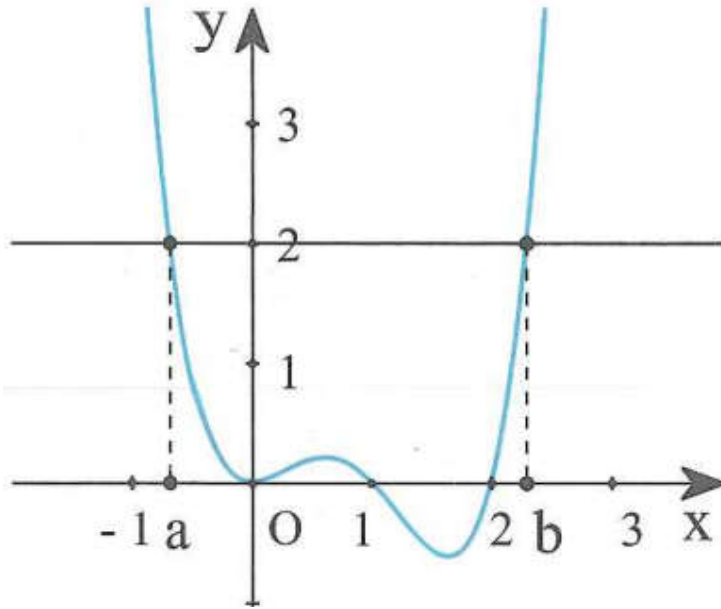
Tam giác SAB vuông tại A nên $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SIB vuông tại I nên $\sin \widehat{BSI} = \frac{BI}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSI} = 30^\circ$.

Vậy $(\widehat{SB, (SCD)}) = 30^\circ$.

Câu 41: Đáp án B

Trước tiên ta rút gọn phần thức $\frac{f(x) \cdot \sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x^2-1)(x^2-4)(2x+1)}$, khi phân thức này đã tối giản thì về cơ bản, ứng với mỗi một nghiệm của mẫu ta sẽ được một đường tiệm cận đứng, tuy nhiên phải lưu ý các trường hợp đặc biệt.



+) Ta thấy đồ thị $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 1, 2 nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = 0$ và hai nghiệm đơn $x = 1, x = 2$

$$\Rightarrow f(x) = (x-0)^2(x-1)(x-2)g(x) = x^2(x-1)(x-2)g(x) \text{ với } g(x) \text{ vô nghiệm.}$$

+) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm có hoành độ $x = a, x = b$ ($-1 < a < 0, 2 < b < 3$), nên phương trình $f(x) = 2$ có hai nghiệm đơn $x = a, x = b$ ($-1 < a < 0, 2 < b < 3$)

$$\Rightarrow f(x) - 2 = (x-a)(x-b)h(x) \text{ với } h(x) \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(x) \cdot \sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x^2-1)(x^2-4)(2x+1)} = \frac{g(x)}{h(x)} \cdot \frac{x^2(x-1)(x-2) \cdot \sqrt{x^2+x}}{(x-a)(x-b)(x^2-1)(x^2-4)(2x+1)} \\ &= \frac{g(x)}{h(x)} \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt{x^2+x}}{(x-a)(x-b)(x+1)(x+2)(2x+1)} \end{aligned}$$

Ta thấy với $x = a$ ($-1 < a < 0$) và $x = -\frac{1}{2}$ thì $x^2 + x < 0$ nên $\sqrt{x^2+x}$ không tồn tại.

Do đó đồ thị hàm số có các đường tiệm cận đứng là $x = b, x = -1, x = -2$.

Câu 42: Đáp án A

Đề $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B thì phương trình $x + m = \frac{x-1}{x+1}$ phải có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow x^2 + mx + m + 1 = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m - 4 > 0 \\ (-1)^2 + m(-1) + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 - 2\sqrt{2}, m > 2 + 2\sqrt{2} \\ 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 + 2\sqrt{2} \\ m < 2 - 2\sqrt{2} \end{cases} (*)$$

Gọi $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$, ta có

$$OA^2 + OB^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1)^2 + (x_1 + m)^2 + x_2^2 + (x_2 + m)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (-m)^2 - 2(m+1) + m(-m) + m^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta chọn $m = -1$.

Câu 43: Đáp án C

Theo đề bài thì $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là 0, 1, 2 và $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ u(x) = 0 \end{cases} ; \text{ với ba nghiệm } 0; 1; 2 \text{ là nghiệm đơn hoặc bội lẻ,}$$

còn $u(x) = 0$ chỉ có nghiệm bội chẵn không thuộc tập $[0; 1; 2]$

Đặt $g(x) = f(4x - 4x^2)$, ta có:

$$g'(x) = (4 - 8x)f'(4x - 4x^2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 8x = 0 \\ f'(4x - 4x^2) = 0 \end{cases}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 8x = 0 \\ 4x - 4x^2 = 0 \\ 4x - 4x^2 = 1 \\ 4x - 4x^2 = 2 \\ u(4x - 4x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x(x - 1) = 0 \\ (2x - 1)^2 = 0 \\ u(4x - 4x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ u(4x - 4x^2) = 0 \end{cases}$$

+) Xét phương trình $u(4x - 4x^2) = 0$.

Giả sử a là một nghiệm của phương trình $u(x) = 0$ thì từ $a \notin \{0; 1; 2\}$ ta thấy phương trình $4x - 4x^2 = a$ không có nghiệm nào thuộc tập $\left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$. Suy ra các nghiệm $x = 0; x = 1$ là nghiệm đơn còn $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm bội 3 của phương trình $f'(4x - 4x^2) = 0$

+) Nếu phương trình $u(4x - 4x^2) = 0$ có nghiệm thì các nghiệm đó cũng là các nghiệm bội chẵn của phương trình $f'(4x - 4x^2) = 0$

Vậy tập nghiệm đơn, nghiệm bội lẻ của phương trình $g(x) = 0$ là $\left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$. Do đó, hàm số $g(x) = f(4x - 4x^2)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 44: Đáp án C

Điều kiện

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 2x^2 + mx + 1 > 0 \end{cases}$$

Phương trình ban đầu tương đương

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} &= x + 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} &= \log_2(x + 2) + x + 2 \\ \Leftrightarrow f(\sqrt{2x^2 + mx + 1}) &= f(x + 2)(1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} x > -2 \\ 2x^2 + mx + 1 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2 + (m - 4)x - 3 = 0 \end{cases} (2)$$

Để có hai nghiệm thực phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -2

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 4)^2 + 12 > 0 \\ (x_1 + 2) + (x_2 + 2) > 0 \\ (x_1 + 2) \cdot (x_2 + 2) > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ x_1 + x_2 + 4 > 0 \\ x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ 4 - m + 4 > 0 \\ -3 + 2(4 - m) + 4 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m < \frac{9}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow m < \frac{9}{2} \text{ mà } m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\} \end{aligned}$$

Câu 45: Đáp án D

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có $\int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx$

Từ $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $f(0) + f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 2 - f(0) = 2 - 3 = -1$

Xét $I = \int_0^2 f(x)dx$

Đặt $x = 2 - t \Rightarrow dx = -dt$, đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

Khi đó $I = -\int_2^0 f(2-t)dt = \int_0^2 f(2-t)dt \Rightarrow I = \int_0^2 f(2-x)dx$

Do đó ta có $\int_0^2 (f(x) + f(2-x))dx = \int_0^2 (x^2 - 2x + 2)dx$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2(-1) - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}.$$

Câu 46: Đáp án A

$$\text{Ta có: } f''(x)f(x) + \frac{[f'(x)]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}} = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow f''(x)f(x) - [f'(x)]^2 = -\frac{[f'(x)]^2}{\sqrt{(2x+1)^3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f'(x)]^2} = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}} \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\int (2x+1)^{-\frac{3}{2}}dx \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + C_1$$

Thay $x = 0$ ta được $C_1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \Leftrightarrow \ln[f(x)] = \sqrt{2x+1} + C_2$$

Thay $x = 0$ ta được $C_2 = -1$.

$$\Rightarrow \ln[f(x)] = \sqrt{2x+1} - 1$$

Thay $x = 4$ ta được $\ln[f(4)] = 2 \Rightarrow f(4) = e^2$.

Câu 47: Đáp án A

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1$.

Đặt $t = |z + 1|$, ta có $0 = |z| - 1 \leq |z + 1| \leq |z| + 1 = 2 \Rightarrow t \in [0; 2]$

Ta có $t^2 = (1 + z)(1 + \bar{z}) = 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} = 2 + 2x \Rightarrow x = \frac{t^2 - 2}{2}$

Suy ra $|z^2 - z + 1| = |z^2 - z + z\bar{z}| = |z||z - 1 + \bar{z}| = \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1| = |t^2 - 3|$

Xét hàm số $f(t) = t + |t^2 - 3|, t \in [0; 2]$

Dùng đạo hàm tính giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm $f(t)$, suy ra

$$\max f(t) = \frac{13}{4} \text{ khi } t = \frac{1}{2}; \min f(t) = \sqrt{3} \text{ khi } t = \sqrt{3} \Rightarrow M.n = \frac{13\sqrt{3}}{4}$$

Câu 48: Đáp án B

Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$

Lấy điểm E trên CC' sao cho $CC' = 4C'E$.

$$\text{Suy ra } \frac{A'M}{A'A} = \frac{B'N}{B'B} = \frac{C'E}{C'C} = \frac{1}{4} \Rightarrow (MNE) // (ABC).$$

Ta có: $V_{C'MNE} = \frac{1}{3}V_{A'B'C'.MNE}$ (chóp và lăng trụ có chung đáy, đường cao)

$$\Rightarrow V_1 = \frac{2}{3}V_{A'B'C'.MNE}$$

Mặt khác $V_{A'B'C'.MNE} = \frac{1}{4}V$ (hai lăng trụ có chung đáy và tỉ lệ đường cao bằng

$$\frac{d(M, (A'B'C'))}{d(A, (A'B'C'))} = \frac{MA'}{AA'} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}V = \frac{1}{6}V \Rightarrow V_2 = V - \frac{1}{6}V = \frac{5}{6}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$$

Câu 49: Đáp án B

Gọi $M(x; y; z)$ là một điểm thuộc đường tròn cố định với mọi số thực m , khi đó ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2mx - 2(m-1)y - mz + m - 2 = 0 \text{ đúng với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow m(2x - 2y - z + 1) + x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \text{ đúng với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Vậy đường tròn cố định là giao tuyến của mặt phẳng $2x - 2y - z + 1 = 0$ và mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \text{ có tâm } I(0; -1; 0), \text{ bán kính } R = \sqrt{3}$$

$$\text{Do đó bán kính đường tròn } r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} = \sqrt{3 - \left(\frac{|2+1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} \right)^2} = \sqrt{2}$$

Câu 50: Đáp án C

Giả sử $M(x+1; y+2; z+3)$.

$$\text{Ta có } MA = \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} \geq |x-6| \geq 6-x.$$

$$MB = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} \geq |y-2| \geq 2-y$$

$$MC = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} \geq |z-3| \geq 3-z$$

$$\sqrt{3}MD = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{(x+y+z)^2} \geq x+y+z$$

$$\text{Do đó } P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD \geq 6-x+2-y+3-z+x+y+z = 11$$

$$\text{Vậy } P \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 11 khi và chỉ khi } \begin{cases} \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} = 6-x \\ \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} = 2-y \\ \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} = 3-z \\ \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} = x+y+z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ 2-y \geq 0 \\ 3-z \geq 0 \\ x+y+z \geq 0 \\ x=y=z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0 \Rightarrow M(1;2;3) \text{ khi đó } OM = \sqrt{14}$$