TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

1 2020
Số 511

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

BỘ SÁCH GIÁO KHOA
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

DANH MỤC BỘ SÁCH LỚP MỘT

SÁCH HỌC SINH

1. Tiếng Việt 1, tập một
2. Tiếng Việt 1, tập hai
3. Toán 1, tập một
4. Toán 1, tập hai
5. Tự nhiên và Xã hội 1
6. Đạo đức 1
7. Âm nhạc 1
8. Mĩ thuật 1
9. Hoạt động trải nghiệm 1
10. Giáo dục thể chất 1
11. Tiếng Anh 1

SÁCH GIÁO VIÊN

1. Tiếng Việt 1, tập một - SGV
2. Tiếng Việt 1, tập hai - SGV
3. Toán 1 - SGV
4. Tự nhiên và Xã hội 1 - SGV
5. Đạo đức 1 - SGV
6. Âm nhạc 1 - SGV
7. Mĩ thuật 1 - SGV
8. Hoạt động trải nghiệm 1 - SGV
9. Giáo dục thể chất 1 - SGV
10. Tiếng Anh 1 - SGV

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

GIẢI BÀI TOÁN CÓ NỘI DUNG THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH HỌC PHẲNG BẰNG KIẾN THỨC TRUNG HỌC CƠ SỞ

TRỊNH PHONG QUANG
(GV THCS Quảng Lạc, Nho Quan, Ninh Bình)

I. KIẾN THỨC CẦN ÁP DỤNG

1. Với ba điểm A,B,C ta có $AB+BC\ge AC$. Đẳng thức xảy ra khi A,B,C thẳng hàng (B nằm giữa A và C).

2. $P(x)=\left[A(x)\right]^2+\alpha\ge\alpha,\ \forall x.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A(x)=0$.

$$Q(x)=\beta-\left[B(x)\right]^2\le\beta,\ \forall x.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow B(x)=0$.

3. *Bất đẳng thức Cauchy*: Với hai số không âm a,b ta có: $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

4. *Bất đẳng thức Bunyakovsky*: Với hai cặp số thực $(a_1;a_2)$ và $(b_1;b_2)$ ta có:

$$(a_1b_1+a_2b_2)\le(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{R}$ sao cho

$a_1=kb_1,\ a_2=kb_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ (với $b_1.b_2\ne 0$).

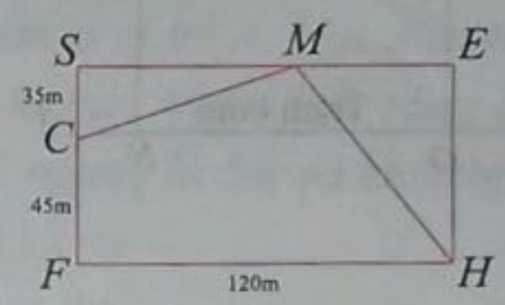
5. *Bất đẳng thức Mincowski*: với mọi số thực a,b,c,d thì

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

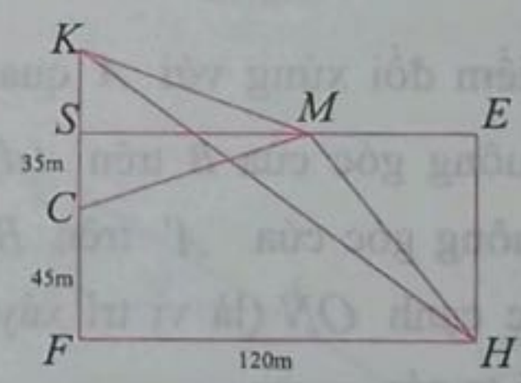
Đẳng thức xảy ra khi: $ad=bc$.

II. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. *Một khu sân trường hình chữ nhật được thiết kế làm khu sân chơi bãi tập có kích thước theo bản vẽ như trong hình. Nhà trường có thiết kế hai khu vệ sinh dành cho giáo viên và học sinh ở hai vị trí C và H như trong hình. Trên cạnh SE người ta muốn chọn một vị trí để khoan giếng cấp nước cho hai khu vệ sinh. Hỏi đoạn đường ống ngắn nhất mà nhà trường có thể thiết kế (đường ống dẫn nước ngầm) cho hai khu vệ sinh là bao nhiêu mét? (làm tròn đến đơn vị mét).*



Lời giải. Gọi K là điểm đối xứng của C qua SE, khi đó $SC=SK=35\,\text{m}$ và $MK=MC$ (theo tính chất đối xứng).



Khi đó ta có:

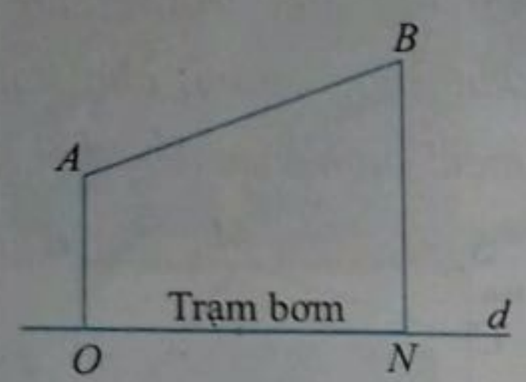
$$MC+MH=MH+MK$$
$$\ge KH=\sqrt{(KS+SC+CF)^2+FH^2}.$$

(theo định lí Pythagore)

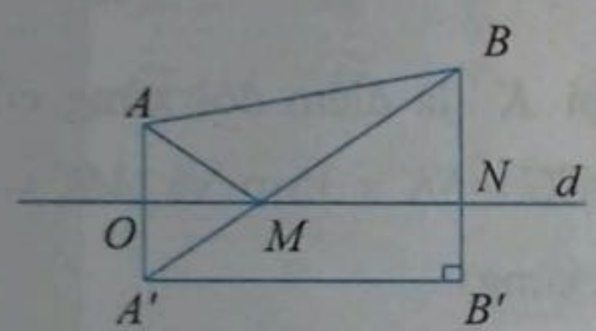
$$=\sqrt{(35+35+45)^2+120^2}\approx 166\ (\text{m}).$$

Dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm của KH và SE. Vậy đoạn đường ống ngắn nhất mà nhà trường có thể thiết kế (đường ống dẫn nước ngầm) cho hai khu vệ sinh là 166(m). (*Chú ý*: Bài toán có thể sử dụng BĐT Mincowski để giải).

Thí dụ 2. *Có hai ngôi làng A và B nằm về cùng phía đối với bờ sông (d) như hình vẽ. Khoảng cách từ A đến bờ sông là 200 m, Khoảng cách từ B đến bờ sông là 450 m.. Khoảng cách giữa A và B là 600 m. Người ta muốn xây dựng một trạm bơm nước trên bờ sông để dẫn nước về hai ngôi làng. Họ phải tính toán chọn vị trí xây trạm bơm sao cho tổng khoảng cách từ trạm bơm bước đến hai ngôi làng A và B là ngắn nhất. Hỏi tổng khoảng cách từ trạm bơm nước đến hai ngôi làng A và B ngắn nhất là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).*



Lời giải.



Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (d), N là hình chiếu vuông góc của B trên (d) và B' là hình chiếu vuông góc của A' trên BN. Gọi M là điểm thuộc cạnh ON (là vị trí xây trạm bơm nước). Khi đó ta có:

$$AM + MB = MA' + MB \geq A'B = \sqrt{BB'^2 + A'B'^2}$$

$$= \sqrt{(BN + OA'^2)^2 + AB^2 - (BN - AO)^2}$$

$$= \sqrt{(450 + 200)^2 + 600^2 - (450 - 200)^2}$$

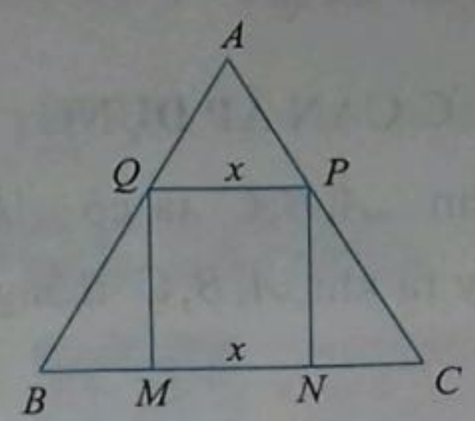
$$= \sqrt{608089} \approx 849 \text{ m}.$$

Dấu "=" xảy ra khi A', M, B thẳng hàng hay M là giao điểm của $A'B$ và (d).

Vậy tổng khoảng cách từ trạm bơm nước đến hai ngôi làng A và B ngắn nhất là 849 m.

Thí dụ 3: *Một miếng bìa hình tam giác đều ABC có cạnh bằng 16. Học sinh cắt một hình chữ nhật MNPQ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với M, N thuộc cạnh BC và P; Q lần lượt thuộc cạnh AC và AB). Diện tích hình chữ nhật MNPQ lớn nhất cần cắt bằng bao nhiêu?*

Lời giải.



Đặt $MN = x, (0 < x < 16) \Rightarrow BM = \dfrac{16 - x}{2}$

$$\Rightarrow \tan 60^0 = \frac{QM}{BM} \Rightarrow QM = \frac{\sqrt{3}}{2}(16 - x).$$

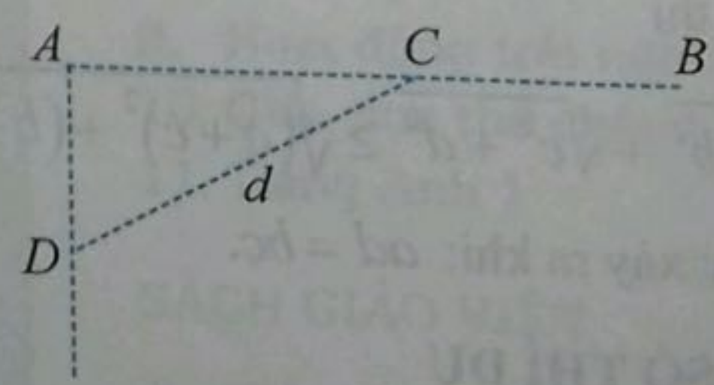
Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$S = \dfrac{\sqrt{3}}{2} x \cdot (16 - x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(16x - x^2)$. Ta có:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}(16x - x^2) = 32\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 8)^2 \leq 32\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 8$. Vậy diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất cần cắt là $32\sqrt{3}$.

Thí dụ 4. *Hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai tàu cùng khởi hành, tàu A chạy về hướng Nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại phía tàu A với vận tốc 7 hải lý/giờ (như hình vẽ). Hãy xác định thời điểm mà khoảng cách giữa hai tàu là bé nhất.*



Lời giải. Gọi t là thời gian mà sau khi xuất phát hai tàu cách nhau một khoảng d. Khi đó $d^2 = CD^2 = AC^2 + AD^2$ trong đó AD chính là quãng đường của tàu A đi được. Khi đó

$AC^2 = (5 - BC)^2$. Theo công thức liên hệ giữa quãng đường, vận tốc và thời gian

$$S = vt \Rightarrow \begin{cases} AD = v_A t \\ BC = v_B t \end{cases}.$$

Quãng đường tàu B đi được là $BC = v_B t = 7t$.

Quãng đường tàu A đi được là $AD = v_A t = 6t$.

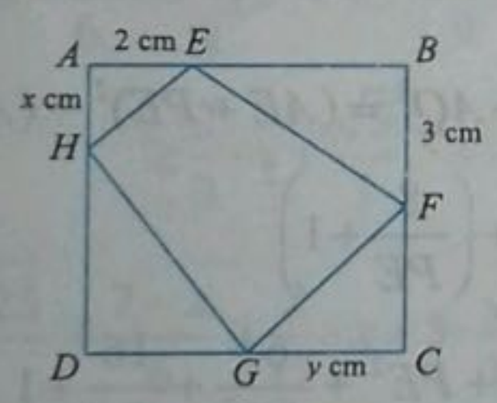
Ta có: $d^2 = AC^2 + AD^2 = (5 - BC)^2 + AD^2$

$$= (5 - 7t)^2 + (6t)^2 \Rightarrow d = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$$

$$= \sqrt{85\left(t - \frac{7}{17}\right)^2 + \frac{180}{17}} \geq \frac{6\sqrt{85}}{17}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = \frac{7}{17}$. Vậy thời điểm mà khoảng cách giữa hai tàu là ngắn nhất là: $t = \frac{7}{17}$.

Thí dụ 5. *Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng x + y để diện tích hình thang EFGH đạt giá trị nhỏ nhất.*



Lời giải. Ta có: S_{EFGH} nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH} \text{ lớn nhất.}$$

Tính được: $2S = 2x + 3y + (6 - x)(6 - y)$

$$= xy - 4x - 3y + 36 \ (1).$$

Mặt khác $\Delta AEH \backsim \Delta CGF$ (g.g) nên:

$$\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6 \ (2).$$

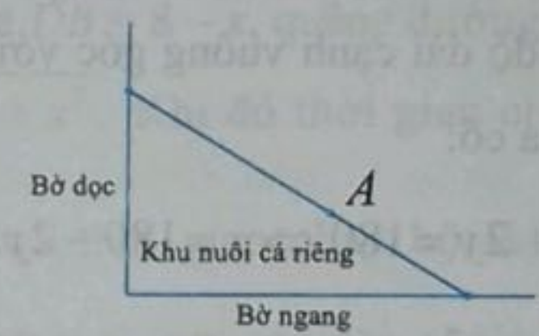
Từ (1) và (2) suy ra: $2S = 42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right)$. Ta có $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Biểu thức $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi:

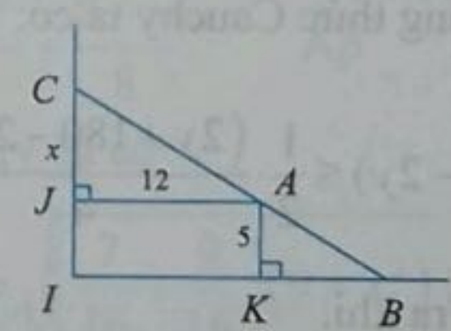
$$4x = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}.$$

Tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Thí dụ 6. *Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m.*



Lời giải.



Mô tả bài toán như hình vẽ. Đặt $CJ = x, (x > 0)$.

Ta có hai tam giác ΔAJC và ΔBKA đồng dạng nên: $\frac{CJ}{AK} = \frac{AJ}{BK} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{12}{BK} \Leftrightarrow BK = \frac{60}{x}$.

Diện tích của khu nuôi cá là:

$$S = \frac{1}{2}(x + 5)\left(\frac{60}{x} + 12\right) = \frac{1}{2}\left(60 + 12x + \frac{300}{x} + 60\right)$$

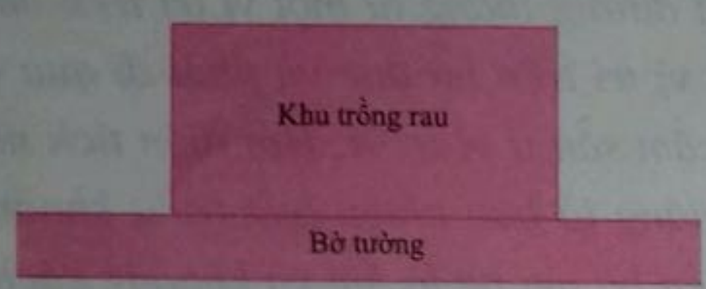
$$\Leftrightarrow S = \left(6x + \frac{150}{x}\right) + 60.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$S \geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{150}{x}} + 60 = 120.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 6x = \frac{150}{x} \Leftrightarrow x = 5$. Vậy diện tích nhỏ nhất có thể giăng lưới là $S = 120\ (\text{m}^2)$.

Thí dụ 7. *Bác nông dân làm một hàng rào trồng rau hình chữ nhật có chiều dài song song với bờ tường. Bác chỉ làm ba mặt vì mặt thứ tư bác tận dụng bờ tường. Bác dự định sẽ dùng 180 m lưới sắt để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Hỏi diện tích lớn nhất bác có thể rào là bao nhiêu?*



Lời giải. Gọi x là độ dài cạnh song song với bờ tường, y là độ dài cạnh vuông góc với bờ tường. Theo bài ra ta có:

$$x + 2y = 180 \Leftrightarrow x = 180 - 2y.$$

Diện tích khu trồng rau là $S = xy = (180 - 2y)y$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

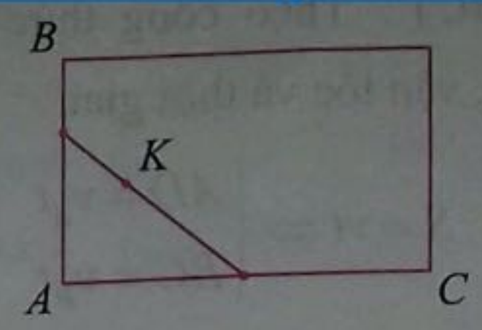
$$S = \frac{1}{2} \cdot 2y(180 - 2y) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(2y + 180 - 2y)^2}{4} = 4050.$$

Đẳng thức xảy ra khi:

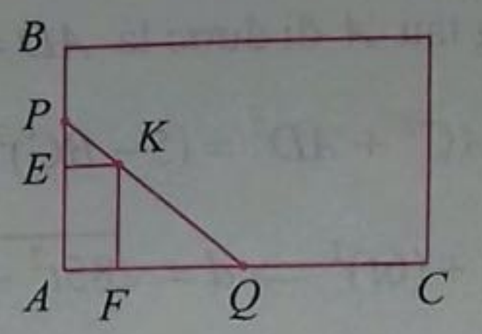
$$2y = 180 - 2y \Leftrightarrow y = 45\ (\text{m}).$$

Vậy diện tích lớn nhất bác có thể rào là 4050 (m^2).

Thí dụ 8. (Trích đề thi thử TS lớp 10 năm 2017-2018 tỉnh Ninh Bình). *Một cái ao hình chữ nhật, tại một góc nhỏ của ao người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của ao để thả bèo (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể đồng thời chạm vào hai bờ AB, AC và vào cái cọc K (bỏ qua đường kính của cây sào và của cái cọc).*



Lời giải.



Gọi P và Q lần lượt là điểm giao của cây sào với hai bờ AB, AC; E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K trên AB và AC. Khi đó $KE = AF = 1\text{m}$, $KF = AE = 8\text{m}$. Ta có:

$$KE // AQ \Rightarrow \frac{EK}{AQ} = \frac{PE}{PA} \Rightarrow \frac{EK}{AF + QF} = \frac{PE}{PE + AE}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{QF + 1} = \frac{PE}{PE + 8} \Rightarrow QF + 1 = \frac{PE + 8}{PE} = 1 + \frac{8}{PE}$$

$\Rightarrow QF = \frac{8}{PE}$. Theo định lý Pythagore ta có:

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 = (AE + PE)^2 + (AF + QF)^2$$

$$= (8 + PE)^2 + \left(\frac{8}{PE} + 1\right)^2$$

$$= 64 + 16PE + PE^2 + \frac{64}{PE^2} + \frac{16}{PE} + 1$$

$$= \left(8PE + 8PE + \frac{64}{PE^2}\right) + \left(PE^2 + \frac{8}{PE} + \frac{8}{PE}\right) + 65$$

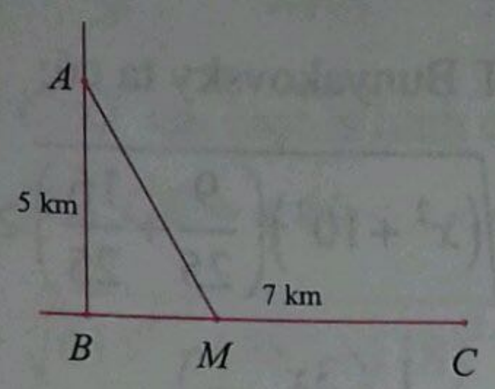
$\geq 3.16 + 3.4 + 65 = 125$ (theo BĐT Cauchy cho ba số dương) $\Rightarrow PQ \geq 5\sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} PE = 2 \\ QF = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PA = 10 \\ QA = 5 \end{cases}$.

Vậy chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể đồng thời chạm vào hai bờ AB, AC và vào cái cọc K là: $5\sqrt{5}$ (m).

Thí dụ 9. *Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển AB = 5 km. Trên bờ*

biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến kho nhanh nhất ?



Lời giải. Đặt $BM = x$ (km) thì $MC = 7 - x$ (km) $(0 < x < 7)$. Ta có thời gian chèo đò từ A đến M là: $t_{AM} = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}$ (h).

Thời gian đi bộ đi bộ đến C là: $t_{MC} = \dfrac{7-x}{6}$ (h).

Thời gian từ A đến kho là $t = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$\sqrt{x^2+25} + \frac{7-x}{6} = \sqrt{(x^2+25)\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\right)} + \frac{7-x}{12}$$

$$\geq \frac{2}{3}\cdot x + \frac{\sqrt{5}}{3}.5 + \frac{7-x}{6}$$

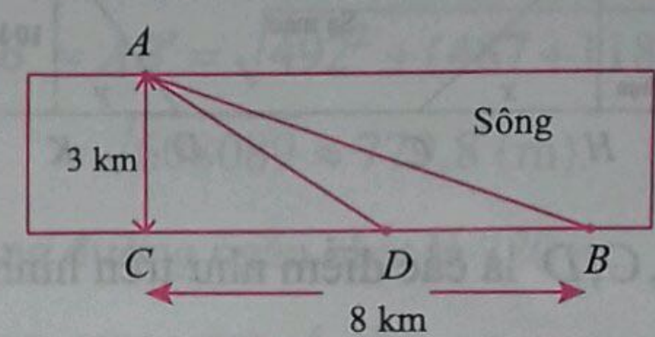
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \frac{7-x}{6} \geq \frac{2}{12}\cdot x + 5\cdot\frac{\sqrt{5}}{12} + \frac{14-2x}{12}$$

$$= \frac{14+5\sqrt{5}}{12}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{15}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$: thỏa mãn ĐK: $0 < x < 7$. Vậy giá trị nhỏ nhất của t là $\dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$ tại $x = 2\sqrt{5}$.

Khi đó thời gian đi là ít nhất và điểm M cách B một đoạn: $BM = x = 2\sqrt{5}$ (km).

Thí dụ 10. *Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hoặc có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km / h, chạy 8 km/h và quãng đường BC = 8 km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B.*



Lời giải. Đặt $CD = x$ $(0 < x < 8)$. Quãng đường chạy bộ là $DB = 8 - x$, quãng đường chèo thuyền $AD = \sqrt{9+x^2}$. Khi đó thời gian chèo thuyền là $\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{6}$ và thời gian chạy bộ là $\dfrac{8-x}{8}$. Tổng thời gian mà người đàn ông cần có là $T = \dfrac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \dfrac{8-x}{8}$. Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\sqrt{9+x^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{16}+\frac{9}{16}\right)\left(9+x^2\right)} \geq \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot 3$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \frac{8-x}{8} \geq \frac{3x+3\sqrt{7}}{24} + \frac{24-3x}{24} = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

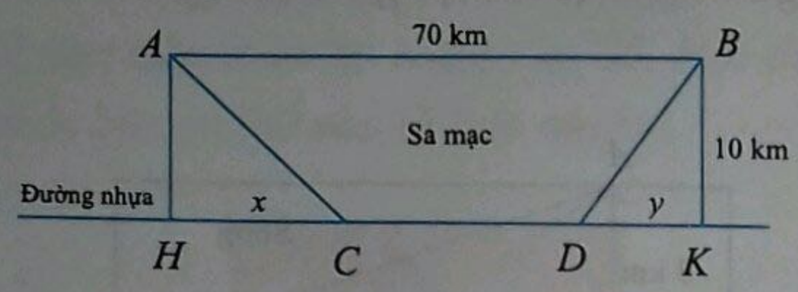
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{4x}{3} = \dfrac{12}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{\sqrt{7}}$ (thoả mãn ĐK: $0 < x < 8$).

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đó tới B là: $1 + \dfrac{\sqrt{7}}{8}$ (giờ).

Thí dụ 11. *Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên xa mạc. Anh ta muốn đến điểm B và cách A một đoạn là 70 km. Trong sa mạc thì xe anh ta chỉ*

có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Nhà địa chất ấy phải đến được điểm B sau 2 giờ. Vì vậy nếu anh ta đi thẳng từ A đến B sẽ không thể đến đúng giờ. May mắn thay có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 10 km. Trên đường nhựa này thì xe của nhà địa chất học này có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Làm thế nào để nhà địa chất học đến sớm nhất (đảm bảo trong khung giờ cho phép).

Lời giải.



Xét H, K, C, D là các điểm như trên hình vẽ.

Chia quãng đường đi được theo 3 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Đi từ A đến C (từ sa mạc đến đường nhựa song song).

Giai đoạn 2: Đi từ C đến D (một quãng đường trên đường nhựa).

Giai đoạn 3: Đi từ D đến B (từ điểm kết thúc D trên đường nhựa đi tiếp đến B qua xa mạc).

Đặt $HC = x$ $(0 < x < 70)$, $DK = y$ $(0 < x < 70)$.

Quãng đường đi từ A đến C là $\sqrt{x^2+10^2}$.

Thời gian đi trên sa mạc từ từ A đến C với vận tốc 30 km/h là $t_1 = \dfrac{\sqrt{x^2+10^2}}{30}$.

Quãng đường đi từ D đến B là $\sqrt{y^2+10^2}$.

Thời gian đi trên sa mạc từ D đến B với vận tốc 30 km/h là: $t_2 = \dfrac{\sqrt{y^2+10^2}}{30}$.

Quãng đường đi từ C đến D là:

$$CD = 70 - (x+y).$$

Thời gian đi trên từ C đến D với vận tốc 50 km/h là $t_3 = \dfrac{70-(x+y)}{50}$. Vậy tổng thời gian mà nhà địa chất học đi từ A đến B là:

$$T_{(x;y)} = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{\sqrt{x^2+10^2}}{30} + \frac{\sqrt{y^2+10^2}}{30} + \frac{70-(x+y)}{50}.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\sqrt{x^2+10^2} = \sqrt{\left(x^2+10^2\right)\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)} \ge \frac{3}{5}\cdot x + \frac{4}{5}\cdot 10$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+10^2}}{30} = \frac{1}{30}\left(\frac{3x}{5}+8\right).$$

Tương tự ta có: $\dfrac{\sqrt{y^2+10^2}}{30} = \dfrac{1}{30}\left(\dfrac{3y}{5}+8\right)$

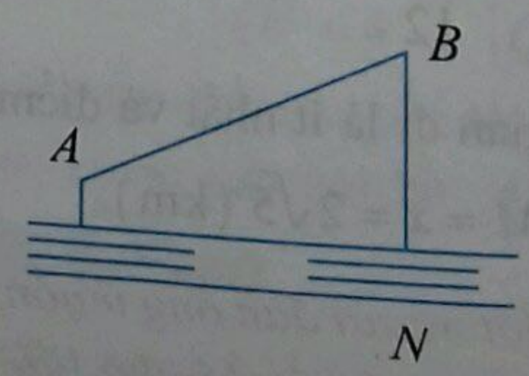
$$\Rightarrow T_{(x;y)} = \frac{\sqrt{x^2+10^2}}{30} + \frac{\sqrt{y^2+10^2}}{30} + \frac{70-(x+y)}{50}$$

$$\ge \frac{1}{30}\left(\frac{3x}{5}+8\right) + \frac{1}{30}\left(\frac{3x}{5}+8\right) + \frac{70-(x+y)}{50}$$

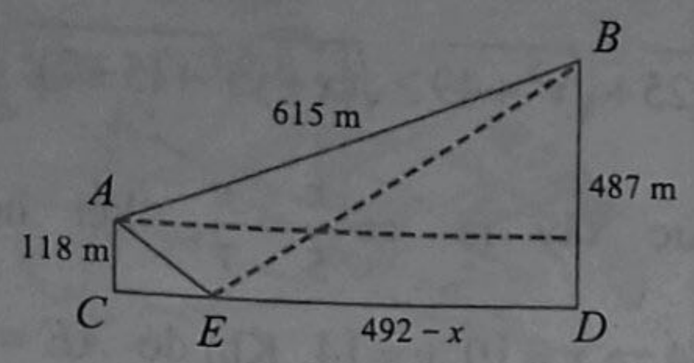
$$= \left(\frac{3x}{150}+\frac{4}{15}\right) + \left(\frac{3x}{150}+\frac{4}{15}\right) + \frac{210-(3x+3y)}{150} = \frac{29}{15}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{15}{2}$. Vậy thời gian mà nhà địa chất đi từ A đến B ít nhất là $\dfrac{29}{15}$ giờ.

Thí dụ 12 (Trích Đề thi trường THPT Đống Đa Hà Nội - Lần 1). *Hai vị trí A và B cách nhau 615 m và cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A, B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m (như hình vẽ). Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi được bằng bao nhiêu mét (làm tròn đến đơn vị mét).*



Lời giải.



Cách 1. Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A, B trên bờ sông. Đặt $CE = x, (0 < x < 492)$.

Ta có: $CD = \sqrt{615^2 - (487 - 118)^2} = 492.$

Quãng đường di chuyển của người đó bằng:

$$AE + EB = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Ta có với mọi a, b, c, d thì

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \quad (1).$$

Thật vậy

$$(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq (a + c)^2 + (b + d)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd \quad (2).$$

Nếu $ac + bd < 0$ thì (2) luôn đúng.

Nếu $ac + bd \geq 0$ thì bình phương hai vế ta thấy BĐT (2) tương đương với: $(ad - bc)^2 \geq 0$, BĐT này luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi $ad = bc$.

Áp dụng (1) thì

$$AE + EB \geq \sqrt{(x + 492 - x)^2 + (487 + 118)^2} = \sqrt{608089} \approx 779{,}8\,\text{m}.$$

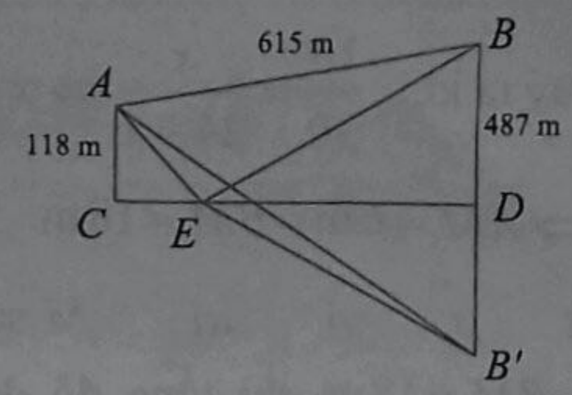
Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$487x = 118(492 - x) \Leftrightarrow x \approx 96\,\text{m}.$$

Vậy quãng đường nhỏ nhất là 780 m.

Cách 2.

Dễ thấy $CD = 492\,\text{m}$. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua D.

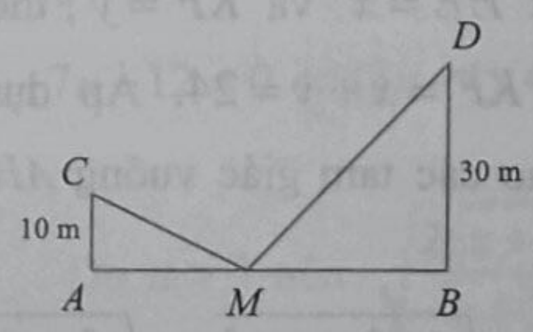


Ta có $DB = DB'$, khi đó $AE + EB = AE + EB'$, $AE + EB$ ngắn nhất khi $AE + EB'$ ngắn nhất. Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $AE + EB' \geq AB'$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A, E, B'$ thẳng hàng. Khi đó ta có:

$$AE + EB' = AB' = \sqrt{492^2 + (487 + 118)^2} = \sqrt{608089} \approx 779{,}8\ (\text{m}).$$

Vậy quãng đường ngắn nhất là 780 m.

Thí dụ 13 (TH&TT số 473 tháng 11 năm 2016, trang 15). *Có hai chiếc cọc cao* 10 m *và* 30 m *lần lượt đặt tại hai vị trí A và B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng* 24 m. *Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?*



Lời giải. Đặt $AM = x,\ (0 < x < 24)$

$\Rightarrow BM = 24 - x$. Tổng độ dài sợi dây cần dùng là

$$CM + MD = \sqrt{10^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (24 - x)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$$

với mọi $a, b, c, d > 0$, ta có:

$$\sqrt{10^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (24 - x)^2} \geq \sqrt{(10 + 30)^2 + (x + 24 - x)^2} = 8\sqrt{34}.$$

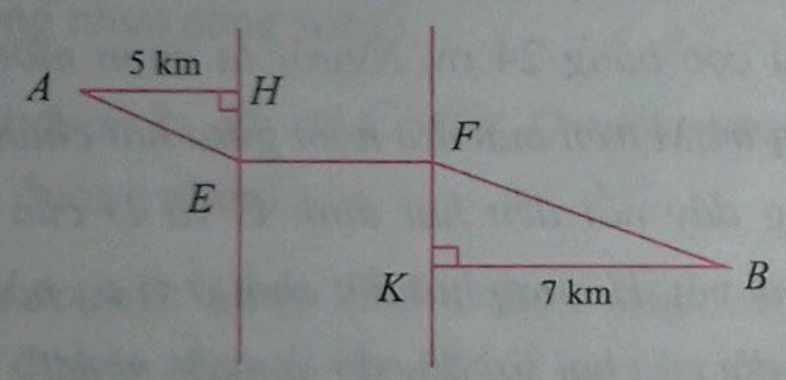
Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{10}{30}=\frac{x}{24-x}\Leftrightarrow x=6$

$$\Rightarrow AM=6\text{m};\ BM=18\text{m}.$$

Đặt chốt ở vị trí M sao cho $AM=6\text{m};\ BM=18\text{m}$ thì tổng độ dài hai sợi dây là ngắn nhất.

Chú ý: Bài toán có thể giải theo phương pháp hình học như thí dụ 11.

Thí dụ 14. *Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông, biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 5 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 7 km (như hình vẽ), biết tổng độ dài HE + KF = 24 km. Hỏi cây cầu cách thành phố A một khoảng là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường AEFB).*



Lời giải. Đặt $HE=x$ và $KF=y$, theo giả thiết ta có $HE+KF=x+y=24$. Áp dụng định lí Pythagore vào các tam giác vuông AHE và BKF ta có:

$$AE=\sqrt{AH^2+HE^2}=\sqrt{x^2+25};$$
$$BF=\sqrt{BK^2+KF^2}=\sqrt{y^2+49}.$$

Vì độ dài cầu EF là không đổi nên để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất theo con đường $AEFB$ thì $AE+EF+FB$ ngắn nhất hay $AE+FB$ ngắn nhất. Ta có:

$$P=AE+BF=\sqrt{x^2+25}+\sqrt{y^2+49}$$

với $x+y=24, x>0,\ y>0$.

Áp dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

với mọi $a,b,c,d>0$ ta có:

$$P=\sqrt{x^2+25}+\sqrt{y^2+49}\geq\sqrt{(x+y)^2+(5+7)^2}=12\sqrt{5}.$$

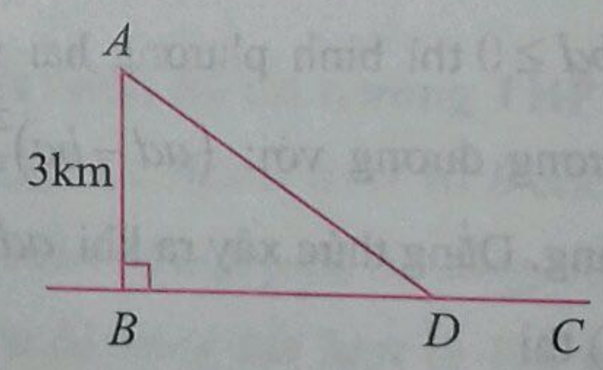
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\frac{x}{5}=\frac{y}{7}$, kết hợp với $x+y=24\Rightarrow x=10, y=14$. Khi đó $AE=5\sqrt{5}$.

Vậy cây cầu cách thành phố A một khoảng là $5\sqrt{5}$ (km).

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $10cm$, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

2. Bạn Hoa đi từ nhà ở vị trí A đến trường học ở vị trí C phải đi qua cầu từ A đến B tới trường. Trận lũ lụt vừa qua đã làm cây cầu bị ngập nước, do đó bạn Hoa phải đi bằng thuyền từ nhà đến vị trí D nào đó trên đoạn BC với vận tốc 4 km/h, sau đó đi với vận tốc 5 km/h đến C. Biết độ dài các đoạn đường AB = 3 km, BC = 5 km. Hỏi muộn nhất mấy giờ bạn Hoa phải xuất phát từ nhà để có mặt ở trường lúc 7 giờ 30 phút sáng để kịp thời gian vào học.



3. Nhà của ba bạn A,B,C nằm ở ba vị trí tạo thành một tam giác vuông tại B, $AB=10\text{km}, BC=25\text{km}$ và ba bạn tổ chức họp mặt ở nhà bạn C. Bạn B hẹn chờ bạn A tại vị trí M trên đoạn đường BC. Từ nhà bạn A đi xe buýt đến điểm hẹn M với tốc độ 30km/h và từ điểm M hai bạn A,B di chuyển đến nhà bạn C bằng xe máy với tốc độ 50km/h. Hỏi điểm hẹn M cách nhà bạn B bao nhiêu km để bạn A đến nhà bạn C nhanh nhất?

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT BIẾN PHỤ KHI GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ Ở TRUNG HỌC CƠ SỞ

NGUT NGUYỄN TAM SƠN
(Thường Tín, Hà Nội)

Khi bồi dưỡng học sinh giỏi toán ở lớp 9 THCS ta thường gặp các bài phương trình vô tỷ mà việc giải nó phải sử dụng phương pháp đặt biến phụ. Các phương trình vô tỷ ấy thường có hoặc ta tạo ra được các biểu thức hoặc các biểu thức trong căn chứa biến giống nhau. Ta sẽ thay các biểu thức ấy bằng một hoặc nhiều biến phụ thích hợp để giải phương trình. Sau đây là một vài ví dụ.

Thí dụ 1. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{8+\sqrt{x-5}}+\sqrt{5-\sqrt{x-5}}=5 \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $5\le x\le 30$.

Đặt $\sqrt{x-5}=y$ khi đó $y\ge 0$ và ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{8+y}+\sqrt{5-y}=5$$

$$\Leftrightarrow 8+y+5-y+2\sqrt{(8+y)(5-y)}=25$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(8+y)(5-y)}=6$$

$$\Leftrightarrow 40-3y-y^2=36$$

$$\Leftrightarrow y^2+3y-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\\ y=-4\end{array}\right..$$

Nghiệm $y=1$ thỏa mãn ĐK. Khi đó, ta có:

$$\sqrt{x-5}=1\Leftrightarrow x=6.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là: $x=6$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x^2-5x+13}+x^2+1=5x \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x\in\mathbb{R}$ vì

$$x^2-5x+13=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{27}{4}\ge 0,\ \forall x.$$

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+13}+x^2-5x+13=12 \qquad (2)$$

Đặt $\sqrt{x^2-5x+13}=z$, khi đó $z\ge 0$

và $(2)\Leftrightarrow z^2+z-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-4\\ z=3\end{array}\right..$

Nghiệm $z=3$ thỏa mãn $z\ge 0$. Khi đó ta có:

$$\sqrt{x^2-5x+13}=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\\ x=1\end{array}\right..$$

Vậy PT (1) có hai nghiệm: $x=1$; $x=4$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{\frac{x}{x+2}+1}-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2(x+1)}}=\frac{7}{12} \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $\left[\begin{array}{l} x>-1\\ x<-2\end{array}\right.$. Biến đổi:

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2(x+1)}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2(x+1)}}=\frac{7}{12} \qquad (2)$$

Đặt $\sqrt{\frac{2(x+1)}{x+2}}=u>0$. Khi đó:

$\sqrt{\frac{x+2}{2(x+1)}}=\frac{1}{u}>0$ và (2) trở thành: $u-\frac{1}{u}=\frac{7}{12}$

$$\Leftrightarrow 12u^2-7u-12=0\Leftrightarrow (3u-4)(4u+3)=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\frac{4}{3}\\ u=-\frac{3}{4}\end{array}\right.$. Do $u>0$ nên $\sqrt{\frac{2(x+1)}{x+2}}=\frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow 18x+18=16x+32\Leftrightarrow 2x=14\Leftrightarrow x=7.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là: $x=7$.

Thí dụ 4. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x^2+6x+12}+\sqrt{x^2+6x+8}=\sqrt{2\left(x^2+6x+10\right)} \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x^2+6x+8=(x+3)^2-1\ge 0$

$$\Leftrightarrow |x+3|\ge 1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge -2\\ x\le -4\end{array}\right..$$

Đặt $x^2+6x+10=t$, với ĐK trên thì $t\ge 2$ và

(1) trở thành: $\sqrt{t+2}+\sqrt{t-2}=\sqrt{2t}$

$\Leftrightarrow t+2+t-2+2\sqrt{t^2-4}=2t$

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2-4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=2 \end{array}\right.$.

Nghiệm $t=2$ thỏa mãn ĐK. Khi đó ta có:

$$x^2+6x+10=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

Vậy PT (1) có hai nghiệm: $x=-2$; $x=-4$.

Thí dụ 5. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x+4\left(1-\sqrt{x-1}\right)-1}+\sqrt{x+6\left(1-\sqrt{x-1}\right)+2}=1 \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x\geq 1$.

Đặt $\sqrt{x-1}=y\geq 0$, khi đó $x-1=y^2$ và (1) $\Leftrightarrow$

$\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=1$

hay $\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{y^2-6y+9}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=1$

$\Leftrightarrow |y-2|+|y-3|=1$ (2).

Lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

y	0		2		3	
$\lvert y-2\rvert$	2	$2-y$	0	$y-2$		$y-2$
$\lvert y-3\rvert$	3	$3-y$		$3-y$	0	$y-3$

Với $0\leq y\leq 2$ thì (2) $\Leftrightarrow 2-y+3-y=1 \Leftrightarrow y=2$.

Với $2\leq y\leq 3$ thì (2) $\Leftrightarrow y-2+3-y=1 \Leftrightarrow 0y=0$ đúng $\forall y$: $2\leq y\leq 3$.

Với $y\geq 3$ thì (2) $\Leftrightarrow y-2+y-3=1 \Leftrightarrow y=3$.

Vậy nghiệm của (2) là: $2\leq y\leq 3$

hay $2\leq \sqrt{x-1}\leq 3 \Leftrightarrow 5\leq x\leq 10$.

Vậy PT (1) có nghiệm : $5\leq x\leq 10$.

Thí dụ 6. *Giải phương trình:*

$$\left(\sqrt{x+2020}-\sqrt{x-2019}\right)\left(1+\sqrt{x^2+x-2019.2020}\right)=4039 \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x\geq 2019$. Khi đó (1) tương đương với:

$$\left(\sqrt{x+2020}-\sqrt{x-2019}\right)\left[1+\sqrt{(x+2020)(x-2019)}\right]$$
$$=(x+2020)-(x-2019) \quad (2).$$

Đặt $\sqrt{x+2020}=y$; $\sqrt{x-2019}=z$ thì $y>0$ và $z>0$. Khi đó (2) trở thành:

$$(y-z)(1+yz)=y^2-z^2$$
$$\Leftrightarrow (y-z)(1+yz-y-z)=0$$
$$\Leftrightarrow (y-z)(y-1)(z-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=z \\ (y-1)(z-1)=0 \end{array}\right..$$

Với $y=z$, ta có $\sqrt{x+2020}=\sqrt{x-2019}$.

PT này vô nghiệm.

Với $(y-1)(z-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2020}=1 \\ \sqrt{x-2019}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2019 \\ x=2020 \end{array}\right..$$

$x=2020$ thỏa mãn ĐK là nghiệm của PT (1).

Thí dụ 7. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{10x-1}+\sqrt{25x^2-1}=10x-25x^2 \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x\geq \frac{1}{5}$. Đặt $\sqrt{10x-1}=p$; $\sqrt{25x^2-1}=q$ thì $p>0$ và $q\geq 0$.

Ta có: $p^2-q^2=10x-1-25x^2+1=10x-25x^2$.

Khi đó (1) có dạng: $p+q=p^2-q^2$

$$\Leftrightarrow (p+q)(p-q-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p+q=0 \\ p=q+1 \end{array}\right..$$

Với $p+q=0$: không xảy ra vì $p>0$ và $q\geq 0$.

Với $p=q+1 \Rightarrow \sqrt{10x-1}=\sqrt{25x^2-1}+1$

$\Leftrightarrow 10x-1=25x^2-1+\sqrt{25x^2-1}+1$

$\Leftrightarrow 0=(5x-1)^2+2\sqrt{25x^2-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1=0 \\ 25x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$ thỏa mãn ĐK.

Vậy nghiệm của PT (1) là: $x=\frac{1}{5}$.

Thí dụ 8. *Giải phương trình:*

$$\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)\left(4+2\sqrt{4-x^2}\right)=8 \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $-2 \le x \le 2$.

Đặt $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=y$ thì $y>0$. Khi đó

$$y^2=2+x+2-x+2\sqrt{4-x^2}=4+\sqrt{4-x^2}.$$

$(1) \Rightarrow y^3=8 \Leftrightarrow y=2 \Leftrightarrow y^2=4$

$$\Rightarrow 4+2\sqrt{4-x^2}=4 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Vậy PT (1) có hai nghiệm: $x=-2$; $x=2$.

Thí dụ 9. *Giải phương trình:*

$$\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{2x-9}+\sqrt[3]{30-4x}-\sqrt[3]{x+23}=0 \ (1).$$

Lời giải. ĐK: $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{3x+2}=y$; $\sqrt[3]{2x-9}=z$; $\sqrt[3]{30-4x}=t$.

Ta có : $3x+2=y^3$; $2x-9=z^3$; $30-4x=t^3$,

nên $y^3+z^3+t^3=3x+2+2x-9+30-4x=x+23$.

Từ (1) ta có : $y+z+t=\sqrt[3]{x+23}$

$$\Leftrightarrow (y+z+t)^3=x+23=y^3+z^3+t^3 \ (2).$$

Ta biết rằng (bạn đọc tự chứng minh):

$(y+z+t)^3=y^3+z^3+t^3+3(y+z)(z+t)(t+y)$ (3)

nên từ (2) và (3) suy ra: $3(y+z)(z+t)(t+y)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+z=0 \\ z+t=0 \\ t+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^3+z^3=0 \\ z^3+t^3=0 \\ t^3+y^3=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+2+2x-9=0 \\ 2x-9+30-4x=0 \\ 30-4x+3x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,4 \\ x=10,5. \\ x=32 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là:

$$S=\{1,4;10,5;32\}.$$

II. Một số bài tập vận dụng

1. Giải phương trình:

$$\sqrt{6-\sqrt{x-2}}+\sqrt{14+\sqrt{x-2}}=6.$$

2. Giải phương trình:

a) $\sqrt{4x^2-6x+5}+4x^2=6x+7$;

b) $x^2-\sqrt{8\left(x^2-3x+4\right)}=3(x-2)$.

3. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{\dfrac{5x+1}{2x-5}}+\sqrt{\dfrac{2x-5}{5x+1}}=\dfrac{17}{4}$;

b) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{x+2}$.

4. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{x^2+4x+15}=\sqrt{2(x^2+4x+29)}.$$

5. Giải phương trình:

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$$

6. Giải phương trình:

a) $\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Nam Định năm học 2014 – 2015).

b) $\sqrt{x+5}+2x\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x^2+7x+10}$.

7. Giải phương trình:

a) $\sqrt{6x-1}+\sqrt{9x^2-1}=6x-9x^2$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Nghệ An năm học 2014 – 2015)

b) $x+2\sqrt{2020-x}=2\sqrt{x-2010}+\sqrt{(2020-x)(x-2010)}+2010$.

8. Giải phương trình:

$$\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^4}\right)=4.$$

9. Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-9}-\sqrt[3]{x^2-11x+18}=1.$$

XUÂN CANH TÝ

(Bài thơ xướng)

Tâm tình với chuột và ngẫm về nghề nhà giáo

Trách chi em chuột chạy cùng sào
Lòng đã say rồi, dạ chẳng nao
Yêu nghiệp dạy người, tri thức mở
Chuộng nghề tầm chữ kĩ năng cao
Trí khôn xếp Tý đầu hàng giáp
Cần mẫn bình chàng nhất tốp sao
Sư phạm hướng vươn tầm hội nhập
Cổng trường giang rộng đón ta vào.

ĐÀO TAM (*Đại học Vinh*)
8.12.2019

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TP. HỒ CHÍ MINH Năm học 2018 - 2019

Bài 1. ĐK: $x \neq 0, y \neq 0, 2x \neq -y$. Ta có:

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2x+y} \Rightarrow 2y(2x+y)-x(2x+y)=xy$$

$$\Rightarrow 4xy+2y^2-2x^2-xy=xy$$

$$\Rightarrow 2x^2-2xy-2y^2=0 \Rightarrow \frac{x}{y}-1-\frac{y}{x}=0 \Rightarrow \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=1.$$

Do đó: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+2=1^2+2=1+2=3.$

Bài 2. $P=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$$=(c-2)^2-2(2c^2-3c+1)$$

$$=c^2-4c+4-4c^2+6c-2=-3c^2+2c+2$$

$$=-3\left(c^2-\frac{2}{3}c+\frac{1}{9}\right)+\frac{7}{3}=-3\left(c-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{7}{3}\leq\frac{7}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow c-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{3}$. Khi đó:

$$a+b=\frac{-5}{3}, ab=\frac{2}{9} \Leftrightarrow a=\frac{-5+\sqrt{17}}{6}, b=\frac{-5-\sqrt{17}}{6}$$

hoặc $a=\frac{-5-\sqrt{17}}{6}, b=\frac{-5+\sqrt{17}}{6}$ Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{3}$.

Bài 3. Đổi $5'=\frac{1}{12}$ (h). Gọi vận tốc của *An* là x (km/h) (điều kiện $x>0$).

Vận tốc của *Bình* là: $x:1,5=\frac{2}{3}x$ (km/h).

Vận tốc của *Cường* là: $x:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}x$ (km/h).

Quãng đường *An* và *Cường*, *An* và *Bình* đi để gặp nhau là: $39-x.\frac{1}{12}=39-\frac{1}{12}x$ (km).

Thời gian đi để *An* và *Cường* gặp nhau tại C là:

$$\left(39-\frac{1}{12}x\right):\left(x+\frac{4}{3}x\right)=\frac{3}{7x}\left(39-\frac{1}{12}x\right) \text{ (giờ).}$$

Thời gian đi để *An* và *Bình* gặp nhau tại D là:

$$\left(39-\frac{1}{12}x\right):\left(x+\frac{2}{3}x\right)=\frac{3}{5x}\left(39-\frac{1}{12}x\right) \text{ (giờ).}$$

Thời gian *An* đi từ C đến D là: $6:x=\frac{6}{x}$ (giờ).

Theo đầu bài ta có phương trình:

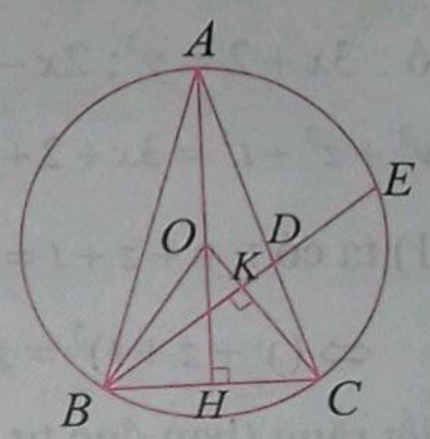
$$\frac{3}{5x}\left(39-\frac{1}{12}x\right)-\frac{3}{7x}\left(39-\frac{1}{12}x\right)=\frac{6}{x}$$

$$\Leftrightarrow 39-\frac{1}{12}x=35 \Leftrightarrow \frac{1}{12}x=4 \Leftrightarrow x=48 \text{ (nhận).}$$

Vận tốc của *An* là 48 (km/h).

Vận tốc của *Bình* là $\frac{2}{3}.48=32$ (km/h).

Vận tốc của *Cường* là $\frac{4}{3}.48$ (km/h).



Bài 4. Gọi K là giao điểm của BE và OC, H là giao điểm của AO và BC. Ta có $AH \perp BC$,

$$BH=CH=\frac{BC}{2}, BK=EK=\frac{BE}{2}.$$

ΔHAB vuông tại H nên $AH^2+BH^2=AB^2$.

Do đó:

$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{8^2-2^2}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}.$$

ΔHOB vuông tại $H \Rightarrow OB^2=OH^2+BH^2$.

Do đó $R^2=\left(2\sqrt{15}-R\right)^2+2^2$ với

$$R=OA=OB=OC \Rightarrow 4\sqrt{15}R=64 \Rightarrow R=\frac{16\sqrt{15}}{15}.$$

ΔOAC cân tại O nên $\widehat{CAH}=\widehat{KCD}$.

Mà $\widehat{CAH}+\widehat{BCD}=\widehat{KCD}+\widehat{BDC}=90^o$

nên $\widehat{BCD}=\widehat{BDC} \Rightarrow \Delta BDC$ cân tại B

$\Rightarrow BD=BC=4$ (cm).

Xét ΔCKB và ΔCHO có:

$\widehat{KCH}$ chung, $\widehat{CKB}=\widehat{CHO}=90^o$. Do đó:

$$\Delta CKB \backsim \Delta CHO \ (g.g) \Rightarrow \frac{CK}{CH}=\frac{CB}{CO}.$$

Nên $CK=\frac{CH.CB}{CO}=2.4:\frac{16\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{2}.$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH BÌNH ĐỊNH
NĂM HỌC 2018 - 2019 (*Thời gian làm bài: 150 phút*)

Bài I (5 *điểm*). 1) Tính giá trị biểu thức: $A=x^3+y^3-3(x+y)$, biết rằng:

$x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$.

2) Cho hai số thực *m, n* khác 0 thỏa mãn: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng phương trình: $\left(x^2+mx+n\right)\left(x^2+nx+m\right)=0$ luôn có nghiệm.

Bài II (5 *điểm*). 1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+xy+y=1 \\ \sqrt{x}-\sqrt[3]{y}+4x=5 \end{cases}.$$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$2xy^2+x+y+1=x^2+2y^2+xy.$$

Bài III (3 *điểm*). 1) Trong mặt phẳng cho 8073 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng, sao cho mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho có diện tích không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được 2019 điểm nằm trong hoặc trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

2) Cho *a, b, c* là các số thực không âm thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}\le 5.$$

Bài IV (7 *điểm*). 1) Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Gọi *D* là trung điểm của cạnh *BC*. Lấy điểm *M* bất kỳ trên đoạn *AD* (*M* không trùng với *A*). Gọi *N, P* theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của *M* trên các cạnh *AB, AC* và *H* là hình chiếu vuông góc của *N* trên đường thẳng *PD*.

a) Chứng minh rằng *AH* vuông góc với *BH*.

b) Đường thẳng qua *B* và song song với *AD* cắt đường trung trực của *AB* tại *I*. Chứng minh ba điểm *H, N, I* thẳng hàng.

2) Cho tam giác nhọn *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*), đường cao *AH*. Gọi *M* là giao điểm của *AO* và *BC*. Chứng minh rằng: $\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC}\ge 2.\frac{AB}{AC}$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

BÙI VĂN CHI

(*21/2 Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định*) **Giới thiệu**

* * *

☞ Ta có ΔKBC vuông tại *K* nên:

$BK=\sqrt{BC^2-CK^2}=\frac{7}{2}$. Ta có $BE=7$,

do vậy: $DE=BE-BD=7-4=3$ (cm);

$KD=BD-BK=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$,

$OK=OC-CK=\frac{16\sqrt{15}}{15}-\frac{\sqrt{15}}{2}=\frac{17\sqrt{15}}{30}$.

$OD=\sqrt{OK^2+KD^2}=\sqrt{\left(\frac{17\sqrt{15}}{30}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{285}}{15}$ (cm)

Bài 5. a) Thể tích hộp phô mai và cũng chính là thể tích của 8 miếng phô mai:

$$\left(\frac{12,2}{2}\right)^2.\pi.2,4\ (\text{cm}^3).$$

Thể tích 1 miếng phô mai là:

$$\left(\frac{12,2}{2}\right)^2.\pi.2,4:8\approx 35,1\ (\text{cm}^3).$$

b) Diện tích mặt bên ngoài của 1 miếng phô mai: $\pi.12,2.2,4:8=\frac{183\pi}{50}$ (cm^3).

Diện tích hai mặt đáy của 1 miếng phô mai:

$$\left[\pi\left(\frac{12,2}{2}\right)^2:8\right]\times 2=\frac{3721\pi}{400}\ (\text{cm}^3).$$

Diện tích hai mặt bên của 1 miếng phô mai:

$$\left(\frac{12,2}{2}.2,4\right)\times 2=\frac{732}{25}\ (\text{cm}^3).$$

Diện tích giấy gói được sử dụng cho 1 miếng phô mai là : $\frac{183\pi}{50}+\frac{3721\pi}{400}+\frac{732}{25}\approx 70,0$ (cm^2)

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)

Giới thiệu

CÁCH XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ TÌM SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ HOẶC ĐỒ THỊ CỦA ĐẠO HÀM

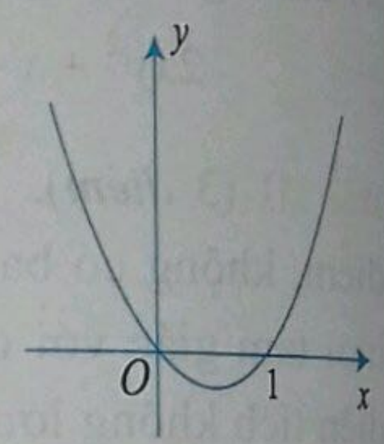
LÊ VĂN NAM
(GV THPT Minh Hòa, Yên Lập, Phú Thọ)

Câu 33 và Câu 48 (Mã đề 103) cũng như các câu tương tự ở các mã đề khác trong đề thi THPT Quốc gia môn Toán năm 2019 hỏi về số điểm cực đại, số điểm cực tiểu, đồng biến, nghịch biến của hàm hợp $g(x)=[f(h(x))]^n$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ trong trường hợp $n=1$ và $h(x)$ là hàm số bậc nhất. Bài viết này mở rộng hơn bài toán trên với một số trường hợp của n và $h(x)$.

Trước hết chúng ta có công thức đạo hàm sau: $g(x)=[f(h(x))]^n \Rightarrow g'(x)=n[f(h(x))]^{n-1}.h'(x).f'(h(x))$.

Trường hợp 1: $n=1$ và $h(x)$ là hàm số bậc 2.

Thí dụ 1. *Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=f(-x-x^2)$ nghịch biến trên các khoảng nào?*



Lời giải. Ta có: $g(x)=f(-x-x^2)\Rightarrow g'(x)=(-1-2x)f'(-x-x^2)$. Để hàm số nghịch biến suy ra

$$g'(x)=(-1-2x)f'(-x-x^2)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1-2x<0\\ f'(-x-x^2)>0\end{cases}\ (\mathrm{I})\\ \begin{cases}-1-2x>0\\ f'(-x-x^2)<0\end{cases}\ (\mathrm{II})\end{array}\right..$$

Ta có: $(\mathrm{I})\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}-x-x^2<0\\ -x-x^2>1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x>0$; $(\mathrm{II})\Leftrightarrow\begin{cases}x<-\dfrac{1}{2}\\ 0<-x-x^2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-\dfrac{1}{2}\\ -1<x<0\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $g(x)=f(-x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $(0;+\infty)$.

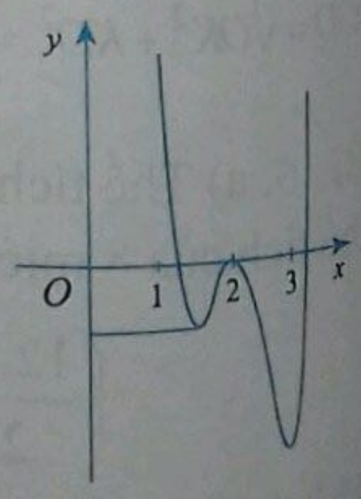
Nhận xét. + Khi $h(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ là hàm số bậc nhất chúng ta chỉ cần xét dấu hàm số $f'(ax+b)$.

+ Sau khi xét được tính đơn điệu của hàm số $g(x)=f\left(-x-x^2\right)$, bạn đọc sẽ tìm được hàm số $g(x)=f(-x-x^2)$ có 3 điểm cực trị với 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Trường hợp 2: $n=1$ và $h(x)=f(x)$ hoặc $h(x)=f(x)+a$ $\left(a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right)$ hoặc $h(x)=f'(x)$.

Thí dụ 2. *Cho hàm số $y=f(x)$ có liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.*

1) *Hỏi hàm số $g(x)=f\left(f(x)\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?*



2) *Hỏi hàm số* $g(x)=f(f(x)+2)$ *có bao nhiêu điểm cực đại ?*

Lời giải. 1) Ta có: $g(x)=f(f(x))\Rightarrow g'(x)=f'(x).f'(f(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'(f(x))=0\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận thấy $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x=2\\x=b\end{array}\right.$ $(1<a<2;\ 2<b)$. PT $f'(f(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a\\f(x)=2\\f(x)=b\end{array}\right.$ $(1<a<2;\ 2<b)$. Mỗi đường thẳng $y=b,\ y=2,\ y=a$ đều cắt đồ thị hàm số đã cho tại 2 điểm phân biệt lần lượt tính từ trái qua phải có hoành độ là x_1 và x_6; x_2 và x_5; x_3 và x_4.

Mặt khác từ đồ thị suy ra $f'(f(x))>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<f(x)<2\\f(x)>b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_2<x<x_3\\x_4<x<x_5\\x<x_1\\x>x_6\end{array}\right.$. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		a		2		b		x_4		x_5		x_6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(f(x))$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$[f(f(x))]'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số có 4 điểm cực đại.

2) Ta có: $g(x)=f(f(x)+2)\Rightarrow g'(x)=f'(x).f'(f(x)+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f'(x)=0 & (1)\\f'(f(x)+2)=0 & (2)\end{array}\right.$.

PT $f'(f(x)+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)+2=a\\f(x)+2=2\\f(x)+2=b\end{array}\right.$ $(1<a<2;\ 2<b)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a-2\in(-1;0)\\f(x)=0\\f(x)=b-2>0.\end{array}\right.$. PT $f(x)=a-2$ có 4 nghiệm phân biệt x_3; x_4; x_5 và x_6; PT $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 2 nghiệm đơn là x_2 và x_7; và 1 nghiệm kép (bội hai) là 2; PT $f(x)=b-2$ có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_8. Mặt khác từ đồ thị suy ra $f'(f(x)+2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-2<f(x)<0\\f(x)>b-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_2<x<x_3\\x_4<x<x_5\\x_6<x<x_7.\\x<x_1\\x>x_8\end{array}\right.$

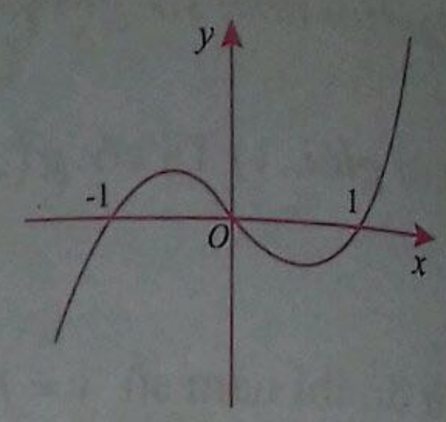
Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		a		x_4		2		x_5		b		x_6		x_7		x_8		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(f(x)+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$[f(f(x))]'$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số có 5 điểm cực đại.

Nhận xét. Trong ý 2 ở thí dụ này thì dấu của $f'(f(x)+2)$ không đổi dấu khi qua $x=2$.

Thí dụ 3. *Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f(f'(x))$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?*



Lời giải. Vì các điểm $(-1;0)$, $(0;0)$, $(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $f'(x)$ nên ta có hệ: $\begin{cases}-1+a-b+c=0\\c=0\\1+a+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-1\\c=0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=x^3-x\Rightarrow f''(x)=3x^2-1.$

Ta có: $g(x)=f(f'(x))\Rightarrow g'(x)=f''(x).f'(f'(x))$. Xét:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x^3-x).(3x^2-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-x=0\\x^3-x=1\\x^3-x=-1\\3x^2-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=0\\x=\pm\left(\frac{1}{6}\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}}+\frac{2}{\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}}}\right)\simeq\pm1{,}325.\\x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu:

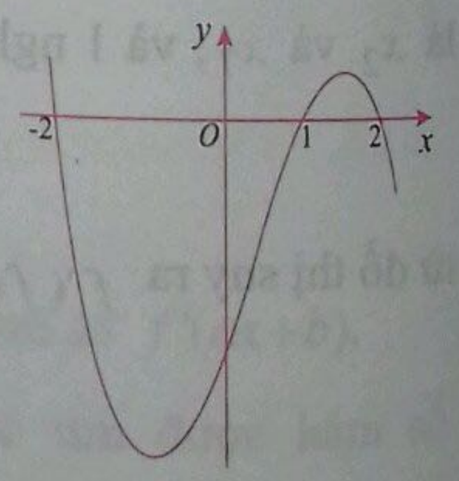
x	$-\infty$		$-1{,}325$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$1{,}325$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ hàm số $g(x)=f(f'(x))$ có 4 điểm cực tiểu.

Nhận xét. Đối với bài toán này chúng ta cần phải tìm được hàm số $f'(x)$ một cách cụ thể từ các điểm đặc biệt trên đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

Trường hợp 3: $n=2$ và $h(x)$ là hàm số bậc nhất hoặc $h(x)$ là hàm số bậc hai.

Thí dụ 4. *Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên và $f(-2)=f(2)=0$. Hàm số $g(x)=\left[f(-x-x^2)\right]^2$ nghịch biến trên các khoảng nào?*



Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$y=f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Ta có: $g(x)=\left[f(-x-x^2)\right]^2\Rightarrow g'(x)=2(-1-2x)f'(-x-x^2).f(-x-x^2)$.

Để hàm số nghịch biến suy ra $g'(x)=2(-1-2x)f'(-x-x^2).f(-x-x^2)<0$ (1).

Do từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, nên ta có:

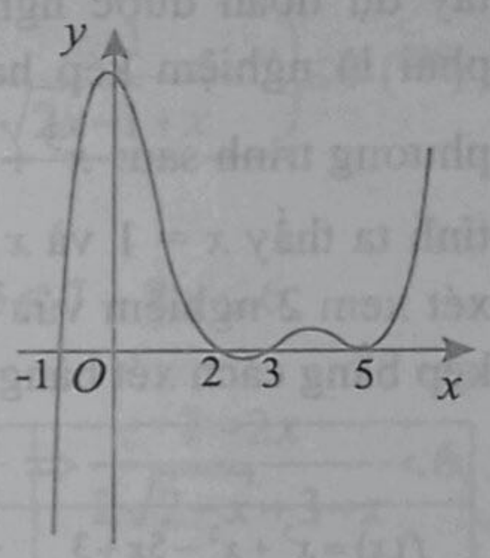
$$(1) \Leftrightarrow (-1-2x)f'(-x-x^2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1-2x<0\\ f'(-x-x^2)<0\end{cases}\\ \begin{cases}-1-2x>0\\ f'(-x-x^2)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}-2<-x-x^2<1\\ -x-x^2>2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<-\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}-x-x^2<-2\\ 1<-x-x^2<2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}<x<1\\ x<-2\end{array}\right..$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Nhận xét.

- Chúng ta cần có giả thiết $f(-2)=f(2)=0$ để có được dấu của $f(x)$ vì trong đồ thị của $y=f'(x)$ chúng ta không biết được dấu của $f(x)$.
- Khi $h(x)$ là một hàm số bậc nhất chẳng hạn $h(x)=3-x$ lúc đó chúng ta chỉ phải xét dấu của $f'(3-x)$

Thí dụ 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f^2(x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?



Lời giải. Ta có: $g(x)=f^2(x) \Rightarrow g'(x)=2f'(x).f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=0\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận thấy

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=a\\ x=b\\ x=c\\ x=5\end{array}\right. \text{ và } f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\\ x=3\\ x=5\end{array}\right. \text{ (trong đó } -1<a<2<b<3<c<5\text{).}$$

Từ đó ta có bảng xét dấu.

x	$-\infty$		-1		a		2		b		3		c		5		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	−		−	0	+		+	0	−	0	+	
$f(x)$		−	0	+		+	0	−		−	0	+		+	0	+	
$[g(x)]'$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Vậy hàm số có 4 điểm cực tiểu.

Nhận xét. Khi $h(x)=x^2$ thì chúng ta sẽ tìm được 11 điểm cực trị và độc giả hoàn toàn có thể lập được bảng biến thiên của hàm số đó nhờ đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Nhận xét chung.

- Trong trường hợp $n=2k+1$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ khi đó $[f(h(x))]^{n-1}>0$ $\forall x$ như vậy việc xét dấu của $g(x)=[f(h(x))]^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ là xét dấu của $h'(x).f'(h(x))$ và không phụ thuộc vào n.

(*Xem tiếp trang* 45)

KĨ THUẬT TẠO NHÂN TỬ KÉP

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Trong giải PT, BPT vô tỷ có chứa nhân tử kép thì việc phát hiện ra nó có nhân tử kép và phân tích phù hợp để tạo ra nhân tử đó điều rất quan trọng trong giải toán. Để làm được điều đó chúng ta sẽ xem xét một số nhận xét sau:

Nhận xét 1: *PT $f(x)=0$ có nghiệm kép x_0 thì tồn tại khoảng $(a;\ b)$ chứa x_0 sao cho*

$$f(x)>0\ \forall x\in(a;b)\ \text{và}\ x\neq x_0$$

hoặc $f(x)<0\ \forall x\in(a;b)$ *và* $x\neq x_0$.

Nhận xét trên giúp chúng ta dùng máy tính cầm tay dự đoán được nghiệm tìm được của PT có phải là nghiệm kép hay không. Chẳng hạn, xét phương trình sau: $x^3+x^2-5x+3=0$ (1). Bấm máy tính ta thấy $x=1$ và $x=-3$ là nghiệm PT. Ta sẽ xét xem 2 nghiệm vừa tìm nghiệm nào là nghiệm kép bằng cách xét bảng giá trị sau:

x	-4	-3	-2	0	1	2
$f(x)=x^3+x^2-5x+3$	-25	0	9	3	0	5

Từ bảng trên ta dự đoán $x=1$ là nghiệm kép của phương trình. Dự đoán trên là đúng vì PT (1) $\Leftrightarrow(x-1)^2(x+3)=0$.

Nhận xét 2. *Nếu phương trình $f(x)-(ax+b)=0$ có nghiệm kép x_0 thì*

$$\begin{cases} f(x_0)=ax_0+b \\ f'(x_0)=a \end{cases}\ \text{hay}\ \begin{cases} b=f(x_0)-x_0f'(x_0) \\ a=f'(x_0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *$y=ax+b$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$.*

Áp dụng các nhận xét trên để giải các bài toán sau:

Bài toán 1. *Giải phương trình*

$$4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14\quad(1)$$

Phân tích: ĐK : $x\geq-1$. Khi đó:

$(1)\Leftrightarrow x^2-5x+14-4\sqrt{x+1}=0$. Sử dụng máy tính ta tìm được nghiệm $x=3$. Đặt

$f(x)=x^2-5x+14-4\sqrt{x+1}$. Xét bảng giá trị sau

x	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$	$8-4\sqrt{3}$	$\frac{31-8\sqrt{14}}{4}$	0	$\frac{35-24\sqrt{2}}{4}$	$10-4\sqrt{5}$

$$f(2)>0, f(2,5)>0,\ f(3,5)>0, f(4)>0$$

$\Rightarrow$ dự đoán $x=3$ là nghiệm kép của PT. Tạo nhân tử kép $(x-3)^2$ cho PT: PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=4\sqrt{x+1}$ tại $x=3$ là $y=x+5$.

Lời giải. ĐK: $x\geq-1$. Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow x^2-5x+14-4\sqrt{x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+(x+5-4\sqrt{x+1})=0$$

$$\Leftrightarrow(x-3)^2+\frac{(x-3)^2}{x+5+4\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-3)^2\underbrace{\left(1+\frac{1}{x+5+4\sqrt{x+1}}\right)}_{(*)}=0\Leftrightarrow x=3$$

(vì $(*)>0,\forall x\geq-1$). Nghiệm PT là: $x=3$.

Bài toán 2. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{3x-2}=2x\quad(2).$$

Phân tích. ĐK : $x\geq\frac{1}{2}$. Sử dụng máy tính dự đoán $(x-1)^2$ là nhân tử kép của PT. PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{2x-1}$ tại $x=1$ là: $y=x$. PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{3x-2}$ tại $x=1$ là $y=x$.

Lời giải. ĐK: $x\geq\frac{1}{2}$. Khi đó:

$$(2)\Leftrightarrow(x-\sqrt{2x-1})+(x-\sqrt[3]{3x-2})=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{x+\sqrt{2x-1}}+\frac{x^3-3x+2}{x^2+x\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{x+\sqrt{2x-1}}+\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^2+x\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2\underbrace{\left(\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}+\frac{x+2}{x^2+x\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}}\right)}_{(*)}=0$$

$\Leftrightarrow x=1\left(\text{vì } (*)>0,\forall x\geq\frac{1}{2}\right)$. Nghiệm PT là $x=1$.

Bài toán 3. *Giải bất phương trình*

$$\sqrt{2x^2-10x+16}-\sqrt{x-1}\leq x-3\ (3).$$

Phân tích. ĐK : $x\geq1$. Sử dụng máy tính dự đoán $(x-5)^2$ là nhân tử kép của BPT. PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{2x^2-10x+16}$ tại $x=5$ là $y=\frac{5}{4}x-\frac{9}{4}$. PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x-1}$ tại $x=5$ là $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$.

Lời giải. ĐK: $x\geq1$. Khi đó từ PT (3) ta có:

$$\left(\sqrt{2x^2-10x+16}-\frac{5}{4}x+\frac{9}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}-\sqrt{x-1}\right)\leq0$$

$$\Leftrightarrow(4\sqrt{2x^2-10x+16}-5x+9)+(x+3-4\sqrt{x-1})\leq0$$

$$\Leftrightarrow\frac{7(x^2-10x+25)}{4\sqrt{2x^2-10x+16}+5x-9}+\frac{x^2-10x+25}{x+3+4\sqrt{x-1}}\leq0$$

$$(x-5)^2\underbrace{\left(\frac{7}{4\sqrt{2x^2-10x+16}+5x-9}+\frac{1}{x+3+4\sqrt{x-1}}\right)}_{(*)}\leq0(**)$$

Vì $x\geq1\Rightarrow5x-9\geq-4$ và

$$4\sqrt{2x^2-10x+16}=4\sqrt{2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{2}}\geq4\sqrt{\frac{7}{2}}>4$$

nên $4\sqrt{2x^2-10x+16}+5x-9>0$. Do đó $(*)>0$ và $(x-5)^2\geq0$. Vậy $(**)\Leftrightarrow x=5$. Nghiệm (3) là $x=5$.

Bài toán 4. *Giải bất phương trình*

$$(4x-14)\sqrt{2-x}+(x+1)\sqrt{2x-1}-6x^2+14\leq0\ (4)$$

Phân tích. ĐK: $\frac{1}{2}\leq x\leq2$. Sử dụng máy tính dự đoán $(x-1)^2$ là nhân tử kép của bất PT. PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{2-x}$ tại $x=1$ là $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{2x-1}$ tại $x=1$ là $y=x$.

Lời giải. ĐK: $\frac{1}{2}\leq x\leq2$. Khi đó:

$$(4)\Leftrightarrow(4x-14)\left(\sqrt{2-x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)$$
$$+(x+1)(\sqrt{2x-1}-x)-7x^2+14x-7\leq0$$

$$\Leftrightarrow(2x-7)(2\sqrt{2-x}+x-3)+(x+1)(\sqrt{2x-1}-x)$$
$$-7x^2+14x-7\leq0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2x-7)(x-1)^2}{x-3-2\sqrt{2-x}}-\frac{(x+1)(x-1)^2}{\sqrt{2x-1}+x}-7(x-1)^2\leq0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2\underbrace{\left(\frac{2x-7}{x-3-2\sqrt{2-x}}-\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}+x}-7\right)}_{(*)}\leq0\ (**)$$

Ta thấy: $\forall x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$ thì $3\leq7-2x\leq6$,

$$1\leq2\sqrt{2-x}+3-x\leq2\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{7-2x}{2\sqrt{2-x}+3-x}<6,$$

$\frac{2x-7}{x-3-2\sqrt{2-x}}-7<0$, do đó: $(*)<0$.

$\Rightarrow$ BPT (**) đúng $\forall x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$. Tập nghiệm BPT (**) là $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

BÀI TẬP

1. *(TH&TT T4/364)* Giải phương trình:

a) $x^4-2x^2\sqrt{x^2-2x+16}+2x^2-6x+20=0$

b) $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$

c) $\sqrt{7x^2-22x+8}+\sqrt{7x^2+8x+13}+\sqrt{31x^2+14x+4}=3\sqrt{3}(x+2)$

2. *(Chuyên Phú Yên - 2015)* Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}4x^3-12x^2+15x=(y+1)\sqrt{2y-1}+7\\6(x-2)y-x+26=6\sqrt[3]{16x+24y-28}\end{cases}.$$

BẠN CÓ BIẾT ?

Ý NGHĨA VỀ SỐ 5

MAI VĂN NĂM

(GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

I. SỐ 5 TRONG TOÁN HỌC

- Số 5 là số nguyên tố duy nhất là tổng của hai số nguyên tố và cũng là hiệu của hai số nguyên tố $5 = 2 + 3$ và $5 = 7 - 2$.
- Số 5 là trung bình cộng của ba số nguyên tố lẻ liên tiếp duy nhất (3,5,7).
- Đa giác có 5 cạnh là đa giác duy nhất có số đường chéo bằng số cạnh.
- Số 5 là số đo cạnh huyền của tam giác vuông có cạnh huyền là số tự nhiên nhỏ nhất và 3 cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp $5^2 = 3^2 + 4^2$ còn gọi là tam giác Pythagore.
- Trong dãy số Fibonacci nổi tiếng thì số hạng thứ 5 chính là số 5 (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...).
- Bản cửu chương nhân với số 5 là dễ thuộc vì chữ hàng đơn vị chỉ gồm hai chữ số 0 và 5 luân phiên nhau không như những bản cửu chương khác có nhiều chữ số tận cùng hơn.
- Số 5 nhân với số lẻ *bất kì* luôn tận cùng là 5, số 5 nhân với số chẵn *bất kì* tận cùng là 0 (đây là dấu hiệu nhận biết những số chia hết cho 5).
- Hình vuông thần kì có $3 \times 3 = 9$ ô thì số 5 là số trung tâm ở giữa để tổng các số trên các hàng, các cột và các đường chéo đều bằng nhau và bằng 15.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

- Một số khi chia cho 5 nếu tận cùng là chữ số 1,2,3,4 thì số dư là chính chữ số tận cùng đó.
- Một số khi chia cho 5 có tận cùng là 6,7, 8, 9 thì số dư tương ứng là hiệu của chữ số tận cùng với số 5 tương ứng là $(6 - 5 = 1)$, $(7 - 5 = 2)$, $(8 - 5 = 3)$ và $(9 - 5 = 4)$.
- Những số có chữ số tận cùng là 5 bình phương lên luôn có hai chữ số cuối cùng là 25.
- Cách tính nhanh bình phương một số tận cùng là 5 ta chỉ cần lấy số trước số 5 nhân với số hơn nó 1 đơn vị rồi viết thêm số 25 vào bên phải kết quả (ví dụ tính $25^2 = 625$ ta lấy $2.(2+1) = 6$ sau đó viết thêm số 25 vào ta được kết quả 625, tương tự $75^2 = 5625$).
- Khi học tam giác ta thấy có 5 loại đường liên quan đến tam giác (Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến, đường trung trực, đường trung bình).
- Khi học phần tứ giác có 5 loại hình cơ bản (Hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông).
- Khi học phần đường tròn có 5 loại góc liên quan đến đường tròn (Góc ở tâm, góc có đỉnh ở trong đường tròn, góc có đỉnh ở ngoài đường tròn, góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).
- Có 5 khối đa diện đều là (tứ diện đều, lập phương, khối 8 mặt đều, 12 mặt đều và 20 mặt đều).
- Cần ít nhất 5 điểm để vẽ được 5 tứ giác.

II. SỐ 5 TRONG THỰC TẾ CUỘC SỐNG

- Trái Đất có 5 châu (Á, Mỹ, Phi, Âu, Úc).
- Khí quyển có 5 tầng (Đối lưu, bình lưu, tầng giữa, tầng ion và tầng ngoài).
- Theo thuyết ngũ hành thì vạn vật đều được tạo bởi 5 yếu tố đó là (Kim, Mộc, Thủy, Hỏa, Thổ).
- Bàn tay, bàn chân của con người có 5 ngón.
- Ngôi sao có 5 cánh, quả khế có 5 múi.
- Mâm ngũ quả ngày tết thường có 5 loại quả miền Bắc thường chọn: chuối, bưởi, đào, quýt, hồng còn miền Nam thì thường chọn: mãng cầu, sung, dừa, đu đủ, xoài với mong muốn "*Cầu sung vừa đủ sài*".
- Ngũ phúc mong muốn có 5 điều tốt đẹp (Phú - Quý - Thọ - Khanh- Ninh) tức là mong muốn (Giàu có, sang trọng, sống lâu, khỏe mạnh và an lành).
- Ngũ thường gồm 5 đức tính (Nhân, nghĩa, lễ, trí, tín).
- Ngũ vị gồm 5 vị (Mặn, ngọt, chua, cay, đắng).
- Ngũ tạng gồm 5 bộ phận quan trọng bên trong có thể (Tâm, can, tì, phế, thận) ứng với (Tim, gan, lá lách, phổi, thận).
- Trên lá cờ Ủy ban Olympic có 5 vòng tròn với 5 màu khác nhau tượng trưng cho 5 châu lục.
- Trong môn bóng rổ, mỗi đội có 5 cầu thủ, và cầu thủ sẽ bị mời ra khỏi sân nếu phạm lỗi quá 5 lần.
- Môn bóng đá trong nhà mỗi đội có 5 cầu thủ.
- Một trận đấu bóng chuyền có tối đa 5 hiệp đấu.
- Trong đá luân lưu 11m, mỗi đội thực hiện 5 lần sút.
- Số 5 cũng chính là số các nguyên âm trong tiếng Anh (*u*, *e*, *o*, *a*, *i*).
- Ngày 5/5 là ngày tết Đoan Ngọ.
- Trên bàn cờ tướng, mỗi bên có 5 quân tốt.
- Trong trò chơi dân gian, chơi ô ăn quan, mỗi ô có chứa 5 viên sỏi.
- Trong trò chơi lines nếu muốn ghi được điểm thì ta phải xếp được 5 quả bóng cùng màu thẳng hàng.
- Mỗi nhiệm kì quốc hội của nước ta là 5 năm.
- Số 5 ứng với 5 cánh của ngôi sao trên quốc kì của nước ta tượng trưng cho 5 giai cấp (Sĩ, nông, công, thương, binh).
- 5 điều Bác Hồ dạy thiếu niên nhi đồng.
- Số 5 còn xuất hiện trong một số bài thơ thuộc thể thơ 5 chữ như: (Ông đồ - Vũ Đình Liên, Đêm nay Bác không ngủ - Minh Huệ, Chuyện cổ về loài người – Xuân Quỳnh…).
- Có 5 nước trong hội đồng bảo an Liên Hợp Quốc (Mỹ, Anh, Pháp, Trung Quốc, Nga).
- Số 5 là vị trí con giáp duy nhất trong 12 con giáp không có thật thường là biểu hiện của vua chúa thời phong kiến.
- Số 5 là số canh trong một đêm (5 canh thường xuất hiện trong các bài thơ ca xưa).
- Số 5 là số lớp học của học sinh tiểu học ở nước ta.
- Số 5 là số cánh hoa của một số loài hoa (Mai, đào, đại, phi điệp 5 cánh trắng …).
- Hiện nay ở Việt Nam loại tiền giấy mệnh giá cao nhất lưu hành là 5000 đồng, tiền polime cao nhất là 500000 đồng.
- Giải Nobel ban đầu theo di chúc chỉ trao cho 5 lĩnh vực (Vật lí, Hóa học, Y học, Văn học và Hòa bình) hiện nay có thêm giải Nobel về Kinh tế.
- Nước ta có 5 thành phố trực thuộc trung ương (Hà Nội, TP. Hồ Chí Minh, Đà Nẵng, Hải Phòng và Cần Thơ).
- Các hợp chất hóa học không thể có quá 5 nguyên tố tạo thành: C_xH_y; $C_xH_yO_z$; $C_xH_yO_zN_t$.
- Nếu đi thi mà được điểm từ 5 trở lên hoặc tổng kết môn là từ 5,0 trở lên là Ok rồi phải không?

CÁC LỚP THCS

Bài T1/511 (Lớp 6). Tìm tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số sao cho nó là bình phương của một số nguyên đồng thời là lập phương của một số nguyên khác.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T2/511 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=30^0, \widehat{B}=20^0$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD=BC$. Tính số đo góc $\widehat{BCD}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/511. Cho $a^2+b^2+16=8a+6b$, $(a,b\in\mathbb{R})$.
Chứng minh: a) $10\le 4a+3b\le 40$.
b) $7b\le 24a$.

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T4/511. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính BC và một điểm G nằm trong nửa đường tròn đó sao cho $\widehat{BGO}=135^0$. Đường vuông góc với GB tại G cắt nửa đường tròn tại A. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA lần lượt tại D và E. Chứng minh G nằm trên ED.

PHẠM TUẤN KHẢI
(Số nhà 29, ngõ 67, đường Giáp Bát, Q. Hoàng Mai, Hà Nội)

Bài T5/511. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y\le 2z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}-\frac{x+y}{2z}.$$

CAO VĂN DŨNG
(GV THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/511. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2020}+\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^{2020}+\left(\frac{z+x}{z-x}\right)^{2020}>\frac{2^{1010}}{3^{1009}}$$

trong đó x,y,z đôi một khác nhau.

NGUYỄN LÂM TUYỀN
(SV BK48 – K47, ĐHBK Hà Nội)

Bài T7/511. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x_2=x_1^3-3x_1\\ x_3=x_2^3-3x_2\\ \ldots\ldots\\ x_{2020}=x_{2019}^3-3x_{2019}\\ x_1=x_{2020}^3-3x_{2020}\end{cases}$$

PHẠM HOÀNG HÀ
(SVCLC K49 Toán – Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T8/511. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Trên đoạn AH lấy điểm I, đường thẳng CI cắt AB tại E. Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho EF song song với BC. Đường thẳng qua F vuông góc với CE tại N và cắt đường thẳng BI tại M. Gọi D là giao điểm của AN với BC. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, D, C cùng thuộc một đường tròn.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, Hà Nội)

Bài T9/511. Cho các số thực x,y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sin^4 x\left(\sin^4 y+\cos^4 y+\frac{9}{8}\cos^2 x.\sin^2 2y\right)+\cos^4 x.$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/511. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(2f(x)+2y)=x+f(2f(y)+x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Bài T11/511. Có n $(n\ge 2)$ đội bóng tham gia một giải bóng đá. Giải đấu được tổ chức theo hình thức đấu vòng tròn: 2 đội bóng bất kì thi đấu với

nhau đúng một trận. Cách tính điểm như sau: Sau mỗi trận đội thắng được 3 điểm, đội thua 0 điểm, còn nếu hòa cả hai độ được 1 điểm. Sau khi giải đấu kết thúc, người ta thấy rằng không có hai đội nào có cùng số điểm. Hỏi khoảng cách tối thiểu về điểm giữa đội đứng đầu và đội đứng cuối là bao nhiêu trong các trận đấu giữa *n* đội bóng.

NGUYỄN DUY LIÊN

(*GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc*)

Bài T12/511. Cho tam giác *ABC* có *I* là tâm đường tròn bàng tiếp góc *A*. Đường tròn này tiếp xúc với *BC*, *CA*, *AB* lần lượt tại *M*, *N*, *P*. Gọi *E* là giao điểm của *MN* và *BI*, *F* là giao điểm của *MP* và *CI*. Đường thẳng *BC* cắt *AE*, *AF* lần lượt tại *G*, *D*. Chứng minh rằng *AI* song song với đường thẳng đi qua *M* và tâm đường tròn Euler của tam giác *AGD*.

ĐỖ THANH TÙNG

(*7 Chu Văn An, TTr. Quảng Phú, CưM'Gar, Đăk Lăk*)

Bài L1/511. Một con lắc đơn dao động điều hòa trong không khí với chu kì 2,0000 s. Tích điện cho con lắc rồi cho nó dao động trong một điện trường đều theo phương nằm ngang. Biết dây treo cách điện và bỏ qua lực cản của không khí, khi cân bằng dây treo con lắc lệch so với phương thẳng đứng một góc $\alpha = 3^o$. Coi con lắc đơn vẫn dao động điều hòa, xác định chu kì dao động của nó trong điện trường.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH (*Hà Nội*)

Bài L2/511. Đặt vào giữa hai đầu một tụ điện điện áp xoay chiều có biểu thức $u = U_0\cos\omega t$. Điện áp giữa hai bản tụ điện và cường độ dòng điện qua tụ điện tại thời điểm t_1, t_2 tương ứng lần lượt là : $u_1 = 60$ V; $i_1 = \sqrt{3}$ A; $u_2 = 60\sqrt{2}$ V ; $i_2 = \sqrt{2}$ A. Xác định biên độ của điện áp giữa hai bản tụ điện và cường độ dòng điện qua tụ điện.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

****

PROBLEM IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/511 (For 6th grade). Find all 6-digit natural numbers which are both a perfect square and a cube.

Problem T2/511 (For 7th grade). Given a triangle *ABC* with $\widehat{A}=30^0, \widehat{B}=20^0$. On the side *AB* choose the point *D* such that *AD* = *BC*. Find the value of the angle $\widehat{BCD}$.

Problem T3/511. Assume that

$$a^2+b^2+16=8a+6b, (a,b\in\mathbb{R}).$$

Show that: a) $10 \le 4a+3b \le 40$.

b) $7b \le 24a$.

Problem T4/511. Given a half circle with the center *O*, the diameter *BC*. Choose a point *G* inside the half circle so that $\widehat{BGO} = 135^0$. The line which is perpendicular to *GB* at *G* intersects the half circle at *A*. The incircle *I* of *ABC* is tangent to *BC*, *CA* respectively at *D* and *E*. Show that *G* lies on *ED*.

Problem T5/511. Suppose that *x*, *y*, *z* are positive numbers satisfying $x + y \le 2z$. Find the minimum value of the expression $P=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}-\frac{x+y}{2z}$.

FOR HIGHT SCHOOL

Problem T6/511. Show the inequality

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2020}+\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^{2020}+\left(\frac{z+x}{z-x}\right)^{2020}>\frac{2^{1010}}{3^{1009}}$$

where x,y,z are different numbers.

Problem T7/511. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x_2=x_1^3-3x_1 \\ x_3=x_2^3-3x_2 \\ \dots \\ x_{2020}=x_{2019}^3-3x_{2019} \\ x_1=x_{2020}^3-3x_{2020} \end{cases}$$

Xem tiếp trang 38...

Bài T1/507 (Lớp 6). *Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho tổng 1 + 2 + 3 + ... + n có chữ số tận cùng là 2, 4, 7 hoặc 9?*

Lời giải. Gọi chữ số tận cùng của tổng $T = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ là t, tức là $T = 10x + t$ với x, t là các số tự nhiên và $0 \le t \le 9$.

Nhận xét 1. Giả sử các số n và m có chữ số tận cùng tương ứng là a và b, tức là $n = 10k + a$ và $m = 10h + b$, trong đó các số a, b, k, h đều là các số tự nhiên và $0 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$ thì:

a) Tổng $n + m$ và tổng $a + b$ có chữ số tận cùng giống nhau;

b) Tích nm và tích ab có chữ số tận cùng giống nhau. Thật vậy,

$n + m - (a + b) = 10k + a + 10h + b - (a + b) = 10(k + h)$ chia hết cho 10 và

$nm - (ab) = (10k + a)(10h + b) - (ab) = 10(10kh + ha + kb)$ chia hết cho 10.

Nhận xét 2. $T = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Thật vậy: $2T = 1 + n + 2 + (n-1) + \ldots + (n-1) + 2 + n + 1$

$$= n(n+1) \Rightarrow T = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nếu n có chữ số tận cùng là: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 thì số $n + 1$ tương ứng có chữ số tận cùng là: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

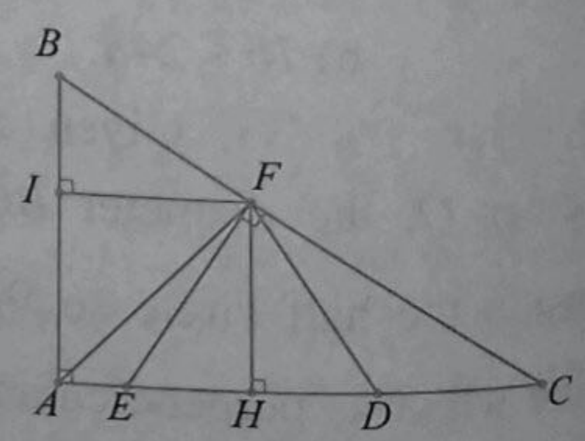
Khi đó theo nhận xét 1, số $n.(n+1)$ chỉ có chữ số tận cùng là 0, 2 hoặc 6 (*). Như vậy nếu số $T = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (tổng đã cho) có chữ số tận cùng là: 2, 4, 7 hoặc 9 thì $n.(n+1)$ có chữ số tận cùng là 4 hoặc 8, trái với (*). Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho tổng $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ có số tận cùng là 2, 4, 7 hoặc 9.

Nhận xét. 1) Bằng các cách giải nêu trên các bạn hãy làm các bài toán tương tự như: *Tìm chữ số tận cùng của tổng các số lẻ (hoặc số chẵn, hoặc số bội 3) liên tiếp từ 1 đến 2n + 1 (hoặc từ 2m + 1 đến* $2n + 1$ với $m < n$).

2) Các bạn sau có lời giải đúng. **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Huy, Nguyễn Minh Quân, Hán Duy Anh, Bùi Tuấn Tài, Trần Thị Hạnh, Phùng Thu Thủy, Nguyễn Huy Hoàng Sơn, Nguyễn Quang Khải*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Phạm Lê Minh*, 6A6, THCS Tây Sơn, Q. Hai Bà Trưng, *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Nghệ An:** *Nguyễn Kim Anh Quân*, 6A, *Nguyễn Văn Việt*, 6B, *Nguyễn Hằng Nga, Nguyễn Vân Anh*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Thanh Thảo Nguyên, Nguyễn Thị Trúc Quỳnh*, 6A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Trị:** *Võ Nguyên Thăng*, 6A, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Thị Diệu Ái*, 6A, *Nguyễn Huỳnh Minh Triết, Nguyễn Thùy Trâm, Cao Phương Nga, Võ Trương Minh Huy, Đàm Trần Hoàng Quyên*, 6C, *Võ Thị Cẩm Ly*, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Sóc Trăng:** *Lê Ngọc Xuân Thơ*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/507 (Lớp 7). *Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Trên cạnh AC lấy điểm E, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $EF \perp BC$ và EF = FB. Gọi D là điểm thuộc cạnh AC sao cho AD = AB. Chứng minh rằng tam giác EFD cân.*



Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, huyện Kế Sách, **Sóc Trăng**) Kẻ $FI \perp AB$ tại I, $FH \perp AC$ tại H. Ta có: $AC \perp AB$ (tam giác ABC vuông tại A)

$\Rightarrow FI \parallel AC \Rightarrow \widehat{BFI} = \widehat{C}$ (hai góc đồng vị).

Mà $\widehat{EFH} = \widehat{C}$ (cùng phụ với $\widehat{HFC}$), nên $\widehat{BFI} = \widehat{EFH}$. Xét ΔIBF và ΔHEF có:

$BE = EF$ (giả thiết)

$\widehat{BFI} = \widehat{EFH}$ (chứng minh trên)

$\widehat{FIB} = \widehat{FHE} = 90^0$ (cách dựng)

$\Rightarrow \Delta IBF = \Delta HEF$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow FI = FH \Rightarrow AF$ là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Khi đó ta có được $\Delta ABF = \Delta ADF$ (c.g.c) $\Rightarrow FB = FD$. Lại có: $BF = EF$ (giả thiết) $\Rightarrow FD = EF$. Vậy tam giác ΔEFD cân tại F.

Nhận xét: Đây là một bài toán chứng minh hình học quen thuộc, gần gũi với các bạn học sinh lớp 7, một số bạn đã sử dụng tính chất của góc nội tiếp ở lớp 9 để chứng minh. Các bạn học sinh sau đây có lời giải tốt: **Phú Thọ**: Đỗ Ngọc Tiến, 7A3, *Trần Thị Thanh Thảo, Lê Trung Hiếu, Bùi Thị Hồng Huệ, Bùi Phương Thảo, Nguyễn Quỳnh Chi, Lý Nguyệt Ánh, Hoàng Thị Giang Quỳnh, Nguyễn Đức Anh*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm; **Nghệ An**: *Hoàng Thế Hiếu, Nguyễn Công Phúc, Trần Hồng Minh, Bùi Nhật Đăng*, 8C; *Lê Mạc Đăng Danh, Đặng Văn Sang, Phan Đăng Xuân, Thái Khắc Hoàng, Nguyễn Đức Thành, Đào Danh Phước, Nguyễn Hoàng Thảo, Trần Đình Phương, Hà Lê Quỳnh Anh, Phạm Tuấn Tú, Nguyễn Văn Thắng, Nguyễn Văn Quang Huy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN THỊ THÙY LINH

Bài T3/507. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:* $1+5^x = 2^y + 5.2^z$ (1).

Lời giải. Do x, y, z là các số nguyên dương nên $(1+5^x)$ chia 5 dư 1 và $5.2^z \vdots 5$. Từ (1) suy ra $2^y \vdots 5$ dư 1. Do đó $y \vdots 4$. Đặt $y=4k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Lại có $(1+5^x) \vdots 4$ dư 2 và $2^{4k} \vdots 4$ nên từ (1) suy ra $5.2^z \vdots 4$ dư 2, do đó $z=1$. Thay $y=4k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ và $z=1$ vào (1), ta được $1+5^x = 2^{4k} + 10 \Leftrightarrow 5^x = 16^k + 9$ (2). Do 16^k chia 3 dư 1; $9 \vdots 3$, nên từ (2) suy ra 5^x chia 3 dư 1. Do đó x là số chẵn, đặt: $x=2q$ $(q \in \mathbb{N}^*)$. Thay vào (2) ta được: $25^q = 16^k + 9 \Leftrightarrow (5^q + 4^k)(5^q - 4^k) = 9$ (3).

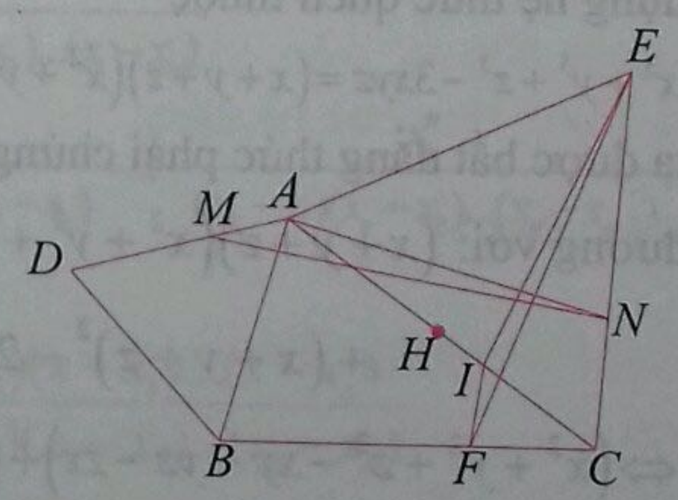
Do $k, q \in \mathbb{N}^*$ nên $5^q + 4^k \in \mathbb{N}^*$; $5^q + 4^k > 5^q - 4^k$. Từ (3) suy ra: $\begin{cases} 5^q - 4^k = 1 \\ 5^q + 4^k = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^q = 5 \\ 4^k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ k = 1 \end{cases}$.

Do đó $x = 2$, $y = 4$. Vậy PT (1) có nghiệm nguyên dương duy nhất: $(x, y, z) = (2, 4, 1)$.

Nhận xét. Đây là bài giải PT tìm nghiệm nguyên dương với ba ẩn, nên ta sử dụng tính chất chia hết để tìm dần giá trị của từng ẩn. Đa số các bạn gửi bài đều tìm đúng kết quả và cách làm tương tự như trên. Nhiều bạn lập luận còn dài dòng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Dương Đạt*, 9A,THCS Thị xã Sóc Sơn; **Phú Thọ**: *Nguyễn Trung Đức Dũng, Nguyễn Ngọc Hải, Nguyễn Quỳnh Thi, Trần Thị Thanh Thảo*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An**: *Trần Hồng Minh, Hoàng Đình Đức, Phạm Viết Thịnh, Phạm Trọng Toàn*, 8C, *Đặng Hữu Thanh*, 9A,THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/507. *Cho tam giác ABC nhọn. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ hai tam giác đều ABD và ACE. Trên các cạnh AD, CE, CB lần lượt lấy các điểm M, N, F sao cho* $\frac{AM}{AD} = \frac{CN}{CE} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{3}$. *So sánh độ dài hai đoạn thẳng MN và EF.*



Lời giải. Trên cạnh AC lấy điểm I sao cho $\frac{CI}{CA} = \frac{1}{3}$. Ta có: $\frac{CI}{CA} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{3}$ và góc $\widehat{C}$ chung nên $\Delta CAB \backsim \Delta CIF$ (c.g.c), do đó $\frac{IF}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IF}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow IF = AM$. Lại có $CI = CN$, từ đó suy ra

$\Delta CAN = \Delta CEI$ (c.g.c), nên $AN = IE$. Từ $\Delta CAN = \Delta CEI$ ta có $\widehat{CAN} = \widehat{CEI}$, suy ra $\widehat{DAB} + \widehat{CAN} = 60° + \widehat{CAN} = \widehat{ICE} + \widehat{IEC} = \widehat{AIE}$.

Gọi H là trung điểm của AC, khi đó $\widehat{EHC} = 90°$, mà $\frac{CI}{CA} = \frac{1}{3}$ nên I thuộc đoạn HC, dẫn đến $\widehat{CIE} > 90^0$. Suy ra $\widehat{MAB} + \widehat{CAN} < \widehat{CIE}$. Hơn nữa, $\Delta CAB \backsim \Delta CIF$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{FIC}$. Vậy $\widehat{MAN} = \widehat{MAB} + \widehat{CAN} + \widehat{BAC} < \widehat{CIE} + \widehat{FIC} = \widehat{FIE}$.

Hai tam giác AMN và IEF có:

$AM = IF$, $AN = IE$ và $\widehat{MAN} < \widehat{FIE} \Rightarrow MN < EF$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt. **Nghệ An:** *Nguyễn Công Phúc*; *Bùi Phương Thảo*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** *Trần Thị Thanh Thảo*; *Hoàng Thị Giang*; *Lý Nguyệt Ánh*; *Nguyễn Hoài Phương*; *Bùi Thị Hồng Huệ*; *Đào Quang Huy*; *Phạm Thị Minh Châu*; *Bùi Phương Thảo*; *Kiều Duy Linh*, 8A3; *Trần Quốc Huy*, 9A3, THCS Lâm Thao; *Trần Minh Khôi*, 9C, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/507. *Cho các số thực* $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ *thỏa mãn* $\max\{x; y; z\} \ge 1$. *Chứng minh rằng:*

$$x^3 + y^3 + z^3 + (x + y + z - 1)^2 \ge 1 + 3xyz.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $x = \max\{x, y, z\} \ge 1$. Lưu ý $x + y + z > 0$ và sử dụng hệ thức quen thuộc

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

ta được bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với: $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$$+ (x + y + z)^2 - 2(x + y + z) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + (x + y + z) - 2 \ge 0$$

(chia cả hai vế cho $x + y + z$)

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y) + (x^2 + z^2 + 1 - 2xz - 2x + 2z)$$

$$+ (y^2 + z^2 - 2yz) + 6x - 6 \ge 0 \text{ (nhân cả hai vế với 2)}$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1)^2 + (x - z - 1)^2 + (y - z)^2 + 6(x - 1) \ge 0.$$

Vế trái là tổng của các số hạng không âm, bất đẳng thức này đúng. Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1, y = 0, z = 0$ và các hoán vị của chúng.

Nhận xét. Điều then chốt của lời giải là giả sử $x = \max\{x, y, z\} \ge 1$ và sử dụng hệ thức:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh đẳng thức trên bằng cách sử dụng hằng đẳng thức $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Quảng Trị**: *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ ; **Vĩnh Phúc**: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Sóc Trăng** : *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Phú Thọ**: *Trần Thị Yến Khanh*, 8A3, THCS lâm Thao, Lâm Thao, *Trần Minh Khôi*, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/507. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^3 + x + 2 = 8y^3 - 6xy + 2y \\ \sqrt{x^2 - 2y + 2} + 2\sqrt[4]{x^3(5 - 4y)} = 2y^2 - x + 2 \end{cases}.$$

Lời giải. (Của hầu hết các bạn) PT đầu của hệ cho ta $x^3 - 8y^3 + 6xy + 1 + x - 2y + 1 = 0$. Bằng biến đổi đơn giản, ta có:

$$0 = x^3 - 8y^3 + 6xy + 1 + x - 2y + 1$$

$$= (x - 2y + 1)(x^2 + 4y^2 + 2xy - x + 2y + 2).$$

Dễ thấy rằng $0 < x^2 + 4y^2 + 2xy - x + 2y + 2$

$= \frac{1}{2}(x + 2y)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$. Từ đó $x - 2y + 1 = 0$ hay là $2y = x + 1$. Thay $2y = x + 1$ vào PT thứ hai của hệ phương trình, ta thu được:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + 2\sqrt[4]{x^3(3 - 2x)} = \frac{(x + 1)^2}{2} - x + 2.$$

Vế phải của PT này là $\frac{1}{2}(x^2+5)$. Vế trái của PT cho ta điều kiện xác định là $0 \le x \le 3$, và khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy vào các căn của vế trái, ta có:

$$\sqrt{x^2-x+1}+2\sqrt[4]{x^3(3-2x)} \le \frac{1}{2}\left[(x^2-x+1)+1\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[x+x+x+(3-2x)\right]=\frac{1}{2}(x^2+5).$$

Do $\sqrt{x^2-x+1}+2\sqrt[4]{x^3(3-2x)}=\frac{(x+1)^2}{2}-x+2$, suy ra là các bất đẳng thức Cauchy được sử dụng trong các bất đẳng thức trên đều phải là đẳng thức. Vậy $x=1$ và thay khi thay giá trị $x=1$ vào $2y=x+1$ ta có $y=1$. Thử lại hệ PT ta thấy $x=y=1$ đúng là nghiệm của hệ đã cho (đpcm).

Nhận xét. Hầu hết các bạn gửi lời giải có đáp số đúng, đó là các bạn: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 11A1, *Nguyễn Trường An,* 11A7, THPT Yên Phong; **Bến Tre:** *Đoàn Quang Đang*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Đà Nẵng:** *Phạm Hiếu*, 12A1, *Nguyễn Hữu Hoàng Lang*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Ngô Bách Phương*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội**: *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, *Đỗ Xuân Trọng,* 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh**: *Lưu Ngân Hà, Lê Văn Danh,* 10T1, *Nguyễn Văn Giáp,* 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh, *Trần Thị Ngọc Anh,* 10A2, *Nguyễn Thị Thùy Linh, Nguyễn Thị Hà Chi,* 10 A1, *Lê Hồng Quân, Nguyễn Hữu Tâm,* 11A1, THPT Cù Huy Cận; **Hưng Yên:** *Cao Trung Hiếu, Nguyễn Việt Anh,* 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Long An :** *Phạm Đăng Khôi, Lê Phúc Tiến*, 10T1, THPT chuyên Long An ; **Nam Định:** *Cồ Huy Dũng, Đỗ Tiến Dũng, Trần Thị Thanh Tùng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Tuấn Hải, Nguyễn Kim Ngọc,* 10A01, THPT Quỳnh Lưu, *Nguyễn Quốc Nguyên Chương, Nguyễn Huy Hoàng, Nguyễn Hữu Hải, Kiều Đình Hải,* 10T1, THPT Đô Lương; **Quảng Bình:** *Lê Mỹ Duyên,* 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyễn Giáp; **Quảng Trị:** *Nguyễn Xuân Tiến,* 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Sóc Trăng** : *Đậu Đức Quân, Lâm Khánh Hòa,* 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Thanh Hóa**: *Trương Ngọc Tâm, Nguyễn Đại Dương, Nguyễn Duy Long,* 10 T2, THPT chuyên Lam Sơn, *Tạ Duyên Đông,* 11A1, *Nguyễn Minh Tú,* 11A4, THPT Lương Đắc Bằng, *Lê Đức Chính,* 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Bá Hoàng, Nguyễn Đặng Khánh Toàn,* 11 Toán 1, *Nguyễn Đức Phát,* 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Tiền Giang** *Trần Hoài An, Nguyễn Ngọc Tân, Mai Võ Phúc Thành, Nguyễn Trung Hiếu,* THPT chuyên Tiền Giang; **Vĩnh Long:** *Lê Minh Tâm,* 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Vũ Quỳnh Mai, Nguyễn Hoàng Sơn, Nguyễn Thị Ngọc Ánh, Kim Ngọc Yến Nhi, Lê Xuân Hiếu, Vũ Đức Huy, Phạm Gia Khiêm*, 10A1, *Lê Ngọc Hoa*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; có hai bạn quên không ghi họ tên và địa chỉ.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T7/507. *Cho đa thức*

$$P(x)=x^n+x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$$

có n nghiệm thực $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *đôi một phân biệt. Chứng minh rằng*

$$\frac{x_1^n}{P'(x_1)}+\frac{x_2^n}{P'(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^n}{P'(x_n)}=-1.$$

Lời giải. Do $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các nghiệm nên $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Ta có:

$$P'(x)=(x-x_2)\ldots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$
$$+\ldots+(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$\Rightarrow A=\frac{x_1^n}{P'(x_1)}+\frac{x_2^n}{P'(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^n}{P'(x_n)}$$
$$=\frac{x_1^n}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}$$
$$+\frac{x_2^n}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}+\ldots+\frac{x_n^n}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Xét đa thức:

$$f(x)=x_1^n.\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}$$
$$+x_2^n.\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}$$
$$+\ldots+x_n^n\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

$$-x^n+(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n).$$

Ta có:

$f(x_1)=f(x_2)=...=f(x_n)=0$ và $\deg f(x)\le n-1$.

Do đó $f(x)\equiv 0$. Đa thức có hệ số cao nhất là $A-(x_1+x_2+...+x_n)=0$. Theo hệ thức Viète: $x_1+x_2+...+x_n=-1$. Vậy $A=-1$.

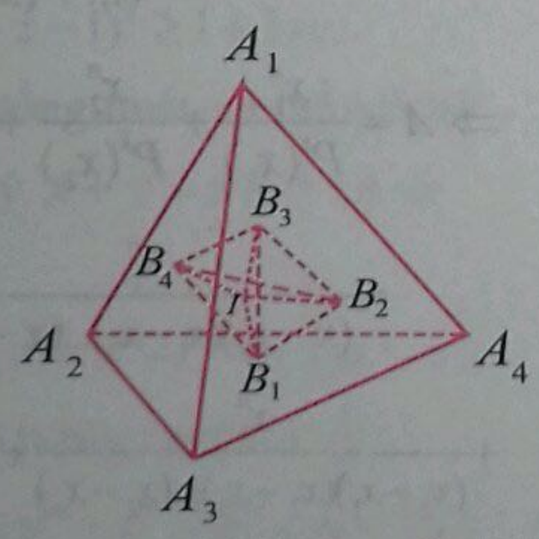
➢***Nhận xét.*** Không giải trực tiếp, có bạn đã sử dụng công thức nội suy Lagrange để chứng minh nếu $x_1,x_2,...,x_n$ các nghiệm phân biệt của $P(x)$ thì $\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^n}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}=\sum_{k=1}^{n}x_k$. Từ đó dẫn tới $A=\sum_{k=1}^{n}x_k=-1$.

Chỉ có ba bạn giải được bài này, đó là các bạn: **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Nhật Hào*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/507. *Giả sử mặt cầu nội tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ tiếp xúc với các mặt đối diện với đỉnh A_i tương ứng tại B_i $(i=1,2,3,4)$. Chứng minh rằng tứ diện $B_1B_2B_3B_4$ là tứ diện gần đều (tứ diện có các cạnh đối diện bằng nhau) khi và chỉ khi tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là gần đều.*

Lời giải. Lưu ý rằng tứ diện $X_1X_2X_3X_4$ là tứ diện gần đều khi và chỉ khi tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện cũng là trọng tâm của tứ diện đó, nghĩa là: $\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OX_i}=\vec{0}$.



Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $B_1B_2B_3B_4$. Từ đó tứ diện $B_1B_2B_3B_4$ gần đều khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{IB_i}=\vec{0}$ (1). Gọi S_i là diện tích mặt đối diện đỉnh A_i $(i=1,2,3,4)$ của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Do $\overrightarrow{IB_i}$ vuông góc với mặt đối diện của đỉnh A_i $(i=1,2,3,4)$ và $\left|\overrightarrow{IB_1}\right|=\left|\overrightarrow{IB_2}\right|=\left|\overrightarrow{IB_3}\right|=\left|\overrightarrow{IB_4}\right|$ nên theo định lý *Con Nhím* ta có: $\sum_{i=1}^{4}S_i\overrightarrow{IB_i}=\vec{0}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ diện $B_1B_2B_3B_4$ gần đều khi và chỉ khi $S_1=S_2=S_3=S_4$ $\Leftrightarrow$ tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện gần đều.

Nhận xét: Bài toán này là một hệ quả trực tiếp của *định lý Con Nhím* trong không gian. Nội dung của định lý này như sau: *Cho tứ diện $X_1X_2X_3X_4$. Gọi S_i $(i=1,2,3,4)$ là diện tích mặt đối diện của đỉnh A_i; gọi $\vec{e_i}$ $(i=1,2,3,4)$ là các vectơ đơn vị vuông góc với mặt đối diện đỉnh A_i và hướng từ một điểm bên trong tứ diện đó ra phía ngoài tứ diện thì ta có* $\sum_{i=1}^{4}S_i\vec{e_i}=\vec{0}$. Rất tiếc không có bạn nào gửi lời giải cho bài toán trên.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/507. *Với x là số thực, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{(2x^2+5x+5)^2}{(x+1)^4+1}.$$

Lời giải. Ta có :

$$P=\frac{\left(2x^2+5x+5\right)^2}{(x+1)^4+1}=\frac{\left(2(x+1)^2+(x+1)+2\right)^2}{(x+1)^4+1}$$

$$=\frac{\left(2a^2+a+2\right)^2}{a^4+1}$$, trong đó kí hiệu $a=x+1$.

Giá trị lớn nhất: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực không âm ta có:

$$P=\frac{2\left(2a^2+a+2\right)^2}{a^4+1+(a^4+1)}\le\frac{2\left(2\left(a^2+1\right)+\frac{a^2+1}{2}\right)^2}{a^4+1+2a^2}$$

$$=\frac{\frac{25}{2}\left(a^2+1\right)^2}{\left(a^2+1\right)^2}=\frac{25}{2},\ P=\frac{25}{2}\Leftrightarrow a=1\Leftrightarrow x=0.$$

Giá trị nhỏ nhất: Biến đổi $P=\frac{\left(2a^2+a+2\right)^2}{a^4+1}$

$$=\frac{4a^4+4a^3+9a^2+4a+4}{a^4+1}=4+\frac{4a^3+9a^2+4a}{a^4+1}.$$

Nếu $a=0$ thì $P=4$.

Xét $a\neq 0$ ta có: $P=4+\dfrac{4a+9+\dfrac{4}{a}}{a^2+\dfrac{1}{a^2}}$

$$=4+\frac{4\left(a+\frac{1}{a}\right)+9}{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2}=4+\frac{4b+9}{b^2-2}\quad\left(\text{trong đó } b=a+\frac{1}{a}\right)$$

$$=3\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{4b+9}{b^2-2}\right)=3\frac{1}{2}+\frac{b^2-2+8b+18}{2\left(b^2-2\right)}$$

$$=3\frac{1}{2}+\frac{(b+4)^2}{2\left(b^2-2\right)}\geq 3\frac{1}{2}$$

(chú ý $2\left(b^2-2\right)=2\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)>0$).

$$P=3\frac{1}{2}\Leftrightarrow b+4=0\Leftrightarrow a+\frac{1}{a}+4=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+4a+1=0\Leftrightarrow a=-2\pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x+1=-2\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{3}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $12\dfrac{1}{2}$ và giá trị nhỏ nhất của P bằng $3\dfrac{1}{2}$.

Nhận xét. Đây là bài toán cực trị dạng cơ bản, các biến đổi quen thuộc với những bạn học sinh. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Bắc Ninh :** *Nguyễn Trường An*, 11A7, *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 11A1, THPT Yên Phong số 1; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Gia Khiêm*, *Phạm Hoàng Hiệp*, *Vũ Đức Huy*, *Nguyễn Hoàng Sơn*, 10A1, *Lê Ngọc Hoa*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, *Đỗ Xuân Trọng*, 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nghệ An:** *Đặng Thế Duy*, *Nguyễn Tuấn Hải*, *Nguyễn Kim Ngọc*, 10A1, THPT Quỳnh Lưu 1; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Đại Dương*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Hải Anh*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10A1; *Lê Hồng Quân*, *Nguyễn Hữu Tâm*, 11A1, THPT Cù Huy Cận; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, *Trần Nguyễn Hữu Phúc*, *Nguyễn Xuân Tiến*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Bá Hoàng*, *Nguyễn Đặng Khánh Toàn*, 11T1; *Nguyễn Đức Phát*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Nhật Hào*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Vĩnh Long**: *Nguyễn Tấn Lực*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/507. *Tìm tất cả các số nguyên tố p và hai số nguyên dương a, b sao cho p^a+p^b là số chính phương.*

Lời giải. (Của bạn *Phạm Gia Khiêm*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**).

Giả sử: $p^a+p^b=A=c^2$.

TH1: $a=b\Rightarrow 2p^a=c^2\Rightarrow c=2c_1\Rightarrow p^a=2c_1^2$

Vậy $p=2, c^2=2^{a+1}\Rightarrow a+1=2k\Rightarrow a=2k-1$

Vậy $p=2,\ a=b=2k-1$.

TH2: $a\neq b$. Không giảm tính tổng quát, giả sử $a>b$. Ta có: $p^a+p^b=p^b(p^{a-b}+1)\vdots p^b$.

Vì $(p^b,\ p^{a-b}+1)=1$ nên $p^b={c_1}^2,\ p^{a-b}+1={c_2}^2$ $(c=c_1.c_2)$. Vậy $b=2k$. Từ đó

$${c_2}^2-1=p^{a-b}\Rightarrow(c_2-1)(c_2+1)=p^{a-b}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c_2+1=p^u\\ c_2-1=p^v\end{cases}\quad(u>v\geq 0;\ u+v=a-b)$$

$$\Rightarrow p^u-p^v=2\Rightarrow p^v\left(p^{u-v}-1\right)=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}p^v=2\\ p^v=1\end{array}\right..$$

i) Nếu $p^v=2\Rightarrow\begin{cases}p=2,\ v=1\\ p^{u-v}=2\end{cases}\Rightarrow u-v=1\Rightarrow u=2.$

Vậy $a-b=u+v=3\Rightarrow a=2k+3;\ b=2k.$

ii) Nếu $p^v=1$ thì $v=0\Rightarrow p^{u-v}-1=2$

$$\Rightarrow p^{u-v}=3\ \Rightarrow p=3, u-v=1\Rightarrow u=1$$

$$\Rightarrow a-b=u+v=1\Rightarrow a=b+1=2k+1.$$

Đáp số : các bộ ba (p,a,b) cần tìm là:

$(2;2k-1;2k-1)$, $(2;2k+3;2k)$, $(2;2k;2k+3)$, $(3;2k+1;2k)$, $(3;2k;2k+1)$ với $k\in\mathbb{N}^*$.

Nhận xét. Ngoài bạn *Khiêm*, có nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Hầu hết đều có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế sách; **Quảng Bình**: *Nguyễn Lê Nguyên*, 10T1, THPT chuyên Võ Nguyên

Giáp; **Nghệ An**: *Đặng Hữu Khanh*, 9A THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Duy Long*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Nội**: *Đỗ Xuân Trọng*, 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Cần Thơ**: *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Trúc Như Bình*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/507. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:* $f\big((x+z)(y+z)\big)=\big(f(x)+f(z)\big)\big(f(y)+f(z)\big)$ (1) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Giả sử hàm $f(t)$ thỏa mãn (1). Xét trường hợp $f(t)=c$ là hàm hằng. Khi đó, thay vào (1) các biến (x,y,z) bởi $(0,0,0)$ ta thu được: $f(0)=4[f(0)]^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(0)=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$.

Các hàm $f(x)=\dfrac{1}{4}, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Xét trường hợp $f(t)\not\equiv c$. Thay vào (1) các biến (x,z) bởi $(0,0)$, ta thu được:

$f(0)=2f(0)(f(y)+f(0))$, suy ra $f(0)=0$.

Thay $z=-x$ vào (1), ta thu được: $0=(f(x)+f(-x))(f(y)+f(-x)),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (2)

Vì $f(t)\not\equiv c$ nên từ (2) suy ra $0=f(x)+f(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra $f(x)$ là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$. Thay vào (1) các biến (x,y,z) bởi (t,t,t) ta thu được: $f(4t^2)=4(f(t))^2,\ \forall t\in\mathbb{R}$ (3), suy ra $f(t)\ge 0$ khi $t>0$. Vì $f(t)$ là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$ nên chỉ cần xét $f(t)$ với $t>0$. Thay vào (1) các biến (y,z) bởi (x,y) ta thu được: $f((x+y)^2)=(f(x)+f(y))^2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (4).

Kết hợp (3) và (4) ta thu được

$$4f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)=f\left[4.\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right]=f\left[(x+y)^2\right]$$

$$=\left[f(x)+f(y)\right]^2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với $f(0)=0$, suy ra $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (5). Do $f(t)\ge 0$ với $t>0$ nên từ (5) suy ra $f(t)$ là hàmđơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$. Ta thu được $f(t)$ là hàm cộng tính đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$ và khác hằng nên $f(t)=at, a>0$. Thế vào (1), ta thu được $a=1$ và $f(t)=t$. *Kết luận*: Các hàm số cần tìm là $f(t)=0, f(t)=\dfrac{1}{4}, f(t)=t,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Nhận xét. Đây là bài toán cơ bản về phương trình hàm nên có nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ**: *Phùng Nguyễn, Đỗ Minh Quân,* 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Đà Nẵng**: *Phạm Hiếu,* 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Trúc Như Bình,* 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nam**: *Ngô Việt Anh,* 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội**: *Đỗ Xuân Trọng,* 11T, *Nguyễn Xuân Tùng,* 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thái Dương*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Đặng Khánh Toàn, Phạm Bá Hoàng*, 11T1, *Nguyễn Đức Phát*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Nam Định**: *Trần Huy Lực*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Bình**: *Lê Mỹ Duyên, Phan Quốc Khánh*, 11T1, *Phan Phú Trường, Lê Đức Hạnh, Trần Phương Linh*, 10T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Sóc Trăng**: *Lâm Khánh Hòa*, 11AT2, THPT Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Thanh Hóa**: *Thiều Đình Minh Hùng*, 11T2, *Trương Ngọc Tâm*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Phúc**: *Lê Ngọc Hoa*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/507. *Cho ΔABC và điểm M thuộc cạnh BC. Các đường đối trung qua M của các tam giác MAB, MAC cắt các đường tròn (MAB),*

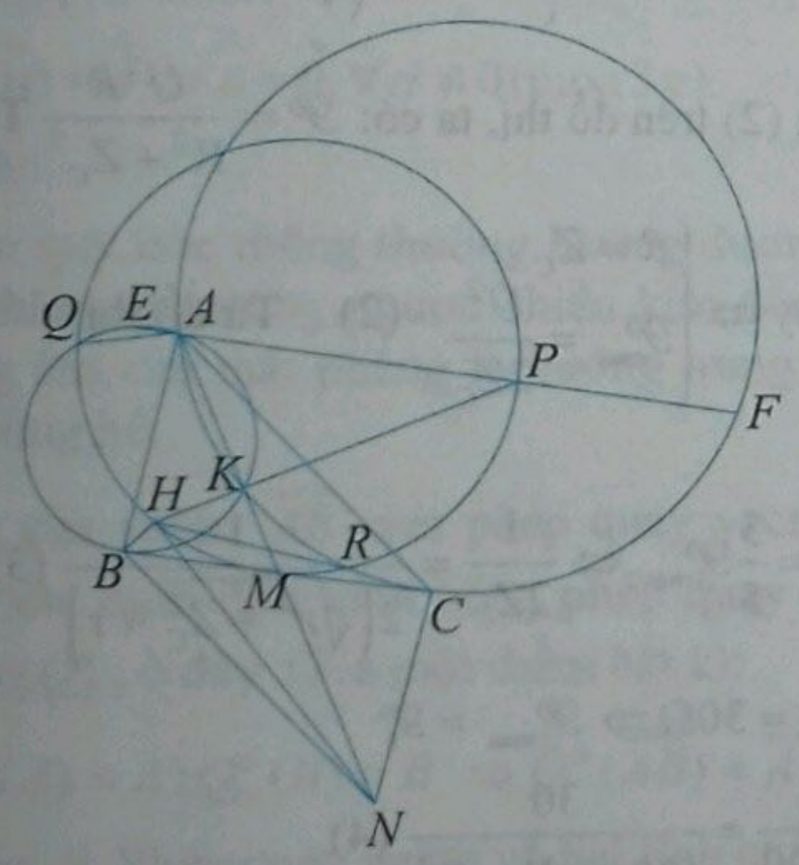
(MAC) lần lượt tại Q, R khác M. P thuộc đường thẳng BC sao cho $AP \perp AM$. Gọi tiếp tuyến chung ngoài gần A hơn của các đường tròn (MAB), (MAC) là l. Giả sử l song song với BC, chứng minh rằng l tiếp xúc với đường tròn (PQR). (Kí hiệu (XYZ) chỉ đường tròn ngoại tiếp ΔXYZ).

Lời giải. **Bổ đề 1.** *Đường tròn nội tiếp và đường tròn Euler của một tam giác tiếp xúc với nhau.*

Bổ đề 1 rất quen thuộc, được gọi là định lí Feuerbach, không trình bày cách chứng minh ở đây.

Bổ đề 2. *Cho ΔABC, trực tâm H. M là trung điểm của BC. K là hình chiếu của H trên AM. P là giao điểm của HK và đường thẳng qua A song song với BC. E, F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AP và các đường tròn (ABK), (ACK). Q, R theo thứ tự là giao điểm thứ hai của đường đối trung đi qua A của các $\Delta AKE, \Delta AKF$ và các đường tròn (AKE), (AKF). Khi đó đường tròn (PQR) tiếp xúc với BC.*

Chứng minh. Gọi N là điểm đối xứng của A qua M (h.1). Dễ thấy $ABNC$ là hình bình hành. Từ đó, chú ý rằng H là trực tâm của tam giác ΔABC, suy ra $\widehat{HBN} = \widehat{HCN} = 90^o$. Kết hợp với $\widehat{HKN} = 90^o$,

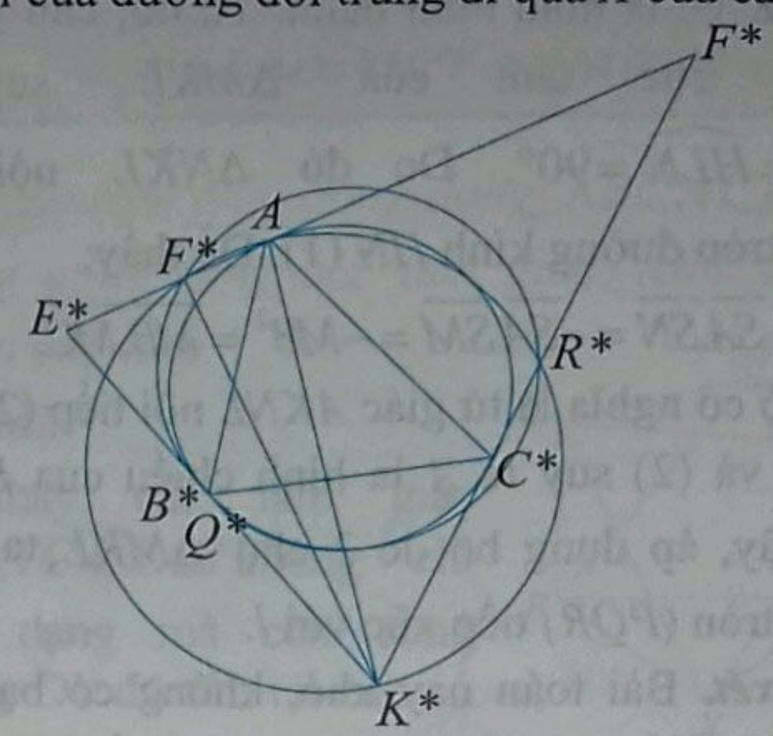


Hình 1

suy ra tứ giác $KBNC$ nội tiếp đường tròn đường kính HN. Do đó:

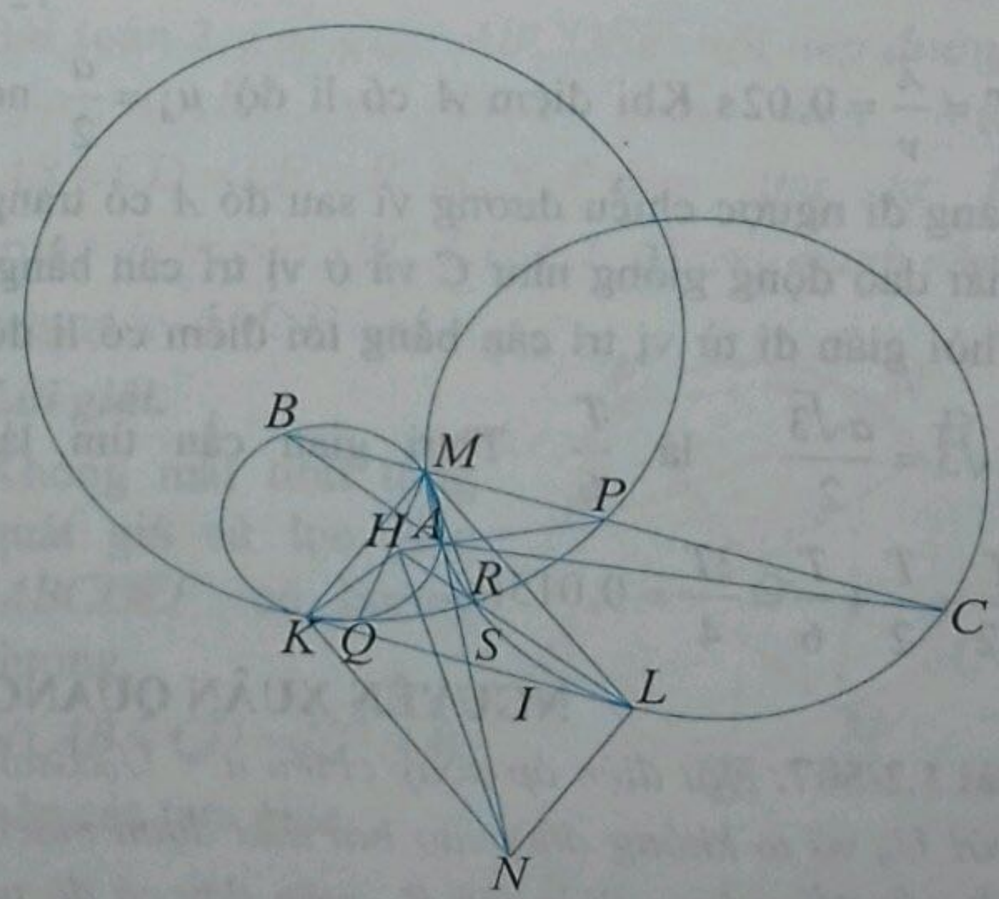
$\overline{MK}.\overline{MA} = -\overline{MK}.\overline{MN} = -\overline{MB}.\overline{MC} = MB^2 = MC^2$.

Điều đó có nghĩa là BC tiếp xúc với các đường tròn (ABK), (ACK) (1). Qua phép nghịch đảo tâm A phương tích bất kì, B, C, K, P, Q, R theo thứ tự biến thành $B^*, C^*, K^*, P^*, Q^*, R^*$; đường thẳng BC biến thành đường tròn (AB^*C^*); các đường thành đường tròn (AK^*P^*), đường kính AK^* (vì $KP \perp KA$); Q^*, R^* theo thứ tự là trung điểm của K^*E^*, K^*F^* (vì AQ, AR theo thứ tự là giao điểm thứ hai của đường đối trung đi qua A của các tam



Hình 2

giác AKE, AKF và các đường tròn (AKE), (AKF)) (h.2). Vậy (AB^*C^*), $(P^*Q^*R^*)$ theo thứ tự là đường tròn nội tiếp tam giác và đường tròn Euler của tam giác $K^*E^*F^*$. Do đó, theo bổ đề 1, (AB^*C^*), $(P^*Q^*R^*)$ tiếp xúc với nhau. Điều đó có nghĩa là (PQR) tiếp xúc với BC. Trở lại giải bài toán T12. Gọi K, L theo thứ tự là tiếp điểm của l và các đường tròn (MAB), (MAC); H là trực tâm của tam giác MKL; S là giao điểm của MA và KL; N là điểm đối xứng của M qua S (h.3). Dễ thấy $MKNL$ là hình bình hành. Từ đó, chú ý rằng H là



Hình 3

trực tâm của ΔMKL, suy ra $\widehat{HKN} = \widehat{HLN} = 90°$. Do đó ΔNKL nội tiếp đường tròn đường kính HN (1). Dễ thấy: đường tròn (MAB), (MAC); H là trực tâm của ΔMKL; S là giao điểm của MA và KL; N là điểm đối xứng của M qua S (h.3). Dễ thấy $MKNL$ là hình bình hành. Từ đó, chú ý rằng H là trực tâm của ΔMKL, suy ra $\widehat{HKN} = \widehat{HLN} = 90°$. Do đó ΔNKL nội tiếp đường tròn đường kính HN (1). Dễ thấy:

$$\overline{SA}.\overline{SN} = -\overline{SA}.\overline{SM} = -MB^2 = \overline{MB}.\overline{MC}.$$

Điều đó có nghĩa là tứ giác $AKNL$ nội tiếp (2).

Từ (1) và (2) suy ra A là hình chiếu của H trên MS. Vậy, áp dụng bổ đề 2 cho ΔMKL, ta được đường tròn (PQR) tiếp xúc với l.

Nhận xét. Bài toán này khó, không có bạn nào tham gia giải.

NGUYỄN MINH HÀ

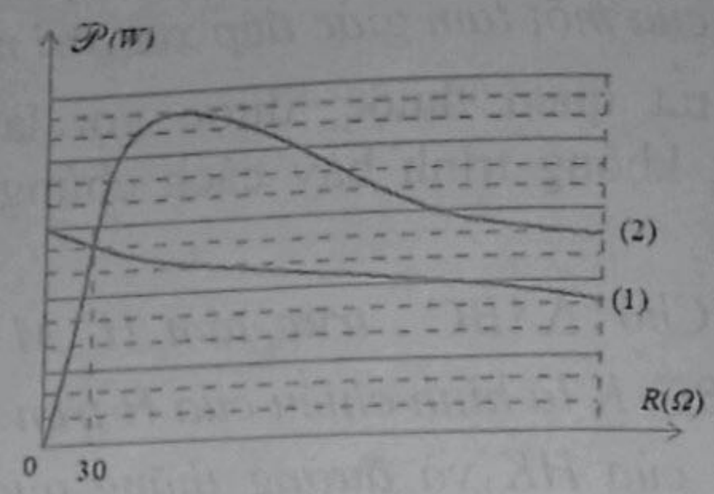
Bài L1/507. *Sóng cơ truyền từ một nguồn điểm trên mặt nước với bước sóng 12 cm và tốc độ 6 m/s. Hai điểm A, B cùng nằm trên một phương truyền sóng cách nhau 2 cm. Tại thời điểm t, khi li độ dao động tại A là $u_A = +2\,mm$ thì li độ dao động tại B là $u_B = -2\,mm$. Biết sóng truyền từ B đến A. Điểm A có li độ $2\sqrt{3}$ cm sau thời gian ngắn nhất kể từ thời điểm t là bao nhiêu?*

Lời giải. Do sơ suất đề bài thiếu dữ kiện: biên độ dao động của các phần tử là $a = 4$ cm. Gọi C là trung điểm của AB. Ta có: $AC = 1cm = \frac{\lambda}{12}$, $T = \frac{\lambda}{v} = 0,02\,s$. Khi điểm A có li độ $u_A = \frac{a}{2}$ nó đang đi ngược chiều dương vì sau đó A có trạng thái dao động giống như C và ở vị trí cân bằng. Thời gian đi từ vị trí cân bằng tới điểm có li độ $2\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ là $\frac{T}{6}$. Thời gian cần tìm là:

$$\frac{T}{12} + \frac{T}{2} + \frac{T}{6} = \frac{3T}{4} = 0,015(s).$$

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/507. *Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0\cos\omega t$ (với U_0 và ω không đổi) vào hai đầu đoạn mạch AB nối tiếp gồm : Biến trở R, cuộn dây có độ tự cảm L và điện trở r, tụ điện có điện dung C. Biết $LC\omega^2 = 2$. Gọi $\mathcal{P}$ là công suất tiêu thụ của đoạn mạch AB. Đồ thị trong hệ tọa độ $RO\mathcal{P}$ biểu diễn sự phụ thuộc $\mathcal{P}$ vào R trong trường hợp lúc đầu ứng với đường (1) và trong trường hợp nối tắt cuộn dây ứng với đường (2) như hình bên. Giá trị của điện trở r là bao nhiêu?*



Lời giải. $LC\omega^2 = 2 \Rightarrow L\omega = \frac{2}{C\omega} \Rightarrow Z_L = 2Z_C$

Từ đường (1) trên đồ thị, ta có:

$$\mathcal{P} = \frac{U^2R}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{U^2R}{(R+r)^2 + Z_C^2}$$

Theo Cauchy $\Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{r^2 + Z_C^2} \\ \mathcal{P}_{max} = \dfrac{U^2}{2\left(\sqrt{r^2 + Z_C^2} + r\right)} \end{cases}$ (1). Từ đường (2) trên đồ thị, ta có: $\mathcal{P} = \frac{U^2R}{R^2 + Z_C{}^2}$ Theo Cauchy $\Rightarrow \begin{cases} R = Z_C \\ \mathcal{P}_{max} = \dfrac{U^2}{2Z_C} \end{cases}$ (2). Từ đồ thị:

$$\mathcal{P}_{2max} = \frac{3}{5}\mathcal{P}_{1max} \Leftrightarrow \frac{1}{2Z_C} = \frac{1}{2\left(\sqrt{r^2 + Z_C^2} + r\right)} \quad (3).$$

Khi $R = 30\Omega \Rightarrow \mathcal{P}_{2max} = \mathcal{P}_1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2.30} = \frac{30}{(30+r)^2 + Z_C^2} \quad (4).$$

Từ (3) và (4), suy ra $r = 270\ (\Omega)$.

Nhận xét: Rất tiếc là không bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

PHÉP QUAY VECTƠ

NGUYỄN MINH HÀ
(Giáo viên THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Phép quay vectơ là một công cụ tốt để giải khá nhiều bài toán hình học. Tuy nhiên, cho đến nay, vẫn chưa có một tài liệu chính thống nào viết về phép quay vectơ. Vì lí do đó mà tôi viết bài báo này với hy vọng cung cấp thêm một công cụ tốt giúp các giáo viên dạy chuyên toán và các em học sinh chuyên toán giải nhanh chóng một số bài toán hình học.

1. *Định nghĩa.* *Gọi là tập hợp các vectơ trên mặt phẳng. Phép quay vectơ góc quay $\alpha\,(\alpha\in\ )$ là một ánh xạ đi từ tới , kí hiệu là Q^{α}, xác định như sau: $Q^{\alpha}(\vec{a})=\vec{a}'$, ở đây: $\left(\vec{a},\vec{a}'\right)\equiv\alpha\left(\bmod 2\pi\right)$ và $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{a}'\right|$.*

Từ định nghĩa trên, ta có ngay các hệ quả hiển nhiên sau:

• $Q^{\alpha}(\vec{a})=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$;

• $Q^{\alpha}(\vec{a})=\vec{a}\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0},\forall\alpha\not\equiv 0(\bmod 2\pi)$.

Chú ý:

• Theo quy ước thông thường hướng dương của mặt phẳng là hướng ngược chiều kim đồng hồ, hướng âm của mặt phẳng là hướng trùng chiều kim đồng hồ.

• Ảnh của vectơ $\overrightarrow{AB}$ qua phép quay vectơ Q^{α} được xác định đơn giản bằng phép quay thông thường Q_O^{α}, ở đây O là một điểm bất kì:

$$Q_O^{\alpha}(A)=A';Q_O^{\alpha}(B)=B'\Rightarrow Q^{\alpha}(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{A'B'}.$$

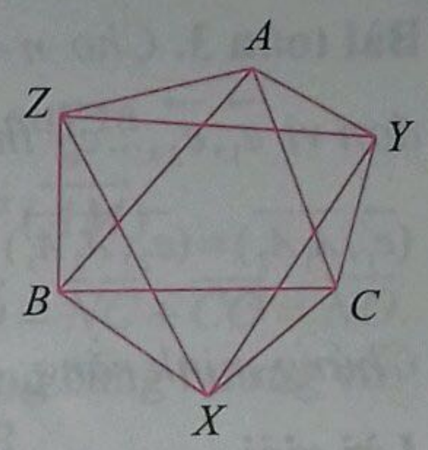
2. *Định lí.* Phép quay vectơ có hai tính chất sau:

1) $Q^{\alpha}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=Q^{\alpha}\left(\vec{a}\right)+Q^{\alpha}\left(\vec{b}\right)\ \forall a,b\in$.

2) $Q^{\alpha}\left(k\vec{a}\right)=kQ^{\alpha}\left(\vec{a}\right)\ \forall k\in\ ,\ \forall\vec{a}\in$.

3. *Một vài bài toán điển hình*

Bài toán 1. *Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng các tam giác đồng dạng XBC, YCA, ZAB. Chứng minh rằng các tam giác ABC, XYZ có cùng trọng tâm.*



Lời giải.

Dễ thấy các tam giác XBC, YCA, ZAB không chỉ đồng dạng mà còn cùng hướng. Do đó tồn tại các số α, k sao cho:

$$\left(\overrightarrow{BX},\overrightarrow{BC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CY},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AZ},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\alpha\left(\bmod 2\pi\right);$$

$$\frac{BX}{BC}=\frac{CY}{CA}=\frac{AZ}{AB}=k.$$

Vậy

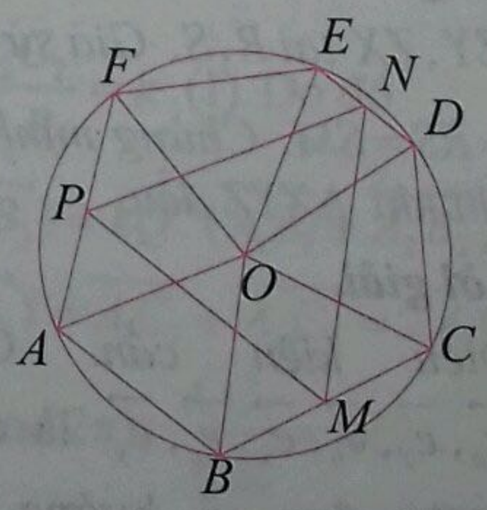
$$Q^{\alpha}\left(\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{AZ}\right)=Q^{\alpha}\left(\overrightarrow{BX}\right)+Q^{\alpha}\left(\overrightarrow{CY}\right)+Q^{\alpha}\left(\overrightarrow{AZ}\right)$$

$$=k\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CA}+k\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=k\vec{0}=\vec{0}.$$

Do đó $\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{AZ}=\vec{0}$.

Điều đó có nghĩa là các tam giác $\triangle ABC,\triangle XYZ$ có cùng trọng tâm.

Bài toán 2. *Lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O,R) và thoả mãn điều kiện $AB=CD=EF=R$. M,N,P theo thứ tự là trung điểm của BC,DE,FA. Chứng minh rằng tam giác $\triangle MNP$ đều.*



Lời giải.

Không mất tính tổng quát giả sử lục giác $ABCDEF$ có hướng dương.

Vì $AB=CD=EF=R$ nên các tam giác

$\triangle OAB$, $\triangle OCD$, $\triangle OEF$ là tam giác đều và cùng có hướng dương. Vậy:

$$2Q^{60^\circ}(\overrightarrow{MN}) = Q^{60^\circ}(2\overrightarrow{MN}) = Q^{60^\circ}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE})$$
$$= Q^{60^\circ}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE})$$
$$= Q^{60^\circ}(\overrightarrow{CD}) + Q^{60^\circ}(\overrightarrow{BO}) + Q^{60^\circ}(\overrightarrow{OE})$$
$$= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{MP}.$$

Điều đó có nghĩa là tam giác MNP đều (có hướng dương).

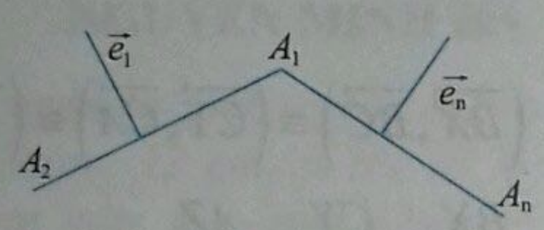
Bài toán 3. *Cho $n-$giác $A_1A_2...A_n$ và các vectơ đơn vị $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ... \overrightarrow{e_n}$ thoả mãn điều kiện:*

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) \equiv (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{A_2A_3}) \equiv ... \equiv (\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{A_nA_1}) \equiv -\frac{\pi}{2} (\text{mod } 2\pi).$$

Chứng minh rằng: $A_1A_2\overrightarrow{e_1} + A_2A_3\overrightarrow{e_2} + ... + A_nA_1\overrightarrow{e_n} = \vec{0}$.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát giả sử n-giác $A_1A_2...A_n$ có hướng dương.



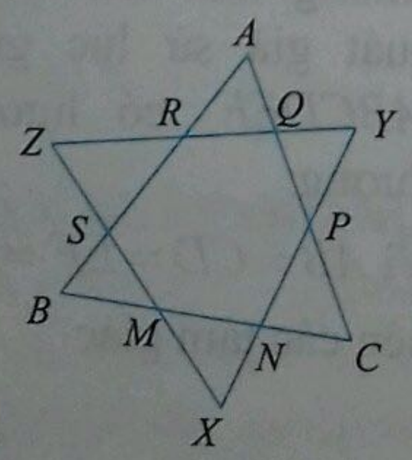
Dễ thấy $A_1A_2\overrightarrow{e_1} + A_2A_3\overrightarrow{e_2} + ... + A_nA_1\overrightarrow{e_n}$

$$= Q^{\frac{\pi}{2}}(A_1A_2\overrightarrow{e_1} + A_2A_3\overrightarrow{e_2} + ... + A_nA_1\overrightarrow{e_n})$$
$$= Q^{\frac{\pi}{2}}(A_1A_2\overrightarrow{e_1}) + Q^{\frac{\pi}{2}}(A_2A_3\overrightarrow{e_2}) + ... + Q^{\frac{\pi}{2}}(A_nA_1\overrightarrow{e_n})$$
$$= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}.$$

Chú ý. Kết quả trên được gọi là *định lí con nhím.*

Bài toán 4. *Cho hai $\Delta ABC, \Delta XYZ$. Đoạn BC theo thứ tự cắt các đoạn XZ, XY tại M, N. Đoạn CA theo thứ tự cắt các đoạn YX, YZ tại P, Q. Đoạn AB theo thứ tự cắt các đoạn ZY, ZX tại R, S. Giả sử $MN = NP = PQ = QR = RS = SM$. Chứng minh rằng ΔABC đều khi và chỉ khi ΔXYZ đều.*

Lời giải.



Điều kiện cần. Gọi $\overrightarrow{e_a}, \overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e_b}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_c}, \overrightarrow{e_y}$ là các vectơ đơn vị hướng ra ngoài lục giác $MNPQRS$ và theo thứ tự vuông góc với MN, NP, PQ, QR, RS, SM.

Vì $MN = NP = PQ = QR = RS = SM$ nên theo định lí con nhím $\overrightarrow{e_a} + \overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{e_b} + \overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_c} + \overrightarrow{e_y} = \vec{0}$ (1).

Vì tam giác ABC đều nên theo định lí con nhím: $\overrightarrow{e_a} + \overrightarrow{e_b} + \overrightarrow{e_c} = \vec{0}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z} = \vec{0}$ (3).

Áp dụng định lí con nhím cho tam giác XYZ, ta có: $YZ\overrightarrow{e_x} + ZX\overrightarrow{e_y} + XY\overrightarrow{e_z} = \vec{0}$ (4).

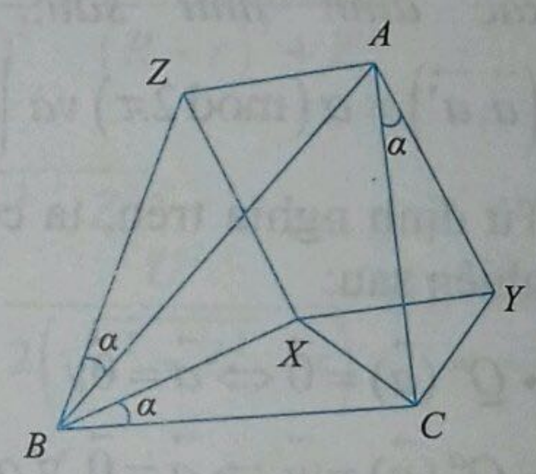
Từ (3) và (4) suy ra $YZ = ZX = XY$.

Nói cách khác tam giác XYZ đều.

Điều kiện đủ. Tương tự phép chứng minh điều kiện cần.

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC và các điểm X, Y, Z sao cho các tam giác XBC, YAC, ZBA đồng dạng cùng hướng. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{ZX}$.*

Lời giải.



Vì các tam giác XBC, YAC, ZAB đồng dạng cùng hướng nên tồn tại các số α, k sao cho:

$$(\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{AY}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{BZ}, \overrightarrow{BA}) \equiv \alpha (\text{mod } 2\pi);$$
$$\frac{BX}{BC} = \frac{AY}{AC} = \frac{BZ}{BA} = k.$$

Vậy $Q^\alpha(\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{XZ}) = Q^\alpha(\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BZ})$

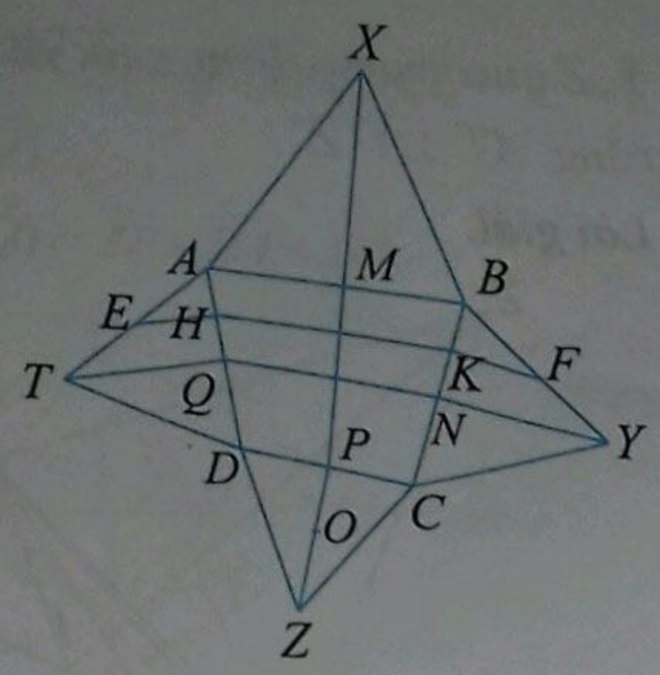
$$= Q^\alpha(\overrightarrow{AY}) + Q^\alpha(\overrightarrow{XB}) + Q^\alpha(\overrightarrow{BZ})$$
$$= k\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{CB} + k\overrightarrow{BA}$$
$$= k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = k.\vec{0} = \vec{0}.$$ Do đó $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{ZX}$.

Bài toán 6. *Về phía ngoài tứ giác $ABCD$ ta dựng các tam giác đều ABX, BCY, CDZ, DAT. E, F theo thứ tự là trung điểm của AT, BY. O là tâm của tam giác CDZ.*

1) Chứng minh rằng $XO \perp EF$.

2) Tính tỉ số $\frac{XO}{EF}$.

Lời giải. 1) Không mất tính tổng quát giả sử tứ giác $ABCD$ có hướng âm. Gọi M,N,P,Q theo thứ tự là trung điểmcủa AB,BC,CD,DA; H,K theo thứ tự là hình chiếu của E,F trên AD,BC.



Dễ thấy $(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{DA})\equiv(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MX})\equiv(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{ZP})$
$\equiv(\overrightarrow{KF},\overrightarrow{CB})\equiv 90^\circ(\text{mod}\,360^\circ)$;

$$\frac{HA}{HD}=\frac{KB}{KC}=\frac{1}{3};\frac{EH}{DA}=\frac{KF}{CB}=\frac{\sqrt{3}}{4};$$
$$\frac{AB}{MX}=\frac{CD}{ZP}=\frac{CD}{3OP}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Do đó $Q^{90^\circ}(\overrightarrow{EF})=Q^{90^\circ}(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KF})$

$$=Q^{90^\circ}\left(\overrightarrow{EH}+(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC})+\overrightarrow{KF}\right)$$
$$=Q^{90^\circ}(\overrightarrow{EH})+\frac{3}{4}Q^{90^\circ}(\overrightarrow{AB})+\frac{1}{4}Q^{90^\circ}(\overrightarrow{DC})+Q^{90^\circ}(\overrightarrow{KF})$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\overrightarrow{DA}+\frac{3}{4}.\frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{MX}+\frac{1}{4}.\frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{ZP}+\frac{\sqrt{3}}{4}\overrightarrow{CB}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB})+\frac{3}{4}.\frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{MX}+\frac{1}{4}.\frac{2}{\sqrt{3}}.3\overrightarrow{OP}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{PM}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{MX}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OP}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MX}+\overrightarrow{OP})=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OX}.$$ Vậy $XO\perp EF$.

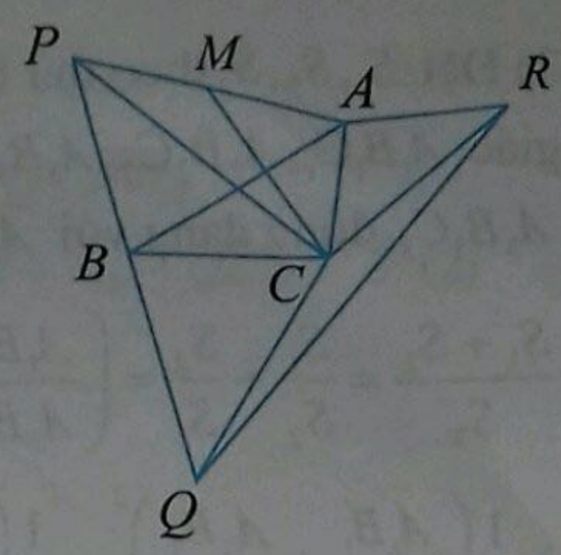
2) Theo phần 1, ta có

$$EF=\left|Q^{90^\circ}(\overrightarrow{EF})\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OX}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}OX.$$

Do đó $\dfrac{XO}{EF}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 7. *Cho tứ giác $ABCD$, O là trung điểm của CD. Dựng các điểm M,N sao cho các tam giác DAM,CNB,OAB đồng dạng cùng hướng. Chứng minh rằng tam giác ONM đồng dạng cùng hướng với ba tam giác trên.*

Lời giải. Vì các tam giác DAM,CNB,OAB đồng dạng cùng hướng nên tồn tại các số α, k sao cho:



$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})\equiv(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD})$$
$$\equiv(\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NC})$$
$$\equiv\alpha(\text{mod}\,2\pi);$$
$$\frac{AO}{AB}=\frac{AD}{AM}=\frac{NC}{NB}=k.$$

Từ đó, chú ý rằng $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CO}$, suy ra

$$=kQ^\alpha(\overrightarrow{NB})+kQ^\alpha(\overrightarrow{BA})+kQ^\alpha(\overrightarrow{AM})$$
$$=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{NO}.$$

Vậy tam giác ONM đồng dạng cùng hướng với ba tam giác DAM,CNB,OAB.

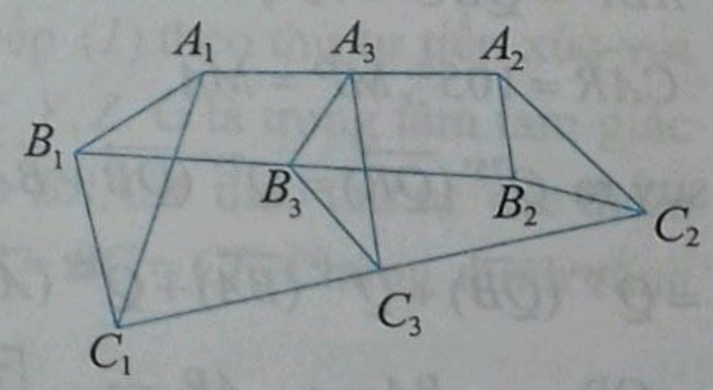
Bài toán 8. *Cho các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ đồng dạng cùng hướng. A_3,B_3,C_3 theo thứ tự là trung điểm của A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2. Chứng minh rằng:*

1) Tam giác $A_3B_3C_3$ đồng dạng cùng hướng với các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$.

2) $2S(A_3B_3C_3)\le S(A_1B_1C_1)+S(A_2B_2C_2)$.

Lời giải.

1) Vì các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ đồng dạng cùng hướng nên tồn tại các số α,k sao cho



$$(\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1C_1})\equiv(\overrightarrow{A_2B_2},\overrightarrow{A_2C_2})$$

$\equiv\alpha(\text{mod}\,2\pi)$; $\dfrac{A_1C_1}{A_1B_1}=\dfrac{A_2C_2}{A_2B_2}=k$ (1). Do đó

$$2kQ^\alpha(\overrightarrow{A_3B_3})=kQ^\alpha(2\overrightarrow{A_3B_3})=kQ^\alpha(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2})$$
$$=kQ^\alpha(\overrightarrow{A_1B_1})+kQ^\alpha(\overrightarrow{A_2B_2})=\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_2C_2}=2\overrightarrow{A_3C_3}.$$

Vậy $(\overrightarrow{A_3B_3},\overrightarrow{A_3C_3})\equiv\alpha(\text{mod}\,2\pi)$; $\dfrac{A_3C_3}{A_3B_3}=k$ (2).

Từ (1), (2) suy ra tam giác $A_3B_3C_3$ đồng dạng cùng hướng với các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.

2) Đặt S_1, S_2, S_3 theo thứ tự là diện tích các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$. Từ đó, chú ý rằng $A_3B_3C_3$ đồng dạng với $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$, suy ra

$$\frac{S_1+S_2}{S_3}=\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_3}=\left(\frac{A_1B_1}{A_3B_3}\right)^2+\left(\frac{A_2B_2}{A_3B_3}\right)^2$$

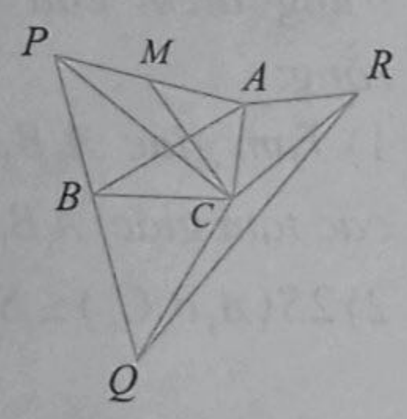
$$\geq\frac{1}{2}\left(\frac{A_1B_1}{A_3B_3}+\frac{A_2B_2}{A_3B_3}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{A_1B_1+A_2B_2}{A_3B_3}\right)^2 \quad (1)$$

Mặt khác vì $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}=2\overrightarrow{A_3B_3}$ nên $A_1B_1+A_2B_2\geq 2A_3B_3$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $S_1+S_2\geq 2S_3$.

Bài toán 9. *Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác ABP, BCQ, CAR thoả mãn các điều kiện $\widehat{PAB}=\widehat{BQC}=45°$; $\widehat{ABP}=\widehat{QBC}=75°$; $\widehat{CAR}=105°$; $\frac{AC}{AR}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Tính tỉ số $\frac{QR}{CM}$.*

Lời giải.



Không mất tính tổng quát giả sử tam giác ABC có hướng dương. Theo định lý sin:

$$\frac{QB}{CB}=\frac{BA}{BP}=\frac{\sin 75°}{\sin 60°}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{AR}{AC}.$$

Từ đó, chú ý rằng

$\widehat{ABP}=\widehat{QBC}=75°$;

$\widehat{CAR}=105°; MP=MA,$

suy ra $Q^{75°}(\overrightarrow{QR})=Q^{75°}(\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AR})$

$=Q^{75°}(\overrightarrow{QB})+Q^{75°}(\overrightarrow{BA})+Q^{75°}(\overrightarrow{AR})$

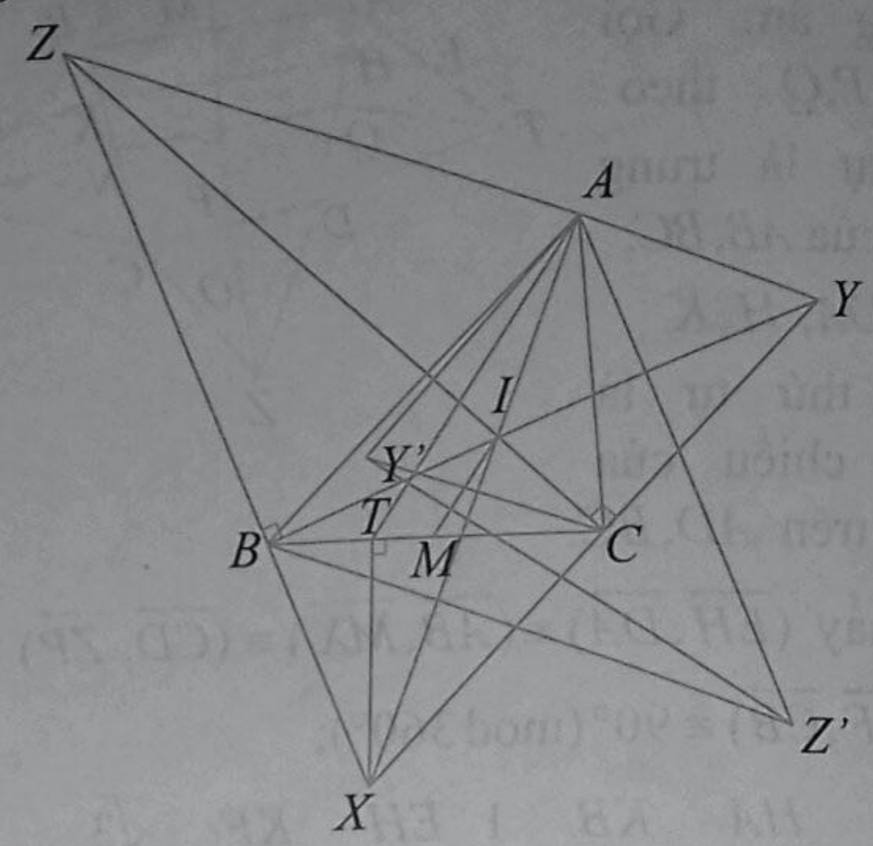
$=\frac{QB}{CB}\overrightarrow{CB}+\frac{BA}{BP}\overrightarrow{BP}+\frac{AR}{AC}\overrightarrow{CA}=\sqrt{\frac{3}{2}}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CA})$

$=\sqrt{\frac{3}{2}}(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CA})=\sqrt{\frac{3}{2}}.2\overrightarrow{CM}=\sqrt{6}.\overrightarrow{CM}.$

Vậy $\frac{QR}{CM}=\sqrt{6}$.

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC. $(X),(Y),(Z)$ theo thứ tự là các đường tròn bàng tiếp đối diện các đỉnh A,B,C. T là tiếp điểm của (X) và BC. Y',Z' theo thứ tự là điểm đối xứng của Y,Z qua trung điểm của AC,AB. Chứng minh rằng $AT\perp Y'Z'$.*

Lời giải.



Không mất tính tổng quát giả sử tam giác ABC có hướng dương. Gọi I là giao điểm của AX, BY, CZ; M là trung điểm của BC. Chú ý rằng $YAY'C, ZAZ'B$ là các hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{Y'Z'}=\overrightarrow{Y'Y}+\overrightarrow{YA}+\overrightarrow{AZ}+\overrightarrow{ZZ'}$

$=\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{AY}+\overrightarrow{YA}+\overrightarrow{AZ}+\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{ZB}=\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{ZB}.$

Dễ thấy $\widehat{YCI}=90°=\widehat{ZBI}$. Do đó $\frac{CY}{CI}=\frac{BZ}{BI}=k$.

Mặt khác $IM // AT \Rightarrow AT\perp Y'Z'$ (kết quả quen thuộc). Vậy

$Q^{90°}(\overrightarrow{Y'Z'})=Q^{90°}(\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{ZB})=Q^{90°}(\overrightarrow{CY})+Q^{90°}(\overrightarrow{ZB})$

$=\frac{CY}{CI}\overrightarrow{CI}+\frac{BZ}{BI}\overrightarrow{BI}=k\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{BI}\right)=k.2\overrightarrow{MI}//\overrightarrow{AT}.$

Bài toán 11. *Về phía trong hình bình hành $ABCD$ ta dựng các tam giác đều ABP, BCQ. H là giao điểm của đường thẳng qua P vuông góc với PD và đường thẳng qua Q vuông góc với QD. Chứng minh rằng $BH\perp AC$.*

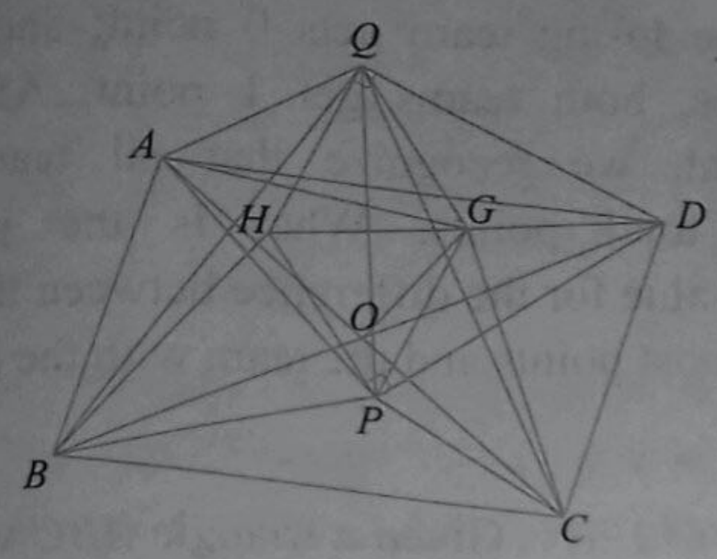
Lời giải.

Không mất tính tổng quát giả sử hình bình hành $ABCD$ có hướng dương. Gọi O là giao điểm của AC và BD; G tâm của tam giác đều DQP. Dễ thấy các tam giác BCQ, BPA không chỉ đều mà còn cùng có hướng dương (1). Từ (1), chú ý rằng $ABCD$ là hình bình hành, suy ra:

$Q^{60^\circ}(\overrightarrow{DQ}) = Q^{60^\circ}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ}) = Q^{60^\circ}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CQ})$

$= Q^{60^\circ}(\overrightarrow{AB}) + Q^{60^\circ}(\overrightarrow{CQ})$

$= Q^{60^\circ}(\overrightarrow{AB}) + Q^{60^\circ}(\overrightarrow{CQ}) = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DP}.$



Điều đó có ngĩa là tam giác DQP đều.

Từ đó, chú ý rằng $HP \perp DP; HQ \perp DQ$, suy ra G là trung điểm của DH. Kết hợp với O là trung điểm của DB, suy ra $BH // OG$ (2). Từ (1) suy ra các tam giác BQA, BCP bằng nhau và cùng có hướng dương. Từ đó, chú ý rằng tam giác GQP có hướng dương và $QG = PG$; $\widehat{QGP} = 120^\circ$, suy ra

$QA = PC$; $QG = PG$; $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QG}) - (\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PG})$

$\equiv (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{PC}) - (\overrightarrow{QG}, \overrightarrow{PG}) \pmod{360^\circ}$

$\equiv (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{CP}) + (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{PC}) - (\overrightarrow{QG}, \overrightarrow{PG})$

$\equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}) + 180^\circ - 120^\circ \pmod{360^\circ}$

$\equiv -60^\circ + 180^\circ - 120^\circ \equiv 0^\circ \pmod{360^\circ}$.

Do đó các tam giác QAG, PCG bằng nhau (cùng hướng). Vậy $GA = GC$. Từ đó, chú ý rằng $OA = OC$, suy ra $GO \perp AC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp AC$.

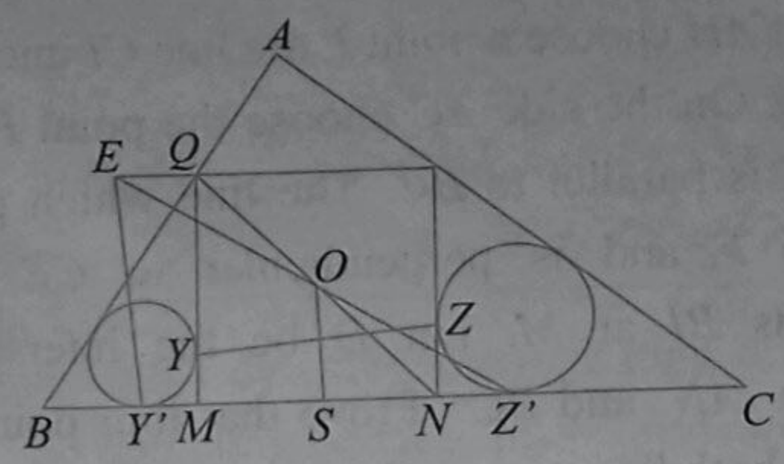
Bài toán 12. *Cho tam giác nhọn ABC. Các điểm M, N thuộc đoạn BC và các điểm P, Q theo thứ tự thuộc các đoạn CA, AB sao cho MNPQ là hình vuông. O là tâm của MNPQ. Y, Y' theo thứ tự là tiếp điểm của MQ, BM và đường tròn nội tiếp tam giác BMQ. Z, Z' theo thứ tự là tiếp điểm của NP, CN. S là trung điểm của Y'Z'. Chứng minh rằng $OS \perp YZ$.*

Lời giải. Gọi E là điểm thuộc tia đối của tia QP sao cho $\overrightarrow{QE} = \overrightarrow{Z'N}$. Rõ ràng $EQZ'N$ là hình bình hành. Từ đó, chú ý rằng O là trung điểm của NQ, suy ra O là trung điểm của $Z'E$. Kết hợp với S là trung điểm của Z'Y', ta có $\overrightarrow{Y'E} = 2\overrightarrow{SO}$ (1). Vậy

$Q^{90^\circ}(\overrightarrow{YZ}) = Q^{90^\circ}(\overrightarrow{YM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NZ})$

$= Q^{90^\circ}(\overrightarrow{YM}) + Q^{90^\circ}(\overrightarrow{MN}) + Q^{90^\circ}(\overrightarrow{NZ})$

$= \overrightarrow{YM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{Z'N} = \overrightarrow{Y'M} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QE} = \overrightarrow{Y'E}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp YZ$.

4. Các bài tập đề nghị

Để kết thúc, xin giới thệu một vài bài tập để các thầy cô giáo và các em học sinh rèn luyện kĩ năng giải toán bằng phép quay vectơ.

Bài toán 1. Lục giác $ABCDEF$ các các cặp cạnh đối song song và bằng nhau. Về phía ngoài lục giác ta dựng các tam giác đều ABX, CDY, EFZ. Chứng minh rằng tam giác XYZ đều.

Bài toán 2. Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác đều ABE, ACF. O là tâm của tam giác đều ABE. M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng tam giác COM vuông và có một góc bằng 60°.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC ($AB, AC > BC$). Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại X, Y, Z. G là trọng tâm tam giác XYZ. Trên các tia BA, CA theo thứ tự các điểm E, F sao cho $EB = BC = CF$. Chứng minh rằng $IG \perp EF$.

Bài toán 4. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). E, F theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng I, E, F thẳng hàng.

Bài toán 5. Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O, R) và thoả mãn điều kiện $AB = CD = EF$. Về phía ngoài lục giác ta dựng các tam giác đồng dạng ABM, BCN, CDP, DEQ, EFR, FAS và theo thứ tự cân tại M, N, P, Q, R, S. G_1, G_2 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác MPR, NQS. Chứng minh rằng ba điểm O, G_1, G_2 thẳng hàng.

PROBLEMS... (Tiếp theo trang 23)

Problem T8/511. Given a right triangle ABC with the right angle A and the altitude AH. On the line segment AH choose a point I, the line CI intersects AB at E. On the side AC choose the point F such that EF is parallel to BC. The line which passes through F and is perpendicular to CE at N intersects BI at M. Let D be the intersection between AN and BC. Prove that four points M, N, D, C both lies on a circle.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/511. Let x, y be real numbers. Find the minimum value of the expression

$$P=\sin^4 x\left(\sin^4 y+\cos^4 y+\frac{9}{8}\cos^2 x.\sin^2 2y\right)+\cos^4 x.$$

Problem T10/511. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying:

$$f(2f(x)+2y)=x+f(2f(y)+x),\ \forall x, y\in\mathbb{R}.$$

Problem T11/511. There are $n\,(n\geq 2)$ soccer teams attending a tournament. Each team will play with all other teams once. The winning team get 3 points, the losing team gets 0 point; and if the match ties, both teams get 1 point. After the tournament, we recognize that all teams got different total points. What is the possible minimal value for the difference between the team with the most points and the team with the least points?

Problem T12/511. Given a triangle ABC with I is the center of the excircle relative to the vertex A. This circle is tangent to BC, CA, AB respectively at M, N, P. Let E be the intersection between MN and BI, and F be the intersection between MP and CI. The line BC intersects AE, AF respectively at G, D. Show that AI is parallel to the line passing through M and the center of the Euler circle of AGD.

Translate by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

Bài toán 6. Cho $n-$giác đều $A_1A_2...A_n$ và điểm M. M_i là điểm đối xứng của M qua A_iA_{i+1} $(A_{n+1}=A_1)$. Chứng minh rằng các hệ điểm $\{A_i\}_{1\leq i\leq n}$, $\{M_i\}_{1\leq i\leq n}$ có cùng trọng tâm.

Bài toán 7. Cho các tam giác đều và cùng hướng $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$. Các điểm G_1, G_2, G_3 theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác $A_1C_2B_3, A_2C_3B_1, A_3C_1B_2$. Chứng minh rằng tam giác $G_1G_2G_3$ đều và cùng hướng với các tam giác đã cho.

Bài toán 8. Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng tam giác BCX thoả mãn điều kiện: $\widehat{XCB}=\alpha$; $\widehat{XBC}=\beta$ và tam giác CAY, ABZ cân tại Y, Z sao cho $\widehat{CYA}=2\beta$; $\widehat{AZB}=2\alpha$ $(\alpha+\beta>\widehat{BAC})$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{S(AYXZ)}{S(BCX)}=\dfrac{2YZ^2}{BC^2}$.

Bài toán 9. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC=BD$ và các điểm X, Y, Z, T sao cho các tam giác AXB, BYC, CZD, DTA đồng dạng cùng hướng và cân tại X, Y, Z, T. Chứng minh rằng $XZ\perp YT$.

Bài toán 10. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ và số α. Các điểm M_1, M_2 theo thứ tự chạy trên $(O_1), (O_2)$ sao cho $(\overrightarrow{O_1M_1}, \overrightarrow{O_2M_2})\equiv\alpha \pmod{2\pi}$. Dựng tam giác đều và có hướng dương MM_1M_2. Tìm quỹ tích M.

"SỐ HỌC" CỦA DIOPHANTUS TUYỆT PHẨM SAU CÙNG CỦA TOÁN HỌC CỔ HY LẠP LÚC XẾ BÓNG

NGUYỄN THỦY THANH

(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Sau cuộc khủng hoảng nặng nề về cơ sở, nền toán học Cổ Hy Lạp đã bước vào một thời kì cất cánh. Sự cất cánh đó đạt đến đỉnh cao vào giữa thế kỉ III SCN và từ đó nó đã có ảnh hưởng hết sức sâu rộng đến nền toán học của nhân loại.

Đó là thời kì sống và làm việc của một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của thời kì cổ đại, nhà toán học Diophantus xứ Alexandria với tác phẩm lừng danh muôn thuở mà Ông để lại có tên *"Số học"*.

Đây là thời điểm có tính chất bước ngoặt trong khoa học toán học bởi lẽ giờ đây sau cuộc khủng hoảng việc xây dựng toán học không còn dựa trên nền tảng hình học nữa mà là dựa trên nền tảng Số học…

1. Đôi nét về tiểu sử

Cho đến ngày nay, trang sử về cuộc đời của Diophantus là một trong những trang bí ẩn nhất và mờ nhạt nhất của lịch sử khoa học (LSKH). Ông sống vào thời kì nào?

Trong tác phẩm *"Các số đa giác"* của mình Diophantus có trích dẫn Hipsicles (thế kỉ II TCN) xứ Alexandria, nhà hình học Hy Lạp, tác giả của tập XIV (tập viết thêm) cho bộ *"Cơ sở Toán học"* (hay *"Các nguyên lý")* của Eulid. Do đó, có lẽ rằng Diophantus sống sau thế kỉ II TCN. Đây là mốc thời gian sớm nhất có thể! Mặt khác, nhà toán học Theo nius xứ Alexandria (khoảng năm 350 SCN) đã viết một chuyên luận khảo cứu *"Số học"* của Diophantus nên có lẽ Diophantus sống trước năm 350. Và đó là mốc muộn nhất về thời gian, khoảng thời gian giữa hai mốc kéo dài 500 năm. Sự "chính xác hóa" có thể được quãng đời của Diophantus dựa trên luận cứ rằng ở đầu tác phẩm *"Số học"* ông có viết *Lời đề tặng* cho một vị Dionysius "đáng kính nhất" của Ông. Rồi lần theo cứ liệu lịch sử người ta kết luận vị Dionysius đó không ai khác chính là vị giáo chủ Dionysius xứ Alexandria sống giữa thế kỉ III SCN. Từ đó số đông các nhà LSKH tạm bằng lòng rằng Diophantus sống giữa thế kỉ III SCN.

Việc dự đoán tuổi thọ của Diophantus có phần "dễ" hơn nhờ có những vần thơ khắc trên mộ chí của Ông. Bài thơ đó là:

Dưới nấm mồ yên nghỉ
Diophantus lừng danh
Một con người vĩ đại
Một phần sáu cuộc đời
Ở độ tuổi thiếu niên
Sống an nhàn thanh thản
Nửa quãng đời tiếp đó
Bước vào tuổi trưởng thành
Một phần bảy tiếp sau
Gia thất mới yên bề
Lại năm năm trôi qua
Sinh được con nối dõi
Cậu quý tử mệnh bạc
Sống bằng nửa đời cha
Buồn vì nỗi thương con
Bốn năm sau Ông tiếp
Đi vào cõi vĩnh hằng.

Những vầng thơ khắc trên mộ chí cũng là nội dung để viết nên phương trình tính tuổi thọ của

Ông. Nếu gọi tuổi thọ của Diophantus là x thì từ các điều kiện nói trong bài thơ ta có phương trình:

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x.$$ Từ đó $x=84$.

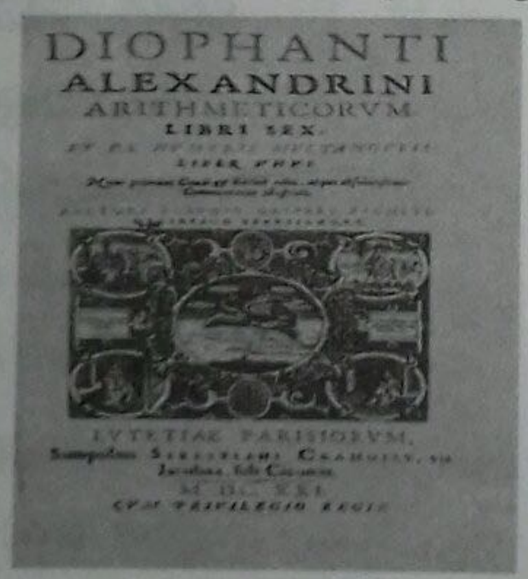
Nghĩa là Diophantus thọ 84 tuổi.

2. Tác phẩm "Số học" của Diophantus

Tác phẩm cơ bản của Diophantus là chuyên luận *"Số học"* mà theo khẳng định của tác giả gồm có mười ba (13) quyển. Tiếc thay, còn đến được với chúng ta chỉ nguyên vẹn sáu quyển bằng tiếng Hy Lạp. Theo nhà LSKH J. Stroik thì: *"Số học" là bộ sách chứa nhiều bản sắc khéo léo tinh xảo và là một trong những chuyên luận hấp dẫn nhất của Hy Lạp và La Mã cổ đại, nó vượt xa tầm nền toán học đương thời cả về độ sâu lẫn tầm rộng.*

Ta điểm qua nội dung của *"Số học"*. Trong lời nói đầu Diophantus thông báo rằng đây là *bộ bài tập* mà Ông biên soạn cho học trò của mình.

Về cơ bản, tác phẩm *"Số học"* nhằm trình bày việc giải các phương trình. Trong Quyển I tác giả trình bày các phương trình tuyến tính. Trong năm quyển còn lại Ông trình bày các dạng khác nhau của phương trình bậc hai thường là với nhiều ẩn số cùng với một số dạng đặc biệt của phương trình bậc ba. Điều đặc biệt là: *lời giải của các phương trình phải là số nguyên hoặc hữu tỉ.* Ngày nay ta gọi *phương trình diophant là phương trình đại số hai hoặc nhiều hơn hai ẩn hay hệ phương trình đại số với số ẩn nhiều hơn số phương trình với các hệ số nguyên và nghiệm thu được phải là hữu tỉ nguyên.*



Trang tiêu đề bản in cuốn sách số học Diophantus năm 1962

Chẳng hạn, phương trình $ax+by=1$ với a, b nguyên tố cùng nhau là phương trình diophant. Có lẽ phương trình diophant quen thuộc nhất là $x^2+y^2=z^2$ với lời giải là các bộ ba Pythagoras:

$$(3,4,5);\ (6,8,10);\ (5,12,13);\ (12,35,37);\ \ldots$$

Diophantus là người đầu tiên khảo cứu một cách toàn diện và hệ thống các phương trình vô định và do đó Ông trở thành người mở ra *chương mới của Đại số thường được gọi là Giải tích diophant. Nội dung của Giải tích diophant là Lý thuyết giải và tìm nghiệm nguyên của các phương trình vô định dạng* $Ax^2+Bx+C=y^2$, $Ax^3+Bx^2+Cx+D=y^2$ *hay của hệ các phương trình đó.*

Điều đặc trưng đối với Diophantus là Ông chỉ quan tâm đến nghiệm hữu tỉ dương. Các nghiệm vô tỉ bị Ông gọi là *"nghiệm vô thừa nhận"*. Mặc dù, có lẽ Diophantus không lạ lẫm gì đối với phép biểu diễn số vô tỉ. Chẳng hạn, trong bài giải của bài toán số 9 Quyển IV Ông viết rằng "số thu được là số vô tỉ". Nếu gặp nghiệm vô tỉ, Ông lần theo lời giải từ cuối lên đầu để tìm cách chọn một cách cẩn thận các hệ số sao cho lời giải thu được là hữu tỉ dương. Viện sĩ A.O. Gelfond cho rằng: *việc tìm nghiệm nguyên của các phương trình đại số với hệ số nguyên có hai ẩn trở lên là một trong những vấn đề khó nhất của Lý thuyết số.*

Phần lớn nội dung của "Số học" là tuyển tập các bài toán kèm theo lời giải. Trong sáu quyển đầu Diophantus công bố 189 bài toán với nội dung rất đa dạng về tìm nghiệm hữu tỉ dương của các phương trình vô định, trong đó mỗi bài đều có kèm lời giải.

Xung quanh các lời giải này cũng đã tồn tại những đánh giá thẳng thắn và tế nhị. Nhà toán học Đức H. Hankel (1874) cho rằng "*...Đối với một nhà toán học hiện tại thì sau khi nghiên cứu* 100 (*một trăm!*) *lời giải của Diophantus cũng khó lòng giải được bài toán thứ* 101...". Còn đối với hai nhà toán học Đức khác là O. Becker và J. Hofmann (1951) thì "*Diophantus không đưa ra một phương pháp tổng quát nào nhưng có lẽ Ông đã áp dụng vào mỗi bài mới một cách bất ngờ có chút thiếu tự*

nhiên…". Nhưng theo J. Stroik (1948) thì "*Thông thường các lời giải đó cực kì sắc sảo*".

Công lao đặc biệt của Diophantus trong "Số học" là trong tác phẩm đó Ông đã rũ bỏ được lớp vỏ bọc Đại số – Hình học tồn tại lâu đời ở Toán học Hy Lạp và nhờ đó Đại số cũng đã tìm được cho mình ngôn ngữ vốn có của nó và *hệ kí hiệu chữ xuất hiện*. Ý nghĩa của bước đi là rất to lớn. Chỉ trên cơ sở đó người ta mới xây dựng được phép tính bằng chữ và phát triển hệ thống các công thức… Đó là tiền đề để đến thế kỉ XV ở châu Âu bắt đầu nghiên cứu một cách ồ ạt hệ thống kí hiệu đại số cũng như việc hoàn tất quá trình xây dựng phép tính bằng chữ diễn ra vào cuối thế kỉ XVI đầu thế kỉ XVII trong các công trình của F. Viète (1540 – 1603) và R. Descartes (1596 – 1650).

Đồng thời với việc đưa và hệ thống kí hiệu, Diophantus cũng đã phát biểu rõ ràng các quy tắc về phép toán đại số. Chẳng hạn, phép nhân và phép chia các lũy thừa của ẩn số trong kí hiệu ngày nay có dạng: $x^m.x^n = x^{m+n}$, $x^m.\frac{1}{x^n} = x^{m-n}$, $\frac{1}{x^n}.\frac{1}{x^m} = \frac{1}{x^{m+n}}$, $m+n \le 6$. Mặc dù Diophantus chỉ tìm nghiệm hữu tỉ dương của các phương trình, nhưng trong các tính toán trung gian Ông cũng "thoải mái" *sử dụng quy tắc dấu của phép nhân các số âm*. Do đó thực chất Diophantus *đã mở rộng lĩnh vực số* ra toàn tập hợp (trường!) số hữu tỉ do vậy có thể thực hiện bốn phép tính số học không một chút trở ngại nào. Việc đưa kí hiệu vào toán học đã tạo điều kiện để Diophantus phát biểu các *Quy tắc cơ bản của Đại số*. Quy tắc thứ nhất là *quy tắc giản ước các số hạng đồng dạng* và Quy tắc thứ hai là *quy tắc biến đổi đồng nhất các phương trình*: "Có thể thêm vào hai vế của phương trình cùng một số hạng". Thực chất của Quy tắc thứ hai là phép chuyển các số hạng của phương trình từ vế này sang vế kia. Khi Al – Balbakki (? – 912) dịch *"Số học"* ra tiếng A Rập (thế kỉ X) thì Quy tắc thứ nhất có tên gọi A Rập là Al – Muqabala, còn Quy tắc thứ hai có tên gọi A Rập là Al – djabr. Về sau khi La tinh hóa, tên gọi của Quy tắc thứ hai trở thành *Algebra*. Đó là tên gọi bất tử của *Đại số* mà ta dùng và có thể vì vậy mà có người xem Diophantus là "*người sáng tạo ra Đại số Hy Lạp*". Trở lên ta thấy ở Diophantus môn *Đại số cổ đại* đã đạt đến cực thịnh. Do vậy, người ta không quan ngại gì khi gọi Đại số này là *Đại số Diophantus*.

Một điều cũng chắc chắn là *"Số học"* của Diophantus cũng đã theo bước chân các đoàn lạc đà cùng các đoàn thương nhân đến tận các đô thị sầm uất xứ Ba Tư, Ấn Độ và Trung Á,… rồi từ đó đến với lục đại Châu Âu và lan rộng nữa.

3. "Số học" với Bài toán Fermat

Ở Châu Âu Giáo sư R. Bombelli (1530 – 1572) của trường Đại học Bologna đã được làm quen với tác phẩm *"Số học"* tại thư viện Vatican. Theo lời R. Bombelli thì sau khi đọc qua tác phẩm đó, Ông khẳng định rằng tác giả của tác phẩm *"rất thông thái trong môn Số học"*. Và, R. Bombelli quyết định cùng với một nhà toán học khác dịch và công bố tác phẩm Số học ra tiếng La tinh.

R. Bombelli
(1530 – 1572)

Điều đặc biệt là chính R. Bombelli đã trích từ *"Số học"* của Diophantus 143 bài toán để đưa vào trong tác phẩm *"Đại số"* của Ông xuất bản năm 1572 sau đó. Vào năm 1621, ở châu Âu xuất hiện bản dịch mới *"Số học"* ra tiếng La tinh đầy đủ và được bình luận khảo cứu chi tiết do Bachet de Meziac đảm nhận. Người ta đánh giá rằng lần xuất bản này là rất hoàn thiện không chỉ nhờ chất lượng của bản dịch mà còn do những chú giải cặn kẽ của Bachet. Nhờ đó mà các phương pháp của Diophantus được truyền bá rộng rãi ở Châu Âu và có ảnh hưởng to lớn đối với P. Fermat (1601 – 1665) và nhiều nhà toán học khác.

Bên lề một trang của bản dịch *"Số học"* mà mình có P. Fermat đã có *những ghi chú nổi tiếng được con trai Ông công bố năm* 1670. Trong những ghi chú đó người ta thấy toát ra một nội dung có thể phát biểu dưới dạng *"Với mọi số tự nhiên* $n > 2$

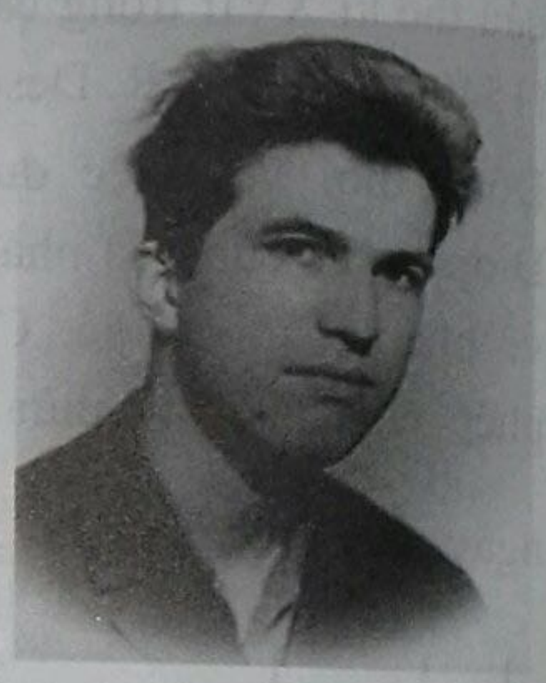
phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên dương".

Về sau người ta gọi mệnh đề này là *định lý lớn Fermat*, được xuất hiện khoảng 1630. Vậy Fermat đã ghi chú những gì? Trên lề trang sách ở Quyển II của *"Số học"* cạnh Đề bài toán số 8: *"Phân tích một bình phương cho trước thành tổng hai bình phương"* P. Fermat ghi chú rằng: "Ngược lại, không thể khai triển một lập phương thành tổng hai lập phương, một trùng phương thành tổng hai trùng phương và nói chung mọi lũy thừa lớn hơn bình phương thành tổng hai lũy thừa có cùng số mũ". Tiếp đó ông ghi thêm: *"Và tôi đã tìm được một chứng minh tuyệt vời cho mệnh đề này nhưng lề sách quá hẹp để trình bày phép chứng minh ấy".*

Đó là bối cảnh ra đời của Định lý lớn Fermat. Khoảng năm 1850 Viện Hàn lâm Khoa học Paris đã treo một Giải thưởng ba nghìn franc cho chứng minh Định lý lớn Fermat. Năm 1907 ở Đức đã công bố giải thưởng một trăm nghìn Mác Đức cho ai chứng minh được định lý đó. Sau nhiều lần lạm phát ở Đức giải thưởng đó đã bãi bỏ từ lâu. Cuối cùng, sau hơn ba thế kỉ mò mẫm và do dự: Năm 1993 Định lý lớn Fermat đã được nhà toán học Anh Andrew Wiles (sinh năm 1953) chứng minh. Trong lịch sử Toán học hiếm có một tác phẩm nào có sức hấp dẫn các nhà toán học mọi thời đại như *"Số học"* của Diophantus. Đặc biệt, trong danh mục 23 bài toán thế kỉ của mình, nhà toán học vĩ đại Đức là D. Hinbert (1862 – 1943) đã đưa vấn đề về tính giải được của Phương trình diophant vào bài toán thứ 10: *Giả sử cho phương trình diophant với các ẩn tùy ý và với hệ số hữu tỉ nguyên. Hãy chỉ ra phương pháp tổng quát mà theo đó sau một số hữu hạn phép toán có thể biết được phương trình đã cho có nghiệm hữu tỉ nguyên hay không.*

Andrew Wiles
sinh năm 1953

Vào năm 1970, nhà toán học Nga Yuri Matiyasevich (sinh năm 1947) đã *xác lập được tính không giải được về mặt thuận toán đối với bài toán thứ mười của Hilbert* lúc nhà toán học này chỉ mới hai mươi ba tuổi và cũng chỉ vừa mới tốt nghiệp khoa Toán – Cơ ĐHTH Leningrad (Liên Xô) được một năm. Hiện nay Yuri Matiyasevich là Viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Cộng hòa Liên bang Nga. Những vấn đề trên chỉ mới là những vấn đề được rút ra từ sáu quyển đầu của *"Số học"*.



Yuri Matiyasevich
sinh năm 1947

Không biết đời sống toán học đã và sẽ thế nào nếu trước đây tìm đủ hoặc mai sau người ta tìm tiếp được bảy quyển còn lại của *"Số học"*. Chắc chắn không ai có chút nghi ngờ gì về niềm tin vinh quang lớn lao mà nền toán học thế giới dành cho Diophantus, đại biểu xuất sắc nhất của Đại số thời Cổ điển – Đại số Diophantus. Cùng với đó, chuyên luận *"Số học"* của Ông có lẽ là tác phẩm vĩ đại sau cùng của nền toán học Hy Lạp cổ đại lúc xế bóng đến được với chúng ta. Khó có thể hình dung nền toán học trong những thế kỉ tiếp sau Thời Trung cổ huyền bí phát triển thế nào nếu các nhà bác học Phương Đông và Châu Âu trung cổ không sở hữu kho báu của nền Khoa học Cổ Hy Lạp.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 52

Problem. *Find all positive integers n such that $n!+2019$ is a perfect square (where $n!$ denotes the product of all integers from 1 to n).*

Solution:

For $n = 1, 2$, one has $n!+2019 = 2020, 2021$, respectively, are not perfect squares.

For $n = 3$, one has $n!+2019 = 2020 = 45^2$.

For $n \geq 4$, it is clear that $n!$ is divisible by 4. This gives $n! + 2019$ leaves remainder 3 when divided by 4, and therefore $n!+2019$ cannot be a perfect square. In conclusion, the only solution is $n = 3$.

Remark: The problem and the solution are both collected from the IMSO 2019, organized at Hanoi.

TỪ VỰNG

perfect square : *số chính phương*

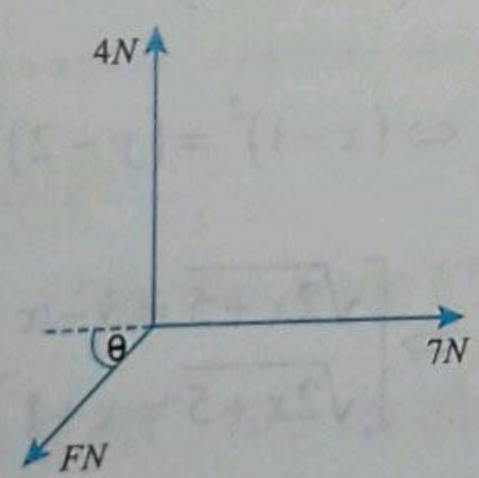
remainder : *phần dư*

NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 49

Bài toán. *Một hạt ở vị trí cân bằng trên một mặt bàn nhẵn nằm ngang khi có sự tác động của ba lực như hình vẽ. Tìm phương của lực F (nghĩa là đi xác định góc θ).*



Lời giải. Vì hạt ở vị trí cân bằng nên hợp lực của các lực tác động lên nó bằng 0, nghĩa là nó bằng 0 theo cả phương x và phương y. Do đó $F.\cos\theta = 7$ và $F.\sin\theta = 4$. Từ đó $\dfrac{F.\sin\theta}{F.\cos\theta} = \dfrac{4}{7}$, hay $\tan\theta = \dfrac{4}{7}$.

Vậy $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{7}\right) \approx 29,74^0$ (làm tròn đến 2 chữ số thập phân).

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Đào Thị Khánh Nhi*, 10 Toán 1, *Nguyễn Thị Quỳnh Nhi*, 10 Toán 2, *Văn Lâm Thanh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

Bài toán 32. *Giải phương trình*

$$x^2-4x-8+4\sqrt{2x+5}=0. \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x\ge -\frac{5}{2}$.

Cách 1. PT (1)

$\Leftrightarrow -(2x+5)+4\sqrt{2x+5}+x^2-2x-3=0.$

$\Delta'_{\sqrt{2x+5}}=4+x^2-2x-3=x^2-2x+1=(x-1)^2.$

Vậy $(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+5}=\frac{-2+x-1}{-1}=3-x\\ \sqrt{2x+5}=\frac{-2-x+1}{-1}=x+1\end{array}\right.$.

*) $\sqrt{2x+5}=3-x\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3\\ 2x+5=(3-x)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3\\ x^2-8x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3\\ \left[\begin{array}{l}x=4-2\sqrt{3}\\ x=4+2\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}.$

*) $\sqrt{2x+5}=x+1\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ 2x+5=(x+1)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ x^2=4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ x=\pm 2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm:

$x=4-2\sqrt{3}$ và $x=2$.

Cách 2.

PT (1) $\Leftrightarrow 4-4\sqrt{2x+5}+2x+5=x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{2x+5}\right)^2=(x-1)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+5}=3-x$ hoặc $\sqrt{2x+5}=x+1$.

*) $\sqrt{2x+5}=3-x\Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}.$

*) $\sqrt{2x+5}=x+1\Leftrightarrow x=2.$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x=4-2\sqrt{3}$ và $x=2$.

Cách 3.

PT (1) $\Leftrightarrow (x+1)^2-4(x+1)=2x+5-4\sqrt{2x+5}.$

Đặt $u=x+1,\ v=\sqrt{2x+5}$ ta có:

$u^2-4u=v^2-4v\Leftrightarrow (u-v)(u+v-4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}v=u\\ v=4-u\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+5}=3-x\\ \sqrt{2x+5}=x+1\end{array}\right.$

*) $\sqrt{2x+5}=3-x\Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}.$

*) $\sqrt{2x+5}=x+1\Leftrightarrow x=2.$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x=4-2\sqrt{3}$ và $x=2$.

Cách 4. Đặt $\sqrt{2x+5}=y$ ta có hệ phương trình

$\begin{cases}x^2-4x-8=-4y\\ 2x+5=y^2\end{cases}\Rightarrow x^2-2x-3=y^2-4y$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=(y-2)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=3-x\\ y=x+1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+5}=3-x\\ \sqrt{2x+5}=x+1\end{array}\right.$.

*) $\sqrt{2x+5}=3-x\Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}.$

*) $\sqrt{2x+5}=x+1\Leftrightarrow x=2.$

Cách 5.

(1) $\Leftrightarrow (x+1)^2-6x-9=-4\sqrt{-4(x+1)+6x+9}.$

Đặt $y+1=\sqrt{-4(x+1)+6x+9}$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x+1)^2-6x-9=-4(y+1)\\ (y+1)^2-6x-9=-4(x+1)\end{cases}$.

Trừ theo vế các phương trình của hệ trên ta có:

$$(x-y)(x+y+2)=4(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=2-x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+5}=3-x \\ \sqrt{2x+5}=x+1 \end{array}\right..$$

*) $\sqrt{2x+5}=3-x \Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}$.

*) $\sqrt{2x+5}=x+1 \Leftrightarrow x=2$.

Cách 6. Đặt $\sqrt{2x+5}=y+1$ ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x^2-4x+4y-4=0 \\ y^2+2y-2x-4=0 \end{cases}$.

Trừ theo vế các phương trình của hệ trên ta có:

$$(x-y)(x+y)-2(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2-x \\ y=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+5}=3-x \\ \sqrt{2x+5}=x+1 \end{array}\right..$$

*) $\sqrt{2x+5}=3-x \Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}$.

*) $\sqrt{2x+5}=x+1 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x=4-2\sqrt{3}$ và $x=2$.

PHẠM DUY KHÁNH

(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

➢***Nhận xét.*** Ngoài 6 cách giải của bạn *Phạm Duy Khánh*, người giới thiệu đề toán, Tòa soạn còn nhận được thêm một số lời giải tốt của các bạn: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Nội.** *Nguyễn Duy Thái*, GV THCS Đậu Liêu, TX. Hồng Lĩnh, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Xuân Tiến*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà, **Quảng Trị**; *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre, **Bến Tre**.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 34 dưới đây về Tòa soạn TH&TT trước ngày 29.2.2020.

BÀI TOÁN 34. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4}.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

****

CÁCH XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU...

(Tiếp theo trang 17)

- Trong trường hợp $n=2k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ việc xét dấu của $g(x)=[f(h(x))]^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ là xét dấu của $h'(x).f'(h(x)).f(h(x))$ và cũng không phụ thuộc vào n.

- Khi đề bài cho bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ hoặc bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ bằng cách làm giống với đề cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ hoặc đồ thị hàm số $y=f'(x)$ chúng ta hoàn toàn xét được tính đơn điệu và điểm cực trị của các hàm hợp trên.

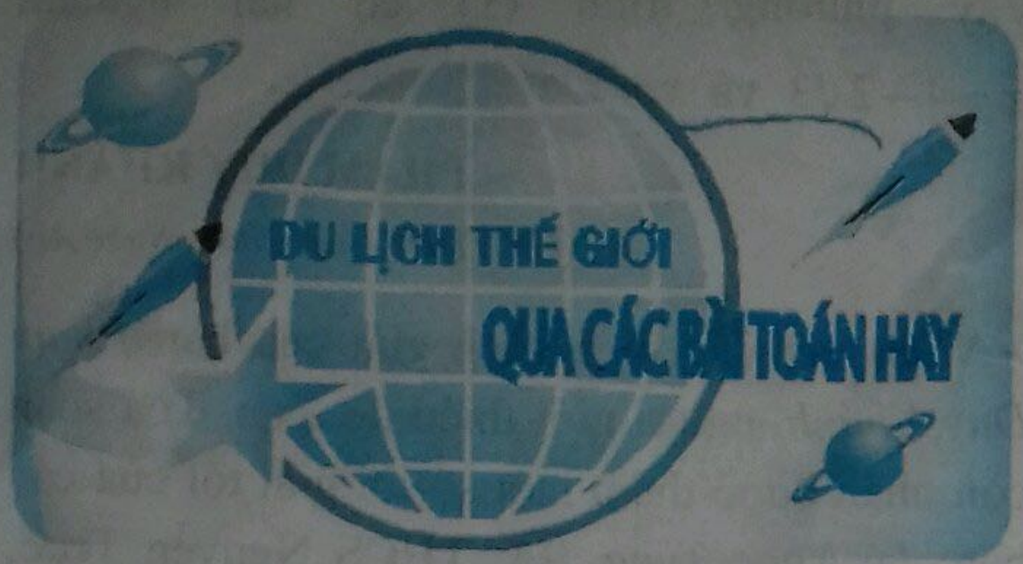
- Hơn nữa việc nghiên cứu bài toán trên sẽ cho chúng ta tìm được số nghiệm của phương trình $[f(h(x))]^n=g(m)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ với m là tham số.

BÀI TẬP

1. Câu 33 và Câu 48 (Mã đề 103) và các câu tương tự ở các mã đề khác trong đề thi THPT Quốc gia môn Toán 2019.

2. Như thí dụ 4 nhưng $h(x)=3-x$.

3. Như thí dụ 5 nhưng $h(x)=x^2$.



Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 509, T11.2019.

Bài 40 (IMO Shortlist 1997). *Cho lục giác lồi ABCDEF sao cho AB = BC, CD = DE, EF = FA. Chứng minh rằng* $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{3}{2}$.

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Lời giải. (Theo lời giải của bạn *Nguyễn Xuân Tiến*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**).

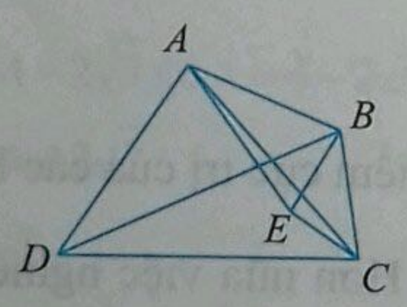
Ta có bổ đề (*BĐT Ptolemy*): *Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng:*

$$AB.CD + BC.DA \ge AC.BD.$$

Chứng minh. Dựng điểm E sao cho:

$$\Delta BCD \backsim \Delta BEA \Rightarrow \frac{BA}{EA}=\frac{BD}{CD} \Rightarrow BA.CD = EA.BD \,(1)$$

Do $\Delta BCD \backsim \Delta BEA$ nên



$\frac{BA}{BD}=\frac{BE}{BC}, \widehat{ABD}=\widehat{EBC}$

$\Rightarrow \Delta EBC \backsim \Delta ABD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{EC}{BC}=\frac{AD}{BD}$

$\Rightarrow AD.BC = EC.BD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra:

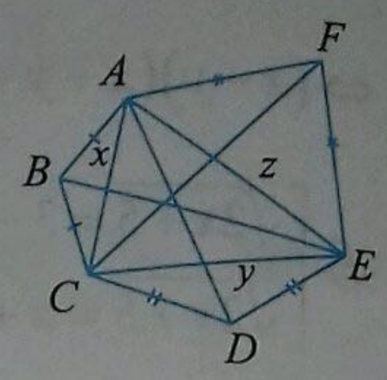
$$BA.CD + AD.BC = EA.BD + EC.BD$$
$$= (EA+EC)BD \ge AC.BD.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ E, A, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\widehat{BAE}=\widehat{BAC} \Leftrightarrow \widehat{BAC}=\widehat{BDC}$ (do $\Delta BCD \backsim \Delta BEA$ nên $\widehat{BAE}=\widehat{BDC}$) $\Leftrightarrow$ tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Quay lại bài toán. Đặt $AC = x$, $CE = y$, $EA = z$ (x, y, z dương). Áp dụng BĐT Ptolemy cho tứ giác $ACEF$, ta có: $AC.EF + CE.AF \ge AE.CF$

$\Leftrightarrow (x+y)FA \ge FC.z$ (do $EF = FA$)

$\Leftrightarrow \frac{FA}{FC}\ge\frac{z}{x+y}$. Tương tự, ta



có: $\frac{DE}{DA}\ge\frac{y}{z+x}, \frac{BC}{BE}\ge\frac{x}{y+z}$.

Do đó:

$$\frac{FA}{FC}+\frac{DE}{DA}+\frac{BC}{BE}\ge\frac{z}{x+y}+\frac{y}{z+x}+\frac{x}{y+z}.$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{z}{x+y}+\frac{y}{z+x}+\frac{x}{y+z}\ge\frac{3}{2}$ (3).

(3) chính là bất đẳng thức Nesbitt quen thuộc. Ta xét một cách chứng minh BĐT Nesbitt (3).Ta có:

$$A=\frac{z}{x+y}+\frac{y}{z+x}+\frac{x}{y+z}=\frac{z^2}{xz+yz}+\frac{y^2}{yz+yx}+\frac{x^2}{xy+xz}$$
$$\overset{\text{BĐT Schwarz}}{\ge}\frac{(x+y+z)^2}{2(xz+yz+zx)}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2.\frac{(x+y+z)^2}{3}}=\frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=y=z \\ AB=BC, CD=DE, EF=FA \\ ACEF, ABCE, DCAE \text{ là các tứ giác nội tiếp} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow ABCDEF$ là lục giác đều.

Nhận xét. Đa số các bạn làm như cách giải trên. Ngoài bạn *Tiến*, các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nam:** *Phan Thế Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý; **Quảng Bình:** *Lê Đức Hạnh*, 10 Toán 2, *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Ngãi:** *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 29.2.2020.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 42. Gọi A là tập hợp khác rỗng các số nguyên dương sao cho nếu $a \in A$ thì $4a \in A$ và $\left[\sqrt{a}\right] \in A$ (ở đây $[a]$ là kí hiệu số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng a). Chứng minh rằng A là tập hợp tất cả các số nguyên dương.

HOÀNG CHI (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM !

(Đề đăng trên TH&TT số 507, tháng 9 năm 2019)

Phân tích sai lầm: Cả 2 lời giải (của 2 học sinh) đưa ra đều sai:

- Mặc dầu $f(m).f(n)<0$ nhưng hàm số $f(x)$ không liên tục trên (m,n) nên không thể suy ra PT $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(m;n)$. Đây là lí do mà học sinh 1 mắc phải.

- Mặt dầu có sự hiện diện x^3 trong PT(*) nhưng nếu $a+b+c+d=0$ thì (*) có thể chỉ là PT bậc 2. Đây là lí do mà học sinh 2 mắc phải.

Lời giải đúng. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a<b<c<d$. Đặt $f(x)=\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}+\frac{c}{c-x}+\frac{d}{d-x}$

(hàm này liên tục trên các khoảng:

$(-\infty;a),(a;b),(b;c),(c,d),(d;+\infty)$).

Theo nguyên lí Dirichlet thì luôn tồn tại 2 số cùng dấu trong 4 số *a, b, c, d*.

TH1: Với $a<b<0$ thì ta có:

+) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$, điều này có nghĩa là tồn tại số thực $a<m<\frac{a+b}{2}$ sao cho $f(m)>0$.

+) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=-\infty$, điều này có nghĩa là tồn tại số thực $\frac{a+b}{2}<n<b$ sao cho $f(n)<0$.

Vì $f(m).f(n)<0$ nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(m;n)\subset(a;b)$.

TH2: Với $0<c<d$ thì ta có:

+) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=-\infty$, điều này có nghĩa là tồn tại số thực $c<m<\frac{c+d}{2}$ sao cho $f(m)<0$.

+) $\lim\limits_{x\to d^-} f(x)=+\infty$, điều này có nghĩa là tồn tại số thực $\frac{c+d}{2}<n<d$ sao cho $f(n)>0$.

Vì $f(m).f(n)<0$ nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(m;n)\subset(c;d)$. +)

Nhận xét. Đã không có bạn nào phát hiện được sai lầm.

KIHIVI

CÓ ĐÚNG KHÔNG ?

Trong tiết ôn tập chương khảo sát hàm số của lớp 12A, thầy giáo hứa sẽ cộng thêm 1 điểm cho học sinh nào giải đúng được bài toán sau đây, câu hỏi ở mức vận dụng cao. Đề bài như sau:

"*Cho hàm số* $y=\frac{x^2-mx-3}{x^2+x+1}$. *Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị lớn nhất không vượt quá 2*

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9".

Chưa được ba phút, bạn *Nam* (học sinh giỏi nhất môn Toán của lớp) xung phong lên bảng với một lời giải "không thể gọn hơn được" như sau:

Vì giá trị lớn nhất của y không vượt quá 2, tức là $y\le 2,\forall x\in\mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$$x^2-mx-3\le 2x^2+2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$$

hay $x^2+(m+2)x+5\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Vế trái là một tam thức bậc hai, để thỏa mãn yêu cầu thì: $\Delta\le 0\Leftrightarrow(m+2)^2-20\le 0\Leftrightarrow -2-2\sqrt{5}\le m\le -2+2\sqrt{5}$.

Do m nguyên nên $m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Do đó có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đáp án cần chọn là D.

Cả lớp trầm trồ khen ngợi và tán thưởng bằng một tràng pháo tay giòn giã. Đợi tràng pháo tay kết thúc, thầy giáo biểu dương tinh thần ham học của em *Nam*, nhất là việc liên hệ kiến thức đã học. Sau đó, cũng rất nhanh chóng, thầy giáo hỏi cả lớp: "*Theo các em lời giải đã chính xác chưa*". Cả lớp ngơ ngác! Thầy nói tiếp: "*Bài này đáp án chỉ có 8 giá trị nguyên của m thôi. Đáp án của bài toán này là phương án* C." Cả lớp bắt đầu có những hoang mang, bạn thì cẩn thận đếm lại, bạn thì cẩn thận kiểm tra các bước biến đổi, bạn thì kiểm tra xem bạn *Nam* có tính nhầm ở đâu không, nhưng không bạn nào phát hiện được sai lầm. Các bạn đọc thân mến, các bạn hãy giúp bạn *Nam* và lớp 12A chỉ ra sai lầm trong lời giải trên nhé. Và lời giải đúng của các bạn là gì?

TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 511 (1.2020)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, THÙY LINH
Trị sự, phát hành: THÙY LINH, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: THÙY LINH

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chân trời sáng tạo

BỘ SÁCH GIÁO KHOA
CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

DANH MỤC BỘ SÁCH LỚP MỘT

SÁCH HỌC SINH

1. Tiếng Việt 1, tập một
2. Tiếng Việt 1, tập hai
3. Toán 1
4. Đạo đức 1
5. Tự nhiên và Xã hội 1
6. Âm nhạc 1
7. Mĩ thuật 1
8. Hoạt động trải nghiệm 1
9. Giáo dục thể chất 1
10. Family and Friends 1 (National Edition), Student book

SÁCH GIÁO VIÊN

1. Tiếng Việt 1, tập một - SGV
2. Tiếng Việt 1, tập hai - SGV
3. Toán 1 - SGV
4. Đạo đức 1 - SGV
5. Tự nhiên và Xã hội 1 - SGV
6. Âm nhạc 1 - SGV
7. Mĩ thuật 1 - SGV
8. Hoạt động trải nghiệm 1 - SGV
9. Giáo dục thể chất 1 - SGV
10. Family and Friends 1 (National Edition), Teacher Guide

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI TP. ĐÀ NẴNG
Địa chỉ: 771 Nguyễn Hữu Thọ, P. Khuê Trung, Q. Cẩm Lệ, TP. Đà Nẵng
Điện thoại: (0236).3787877 - Fax: (0236).3787368

Chúc mừng năm mới

HẠNH PHÚC
AN KHANG
THỊNH VƯỢNG

2020

Canh Tý

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT1M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2020

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng