TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

2 2020
Số 512

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Nhà toán học Đức Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939)

Cảnh đẹp Hannover (CHLB Đức)

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chân trời sáng tạo

BỘ SÁCH GIÁO KHOA CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

DANH MỤC BỘ SÁCH LỚP MỘT

SÁCH HỌC SINH

1. Tiếng Việt 1, tập một
2. Tiếng Việt 1, tập hai
3. Toán 1
4. Đạo đức 1
5. Tự nhiên và Xã hội 1
6. Âm nhạc 1
7. Mĩ thuật 1
8. Hoạt động trải nghiệm 1
9. Giáo dục thể chất 1
10. Family and Friends 1 (National Edition), Student book

SÁCH GIÁO VIÊN

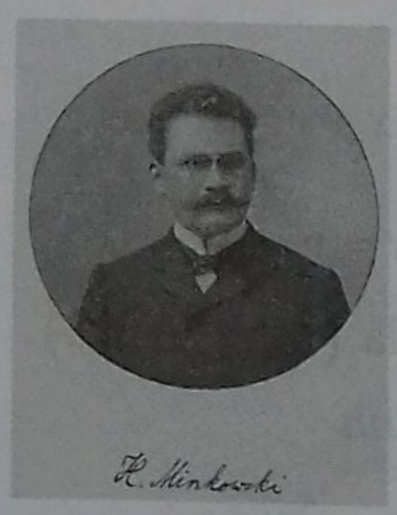
1. Tiếng Việt 1, tập một – SGV
2. Tiếng Việt 1, tập hai – SGV
3. Toán 1 – SGV
4. Đạo đức 1 – SGV
5. Tự nhiên và Xã hội 1 – SGV
6. Âm nhạc 1 – SGV
7. Mĩ thuật 1 – SGV
8. Hoạt động trải nghiệm 1 – SGV
9. Giáo dục thể chất 1 – SGV
10. Family and Friends 1 (National Edition), Teacher Guide

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG TRONG GIẢI TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

BÙI MINH TRUNG
(GV THCS Mỹ Long Nam, Trà Vinh)

I. GIỚI THIỆU SƠ LƯỢC VỀ MINKOWSKI



Hermann Minkowski (sinh ngày 22 tháng 6 năm 1864 tại Kaunas, Litva – Mất ngày 12 tháng 1 năm 1909, tại *Göttingen)* là một *nhà toán học Đức* gốc Litva, người đã phát triển *hình học của các số* và đã sử dụng phương pháp hình học để giải các bài toán khó trong *Lý thuyết số, Vật lý toán* và *Lý thuyết tương đối.*

Hermann Minkowski học ở Đại học *Berlin* và *Königsberg,* nơi ông nhận học vị tiến sĩ năm 1885 dưới sự hướng dẫn của *Ferdinand von Lindemann.* Khi còn là sinh viên tại Königsberg, năm 1883 ông đã được nhận giải thưởng toán học của Viện Hàn lâm khoa học Pháp cho các công trình về lý thuyết các *dạng toàn phương.*

Hermann Minkowski đã dạy tại Đại học Bonn, Göttingen, Königsberg và Zurich. Tại Viện Bách khoa Liên bang (Federal Polytechnic Institute), nay là *ETH Zurich*, ông là một trong những thầy giáo của *Einstein.*

II. BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI

• Dạng tổng quát:

Cho hai bộ số thực $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ thì ta luôn có:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+....+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\geq\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+...+b_n)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi tồn tại $t\in\mathbb{R}$ sao cho $a_i=t.b_i$ $(i=1,2,...,n)$ hoặc $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=....=\frac{a_n}{b_n}$ (với $b_i\neq 0$).

• Dạng cụ thể:

- Cho hai bộ số thực (a,b); (c,d), ta có:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi tồn tại $k\in\mathbb{R}$ sao cho $a=kb, c=kd$ hoặc $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (với $bd\neq 0$).

- Cho hai bộ số thực (a,b,c); (d,e,f), ta có:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{e^2+f^2}$$
$$\geq\sqrt{(a+c+e)^2+(b+d+f)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi tồn tại $r\in\mathbb{R}$ sao cho $a=rb, c=rd, e=rf$ hoặc $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ (với $bdf\neq 0$).

Để chứng minh các BĐT trên ta có thể sử dụng BĐT Bunyakovsky.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI

1. Giải phương trình

Thí dụ 1.1. *Giải phương trình*:

$$\sqrt{x^2+12x+61}+\sqrt{x^2-14x+113}=\sqrt{338}.$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}x^2+12x+61\geq 0\\ x^2-14x+113\geq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+6)^2+25\geq 0\\ (x-7)^2+64\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow D=\mathbb{R}.$$

PT đã cho tương đương với

$$\sqrt{(x+6)^2+5^2}+\sqrt{(7-x)^2+8^2}=\sqrt{338}.$$

Áp dụng BĐT Minkowski ta được:

$$VT=\sqrt{(x+6)^2+5^2}+\sqrt{(7-x)^2+8^2}$$
$$\geq\sqrt{(x+6+7-x)^2+(5+8)^2}=\sqrt{338}=VP.$$

Đẳng thức xảy ra khi :

$$(x+6).8=5(7-x)\Leftrightarrow x=-1.$$

Do đó $x=-1$ là nghiệm duy nhất của PT.

Thí dụ 1.2. *Giải phương trình*

$$\sqrt{8x^2-16x+10}+\sqrt{2x^2-4x+4}=\sqrt{7-x^2+2x}.$$

Lời giải.

ĐK: $\begin{cases}8x^2-16x+10\geq 0\\2x^2-4x+4\geq 0\\7-x^2+2x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8(x-1)^2+2\geq 0\\2(x-1)^2+2\geq 0\\(x-1)^2\leq 8\end{cases}$

$$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{2}\leq x\leq 1+2\sqrt{2}.$$

PT đã cho tương đương với

$$\sqrt{(2x-1)^2+(3-2x)^2}+\sqrt{(2-x)^2+x^2}$$
$$=\sqrt{8-(x-1)^2}\quad(*).$$

Áp dụng BĐT Minkowski ta được:

$$\sqrt{(2x-1)^2+(3-2x)^2}+\sqrt{(2-x)^2+x^2}$$
$$\geq\sqrt{(2x-1+2-x)^2+(3-2x+x)^2}$$
$$=\sqrt{2x^2-4x+10}=\sqrt{2(x-1)^2+8}\geq\sqrt{8}.$$

Kết hợp với (*) ta có:

$$\sqrt{8-(x-1)^2}\geq\sqrt{8}$$
$$\Leftrightarrow 8-(x-1)^2\geq 8\Leftrightarrow(x-1)^2\leq 0.$$

Đẳng thức xảy ra:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\(2x-1).x=(3-2x)(2-x)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\2x^2-x=2x^2-7x+6\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.

2. Giải hệ phương trình

Thí dụ 2.1. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=12\\\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{y^2-y+1}=2\sqrt{3}\end{cases}.$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Minkowski ta có:

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{y^2-y+1}$$
$$=\sqrt{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}$$
$$\geq\sqrt{\left(1-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{x^2+xy+y^2}=2\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$\left(1-\frac{x}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{\sqrt{3}}{2}x\left(\frac{y}{2}-1\right)\Leftrightarrow x+y=xy$, kết hợp với PT đầu của hệ ta được $x=y=2$.

Vậy nghiệm của hệ PT đã cho là $(x;y)=(2;2)$.

Thí dụ 2.2. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\\x-\sqrt{y-2}=2\end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $x\geq 2, y\geq 2$. Áp dụng BĐT Minkowski ta có:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\geq\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}.$$

Vì $x\geq 2, y\geq 2$ nên theo BĐT Cauchy:

$$x+\frac{1}{x}=\left(x+\frac{4}{x}\right)-\frac{3}{x}\geq 4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2};\ y+\frac{1}{y}\geq\frac{5}{2}.$$

Suy ra: $\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}\geq\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\geq\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=2,\ y=2$.

Thay vào PT thứ hai ta thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ PT đã cho là $(x;y)=(2;2)$.

3. Chứng minh bất đẳng thức

Thí dụ 3.1. Cho $x,y,z\in\mathbb{R}$. *Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}\geq\sqrt{z^2+zx+x^2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$x^2 - xy + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - y\right)^2;$$

$$y^2 - yz + z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2 + \left(y - \frac{z}{2}\right)^2.$$

Áp dụng BĐT Minkowski ta được:

$$\text{VT} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - y\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2 + \left(y - \frac{z}{2}\right)^2}$$

$$\geq \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{z}{2}\right)^2} = \text{VP}.$$

Thí dụ 3.2 (Đề thi vào ĐH Quốc gia Hà Nội, 2000). *Cho* $a,b,c > 0$ *và* $ab + bc + ca = abc$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}.$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Minkowski ta có:

$$\text{VT} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}}$$

$$\geq \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{\sqrt{2}}{b} + \frac{\sqrt{2}}{c}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \sqrt{3} = \text{VP}.$$

(vì $a,b,c > 0$ và $ab + bc + ca = abc$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$).

Thí dụ 3.3 (Đề thi tuyển sinh vào ĐH khối A, năm 2003). *Cho* $x,y,z > 0$ *và* $x + y + z \leq 1$. *Chứng minh rằng:*

$$P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Minkowski ta được:

$$P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}$$

$$\geq \sqrt{(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}.$$

Mặt khác theo BĐT Cauchy ta có:

$$(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2$$

$$= 81(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 80(x + y + z)^2$$

$$\geq 2\sqrt{81.(x + y + z)^2.\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} - 80 \geq 82.$$

Vậy

$$P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

4. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) và giá trị lớn nhất (GTLN)

Thí dụ 4.1. *Tìm GTNN của biểu thức*

$$Y = 2\sqrt{9x^2 - 6x + 2} + 3\sqrt{4x^2 + 4x + 2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$Y = 2\sqrt{9x^2 - 6x + 2} + 3\sqrt{4x^2 + 4x + 2}$$

$$= \sqrt{(2 - 6x)^2 + 2^2} + \sqrt{(6x + 3)^2 + 3^2}.$$

Sử dụng BĐT Minkowski, ta được:

$$Y = \sqrt{(2 - 6x)^2 + 2^2} + \sqrt{(6x + 3)^2 + 3^2}$$

$$\geq \sqrt{(2 - 6x + 6x + 3)^2 + (2 + 3)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{2 - 6x}{2} = \frac{6x + 3}{3} \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $\min Y = 5\sqrt{2}$.

Thí dụ 4.2. *Cho* a,b,c *là các số thực bất kì. Tìm GTNN của biểu thức:*

$$P = \sqrt{a^2 + (1 - b)^2} + \sqrt{b^2 + (1 - c)^2} + \sqrt{c^2 + (1 - a)^2}.$$

Lời giải. Sử dụng BĐT Minkowski, ta được:

$$P = \sqrt{a^2 + (1 - b)^2} + \sqrt{b^2 + (1 - c)^2} + \sqrt{c^2 + (1 - a)^2}$$

$$\geq \sqrt{(a + b + c)^2 + (3 - a - b - c)^2}.$$

Mặt khác ta có:

(*Xem tiếp trang* 19)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH BÌNH ĐỊNH

Năm học 2018 – 2019

Bài 1. 1) Ta có: $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x^3 = \left(3+2\sqrt{2}\right)+\left(3-2\sqrt{2}\right)+$

$3\sqrt[3]{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}.\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)$

$\Leftrightarrow x^3 = 6 + 3\sqrt[3]{9-8}\,x \Leftrightarrow x^3 = 6 + 3x;$

$y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow y^3 = \left(17+12\sqrt{2}\right)+\left(17-12\sqrt{2}\right)+$

$3.\sqrt[3]{\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}.\left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}\right)$

$\Leftrightarrow y^3 = 34 + 3.\sqrt[3]{289-288}.y \Leftrightarrow y^3 = 34 + 3y$

Do đó $A = x^3 + y^3 - 3(x+y)$

$= (6+3x) + (34+3y) - 3(x+y) = 40.$

Vậy $A = 40$.

2) Kí hiệu PT : $\left(x^2+mx+n\right)\left(x^2+nx+m\right)=0$ (1).

Ta có: $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2(m+n) = m.n\ (m, n \neq 0)$

PT (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+mx+n=0 & \text{(a)} \\ x^2+nx+m=0 & \text{(b)} \end{array}\right.$.

Với phương trình (a) ta có $\Delta_1 = m^2 - 4n$.

Với phương trình (b) ta có $\Delta_2 = n^2 - 4m$.

Xét tổng: $\Delta_1 + \Delta_2 = (m^2 - 4n) + (n^2 - 4m)$

$= (m^2 + n^2) - 4(m+n).$

Thay $2(m+n) = mn$ vào ta có:

$\Delta_1 + \Delta_2 = (m^2+n^2) - 2mn = (m-n)^2 \geq 0.$

Suy ra ít nhất một trong hai số $\Delta_1 \geq 0$ hoặc $\Delta_2 \geq 0$ bởi vì nếu $\Delta_1 < 0$ và $\Delta_2 < 0$ thì $\Delta_1 + \Delta_2 < 0$: mâu thuẫn với kết quả trên. Do đó ít nhất một trong hai phương trình (a) hoặc phương trình (b) có nghiệm. Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm.

Bài 2. 1) Kí hiệu PT : $\begin{cases} x^2+xy+y=1 & (1) \\ \sqrt{x}-\sqrt[3]{y}+4x=5 & (2) \end{cases}$.

ĐK: $x \geq 0$. Từ phương trình (1) ta có:

(1) $\Leftrightarrow (x^2-1) + y(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1+y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ y=1-x \end{array}\right.$.

Vì $x \geq 0$ nên $x = -1$ (loại).

Do đó $y = 1 - x$. Thay $y = 1 - x$ vào PT(2), ta có:

$\sqrt{x} - \sqrt[3]{1-x} + 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 + \sqrt[3]{x-1} + 4(x-1) = 0$ (3)

Đặt $t = \sqrt[6]{x}$ $(t \geq 0) \Leftrightarrow x = t^6$, PT(3) trở thành:

$t^3 - 1 + \sqrt[3]{t^6-1} + 4\left(t^6-1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt[3]{t^3-1}.\left[\sqrt[3]{\left(t^3-1\right)^2} + \sqrt[3]{t^3+1} + 4\left(t^3+1\right).\sqrt[3]{\left(t^3-1\right)^2}\right] = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{t^3-1} = 0$ (thừa số trong dấu móc vuông lớn hơn 0)

$\Leftrightarrow t = 1$, suy ra $x = 1$, khi đó $y = 0$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm $x = 1; y = 0$.

2) Biến đổi:

PT $\Leftrightarrow 2xy^2 + x + y + 1 - x^2 - 2y^2 - xy = 0$

$\Leftrightarrow 2y^2(x-1) - y(x-1) - (x^2-1) + x = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)[y(2y-1) - (x+1)] + x = 0$ (*)

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên từ (*) suy ra $x \neq 1$ và $x \vdots (x-1)$

$\Rightarrow (x-1) + 1 \vdots (x-1) \Leftrightarrow 1 \vdots (x-1)$

$\Leftrightarrow (x-1) \in \{-1; 1\} \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$.

- Với $x = 0$, thay vào phương trình đã cho, ta có:

$y + 1 = 2y^2 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(2y+1) = 0$

$\Leftrightarrow y = 1$ (chọn); $y = -\dfrac{1}{2}$ (loại).

- Với $x = 2$, thay vào phương trình đã cho, ta có:

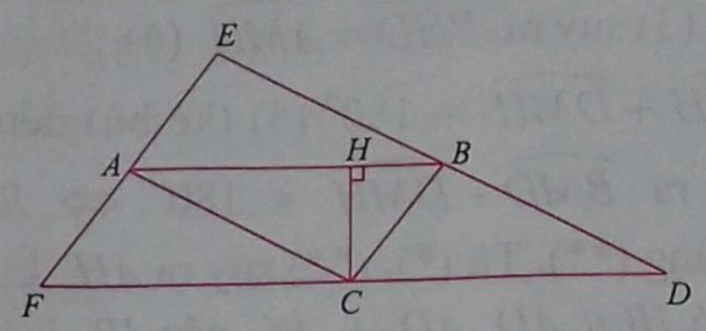
$4y^2 + y + 2 + 1 = 4 + 2y^2 + 2y$

$\Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ (chọn), $y = -\dfrac{1}{2}$ (loại). Vậy PT đã cho có hai nghiệm nguyên:

$(x = 0, y = 1); (x = 2, y = 1)$.

Bài 3. 1) Vì số điểm đã cho là hữu hạn nên tồn tại hai điểm, chẳng hạn A, B có khoảng cách lớn nhất (AB = max). Trong các điểm còn lại, gọi C là điểm

có khoảng cách đến AB lớn nhất (CH = max). Như vậy trong các tam giác tạo thành, tam giác ABC có diện tích lớn nhất và không lớn hơn 1.



Qua các đỉnh của ΔABC, vẽ các đường thẳng song song với các cạnh đối diện của tam giác, chúng cắt nhau tại D, E, F như hình vẽ. Khi đó các cạnh của ΔABC là các đường trung bình của ΔDEF nên ta được 4 tam giác bằng nhau cùng có diện tích lớn nhất và không lớn hơn 1. Rõ ràng toàn bộ các điểm đã cho đều nằm bên trong hoặc trên cạnh của ΔDEF bởi vì nếu có một điểm nằm bên ngoài ΔDEF thì sẽ có một tam giác có diện tích lớn hơn diện tích ΔABC : Điều này trái với giả thiết. Ta có 8073 : 4 = 2018 (dư 1) nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2019 điểm nằm bên trong hoặc nằm trên cạnh của một trong bốn tam giác EAB, ABC, DBC, FAC. Vậy luôn tồn tại 2019 điểm nằm trong hoặc trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

2) Ta có: $a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1} \le 5$

$$\Leftrightarrow 2a\sqrt{b^3+1}+2b\sqrt{c^3+1}+2c\sqrt{a^3+1} \le 10 \ (1).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm, ta có:

$$2\sqrt{b^3+1}=2\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)}$$
$$\le (b+1)+(b^2-b+1)=b^2+2.$$

Dấu "=" xảy ra khi: $b+1=b^2-b+1 \Leftrightarrow b=0$ hoặc $b=2$. Do đó $2a\sqrt{b^3+1}\le a(b^2+2)$. Tương tự, ta có: $2b\sqrt{c^3+1}\le b(c^2+2)$. Dấu "=" xảy ra khi $c=0$ hoặc $c=2$; $2c\sqrt{a^3+1}\le c(a^2+2)$. Dấu "=" xảy ra khi $a=0$ hoặc $a=2$. Từ đó, ta có:

$$2a\sqrt{b^3+1}+2b\sqrt{c^3+1}+2c\sqrt{a^3+1}$$
$$\le a(b^2+2)+b(c^2+2)+c(a^2+2)$$
$$=ab^2+bc^2+ca^2+6.$$

Vì vậy để chứng minh BĐT (1) ta chỉ cần chứng minh: $ab^2+bc^2+ca^2 \le 4$ (2).

Không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$a=\max\{a,b,c\}.$$

Xét hai trường hợp:

+) Với $a \ge b \ge c \ge 0$, khi đó ta có:

$$a(c-b)(b-a) \ge 0 \Leftrightarrow abc-a^2c-ab^2+a^2b \ge 0$$
$$\Leftrightarrow abc+a^2b \ge ab^2+a^2c$$
$$\Leftrightarrow abc+a^2b+bc^2 \ge ab^2+a^2c+bc^2$$
$$\Leftrightarrow ab^2+a^2c+bc^2 \le abc+a^2b+bc^2$$
$$\le 2abc+a^2b+bc^2=b\left(2ac+a^2+c^2\right)=b(a+c)^2$$
$$\Leftrightarrow ab^2+a^2c+bc^2 \le 4b.\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{a+c}{2}\right)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số không âm, ta có :

$$b.\left(\frac{a+c}{2}\right).\left(\frac{a+c}{2}\right) \le \left(\frac{b+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}}{3}\right)^3$$
$$=\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1 \text{ (vì } a+b+c=3).$$

Do đó: $4b.\left(\frac{a+c}{2}\right).\left(\frac{a+c}{2}\right) \le 4.1=4$

$$\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \le 4.$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} abc=0 \\ b=\dfrac{a+c}{2} \\ a+b+c=3 \\ 0\le c\le b\le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=1 \\ a=2 \end{cases}$.

+) Với $a \ge c \ge b \ge 0$, khi đó:

$$b(a-c)(c-b) \ge 0 \Leftrightarrow abc-ab^2-bc^2+b^2c \ge 0$$
$$\Leftrightarrow ab^2+bc^2 \le abc+b^2c$$
$$\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \le abc+b^2c+ca^2$$
$$\le 2abc+b^2c+ca^2$$
$$\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \le c(2ab+b^2+a^2)=c(a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \le 4c\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số không âm, ta có:

$$c.\left(\frac{a+b}{2}\right).\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \left(\frac{c+\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}}{3}\right)^3$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1.$$

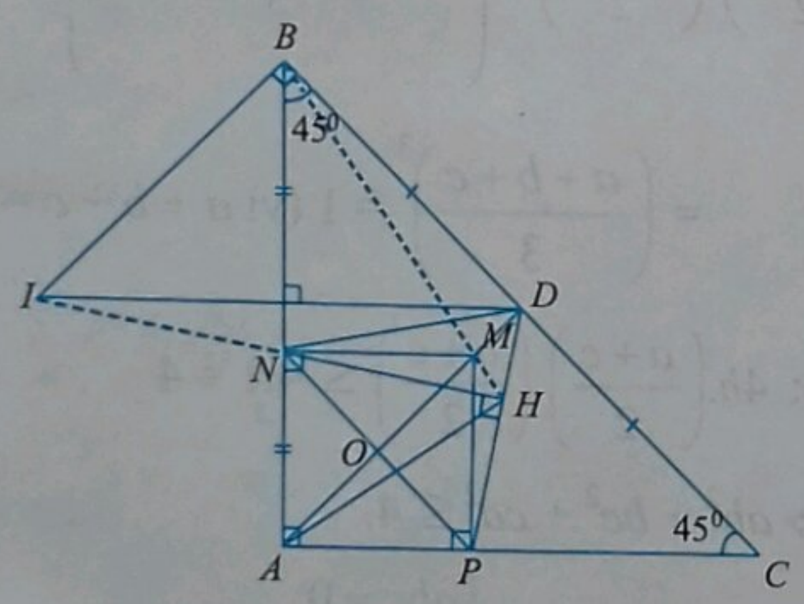
Do đó $c(a+b)^2 = 4c.\left(\frac{a+b}{2}\right).\left(\frac{a+b}{2}\right) \le 4.1 = 4.$

Vậy $ab^2 + bc^2 + ca^2 \le 4$. Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} abc = 0 \\ c = \dfrac{a+b}{2} \\ a+b+c = 3 \\ 0 \le b \le c \le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

. Từ đó BĐT (2) được chứng minh, suy ra BĐT(1) và BĐT đã cho được chứng minh. Dễ thấy dấu "=" trong BĐT đã cho không xảy ra. Vậy $a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}<5.$

Bài 4. 1)



a) Vì ΔABC vuông cân tại A nên đường trung tuyến AD cũng là đường phân giác, đường cao. Do đó $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = 45^0$, $AD \perp BC$. Ta có tứ giác $APMN$ có ba góc vuông và đường chéo AM là phân giác nên là hình vuông.

Do đó $AN = AP = MN = MP$. Mặt khác, $AB = AC$, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^0$ nên $BN = CP$, do đó:

$\Delta BDN = \Delta CDP$ (c.g.c), suy ra $\widehat{BND} = \widehat{CPD}$ (1)

Ta có: Tứ giác $BNMD$ nội tiếp suy ra:

$\widehat{BND} = \widehat{BMD}\left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD}\right)$ (2). Gọi O là giao điểm hai đường chéo hình vuông $APMN$, vì $\widehat{NHP} = 90^0$ nên các điểm A, P, H, M, N cùng thuộc đường tròn tâm O, bán kính OA, do đó $\widehat{MHA} = 90^0$ hay $AH \perp MH$ (*). Ta có: $\widehat{CPD} = \widehat{AMH}$ (3) (cùng bù với góc $\widehat{APH}$) nên từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{BND} = \widehat{AMH}$ (4).

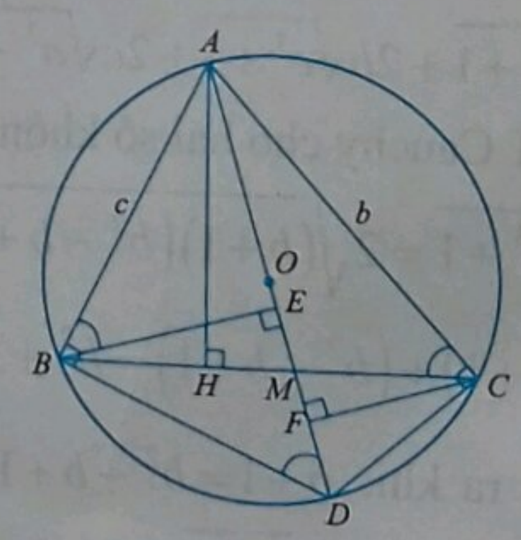
Vì $\widehat{AMH} + \widehat{DMH} = 180^0$ (5) (kề bù) nên từ (4), (5) suy ra $\widehat{BMD} + \widehat{DMH} = 180^0 \Leftrightarrow B, M, H$ thẳng hàng (**). Từ (*), (**) suy ra $AH \perp BH$.

b) Ta có $IB \,//\, AD$, $AD \perp BC$ nên $IB \perp BC$. Từ $\widehat{ABC} = 45^0$, $\widehat{IBD} = 90^0$ suy ra $\widehat{IBA} = 45^0$, do đó BA là phân giác của góc $\widehat{DBI}$. Ta có ΔBID có phân giác BA đồng thời là đường cao nên là tam giác cân tại B, do đó BA là trung trực của DI. Vì $N \in BA$ nên $ND = NI$, suy ra ΔNID cân tại N, cho ta $\widehat{NID} = \widehat{NDI}$ (1). Mặt khác, $MN \,//\, ID$ (cùng vuông góc với BA) nên $\widehat{MND} = \widehat{NDI}$ (so le trong) (2). Ta có $\Delta MND = \Delta MPD$ (c.c.c) $\Rightarrow$ $\widehat{MND} = \widehat{MPD}$ (3). Vì

$\widehat{MPD} = \widehat{MNH}\left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{MH}\right)$ (4). Nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra: $\widehat{NID} = \widehat{NDI} = \widehat{MND} = \widehat{MNH}$.

Với ΔNID ta có : $\widehat{NDI} + \widehat{NID} + \widehat{IND} = 180^0$, do đó $\widehat{MNH} + \widehat{MND} + \widehat{IND} = 180^0$. Vậy ba điểm H, N, I thẳng hàng.

2)



Vẽ đường kính AD của đường tròn (O). Kẻ BE, CF vuông góc với AD. Đặt: $AB = c$, $AC = b$ $(b, c > 0)$. Trong tam giác vuông ABH ta có: $HB = AB.\cos\widehat{ABC} = c.\cos C$. Trong tam giác vuông ACH ta có $HC = b.\cos C$. Do đó $\frac{HB}{HC} = \frac{c.\cos B}{b.\cos C}$ (1). Ta có: $BE \,//\, CF$ (cùng vuông góc với AD)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH VĨNH PHÚC NĂM HỌC 2018 – 2019 (*Thời gian làm bài: 150 phút*)

Câu 1 (2 *điểm*). Rút gọn biểu thức:

$$P=\frac{2x+\sqrt{16x}+6}{x+2\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}-2$$

Câu 2 (2 *điểm*). Chứng minh rằng:

$$A=1.2.3...2017.2018\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}\right)$$

chia hết cho 2019.

Câu 3 (2 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $y=mx+m-1$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d tạo với các trục tọa độ Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 2.

Câu 4 (2 *điểm*). Cho các số a,b,c thỏa mãn:

$ab+bc+ca=2019abc$ và $2019(a+b+c)=1$.

Tính $A=a^{2019}+b^{2019}+c^{2019}$.

Câu 5 (2 *điểm*). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2+xy+2x=5y\\(x^2+2x)(x+y-3)=-3y\end{cases}.$$

Câu 6 (2 *điểm*). Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên cạnh BC lấy điểm M, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho chu vi tam giác CMN bằng $2a$. Chứng minh rằng số đo góc $\widehat{MAN}$ không đổi.

Câu 7 (2 *điểm*). Cho ΔABC, có $\widehat{BAC}>90^{\circ}$, H là chân đường vuông góc hạ từ A, $\widehat{CAH}=3\widehat{BAH}$, $AH=6$ cm, $BH=3$ cm. Tính diện tích ΔABC.

Câu 8 (2 *điểm*). Cho đường tròn (T) có tâm O và đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên đường tròn (T) sao cho M không trùng với A và B. Gọi C là điểm đối xứng với điểm O qua điểm A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt AM tại N, đường thẳng BM cắt đường thẳng CN tại điểm F. Chứng minh rằng khi độ dài đoạn thẳng NF ngắn nhất thì A là trọng tâm của ΔBNF.

Câu 9 (2 *điểm*). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{19b^3-a^3}{ab+5b^2}+\frac{19c^3-b^3}{bc+5c^2}+\frac{19a^3-c^3}{ca+5a^2}\le 3(a+b+c).$$

Câu 10 (2 *điểm*). Cho 1000 điểm phân biệt $M_1, M_2, ..., M_{1000}$ trên mặt phẳng. Vẽ một đường tròn (C) bán kính $R=1$ tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn (C) sao cho $SM_1+SM_2+...+SM_{1000}\ge 1000$.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(*GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc*) ***Giới thiệu***

* * *

☞ $\Rightarrow \frac{MB}{MC}=\frac{BE}{CF}$ (định lý Thales) (2) Ta có: $\widehat{ABE}=\widehat{ADB}$ (cùng phụ góc $\widehat{DBE}$), $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$), nên $\widehat{ABE}=\widehat{ACB}$, lập luận tương tự, ta có: $\widehat{ACF}=\widehat{ABC}$. Trong tam giác vuông ABE ta có: $BE=AB.\cos\widehat{ABC}=c.\cos C$. Trong tam giác vuông ACF ta có: $CF=AC.\cos\widehat{ACF}=b.\cos B$.

Do đó: $\frac{BE}{CF}=\frac{c.\cos C}{b.\cos B}$ (3). Từ (1), (2), (3) ta có:

$$\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC}=\frac{c.\cos B}{b.\cos C}+\frac{c.\cos C}{b.\cos B}=\frac{c}{b}\left(\frac{\cos B}{\cos C}+\frac{\cos C}{\cos B}\right)$$

Vì các góc B, C nhọn nên: $\cos B>0$, $\cos C>0$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có:

$$\frac{\cos B}{\cos C}+\frac{\cos C}{\cos B}\ge 2\sqrt{\frac{\cos B}{\cos C}.\frac{\cos C}{\cos B}}=2.$$

Do đó $\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC}\ge 2.\frac{c}{b}=2.\frac{AB}{AC}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\cos C=\cos B \Leftrightarrow B=C$.

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

BÙI VĂN CHI

(21/2 *Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TỨ GIÁC

NGUYỄN BÁ ĐANG
(Hà Nội)

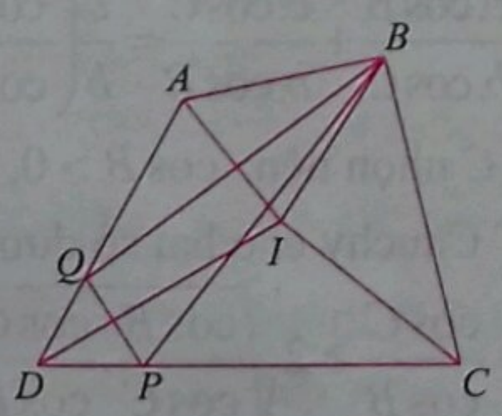
Trong mọi tam giác bao giờ cũng tồn tại một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp. Điều đó còn đúng không với với tứ giác? Trong bài viết này chúng tôi giới thiệu những tứ giác như vậy. Sách giáo khoa phổ thông đề cập rất ít về "Đường tròn tiếp xúc với bốn cạnh của tứ giác" mà ta thường gọi là đường tròn nội tiếp tứ giác hay tứ giác ngoại tiếp đường tròn. *Henri Pithot* là kỹ sư người Pháp, nhiều định lý hình học mang tên ông, năm 1725 ông công bố tính chất "*Tứ giác lồi ABCD ngoại tiếp đường tròn khi và chỉ khi* $AB + CD = BC + DA$" có sách gọi là Định lý *Pithot*. Năm 1846 nhà toán học Thụy Sỹ *Jakob Steiner* cũng đã đưa ra nội dung trên và cách chứng minh tương tự. Chúng ta chứng minh tính chất này.

Chứng minh. Giả sử tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I), các tiếp điểm thứ tự với các cạnh AB, BC, CD, DA là M, N, P, Q thì $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$.

Cộng các vế lại ta có $AB + CD = BC + DA$.

Ngược lại, xét $AB + CD = BC + DA$.

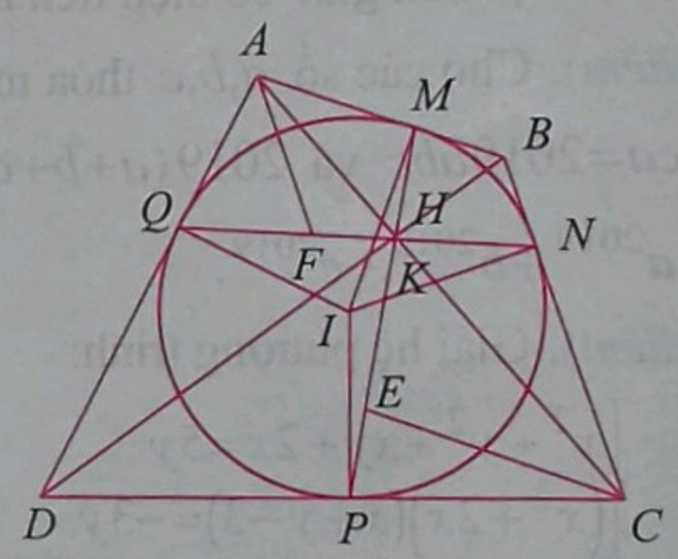
Giả sử $AB \le AD$, do $AB + CD = BC + DA$ $\Rightarrow BC \le DC$.



Khi đó tồn tại Q, P tương ứng trên AD và DC sao cho: $AB = AQ$ và $CB = CP \Rightarrow DP = DQ$. Từ đó, các tam giác ABQ, CBP và DPQ là những tam giác cân. Suy ra phân giác của các góc ở đỉnh A, C, D là ba đường trung trực của ΔBPQ, nên các đường ấy đồng quy tại I. Do đó I cách đều các cạnh của tứ giác $ABCD$, suy ra tồn tại đường tròn tâm I tiếp xúc với các cạnh tứ giác. Sau đây xin giới thiệu một số bài toán xung quanh tứ giác đó.

Bài toán 1. *Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (I) với các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh AC, BD, MP, NQ đồng quy.*

Lời giải.



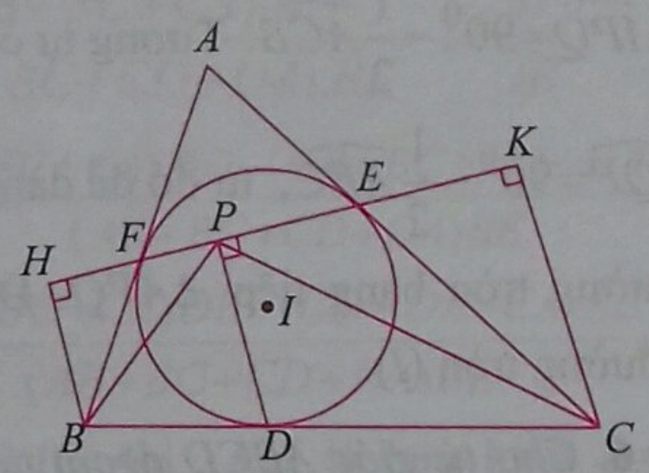
Theo giả thiết M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (I) với các cạnh AB, BC, CD, DA nên $IM \perp AB$, $IP \perp CD$, từ $IM = IP \Rightarrow \Delta IMP$ là tam giác cân $\Rightarrow \widehat{IMP} = \widehat{IPM}$

$\Rightarrow \widehat{BMP} = 90^0 - \widehat{IMP} = 90^0 - \widehat{IPM} = \widehat{MPC}$. Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt MP tại E thì $\widehat{CEP} = \widehat{BMP} = \widehat{CPM}$. Do đó $\Delta\ CPE$ là tam giác cân $\Rightarrow CP = CE$. Giả sử AC cắt MP tại K, AB song song với CE nên theo định lý Thales: $\frac{AK}{KC} = \frac{AM}{CE} = \frac{AM}{CP}$ (1). Gọi H là giao điểm của AC với NQ, AF song song BC, chứng minh tương tự ta có $\frac{AH}{HC} = \frac{AQ}{CN}$ (2). Mặt khác AB, BC, CD, DA là các tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $AM = AQ$, $CP = CN$. Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AH}{HC}$, K và H nằm trên AC suy ra $K \equiv H$.

Tương tự ta chứng minh được BD, MP, NQ đồng quy, nên AC, BD, MP, NQ đồng quy.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC không cân, đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F, gọi P là hình chiếu của D trên EF. Chứng minh PD là phân giác của góc $\widehat{BPC}$.*

Lời giải. *Cách 1.*



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B và C trên EF, AC và AB là tiếp tuyến đường tròn (I) nên $\widehat{BFH}=\widehat{AFE}=\widehat{AEF}=\widehat{CEK}$.

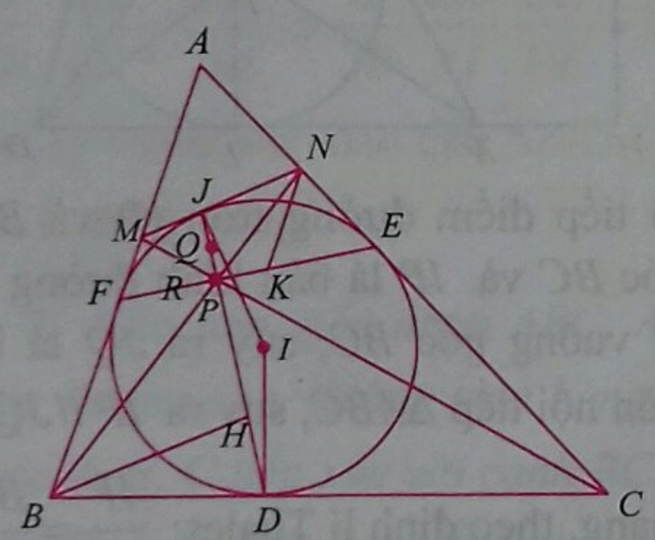
Suy ra $\Delta BHF \backsim \Delta CKE \Rightarrow \dfrac{BH}{CK}=\dfrac{BF}{CE}=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{HP}{PK}$

$\Rightarrow \Delta BHP \backsim \Delta CKP \Rightarrow \widehat{BPH}=\widehat{CPK}$

$\Rightarrow \widehat{BPD}=90^0-\widehat{BPH}=90^0-\widehat{CPK}=\widehat{CPD}$.

$\Rightarrow PD$ là phân giác của góc $\widehat{BPC}$.

Cách 2.

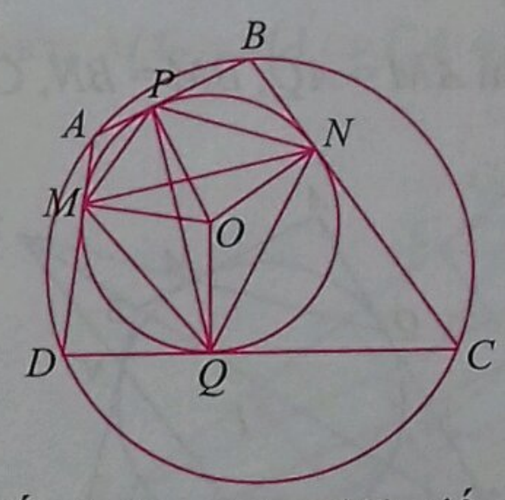


Kéo dài DP cắt đường tròn (I) tại J, qua J dựng tiếp tuyến với (I) cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Từ cách dựng tam giác IJD là tam giác cân tại I. Suy ra $\widehat{IDJ}=\widehat{IJD}$ và $\widehat{BDJ}=\widehat{MJD}$. Từ B kẻ đường thẳng song song với MN cắt DJ tại H. Khi đó $\widehat{BHD}=\widehat{MJD} \Rightarrow \widehat{BHD}=\widehat{BDH} \Rightarrow BH=BD$.

Giả sử BN cắt JD tại Q theo định lí Thales: $\dfrac{NQ}{QB}=\dfrac{NJ}{BH}=\dfrac{NJ}{BD}$. Gọi R là giao điểm EF và BN, chứng minh tương tự ta có: $\dfrac{NE}{BF}=\dfrac{NR}{RB}$, do $NJ=NE$, $BD=BF \Rightarrow \dfrac{NQ}{QB}=\dfrac{NR}{RB} \Rightarrow Q\equiv R$. Tương tự chứng minh được MC, DJ, EF đồng quy, suy ra PD là phân giác góc $\widehat{BPC}$.

Bài toán 3. *Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác ABCD lần lượt tại P, N, Q, M. Chứng minh MN vuông góc với PQ khi và chỉ khi tứ giác ABCD nội tiếp.*

Lời giải.



Theo giả thiết đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại P, N, Q, M nên OP, ON, OQ, OM lần lượt vuông góc với AB, BC, CD, DA. AB, BC, CA, DA là các tiếp tuyến với đường tròn (O), theo tính chất của tiếp tuyến với đường tròn thì $AM=AP$ và $CN=CQ$, tứ giác $MPNQ$ nội tiếp, suy ra

$$\widehat{MQP}=\widehat{AMP}=\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{MAP}\right)=90^0-\frac{1}{2}\widehat{DAB}.$$

Tương tự: $\widehat{QMN}=\widehat{QNC}=90^0-\dfrac{1}{2}\widehat{BCD}$;

$MN \perp PQ \Rightarrow \widehat{MQP}+\widehat{QMN}=90^0$

$$\Rightarrow \widehat{MQP}+\widehat{QMN}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{DAB}+90^0-\frac{1}{2}\widehat{BCD}$$
$$=180^0-\frac{1}{2}\left(\widehat{DAB}+\widehat{BCD}\right).$$

Do đó $\widehat{DAB}+\widehat{BCD}=180^0 \Rightarrow$ tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Ngược lại nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp thì

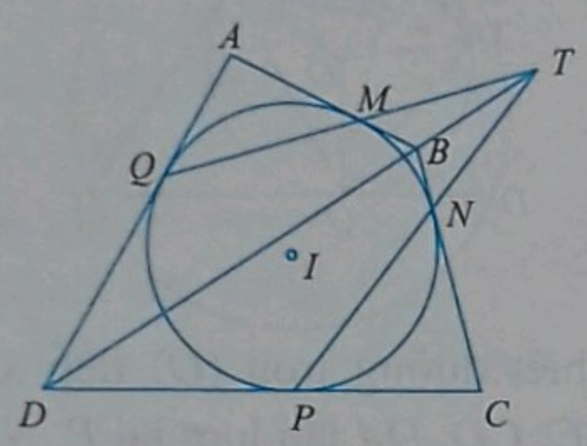
$$\widehat{DAB}+\widehat{BCD}=180^0$$
$$\Rightarrow \widehat{MQP}+\widehat{QMN}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{DAB}+90^0-\frac{1}{2}\widehat{BCD}$$
$$=180^0-\frac{1}{2}\left(\widehat{DAB}+\widehat{BCD}\right).$$

Vậy $MN \perp PQ$.

Bài toán 4. *Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm đường tròn (I) với các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng BD, MQ, NP đồng quy.*

Lời giải.

Gọi T là giao điểm của MQ và BD, áp dụng định lý Menelaus cho ΔABD và cát tuyến QMT, ta có: $\frac{MA}{MB}.\frac{TB}{TD}.\frac{QD}{QA}=1$ (1). Theo tính chất tiếp tuyến với đường tròn thì $AM=AQ$, $BM=BN$, $CN=CP$, $DP=DQ$



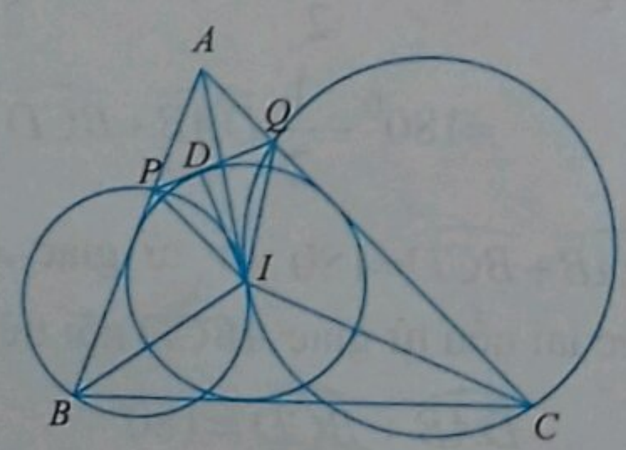
Thay vào (1) ta được $\frac{MA.TB.QD}{MB.TD.QA}=\frac{TB.DP}{BN.TD}=1$

$\Rightarrow \frac{TB.DP.NC}{BN.TD.PC}=\frac{TB.PD.NC}{TD.PC.NB}\Rightarrow \frac{BT.PD.NC}{TD.PC.NB}=1.$

Theo định lý đảo Menelaus thì P, N, T thẳng hàng. Từ đó BD, MQ, NP đồng quy.

Bài toán 5. *Cho ΔABC và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Đường tròn qua B và tiếp xúc AI tại I cắt AB tại P, đường tròn qua C và tiếp xúc AI tại I cắt AC tại Q. Chứng minh PQ tiếp xúc với đường tròn (I).*

Lời giải.



Giả thiết đường tròn qua B và tiếp xúc AI tại I cắt AB tại P, đường tròn qua C và tiếp xúc AI tại I cắt AC tại Q, theo hệ thức lượng trong đường tròn thì $AP.AB=AI^2=AQ.AC\Rightarrow B, P, Q, C$ cùng nằm trên một đường tròn. Suy ra $\widehat{BPQ}=180^0-\widehat{ACB}$; giả thiết đường tròn (BIP) tiếp xúc với AI tại I nên

$\widehat{AIP}=\widehat{PBI}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}$

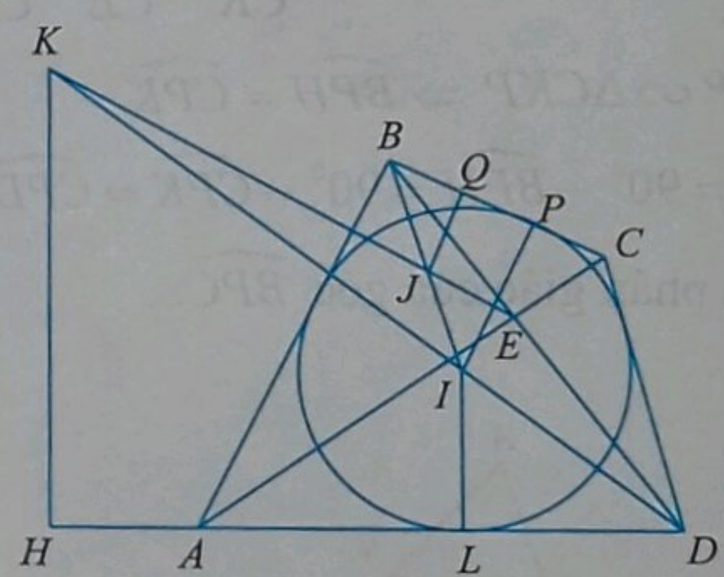
$\Rightarrow \widehat{BPI}=\widehat{PAI}+\widehat{BIA}=\frac{1}{2}\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}\right)=90^0-\frac{1}{2}\widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{BPI}=\widehat{IPQ}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{ACB}$. Tương tự có:

$\widehat{CQI}=\widehat{IQP}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{ABC}$, từ đó dễ dàng suy ra I là tâm đường tròn bàng tiếp ΔAPQ. Do đó PQ tiếp xúc đường tròn (I).

Bài toán 6. *Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm I, đường chéo AC, BD cắt nhau tại E. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp Δ ABC, K là tâm đường tròn bàng tiếp Δ ACD ứng với góc D. Chứng minh ba điểm K, J, E thẳng hàng.*

Lời giải.



Gọi P là tiếp điểm đường tròn (I) và BC thì IP vuông góc BC và IP là bán kính đường tròn tâm I, kẻ JQ vuông góc BC, suy ra JQ là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC, suy ra $IP // JQ$ và B, I, J thẳng hàng, theo định lí Thales: $\frac{IP}{JQ}=\frac{BI}{BJ}$

$\Rightarrow \frac{IP-JQ}{JQ}=\frac{BI-BJ}{BJ}=\frac{JI}{BJ}\Rightarrow \frac{IP}{JQ}-1=\frac{JI}{BJ}\Rightarrow \frac{IP}{JQ}=\frac{JI}{BJ}+1.$

Diện tích ΔABC và tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn bán kính JQ và IP tương ứng là:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)JQ$,

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)IP$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}}=\frac{(AB+BC+CA).JQ}{(AB+BC+CD+DA).IP}$. Mặt khác

$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{BE}{DE}\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}}=\frac{BE}{BD}$

$$\Rightarrow \frac{(AB+BC+CA).JQ}{(AB+BC+CD+DA).IP}=\frac{BE}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{(AB+BC+CA).BD}{(AB+BC+CD+DA).BE}=\frac{IP}{JQ}=\frac{JI}{JB}+1$$

$$\Rightarrow \frac{(AB+BC+CA).BD}{(AB+BC+CD+DA).BE}-1=\frac{JI}{JB}$$

$$\Rightarrow \frac{(AB+BC+CA).BD-(AB+BC+CD+DA)BE}{(AB+BC+CD+DA)BE}=\frac{JI}{JB}$$

$$\Rightarrow \frac{(AB+BC+CA)DE-(CD+DA-CA)BE}{(AB+BC+CD+DA)BE}=\frac{JI}{JB}\ (1)$$

Kẻ $KH \perp AD$ thì KH là bán kính đường tròn bàng tiếp $\Delta ACD \Rightarrow S_{ACD}=\frac{1}{2}(CD+DA-CA)KH$, từ đó suy ra:

$\frac{S_{ADC}}{S_{ABCD}}=\frac{(CD+DA-AC)KH}{(AB+BC+CD+DA)IL}=\frac{DE}{DB}$. Tương tự như trên suy ra

$$\frac{KI}{KD}=\frac{(AB+BC+AC)DE-(CD+DA-AC)BE}{(AB+BC+CD+DA)DE}\ (2).$$

Chia (1) cho (2) được:

$$\frac{JI}{JB}.\frac{KD}{KI}=\frac{DE}{BE}\Rightarrow \frac{JI}{JB}.\frac{KD}{KI}.\frac{BE}{DE}=1.$$

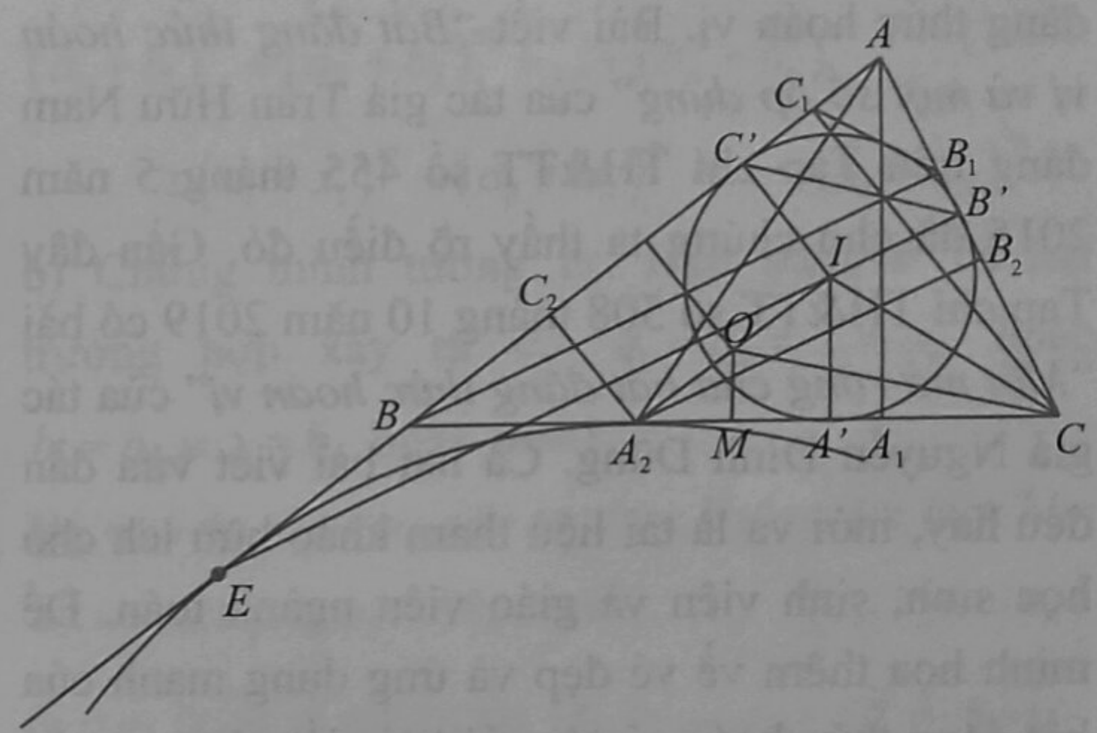
Theo định lý Menelaus đảo cho ΔBID ta thấy ba điểm K, J, E thẳng hàng.

Bài toán 7. *Cho tam giác nhọn ABC, AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao, đường tròn bàng tiếp ứng với các góc A, B, C tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB theo thứ tự A_2, B_2, C_2. Chứng minh B_1C_1 tiếp xúc với đường tròn nội tiếp với đường tròn (I) thì A_1 thuộc đường tròn $(A_2B_2C_2)$.*

Lời giải. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và H là trực tâm tam giác đó, M là trung điểm BC. Gọi A', B', C' là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB suy ra $MA'=MA_2$, B_2 và B' đối xứng qua trung điểm của AC, C_2 và C' đối xứng qua trung điểm của AB. Theo giả thiết B_1C_1 tiếp xúc với đường tròn (I) nên:

$\Delta ABC \backsim \Delta AC_1B_1$ từ đó suy ra: Đường tròn bàng tiếp ứng với góc A tiếp xúc cạnh BC, AB tại A_2 và E tương ứng đường tròn (I) tiếp xúc với BC và cạnh AB, dẫn đến ba điểm B', I, E thẳng hàng, $IC' \perp AB$, $IB' \perp AC$ nên tứ giác $AB'IC'$ nội tiếp, suy ra: $\widehat{C'IE}=\widehat{BAC}=\widehat{COM} \Rightarrow \Delta EIC' \backsim \Delta COM$

$\Rightarrow \frac{EC'}{CM}=\frac{IC'}{OM}$ (*). Theo tính chất đường tròn nội tiếp và bàng tiếp $MA_2=MA' \Rightarrow CA'=BA_2$.



Cũng theo tính chất tiếp tuyến đường tròn, ta có:

$$EC'=EB+BC'=BA_2+BA'$$
$$=CA'+BA'=BC=2CM.$$

Từ đẳng thức (*) có: $\frac{EC'}{CM}=\frac{IC'}{OM}=2 \Rightarrow OM=\frac{IA'}{2}$ $\Rightarrow I, O, A_2$ thẳng hàng $\Rightarrow OI=OA_2$, C_2 là tiếp điểm đường tròn bàng tiếp với cạnh AB $\Rightarrow A_2C_2 \perp AB$, $A_2B_2 \perp AC$. Vậy tứ giác $AC_2A_2B_2$ nội tiếp đường tròn đường kính AA_2, suy ra A_1 thuộc đường tròn $(A_2B_2C_2)$.

Lưu ý. Bài toán này vẽ hình không hề dễ, chìa khóa để vẽ hình $OM=\frac{IA'}{2}$ dẫn đến ba điểm I, O, A_2 thẳng hàng.

Tài liệu tham khảo

1) Nguyễn Bá Đang - Những Định lí chọn lọc trong hình học phẳng NXBGD Việt Nam 2016.
2) Kì thi Olympic dành cho nữ sinh châu Âu (EGMO)
3) Kì thi Olympic của CHLB Nga mang tên I.F. Sharygin.

MỘT SỐ HỆ QUẢ CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

NGÔ VĂN THÁI
(Tổ 34, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

Trong kho tàng bất đẳng thức toán học có một bất đẳng thức đẹp, mạnh, ứng dụng rộng: Đó là bất đẳng thức hoán vị. Bài viết "*Bất đẳng thức hoán vị và một số áp dụng*" của tác giả Trần Hữu Nam đăng trên Tạp chí TH&TT số 455 tháng 5 năm 2015 đã cho chúng ta thấy rõ điều đó. Gần đây Tạp chí TH&TT số 508 tháng 10 năm 2019 có bài "*Một mở rộng của bất đẳng thức hoán vị*" của tác giả Nguyễn Đình Dũng. Cả hai bài viết vừa dẫn đều hay, mới và là tài liệu tham khảo hữu ích cho học sinh, sinh viên và giáo viên ngành toán. Để minh họa thêm về vẻ đẹp và ứng dụng mạnh của bất đẳng thức hoán vị, tác giả bài viết này xin trân trọng gửi tới bạn đọc bài viết "*Một số hệ quả của bất đẳng thức hoán vị*" có nội dung như sau.

1. Bất đẳng thức hoán vị

Cho hai dãy số thực hữu hạn $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, ..., b_n)$.

a) *Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ sắp thứ tự cùng chiều thì*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \ge a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n.$$

b) *Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ sắp thứ tự ngược chiều thì*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \le a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n.$$

Dấu bằng ở cả hai trường hợp xảy ra khi và chỉ khi hoặc $a_1 = a_2 = ... = a_n$ hoặc $b_1 = b_2 = ... = b_n$.

Đã có nhiều tài liệu chứng minh bất đẳng thức hoán vị, bài viết này xin phép không nhắc lại. Bạn đọc có thể xem các cách chứng minh bất đẳng thức hoán vị ở trong hai bài báo đã nêu. Từ bất đẳng thức hoán vị ta rút ra một số hệ quả sau đây

2. Một số hệ quả của bất đẳng thức hoán vị

Hệ quả 1. *Cho hai dãy số thực không âm hữu hạn $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hoán vị tùy của $(b_1, b_2, ..., b_n)$ và $m, k \ge 0$.*

a) *Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ sắp thứ tự cùng chiều thì*

$$a_1^m b_1^k + a_2^m b_2^k + ... + a_n^m b_n^k \ge a_1^m x_1^k + a_2^m x_2^k + ... + a_n^m x_n^k.$$

b) *Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ sắp thứ tự ngược chiều thì*

$$a_1^m b_1^k + a_2^m b_2^k + ... + a_n^m b_n^k \le a_1^m x_1^k + a_2^m x_2^k + ... + a_n^m x_n^k.$$

Chứng minh. a) Vì $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ là hai dãy số thực không âm sắp thứ tự cùng chiều và $m, k \ge 0$, nên hai dãy $a_1^m, a_2^m, ..., a_n^m, b_1^k, b_2^k, ..., b_n^k$ cũng sắp thứ tự cùng chiều. Hiển nhiên $(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1^k, b_2^k, ..., b_n^k)$. Theo bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$a_1^m b_1^k + a_2^m b_2^k + ... + a_n^m b_n^k \ge a_1^m x_1^k + a_2^m x_2^k + ... + a_n^m x_n^k.$$

b) Chứng minh tương tự như ý a). Dấu bằng ở cả hai trường xảy ra $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2 = ... = a_n$ hoặc $b_1 = b_2 = ... = b_n$ hoặc $m = 0$ hoặc $k = 0$.

Hệ quả 2. *Cho dãy số thực không âm hữu hạn $a_1, a_2, ..., a_n$, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $m, k \ge 0$. Khi đó*

$$a_1^{m+k} + a_2^{m+k} + ... + a_n^{m+k} \ge a_1^m x_1^k + a_2^m x_2^k + ... + a_n^m x_n^k.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát giả sử $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \ge 0$, do $m,k \ge 0$ suy ra $a_1^m \ge a_2^m \ge ... \ge a_n^m \ge 0$ và $a_1^k \ge a_2^k \ge ... \ge a_n^k \ge 0$.

Mặt khác $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(a_1, a_2, ..., a_n)$ nên $(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ cũng là một hoán vị tùy ý của $(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)$.

Theo hệ quả 1.a) ta được:

$$a_1^m a_1^k + a_2^m a_2^k + ... + a_n^m a_n^k \ge a_1^m x_1^k + a_2^m x_2^k + ... + a_n^m x_n^k$$

hay

$$a_1^{m+k} + a_2^{m+k} + ... + a_n^{m+k} \ge a_1^m x_1^k + a_2^m x_2^k + ... + a_n^m x_n^k.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$ hoặc $m = 0$ hoặc $k = 0$.

Hệ quả 3. *Cho hai dãy số thực không âm hữu hạn $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, ..., b_n)$ và $m \in \mathbb{N}^*$.*

a) Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ sắp thứ tự cùng chiều thì

$$(a_1 + b_1)^m + (a_2 + b_2)^m + ... + (a_n + b_n)^m$$
$$\ge (a_1 + x_1)^m + (a_2 + x_2)^m + ... + (a_n + x_n)^m.$$

b) Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ sắp thứ tự ngược chiều thì

$$(a_1 + b_1)^m + (a_2 + b_2)^m + ... + (a_n + b_n)^m$$
$$\le (a_1 + x_1)^m + (a_2 + x_2)^m + ... + (a_n + x_n)^m.$$

Chứng minh. a) Do $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là hai dãy sắp thứ tự cùng chiều và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, ..., b_n), m \in \mathbb{N}^*$ nên với $k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le m$ thì $a_1^{m-k}, a_2^{m-k}, ..., a_n^{m-k}$ và $b_1^k, b_2^k, ..., b_n^k$ cũng là hai dãy sắp thứ tự cùng chiều. Cho k lần lượt chạy từ 0 đến m ta được $m + 1$ cặp dãy tương ứng với k cũng sắp thứ tự cùng chiều. Hiển nhiên $(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1^k, b_2^k, ..., b_n^k)$ với mọi k: $0 \le k \le m$.

Theo hệ quả 1.a) ta được:

$$a_1^{m-k} b_1^k + a_2^{m-k} b_2^k + ... + a_n^{m-k} b_n^k$$
$$\ge a_1^{m-k} x_1^k + a_2^{m-k} x_2^k + ... + a_n^{m-k} x_n^k, \forall m, k \in \mathbb{N}, m \ge k$$
$$\Leftrightarrow C_m^k a_1^{m-k} b_1^k + C_m^k a_2^{m-k} b_2^k + ... + C_m^k a_n^{m-k} b_n^k$$
$$\ge C_m^k a_1^{m-k} x_1^k + C_m^k a_2^{m-k} x_2^k + ... + C_m^k a_n^{m-k} x_n^k, \quad (*)$$
$$\forall m, k \in \mathbb{N}, m \ge k.$$

Từ (*) cho k lần lượt bằng $0, 1, \ldots, m$ sẽ được $m + 1$ BĐT cùng chiều, sau đó cộng vế với vế của $m + 1$ BĐT này lại rồi áp dụng nhị thức Newton sẽ được điều cần phải chứng minh, tức là

$$(a_1 + b_1)^m + (a_2 + b_2)^m + ... + (a_n + b_n)^m$$
$$\ge (a_1 + x_1)^m + (a_2 + x_2)^m + ... + (a_n + x_n)^m.$$

b) Chứng minh tương tự. Dấu bằng ở cả hai trường hợp xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$ hoặc $b_1 = b_2 = ... = b_n$ hoặc $m = 1$.

Hệ quả 4. *Cho ba dãy số thực không âm hữu hạn $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n, c_1, c_2, ..., c_n$ $(z_1, z_2, ..., z_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(c_1, c_2, ..., c_n)$ và $m \in \mathbb{N}^*$.*

a) Nếu $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n; c_1, c_2, ..., c_n$ sắp thứ tự cùng chiều thì

$$(a_1 + b_1 + c_1)^m + (a_2 + b_2 + c_2)^m + ... + (a_n + b_n + c_n)^m$$
$$\ge (a_1 + b_1 + z_1)^m + (a_2 + b_2 + z_2)^m + ... + (a_n + b_n + z_n)^m.$$

b) Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$, sắp thứ tự cùng chiều, còn $c_1, c_2, ..., c_n$ sắp thứ tự ngược chiều thì

$$(a_1 + b_1 + c_1)^m + (a_2 + b_2 + c_2)^m + ... + (a_n + b_n + c_n)^m$$
$$\le (a_1 + b_1 + z_1)^m + (a_2 + b_2 + z_2)^m + ... + (a_n + b_n + z_n)^m.$$

Chứng minh. a) Giả thiết cho ba dãy $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n; c_1, c_2, ..., c_n$, sắp thứ tự cùng chiều và $(z_1, z_2, ..., z_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(c_1, c_2, ..., c_n)$. Khi đó với $k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le m$, thì $(a_1 + b_1)^{m-k}, (a_2 + b_2)^{m-k}, ..., (a_n + b_n)^{m-k}$ và $c_1^k, c_2^k, ..., c_n^k$ cũng là hai dãy sắp thứ tự cùng chiều. Cho k lần lượt đi từ 0 đến m sẽ được $m + 1$ cặp dãy tương ứng với k cũng sắp thứ tự cùng chiều.

Hiển nhiên $\left(z_1^k, z_2^k, ..., z_n^k\right)$ là một hoán vị tùy ý của $\left(c_1^k, c_2^k, ..., c_n^k\right)$ với mọi $k: 0 \le k \le m$. Theo hệ quả 1.a) sẽ được:

$$\left(a_1+b_1\right)^{m-k} c_1^k + \left(a_2+b_2\right)^{m-k} c_2^k + ... + \left(a_n+b_n\right)^{m-k} c_n^k$$
$$\ge \left(a_1+b_1\right)^{m-k} z_1^k + \left(a_2+b_2\right)^{m-k} z_2^k + ... + \left(a_n+b_n\right)^{m-k} z_n^k$$
$$\Leftrightarrow C_m^k \left(a_1+b_1\right)^{m-k} c_1^k + C_m^k \left(a_2+b_2\right)^{m-k} c_2^k + ... + C_m^k \left(a_n+b_n\right)^{m-k} c_n^k$$
$$\ge C_m^k \left(a_1+b_1\right)^{m-k} z_1^k + C_m^k \left(a_2+b_2\right)^{m-k} z_2^k + ... + C_m^k \left(a_n+b_n\right)^{m-k} z_n^k \quad (**)$$

Từ (**) cho k lần lượt bằng 0, 1,..., m ta được $m+1$ BĐT cùng chiều, sau đó cộng vế với vế của $m+1$ BĐT này lại rồi áp dụng nhị thức Newton sẽ được điều cần chứng minh, tức là

$$\left(a_1+b_1+c_1\right)^m + \left(a_2+b_2+c_2\right)^m + ... + \left(a_n+b_n+c_n\right)^m$$
$$\ge \left(a_1+b_1+z_1\right)^m + \left(a_2+b_2+z_2\right)^m + ... + \left(a_n+b_n+z_n\right)^m.$$

b) Chứng minh tương tự. Dấu bằng xảy ra trong cả hai trường hợp $\Leftrightarrow a_1+b_1 = ... = a_n+b_n$ hoặc $c_1 = c_2 = ... = c_n$ hoặc $m=1$.

3. Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức hoán vị

Bài 1. *Cho ba số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng* $\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \ge a^3+b^3+c^3$.

Lời giải. Theo BĐT Bunyakovsky thì

$$\left(\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2}\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right) \ge \left(a^3+b^3+c^3\right)^2 \quad (1)$$

Theo hệ quả 2 của BĐT hoán vị ta được:

$$a^3+b^3+c^3 \ge ab^2+bc^2+ca^2.$$

Từ (1) suy ra $\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \ge a^3+b^3+c^3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 2. *Cho a,b,c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4}{bc\left(a^3+b^3\right)} + \frac{b^4}{ca\left(b^3+c^3\right)} + \frac{c^4}{ab\left(c^3+a^3\right)} \ge \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^5}{abc\left(a^3+b^3\right)} + \frac{b^5}{abc\left(b^3+c^3\right)} + \frac{c^5}{abc\left(c^3+a^3\right)} \ge \frac{9}{2(a+b+c)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^5}{a^3+b^3} + \frac{b^5}{b^3+c^3} + \frac{c^5}{c^3+a^3} \ge \frac{9abc}{2(a+b+c)} \quad (1)$$

Bây giờ ta chứng minh (1).

Đặt $P = \frac{a^5}{a^3+b^3} + \frac{b^5}{b^3+c^3} + \frac{c^5}{c^3+a^3}$

$$Q = \frac{a^2b^3}{a^3+b^3} + \frac{b^2c^3}{b^3+c^3} + \frac{c^2a^3}{c^3+a^3}.$$

Dễ thấy $P+Q = a^2+b^2+c^2$ (2).

Sử dụng BĐT Cauchy cho hai số để đánh giá các mẫu thức của Q ta được:

$$Q \le \frac{a^2b^3}{2(ab)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2c^3}{2(bc)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c^2a^3}{2(ca)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}{2}.$$

Mặt khác theo hệ quả 2 của BĐT hoán vị lại được

$$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}} \le a^2+b^2+c^2.$$

Vậy $Q \le \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ (3).

Từ (2), (3) suy ra $P \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \ge \frac{(a+b+c)^2}{6}$.

Theo BĐT Cauchy cho ba số thì

$$(a+b+c)^3 \ge 27abc \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge \frac{27abc}{(a+b+c)}.$$

Suy ra $P \ge \frac{9abc}{2(a+b+c)}$, tức là:

$$\frac{a^5}{a^3+b^3} + \frac{b^5}{b^3+c^3} + \frac{c^5}{c^3+a^3} \ge \frac{9abc}{2(a+b+c)}$$

hay $\frac{a^4}{bc\left(a^3+b^3\right)} + \frac{b^4}{ca\left(b^3+c^3\right)} + \frac{c^4}{ab\left(c^3+a^3\right)} \ge \frac{9}{2(a+b+c)}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 3. *Cho x, y, z là ba số thực dương và $\alpha \ge 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^\alpha}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^\alpha}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^\alpha}{z^2+zx+x^2} \ge \frac{x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}}{3}.$$

Lời giải. Đặt

$$P=\frac{x^{\alpha}}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^{\alpha}}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^{\alpha}}{z^2+zx+x^2}$$

$$Q=\frac{x^{\alpha-2}y^2}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^{\alpha-2}z^2}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^{\alpha-2}x^2}{z^2+zx+x^2}.$$

Ta có:

$$P+Q=\frac{x^{\alpha}+x^{\alpha-2}y^2}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^{\alpha}+y^{\alpha-2}z^2}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^{\alpha}+z^{\alpha-2}x^2}{z^2+zx+x^2}$$

Sử dụng BĐT Cauchy cho hai số ta được:

$$P+Q\ge\frac{x^{\alpha-2}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+\frac{x^2+y^2}{2}+y^2}+\frac{y^{\alpha-2}\left(y^2+z^2\right)}{y^2+\frac{y^2+z^2}{2}+z^2}+\frac{z^{\alpha-2}\left(z^2+x^2\right)}{z^2+\frac{z^2+x^2}{2}+x^2}$$

$$=\frac{2}{3}\left(x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}\right)\quad(1).$$

Lại sử dụng BĐT Cauchy cho hai số để đánh giá các mẫu thức của Q ta có:

$$Q\le\frac{x^{\alpha-2}y^2}{3xy}+\frac{y^{\alpha-2}z^2}{3yz}+\frac{z^{\alpha-2}x^2}{3zx}$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^{\alpha-3}y+y^{\alpha-3}z+z^{\alpha-3}x\right).$$

Mà $\alpha\ge3$, theo hệ quả 2 của BĐT hoán vị thì:

$$\left(x^{\alpha-3}y+y^{\alpha-3}z+z^{\alpha-3}x\right)\le x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}.$$

Do đó: $Q\le\frac{1}{3}\left(x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}\right)$ (2).

Từ (1), (2) suy ra: $P\ge\frac{1}{3}\left(x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}\right)$.

Vậy $\frac{x^{\alpha}}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^{\alpha}}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^{\alpha}}{z^2+zx+x^2}$

$$\ge\frac{x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 4. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^t}{b^{t-1}}+\frac{b^t}{c^{t-1}}+\frac{c^t}{a^{t-1}}\ge\frac{a^k}{b^{k-1}}+\frac{b^k}{c^{k-1}}+\frac{c^k}{a^{k-1}}\quad(1)$$

với $\forall a,b,c\in\mathbb{R}^+, t\ge k\ge1$.

Lời giải. Để chứng minh bài toán đề ra ta chứng minh BĐT tương đương

$$\frac{a^t-a^kb^{t-k}}{b^{t-1}}+\frac{b^t-b^kc^{t-k}}{c^{t-1}}+\frac{c^t-c^ka^{t-k}}{a^{t-1}}\ge0\quad(2)$$

BĐT (1) và (2) không đổi khi hoán vị vòng quanh các biến. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}$.

- Nếu $b\ge c$ suy ra:

$$\begin{cases}b^t-b^kc^{t-k}\ge0; c^t-c^ka^{t-k}\le0\\ 0<c^{t-1}\le b^{t-1}\le a^{t-1}\end{cases}.$$

Khi đó: $\frac{b^t-b^kc^{t-k}}{c^{t-1}}\ge\frac{b^t-b^kc^{t-k}}{b^{t-1}}$ (3)

$$\frac{a^t-a^kb^{t-k}}{b^{t-1}}=\frac{a^t-a^kb^{t-k}}{b^{t-1}}\quad(4)$$

$$\frac{c^t-c^ka^{t-k}}{a^{t-1}}\ge\frac{c^t-c^ka^{t-k}}{b^{t-1}}\quad(5).$$

Cộng vế với vế (3),(4),(5) ta có:

$$\mathrm{VT}(2)\ge\frac{\left(a^t+b^t+c^t\right)-\left(a^kb^{t-k}+b^kc^{t-k}+c^ka^{t-k}\right)}{b^{t-1}}.$$

- Nếu $b\le c$ suy ra:

$$\begin{cases}a^t-a^kb^{t-k}\ge0, c^t-c^ka^{t-k}\le0\\ 0<b^{t-1}\le c^{t-1}\le a^{t-1}\end{cases}.$$

Khi đó: $\frac{a^t-a^kb^{t-k}}{b^{t-1}}\ge\frac{a^t-a^kb^{t-k}}{c^{t-1}}$ (6)

$$\frac{b^t-b^kc^{t-k}}{c^{t-1}}=\frac{b^t-b^kc^{t-k}}{c^{t-1}}\quad(7)$$

$$\frac{c^t-c^ka^{t-k}}{a^{t-1}}\ge\frac{c^t-c^ka^{t-k}}{c^{t-1}}\quad(8).$$

Cộng vế với vế (6),(7),(8) ta có:

$$\mathrm{VT}(2)\ge\frac{\left(a^t+b^t+c^t\right)-\left(a^kb^{t-k}+b^kc^{t-k}+c^ka^{t-k}\right)}{c^{t-1}}.$$

Đến đây (2) sẽ được chứng minh nếu chứng minh được

$$\left(a^t+b^t+c^t\right)-\left(a^kb^{t-k}+b^kc^{t-k}+c^ka^{t-k}\right)\ge0$$

$$\Leftrightarrow a^t+b^t+c^t\ge a^kb^{t-k}+b^kc^{t-k}+c^ka^{t-k}.$$

Nhưng BĐT này đúng theo hệ quả 2 của BĐT hoán vị. Vậy

$$\frac{a^t}{b^{t-1}}+\frac{b^t}{c^{t-1}}+\frac{c^t}{a^{t-1}}\ge\frac{a^k}{b^{k-1}}+\frac{b^k}{c^{k-1}}+\frac{c^k}{a^{k-1}}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a^{t-1}=b^{t-1}=c^{t-1}$ hoặc $t=k$ $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $t=k$.

Bài 5. *Cho ba số thực dương a,b,c và $k\ge r\ge 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{b^k+c^k}{a^r+b^r}+\frac{c^k+a^k}{b^r+c^r}+\frac{a^k+b^k}{c^r+a^r}\ge a^{k-r}+b^{k-r}+c^{k-r}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{b^k+c^k}{a^r+b^r}-b^{k-r}+\frac{c^k+a^k}{b^r+c^r}-c^{k-r}+\frac{a^k+b^k}{c^r+a^r}-a^{k-r}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{c^k-a^rb^{k-r}}{\left(a^r+b^r\right)}+\frac{a^k-b^rc^{k-r}}{\left(b^r+c^r\right)}+\frac{b^k-c^ra^{k-r}}{\left(c^r+a^r\right)}\ge 0\quad(1)$$

Bây giờ ta tiến hành chứng minh (1). Do (1) không đổi khi hoán vị vòng quanh các biến *a*, *b*, *c* nên không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}$.

- Nếu $b\ge c$, kết hợp với $k\ge r\ge 0$ suy ra:

$$\begin{cases}a^k-b^rc^{k-r}\ge 0, c^k-a^rb^{k-r}\le 0\\ 0<b^r+c^r\le c^r+a^r\le a^r+b^r\end{cases}.$$

Do đó: $$\frac{c^k-a^rb^{k-r}}{a^r+b^r}\ge\frac{c^k-a^rb^{k-r}}{c^r+a^r}\quad(2)$$

$$\frac{b^k-c^ra^{k-r}}{c^r+a^r}=\frac{b^k-c^ra^{k-r}}{c^r+a^r}\quad(3)$$

$$\frac{a^k-b^rc^{k-r}}{b^r+c^r}\ge\frac{a^k-b^rc^{k-r}}{c^r+a^r}\quad(4).$$

Cộng vế với vế (2),(3),(4) ta có:

$$\mathrm{VT}(1)\ge\frac{a^k+b^k+c^k-a^rb^{k-r}-c^ra^{k-r}-b^rc^{k-r}}{c^r+a^r}.$$

- Nếu $b\le c$, kết hợp với $k\ge r\ge 0$ suy ra

$$\begin{cases}a^k-b^rc^{k-r}\ge 0, b^k-c^ra^{k-r}\le 0\\ 0<b^r+c^r\le a^r+b^r\le c^r+a^r\end{cases}.$$

Do đó: $$\frac{c^k-a^rb^{k-r}}{a^r+b^r}=\frac{c^k-a^rb^{k-r}}{a^r+b^r}\quad(5)$$

$$\frac{b^k-c^ra^{k-r}}{c^r+a^r}\ge\frac{b^k-c^ra^{k-r}}{a^r+b^r}\quad(6)$$

$$\frac{a^k-b^rc^{k-r}}{b^r+c^r}\ge\frac{a^k-b^rc^{k-r}}{a^r+b^r}\quad(7).$$

Cộng vế với vế (5), (6), (7) lại được:

$$\mathrm{VT}(1)\ge\frac{a^k+b^k+c^k-a^rb^{k-r}-c^ra^{k-r}-b^rc^{k-r}}{a^r+b^r}.$$

Đến đây để chứng minh (1), ta phải chứng minh

$$a^k+b^k+c^k-a^rb^{k-r}-c^ra^{k-r}-b^rc^{k-r}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^k+b^k+c^k\ge a^rb^{k-r}+c^ra^{k-r}+b^rc^{k-r}.$$

Nhưng BĐT cuối đúng theo hệ quả 2 của BĐT hoán vị. Vậy

$$\frac{b^k+c^k}{a^r+b^r}+\frac{c^k+a^k}{b^r+c^r}+\frac{a^k+b^k}{c^r+a^r}\ge a^{k-r}+b^{k-r}+c^{k-r}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $k=r=0$.

Bài 6 [IMO-1995]. *Cho* $\begin{cases}a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\\ b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n\end{cases}$, *gọi* $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ *là một hoán vị tùy ý của* $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$. *Chứng minh rằng*

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2$$
$$\le(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2+\ldots+(a_n-c_n)^2.$$

Lời giải. Vì $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ nên

$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2.$$

Theo BĐT hoán vị thì

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\ge a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n$$

$$\Leftrightarrow -2a_1b_1-2a_2b_2-\ldots-2a_nb_n$$
$$\le -2a_1c_1-2a_2c_2-\ldots-2a_nc_n.$$

$$\Leftrightarrow\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)-2a_1b_1-2a_2b_2-\ldots-2a_nb_n$$
$$+\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)$$
$$\le\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)-2a_1c_1-2a_2c_2-\ldots-2a_nc_n$$
$$+\left(c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2\right).$$

$$\Leftrightarrow(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2$$
$$\le(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2+\ldots+(a_n-c_n)^2.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $a_1=a_2=\ldots=a_n$ hoặc $b_1=b_2=\ldots=b_n$.

Bài 7. *Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n, (n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ và $\alpha \geq \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng* $\frac{a_1^\alpha}{a_1+a_2} + \frac{a_2^\alpha}{a_2+a_3} + ... + \frac{a_n^\alpha}{a_n+a_1} \geq \frac{a_1^{\alpha-1}+a_2^{\alpha-1}+...+a_n^{\alpha-1}}{2}$.

Lời giải. Đặt $P = \frac{a_1^\alpha}{a_1+a_2} + \frac{a_2^\alpha}{a_2+a_3} + ... + \frac{a_n^\alpha}{a_n+a_1}$

$$Q = \frac{a_1^{\alpha-1}a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^{\alpha-1}a_3}{a_2+a_3} + ... + \frac{a_n^{\alpha-1}a_1}{a_n+a_1}$$

Suy ra

$$P+Q = \frac{a_1^\alpha + a_1^{\alpha-1}a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^\alpha + a_2^{\alpha-1}a_3}{a_2+a_3} + ... + \frac{a_n^\alpha + a_n^{\alpha-1}a_1}{a_n+a_1}$$

$$= a_1^{\alpha-1} + a_2^{\alpha-1} + ... + a_n^{\alpha-1} \quad (1).$$

Sử dụng BĐT Cauchy hai số để đánh giá các mẫu thức của Q ta được:

$$Q \leq \frac{a_1^{\alpha-1}a_2}{2\sqrt{a_1a_2}} + \frac{a_2^{\alpha-1}a_3}{2\sqrt{a_2a_3}} + ... + \frac{a_n^{\alpha-1}a_1}{2\sqrt{a_na_1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_1^{\alpha-\frac{3}{2}}a_2^{\frac{1}{2}} + a_2^{\alpha-\frac{3}{2}}a_3^{\frac{1}{2}} + ... + a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}a_1^{\frac{1}{2}}\right).$$

Mặt khác giả thiết cho $\alpha \geq \frac{3}{2}$ nên theo hệ quả 2 của BĐT hoán vị ta có:

$$\left(a_1^{\alpha-\frac{3}{2}}a_2^{\frac{1}{2}} + a_2^{\alpha-\frac{3}{2}}a_3^{\frac{1}{2}} + ... + a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}a_1^{\frac{1}{2}}\right) \leq a_1^{\alpha-1} + a_2^{\alpha-1} + ... + a_n^{\alpha-1}.$$

Do đó: $Q \leq \frac{1}{2}\left(a_1^{\alpha-1} + a_2^{\alpha-1} + ... + a_n^{\alpha-1}\right) \quad (2).$

Từ (1), (2) suy ra: $P \geq \frac{1}{2}\left(a_1^{\alpha-1} + a_2^{\alpha-1} + ... + a_n^{\alpha-1}\right)$, tức là

$$\frac{a_1^\alpha}{a_1+a_2} + \frac{a_2^\alpha}{a_2+a_3} + ... + \frac{a_n^\alpha}{a_n+a_1} \geq \frac{a_1^{\alpha-1}+a_2^{\alpha-1}+...+a_n^{\alpha-1}}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Bài 8. *Cho n số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$, $n, k \in \mathbb{N}, n \geq 3; 1 \leq k \leq n$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n}{n} \geq \left(\frac{a_1^{n-k} + a_2^{n-k} + ... + a_n^{n-k}}{n}\right)\left(\frac{a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k}{n}\right).$$

Lời giải. Từ giả thiết, không mất tính tổng quát giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq 0$, suy ra:

$a_1^{n-k} \geq a_2^{n-k} \geq ... \geq a_n^{n-k} \geq 0$, $a_1^k \geq a_2^k \geq ... \geq a_n^k \geq 0$.

Theo hệ quả 2 của BĐT hoán vị ta được:

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n \geq a_1^{n-k}a_2^k + a_2^{n-k}a_3^k + ... + a_n^{n-k}a_1^k$$

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n \geq a_1^{n-k}a_3^k + a_2^{n-k}a_4^k + ... + a_n^{n-k}a_2^k$$

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n \geq a_1^{n-k}a_n^k + a_2^{n-k}a_1^k + ... + a_n^{n-k}a_{n-1}^k$$

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n = a_1^{n-k}a_1^k + a_2^{n-k}a_2^k + ... + a_n^{n-k}a_n^k.$$

Cộng vế với vế của n BĐT trên và rút gọn ta được

$$n\left(a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n\right) \geq \left(a_1^{n-k} + a_2^{n-k} + ... + a_n^{n-k}\right)\left(a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n}{n} \geq \left(\frac{a_1^{n-k} + a_2^{n-k} + ... + a_n^{n-k}}{n}\right)\left(\frac{a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k}{n}\right).$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = ... = a_n$ hoặc $k = n$.

Bài 9. *Cho $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Chứng minh rằng*

$$\left(\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2\right)^n + \left(\sin^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1\right)^n \geq 2.$$

Lời giải. Với giả thiết đã cho ta được

$$\begin{cases} 0 < \sin^2\alpha_1 \leq \sin^2\alpha_2 < 1 \\ 0 < \cos^2\alpha_2 \leq \cos^2\alpha_1 < 1 \end{cases}.$$

Rõ ràng $\left(\cos^2\alpha_1, \cos^2\alpha_2\right)$ là một hoán vị của $\left(\cos^2\alpha_2, \cos^2\alpha_1\right)$. Theo hệ quả 3 của BĐT hoán vị thì

$$\left(\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2\right)^n + \left(\sin^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1\right)^n$$

$$\geq \left(\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1\right)^n + \left(\sin^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2\right)^2 = 2.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ hoặc $n = 1$.

Bài 10. *Cho $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$, $(t_1, t_2, ..., t_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $m \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng*

$$x_1^m + x_2^m + ... + x_n^m \geq \left(\frac{x_1+t_1}{2}\right)^m + \left(\frac{x_2+t_2}{2}\right)^m + ... + \left(\frac{x_n+t_n}{2}\right)^m.$$

Lời giải. Từ giả thiết, không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n \ge 0$. Suy ra

$\frac{x_1}{2} \ge \frac{x_2}{2} \ge ... \ge \frac{x_n}{2} \ge 0$, dễ thấy $\left(\frac{t_1}{2}, \frac{t_2}{2}, ..., \frac{t_n}{2}\right)$ một hoán vị tùy ý của $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{2}\right)$.

Theo hệ quả 3 của BĐT hoán vị ta được:

$$\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_1}{2}\right)^m + \left(\frac{x_2}{2}+\frac{x_2}{2}\right)^m + ... + \left(\frac{x_n}{2}+\frac{x_n}{2}\right)^m$$

$$\ge \left(\frac{x_1}{2}+\frac{t_1}{2}\right)^m + \left(\frac{x_2}{2}+\frac{t_2}{2}\right)^m + ... + \left(\frac{x_n}{2}+\frac{t_n}{2}\right)^m$$

hay $x_1^m + x_2^m + ... + x_n^m$

$$\ge \left(\frac{x_1+t_1}{2}\right)^m + \left(\frac{x_2+t_2}{2}\right)^m + ... + \left(\frac{x_n+t_n}{2}\right)^m.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = ... = x_n$ hoặc $m = 1$.

3. Bài tập

1. [*IMO* - 1964] Cho *a*, *b*, *c* là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le 3abc.$$

2. [*IMO* - 1995] Cho *a*, *b*, *c* là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}.$$

3. [*IMO* - 1978] Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là *n* số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng

$$a_1 + \frac{a_2}{4} + ... + \frac{a_n}{n^2} \ge 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}.$$

4. [*T8/292-10/2001-TH&TT*] Xét *k* số không âm $x_1, x_2, ..., x_k$.

a) Biết $x_1 + x_2 + ... + x_k \ge k$. Chứng minh rằng

$$x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_k^\alpha \ge x_1 + x_2 + ... + x_k$$

với số thực $\alpha \ge 1$.

b) Biết $x_1^b + x_2^b + ... + x_k^b \ge k$. Chứng minh rằng

$$x_1^a + x_2^a + ... + x_k^a \ge x_1^b + x_2^b + ... + x_k^b$$

với mọi số thực a,b thỏa mãn $a \ge b > 0$.

5. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là *n* số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \le \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n}{n}}$.

6. [*BĐT Cauchy*] Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là *n* số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

7. [*BĐT Chebyshev*]

a) Cho $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ và $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$. Chứng minh rằng

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)$$
$$\ge (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n).$$

b) Cho $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ và $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$. Chứng minh rằng

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)$$
$$\le (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n).$$

8. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là *n* số thực dương và $n, p \in \mathbb{N}, n \ge 3, p \ge 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^{2p}}{a_2^2 + a_2a_3 + a_3^2} + \frac{a_2^{2p}}{a_3^2 + a_3a_4 + a_4^2} + ... + \frac{a_n^{2p}}{a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2}$$
$$\ge \frac{(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)^{p-1}}{3n^{p-2}}.$$

9. Cho $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ là hai dãy số thực không âm hữu hạn, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, ..., b_n)$ và $\lambda \ge 1$.

a) Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ sắp thứ tự cùng chiều thì

$$(a_1 + b_1)^\lambda + (a_2 + b_2)^\lambda + ... + (a_n + b_n)^\lambda$$
$$\ge (a_1 + x_1)^\lambda + (a_2 + x_2)^\lambda + ... + (a_n + x_n)^\lambda.$$

b) Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ sắp thứ tự ngược chiều thì

$$(a_1 + b_1)^\lambda + (a_2 + b_2)^\lambda + ... + (a_n + b_n)^\lambda$$
$$\le (a_1 + x_1)^\lambda + (a_2 + x_2)^\lambda + ... + (a_n + x_n)^\lambda.$$

10. Cho $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n, c_1, c_2, ..., c_n$ là ba dãy số thực không âm hữu hạn, $(y_1, y_2, ..., y_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, ..., b_n)$, $(z_1, z_2, ..., z_n)$

là một hoán vị tùy ý của $(c_1, c_2, ..., c_n)$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng:

a) Nếu $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, $c_1, c_2, ..., c_n$ sắp thứ tự cùng chiều thì

$$(a_1+b_1+c_1)^m + (a_2+b_2+c_2)^m + ... + (a_n+b_n+c_n)^m$$
$$\geq (a_1+y_1+z_1)^m + (a_2+y_2+z_2)^m + ... + (a_n+y_n+z_n)^m$$

b) Nếu trong ba dãy $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, $c_1, c_2, ..., c_n$ có một dãy sắp thứ tự ngược chiều với hai dãy còn lại thì

$$(a_1+b_1+c_1)^m + (a_2+b_2+c_2)^m + ... + (a_n+b_n+c_n)^m$$
$$\leq (a_1+y_1+z_1)^m + (a_2+y_2+z_2)^m + ... + (a_n+y_n+z_n)^m.$$

(Hiện tại tác giả vẫn chưa giải được hai bài toán 9,10. Tác giả rất vui khi nhận được những trao đổi từ bạn đọc).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Bất đẳng thức định lí và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2] Vũ Đình Hòa, 2007, *Một câu chuyện dài về một bất đẳng thức nổi tiếng*, Tạp chí TH&TT.

[3] Trần Hữu Nam, 2015, *Bất đẳng thức hoán vị và một số áp dụng*, Tạp chí TH&TT

[4] Nguyễn Đình Dũng, 2019, *Một mở rộng của bất đẳng thức hoán vị*, Tạp chí TH&TT.

[5] Phạm Văn Thuận, Lê Vĩ, 2007, *Bất đẳng thức suy luận và khám phá*, Nhà xuất bản ĐHQG HN.

[6] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, Việt Nam.

****

BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI...

(Tiếp theo trang 3)

$$(a+b+c)^2 + (3-a-b-c)^2$$
$$= 2(a+b+c)^2 - 6(a+b+c) + 9$$
$$= 2\left(a+b+c-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$. Vậy $\min P = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Thí dụ 4.3 (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10, Hà Tĩnh năm học 2018 – 2019). *Cho a, b là các số thực thỏa mãn $(a+2)(b+2) = \frac{25}{4}$.*

Tìm GTNN của biểu thức:

$$F = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4}.$$

Lời giải. Sử dụng BĐT Minkowski, ta có:

$$F = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4} = \sqrt{1+(a^2)^2} + \sqrt{1+(b^2)^2}$$
$$\geq \sqrt{(1+1)^2 + (a^2+b^2)^2} = \sqrt{(a^2+b^2)^2+4}.$$

Theo giả thiết ta có:

$$(a+2)(b+2) = \frac{25}{4} \Leftrightarrow 2(a+b) + ab = \frac{9}{4}.$$

Từ đó ta xét các BĐT:

$$\begin{cases} 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \\ ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+b) \leq 2(a^2+b^2)+1 \\ ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \end{cases}.$$

Cộng theo vế hai BĐT trên với nhau, ta được:

$$\frac{9}{4} = 2(a+b) + ab \leq \frac{5}{2}(a^2+b^2) + 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow F = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4} \geq \frac{\sqrt{17}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$. Vậy $\min F = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/512 (Lớp 6). Tìm tất cả các số tự nhiên N biết rằng tổng tất cả các ước số của N bằng $2N$ và tích tất cả các ước số của N bằng N^2.

TRƯƠNG QUANG AN
(Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T2/512 (Lớp 7). Cho a, b, c là các số tự nhiên thỏa mãn $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}$. Chứng minh rằng

$$\frac{2019b-2020a}{2019c-2020b}>1.$$

LÊ MINH HOÀ
(GV THCS Khả Cửu, Thanh Sơn, Phú Thọ)

Bài T3/512. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2=2z-1 \\ y^2=xz \\ z^2=2y-1 \end{cases}.$$

PHẠM NHƯ HIỀN
(Số nhà 50/07, ngõ 115, tổ 10, phường Kỳ Bá, TP. Thái Bình)

Bài T4/512. Cho tam giác nhọn ABC, kẻ các đường cao CH, BK (H, K lần lượt nằm trên AB và AC). Trên tia CH lấy điểm P, trên tia BK lấy điểm Q sao cho góc $\widehat{PAQ}=90^0$. Kẻ AM vuông góc với PQ (M nằm trên PQ). Chứng minh rằng MB vuông góc với MC.

ĐÀO CHÍ THANH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T5/512. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3(a^2+b^2+c^2)+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}.$$

BÙI HẢI QUANG
(GV THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/512. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x\ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z}.$$

DƯƠNG VĂN SƠN
(GV THPT Hà Huy Tập, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T7/512. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\tan\frac{3\pi}{x}+4\sin\frac{2\pi}{x}=\sqrt{x}$.

ĐẶNG THANH HẢI
(GV Học Viện Phòng không - Không quân, Sơn Tây, Hà Nội)

Bài T8/512. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M là trung điểm cạnh BC, X là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn (O), P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên CI, BI. Chứng minh rằng $XI\perp PQ$.

NGUYỄN NGỌC TÚ
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T9/512. Cho tam giác ABC có diện tích S và các cạnh $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Giải hệ phương trình (ẩn x, y, z): $\begin{cases} a^2x+b^2y+c^2z=4S \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$.

LÊ QUANG NẪM
(Khoa Toán Tin, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/512. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì ta luôn có n và $2^{2^n}+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/512. Cho các dãy số $(x_n),(y_n)$ xác định bởi $\begin{cases} x_1=3, x_2=17, x_{n+2}=6x_{n+1}-x_n \\ y_1=4, y_2=24, y_{n+2}=6y_{n+1}-y_n \end{cases}$ $(n\geq 1, n\in\mathbb{N})$.

Chứng minh rằng không có số hạng nào của các dãy số $(x_n),(y_n)$ là lập phương của một số nguyên.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định)

Bài T12/512. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O). A' đối xứng với A qua O. P là hình chiếu vuông góc của A' trên đường trung trực của BC. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm các tam giác APA', BPA', CPA'. Chứng minh rằng đường tròn $(H_aH_bH_c)$ tiếp xúc với (O).

NGUYỄN VĂN LINH (*Hà Nội*)

Bài L1/512. Trên mặt nước có hai nguồn kết hợp đặt tại hai điểm A và B, dao động cùng pha theo phương thẳng đứng, phát ra hai sóng có bước sóng λ. Trên đoạn AB có 9 vị trí mà ở đó các phần tử nước dao động với biên độ cực đại. C và D là hai điểm trên mặt nước sao cho $ABCD$ là hình vuông. M là một điểm thuộc cạnh CD và nằm trên vân cực đại giao thoa bậc nhất. Biết phần tử M dao động ngược pha với các nguồn. Hãy xác định độ dài đoạn AB theo bước sóng λ.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/512. Cho đoạn mạch điện xoay chiều chỉ chứa cuộn cảm thuần có hệ số tự cảm $L=\frac{1}{\pi}$ (H). Đặt điện áp xoay chiều có tần số 50 Hz vào hai đầu đoạn mạch. Tại thời điểm điện áp hai đầu mạch có giá trị $100\sqrt{3}$ V thì cường độ dòng điện trong mạch là 1 A. Xác định điện áp hiệu dụng giữa hai đầu cuộn cảm.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For secondary school

Problem T1/512 (For 6th grade). Find all natural numbers N so that the sum of its factors is equal to $2N$ and the product of its factors is equal to N^2.

Problem T2/512 (For 7th grade). Given natural numbers a, b, c such that $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}$. Prove that

$$\frac{2019b-2020a}{2019c-2020b}>1.$$

Problem T3/512. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^2=2z-1 \\ y^2=xz \\ z^2=2y-1 \end{cases}.$$

Problem T4/512. Given an acute triangle ABC. Draw the altitudes CH, BK (H, K is respectively on AB and AC). Choose two points P and Q on the ray CH and the ray BK respectively such that $\widehat{PAQ}=90^0$. Draw AM perpendicular to PQ (M is on PQ). Show that MB is perpendicular to MC.

Problem T5/512. Let a, b, c be positive numbers satisfying $ab+bc+ca=8$. Find the minimum value of the expression

$$P=3(a^2+b^2+c^2)+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}.$$

For high school

Problem T6/512. Let x, y, z be positive numbers so that $x\geq z$. Find the minimum value of the expression $P=\frac{xz}{y^2+yz}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{x+2z}{x+z}$.

Problem T7/512. Find the integral solutions of the equation: $\tan\frac{3\pi}{x}+4\sin\frac{2\pi}{x}=\sqrt{x}$.

Problem T8/512. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O), and (I) is the incircle of the triangle. Let M be the midpoint of BC, and X the midpoint of the arc $\overset{\frown}{BAC}$ of (O). Let P, Q respectively be the perpendicular projections of M on CI, BI. Show that $XI\perp PQ$.

(*Xem tiếp trang* 42)

Bài T1/508 (Lớp 6). *Cho*

$A = 11.13.15 + 13.15.17 + ... + 91.93.95 + 93.95.97.$

Hỏi A có chia hết cho 5 không?

Lời giải. Ta chứng minh kết luận mạnh hơn: *Chứng minh rằng số A chia hết cho* 180 = 4.5.9.

Mỗi số hạng của tổng A có dạng:

$a_n = (2n + 1)(2n + 3)(2n + 5)$, trong đó n lấy các giá trị là các số nguyên liên tiếp từ 5 đến 46, tức là có 42 số hạng.

Cách 1. Ta thấy:

$8a_n = 8(2n + 1)(2n + 3)(2n + 5)$

$= (2n + 1)(2n + 3)(2n + 5)[2n + 7 - (2n - 1)]$

$= (2n + 1)(2n + 3)(2n + 5)(2n + 7)$

$- (2n - 1)(2n + 1)(2n + 3)(2n + 5).$

Cho n lấy giá trị các số nguyên liên tiếp từ 5 đến 46 ta được

$8A = 11.13.15(17 - 9) + 13.15.17(19 - 11)$

$+ 15.17.19(21 - 13) + ... + 91.93.95(97 - 89)$

$+ 93.95.97(99 - 91)$

$= (11.13.15.17 - 9.11.13.15) + (13.15.17.19$

$- 11.13.15.17) + (15.17.19.21 - 13.15.17.19)$

$+ ... + (91.93.95.97 - 89.91.93.95) + (93.95.97.99$

$- 91.93.95.97) = 93.95.97.99 - 9.\ 11.13.15$

$= 99.5(93.19.97 - 13.3) = 11.9.5.171360$

$= 11.9.25.4.8.1071 = 8.\ 900.11781$, suy ra

$A = 900.11781 = 180.58905$, tức là số A chia hết cho 180.

Cách 2. • Tổng A có 42 số hạng. Tổng hai số hạng liên tiếp của A là: $a_n + a_{n+1}$

$= (2n + 1)(2n + 3)(2n + 5) + (2n + 3)(2n + 5)(2n + 7)$

$= (2n + 3)(2n + 5)((2n + 1 + 2n + 7)$

$= 4(n + 2)(2n + 3)(2n + 5)$ chia hết cho 4, mà A có 21 tổng hai số hạng liên tiếp nên A chia hết cho 4.

• Chia 42 số hạng của A thành 9 bộ, 8 bộ đầu mỗi bộ có 5 số hạng liên tiếp, bộ thứ 9 có hai số hạng. Xét năm số hạng liên tiếp của mỗi bộ (trong 8 bộ) là a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} trong đó $n = 5k$ với k bằng 1, 2,..., 8, thì ba số hạng đầu a_n, a_{n+1}, a_{n+2} đều chứa thừa số $2n + 5 = 5(2k + 1)$ chia hết cho 5, các thừa số đó là 15, 25,..., 85, do đó các số hạng này đều chia hết cho 5.

Tổng hai số hạng còn lại $a_{n+3} + a_{n+4}$ là

$(2n + 7)(2n + 9)(2n + 11) + (2n + 9)(2n + 11)(2n + 13)$

$= (2n + 9)(2n + 11)[(2n + 7) + (2n + 13)]$

$= (2n + 9)(2n + 11)(4n + 20)$ cũng chia hết cho 5 vì $4n + 20 = 4.5k + 20 = 5.4(k + 1)$. Còn lại bộ thứ 9 có hai số hạng cuối cùng 91.93.95 và 93.95.97 đều chia hết cho 5. Do đó số A chia hết cho 5.

• Chia 42 số hạng của A thành 14 bộ ba số hạng liên tiếp dạng a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, trong đó mỗi số hạng đều chứa thừa số $2n + 5$, mà $2n + 5$ chia hết cho 3, tương ứng với n bằng 5, 8, 11,..., 44, các thừa số đó là 15, 21, 27,..., 93. Xét tổng của ba số hạng liên tiếp của mỗi bộ của A là:

$a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$

$= (2n + 1)(2n + 3)(2n + 5) + (2n + 3)(2n + 5)(2n + 7)$

$+ (2n + 5)(2n + 7)(2n + 9)$

$= 4(n + 2)(2n + 3)(2n + 5)$

$+ (2n + 5)(2n + 7)(2n + 9)$

$= (2n + 5)[(4n + 8)(2n + 3) + (2n + 7)(2n + 9)]$

$= (2n + 5)(12n^2 + 60n + 87)$

$= 3(2n + 5)(4n^2 + 20n + 29)$ chia hết cho 9 do $2n + 5$ chia hết cho 3. Mỗi tổng của ba số hạng liên tiếp của A chia hết cho 9 nên tổng của 14 bộ ba số hạng liên tiếp của A cũng chia hết cho 9, do đó số A chia hết cho 9.

Số A chia hết cho 4, 5, 9 mà ba số này nguyên tố cùng nhau nên số A chia hết cho tích 4.5.9 = 180.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng. **Hà Nội:** *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống

Đa; **Nghệ An:** *Phạm Ngọc Trinh*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Văn Việt*, *Nguyễn Thái Hoàng Anh*, *Thái Thị Mỹ Hạnh*, *Thái Minh Quân*, *Lê Văn Thắng*, *Hoàng Vân Khánh*, *Đào Phương Anh*, *Nguyễn Đăng Quang*, 6B, *Nguyễn Hằng Nga*, *Lê Văn Quang Hiếu*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Võ Nguyên Thăng*, 6A, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà; **Phú Yên**: *Phạm Đắc Bảo Khang*, 6H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hòa; **Quảng Ngãi:** *Võ Hữu Thanh Thảo*, *Cao Bá Duy Minh*, 6B, *Võ Trương Minh Huy*, 6C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/508 (Lớp 7). *Tìm 2019 số mà mỗi số có giá trị tuyệt đối không lớn hơn 0,5 và tổng của ba số bất kỳ là một số nguyên.*

Lời giải. Gọi các số cần tìm là: $x_1, x_2, ..., x_{2019}$.

Theo đề bài ta có: $-0,5 \le x_1, x_2, ..., x_{2019} \le 0,5$.

Giả sử trong 2019 số này có ít nhất hai số khác nhau. Không mất tính tổng quát, gọi hai số đó là x_1, x_2 $(x_1 > x_2)$. Ta có: $x_1 + x_3 + x_4$, $x_2 + x_3 + x_4$ là các số nguyên nên:

$(x_1 + x_3 + x_4) - (x_2 + x_3 + x_4) = x_1 - x_2$ là số nguyên. Mà $0 \le x_1 - x_2 \le 1$ nên $x_1 - x_2 = 1$. Do đó $x_1 = 0,5$; $x_2 = -0,5$. Ta lại có: $x_1 + x_2 + x_3 = x_3$ là số nguyên. Mà $-0,5 \le x_3 \le 0,5$ nên $x_3 = 0$.

Tương tự $x_1 + x_2 + x_4 = x_4$ là số nguyên nên $x_4 = 0$. Khi đó ta xét thấy: $x_1 + x_3 + x_4 = 0,5$ không là số nguyên (mẫu thuẫn với đề bài).

Vậy giả sử trên là sai, suy ra : $x_1 = x_2 = ... = x_{2019}$.

Mà $-1,5 \le x_1 + x_2 + x_3 \le 1,5$ và $3x_1 = x_1 + x_2 + x_3$ là số nguyên, do đó:

$$3x_1 \in \{-1;0;1\} \Rightarrow x_1 \in \left\{-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3}\right\}$$

Vậy $x_1 = x_2 = ... = x_{2019} = 0$ hoặc

$x_1 = x_2 = ... = x_{2019} = -\frac{1}{3}$ hoặc $x_1 = x_2 = ... = x_{2019} = \frac{1}{3}$

Nhận xét. Một số bạn nắm được cách làm và hiểu đề, tuy nhiên kết quả vẫn còn thiếu nghiệm. Các bạn sau có kết quả đúng: **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Nghệ An**: *Lê Văn Quang Hiếu*, *Nguyễn Hằng Nga*, 7D, *Nguyễn Công Phúc*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN THỊ THÙY LINH

Bài T3/508. *Cho x, y, z là các số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} - \frac{7}{6}(x+y+z).$$

Lời giải. Nhận thấy $x^2 + y^2 \ge 2xy > 0$ nên $\frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2xy}$, dấu "=" xảy ra khi $x = y$. Do đó:

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = \frac{x(x^2+y^2) - xy^2}{x^2+y^2} = x - \frac{xy^2}{x^2+y^2} \ge x - \frac{xy^2}{2xy}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x^2+y^2} \ge x - \frac{y}{2} \quad (1);$$

Tương tự ta có:

$$\frac{y^3}{y^2+z^2} \ge y - \frac{z}{2} \ (2); \ \frac{z^3}{z^2+x^2} \ge z - \frac{x}{2} \ (3)$$

Cộng theo vế của (1), (2), (3) ta có:

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} \ge x - \frac{y}{2} + y - \frac{z}{2} + z - \frac{x}{2} = \frac{x+y+z}{2}.$$

Do đó:

$$P \ge x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x+y+z}{2} - \frac{7}{6}(x+y+z)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}(x+y+z)$$

$$= \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \ge -\frac{1}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

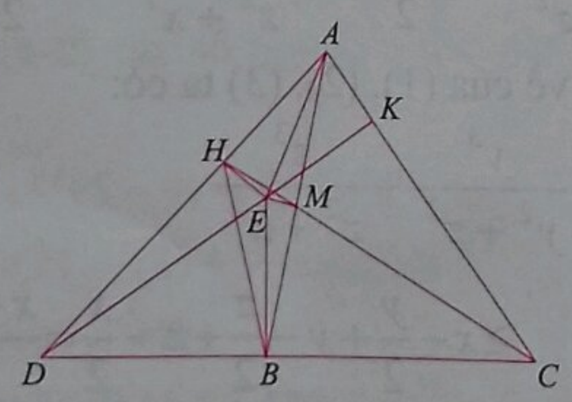
Vậy min $P = -\frac{1}{3}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều tìm ra kết quả và cách làm tương tự như trên. Nhiều bạn lập luận còn dài dòng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa,* 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Vĩnh Phúc**: *Tạ Kim Nam Tuấn,* 8A2, THCS Yên Lạc; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng,* 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Phú Thọ**: *Bùi Thị Hồng Thư, Đào Quang Huy, Phạm Thị Minh Châu, Triệu Hoàng Ánh Dương,* 8A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An**: *Trương Đình Khải, Nguyễn Công Phúc,* 8C, *Đặng Hữu Thanh,* 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư,* 7A1. THCS Kế An, Kế Sách; **Quảng Trị**: *Nguyễn Anh Quân,* 8D, THCS Trần Hưng Đạo, TTr. Cam Lộ.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/508. *Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ là các góc nhọn. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $\widehat{DAB}=\widehat{BCM}$. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với CD, đường thẳng này cắt đường trung trực của đoạn thẳng AB ở E. Chứng minh đường thẳng DE và đường thẳng AC vuông góc với nhau.*

Lời giải.



Gọi H là giao điểm của CM và AD; K là giao điểm của DE và AC. Từ giả thiết $\widehat{BAH}=\widehat{BCH}$ nên tứ giác $ACBH$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AHC}=\widehat{ABC}$ (1). Mặt khác, EM là đường trung trực của AB nên theo tính chất đường trung trực ta có:

$\widehat{AEM}=\widehat{BEM}=90^0-\widehat{EBM}=\widehat{ABC}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHM}=\widehat{AEM}$, nên tứ giác $AHEM$ nội tiếp, dẫn đến $\widehat{AHE}=\widehat{AME}=90^0$. Do $\widehat{EHD}=\widehat{EBD}=90^0$ nên tứ giác $BDHE$ nội tiếp, ta có $\widehat{DHB}=\widehat{DEB}$ (3). Lại có tứ giác $ACBH$ nội tiếp nên $\widehat{DHB}=\widehat{ACB}$ (4). Từ (3) và (4) ta có $\widehat{DEB}=\widehat{KCB}$, suy ra tứ giác $BCKE$ nội tiếp, từ đó $\widehat{EKC}=180°-\widehat{EBC}=90^0$. Vậy $DE\perp AC$.

Nhận xét. Chỉ có ba bạn sau cho lời giải đúng: **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Phú Thọ:** *Triệu Hoàng Ánh Dương*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Lê Xuân Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Đại học Vinh.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/508. *Giải phương trình*

$$x^{2010}-2011x^{670}+\sqrt{2010}=0.$$

Lời giải. Đặt $t=x^{670}$, $t\ge 0$, phương trình trở thành: $t^3-2011t+\sqrt{2010}=0$

$$\Leftrightarrow t\left(t^2-2010\right)-\left(t-\sqrt{2010}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow t\left(t-\sqrt{2010}\right)\left(t+\sqrt{2010}\right)-\left(t-\sqrt{2010}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2010}\right)\left(t^2+\sqrt{2010}.t-1\right)=0$$

Nếu $t-\sqrt{2010}=0$ ta được:

$$x^{670}=\sqrt{2010}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[1340]{2010}.$$

Nếu $t^2+\sqrt{2010}.t-1=0$ ta được:

$$t=\frac{-\sqrt{2010}\pm\sqrt{2014}}{2}.$$

Vì $t=x^{670}\ge 0$ nên

$$x^{670}=\frac{-\sqrt{2010}+\sqrt{2014}}{2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[670]{\frac{-\sqrt{2010}+\sqrt{2014}}{2}}$$

Vậy phương trình có tập hợp nghiệm là:

$$\left\{-\sqrt[1340]{2010};\sqrt[1340]{2010};-\sqrt[670]{\frac{-\sqrt{2010}+\sqrt{2014}}{2}};\sqrt[670]{\frac{-\sqrt{2010}+\sqrt{2014}}{2}}\right\}.$$

Nhận xét. Các bạn tham khảo thêm cách giải sau: Đặt $a=\sqrt{2010}>0\Rightarrow 2011=a^2+1$ phương trình trở thành: $x^{2010}-\left(a^2+1\right)x^{670}+a=0$

$$\Leftrightarrow x^{670}.a^2-a-x^{2010}+x^{670}=0$$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn a, giải ra ta được: $\left[\begin{array}{l} a = x^{670} = \sqrt{2010} \\ a = \dfrac{1-x^{1340}}{x^{670}} = \sqrt{2010} \end{array}\right.$. Từ đó tìm được x.

Nhận xét. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Phú Thọ**: *Nguyễn Phạm Thanh Nga*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, *Lại Trường Giang*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Nghệ An**: *Trương Đình Khải*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Phạm Ngọc Trinh*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Thanh Hóa**: *Lê Minh Huy*, 8E, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/508. *Cho a, b, c là ba số thực không âm và không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì*

$$\frac{a^{2^n}+b^{2^n}}{a^{2^n}+c^{2^n}}+\frac{b^{2^n}+c^{2^n}}{b^{2^n}+a^{2^n}}+\frac{c^{2^n}+a^{2^n}}{c^{2^n}+b^{2^n}} \ge \frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}.$$

Lời giải. Trước hết ta nhận xét bất đẳng thức đã cho trong trường hợp $n = 1$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+b^2} \ge \frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b} \quad (*).$$

là không đúng với $a = 50$, $b = 49$ và $c = 0$ (với các giá trị trên, hiệu vế trái trừ vế phải ta thu được hiệu số là số âm gần bằng –0.00382482).

Tuy nhiên, bất đẳng thức (*) vẫn đúng trong trường hợp có hai trong ba số a, b, c bằng nhau. Chẳng hạn giả sử $a = b$. Như vậy, (*) trở thành :

$$\frac{a^2+a^2}{a^2+c^2}+\frac{a^2+c^2}{a^2+a^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2} \ge \frac{a+a}{a+c}+\frac{a+c}{a+a}+\frac{c+a}{c+a}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{2a^2}{a^2+c^2}+\dfrac{a^2+c^2}{2a^2} \ge \dfrac{2a}{a+c}+\dfrac{a+c}{2a}$. Chuyển vế và qui đồng mẫu số, ta cần chứng minh :

$$\frac{\left[2a^2.2a^2+(a^2+c^2)^2\right](a+c)\left[4a^2+(a+c)^2\right]a(a^2+c^2)}{2a^2(a^2+c^2)(a+c)} \ge 0$$

Cuối cùng chỉ cần chứng minh

$$\left[2a^2.2a^2+(a^2+c^2)^2\right](a+c)-$$
$$-\left[4a^2+(a+c)^2\right]a(a^2+c^2) \ge 0.$$

Khai triển trong ngoặc ta có:

$$\left[2a^2.2a^2+(a^2+c^2)^2\right](a+c)-\left[4a^2+(a+c)^2\right]a(a^2+c^2)$$
$$=(5a^4+2a^2c^2+c^4)(a+c)-(5a^3+2a^2c+ac^2)(a^2+c^2)$$
$$=(5a^5+5a^4c+2a^3c^2+2a^2c^3+ac^4+c^5)$$
$$-(5a^5+5a^3c^2+2a^4c+2a^2c^3+a^3c^2+ac^4)$$
$$=3a^4c-4a^3c^2+c^5=c(3a^4-4a^3c+c^4)$$
$$=c\left[3(a^4-a^3c)-(a^3c-c^4)\right]$$
$$=c(a-c)\left[3a^3-c(a^2+ac+c^2)\right]$$
$$=c(a-c)\left[(a^3-a^2c)+(a^3-ac^2)+(a^3-c^3)\right]$$
$$=c(a-c)^2\left[a^2+a(a+c)+(a^2+ac+c^2)\right] \ge 0.$$

Bây giờ ta chứng minh bằng quy nạp khi $a = b$ thì

$$\frac{a^{2^n}+b^{2^n}}{a^{2^n}+c^{2^n}}+\frac{b^{2^n}+c^{2^n}}{b^{2^n}+a^{2^n}}+\frac{c^{2^n}+a^{2^n}}{c^{2^n}+b^{2^n}} \ge \frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức đúng cho trường hợp $n = 1$ theo chứng minh trên. Giả sử bất đẳng thức đúng cho n. Khi đó ta có $b^{2^n} = a^{2^n}$ do $b = a$. Áp dụng (*) cho các số $b^{2^n} = a^{2^n}$, ta có

$$\frac{(a^{2^n})^2+(b^{2^n})^2}{(a^{2^n})^2+(c^{2^n})^2}+\frac{(b^{2^n})^2+(c^{2^n})^2}{(b^{2^n})^2+(a^{2^n})^2}+\frac{(c^{2^n})^2+(a^{2^n})^2}{(c^{2^n})^2+(b^{2^n})^2}$$

$\ge \dfrac{a^{2^n}+b^{2^n}}{a^{2^n}+c^{2^n}}+\dfrac{b^{2^n}+c^{2^n}}{b^{2^n}+a^{2^n}}+\dfrac{c^{2^n}+a^{2^n}}{c^{2^n}+b^{2^n}}$. Áp dụng (*) và giả thiết quy nạp, ta có

$$\frac{a^{2^{n+1}}+b^{2^{n+1}}}{a^{2^{n+1}}+c^{2^{n+1}}}+\frac{b^{2^{n+1}}+c^{2^{n+1}}}{b^{2^{n+1}}+a^{2^{n+1}}}+\frac{c^{2^{n+1}}+a^{2^{n+1}}}{c^{2^{n+1}}+b^{2^{n+1}}}$$
$$\ge \frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}.$$

Nhận xét. Đây là một bất đẳng thức để lại cho các bạn nhiều bài học. Trước một bài toán các bạn cần xem xét kỹ tính đúng đắn của nó. Có thể nhận thấy là nếu bất đẳng thức (*) đúng cho mọi a, b, c cho một lớp T các giá trị đặc biệt và a^{2^n}, b^{2^n} và c^{2^n} luôn thuộc lớp T thì

$$\frac{a^{2^n}+b^{2^n}}{a^{2^n}+c^{2^n}}+\frac{b^{2^n}+c^{2^n}}{b^{2^n}+a^{2^n}}+\frac{c^{2^n}+a^{2^n}}{c^{2^n}+b^{2^n}} \ge \frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}$$

được thỏa mãn cho mọi n. Các bạn có thể tìm tòi

thêm xem lớp những giá trị a, b, c thỏa mãn bất đẳng thức đã cho nhé. Đây sẽ là một bài toán rất thú vị và đặc biệt khó.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T7/508. *Tìm tập giá trị của biểu thức*

$$f(A,B,C)=\sin A+\sin B+\sin C-\sin A\sin B\sin C$$

với A, B, C là 3 góc của tam giác.

Lời giải. • Trước hết ta chứng minh $0<f(A,B,C)<2$ với mọi A, B, C là 3 góc của tam giác. Thật vậy:

$$f(A,B,C)=\sin A+\sin B+\sin C(1-\sin A\sin B)>0.$$

Gọi A là góc nhỏ nhất trong 3 góc A, B, C, suy ra $0^0<A\le 60^0$. Ta sẽ chứng minh:

$$f(A,B,C)=\sin A+\sin B+\sin C-\sin A\sin B\sin C$$

$$\le \sin A+2\cos\frac{A}{2}-\sin A\cos^2\frac{A}{2} \quad (1).$$

Thật vậy: $(1)\Leftrightarrow \sin B+\sin C-\sin A\sin B\sin C$

$$\le 2\cos\frac{A}{2}-\sin A\cos^2\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin B+\sin C-2\cos\frac{A}{2}\le \sin A\left(\sin B\sin C-\cos^2\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-1\right)$$

$$\le\frac{1}{2}\sin A\left[\cos(B-C)-\cos(B+C)-1-\cos A\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\ge\frac{1}{2}\sin A\left[1-\cos(B-C)\right]$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos\frac{B-C}{2}\ge\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left[1-\cos(B-C)\right] \quad (2).$$

Vì $0^0<A\le 60^0$ nên $\sin\frac{A}{2}\le\frac{1}{2}$, do đó:

$$\text{VP}(2)\le\frac{1}{4}\left[1-\cos(B-C)\right]=\frac{1}{2}\sin^2\frac{B-C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}$$

$$=1-\cos\frac{B-C}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)^2$$

$$\le 1-\cos\frac{B-C}{2}=\text{VT}(2).$$

Vậy $f(A,B,C)\le\sin A+2\cos\frac{A}{2}-\sin A\cos^2\frac{A}{2}=g(A)$ với $0^0<A\le 60^0$. Ta có:

$$g(A)=2\cos\frac{A}{2}+\sin A\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=2\cos\frac{A}{2}+\sin A\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos A\right).$$

$$=2\cos\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\sin A-\frac{1}{4}\sin 2A$$

$$\Rightarrow g'(A)=-\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}(\cos A-\cos 2A)$$

$$=\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{3A}{2}-1\right)\le 0$$

$\Rightarrow g$ giảm trên $(0^0,60^0]\Rightarrow g(A)<g(0^0)=2$

$\Rightarrow f(A,B,C)<2.$

• Bây giờ ta chứng minh với $\alpha\in(0;2)$ thì tồn tại A_0,B_0,C_0 là 3 góc của tam giác để $f(A_0,B_0,C_0)=\alpha$. Thật vậy: chọn

$$B=C=\frac{180^0-A}{2}, \text{ ta có:}$$

$f(A,B,C)=g(A)$ với $0^0<A\le 180^0$. Ta có bảng biến thiên của $g(A)$:

A	0^0		A_0		180^0
g	2	↘	α	↘	0

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy tồn tại $\exists A_0\in(0^0;180^0)$ để $g(A_0)=\alpha$

$\Rightarrow f(A_0,B_0,C_0)=\alpha$ với $B_0=C_0=90^0-\frac{A_0}{2}$.

Vậy tập giá trị của $f(A,B,C)$ là (0; 2).

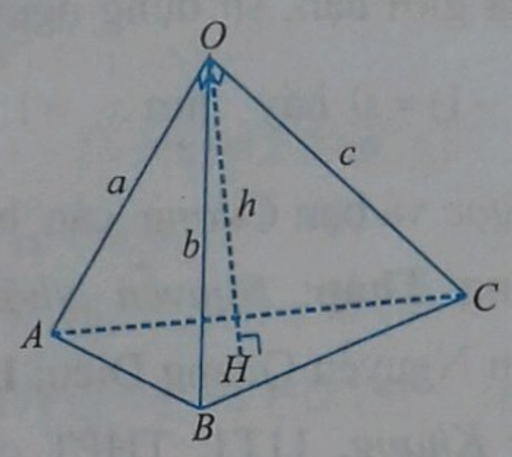
Nhận xét. Đã không có bạn nào giải được bài này.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/508. *Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = a, OB = b, OC = c. Gọi r là bán kính của mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{r}\ge\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Lời giải.



Kẻ $OH \perp (ABC)$, đặt $OH = h$. Ta có

$V_{OABC} = \dfrac{abc}{6} = \dfrac{1}{3}h.S_{ABC}$; từ đó

$$r = \frac{3V_{OABC}}{S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OCA}+S_{ABC}} = \frac{abc}{2(S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OCA}+S_{ABC})}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{ab+bc+ca+2\left(\dfrac{3V_{OABC}}{h}\right)}{abc} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta được:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Do đó: $\dfrac{1}{r} \geq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$,

hay $\dfrac{1}{r} \geq \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hay $OABC$ là tứ diện vuông cân tại O.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên**: *Cao Trung Hiếu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Quảng Bình**: *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới ; **Quảng Trị**: *Hoàng Văn Chương*, 11A8, THPT Cam Lộ, Cam Lộ; **Đồng Tháp**: *Nguyễn Nhật Hào*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Sóc Trăng**: *Đậu Đức Quân*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng; **Long An**: *Võ Hoàng Phúc Khang*, 11T1, THPT chuyên Long An.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/508. *Cho a, b, c, d là các số thực dương và theo thứ tự đó tạo thành cấp số cộng tăng, công sai m. Chứng minh rằng*

$$e^{a^2}(4m^2+2ma+1)+e^{b^2}.2ma+e^{c^2}(2m^2+2ma) < e^{d^2}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra:

$b = m+a, c = b+m, d = c+m \ (m \in \mathbb{R}^*) \Rightarrow c = a+2m.$

BĐT cần được chứng minh $\Leftrightarrow$

$$2m\left[(2m+a).e^{a^2}+a.e^{b^2}+(m+a).e^{c^2}\right] < e^{d^2}-e^{a^2}$$

$$\Leftrightarrow 2m\left(c.e^{a^2}+a.e^{b^2}+b.e^{c^2}\right) < e^{d^2}-e^{a^2} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(x) = e^{x^2}$, $x > 0$. Ta có $f'(x) = 2x.e^{x^2}$ là hàm số đồng biến (vì x và e^{x^2}, $x > 0$ là các hàm số dương, đồng biến). Áp dụng định lý Lagrange ta có: $0 < x < y$, $\exists x < t < y$ mà

$$f(y)-f(x) = f'(t).(y-x) = 2t.e^{t^2}(y-x)$$
$$> 2x.e^{x^2}(y-x).$$

Do đó :

$$e^{d^2}-e^{a^2} = f(d)-f(a) = [f(d)-f(c)]+[f(c)-f(b)]$$
$$+[f(b)-f(a)] > 2m\left(c.e^{c^2}+b.e^{b^2}+a.e^{a^2}\right) \quad (2).$$

Chú ý:

$$c.e^{c^2}+b.e^{b^2}+a.e^{a^2}-\left(c.e^{a^2}+a.e^{b^2}+b.e^{c^2}\right)$$
$$= (c-b).e^{c^2}+(b-a).e^{b^2}-(c-a).e^{a^2}$$
$$> (c-b).e^{a^2}+(b-a).e^{a^2}-(c-a).e^{a^2} = 0 \quad (3)$$

(do $c > b > a > 0$). Từ (2) và (3) suy ra bất đẳng thức (1). Vậy BĐT được chứng minh.

Nhận xét. Đây là bài toán ứng dụng của đạo hàm trong chứng minh BĐT, chỉ có bạn *Nguyễn Xuân Tùng*, 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG **Hà Nội** đã có lời giải đúng.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/508. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, phương trình $x^{2n+1} = x+1$ (1) có một nghiệm thực duy nhất, ký hiệu là x_n và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.*

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**) Ta có: (1) $\Leftrightarrow x\left(x^{2n}-1\right)=1$ (2).

- Với $x\le -1$ thì $x^{2n}-1\ge 0\Rightarrow \text{VT}(2)\le 0$, vậy (2) không có nghiệm $x\le -1$.

- Với $-1<x\le 0$ thì $x+1>0$, $x^{2n+1}\le 0$, do đó $-1<x\le 0$ không là nghiệm của (1).

- Với $0<x\le 1$ thì $x^{2n}-1\le 0, x>0$, nên $\text{VT}(2)\le 0$, vậy (2) không có nghiệm $0<x\le 1$.

Do đó PT(1) nếu có nghiệm x thì $x>1$.

Đặt $f_n(x)=x^{2n+1}-x-1$ thì

$f'_n(x)=(2n+1)x^{2n}-1>0, \forall x\ge 1$, do đó $f_n(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Lại có $f_n(1)=-1<0$; $f_n(2)=2^{2n+1}-3>0$ nên $f_n(x)$ có nghiệm duy nhất trên $(1;2)$. Kí hiệu nghiệm duy nhất trên đây là x_n. Ta có:

$$f_{n+1}(x_n)=x_n^{2n+3}-x_n-1>x_n^{2n+1}-x_n-1$$
$$=f_n(x_n)=0=f_{n+1}\left(x_{n+1}\right).$$

Do đó $x_n>x_{n+1}>1$. Dãy (x_n) là dãy giảm và bị chặn dưới nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a\ge 1$. Giả sử $a>1$, khi đó tồn tại k đủ lớn sao cho $a^{2k+1}>3$. Vậy

$$x_k^{2k+1}\ge a^{2k+1}>3 \text{ và } x_k<2\Rightarrow x_k+1<3$$

$\Rightarrow x_k+1<x_k^{2k+1}$. Lúc này:

$$0=f_k(x_k)=x_k^{2k+1}-(x_k+1)>0 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy $a=1$. Do đó PT $x^{2n+1}=x+1$ có một nghiệm thực x_n duy nhất và $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$.

Nhận xét. Bài này không có nhiều bạn tham gia giải. Một số bạn cho kết quả đúng $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$ tuy nhiên lập luận còn thiếu chính xác.

Để chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$ ta có thể làm theo cách khác như sau (theo bạn *Lê Chí Cường*, 11A8, THPT Cam Lộ, **Quảng Trị**):

Ta có: $x_n=x_n^{2n+1}-1=(x_n-1)\left(x_n^{2n}+...+x_n+1\right)$.

Suy ra $0<x_n-1=\dfrac{x_n}{x_n^{2n}+...+x_n+1}<\dfrac{2}{2n+1}$ do $x_n\in(1;2)$ qua giới hạn, sử dụng nguyên lý kẹp ta được $\lim(x_n-1)=0$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$.

Ngoài bạn *Ngọc* và bạn *Cường* các bạn sau có lời giải tốt: **Đồng Tháp**: *Nguyễn Nhật Hào*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Long An**: *Võ Hoàng Phúc Khang*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Sóc Trăng**: *Đậu Đức Quân*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Cần Thơ**: *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Quảng Bình**: *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/508. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x)f(y)+f(x+y)=xf(y)+yf(x)+f(xy)+x+y+1,$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R} \quad (1).$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Thế $(x,y)=(0,0)$ vào (1), ta thu được:

$$f(0)f(0)+f(0)=f(0)+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)=1\\ f(0)=-1\end{array}\right..$$

Xét trường hợp $f(0)=1$. Thế $y=0$ vào (1), ta thu được hàm số $f(x)=x+1$ không thỏa mãn (1). Vậy nên $f(0)\ne 1$. Do đó $f(0)=-1$.

Thế $(x,y)=(1,-1)$ vào (1), ta thu được:

$$f(1)f(-1)+f(0)=f(-1)-f(1)+f(-1)+1$$
$$\Leftrightarrow[f(1)-2][f(-1)+1]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=2\\ f(-1)=-1\end{array}\right..$$

- Khi $f(1)=2$, thế $y=1$ vào (1), ta thu được:

$$f(x+1)=3x+2 \text{ hay } f(x)=3x-1.$$

Hàm số này thỏa mãn (1).

- Khi $f(-1)=-1$, thế $y=-1$ vào (1), ta thu được:

$$f(x)f(-1)+f(x-1)=xf(-1)-f(x)+f(-x)+x$$
$$\Leftrightarrow f(x-1)=f(-x), \forall x\in\mathbb{R} \quad (2).$$

Vậy nên $f(-2)=f(1)$. Thế $(x,y)=(1,-2)$ vào (1) và sử dụng hệ thức $f(-2)=f(1)$, ta thu được:

$$[f(1)]^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=-1\\ f(1)=1\end{array}\right..$$

• Khi $f(1)=-1$, thế $y=1$ vào (1), ta thu được: $f(x+1)=3f(x)+2$ hay

$f(x)=3f(x-1)+2, \forall x\in\mathbb{R}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra:

$f(x)=3f(-x)+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (4)

$\Rightarrow f(-x)=3f(x)+2, \forall x\in\mathbb{R}$ (5). Thay (5) vào (4) ta có:

$f(x)=3[3f(x)+2]+2 \Rightarrow f(x)\equiv -1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm này thỏa mãn (1).

• Khi $f(1)=1$, thế $y=1$ vào (1), ta thu được: $f(x+1)=f(x)+2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$ (6). Thay x bởi $x+1$ trong (1) và sử dụng (6), ta thu được:

$$f(x+y+1)+f(x+1)f(y)=(x+1)f(y)+yf(x+1)+f((x+1)y)+x+y+2, \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

$\Leftrightarrow f(x+y)+2(x+y)+2+[f(x)+2x+2]f(y)$
$=(x+1)f(y)+y[f(x)+2x+2]+f(xy+y)+x+y+2,$
$\forall x,y\in\mathbb{R}$ (7).

Từ (1) và (7) ta thu được:

$$(2x+1)f(y)+f(xy)=f(xy+y)+2xy-2x-1, \forall x,y\in\mathbb{R} \quad (8)$$

Trong (8) thay $y=\dfrac{1}{x}$ với $x\neq 0$, ta thu được:

$$(2x+1)f\left(\frac{1}{x}\right)+f(1)=f\left(1+\frac{1}{x}\right)+2-2x-1,\ \forall x\neq 0.$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)f\left(\frac{1}{x}\right)+1=f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x}+2+2-2x-1, \forall x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x\,f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}+2-2x,\ \forall x\neq 0.$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1,\ \forall x\neq 0, \text{ hay}$$

$f(t)=t^2+t-1,\ \forall t\neq 0$ (7). Vì $f(0)=-1$ nên (7) đúng với mọi $t\in\mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn (1).

Kết luận. Bài toán có ba nghiệm là các hàm số:

$f(x)=-1,\ f(x)=3x-1,$

$f(x)=x^2+x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Nhận xét. Có nhiều lời giải gửi đến Tòa soạn còn thiếu nghiệm $f(x)=x^2+x-1$. Một số bạn đã không kiểm tra lại (1) nên vẫn để nghiệm là hàm số $f(x)=x+1$, không thỏa mãn điều kiện bài ra. Để ý rằng, nếu đặt ẩn phụ $f(x)=g(x)-1$, ta sẽ thu được phương trình hàm dạng quen biết $g(x+y)+g(x)g(y)=(x+1)g(y)+(y+1)g(x)$.

Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Ninh**: *Nguyễn Ngọc Khánh*, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Đinh Gia Minh*, 10T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, 11T1, *Hồ Ngọc Hùng*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Phú Yên**: *Nguyễn Thanh Phúc*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình**: *Lê Đức Hạnh*, 10T2, *Lê Mỹ Duyên*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng**: *Lâm Khánh Hòa*, 12A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

Bài T12/508. *Cho tứ giác điều hòa ABCD (tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau), (O) là đường tròn ngoại tiếp. M là trung điểm của AC. X, Y, Z, T theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, BC, CD, DA; $E=AB\cap CD, F=AD\cap CB$, $P=AC\cap BD, Q=XZ\cap YT$. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của EF.*

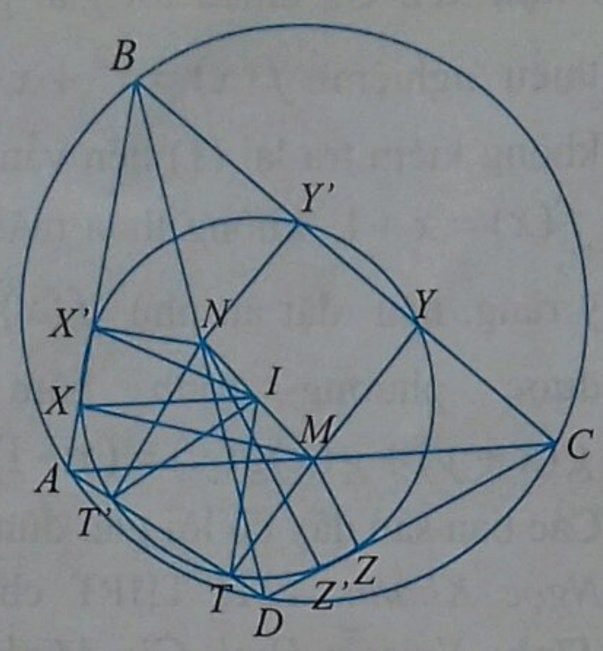
Lời giải. Ta cần có ba bổ đề.

Bổ đề 1. Cho ΔABC. *M*, *N* là hai điểm đẳng giác của tam giác, *I* là trung điểm của *MN*. *X*, *Y*, *Z* theo thứ tự là hình chiếu của *M* trên *BC*, *CA*, *AB*. *X'*, *Y'*, *Z'* theo thứ tự là hình chiếu của *N* trên *BC*, *CA*, *AB*. Khi đó *X*, *Y*, *Z*, *X'*, *Y'*, *Z'* cùng thuộc một đường tròn có tâm là *I*. Bổ đề 1 rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây.

Bổ đề 2. Cho tứ giác điều hòa *ABCD*, *M*, *N* theo thứ tự là trung điểm của *AC*, *BD*, *I* là trung điểm của *MN*. *X*, *Y*, *Z*, *T* theo thứ tự là hình chiếu của *M* trên *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. *X'*, *Y'*, *Z'*, *T'* theo thứ tự là hình chiếu của *N* trên *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. Khi đó *X*, *Y*, *Z*, *T*, *X'*, *Y'*, *Z'*, *T'* cùng thuộc một đường tròn có tâm là *I*.

Chứng minh. Vì tứ giác *ABCD* điều hòa và *M*, *N* theo thứ tự là trung điểm *AC*, *BD* nên *AM*. *AN* là hai đường đẳng giác đối với góc $\widehat{DAB}$.

Do đó, theo bổ đề 1, T, T', X, X' cùng thuộc một đường tròn. Từ đó, chú ý rằng $IT = IT'$; $IX = IX'$, suy ra T, T', X, X' cùng thuộc một đường tròn có tâm là I. Tương tự các bộ bốn điểm (X, X', Y, Y'); (Y, Y', Z, Z'); (Z, Z', T, T') cùng thuộc một đường tròn có tâm là I. Vậy $X, Y, Z, T, X', Y', Z', T'$ cùng thuộc một đường tròn có tâm là I.



Bổ đề 3. Nếu O, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của ΔABC thì AO, AH là hai đường đẳng giác đối với góc $\widehat{BAC}$.

Bổ đề 4. Cho tứ giác $ABCD$. $E = AB \cap CD; F = AD \cap CB$. Khi đó trung điểm của AC, BD, EF cùng thuộc một đường thẳng.

Các bổ đề 3, 4 rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây. Đường thẳng nói trong bổ đề 4 được gọi là *đường thẳng Gauss* của tứ giác $ABCD$. Trở lại giải bài toán T12. Gọi H là hình chiếu của M trên EF; N là trung điểm của BD, I là trung điểm của MN; R là giao điểm của BD và MQ; S, S', U, V, W theo thứ tự là giao điểm của PQ, MN, PO, BD, AC và EF (hình 2).

Dễ thấy các tứ giác $ABCD, AXMT, BYMX$ nội tiếp và BP là đường đối trung của ΔABC.

Ta có:

$$(XY, XT) \equiv (XY, XM) + (XM, XT)$$
$$\equiv (BY, BM) + (AM, AT) \pmod{\pi}$$

$$(XY, XT) \equiv (XY, XM) + (XM, XT)$$
$$\equiv (BY, BM) + (AM, AT) \pmod{\pi}$$
$$\equiv (BC, BM) + (AC, AD)$$
$$\equiv (BP, BA) + (BC, BD) \pmod{\pi}$$
$$\equiv (BD, BA) + (BC, BD) \equiv (BC, BA) \pmod{\pi}.$$

Tương tự $(ZY, ZT) \equiv (DC, DA) \pmod{\pi}$.

Vậy, chú ý rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp, ta có $(XY, XT) \equiv (ZY, ZT) \pmod{\pi}$.

Điều đó có nghĩa là tứ giác $XYZT$ nội tiếp.

Theo định lí sin, chú ý rằng $\widehat{XAT} + \widehat{YCZ} = \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180°$, ta có:

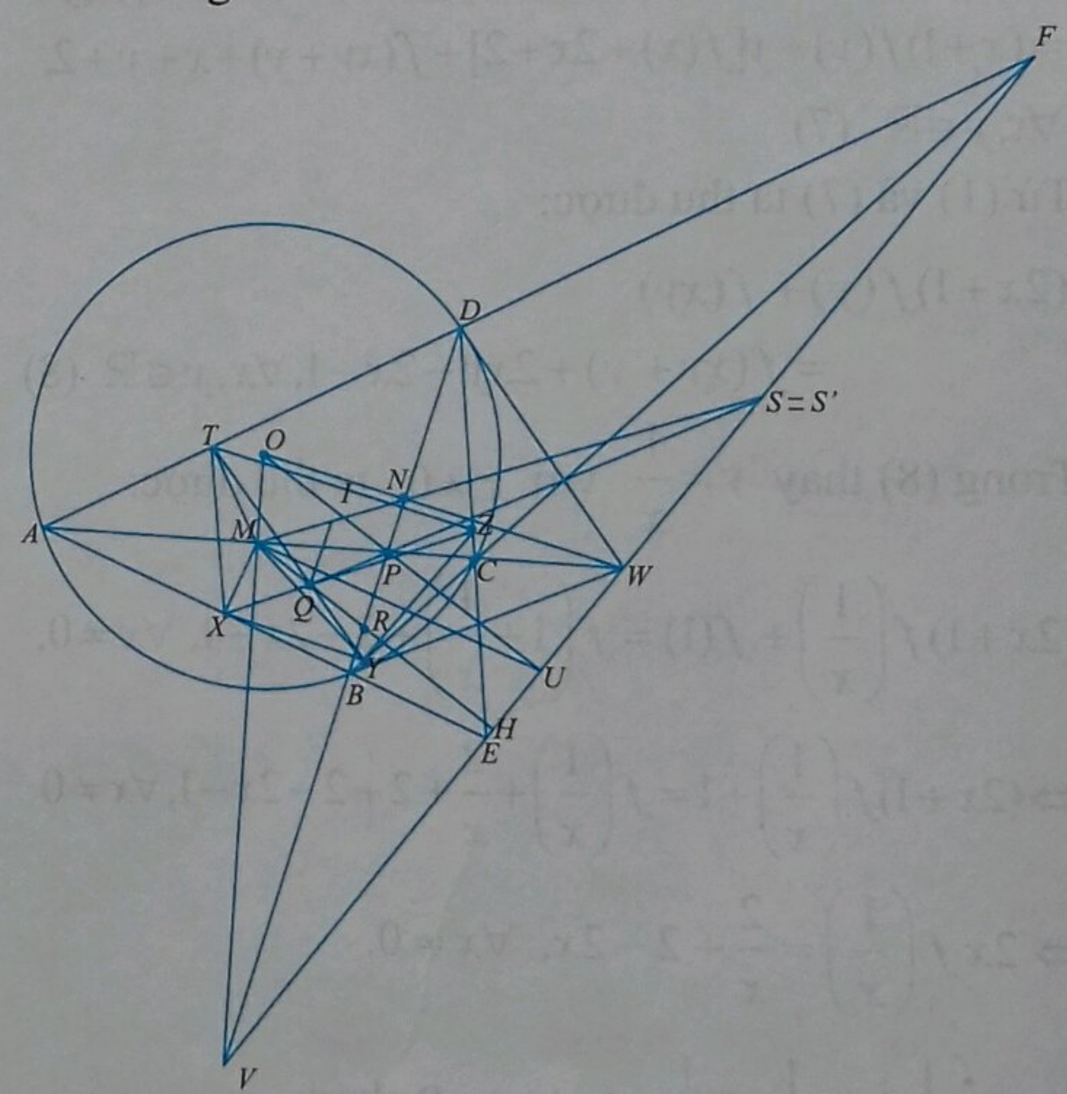
$$XT = AM \sin \widehat{XAT} = CM \sin \widehat{YCZ} = YZ.$$

Vậy $XYZT$ là hình thang cân $(XY // ZT)$ (1).

Dễ thấy M, E, X, Z, H cùng thuộc đường tròn đường kính ME, kí hiệu là (ME), và M, F, Y, T, H cùng thuộc đường tròn đường kính MF, kí hiệu là (MF). Kết hợp với (1), suy ra

$$\mathcal{P}_{Q/(ME)} = \overline{QX}.\overline{QZ} = \overline{QY}.\overline{QT} = \mathcal{P}_{Q/(MF)}$$

Kết hợp với MH là trục đẳng phương của (ME), (MF), suy ra $Q \in MH$. Theo định lí Brocard, $OP \perp EF$. Vậy $MQ \equiv MH // OP$ (2). Từ (1). theo bổ đề 2, suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp hình thang cân $XYZT$. Do đó $IQ \perp XY // ZT$ (3).



Vì $\widehat{BXM} = \widehat{BYM} = 90°$ nên BM đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BXY. Từ đó, chú ý rằng BM, BD là hai đường đẳng giác đối với góc $\widehat{XBY}$, theo bổ đề 3, suy ra $BD \perp XY$. Kết hợp với (3), suy ra $IQ // BD \equiv NR$. Từ đó, chú ý rằng I là trung điểm của MN, suy ra Q là trung điểm của MR (4). Từ (2) và (4) suy ra

$$(WVSU) = P(WVSU) = P(MRQO) = -1 \ (5).$$

Dễ thấy EF là đường đối cực của P đối với (O) (6). Từ (6), chú ý rằng $ABCD$ là tứ giác điều hòa điều hòa, suy ra WB, WD tiếp xúc với (O). Do đó $W \in ON$ Kết hợp với (6), suy ra $\widehat{OUW} = 90°$.

Vậy các tứ giác $MPNO$, $MUWO$ theo thứ tự nội tiếp các đường tròn đường kính PO, PW. Do đó

$$(MN, MP) \equiv (ON, OP) \equiv (OW, OU)$$
$$\equiv (MW, MU) (\text{mod}\, \pi).$$

Từ đó, chú ý rằng $MV \equiv MO \perp MW$, suy ra $(WVS'U) = M(WVS'U) = M(WVNU) = -1$ (7).

Từ (5) và (7) suy ra $(WVS'U) = (WVSU)$. Điều đó có nghĩa là S trùng với S'. Theo bổ đề 4, S' là trung điểm của EF. Vậy S là trung điểm của EF (đpcm).

Nếu X', Y', Z', T' theo thứ tự là hình chiếu của N trên AB, BC, CD, DA và $Q' = X'Z' \cap Y'T'$ thì P, Q, Q' thẳng hàng.

Nhận xét. Bài toán này khó, chỉ một bạn tham gia giải: *Lâm Khánh Hòa*, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, **Sóc Trăng.**

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/508. *Một chất điểm có khối lượng m = 300g đồng thời thực hiện hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số. Ở thời điểm t bất kì li độ của dao động thành phần luôn thỏa mãn* $16x_1^2 + 9x_2^2 = 25$ *(x_1, x_2 tính bằng cm). Biết lực phục hồi cực đại tác dụng lên chất điểm trong quá trình dao động là* $F_{max} = 0{,}4$N. *Xác định tần số góc của dao động.*

Lời giải. Theo đề bài: $16x_1^2 + 9x_2^2 = 25$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{1{,}25}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\frac{5}{3}}\right)^2 = 1.$$

Suy ra hai dao động này vuông pha với nhau, với các biên độ dao động thành phần: $A_1 = 0{,}8$cm; $A_2 = 0{,}6$ cm. Biên độ dao động tổng hợp:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{1{,}25^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{25}{12}$$

Mặt khác: $F_{\max} = m\omega^2 A$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F_{\max}}{mA}} = \sqrt{\frac{0{,}4}{300.10^{-2}.\frac{25}{12}.10^{-2}}}$$
$$= 0{,}8 \text{ rad/s}.$$

Nhận xét. Rất tiếc không có bạn nào có kết quả tốt cho bài này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/508. *Đặt điện áp xoay chiều* $u = 200\sqrt{2}\cos(100\pi t + \frac{\pi}{3})$(V) *vào hai đầu đoạn mạch AMNB. Đoạn AM chứa cuộn dây có độ tự cảm L và điện trở r = 50Ω hoạt động; đoạn mạch MN chỉ chứa bóng đèn dây tóc Đ có công suất định mức 200 W, biết đèn sáng bình thường; đoạn mạch NB chỉ chứa tụ điện có điện dung C tất cả được ghép nối tiếp với nhau. Hãy xác định biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch.*

Lời giải. Ta có: $UI\cos\varphi = I^2 r + 200$, trong đó hệ số công suất $\cos\varphi$ thỏa mãn $0 \le \cos\varphi \le 1$.

Thay $U = 200$(V) vào ta được

$$50I^2 - 200\cos\varphi.I + 200 = 0$$

Để đèn sáng bình thường thì cường độ dòng điện qua đèn chỉ có một giá trị bằng giá trị định mức, do đó phương trình trên chỉ có duy nhất 1 nghiệm, hay:

$$\Delta = (200\cos\varphi)^2 - 4.50.200 = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1$$
$$\Rightarrow I = 2(\text{A}).$$

Vậy biểu thức cường độ dòng điện trong mạch là:

$$i = 2\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)(A).$$

Nhận xét. Rất tiếc không có bạn nào có kết quả tốt cho bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

BẠN CÓ BIẾT ?

MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA THUẬT TOÁN HORNER

PHẠM ĐĂNG LONG

(Khoa Toán - Cơ - Tin học, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Phương pháp Horner là một thuật toán để biến đổi đa thức. Phương pháp được đặt tên theo nhà toán học người Anh *William George Horner* (thế kỷ 19), mặc dù phương pháp này đã được biết đến trước đó bởi *Paolo Ruffini* và 600 năm trước bởi nhà toán học Trung Quốc *Tần Cửu Thiên*. Cốt lõi của phương pháp Horner là dựa trên việc phân tích đa thức thành dạng tính toán đỡ phức tạp hơn nhiều so với cách tính toán thông thường.

1. Khái niệm chung

1.1. Đa thức bình thường

Cho đa thức bậc n, $n > 0$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0,\ a_n \neq 0 \quad (1),$$

ở đây $a_i, i = 1,2,\ldots,n$ là các hằng số thực hay phức.

Cách tính thông thường là tính $P(x)$ bậc n theo trình tự phổ biến: nhân chia trước, cộng trừ sau, thì số phép tính lên tới $\dfrac{n^2+3n}{2}$ phép.

Horner phân tích đa thức (1) như sau:

$$P(x) = \left(\ldots\left(a_n x + a_{n-1}\right)x + \ldots + a_1\right)x + a_0 \ (2).$$

Khi đó số phép tính của cách nay chỉ là $2n$ phép.

Chẳng hạn với

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0 \ (3)$$

bình thường thì cần làm 9 phép tính, còn theo Horner, chỉ cần 6 phép tính.

Bậc của đa thức càng lớn thì ý nghĩa "kinh tế" của phương pháp Horner càng được thấy rõ, chẳng hạn, với bậc 100, bình thường mất 5150 phép tính, còn theo Horner, chỉ phải thực hiện 200 phép tính.

Chính vì vậy, phương pháp Horner được sử dụng để tính các đa thức trong các phần mềm liên quan, như các phần mềm cần đến tính giá trị đa thức.

Với các đa thức bậc lớn, hay rất lớn, dùng các ngôn ngữ lập trình sử dụng phương pháp Horner sẽ cho độ phức tạp rất nhỏ và tất nhiên là tiết kiệm được thời gian chạy chương trình!

Thuật toán để tính giá trị đa thức (1) như sau (theo *cod* C^{++}):

```
float P = 0; int i ;
for (i = n; i >= 0; i--) P = P * x + a_i ;
```

Còn với đa thức bậc thấp, ta dùng lược đồ Horner là cách đơn giản đưa phương pháp Horner vào thực hành rất hiệu quả.

Chẳng hạn, với đa thức bậc ba (3), ta làm như sau:

	a	b	c	d
x	$P = a$	$P = Px + b$	$P = Px + c$	$P = Px + d$

Trong thực hành, ta không cần viết P ra, mà tính trực tiếp luôn.

Có thể dùng máy tính Vinacal 570ES PLUS II hoặc Casio FX570MS, được phép dùng trong các kỳ thi quốc gia tại Việt Nam.

Sau đây là vài ví dụ thực tế

Thí dụ 1. *Xét xem số 2 có là nghiệm của phương trình* $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$ *hay không?*

Hướng dẫn. Ta tính $P(2)$ xem có bằng 0 không. Vẽ lược đồ Horner:

	4	−5	3	1
2	4	3	9	19

Kết quả: $P(2) = 19 \neq 0$ nên 2 không là nghiệm của phương trình đã cho.

Việc tính toán với các số nguyên nhỏ như trên thật dễ dàng. Nhưng với các số thực lẻ hoặc lớn, không nhẩm được thì dùng máy tính Casio hay Vinacal sẽ phù hợp hơn.

Thí dụ 2. *Tính $P(\pi)$ biết:*

$$P(x) = -4,13x^3 - 5,31x^2 + 3,11x + 1,123.$$

Hướng dẫn. Vẫn theo thuật toán Horner, nhưng không vẽ lược đồ mà ta thực hiện các bước lặp như mẫu sau:

$P = a;\ P = Px + b;\ P = Px + c;\ P = Px + d.$

Cụ thể trên máy tính:

Bước 1. Bấm $-4.13=$ Tức là cho

Ans $= -4,13$

Bước 2. Bấm $\times\pi + 5.31=$ Tức là cho

Ans $=$ Ans $\times\pi + 5,31 = -7,664777659$

Bước 3. Bấm $\times\pi + 3.11=$ Tức là cho

Ans $=$ Ans $\times\pi + 3.11 = -20,96960919$

Bước 4. Bấm $\times\pi + 1.123=$ Tức là cho

Ans $=$ Ans $\times\pi + 1.123 = -64,75497016719$

Ta thu được kết quả mong muốn là

$$-64,75497016719.$$

Như vậy, với những đa thức "bình thường" với hệ số nguyên hay thực, trong thực tế, dùng thuật toán Horner ta nhanh chóng tính được giá trị của nó, dù đối số của nó là số tùy ý.

1.2. Đa thức "kéo dài"

Tuy nhiên, cũng có khi ta phải tính giá trị của những đa thức "kéo dài" thêm phần có đối số mũ âm

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 + b_1x^{-1} + b_2x^{-2} + \ldots + b_m x^m, b_m \neq 0.$$

Giải pháp để tránh tính toán nhiều với các số lẻ do mũ âm sinh ra, mà vẫn sử dụng được phương pháp Horner, là

Bước 1. Nhân $Q(x)$ với x^m ta được đa thức $P(x)$ bậc $n+m$.

Bước 2. Dùng thuật toán Horner tính $P(x)$.

Bước 3. Chia kết quả của $P(x)$ cho x^m.

Thí dụ 3. *Xét xem số 2 có là nghiệm của phương trình $G(x) = x^3 + x - 10 + x^{-1} - 2x^{-2} = 0$ hay không?*

Hướng dẫn. Ta tính $Q(2)$ xem có bằng 0 hay không. Nhưng $Q(x)$ không phải là đa thức bình thường, nên nhân nó với x^2 ta được đa thức $P(x) = x^5 + x^3 - 10x^2 + x - 2x^0$.

Dùng lược đồ Horner cho $P(x)$ với $x = 2$.

	1	0	1	−10	1	−2
2	1	2	5	0	1	0

Kết quả $P(2) = 0$, và từ đó $Q(2) = 0$ nên 2 là nghiệm của phương trình đã cho.

Theo thí dụ trên, ta thấy có thể rút ngắn việc tính $Q(x)$ bằng cách vẫn làm lược đồ Horner với bộ tất cả các hệ số của $P(x)$ rồi chia kết quả trung gian thu được cho x^m.

2. Đổi số từ hệ đếm khác thập phân sang hệ thập phân

2.1. Đổi số từ hệ nhị phân (BIN) sang hệ thập phân (DEC)

a) *Số nhị phân đã cho là số nguyên:*

$(b_n b_{n-1} \ldots b_0)_2 = b_n 2^n + b_{n-1}2^{n-1} + \ldots + b_0, b_n \neq 0$, ở đây $b_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ là các chữ số nhị phân, tức là 0 hoặc 1.

Thí dụ 4. *Đổi $N = (111100101)_2$ ở hệ nhị phân sang hệ thập phân.*

Hướng dẫn. Dùng lược đồ Horner

	1	1	1	1	0	0	1	0	1
2	1	3	7	15	30	60	121	242	485

Đáp số: 485.

b) *Số nhị phân là số thực không nguyên*:

$$(b_n b_{n-1}...b_0 c_1 c_2...c_m)_2 = b_n 2^n + b_{n-1}2^{n-1} + ... + b_0 + c_1 2^{-1} + c_2 2^{-2} + ... + c_m 2^{-m}, b_n \neq 0, c_m \neq 0$$

ở đây $b_i\,(i=1,2,...,n), c_j\,(j=1,2,...,m)$ là các chữ số nhị phân, tức là 0 hoặc 1.

Thí dụ 5. *Đổi* $N=(111100.101)_2$ *(số có lẻ) ở hệ nhị phân sang hệ thập phân.*

Hướng dẫn. Ta dịch chuyển dấu phẩy (.) sang phải 3 vị trí để được số tự nhiên (tức là ta đã tăng số N lên 10^3 lần ở hệ BIN hay 8 lần ở hệ DEC, và đổi như ở Thí dụ 1, được 485. Cuối cùng ta chia 485 cho 8 thì được kết quả 60.625.

Đáp số: 60.625.

2.2. Đổi số từ hệ bát phân (OCT) sang hệ thập phân (DEC)

a) *Số bát phân là số nguyên*:

$$(B_n B_{n-1}...B_0)_8 = B_n 8^n + B_{n-1}8^{n-1} + ... + B_0, B_n \neq 0,$$

ở đây $B_k\,(k=1,2,...,n)$ là các chữ số bát phân, tức là 0, 1, 2, …, 7.

Thí dụ 6. *Đổi* $N=(423174)_8$ *ở hệ bát phân (OCT) sang hệ thập phân (DEC).*

Hướng dẫn. Theo quy tắc đổi ta có:

$$N=(423174)_8 = 4\cdot 8^5 + 2\cdot 8^4 + 3\cdot 8^3 + 1\cdot 8^2 + 7\cdot 8^1 + 4\cdot 8^0 = 140924.$$

Nhưng số phép tính ở đây khá nhiều, nên ta dùng lược đồ Horner sẽ nhanh gọn hơn vì ít phép tính hơn!

	4	2	3	1	7	4
8	4	34	2275	2201	17615	140924

Đáp số: 140924.

b) *Số bát phân không là số nguyên*:

$$(B_n B_{n-1}...B_0 C_1 C_2...C_m)_8 = B_n 8^n + B_{n-1}8^{n-1} + ... + B_0 + C_1 8^{-1} + C_2 8^{-2} + ... + C_m 8^{-m}, B_n \neq 0, C_m \neq 0,$$

ở đây $B_i\,(i=1,2,...,n)$, $C_j\,(j=1,2,...,m)$ là các chữ số bát phân, tức là 0, 1, 2, …, 7.

Thí dụ 7. *Đổi* $N=(423.174)_8$ *(có lẻ) ở hệ bát phân (OCT) sang hệ thập phân (DEC).*

Hướng dẫn. Theo quy tắc đổi ta có:

$$N=(423.174)_8 = 4\cdot 8^2 + 2\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 + 1\cdot 8^{-1} + 7\cdot 8^{-2} + 4\cdot 8^{-3} = 275.2421875.$$

Nhưng ta vẫn có thể sử dụng lược đồ Horner bằng cách: Bỏ dấu phẩy (.) đi để được số tự nhiên, dùng lược đồ Horner như ở Thí dụ 1, thu được một số tự nhiên 140924. Nhưng do bỏ dấu phẩy, số N đã bị tăng lên 10_8^3 lần ở hệ OCT hay 8^3 lần ở hệ DEC. Như vậy, phải giảm kết trung gian đi 8^3 hay 512 lần để được kết quả cuối cùng!

Đáp số: 275.2421875.

2.3. Đổi số từ hệ thập lục phân (HEX) sang hệ thập phân (DEC)

a) *Số lục thập phân là số nguyên*:

$$(h_n h_{n-1}...h_0)_{16} = h_n 16^n + h_{n-1}16^{n-1} + ... + h_0, h_n \neq 0,$$

ở đây $h_k\,(k=1,2,...,n)$ là các chữ số lục thập phân, tức là: 0, 1, …, 9, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. So với hệ thập phân thì $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, $D = 13$, $E = 14$, $F = 15$.

Thí dụ 8. *Đổi* $N=(1F016B)_{16}$ *ở hệ thập lục phân (HEX) sang hệ thập phân (DEC).*

Hướng dẫn. Theo quy tắc khai triển, ta có:

$$N=(1F016B)_{16} = 1\cdot 16^5 + 15\cdot 16^4 + 0\cdot 16^3 + 1\cdot 16^2 + 6\cdot 16^1 + 11\cdot 16^0 = 2031979.$$

Nhưng số phép tính ở đây nhiều, nên ta dùng lược đồ Horner sẽ nhanh gọn hơn!

	1	15	0	1	6	11
16	1	31	496	7937	126998	2031979

Đáp số: 2031979.

b) *Số thập lục phân không nguyên*:

$$(h_n h_{n-1}...h_0 k_1 k_2...k_m)_{16} = h_n 2^n + h_{n-1}2^{n-1} + ... + h_0 + k_1 2^{-1} + k_2 2^{-2} + ... + k_m 2^{-m}, h_n \neq 0, k_m \neq 0$$

ở đây $h_i\,(i=1,2,...,n), k_j\,(j=1,2,...,m)$ là các chữ số thập lục phân, tức là là các chữ số lục thập phân, tức là: 0, 1, …, 9, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.

Thí dụ 9. *Đổi $N=(1F0.16B)_{16}$ (có lẻ) ở hệ thập lục phân (HEX) sang hệ thập phân (DEC).*

Hướng dẫn. Theo quy tắc đổi ta có

$$N=(1F0.16B)_8=1\cdot16^2+15\cdot16^1+0\cdot16^0+1\cdot16^{-1}$$
$$+6\cdot16^{-2}+11\cdot16^{-3}=496.08862304688.$$

Nhưng ta vẫn có thể sử dụng lược đồ Horner bằng cách: Bỏ dấu phẩy (.) đi để được một số tự nhiên, dùng lược đồ Horner như ở Thí dụ 1, thu được một số tự nhiên 2031979. Nhưng do bỏ dấu phẩy, số N đã bị tăng lên 10^3_{16} lần ở hệ HEX hay 16^3 lần ở hệ DEC. Như vậy, phải giảm kết trung gian đi 16^3 hay 4096 lần để được kết quả cuối cùng.

Đáp số: 496.08862304688.

Tóm lại nhờ phương pháp hay thuật toán Horner, việc tính giá trị đa thức trở nên thuận tiện, đơn giản và nhanh chóng hơn nhiều so với cách tính truyền thống: Nhân chia trước, cộng trừ sau, tính từng lũy thừa riêng biệt.

3. Đổi số từ hệ đếm thập phân sang hệ khác

Cũng theo cách viết đa thức của Horner, người ta tìm ra cách đổi một số từ hệ thập phân sang các hệ đếm khác. Sau đây là một vài ví dụ cụ thể.

a) *Đổi số nguyên từ hệ thập phân sang số nhị phân*

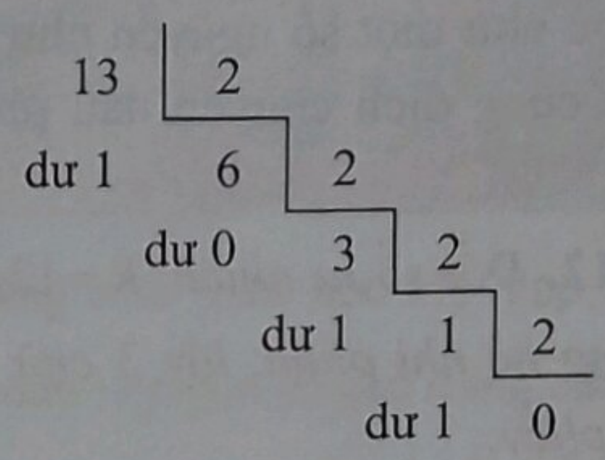
Thí dụ 10. *Đổi số tự nhiên $N=13$ ở hệ thập phân sang hệ nhị phân.*

Hướng dẫn. Chú ý là $N<16=2^4$ nên 13 khi sang hệ nhị phân có không quá 4 chữ số $(b_3b_2b_1b_0)_2$, và khai triển ra thành

$$13=b_3(10^3)_2+b_2(10^2)_2+b_1(10^1)_2+b_0$$
$$13=b_3 2^3+b_2 2^2+b_1 2+b_0.$$
$$13=(b_3 2^2+b_2 2+b_1)2+b_0.$$

Như vậy, b_0 chính là số dư khi chia 13 cho 2. Lập luận tương tự với biểu thức trong ngoặc đơn, có giá trị là 6, b_1 chính là số dư khi chia 6 cho 2,... Tiếp tục quá trình đó ta thu được tất cả các chữ số b_3, b_2, b_1 và b_0.

Trong sách giáo khoa Đại số 10, bài đọc thêm đã nêu ra cách đổi nay, như sơ đồ sau:



Ghép các số dư từ dưới ngược lên trên ta được kết quả là 1102_2.

b) *Đổi số từ hệ thập phân không phải số nguyên sang số nhị phân*

Một số thực dương nhỏ hơn 1 chuyển thành số nhị phân có dạng: $r=c_1 2^{-1}+c_2 2^{-2}+\ldots$ (4).

Để tính c_1 ta nhân r với 2, tách phần nguyên đó ra, ta lại có số lẻ và tiếp tục là như vậy … Quá trình đó có thể rất dài.

Thí dụ 11. *Đổi số tự nhiên $R=0,3$ ở hệ thập phân sang hệ nhị phân.*

Hướng dẫn. Số nhị phân này cũng là số lẻ, tương ứng như dạng (4). Lần lượt thực hiện các việc sau:

Bước 1. Nhân r với 2 được 0,6, tách phần nguyên là 0 ra.

Bước 2. Nhân phần lẻ với 2 được 1,2, tách 1 ra.

Bước 3. Nhân phần lẻ với 2 được 0,4, tách 0 ra.

Bước 4. Nhân phần lẻ với 2 được 0,8, tách 0 ra.

Bước 5. Nhân phần lẻ với 2 được 1,6, tách 1 ra.

Bước 6. Nhân phần lẻ với 2 ,....

Đến đây ta thấy có sự lặp lại, mãi mãi!

Đáp số: $0,3=0.(01001)_2$.

Đến đây ta có thể rút ra kinh nghiệm là: Để đổi một số thập phân có phần lẻ R sang hệ nhị phân, lấy m chữ số sau dấu phẩy, ta nhân R với 2^m và chuyển đổi phần nguyên của số vừa nhận được như một số nguyên như trong thí dụ 10. Cuối cùng dịch chuyển dấu phẩy sang trái m vị trí.

Thí dụ 12. *Đổi số tự nhiên $R=12,3$ ở hệ thập phân sang hệ nhị phân, lấy 3 chữ số nhị phân sau dấu phẩy.*

Hướng dẫn. Nhân 12,3 với 2^3, được 98,4, lấy phần nguyên là 98 đổi sang nhị phân được 1100110_2. Cuối cùng lùi dấu phẩy sang trái 3 vị trí, được kết quả 1100.110_2.

Đáp số: 1100.110_2.

c) *Đổi số thập phân nguyên sang hệ bát phân*

Tương tự như trong phần a), thay số chia 2 thành 8.

d) Đổi số thập phân có lẻ sang hệ bát phân lấy m chữ số bát phân: Trước hết nhân số cần đổi với 8^m, bỏ phần lẻ đi, đổi phần nguyên sang hệ bát phân, rồi dịch chuyên dấu phẩy sang trái m vị trí.

e) Đổi số thập phân nguyên sang hệ thập lục phân: Tương tự như trong phần a), thay số chia 2 thành 16. Nhưng các số dư là 10,…,15 ta chuyển thành chữ số thập phân tương ứng là A, …, F.

f) Đổi số thập phân có lẻ sang hệ thập lục phân lấy m chữ số thập lục phân: Trước hết nhân số cần đổi với 16^m, bỏ phần lẻ đi, đổi phần nguyên sang hệ thập lục phân, rồi dịch dấu phẩy sang trái m vị trí.

4. Thêm một điều lý thú rút ra từ thuật toán Horner

Thực hiện xong thuật toán horner, dù là làm theo lược đồ hay lập trình, ta cũng thu được không những giá trị của đa thức tại $x=\alpha$, như là số dư khi chia đa thức $P(x)$ cho nhị thức $(x-\alpha)$ (theo định lý B'zout), mà còn thu được bộ hệ số của đa thức thương $Q(x)$.

Xin nhắc lại một chút về định lý B'zout:

$$P(x)=Q(x)(x-\alpha)+R.$$

Tức là khi chia đa thức $P(x)$ cho nhị thức $(x-\alpha)$ thì được đa thức thương $Q(x)$, bậc thấp hơn một đơn vị, và dư là một số R. Khi ấy, $P(\alpha)=R$.

Đây chính là nội dung của định lý B'zout.

Vậy nhờ thuật toán Horner, ta sẽ nhanh chóng có được R. Còn rất may là, cũng từ thuật toán Horner đó, mà ta thu được luôn đa thức thương! Hãy xét một thí dụ sau đây:

Thí dụ 13. *Chia đa thức x^3+x^2-12 cho $x+2$ bằng lược đồ Horner.*

Hướng dẫn. Ta có:

	1	1	0	−12
−2	1	−1	2	−16

Kết quả $P(-2)=-16$, là số dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho $x+2$. Chú ý, ở đây $\alpha=-2$. Còn bộ số $(1,-1,2)$ chính là bộ hệ số của đa thức thương $Q(x)$. Tức là

$$x^3+x^2-12=(x^2-x+2)(x+2)-16.$$

Một cách tổng quát, giả sử có đa thức (1) với bộ số $(b_n,b_{n-1},\ldots,b_1)$, kết quả của thuật toán Horner: $b_n=a_n, b_k=b_{k+1}\alpha+a_k, k=n-1,n-2,\ldots,1,0$ sẽ là bộ hệ số của đa thức thương $Q(x)=b_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\ldots+b_1$ khi chia $P(x)$ cho nhị thức $x-\alpha$.

SỐ π CON SỐ CỦA SỰ BÍ ẨN VÀ NIỀM ĐAM MÊ CHINH PHỤC CỦA NHÂN LOẠI

PHÙNG CHÍ TỰ

(GV THPT Anhxtanh, Hà Nội)

Trong lịch sử loài người, có một con số khá bí mật đã làm say mê rất nhiều người. Qua nhiều thế hệ, từ cổ xưa đến hiện đại, nhiều bộ óc phi thường đã tìm cách tính ra con số đó để rồi người ta thấy chỉ có thể tính ra một con số gần đúng mà thôi.

Con số này không thể viết thành một con số nguyên hữu hạn (finite integer), một phân số (fraction) hay một số vô tỷ (irrational) được. Đến nay, mọi người đã chấp nhận đó là một con số siêu việt (transcendent). Con số ấy là số π.

Số π là gì?

π = 3,14159265358979323846264338327 9....

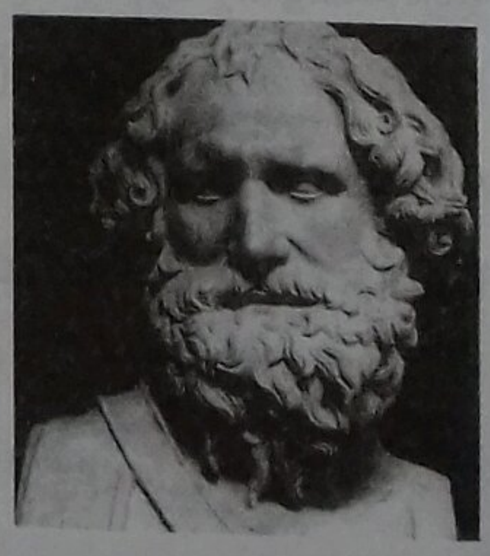
π là tên của chữ thứ 16 của mẫu tự Hy Lạp. Số π được định nghĩa như một hằng số, *là tỷ số giữa chu vi đường tròn với đường kính của nó*. Số π là con số quan trọng bậc nhất trong toán học. Vì vậy, ở bất kỳ nơi nào có hình tròn hoặc đường cong, số π cũng xuất hiện. Bạn không thể giải quyết bài toán hình học, lượng giác, giải tích hay các nhánh khác của toán học mà không sử dụng đến π. Tên "pi" do chữ peripheria (perijeria) có nghĩa là chu vi của đường tròn. Nhưng nó không có tên chính xác, thường người ta gọi là p, c, hay π. Chữ π được dùng vào khoảng giữa thế kỷ thứ 18, sau khi *L. Euler* xuất bản cuốn chuyên luận phân tích năm 1748. Ý định dùng ký hiệu π là để tưởng nhớ đến những nhà toán học Hy Lạp là những người tìm ra đầu tiên con số gần đúng của "pi".

Xét vai trò là một con số, π cũng hấp dẫn những người yêu toán học. Nó là một số vô tỷ, có nghĩa không thể được viết dưới dạng phân số của hai số nguyên. Nói cách khác, π là số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Đặc biệt hơn, π thuộc nhóm các số đặc biệt gọi là số siêu việt. Nó được định nghĩa là số không phải nghiệm của bất kỳ phương trình đại số nào với hệ số là các số nguyên.

Lịch sử phát hiện ra số π

π được phát hiện gần 4.000 năm trước bởi người Babylon cổ đại. Một bản khắc ở Babylon có niên đại khoảng 1900 – 1680 trước công nguyên cho thấy giá trị của nó được tính là 3,125.

Cuốn "Rhind Papyrus" khoảng năm 1650 trước công nguyên cũng mở ra cái nhìn sâu sắc về toán học của Ai Cập cổ đại. Người Ai Cập đã tính diện tích hình tròn bằng một công thức cho giá trị của π là 3,1605.



Archimedes (287 – 212 trước công nguyên), một trong những nhà toán học vĩ đại nhất thời Hy Lạp cổ đại, góp công lớn trong việc tìm ra giá trị

của số π. Ông tìm diện tích *của hai đa giác* đó là đa giác ngoại tiếp đường tròn và đa giác nội tiếp đường tròn. *Archimedes* biết rằng diện tích của hình tròn là một giá trị nằm ở khoảng giữa diện tích của đa giác ngoại tiếp và đa giác nội tiếp của nó từ đó ta giới hạn được khoảng giá trị của diện tích hình tròn. Tuy không tìm ra con số cụ thể, ông tính được π là một số nằm giữa $3\frac{1}{7}$ và $3\frac{10}{71}$.

Nhà toán học *Tổ Xung Chi* (429 – 501), một nhà toán học và thiên văn học xuất chúng người Trung Quốc. Ông đã tính giá trị tỷ lệ giữa chu vi của một đường tròn với đường kính của nó là $\frac{355}{113} \approx 3,14159.....$ Ông đã thực hiện các phép tính dài liên quan đến hàng trăm căn bậc hai cho ra kết quả đến 9 chữ số thập phân. Tuy nhiên, vì cuốn sách của ông bị thất lạc, việc ông làm thế nào để tìm ra π vẫn chưa được giải đáp cặn kẽ.

Kí hiệu π ở đâu ra

Theo nhà toán học đồng thời cũng là một sử gia *Florian Cafori* (1859 – 1930) thì người đầu tiên dùng ký hiệu chữ số Hy Lạp trong hình học là *William Oughtred* (1575 – 1660). Để chỉ chu vi, tiếng Anh là "periphery", ông dùng chữ Hy Lạp π (Pi). Để chỉ đường kính, tiếng Anh là "diameter" ông dùng chữ Hy Lạp δ (Delta). Năm 1760, *William Jones* (1675 – 1749) trong cuốn sách Synopsis Palmariorum Matheseos đã dùng luôn chữ π (Pi) để chỉ tỷ số chu vi chia cho đường kính hình tròn. Phải chờ đến nhà toán học danh tiếng là *Leonard Euler*, người Thụy Sĩ, thì ký hiệu π (Pi) mới được dùng một cách rộng rãi, và được tất cả mọi người công nhận và dùng như là tỷ số chu vi chia cho đường kính một hình tròn. Đó là năm 1748 khi *Leonard Euler* viết trong cuốn sách *Introductio in analysin infinitorum*.

Cách tính số π của nhân loại

Phương pháp cổ xưa nhất, vẽ một đường tròn bán kính là 1 đơn vị và hai đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp của đường tròn. Nếu đa giác đều đó là hình vuông thì trị số chu vi hình tròn sẽ ở giữa chu vi hình vuông nội tiếp và ngoại tiếp, nghĩa là trị số của Pi sẽ nằm trong khoảng $2^{\sqrt{2}} < \pi < 4$ $\Rightarrow 2,828... < \pi < 4$. Tăng số cạnh lên 6 ta có kết quả khá hơn (Bởi vì cạnh hình lục giác đều bằng bán kính đường tròn) và $2^{\sqrt{3}} = 3,461...$ Lúc này, trị số của Pi sẽ nằm trong khoảng $3 < \pi < 2^{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow 3 < \pi < 3,461...$ Khi tính chu vi các đa giác có hàng ngàn cạnh, và chia kết quả cho đường kính của đường tròn, ta tìm được giá trị xấp xỉ chính xác nhất của π là $\frac{355}{113} \approx 3,14159...$ Người Babylone tính được con số π bằng cách so sánh chu vi của một đường tròn với chu vi đa giác nội tiếp trong đường tròn đó, chu vi đa giác nội tiếp bằng 3 lần đường kính đường tròn. Họ tính phỏng chừng $\pi = 3 + \frac{1}{8} \approx 3,125...$ *Archimede* dùng một đa giác có 96 cạnh và đã tính được số phỏng chừng nhỏ hơn (inférieur) là $\pi = 3 + \frac{10}{71} \approx 3,1408...$ và số phỏng chừng lớn

hơn là $\pi = 3 + \frac{1}{7} \approx 3,1429...$ Nghĩa là $3,1408... < \pi < 3,1429...$ Để định giá trị của π người ta có thể thử vẽ một đĩa tròn và một hình vuông có cùng diện tích bằng cách dùng thước và compa. Và cũng dùng thước và compa ta vẽ đoạn thẳng có chiều dài là π rồi suy ra trị số chính xác của số này. Nhưng cách vẽ này không thể có được. Năm 1837, *Pierre Wantzel* chứng minh rằng người ta chỉ có thể vẽ các đoạn thẳng bằng thước và compa khi chiều dài là một số đại số, nghĩa là một nghiệm của một phương trình đại số mà hệ số (coefficient) là những số nguyên. Và năm 1882, *Ferdinand von Lindermann* chứng minh rằng số π không phải là số đại số.

Ý nghĩa số π trong đời sống

Con số π tóm tắt một lịch sử về toán học cổ xưa hơn 4000 năm bao trùm Hình học, Giải tích và Đại số. Các nhà toán học đã hâm mộ nó từ thời Văn minh Cổ đại và đặc biệt là những người Hy Lạp trong vấn đề hình học. Giá trị xưa nhất về con số π mà con người đã dùng và đã được chứng nhận từ một tấm bảng.

Trước thế kỷ 17, số π chỉ được dùng trong các bài toán về đường tròn. Đến thế kỷ 17, người ta nhận ra rằng π cũng có thể được dùng để tính diện tích, chu vi của các đường cong khác như chiều dài cung tròn, hypocycloid (đường cong được tạo thành bởi một điểm cố định trong một đường tròn nhỏ khi đường tròn nhỏ đó quay tròn bên trong một đường tròn khác có bán kính lớn hơn nó nhiều lần). Đến thế kỷ 20, số π được dùng trong nhiều ứng dụng đa dạng các lĩnh vực như xác suất, các lý thuyết toán học khác. Ngoài toán học các ngành khoa học khác cũng sử dụng π trong một số công thức quan trọng, bao gồm các ngành thống kê, nhiệt động lực học, cơ học, vũ trụ học, lý thuyết số và điện từ học.

Ví dụ khi ta đo góc phải chọn một đơn vị bằng cách xác định một vòng là 360^0 thì đơn vị "độ" sẽ có số đo là $\frac{1}{360}$ vòng. Nếu ta dùng trị số một vòng bằng 2π thì đơn vị đo lường sẽ được gọi là radian và có trị số bằng $\frac{1}{2\pi}$ vòng. Đo góc bằng radian có nhiều lợi thế hơn. Ví dụ chiều dài một phần của vòng tròn được giới hạn bởi góc α sẽ bằng $R.\alpha$ khi ta đo góc bằng radian, nhưng nếu đo bằng "độ" sẽ bằng $\frac{2\pi R\alpha}{360}$. Tương tự, tỉ số $\frac{\sin x}{x}$ tiến tới 1 khi x tiến tới 0 nếu ta tính các góc bằng radian, nhưng sẽ tiến tới $\frac{180}{\pi}$ nếu ta tính góc bằng "độ". Cách dùng radian để đo góc suy ra được nhiều đặc tính của số π. Ví dụ theo định lý Euler thì $e^{2\pi i} = 1$. Và cũng từ kết quả việc dùng radian để tính góc, người ta tìm thấy số π ở những nơi bất ngờ. Ví dụ ở tổng vô hạn (dãy số Leibniz): $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ nghĩa là diện tích dưới đường cong của phương trình $f(x) = \frac{dx}{1+x^2}$ giữa 0 và 1 cũng bằng $\frac{\pi}{4}$. Số π cũng xuất hiện trong giá trị của tổng $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \frac{\pi}{6}$. Số π được sử dụng để tính giá trị của hàm lượng giác như sin, côsin, đường tiếp tuyến..., từ đó đo vận tốc chuyển động

tròn của những thứ như bánh xe tải, trục động cơ, bánh răng, …

Người ta cũng dùng nó để kiểm tra tốc độ, độ chính xác của máy tính, phát hiện các lỗi phần mềm hoặc phần cứng.

Trong tự nhiên, số π có thể ứng dụng để đo những thứ như sóng ánh sáng, sóng âm, sóng biển, khuỷu sông (phần khúc khuỷu của con sông),...

Số π được các nhà thiên văn học sử dụng từ sớm để nghiên cứu Trái Đất trong việc tính chu vi, quan sát chuyển động và vẽ quỹ đạo của nó. Tuy việc tính toán giá trị của π khá khó khăn nhưng π là một con số siêu hiệu quả trong các phép tính cần đến nó. Ví dụ, nếu bạn làm tròn số π lên tới 9 chữ số sau dấu thập phân và dùng nó để tính chu vi Trái Đất, bạn sẽ thu được những kết quả rất chính xác. Với mỗi 40000 km, số π chỉ sai khoảng 0,62 cm.

Nó thậm chí còn là yếu tố quan trọng giúp tìm kiếm các hành tinh mới và bầu khí quyển của chúng bên ngoài hệ Mặt Trời. Nhờ π người ta tính được mật độ của một hành tinh, từ đó hiểu về bản chất của nó, chẳng hạn được tạo thành chủ yếu từ đá hay khí. NASA sử dụng π để tính toán quỹ đạo tàu vũ trụ, đo đạc miệng núi lửa, tìm hiểu về thành phần các tiểu hành tinh. Gần đây π được dùng để tính toán lượng hydro trong đại dương bên dưới bề mặt vệ tinh Europa của Sao Mộc.

Số π con số của sự bí ẩn và niềm đam mê trinh phục sự bí ẩn đó của nhân loại

Archimede tính được số $\pi = 3,412$ với độ chính xác là $\frac{1}{1000}$. Công thức là $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$. Người ta dùng phương pháp *Archimède* trong 2000 năm.

Khoảng năm 1450, *Al'Kashi* tính con số π với 14 chữ số phần thập phân nhờ phương pháp đa giác của *Archimede*. Đó là lần đầu tiên trong lịch sử nhân loại đã tìm được con số π với trên 10 chữ số phần thập phân.

Năm 1609, *Ludolph von Ceulen* nhờ phương pháp của *Archimede*, đã tính được con số π với 34 chữ số phần thập phân mà khi ông mất người ta đã khắc số này trên bia mộ của ông.

Trong toán học, số π là một số siêu việt. Cuối thế kỷ 18, hai nhà toán học *Johann Heinrich Lambert* (1728 – 1777) và *Adrien – Marie Legendre* (1752 – 1833) đã chứng minh được rằng pi là số vô tỉ vì không thể tính được tan của π bằng liên phân số (*continued fraction*), đồng nghĩa với việc không thể tính π bằng phân số.

Thế kỷ thứ 19, *Lindemann* chứng minh rằng số π không thể là một nghiệm số của một phương trình đại số với hệ số là số nguyên (ví dụ $ax^2+bx+c=0$ mà a, b, c là số nguyên). Kế tiếp *Ludolph von Ceulen*, nhờ những công trình nghiên cứu miệt mài của các nhà toán học *Newton* (1643 – 1727), *Leibniz* (1646 – 1716), *Grégory* (1638 – 1675), *Euler* (1707 – 1783), *Gauss* (1777 – 1855), *Machin* (1686 – 1751), *Viète* (1504 – 1603),...tìm kiếm những công thức để tính trị số xấp xỉ của π cho chính xác. Và công thức giản dị nhất được *Leibniz* tìm ra năm 1674 là $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+.....=\frac{\pi}{4}$. Năm 1874, *Carl Louis Ferdinand* von *Lindemann* (1852 – 1939), *Srinivasa Aiyangar Ramanujan* (1887 – 1920),

Williams Shanks (1812 – 1882) đã tính π với 707 chữ số phần thập phân.

Phải đợi đến thế kỷ thứ 18 và đầu thế kỷ thứ 20 thì số π đã được tính với độ chính xác là 1000 chữ số phần thập phân.

Năm 1995, *Hyroyuki Gotu* đã chiếm kỷ lục thế giới tìm ra 42195 chữ số phần thập phân. Cũng trong năm này, *Y ves Martin* đã dùng máy vi tính xách tay hiệu EPSON, vận tốc 10 MHz, cho chạy chương trình PIF.EXE viết bằng ngôn ngữ Pascal, chạy trong 1 giờ 28 phút 33 giây để cho ra 130000 chữ số phần thập phân của số π.

Ngày 19 tháng 9 năm 1995, lúc 0 giờ 29 phút giờ địa phương GMT – 04, nhà Toán học Gia Nã Đại *Simon Plouffe* cùng với sự hợp tác của *Peter Borwein* và *David Bailey* đã khám phá một công thức tính con số π đã làm đảo lộn một số ý kiến về số π được tính từ trước đến nay. Công thức này được đặt tên là Công thức BBP cho phép tính các số lẻ của π độc lập với nhau, mà mọi người lúc bấy giờ tưởng là không thể tính các số lẻ một cách độc lập được.

Ngày 22 tháng 9 năm 1997, *Fabrice Bellard* đã lập kỷ lục tìm chữ số phần thập phân thứ 1000 tỉ của số π nhờ công thức BBP của *Plouffe* và nhờ tự nghiên cứu ra cách tính nhanh hơn.

Colin Percival trong dự án tính toán phân bố PiHex sử dụng công thức Bellard (một bản chỉnh sửa của thuật toán BBP), vào tháng 2 năm 1999 đã phát hiện chữ số thập phân (bit) thứ 40000 tỉ là số 0 và ngày 11 tháng 9 năm 2000 phát hiện chữ số phần thập phân (bit) thứ một triệu tỉ là số 0 (một triệu tỉ = 10^{15}).

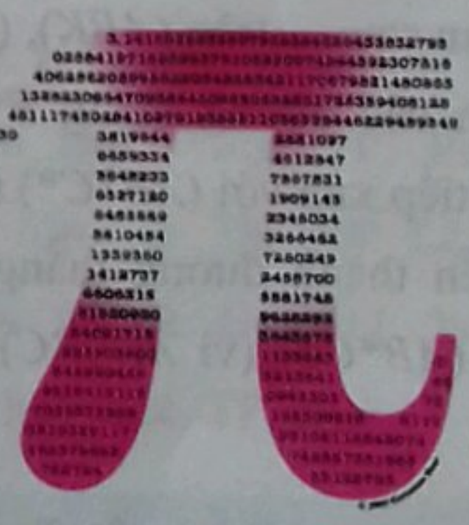
Tháng 9 năm 2010 một nhân viên của Yahoo! Đã sử dụng ứng dụng Hadoop của công ty trên một ngàn máy tính trong một thời gian là 23 ngày để tính toán 256 bit của π ở vị trí bit 2 triệu tỉ (2×10^{15}).

Bây giờ với máy tính chạy nhanh hơn gấp mấy ngàn lần, nhưng số π chỉ được tính xấp xỉ mà thôi bởi vì dãy chữ số ấy vẫn chưa dừng lại và luôn được phá kỉ lục liên tục hằng năm.

Và cho gần đây nhất ngày 14 tháng 03 năm 2019, nhờ công nghệ điện toán đám mây, *Iwao* nữ nhân viên Google dùng đến 170 terabyte dữ liệu và 25 máy ảo, mất tổng cộng 121 ngày để hoàn thành phép tính toán số π tới 31 nghìn tỉ chữ số thập phân vượt xa kết quả gần nhất là 22 nghìn tỉ chữ số thập phân và lập kỉ lục mới.

Lời kết

Vì chúng ta không bao giờ có thể tính được giá trị chính xác của π nên có lẻ chúng ta cũng không bao giờ có thể tìm được diện tích hay chu vi chính xác của một đường tròn. Chúng ta chỉ có thể tiến gần hơn tới ánh sáng của Thượng Đế mà thôi. Hi vọng một tương lai không xa con người sẽ khám phá và làm sáng tỏ nhiều bí mật hơn về con số mà Thượng Đế đã ban tặng cho loài người.



PROBLEMS... (*Tiếp theo trang 21*)

Problem T9/512. Given a triangle ABC with area S and $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Solve the system of equations (variables x, y, z)

$$\begin{cases} a^2x + b^2y + c^2z = 4S \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}.$$

Towards Mathematical Olympiad

Problem T10/512. For any positive integer n show that n and $2^{2^n} + 1$ are coprime.

Problem T11/512. The sequences $(x_n), (y_n)$ are determined as follows

$$\begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 17, x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \\ y_1 = 4, y_2 = 24, y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n \end{cases} (n \geq 1, n \in \mathbb{N}).$$

Show that no term in these sequences $(x_n), (y_n)$ is a cube number.

Problem T12/512. Given a right triangle ABC, with the right angle A, inscribed in a circle (O). The point A' is the reflection point of A over O. The point P is the perpendicular projection of A' on the perpendicular bisector of BC. Let H_a, H_b, H_c respectively be the orthocenter of APA', BPA', CPA'. Show that the circle $(H_aH_bH_c)$ is tangent to the circle (O).

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

XUÂN CANH TÝ - 2020

(*Họa bài* ***Tâm tình với chuột và ngẫm về nghề nhà giáo*** *của tác giả Đào Tam đăng ở số* 511, T1.2020)

Nhân phân loại chuột bàn về chữ "cùng"

Câu thành ngữ "chuột chạy cùng sào"
Chẳng biết ra đời tự thuở nao?
Chân lý "vật cùng" thì "tắc biến"
Lẽ đời phận thấp hãy vươn cao.
Chuột chù chuột cống tanh hôi quá
Chuột bạch chuột lang quý hoá sao!
Riêng chỉ một loài cần tuyệt diệt:
***Chuột tham nhũng** – Trị thẳng tay vào!*

NGUYỄN KHẮC PHI (*Hà Nội*)

Xuân Canh Tí Xem Chuột Cảnh

Chú chuột nhỏ con chạy hết sào
Khi chưa có chủ sống nơi nao ?
Màu lông trắng bạc tô thanh bạch
Sắc mắt đen hồng tỏ thấp cao
Được ngắm say sưa loài chuột ấy
Rồi quên vất vả ốc vàng sao ?
Nhắn người thích thú đâu ngoài nước
Lời trước hại sau chớ nhập vào!

NGUYỄN HỮU DỰ

(*xóm 3, Quỳnh Liên, thị xã Hoàng Mai, tỉnh Nghệ An*)

****

Đính chính. Trong TH&TTsố 511, T1.2020:

- Trang 31, cột phải, dòng 4 (từ trên xuống) in thiếu một đoạn sau: ...tròn (ABK), (ACK) theo thứ tự biến thành các đường thẳng B^*K^*, C^*K^* và B^*K^*, C^*K^* tiếp xúc với (AB^*C^*) (vì (1)); đường thẳng AB biến thành đường thẳng AP^* và AP^* tiếp xúc với (AB^*C^*) (vì $AP//BC$); đường thẳng KP biến...
- Trang 33, cột trái, in thiếu một số kí hiệu sau: Tập hợp các vectơ **V**, tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.
- Bỏ hình vẽ ở nội dung bài toán 7 (trang 35)
- Trang 43: đã viết: $n! + 2019 = 2020 = 45^2$.

Sửa là: $n! + 2019 = 2025 = 45^2$.

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 53

Problem: *In an probability experiment, we have two events A and B with* $P(A)=\frac{1}{3}$, *with* $P(B)=\frac{1}{4}$ *and* $P(A'\cap B')=\frac{3}{5}$. *Find* $P(A\cap B)$.

Remark. A' is the complement of the event A.

Solution: We have $P(A\cup B)=1-P((A\cup B)')$

$$=1-P(A'\cap B')=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}.$$

Since $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$.

Therefore:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=\frac{7}{12}-\frac{2}{5}=\frac{35}{60}-\frac{24}{60}=\frac{11}{60}.$$

TỪ VỰNG

probability	:	*xác suất*
experiment	:	*phép thử*
event	:	*biến cố*
complement	:	*phần bù, đối*

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 50

Bài toán. *Cho điểm* $M(1;2)$ *trên mặt phẳng tọa độ. Tìm tọa độ của hai điểm P và Q trên đường tròn (O, OM) (O là gốc tọa độ) sao cho PQM là một tam giác đều.*

Lời giải. Ta sẽ sử dụng các tính chất sau đây của số phức để giải bài toán này. Với hai số phức z và ω ta có:

$$|z\omega|=|z|.|\omega|,$$

$$arg(z.\omega)=arg(z)+arg(\omega),$$

$$arg\left(\frac{z}{\omega}\right)=arg(z)-arg(\omega)\quad(\omega\neq 0).$$

Giả sử z là số phức biểu diễn bởi điểm M: $z=1+2i$. Để sử dụng các tính chất trên, ta cần tìm một số phức ω có môđun bằng 1 và argument bằng $\frac{2\pi}{3}$ và sau đó điểm tương ứng với $z\omega$ và $\frac{z}{\omega}$ sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Dễ dàng tính được $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Khi đó:

$$z\omega=(1+2i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}+\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

và $\frac{z}{\omega}=(1+2i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}+\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i.$

Do đó

$$P\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3};-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{ và }Q\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{3};-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

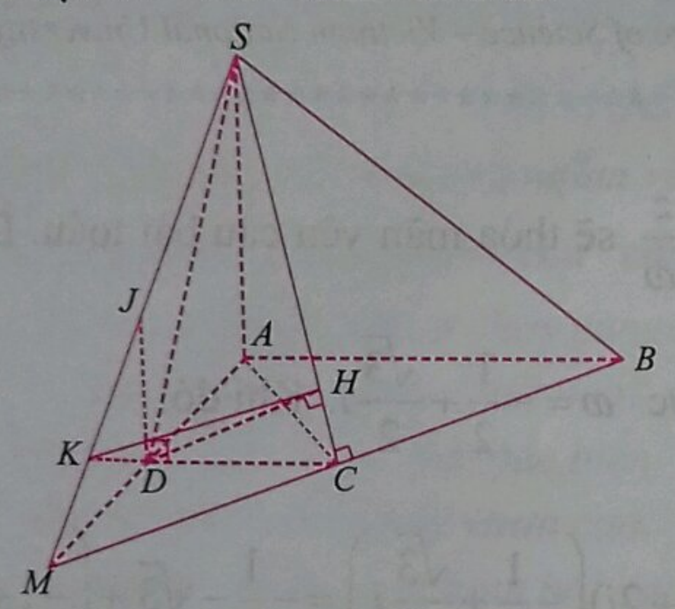
Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Hà Nam**: *Phan Thế Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 10 Toán 2, *Nguyễn Xuân Thành Đạt*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 33. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB=2a$, $AD=DC=a$, $SA=a\sqrt{2}$, $SA\perp(ABCD)$. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).*

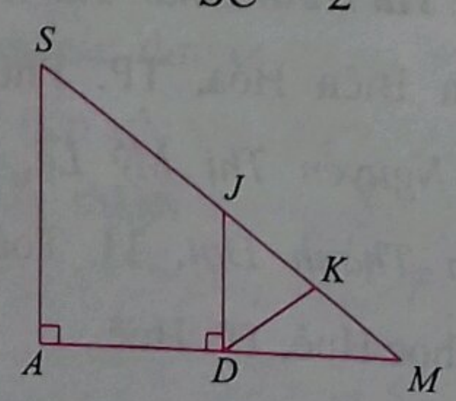
***Cách* 1.** Gọi $M=BC\cap AD$. Khi đó



$\widehat{((SBC),(SCD))}=\widehat{((SCM),(SCD))}$. Chứng minh được ΔSCB vuông tại C. Gọi H là hình chiếu của D lên SC, kẻ HK // MC $(K\in SM)$. Ta có, $\widehat{((SCM),(SCD))}=\widehat{KHD}=\alpha$. Xét ΔSCD vuông tại D, ta có:

$$\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{DC^2}+\frac{1}{DS^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{4}{3a^2}$$

$$\Rightarrow DH=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ HC=\frac{DC^2}{SC}=\frac{a}{2}.$$



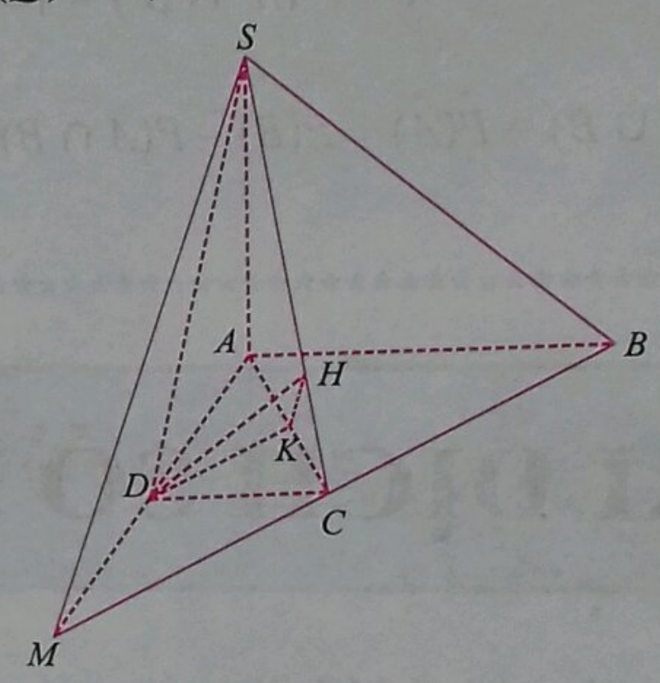
Do HK // MC mà $\frac{SH}{SC}=\frac{3}{4}$ nên

$$HK=\frac{3}{4}MC=\frac{3}{4}a\sqrt{2};\ KM=\frac{1}{4}SM=\frac{a\sqrt{6}}{4}$$

J là trung điểm của SM thì K là trung điểm của JM. Suy ra $KD=KM=\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Áp dụng định lí côsin cho ΔKDH, ta được:

$$\cos\alpha=\frac{HD^2+HK^2-KD^2}{2HK.HD}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

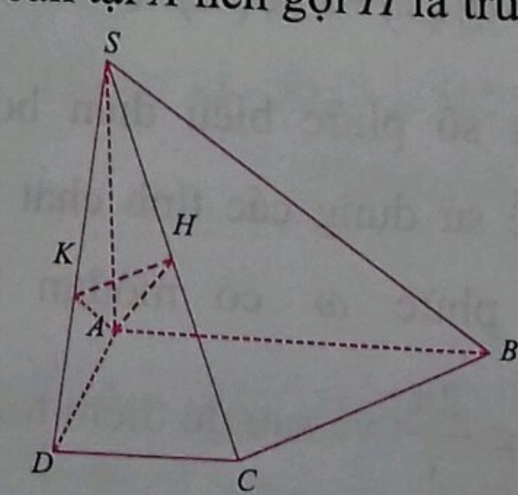
Cách* 2. *Nhận xét. Cho mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ thỏa mãn $(P)\cap(Q)\cap(R)=\Delta,(P)\perp(Q)$. Gọi α,β lần lượt là góc tạo bởi các mặt phẳng (P) và (R), (Q) và (R). Khi đó, $\alpha+\beta=90°$.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên AC thì K là trung điểm của AC và $DK\perp(SAC)$, kẻ $DH\perp SC$ thì góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (SAC) là $\widehat{DHK}$. Ta có $(SAC)\perp(SBM)$, áp dụng nhận xét trên ta được:

$$\cos\widehat{((SCD),(SBC))}=\sin\widehat{DHK}=\frac{DK}{DH}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

***Cách* 3** (Dựa vào định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng). Dễ dàng có $BC\perp(SAC)$. Do tam giác SAC vuông cân tại A nên gọi H là trung điểm của



SC thì $AH \perp SC$ và $AH = \frac{1}{2}SC = a \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Dựng $AK \perp SD$ thì $AK \perp (SDC)$ và $AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

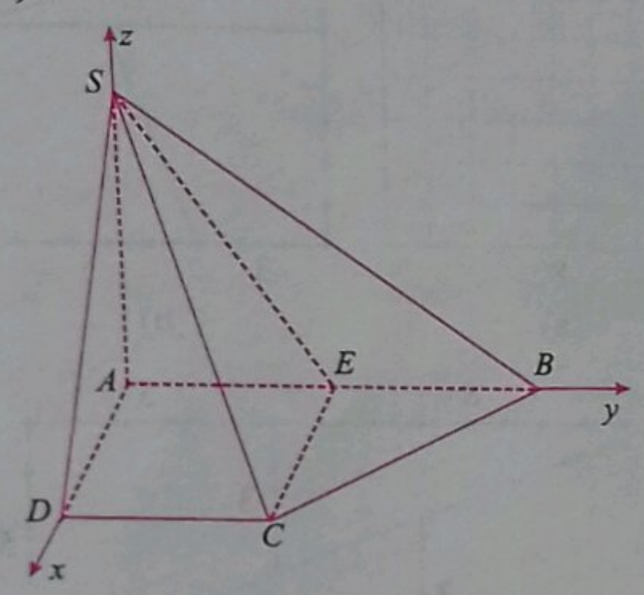
ΔAHK vuông tại K nên

$\cos\widehat{((SBC),(SCD))} = \cos\widehat{(AH,AK)}$

$= \cos\widehat{KAH} = \frac{AH}{AK} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

***Cách* 4** (Sử dụng phương pháp tọa độ). Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

$A(0;0;0), D(a;0;0), B(0;2a;0), E(0;a;0), C(a;a;0)$, $S(0;0;a\sqrt{2})$.



$\overrightarrow{SC} = (a;a;-a\sqrt{2}); \overrightarrow{SB} = (0;2a;-a\sqrt{2}); \overrightarrow{SD} = (a;0;-a\sqrt{2})$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng(SBC) là

$$\overrightarrow{n_1} = -a^2\sqrt{2}(1;1;\sqrt{2}).$$

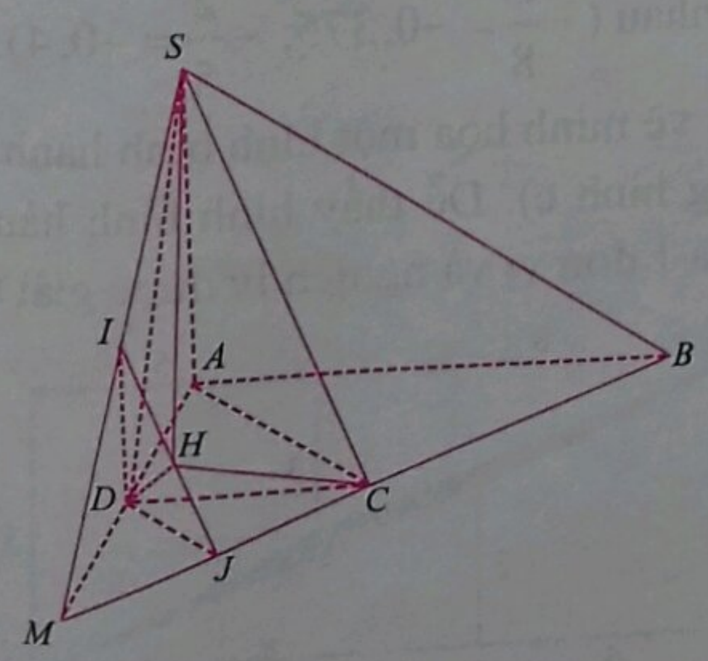
Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SCD) là

$$\overrightarrow{n_2} = -a^2(\sqrt{2};0;1;).$$

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) thì

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

***Cách* 5** (sử dụng công thức diện tích hình chiếu).



Gọi $M = AD \cap CB$, I, J lần lượt là trung điểm của SM và MC.

Từ $\begin{cases}(SAC) \perp (SMB) \\ (DIJ) // (SAC)\end{cases} \Rightarrow (DIJ) \perp (SMB)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên IJ thì H là trung điểm của IJ (vì $ID = DJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$) và H là hình chiếu vuông góc của D trên (SMC). Ta có:

$$S_{\Delta SDC} = \frac{1}{2}SD.DC = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\Delta SMC} = \frac{1}{2}SC.MC = \frac{1}{2}.2a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}.$$

$$S_{\Delta SHC} = \frac{1}{2}S_{\Delta SMC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD), áp dụng công thức diện tích hình chiếu ta có:

$$\cos\varphi = \frac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SDC}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

NGUYỄN QUANG NAM

(*GV THPT Quỳ Hợp, Nghệ An*)

Nhận xét. Một số bạn cho kết quả không chính xác: $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ (!). Ngoài 5 cách giải của thầy *Nguyễn Quang Nam*, người đề xuất bài toán, Tòa soạn Tạp chí TH & TT còn nhận được một số cách giải tốt từ các bạn: **Quảng Bình**: *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 35 dưới đây về toàn soạn TH&TT trước ngày 31.3.2010.

BÀI TOÁN 35. *Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta có:*

$$(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \le \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C.$$

PHẠM DUY KHÁNH

(*GV THPT Quỳ Châu, Quỳ Châu, Nghệ An*)

Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 5010, T12.2019.

BÀI 41 (Mathematiccal Excalibur, vol. 10. No 3).
Với mọi số nguyên $n \geq 6$, chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{16}{5}. \qquad (1)$$

Lời giải. Ta chứng minh (1) bằng quy nạp.

Đặt $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{16}{5}$. Với $n = 6$ ta có:

$a_6 = \sum_{k=1}^{5} \frac{6}{6-k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{16}{5}$. Giả sử rằng (1) đúng với $n \geq 6$, tức là $a_n \leq \frac{16}{5}$. Ta có:

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n+1}{n-j} \cdot \frac{1}{2^j}$$

$$= \frac{n+1}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n}{n-j} \cdot \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{a_n}{2}\right) \leq \frac{7}{6}\left(1 + \frac{8}{5}\right) < \frac{16}{5}.$$

Vậy (1) đúng với $n + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, BĐT(1) đúng với mọi $n \geq 6$. Vậy BĐT(1) được chứng minh với mọi số nguyên $n \geq 6$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải được bài này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.3.2020.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

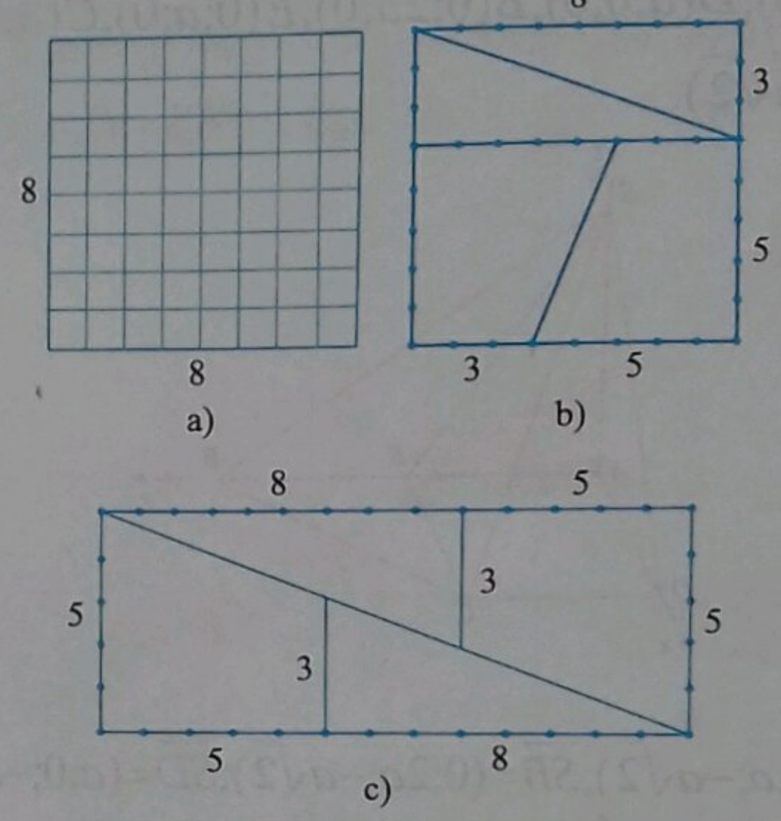
Bài 43. *Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A} + \frac{\cos B}{\sin^2 B} + \frac{\cos C}{\sin^2 C} \geq \frac{R}{r}.$$

GIẢI ĐÁP ĐỐ VUI T6.2019

Lạ quá nhỉ: 64 = 65 ?

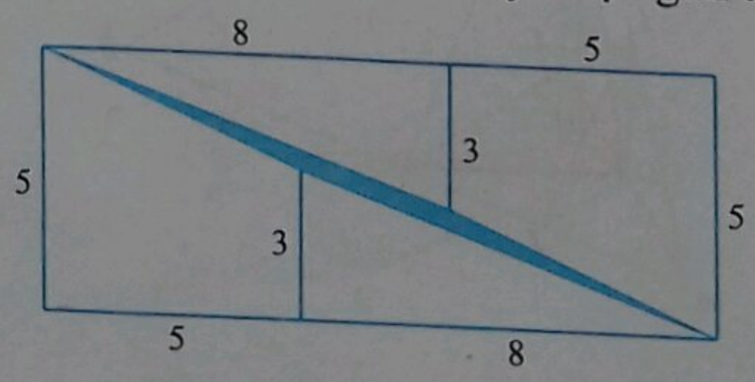
Đề bài: *Cho hình vuông a) với kích thước 8×8. Bây giờ ta chia hình vuông đó thành 2 tam giác vuông và 2 hình thang vuông như hình b). Ghép các tam giác vuông và hình thang vuông này lại ta được hình chữ nhật c). Hình vuông ban đầu có diện tích: $8 \times 8 = 64$. Hình chữ nhật c) có diện tích: $5 \times 13 = 65$. Như vậy: $64 = 65$!*

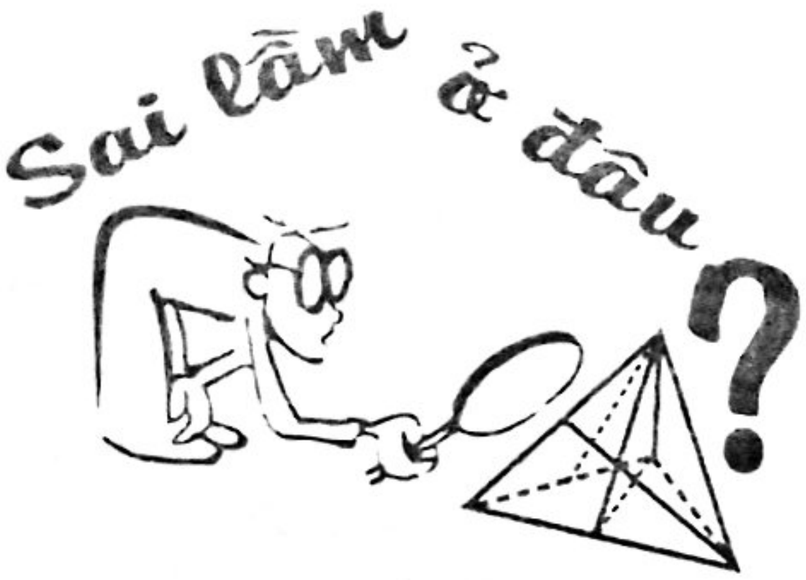


Bạn cho biết lập luận trên sai từ đâu nhé ?

Lời giải. Ta thấy ngay lập luận trong bài sai sẽ ở đâu đó. Nghịch lý này có thể giải thích dựa vào hệ số góc của đường thẳng. Ở hình c), hai tam giác vuông có hai cạnh là 3 và 8 cho ta cạnh huyền có hệ số góc là $-\frac{3}{8}$. Cạnh của hai hình thang dường như trùng với cạnh huyền của hai tam giác vuông, nhưng hệ số góc của hai cạnh này là $-\frac{2}{5}$. Và ta dễ cảm giác những cạnh này trùng nhau vì hệ số góc của chúng gần bằng nhau ($-\frac{3}{8} = -0,375$; $-\frac{2}{5} = -0,4$).

Hình dưới vẽ minh họa một hình bình hành nhỏ thực tế có trong hình c). Dễ thấy hình bình hành này có diện tích là 1 đơn vị và nghịch lý được giải thích.





GIẢI ĐÁP: SAI Ở ĐÂU !

(Đề đăng trên TH&TT số 508, tháng 10 năm 2019)

Phân tích. Ba lời giải trên đều sai, sai ở cách xác định loại phương trình, phương trình (1) không là phương trình mũ và cũng không là phương trình lũy thừa. Giải phương trình (1) ta dựa trên những hiểu biết về lũy thừa sau:

Nếu n nguyên dương thì a^n xác định với mọi a.

Nếu $n = 0$ hoặc nguyên âm thì a^n xác định khi $a \neq 0$, cụ thể $a^0 = 1, a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.

Nếu n không là số nguyên thì a^n xác định khi $a > 0$.

Nếu $a = 1$ thì $a^\alpha = 1^\alpha = 1\ \forall \alpha$.

Sau đây là lời giải đúng cho PT (1).

Lời giải đúng.

TH1: $x^2 + 3x$ là số nguyên lẻ.

Ta có $(1) \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

Với $x = 3$, $x^2 + 3x = 18$ không là số nguyên lẻ. Vậy PT(1) vô nghiệm.

TH2: $x^2 + 3x$ là số nguyên chẵn. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = \pm 1 \\ \begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x^2 + 3x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Kiểm tra lại tất cả đều thỏa mãn $x^2 + 3x$ là số nguyên chẵn. Vậy trường hợp này PT(1) có 4 nghiệm.

TH3: $x^2 + 3x$ không là số nguyên.

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 1 \\ \begin{cases} 0 < x - 2 \neq 1 \Leftrightarrow x = 3. \\ x^2 + 3x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Kiểm tra lại, với $x = 3$ thì $x^2 + 3x$ là số nguyên. Vậy PT(1) không có nghiệm.

Kết luận: PT(1) có 4 nghiệm. Chọn D.

Nhận xét. Một số bạn bạn tham gia bài này nhưng không phát hiện đúng sai lầm.

KIHIVI

ĐÚNG HAY SAI ?

Bài toán. *Cho 2 số thực x, y thỏa mãn* $2x - y - 2 = 0$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$F = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9}.$$

Sau đây là lời giải của bạn Toàn lớp 12A5:

Từ $2x - y - 2 = 0$ suy ra $y = 2x - 2$. Do đó

$$F = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9} = |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

với $\vec{u} = (x; 2x - 1), \vec{v} = (x; 2x - 5)$. Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ ta có:

$$F = |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{20x^2 - 48x + 36} \geq \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

(vì $20x^2 - 48x + 36 \geq \dfrac{36}{5}, \forall x \in \mathbb{R}$, đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{6}{5}$). Vậy $\min F = \dfrac{36}{5}$, đạt được khi $x = \dfrac{6}{5}, y = 2x - 2 = \dfrac{2}{5}$.

Em hãy cho biết lời giải của bạn Toàn đúng hay sai, nếu sai thì lời giải của em thế nào!

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 512 (2.2020)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

***Biên tập*:** LÊ MAI, THÙY LINH
***Trị sự, phát hành*:** THÙY LINH, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** THÙY LINH

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

BỘ SÁCH GIÁO KHOA
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

DANH MỤC BỘ SÁCH LỚP MỘT

SÁCH HỌC SINH

1. Tiếng Việt 1, tập một
2. Tiếng Việt 1, tập hai
3. Toán 1, tập một
4. Toán 1, tập hai
5. Tự nhiên và Xã hội 1
6. Đạo đức 1
7. Âm nhạc 1
8. Mĩ thuật 1
9. Hoạt động trải nghiệm 1
10. Giáo dục thể chất 1
11. Tiếng Anh 1

SÁCH GIÁO VIÊN

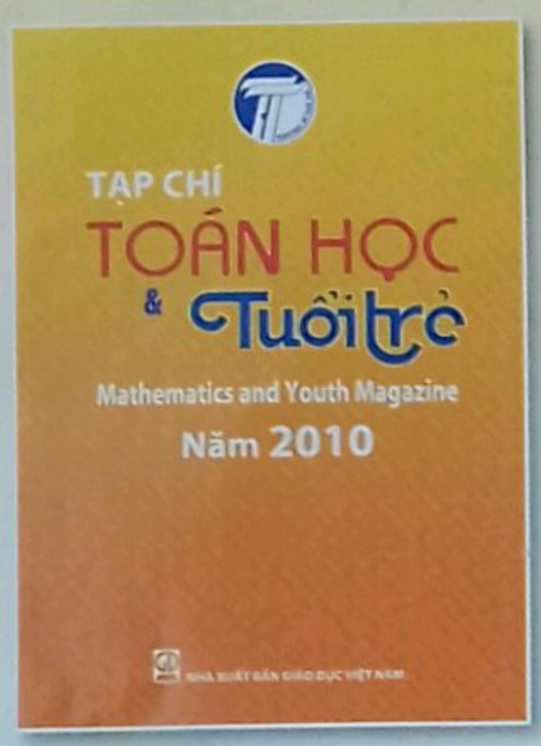
1. Tiếng Việt 1, tập một - SGV
2. Tiếng Việt 1, tập hai - SGV
3. Toán 1 - SGV
4. Tự nhiên và Xã hội 1 - SGV
5. Đạo đức 1 - SGV
6. Âm nhạc 1 - SGV
7. Mĩ thuật 1 - SGV
8. Hoạt động trải nghiệm 1 - SGV
9. Giáo dục thể chất 1 - SGV
10. Tiếng Anh 1 - SGV

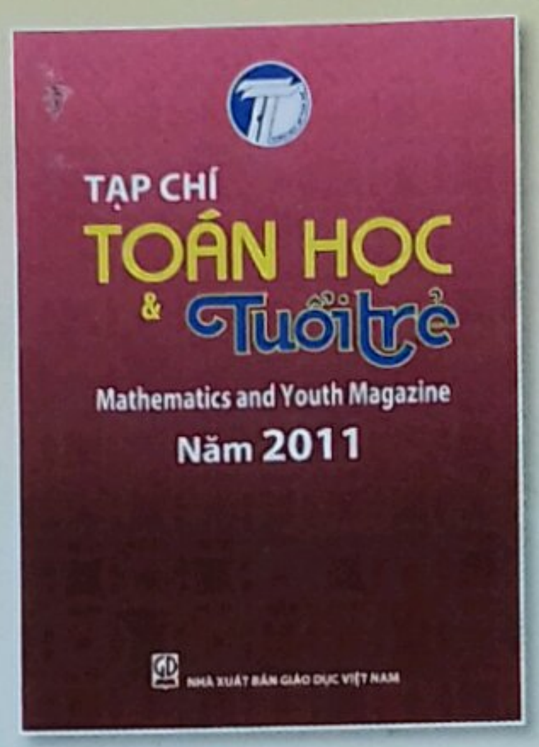
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

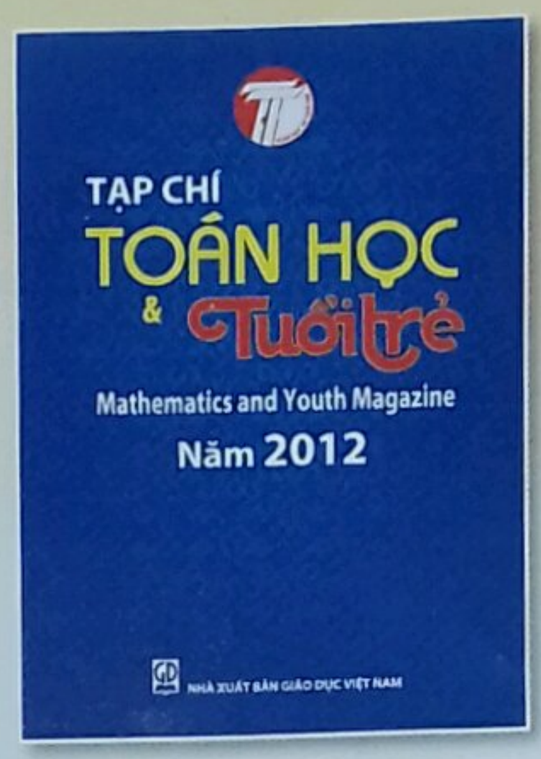
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

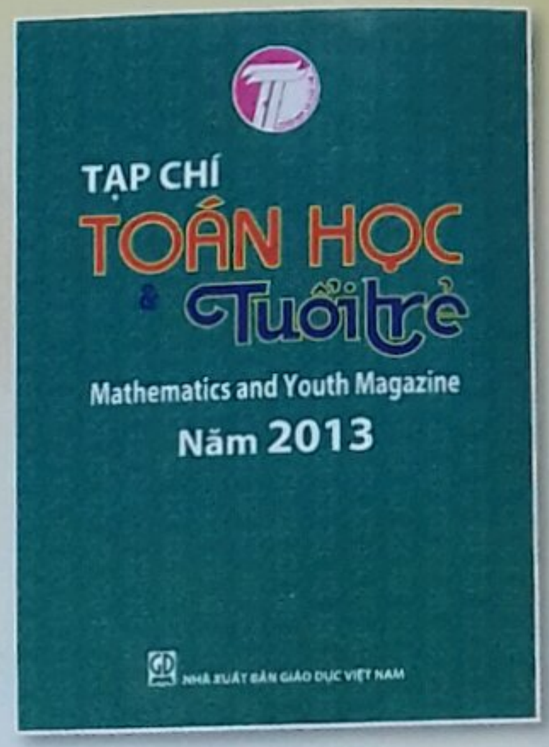
Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

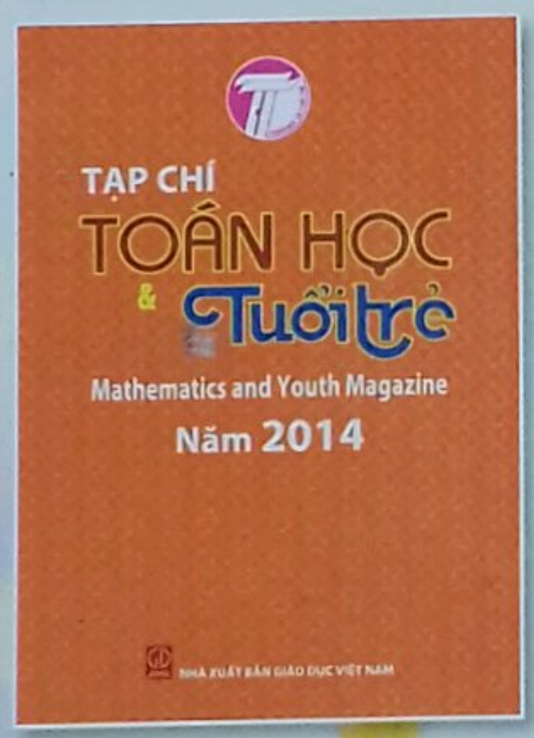


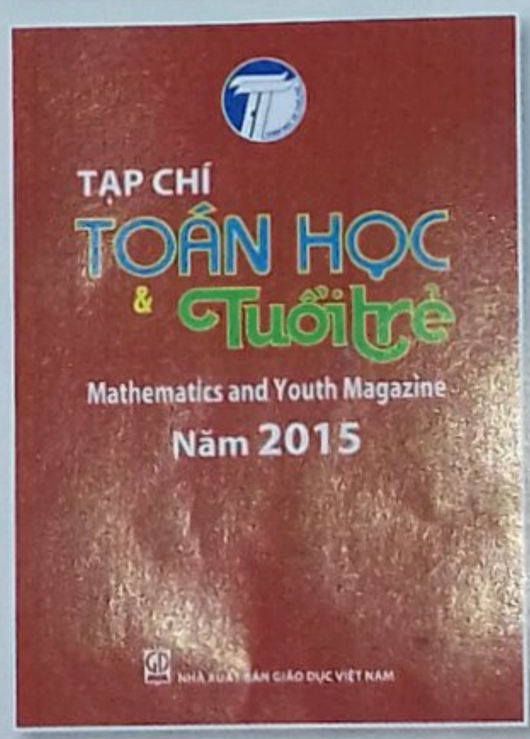


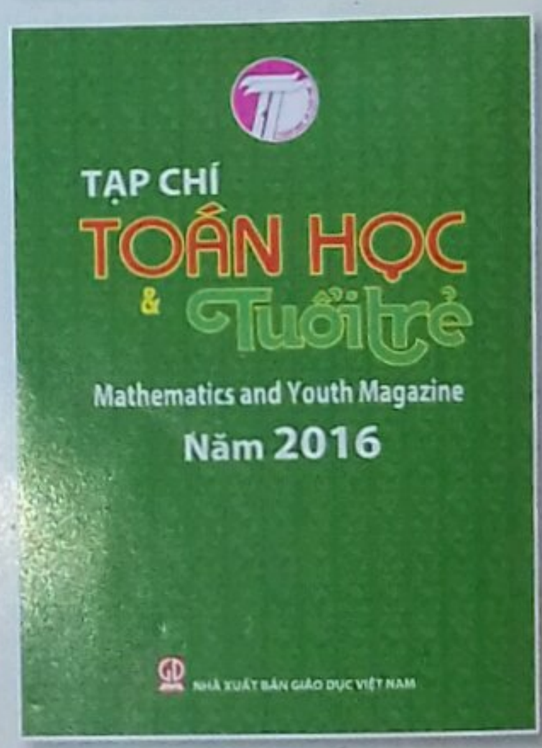


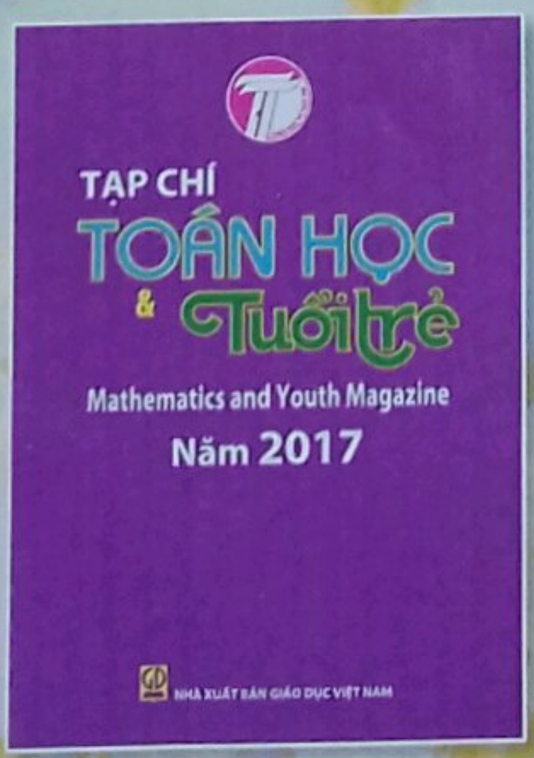


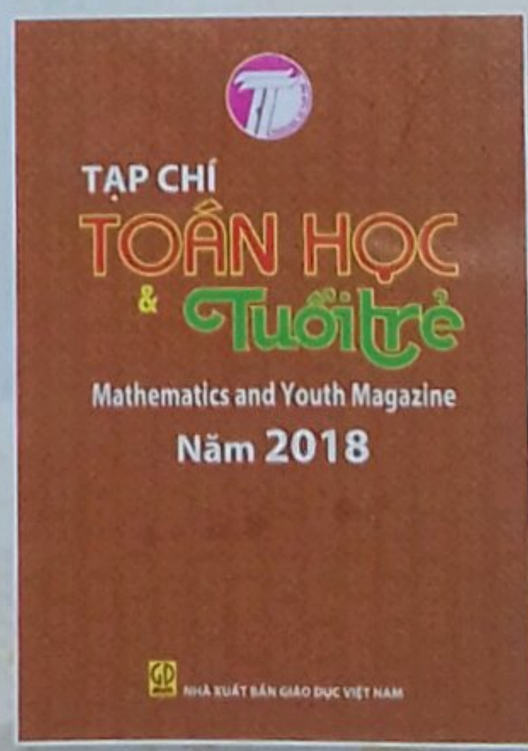
Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng
Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng
Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng
Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng
Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng
Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

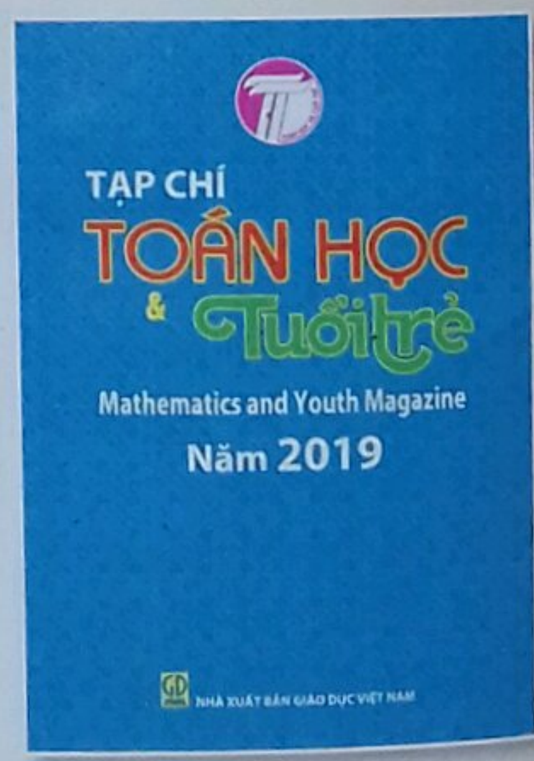












Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

• Điện thoại: 024.35121606 – 024.35121607 • Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT2M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2020

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng