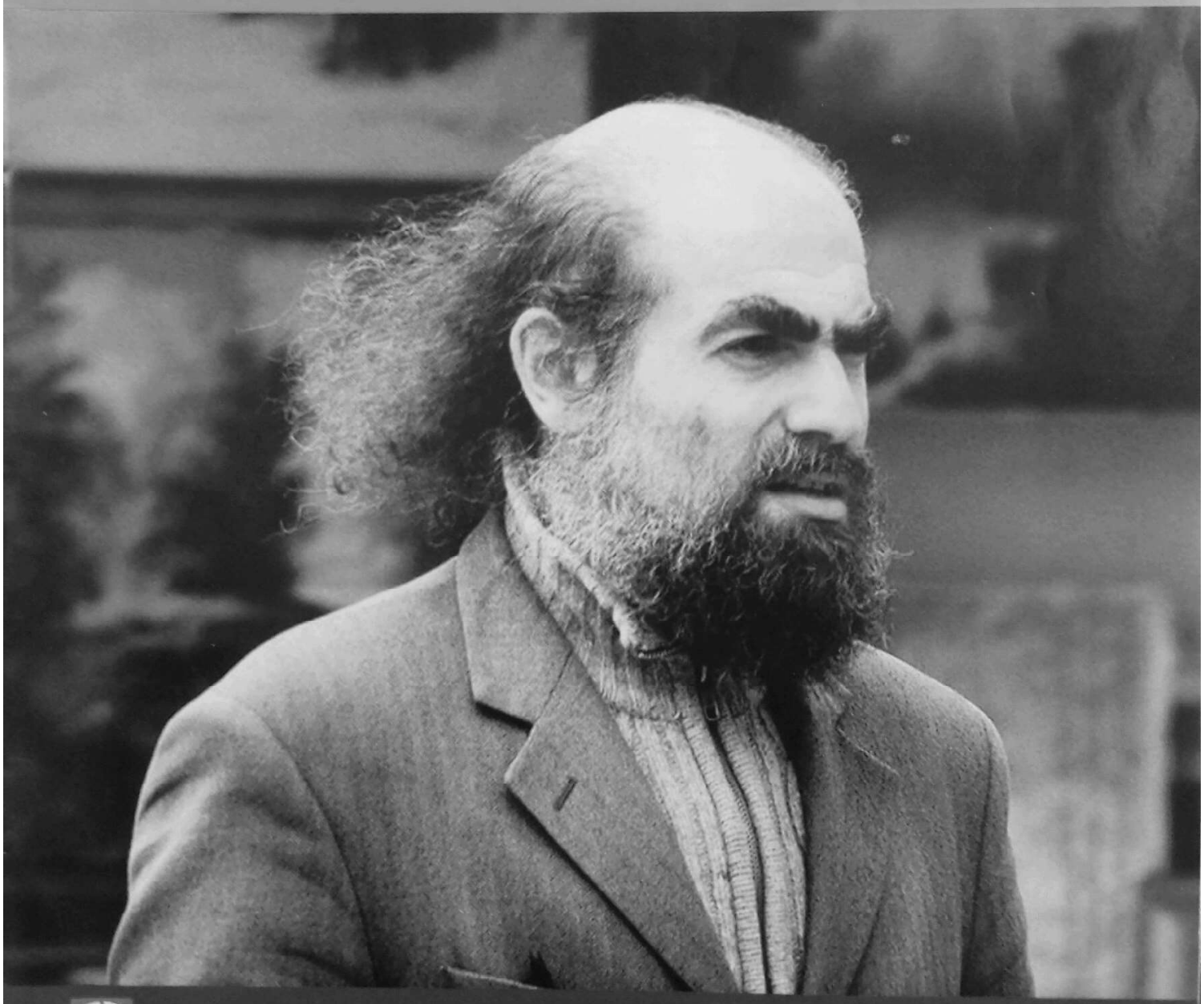
# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

4 2020
Số 514

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Nhà toán học Nga
*Grigory Yakovlevich Perelman*


# ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG PHÁP TỔNG BÌNH PHƯƠNG

**TRẦN NGỌC DUY**
*(GV THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức, Quảng Ngãi)*

## I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$.

2) $(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$.

3) $A^2 = B^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$.

4) $A_1^2 + A_2^2 + ... + A_n^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ ..... \\ A_n = 0 \end{cases}$.

5) $A_1^2 + A_2^2 + ... + A_n^2 \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ ..... \\ A_n = 0 \end{cases}$.

## II. CÁC ỨNG DỤNG

### 1. Chứng minh đẳng thức

**Phương pháp.** Để chứng minh $A = B$, ta xét hiệu $A - B$ và chứng minh $A - B = 0$ hoặc $A - B = C^2 = 0$.

**Thí dụ 1.** a) *Cho $a^2 + b^2 = 2ab$. Chứng minh rằng: $a = b$.*

b) *Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ thì $a = b = c$.*

***Lời giải.*** a) Ta có:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b.$$

b) Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

**Thí dụ 2.** *Tam giác có ba cạnh a, b, c thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Hỏi tam giác đó là tam giác gì?*

***Lời giải.*** Ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0$$

Theo giả thiết, ta có: $a + b + c > 0$ nên

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy tam giác đó là tam giác đều.

**Bài tập vận dụng**

**Bài 1.** Chứng minh rằng:

a) Nếu $(x+y)^2 = 2(x^2 + y^2)$ thì $x = y$.

b) Nếu $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ với $x, y \neq 0$ thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$;

c) Nếu $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$ với $x, y, z \neq 0$ thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$;

d) Nếu $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ thì $a = b = c$;

e) Nếu $(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 = (y+z-2x)^2 + (z+x-2y)^2 + (y+x-2z)^2$ thì $x = y = z$.

**Bài 2.** a) Tam giác có ba cạnh $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $(b+c)^2 = 2(b^2 + c^2)$ thì tam giác đó là tam giác cân.

b) Tam giác có ba cạnh $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $(a+b+c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ hoặc $(a+b+c)^2 = 3(ab + bc + ca)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

**Bài 3.** Cho $x$, $y$, $z$ là các số dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 2020$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = x\sqrt{\frac{(y^2+2020)(z^2+2020)}{x^2+2020}} + y\sqrt{\frac{(z^2+2020)(x^2+2020)}{y^2+2020}} + z\sqrt{\frac{(x^2+2020)(y^2+2020)}{z^2+2020}}.$$

**Bài 4.** Chứng minh rằng:

$$x^4+y^4+(x+y)^4=2\left(x^2+xy+y^2\right).$$

**2. Chứng minh bất đẳng thức**

**Phương pháp.** Để chứng minh $A\ge B$, ta xét hiệu $A-B$ và chứng minh $A-B\ge 0$ hoặc $A-B=C^2\ge 0$.

**Thí dụ 1.** *Chứng minh rằng:*

a) $a^2+b^2\ge 2ab$;

b) $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$;

c) $a^3+b^3+c^3\ge 3abc$, với $a+b+c>0$;

d) $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$;

e) $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$.

***Lời giải.*** a) Ta có:

$$a^2+b^2\ge 2ab\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0 \text{ ( luôn đúng).}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

b) Ta có: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}a-b=0\\ b-c=0\\ c-a=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$

c) Ta có:

$$a^3+b^3+c^3\ge 3abc\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc\ge 0$$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\ge 0.$

Theo giả thiết, ta có: $a+b+c\ge 0$ nên

$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\ge 0$ ( luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

d) Ta có: $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\le 3a^2+3b^2+3c^2$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

e) Ta có: $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}a-b=0\\ b-c=0\\ c-a=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c\cdot$

**Thí dụ 2.** *Chứng minh rằng:*

a) $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ , với $a,b\ge 0$;

b) $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\ge (ax+by)^2$ với $xy\ne 0$;

c) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$ khi $ab>0$;

d) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\le -2$ khi $ab<0$;

e) $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$, với $a, b, c>0$.

***Lời giải.*** a) Ta có:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

b) Ta có: $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\ge (ax+by)^2$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-(ax+by)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (ay-bx)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ay-bx=0\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$.

c) Ta có: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2-2ab}{ab}\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{(a-b)^2}{ab}\ge 0$

(luôn đúng vì $ab>0$ theo giả thiết).

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

d) Ta có: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\le -2\Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2+2ab}{ab}\le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a+b)^2}{ab}\le 0$ (luôn đúng vì $ab<0$ theo giả thiết). Dấu "=" xảy ra khi $a=-b$.

e) Ta có: $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (1);

$b+c\ge 2\sqrt{bc}$ (2); $c+a\ge 2\sqrt{ca}$ (3).

Nhân vế với vế (1), (2), (3), ta được:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

**Bài tập vận dụng**

**Bài 1.** Cho $a, b, c$ là số dương. Chứng minh rằng:

a) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$;

b) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$;

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$;

d) $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$;

e) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geq a+b+c$.

**Bài 2.** Cho $a, b, c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$a^3+b^3+c^3+2abc < a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$.

**Bài 3.** Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq (ax+by+cz)^2$$

với mọi $a, b, c, x, y, z$.

**Bài 4.** Cho $a, b, c$ là các số khác 0. Chứng minh rằng: $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 \geq 3\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\right)$.

**Bài 5.** Cho $a, b, c$ là các số không âm. Chứng minh rằng: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

**Bài 6.** Cho $a, b$ là các số thực dương. Chứng minh rằng: $(a+b)^2+\frac{a+b}{2} \geq 2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}$.

**Bài 7.** Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$;

b) $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$, với $a>0, b>0$;

c) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$;

d) $a^4+b^4 \geq a^3b+ab^3$.

**Bài 8.** Cho tam giác nhọn $ABC$, ba đường cao $AD, BE, CF$ cắt nhau tại $H$.

1) Chứng minh rằng:

a) $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF} \geq 9$.

b) $\frac{HA}{HD}+\frac{HB}{HE}+\frac{HC}{HF} \geq 6$.

c) $\frac{HD}{AH}+\frac{HE}{BH}+\frac{HF}{CH} \geq \frac{3}{2}$.

d) $\frac{HA}{BC}+\frac{HB}{CA}+\frac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}$.

e) $\cos A+\cos B+\cos C \leq \frac{3}{2}$.

f) $\cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8}$.

g) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \geq \frac{3}{4}$.

h) $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AD^2+BE^2+CF^2} \geq 4$.

i) $\frac{AB.BC+BC.CA+CA.AB}{AH.AD+BH.BE+CH.CF} \leq 2$.

2) Gọi $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$, $M$ là giao điểm của $AO$ và $BC$. Chứng minh:

$$\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC} \geq 2.\frac{AB}{AC}.$$

**3. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức**

**Phương pháp.** Áp dụng hằng đẳng thức: $A^2 \pm 2AB+B^2=(A \pm B)^2$ để biến đổi biểu thức về dạng:

- $P=a+[f(x)]^2 \geq a \Rightarrow \min P=a$ khi $f(x)=0$.
- $Q=b-[f(x)]^2 \leq b \Rightarrow \max Q=b$ khi $f(x)=0$.

**Thí dụ 1.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:*

a) $A=x^2+2x+2020$;

b) $B=x^2+5y^2-2xy+4y+2021$;

c) $C=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$.

***Lời giải.*** a) Ta có: $A=x^2+2x+2020$

$=x^2+2x+1+2019=(x+1)^2+2019 \geq 2019$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $\min A=2019 \Leftrightarrow x=-1$.

b) Ta có: $B=x^2+5y^2-2xy+4y+2021$

$=(x^2-2xy+y^2)+(4y^2+4y+1)+2020$

$=(x-y)^2+(2y+1)^2+2020 \geq 2020$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-\frac{1}{2}$.

Vậy min $B = 2020 \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{2}$.

c) Ta có: $C = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} = \frac{3}{4} + \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}{(x+1)^2}$

$$= \frac{3}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2}{(x+1)^2} = \frac{3}{4} + \left[\frac{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)}{x+1}\right]^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \min C = \frac{3}{4}$.

**Thí dụ 2.** *Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:*

a) $D = 2020 - 4x - 4x^2$;

b) $E = 2018 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y$;

c) $F = \frac{4x^2 - 6x + 1}{(2x-1)^2}$.

***Lời giải.*** a) Ta có:

$D = 2020 - 4x - 4x^2 = -4x^2 - 4x - 1 + 2021$

$= -(4x^2 + 4x + 1) + 2021 = -(2x+1)^2 + 2021 \leq 2021$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy min $D = 2021 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

b) Ta có: $E = 2018 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y$

$= -(x^2 - 2x + 1) - (4y^2 + 4y + 1) + 2020$

$= -(x-1)^2 - (2y+1)^2 + 2020 \leq 2020$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy min $E = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

c) Ta có: $F = \frac{4x^2 - 6x + 1}{(2x-1)^2} = \frac{5}{4} + \frac{-x^2 - x - \frac{1}{4}}{(2x-1)^2}$

$$= \frac{5}{4} - \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{(2x-1)^2} \leq \frac{5}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2} = 0 \\ 2x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy max $F = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

**Thí dụ 3.** *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 2019$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:*

a) $E = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 2020$;

b) $F = \frac{ab}{3c} + \frac{bc}{3a} + \frac{ca}{3b}$;

c) $G = \frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca}$.

***Lời giải.*** a) Ta có:

$E = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 2020$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 2020$

$= 2019(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 2020$

$= \frac{2019}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] + 2020 \geq 2020$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{2019}{3} = 673$.

Vậy min $E = 2020 \Leftrightarrow a = b = c = 673$.

b) Ta có: $F = \frac{ab}{3c} + \frac{bc}{3a} + \frac{ca}{3b} = \frac{1}{3}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}} = 2b$ (vì $a, b, c > 0$).

Tương tự ta cũng có: $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c$, $\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a$. Suy ra $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$

nên: $F \geq \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}.2019 = 673$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{2019}{3} = 673$.

Vậy min $F = 673 \Leftrightarrow a = b = c = 673$.

c) Ta có: $G = \frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca}$

$$= \frac{a^2}{2b} + \frac{b^2}{2a} + \frac{b^2}{2c} + \frac{c^2}{2b} + \frac{c^2}{2a} + \frac{a^2}{2c}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta được:

$$\frac{a^2}{2b}+\frac{c^2}{2b}\ge 2\sqrt{\frac{a^2c^2}{4b^2}}=\frac{ac}{b}\ (\text{vì } a,b,c>0).$$

Tương tự: $\frac{b^2}{2a}+\frac{c^2}{2a}\ge\frac{bc}{a}$; $\frac{a^2}{2c}+\frac{b^2}{2c}\ge\frac{ab}{c}$.

Suy ra:

$$G=\frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ca}\ge\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}$$
$$\ge a+b+c=2019.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{2019}{3}=673$. Vậy $\min G=2019 \Leftrightarrow a=b=c=673$.

**Bài tập vận dụng**

**Bài 1**. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A=5x^2+10x+1930$;

b) $B=x^2+5y^2-2xy+4y+1945$;

c) $C=x^2-4xy+5y^2+10x-22y+1975$;

d) $D=(x^2-2x)(x^2-2x+2)$;

e) $E=\frac{3x^2-8x+6}{x^2-2x+1}$; $F=\frac{x^2-4x+1}{x^2}$;

f) $G=\frac{x^2-2x+2020}{x^2}$; $H=\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$.

**Bài 2**. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A=-9x^2+6x-20$;

b) $B=-x^2+2x-y^2-4y-4z^2+4z+11$;

c) $C=-x^2-26y^2+10xy-14x+76y+1982$;

d) $D=2020-(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$;

e) $E=\frac{2x+1}{x^2+2}$.

**Bài 3**. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A=\frac{4x+3}{x^2+1}$; b) $B=\frac{3-4x}{x^2+1}$; c) $C=\frac{27-12x}{x^2+9}$;

d) $D=\frac{8x+3}{4x^2+1}$; e) $E=\frac{2x+1}{x^2+2}$; f) $F=\frac{3x^2-2x+3}{x^2+1}$;

g) $G=\frac{2010x+2680}{x^2+1}$; h) $H=\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+3}$.

**Bài 4**. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

$$H=a^3+b^3+c^3-3abc+1941,$$

với $a+b+c=-1911$.

**Bài 5**. Cho $a$, $b$, $c$ là các số dương thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{6057}$. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $P=\frac{2020a}{\sqrt{a^2+2019}}+\frac{2020b}{\sqrt{b^2+2019}}+\frac{2020c}{\sqrt{c^2+2019}}$;

b) $Q=\frac{2bc}{\sqrt{a^2+2019}}+\frac{2ca}{\sqrt{b^2+2019}}+\frac{2ab}{\sqrt{c^2+2019}}$.

**Bài 6**. Cho $a$, $b$, $c$ là các số dương thỏa mãn: $a+b+c=1941$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$.

**Bài 7**. Cho $a$, $b$, $c$ là các số âm thỏa mãn $a+b+c=-1941$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $L=\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$.

**Bài 8**. Cho $a$, $b$, $c$ là các số dương thỏa mãn $a+b+c=2022$. Tìm giá trị nhỏ nhất của của biểu thức: $M=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$.

**4. Chứng minh biểu thức luôn dương (âm) với mọi biến của biểu thức**

**Phương pháp.** Áp dụng hằng đẳng thức: $A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2$ để biến đổi biểu thức về các dạng sau:

- $P=a+[f(x)]^2>0$ $(a>0)$ suy ra $P>0$ với mọi $x$.
- $Q=b-[f(x)]^2<0$ $(b<0)$ suy ra $Q<0$ với mọi $x$.

**Thí dụ 1.** *Chứng minh rằng*:

a) $A=2x^2-4x+3>0$ *với mọi* $x$;

b) $B=x^2-xy+y^2+1941>0$ *với mọi* $x, y$;

c) $C=x^2+4y^2+z^2-2x+8y-6z+15{,}5>0$ *với mọi* $x, y, z$.

***Lời giải.*** a) Ta có: $A=2x^2-4x+3$
$=2(x^2-2x+1)+1=2(x-1)^2+1>0$.
Vậy $A>0$ với mọi $x$.

b) Ta có: $B=x^2-xy+y^2+1941$

$$=x^2-2x.\frac{y}{2}+\left(\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2+y^2+1941$$

$$=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+1941>0.$$

Vậy $B>0$ với mọi $x, y$.

c) Ta có: $C=x^2+4y^2+z^2-2x+8y-6z+15,5$

$=(x^2-2x+1)^2+4(y^2+2y+1)+(z^2-6z+9)+1,5$

$=(x-1)^2+4(y+1)^2+(z-3)^2+1,5>0.$

Vậy $C>0$ với mọi $x, y, z$.

**Thí dụ 2.** *Chứng minh rằng:*

a) $A=-x^2-27+2x<0$ *với mọi* $x$;

b) $B=4xy-4x^2-y^2-1947<0$ *với mọi* $x, y$;

c) $C=xy+3y+2z-5-x^2-y^2-z^2<0$ *với mọi* $x, y, z$.

***Lời giải.***

a) Ta có: $A=-x^2-27+2x=-(x^2-2x+1)-26$

$=-(x-1)^2-26<0.$

Vậy $A<0$ với mọi $x$.

b) Ta có: $B=4xy-4x^2-2020y^2-1947$

$=-(4x^2-4xy+y^2)-2019y^2-1947$

$=-(2x-y)^2-2019y^2-1947<0.$

Vậy $B<0$ với mọi $x, y$.

c) Ta có: $C=xy+3y+2z-5-x^2-y^2-z^2$

$$=-\left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)-\left(\frac{3}{4}y^2-3y+3\right)-\left(z^2-2z+1\right)-1$$

$$=-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2-3\left(\frac{1}{2}y-1\right)^2-\left(z-1\right)^2-1<0.$$

Vậy $C<0$ với mọi $x, y, z$.

**Bài tập vận dụng**

**Bài 1**. Chứng minh rằng:

a) $A=x^2-6x+2019>0$ với mọi $x$;

b) $B=x^2+5y^2+2x-4xy-10y+2020>0$ với mọi $x, y$;

c) $C=5x^2+10y^2-6xy-4x-2y+2021>0$ với mọi $x, y$;

d) $D=x^2+26y^2+10xy+14x-76y+2022>0$ với mọi $x, y$;

e) $E=x^2+4y^2+z^2-2x-6z+8y+3>0$ với mọi $x, y, z$.

**Bài 2.** Chứng minh rằng:

a) $A=-16x^2+8x-2019<0$ với mọi $x$;

b) $B=-x^2+2x-y^2+8y+5<0$ với mọi $x, y$;

c) $C=-5x^2-26y^2+10xy-14x+76y-19<0$ với mọi $x, y$;

d) $D=-y^4-(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)-z^2-1<0$ với mọi $x, y, z$.

**5. Giải phương trình**

**Phương pháp.** Biến đổi đưa phương trình về dạng: $A_1^2+A_2^2+...+A_n^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}A_1=0\\A_2=0\\.....\\A_n=0\end{cases}$

hoặc $A^2=B^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=B\\A=-B\end{array}\right.$.

**Thí dụ 1.** *Giải các phương trình sau:*

a) $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$ (1);

b) $4\sqrt{2x-1}=4x^2-12x+4$ (2);

c) $x^2-2x+y^2+4y+4z^2-4z+6=0$ (3).

***Lời giải.*** a) ĐK: $x\geq\frac{-10}{3}$. Khi đó:

$(1)\Leftrightarrow x^2+6x+9+3x+10-2\sqrt{3x+10}+1=0$

$\Leftrightarrow(x+3)^2+\left(\sqrt{3x+10}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3x+10}-1=0\\x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\x=-3\end{cases}\Rightarrow x=-3$

(thỏa mãn ĐK). Vậy $S=\{-3\}$.

b) ĐK: $x\geq\frac{1}{2}$. Khi đó:

$(2)\Leftrightarrow 4(2x-1)+4\sqrt{2x-1}+1=4x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{2x-1}+1\right)^2=(2x-1)^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2\sqrt{2x-1}+1=2x-1 & (*)\\2\sqrt{2x-1}+1=1-2x & (**)\end{array}\right.$

(**) vô nghiệm, giải (*) ta được $x=2+\sqrt{2}$ (thỏa mãn ĐK). Vậy $S=\left\{2+\sqrt{2}\right\}$.

c) $(3)\Leftrightarrow(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(4z^2-4z+1)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2+(2z-1)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y+2=0 \\ 2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2. \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y;z)=\left(1;-2;\dfrac{1}{2}\right)$.

**Thí dụ 2**. *Giải phương trình nghiệm nguyên*:

a) $x^2-2xy+2y^2+8yz+16z^2=2019$ (1);

b) $\sqrt{x-2}+\sqrt{y-3}+\sqrt{z-5}=\dfrac{1}{2}(x+y+z-7)$ (2).

***Lời giải***. a) (1) $\Leftrightarrow (x-y)^2+(y+4z)^2=2019$.

Ta có $(x-y)^2$ và $(y+4z)^2$ là số chính phương nên $(x-y)^2$ và $(y+4z)^2$ chia cho 4 dư 0 hoặc 1. Suy ra $(x-y)^2+(y+4z)^2$ chia cho 4 dư 0, 1 hoặc 2. Mà 2019 chia cho 4 dư 3. Do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) ĐK: $\begin{cases} x\ge 2 \\ y\ge 3. \\ z\ge 5 \end{cases}$ Khi đó:

$$(2)\Leftrightarrow x+y+z-7-2\sqrt{x-2}-2\sqrt{y-3}-2\sqrt{z-5}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2-2\sqrt{x-2}+1\right)+\left(y-3-2\sqrt{y-3}+1\right)+\left(z-5-2\sqrt{z-5}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-3}-1\right)^2+\left(\sqrt{z-5}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}-1=0 \\ \sqrt{y-3}-1=0 \\ \sqrt{z-5}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=6 \end{cases}$$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x;y;z)=(3;4;6).$$

**Bài tập vận dụng**

**Bài 1**. Giải các phương trình sau:

a) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$;

b) $2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}$;

c) $\sqrt{3x-2}=-4x^2+21x-22$;

d) $x^4+\sqrt{x^2+3}-3=0$;

e) $x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}$;

f) $(x+3)\sqrt{(4-x)(x+12)}=28-x$;

g) $(x+3)\sqrt{x^2+1}=x^2+3x+1$;

h) $(x+1)\sqrt{x^2-3x+3}=x^2-2x+3$;

i) $4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}=4x^2+3x+3$;

j) $\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}=1+x-2x^2$;

**Bài 2.** Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $x^2+2xy+2y^2-10yz+25z^2=2023$;

b) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+6=0$;

c) $x^2+y^2+z^2=xy+3y+2z-4$;

d) $(x+y+1)^2=3(x^2+y^2+1)$;

e) $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\dfrac{1}{2}(x+y+z)$;

**Bài 3.** Nếu phương trình $x^2+a_1x+b_1=0$ và phương trình $x^2+a_2x+b_2=0$ có nghiệm chung thì phương trình $x^2+(a_1+a_2)x+b_1+b_2=0$ luôn có nghiệm.

**Bài 4.** Cho các phương trình $ax^2+2bx+c=0$; $bx^2+2cx+a=0$; $cx^2+2ax+b=0$, trong đó $a$, $b$, $c$ khác 0. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các phương trình trên có nghiệm.

**Bài 5.** Cho phương trình $x^2-2mx+2m-3=0$ (1).

1) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m$.

2) Với $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình (1).

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=x_1^2+x_2^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của

$$B=2020-x_1^2-x_2^2-x_1x_2.$$

**Bài 6.** Cho phương trình:

$$x^2+(m-1)x+2m-6=0 \quad (2)$$

1) Chứng minh rằng phương trình (2) luôn có nghiệm với mọi $m$.

2) Gọi $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình (2).

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của: $C=x_1^2+x_2^2-x_1x_2$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của:

$$D=2021-x_1^2-x_2^2+x_1x_2.$$

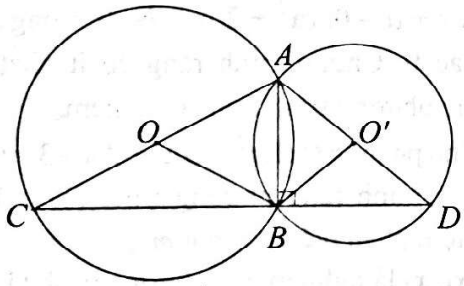

# KHAI THÁC BÀI TOÁN HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU

**ĐẬU CÔNG NHO**
*(GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)*

Trong thực tế dạy - học toán có rất nhiều bài toán mà lời giải thật ngắn gọn, đơn giản nhưng nếu tiếp tục suy nghĩ, tìm tòi và khám phá có thể tìm được nhiều ý tưởng hay, độc đáo để từ đó có thể sáng tạo nên một chuỗi bài toán hay từ dễ đến khó. Bài viết này chúng tôi giới thiệu một số bài toán khai thác từ một bài toán Hình học lớp 9 đơn giản.

**Bài toán (Bài 67 trang 138, sách Bài tập toán 9 - Tập 1)** *Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ đường kính AOC, AO'D của (O) và (O') tương ứng. Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng và AB ⊥ CD.*

***Lời giải.***




*Hình 1*

Xét tam giác $ABC$ có $OA = OC = OB$ nên tam giác $ABC$ vuông tại $B \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0$.

Tương tự có: $\widehat{ABD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^0$ do đó ba điểm $C, B, D$ thẳng hàng và $AB \perp CD$.

Lời giải bài toán thật đơn giản, ngắn gọn. Vậy, bài toán trên còn ẩn chứa điều thú vị gì nữa? Chúng ta hãy tìm những điều mới lạ bằng cách khai thác bài toán theo một số hướng cụ thể sau:

**• Hướng khai thác thứ nhất: Xây dựng bài toán đảo.**

**Bài toán 1.** *Cho hai đường tròn (O) và (O) cắt nhau tại A và B. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AB lần lượt cắt (O) và (O') tại C và D khác B. Chứng minh ba điểm A, O, C và A, O', D thẳng hàng.*

***Lời giải.*** (h.1) Ta có tam giác $AOB$ cân tại $O$ nên

$$\widehat{AOB} = 180^O - 2\widehat{OBA}.$$

Ta có tam giác $COB$ cân tại $O$ nên

$$\widehat{COB} = 180^O - 2\widehat{OBC}.$$

Suy ra: $\widehat{AOB} + \widehat{COB} = 360^O - 2\left(\widehat{OBA} + \widehat{OBC}\right)$

$$= 180^0 \text{ (do } \widehat{OBA} + \widehat{OBC} = 90^0\text{)}.$$

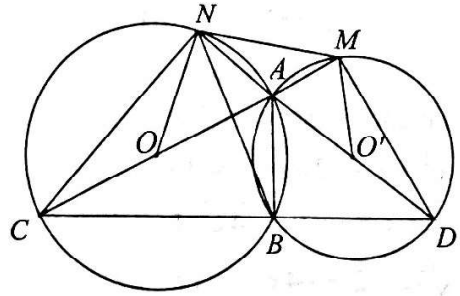
Vậy ba điểm $A, O, C$ thẳng hàng. Tương tự ba điểm $A, O', D$ thẳng hàng.

**• Hướng khai thác thứ hai: Kẻ thêm hình phụ là các giao điểm.**

**Hướng 2.1.** *Kéo dài các tia CA và DA cắt (O) và (O'), ta có bài toán sau:*

**Bài toán 2.** *Cho hai đường tròn (O) và (O) cắt nhau tại A và B. Kẻ các đường kính AOC, AO'D của (O) và (O'). Gọi M là giao điểm của CA với (O'), N là giao điểm của DA với (O). Chứng minh tứ giác CDMN nội tiếp được đường tròn.*

***Lời giải.***




*Hình 2*

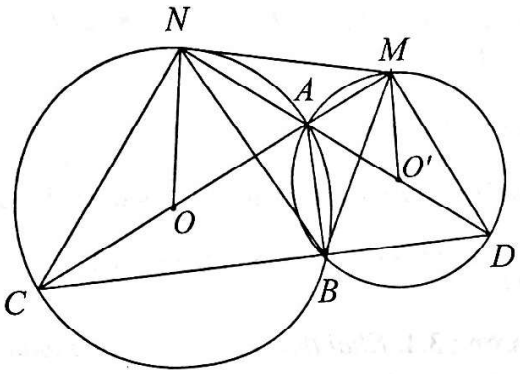
Ta có: $\widehat{CND} = \widehat{CMD} = 90^0$. Suy ra tứ giác $CDMN$ nội tiếp đường tròn đường kính $CD$.

***Nhận xét.*** Tiếp tục suy nghĩ bài toán 2, ta có thêm các kết quả thú vị sau:

* $A$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác $BMN$.

* Ba đường thẳng $CN$, $AB$, $DM$ đồng quy.

***Lời giải.*** (h.3)




*Hình 3*

* $A$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác $BMN$.

Vì tứ giác $CDMN$ nội tiếp đường tròn đường kính $CD \Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{NDC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CN}$).

Lại có $\widehat{CMB} = \widehat{NDC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn $(O')$) $\Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{CMB} \Rightarrow MA$ là tia phân giác của góc $\widehat{NMB}$. Chứng minh tương tự, ta có $NA$ là tia phân giác của góc $\widehat{MNB}$. Suy ra $A$ là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác $BMN$. Vậy $A$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác $BMN$.

* Chứng minh ba đường thẳng $CN$, $AB$, $DM$ đồng quy.

Gọi $H$ là giao điểm của $CN$ và $DM$. Tam giác $HCD$ có các đường cao $CM$ và $DN$ cắt nhau tại $A$

$\Rightarrow A$ là trực tâm của tam giác $HCD$

$\Rightarrow HA$ là đường cao $\Rightarrow HA \perp CD$.

Lại có $AB \perp CD \Rightarrow$ ba điểm $H$, $A$, $B$ thẳng hàng.

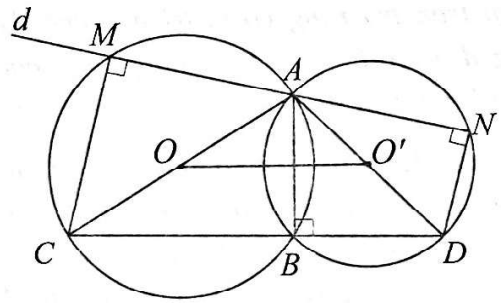
Vậy ba đường thẳng $CN$, $AB$, $DM$ đồng quy.

**• Hướng khai thác thứ ba: Kẻ thêm hình phụ là cát tuyến của hai đường tròn.**

**Hướng 3.1.** *Thêm một chút giả thiết cho bài toán gốc: ($O$ và $O'$ ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ $AB$) và qua $A$ kẻ đường thẳng $d$, ta có bài toán khá hay sau:*

**Bài toán 3.** *Cho hai đường tròn $(O)$ và $(O')$ cắt nhau tại $A$ và $B$ ($O$ và $O'$ ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ $AB$). Kẻ đường thẳng $d$ qua $A$ lần lượt cắt $(O)$ và $(O')$ tại $M$ và $N$ ($A$ nằm giữa $M$ và $N$). Xác định vị trí của $d$ để độ dài đoạn thẳng $MN$ lớn nhất.*

***Lời giải.***




*Hình 4*

***Cách 1.*** (h.4) Ta có: $\widehat{AMC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CM \perp MN$.

$\widehat{AND} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

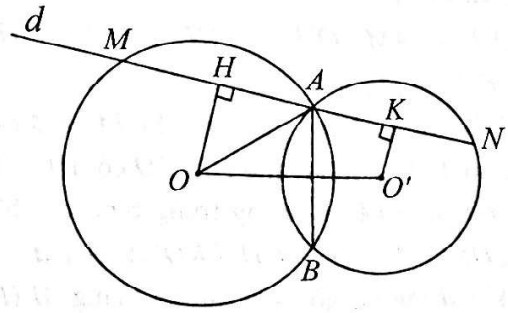
$\Rightarrow DN \perp MN$

$\Rightarrow CM \,//\, DN$ (cùng vuông góc với $MN$)

$\Rightarrow$ tứ giác $MNDC$ là hình thang vuông có hai đáy là $CM$ và $DN \Rightarrow MN \leq CD$ (không đổi)

$\Rightarrow MN$ lớn nhất bằng $CD$ khi $d \,//\, CD$.

Vậy $d \,//\, CD$ thì $MN$ lớn nhất bằng $CD$.




*Hình 5*

***Cách 2.*** (h.5)

Kẻ $OH \perp AM$, $O'K \perp AN \Rightarrow AH = HM$, $AK = KN$. Suy ra $MN$ lớn nhất $\Leftrightarrow HK$ lớn nhất.

Lại có $OH // O'K$ (cùng vuông góc với $MN$) nên tứ giác $OHKO'$ là hình thang vuông có hai đáy là $OH$ và $O'K \Rightarrow HK \leq OO'$ (không đổi)

$\Rightarrow HK$ lớn nhất bằng $OO'$ khi $d // OO'$.

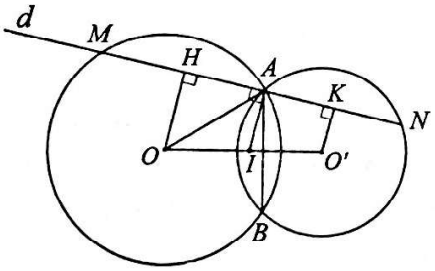
Vậy $d // OO'$ thì $MN$ lớn nhất bằng $2.OO'$ (hay bằng $CD$).

***Nhận xét.*** Từ kết quả của bài toán 3, ta có thêm kết quả tương tự sau:

Xác định vị trí của $d$ để chu vi tam giác $BMN$ lớn nhất.

**Hướng 3.2.** *Từ cách giải thứ 2 của bài toán 3, tôi lại trăn trở rằng có vị trí nào của đường thẳng d để AM = AN hay không? Và thật bất ngờ, có bài toán sau:*

**Bài toán 4.** *Cho hai đường tròn (O;R) và (O';R') cắt nhau tại A và B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Qua A kẻ cát tuyến d bất kỳ cắt (O) và (O') lần lượt tại M và N (A nằm giữa M và N, $M \in (O), N \in (O')$). Xác định vị trí của d để AM = AN.*




*Hình 6*

***Lời giải.*** (h.6)

Kẻ $OH \perp AM$, $O'K \perp AN$ thì $AH = HM$, $AK = KN$. Do đó $AM = AN \Leftrightarrow AH = AK$.

Gọi $I$ là trung điểm của $OO'$ thì $IA$ là đường thẳng cố định. Hình thang $HKO'O$ có $AH = AK$, $OI = IO'$ nên $IA$ là đường trung bình của hình thang $HKO'O \Rightarrow IA // OH // KO' \Rightarrow IA \perp d$.

Vậy khi $d$ vuông góc với đường thẳng $AI$ ($I$ là trung điểm của $OO'$) thì $AM = AN$.

**Hướng 3.3.** *Có AM = AN hay $\frac{AM}{AN} = 1$, thay giá trị tỉ số bằng 1 bởi tỉ số k >0 thì sao? Từ hướng phát triển trên, ta có kết quả tổng quát sau đây:*

**Bài toán 5.** *Cho hai đường tròn (O;R) và (O';R') cắt nhau tại A và B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Qua A kẻ cát tuyến d bất kỳ cắt (O) và (O') lần lượt tại M và N (A nằm giữa M và N). Xác định vị trí của đường thẳng d để $\frac{AM}{AN} = k\left(k > 0\right)$.*

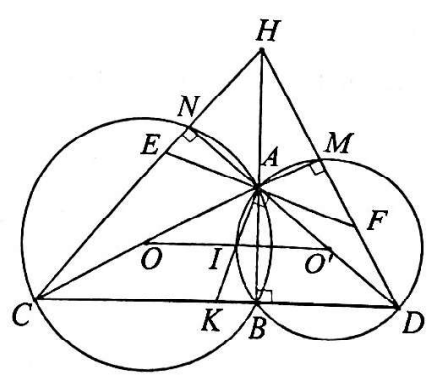
***Hướng dẫn:*** Trên đoạn $OO'$ lấy điểm $I$ sao cho $\frac{OI}{IO'} = k\left(k > 0\right)$. Tương tự bài toán 4.

**Hướng 3.4.** *Khai thác kết quả của bài toán 4 và kết hợp với bài toán 2, ta có thêm bài toán sau:*

**Bài toán 6.** *Cho hai đường tròn (O) và (O) cắt nhau tại A và B (O và O' thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Kẻ đường kính AOC, AO'D của (O) và (O') tương ứng. Gọi M là giao điểm của CA với (O'), N là giao điểm của DA với (O), I là trung điểm của OO'. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AI lần lượt cắt CN, DM tại E, F. Chứng minh AE = AF.*

***Nhận xét.*** Tam giác $ACD$ có $OO'$ là đường trung bình, $I$ là trung điểm của $OO'$ nên đường thẳng $AI$ đi qua trung điểm của $CD$.

***Lời giải.*** (h.7)




*Hình 7*

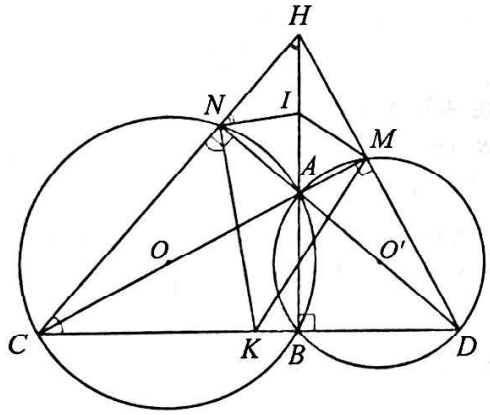
Gọi $H$ là giao điểm của $CN$ và $DM$ thì $H, A, B$ thẳng hàng (Bài toán 2). Gọi $K$ là trung điểm của $CD$. Ta có: $\Delta AKC \sim \Delta FAH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AK}{FA} = \frac{KC}{AH}$ (1). Lại có: $\Delta AKD \sim \Delta EAH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AK}{EA} = \frac{KD}{AH}$ (2). Từ (1) và (2) kết hợp với $KD = KC$ ta được $AE = AF$.

**• Hướng khai thác thứ tư: Kẻ thêm hình phụ là tiếp tuyến của hai đường tròn**

**Hướng 4.1.** *Khai thác bài toán 2 bằng cách kẻ tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDMN tại M và N ta có bài toán sau:*

**Bài toán 7.** *Cho hai đường tròn (O) và (O) cắt nhau tại A và B (O và O' thuộc hai nữa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Kẻ đường kính AOC, AO'D của (O) và (O') tương ứng. Gọi M là giao điểm của CA với (O'), N là giao điểm của DA với (O), Chứng minh các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDMN tại M và N cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng AB.*

***Lời giải.*** (h.8)




*Hình 8*

Gọi $H$ là giao điểm của $CN$ và $DM$ thì $H, A, B$ thẳng hàng (Bài toán 2). Gọi $K$, $I$ lần lượt là trung điểm của $CD$ và $HA$. Vì tam giác $CDN$ vuông tại $N$ có $KC = KD$ nên $KN = KC$

$\Rightarrow \Delta KCN$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{KCN} = \widehat{KNC}$ (1)

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{INH} = \widehat{IHN}$ (2)

Lại có $\widehat{KCN} + \widehat{IHN} = 90^0$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{INK} = 90^0 \Rightarrow IN \perp NK \Rightarrow IN$ là tiếp tuyến của đường tròn qua bốn điểm $C, D, M, N$. Tương tự $IM$ là tiếp tuyến của đường tròn đi qua bốn điểm $C, D, M, N$. Vậy các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDMN$ tại $M$ và $N$ cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng $AB$.

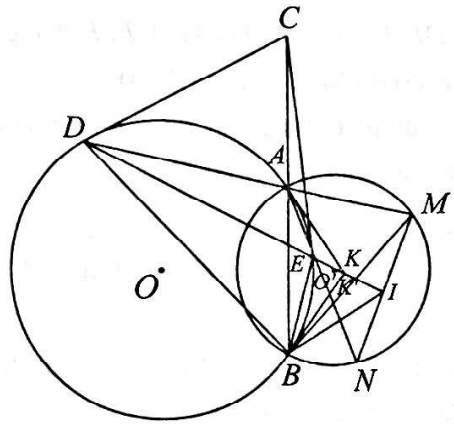
**Hướng 4.2.** *Thay giả thiết các đường kính AOC, AO'D trong bài toán gốc bằng cách lấy điểm C trên tia đối của tia AB rồi kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (O) ta có bài toán sau:*

**Bài toán 8. (*Đề thi HSG Toán 9 tỉnh Nghệ An năm 2010*)** *Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB, vẽ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn tâm O (D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N khác với điểm A). Đường thẳng DE cắt MN tại I. Chứng minh rằng:*

a) *MI.BE = BI.AE.*

b) *Khi điểm C thay đổi thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.*

***Lời giải.***




*Hình 9*

a) (h.9) Ta có: $\widehat{BAN} = \widehat{BMN} \Rightarrow \widehat{BDI} = \widehat{BMI}$

$\Rightarrow$ tứ giác $BDMI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IBM} = \widehat{IDM} = \widehat{EBA}$

$\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta MBI$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{EA}{EB}$

$\Rightarrow MI.BE = BI.AE.$

b) ***Cách 1.*** (h.9) Ta có:

$\Delta CAD \sim \Delta CDB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{AD}{DB}$;

$\Delta CAE \sim \Delta CEB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CA}{CE} = \dfrac{AE}{EB}$.

Lại có $CD = CE \Rightarrow \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AD}{BD} \Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{BE}{BD}$.

Giả sử tiếp tuyến tại $A$, $B$ của đường tròn $(O)$ cắt tia $DE$ lần lượt tại $K$, $K'$ khi đó ta có:

$\Delta KAE \sim \Delta KDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{KA}{KD} = \dfrac{KE}{KA}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{AE}{AD}\right)^2 = \dfrac{KA.KE}{KD.KA} = \dfrac{KE}{KD}$ (1)

$\Delta K'BE \sim \Delta K'DB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BE}{BD} = \dfrac{K'B}{K'D} = \dfrac{K'E}{K'B}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{BE}{BD}\right)^2 = \dfrac{K'B.K'E}{K'D.K'B} = \dfrac{K'E}{K'D}$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{BE}{BD}$ ta suy ra

$\dfrac{KE}{KD} = \dfrac{K'E}{K'D} \Rightarrow \dfrac{KE}{KD - KE} = \dfrac{K'E}{K'D - K'E}$

$\Rightarrow \dfrac{KE}{DE} = \dfrac{K'E}{DE} \Rightarrow K'E = KE \Rightarrow K' \equiv K.$

Suy ra các tiếp tuyến kẻ từ $A$, $B$ của đường tròn $(O)$ và $DE$ đồng quy. Hay là $D$, $E$, $K$ thẳng hàng suy ra $K$ cố định (vì $A$, $B$ cố định)

Vậy khi điểm $C$ thay đổi thì đường thẳng $DE$ luôn đi qua một điểm $K$ cố định.

***Cách 2.*** (h.10)

Gọi $Q$ là giao điểm của $CO$ và $DE$ thì $OC \perp DE$ tại $Q$.

Suy ra $\Delta OCD$ vuông tại $D$ có $DQ$ là đường cao $\Rightarrow OQ.OC = OD^2 = R^2$ (1)

Gọi $K$ giao điểm của hai đường thẳng $OO'$ và $DE$; $H$ là giao điểm của $AB$ và $OO'$ thì $OO' \perp AB$ tại $H$.

Xét $\Delta KQO$ và $\Delta CHO$ có $\widehat{Q} = \widehat{H} = 90^0; \widehat{O}$ chung

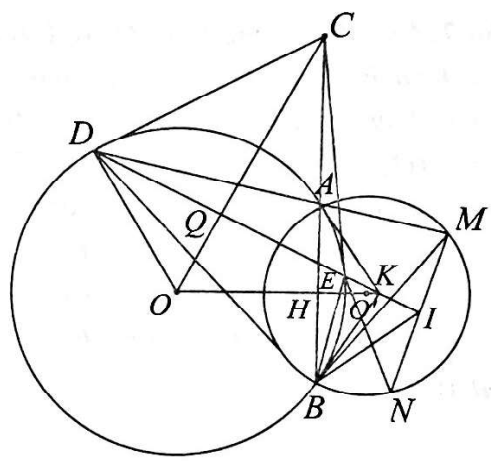
$\Rightarrow \Delta KQO \sim \Delta CHO$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{KO}{CO} = \dfrac{OQ}{OH} \Rightarrow OC.OQ = KO.OH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $KO.OH = R^2 \Rightarrow OK = \dfrac{R^2}{OH}$.

Vì $OH$ và $R$ không đổi nên $OK$ không đổi nên $K$ cố định.

Vậy khi điểm $C$ thay đổi thì đường thẳng $DE$ luôn đi qua một điểm $K$ cố định.




*Hình 10*

**Hướng 4.3.** *Ngoài những kết quả trên, từ bài toán 8, sau những tìm tòi, phát hiện, ta chứng minh được một số kết quả khá đẹp sau:*

** Đường thẳng DE luôn đi qua trung điểm MN.*

** Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.*

Từ đó ta có bài toán sau:

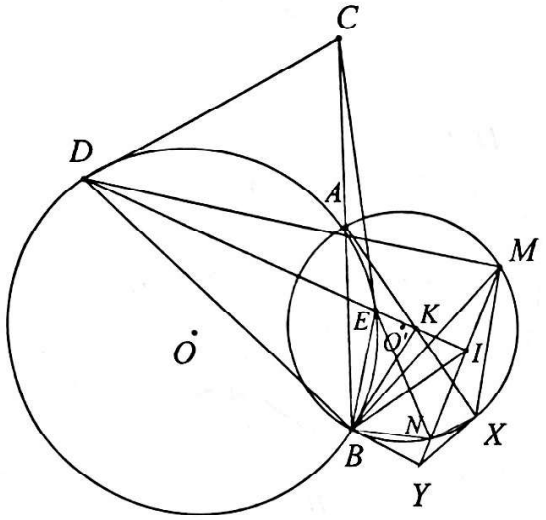
**Bài toán 9.** *Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB. Vẽ các tiếp tuyến CD; CE với đường tròn tâm O (D; E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N*

*khác với điểm A). Đường thẳng DE cắt MN tại I. Chứng minh rằng:*

a) *I là trung điểm của MN.*

b) *Khi điểm C thay đổi thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.*

***Lời giải.*** (h.11)




*Hình 11*

a) ***Cách 1.*** Theo bài toán 8, ta có: $\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{BD}$.

$\Delta DBM \sim \Delta EBN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BE}{BD}=\frac{EN}{DM}$

$\Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{EN}{DM}$ (1). Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác $AMN$ và cát tuyến $DEI$, ta có: $\frac{IN}{IM}.\frac{DM}{DA}.\frac{EA}{EN}=1$. Kết hợp với (1) $\Rightarrow IN=IM$.

***Cách 2.*** Theo kết quả câu (a) bài toán 8 ta có: $\frac{IM}{IB}=\frac{EA}{EB}$ (2). Mặt khác $\Delta INB \sim \Delta DAB$(g.g) (vì $\widehat{NIB}=\widehat{NEB}=\widehat{ADB}$, $\widehat{BNI}=\widehat{BAD}$) nên ta có: $\frac{IN}{IB}=\frac{DA}{DB}$ (3). Từ $\frac{BE}{BD}=\frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EB}$ (4).

Từ (2), (3), (4) suy ra: $\frac{IM}{IB}=\frac{IN}{IB} \Rightarrow IM=IN$.

b) Gọi $K$ là giao điểm 2 tiếp tuyến kẻ từ $A$, $B$ với $(O)$. Theo bài toán 8 thì $D$, $E$, $K$ thẳng hàng, và $K$ là điểm cố định. Gọi $X$ là giao điểm của $AK$ và $(O')$ thì $X$ cố định. Gọi $Y$ là giao điểm 2 tiếp tuyến kẻ từ $B$, $X$ với $(O') \Rightarrow Y$ cố định. ta chứng minh $MN$ đi qua $Y$. Thật vậy ta có: $\widehat{EDB}=\widehat{EAB}=\widehat{NMB}$ và $\widehat{BNM}=\widehat{BAD}=\widehat{BED}$

$\Rightarrow \Delta BNM \sim \Delta BED$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BN}{BM}=\frac{BE}{BD}$ (5).

Chứng minh tương tự được: $\Delta NXM \sim \Delta EAD$ $\Rightarrow \frac{XN}{XM}=\frac{AE}{AD}$ (6). Do $\frac{BE}{BD}=\frac{AE}{AD}$ nên $\frac{BM}{BN}=\frac{XM}{XN}$ (7). Từ (7) và do $BMXN$ là tứ giác nội tiếp nên theo bài toán 8, ta có $M$, $N$, $Y$ thẳng hàng hay là $MN$ đi qua $Y$.

***Nhận xét.*** Thật bất ngờ phải không? bài toán 8 và bài toán 9 tưởng chừng như hoàn toàn xa lạ nhưng bên trong chúng lại tiềm ẩn những mối quan hệ vô cùng khăng khít với những bài toán đơn giản, tất cả chúng đã tạo nên cái đẹp huyền bí của hình học.

**Hướng 4.4.** *Ngoài hai kết quả nói trên, bằng cách giữ nguyên cái gốc của bài toán 9 thêm vào một chút gia vị nữa "Qua D vẽ đường thẳng song song với AB cắt (O) tại F thì EF đi qua trung điểm AB" từ đó ta phát triển được kết quả thú vị sau đây:*

**Bài toán 10.** *Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB. Vẽ các tiếp tuyến CD; CE với đường tròn tâm O (D; E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Qua D vẽ đường thẳng song song với AB cắt lại (O) tại F. Chứng minh EF đi qua trung điểm của AB.*

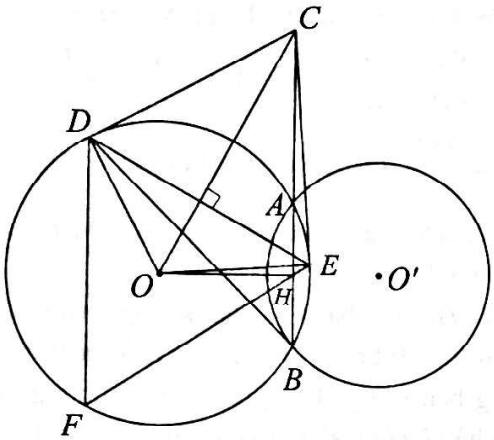
***Lời giải.*** (h.12)

Gọi $H$ là giao điểm của $EF$ và $AB$, ta có:

$$\widehat{CHE}=\frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AE}+\text{sđ}\overset{\frown}{FB})=\frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AE}+\text{sđ}\overset{\frown}{AD})$$

$$=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DAE}=\widehat{DFE}=\widehat{CDE}.$$

Suy ra tứ giác $CDHE$ nội tiếp. Mặt khác ta có tứ giác $CDOE$ nội tiếp đường tròn đường kính $OC$ nên $C, D, O, H, E$ thuộc đường tròn đường kính $OC \Rightarrow \widehat{OHC} = 90^o \Rightarrow OH \perp AB \Rightarrow H$ là trung điểm của $AB$.




*Hình 12*

**Hướng 4.5.** *Qua B vẽ đường thẳng song song với DE cắt (O) tại G thì GA cắt DE tại trung điểm DE. Từ đó ta có bài toán sau:*

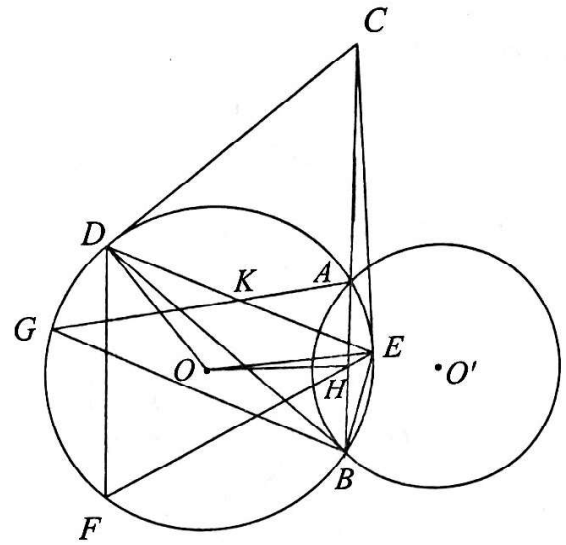
**Bài toán 11.** *Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB. Vẽ các tiếp tuyến CD; CE với đường tròn tâm O (D; E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Qua B vẽ đường thẳng song song với DE cắt (O) tại G. Chứng minh AG đi qua trung điểm của DE.*

***Lời giải.*** (h.13)

Gọi $K$ là giao điểm của $AG$ và $DE$. Tứ giác $ADBE$ nội tiếp và 3 điểm $C, A, B$ thẳng hàng nên theo bài 8, ta có: $\frac{EA}{EB} = \frac{DA}{DB}$ (1).

Do $EB = DG$ và $DB = EG$ nên từ (1) suy ra: $\frac{EA}{DG} = \frac{DA}{EG}$ (2). Chú ý rằng: $\Delta EAK \sim \Delta GDK$; $\Delta EGK \sim \Delta ADK \Rightarrow \frac{EA}{DG} = \frac{AK}{DK}; \frac{DA}{EG} = \frac{AK}{EK}$ (3).

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{AK}{DK} = \frac{AK}{EK} \Rightarrow DK = EK \Rightarrow$ $AG$ đi qua trung điểm của $DE$.




*Hình 13*

**Hướng 4.6.** *Bằng cách thay đổi yếu tố chuyển động, chẳng hạn nếu ta cố định ba điểm A, B, C cho đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua A, B, từ C vẽ các tiếp tuyến CD, CE với (O) thì DE luôn đi qua điểm cố định. Với ý tưởng đó ta có bài toán sau đây:*

**Bài toán 12.** *Cho đường tròn tâm I từ điểm C nằm ngoài (I) vẽ cát tuyến CAB với (I). Một đường tròn tâm O thay đổi luôn qua A, B. Từ C vẽ các tiếp tuyến CD, CE với (O). Chứng minh rằng đường thẳng DE luôn đi qua điểm cố định khi (O) thay đổi.*

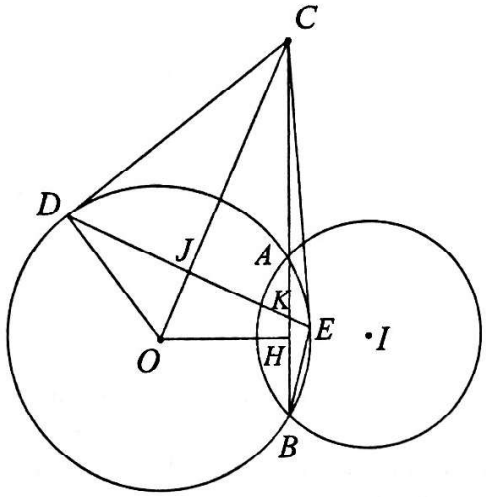
***Lời giải.*** (h.14)

Gọi $K, J$ lần lượt là giao điểm của $DE$ với $AB$ và $CO$. Vẽ $OH$ vuông góc với $AB$ tại $H$ thì $H$ là trung điểm $AB$. Ta có: $CK.CH = CJ.CO$ (do $\Delta CJK \sim \Delta CHO$). Mặt khác:

$$CJ.CO = CD^2 = CA.CB$$

suy ra: $CK.CH = CA.CB \Rightarrow CK = \frac{CA.CB}{CH}$.

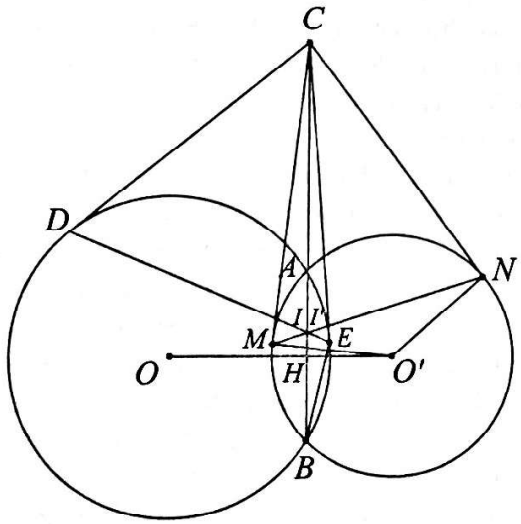
Do $C, A, B, H$ cố định nên $K$ cố định.




*Hình 14*

**Hướng 4.7.** *Nếu từ C kẻ thêm các tiếp tuyến CM , CN với (O') ta sẽ có bộ ba đường thẳng AB, DE, MN đồng quy. Từ đó có bài toán sau:*

**Bài toán 13.** *Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB, vẽ các tiếp tuyến CD; CE với đường tròn (O) và các tiếp tuyến CM, CN với (O') (D, E thuộc đường tròn (O), M, N thuộc đường tròn (O'). Chứng minh: 3 đường thẳng AB, DE, MN đồng quy.*




*Hình 15*

***Lời giải.*** (h.15)

Gọi $I$ là giao điểm của $DE$ và $AB$, $I'$ là giao điểm của $MN$ và $AB$. Chứng minh tương tự bài toán 12, ta có:

$$CI.CH = CA.CB;\ CI'.CH = CA.CB$$

$$\Rightarrow CI.CH = CI'.CH \Rightarrow I \equiv I'.$$

Từ đó suy ra $AB$, $DE$, $MN$ đồng quy tại 1 điểm.

**• Hướng khai thác thứ năm: Kẻ thêm hình phụ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn**

**Hướng 5.1.** *Từ bài toán gốc, kẻ tiếp tuyến chung của hai đường tròn, ta có bài toán*

**Bài toán 14.** *Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R'), cắt nhau tại hai điểm A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CD với hai đường tròn (C∈ (O), D ∈ (O')). Gọi I là giao điểm của AB và CD. Chứng minh rằng I là trung điểm của CD.*

***Lời giải.*** (h.16)

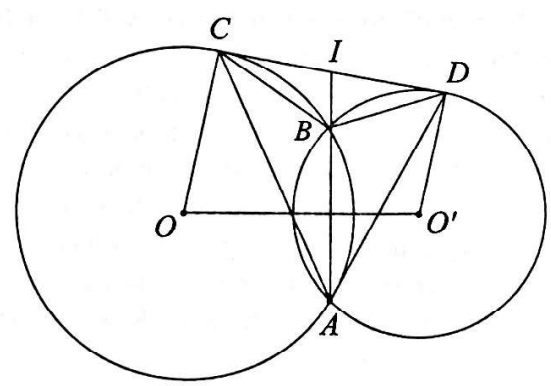
Ta có: $\widehat{CAI} = \widehat{BCI} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow \Delta ACI \sim \Delta CBI$ (g.g)

$\Rightarrow CI^2 = AI.BI$

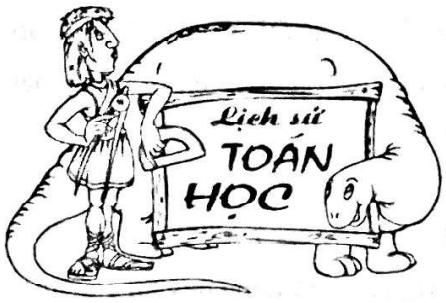
Tương tự: $DI^2 = AI.BI$.

Do đó $IC = ID$ hay $I$ là trung điểm của $CD$.




*Hình 16*

Các bạn hãy tiếp tục khai thác các bài toán nêu trên để có thêm nhiều kết quả thú vị nhé! Chúc các bạn thành công.

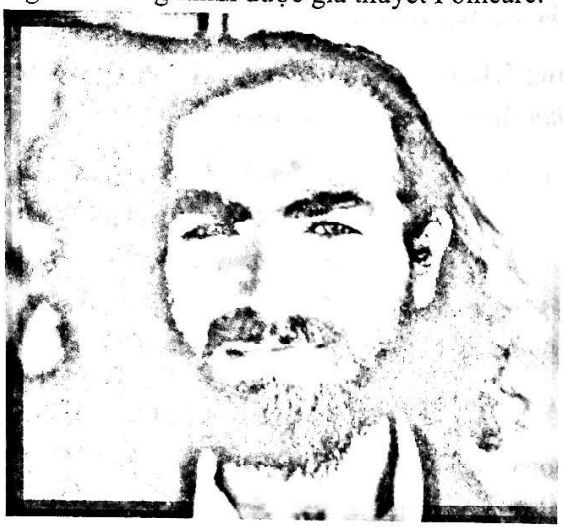



# THIÊN TÀI TOÁN HỌC LẬP DỊ PERELMAN

**HOÀNG XUÂN THƯỜNG**

*(GV Khoa Công nghệ điện tử truyền thông, ĐHSP Kỹ thuật Vinh, Nghệ An)*

*Grigory Yakovlevich Perelman* là Nhà toán học Nga đã chứng minh được giả thuyết Poincaré.



*Grigory Yakovlevich Perelman*

Năm 2006 tạp chí Science đã gọi công trình chứng minh giả thuyết *Poincaré do Grigory Yakovlevich Perelman* thực hiện là bước đột phá toán học của năm. Năm 2007, tờ báo Anh The Daily Telegraph công bố danh sách "100 thiên tài đang sống", trong đó *G. Ya. Perelman* ở vị trí thứ 9.

Cũng vào năm 2006 công trình của *G. Ya. Perelman* được Hội Toán học Thế giới xét tặng giải thưởng Fields. Thông báo chính thức về việc tặng thưởng giải là: "Do đóng góp vào hình học và những ý tưởng đột phá trong nghiên cứu cấu trúc hình học và giải tích dòng Ricci (Ricci flow)".

Vào tháng 3/2010 Viện Toán học Clay tặng *G. Ya. Perelman* giải thưởng trị giá một triệu USD cho công trình chứng minh giả thuyết Poincaré, là một trong 7 bài toán "thiên niên kỷ".

Nhưng *G. Ya. Perelman* từ chối nhận cả Huy chương Fields lẫn giải thưởng một triệu USD của Viện Toán học Clay với lý do như sau: "Tôi từ chối chúng. Các bạn biết đấy, do nhiều nguyên nhân, cả chủ quan và khách quan, ... Nếu nói ngắn gọn thì nguyên nhân chính là tôi không đồng ý với cộng đồng tổ chức toán học. Tôi không ưng quyết định của họ, tôi cho rằng đóng góp của nhà toán học Mỹ *R. Hamilton* vào việc giải bài toán này gần như không kém tôi".

*G. Ya. Perelman* sinh ngày 13/6/1966 tại Leningrad. Cha của ông là một kỹ sư điện, mẹ là giáo viên toán. *G. Ya. Perelman* đã học trung học phổ thông chuyên toán. Năm 1982 là thành viên đoàn học sinh Liên Xô dự Kỳ thi Olympic Toán Quốc tế ở Budapes, Hung-ga-ri, *G. Ya. Perelman* giành Huy chương Vàng với số điểm đạt tối đa.

Trong cùng năm đó, ông được tuyển thẳng vào Khoa Toán - Cơ của Trường Đại học Tổng hợp Quốc gia Leningrad. Sinh viên *G. Ya . Perelman* đã giành chiến thắng tất cả các kỳ thi Olympic Toán học cấp Khoa, cấp Thành phố và cấp Liên bang, được trao học bổng Lênin và tốt nghiệp đại học loại giỏi.

Ông đã theo chương trình nghiên cứu sinh tại Viện Toán học Steklov, Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô (nay là Viện Hàn lâm Khoa học Nga). Sau khi bảo vệ luận án Tiến sĩ, *Perelman* được tiếp nhận làm Nghiên cứu viên tại Viện Toán học Steklov. *Perelman* đã công bố một loạt công trình hay về bề mặt ba chiều trong không gian Euclid, có tiếng vang trong cộng động toán học thế giới.

Năm 1992, *G. Ya. Perelman* được mời làm việc tại Đại học Tổng hợp New York và Đại học Stony Brook. Hàng tuần ông đi dự hội thảo toán học ở Princeton. Một lần sau khi nghe bài giảng của nhà toán học Mỹ nổi tiếng, Giáo sư Đại học Columbia *Richard Hamilton*, ông đi đến gặp Giáo sư này và trò chuyện. *G. Ya. Perelman* nhớ lại: "*Tôi rất muốn hỏi ông ấy (R. Hamilton) điều gì đó. Ông ấy cười và rất kiên nhẫn nghe tôi nói. Ông ấy thậm*

*chỉ còn thổ lộ với tôi một vài vấn đề mà vài năm sau ông mới công bố. Ông không ngần ngại mà đã chia sẻ với tôi. Tôi rất thích tính cởi mở và hào phóng của ông. Tôi có thể nói rằng về mặt này Hamilton không hề giống như phần lớn các nhà toán học khác*". Giáo sư *R. Hamilton* là người đã nghiên cứu vấn đề dòng Ricci, là cơ sở để chứng minh giả thuyết Poincaré.

*R. Hamilton*
*(Sinh năm 1943)*

*Perelman* được mời cộng tác với những trường đại học hàng đầu của Mỹ và ông đã chọn Đại học Havard. Khi Ủy ban tiếp nhận viên chức của trường yêu cầu ông trình lý lịch tự khai và thư giới thiệu của các nhà toán học, *Perelman* phản ứng kịch liệt với việc này: "*Nếu người ta biết các công trình nghiên cứu của tôi thì họ không cần lý lịch của tôi. Nếu họ cần lý lịch của tôi thì họ không biết các công trình của tôi*".

*Perelman* từ chối mọi đề nghị và trở về nước Nga vào mùa hè năm 1995. Ông tiếp tục nghiên cứu ý tưởng mà *R. Hamilton* đã thổ lộ với ông. Năm 1996 Hội Toán học Châu Âu đề nghị tặng giải thưởng nhà toán học trẻ cho ông nhưng *Perelman* đã từ chối.

Khi đã đạt được một số thành công, *Perelman* viết thư cho *R. Hamilton* với đề nghị hợp tác nghiên cứu nhưng Giáo sư này không trả lời.

Vào năm 2000, Viện Toán học Clay công bố "danh mục các bài toán thiên niên kỷ' gồm 7 bài toán và phần thưởng cho lời giải mỗi bài toán là một triệu USD. Vào ngày 11/11/2002, *Perelman* đăng công trình chứng minh một trong 7 bài toán nêu trên với dung lượng 39 trang trên website khoa học, đó là công trình chứng minh giả thuyết Poincaré.

Vào tháng 4/2003, *Perelman* sang Mỹ theo lời mời để thuyết giảng công trình nghiên cứu của mình tại một số trường đại học. Cộng đồng toán học coi các bài giảng của *Perelman* rất quan trọng. Ba nhóm các nhà toán học đã cẩn trọng kiểm tra lại tính đúng đắn của công trình và đến năm 2006 đi đến kết luận là công trình của *Perelman* hoàn toàn đúng.

Xung quanh công trình của *Perelman* diễn ra sự cạnh tranh uy tín (nguyên văn: niềm đam mê quyết liệt). Hai nhà toán học trẻ gốc Trung Quốc, sau khi đọc công trình của *Perelman*, đã công bố một bài viết chứng minh giả thuyết Poincaré đồ sộ và chi tiết hơn nhiều – với dung lượng hơn ba trăm trang. Trong bài viết này họ đã khẳng định công trình *Perelman* có nhiều thiếu sót mà họ đã xử lý thành công. Theo quy định của cộng đồng toán học, thành công thuộc về tác giả công trình ở dạng trọn vẹn nhất. Theo ý kiến nhiều nhà toán học, công trình của *Perelman* là trọn vẹn hơn cả mặc dù trình bày ngắn gọn. Công trình của hai nhà toán học gốc Trung Quốc nêu trên không mang đến điều gì mới mẻ. Người xưa có câu: "Văn hay bất ngữ là dài", nay trong Toán học cũng vậy.

Năm 2006 Hội Toán học Thế giới quyết định tặng thưởng Huy chương Fields cho *Perelman*. Chủ tịch Hội đã bay đến Peterburg và bàn bạc với Perelman về lễ trao giải dự kiến vào ngày 22/8/2006 tại Madrit, Tây Ban Nha, *Perelman* với thái độ lịch sự nhưng cương quyết từ chối Huy chương Fields. Ông cho biết: "*Điều đó không có ý nghĩa gì cả. Mọi người đều hiểu rằng khi công trình của tôi là đúng thì không cần sự công nhận nào nữa*".

Năm 2010 Viện Nghiên cứu Toán học Clay quyết định trao tặng *Perelman* một triệu USD cho công trình chứng minh giả thuyết Poincaré nhưng rồi *Perelman* cũng không đến Paris để nhận giải thưởng.

Tại sao *Perelman* không nhận các giải thưởng danh giá dành cho công trình nghiên cứu của mình? *Perelman* cho biết ông không thích cách cư xử (nguyên văn: không khí đạo đức) trong cộng đồng toán học. Ngoài ra, ông cho rằng đóng góp của nhà toán học Mỹ *Richard Hamilton* trong việc chứng minh giả thuyết Poincaré hầu như không thua kém ông.

☞

## ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH
## NĂM HỌC 2019 - 2020

(*Thời gian làm bài*: 150 *phút*)

**Câu 1.** (2 *điểm*)

a) Cho $x=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị biểu thức $P=x(2-x)$.

b) Cho ba số $a,b,c$ thỏa mãn $ab+bc+ca=2019$. Chứng minh $\frac{a^2-bc}{a^2+2019}+\frac{b^2-ca}{b^2+2019}+\frac{c^2-ab}{c^2+2019}=0$.

**Câu 2.** (2 *điểm*)

a) Giải phương trình $x^3+\sqrt{(x+1)^3}=9x+8$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=3+x^2y^2\\ \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+3=x^3y^3\end{cases}$.

**Câu 3.** (3 *điểm*) Cho tam giác nhọn $\Delta ABC$ (với $AB<AC$) nội tiếp đường tròn tâm $(O)$. Đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn $(O)$ lần lượt tại $D,E$ (cùng khác $A$). Gọi $G$ là hình chiếu vuông góc của $E$ trên cạnh $AC$, gọi $M$, $N$ tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng $BC$ và $BA$. Gọi $K$ là trung điểm của đoạn thẳng $GM$, $H$ là giao điểm của đường thẳng $AB$ và đường thẳng $MG$, $F$ là giao điểm của đường thẳng $MN$ và đường thẳng $AE$.

a) Chứng minh rằng $AD \parallel GM$.

b) Chứng minh rằng $FH=MC$.

c) Chứng minh rằng $KE+KN\le\sqrt{2}.EN$.

**Câu 4.** (1,5 *điểm*)

a) Chứng minh rằng nếu $n$ là số nguyên thì $\frac{n^5+29n}{30}$ cũng là số nguyên.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $2(x^2+y^2-3x+2y)-1$ và $5(x^2+y^2+4x+2y+3)$ đều là các số chính phương.

**Câu 5.** (1,5 *điểm*)

a) Cho các số thực $a,b,c$ thỏa mãn điều kiện $(a^4+b^4)(b^4+c^4)(c^4+a^4)=8$. Chứng minh rằng:

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\ge 1.$$

b) Trước ngày thi vào lớp 10 chuyên, thầy giáo dùng không quá 49 cây bút đem tặng cho tất cả 32 bạn học sinh lớp 9A sao cho ai cũng nhận được bút của thầy. Chứng minh rằng có một số bạn lớp 9A nhận được số lượng bút tổng cộng là 25.

**LƯƠNG XUÂN VINH, NGUYỄN THÁI HÀ**
(*GV ĐH Kinh tế - Tài chính TP. Hồ Chí Minh*) ***Giới thiệu***

**********

☞ ***THIÊN TÀI ...***

Vào tháng 12/2005, ông đã từ bỏ công việc nghiên cứu tại Viện Toán học và gần như cắt đứt hoàn toàn các liên hệ với các đồng nghiệp.

Tháng 9/2011, *Perelman* được đề cử vào chức danh Viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Nga nhưng ông đã từ chối vinh dự này.

Vào tháng 4 năm 2011, *Perelman*, sau một thời gian dài im lặng, đã trả lời phỏng vấn đầu tiên với nhà báo và nhà sản xuất điều hành của Công ty Điện ảnh Moskva, *Alexander Zabrovsky*. Trong cuộc phỏng vấn này, nhà toán học khi trả lời câu hỏi tại sao không nhận giải thưởng một triệu USD, ông cho biết số tiền này không là gì đối với "người điều khiển Vũ trụ". Ngoài ra, *Perelman* đồng ý đóng vai chính trong một bộ phim của *Zbarovsky*, trong đó trình bày về sự hợp tác và đối đầu giữa ba trường phái toán học chính trên thế giới: Nga, Trung Quốc và Mỹ là các trường phái tiên tiến nhất trong nghiên cứu và quản lý Vũ trụ.

Một mình độc lập nghiên cứu, *Perelman* trở thành nhà Toán học số một thế giới, đã biến giả thuyết Poincaré thành định lý Poincaré, từ chối mọi giải thưởng, danh hiệu Viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Liên bang Nga. Để vinh danh ông, người ta đã đặt tên *Perelman* cho hành tinh nhỏ 50033.

# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC NINH NĂM HỌC 2019-2020

**Câu 1.** a) *Đáp số*: $A=-\frac{5}{2}$.

b) Phương trình hoành độ điểm chung của $d$ và $(P)$ là $x^2-(m-1)x+1=0$ (1). Parabol $(P)$ và đường thẳng $d$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ khi và chỉ khi PT(1) có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$, hay $\Delta=(m-1)^2-4>0$ (2). Áp dụng định lí Viète đối với PT(1) ta có: $x_1+x_2=m-1,\ x_1x_2=1$.

Ta có: $x_1\neq x_2$ và $y_1=x_1^2,y_2=x_2^2$ nên

$$y_1^3-y_2^3=18\left(x_1^3-x_2^3\right)\Leftrightarrow x_1^6-x_2^6=18\left(x_1^3-x_2^3\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1^3+x_2^3=18\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)-18=0$$

$$\Leftrightarrow(m-1)^3-3(m-1)-18=0\Leftrightarrow m-1=3\Leftrightarrow m=4.$$

Vậy $m=4$ (thỏa mãn (2)) là giá trị cần tìm.

**Câu 2.** a) Ta có: $y^2+2xy+4=2x+5y$

$$\Leftrightarrow y^2+(2x-5)y+(4-2x)=0\ (3).$$

Coi (3) là PT bậc hai ẩn $y$, có các hệ số thỏa mãn $a+b+c=0$ nên (3) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=4-2x\end{array}\right.$.

• Nếu $y=1$ thì PT thứ hai trong hệ trở thành

$$5x^2-11=\sqrt{x^4+4}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\geq\frac{11}{5}\\24x^4-110x^2+117=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{55+\sqrt{217}}{24}}.$$

• Nếu $y=4-2x$ thì PT thứ hai trong hệ trở thành

$5x^2-14x+10=\sqrt{x^4+4}\ \Leftrightarrow(a-2b)(a+3b)=0$

(với $a=\sqrt{x^2+2x+2}>0$ và $b=\sqrt{x^2-2x+2}>0$)

$$\Leftrightarrow a=2b\Rightarrow x^2+2x+2=4(x^2-2x+2)\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}.$$

HPT có bốn nghiệm $(x;y)$ là:

$$\left(\sqrt{\frac{55+\sqrt{217}}{24}};1\right),\left(-\sqrt{\frac{55+\sqrt{217}}{24}};1\right),$$

$$\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3};\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right),\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3};\frac{2-2\sqrt{7}}{3}\right).$$

b) Từ giả thiết ta có $x,y,z\in[0;3]$. Vì

$$a^2-6a+25=\left(\frac{15-a}{3}\right)^2-\frac{8}{9}a(3-a)\leq\left(\frac{15-a}{3}\right)^2,\forall a\in[0;3],$$

nên $\sqrt{a^2-6a+25}\leq\frac{15-a}{3},\forall a\in[0;3]$, đẳng thức xảy ra khi $a\in\{0;3\}$. Áp dụng BĐT trên, ta có: $M\leq\frac{15.3-(x+y+z)}{3}=14$.

Đẳng thức xảy ra khi trong ba số $x,y,z$ có một số bằng 3 và hai số bằng 0. Vậy $\max M=14$.

Tiếp theo, ta áp dụng BĐT quen thuộc sau với mọi $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\geq\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2},$$

đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a_1a_2+b_1b_2\geq0\\a_1b_2=a_2b_1\end{cases}$. Ta có:

$$M=\sqrt{(x-3)^2+16}+\sqrt{(y-3)^2+16}+\sqrt{(z-3)^2+16}$$

$$\geq\sqrt{(x+y-6)^2+64}+\sqrt{(z-3)^2+16}$$

$$\geq\sqrt{(x+y+z-9)^2+144}=6\sqrt{5}.$$

Đẳng thức $M=6\sqrt{5}$ xảy ra khi $x=y=z=1$.

Vậy $\min M=6\sqrt{5}$.

**Câu 3.** a) Từ đề bài ta thấy $x^2+y^2+1$ và $x+xy+y$ là các ước nguyên dương của 30. Vì $x,y$ nguyên dương và $x=y=1$ không thỏa mãn bài toán nên $x^2+y^2+1\geq x+xy+y>3$. Suy ra

$$\begin{cases}x+xy+y=5\\x^2+y^2+1=6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=2\\x=2,y=1\end{array}\right..$$

Có hai cặp số $(x;y)$ thỏa mãn bài toán là $(1;2),(2;1)$.

b) Ta có $12n^2+1=(2m+1)^2,m\in\mathbb{N}$, nên $m(1+m)=3n^2$. Hơn nữa $(m,1+m)=1$, do vậy

$$\left[\begin{array}{l}m=3a^2,1+m=b^2\\1+m=3a^2,m=b^2\end{array}\right.\ (a,b\in\mathbb{N}^*).$$

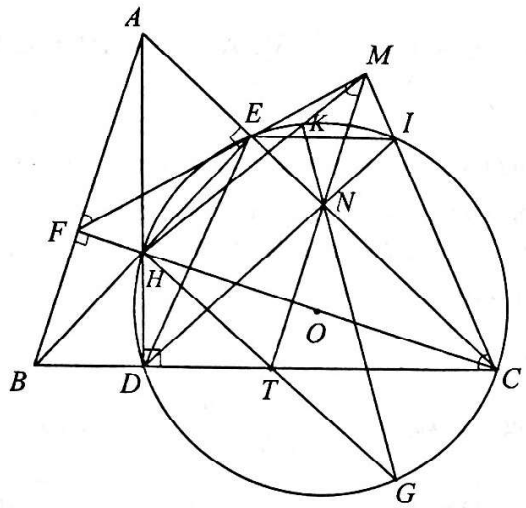
- Nếu $1+m=3a^2,m=b^2$ thì $b^2=3(a^2-1)+2$, điều này vô lí vì một số chính phương chia cho 3 không thể dư 2.

- Nếu $m = 3a^2, 1 + m = b^2$ thì

$$2 + 2\sqrt{12n^2 + 1} = 4m + 4 = (2b)^2$$

và là một số chính phương.

**Câu 4.** a) Chứng minh được $\Delta NEI \sim \Delta NDC$ (g.g), suy ra: $\frac{NE}{NI} = \frac{ND}{NC}$ hay $NI.ND = NE.NC$.




b) Tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{MEC} = \widehat{ABC}$. Tứ giác $ABDE$ nội tiếp nên $\widehat{DEC} = \widehat{ABC}$. Tứ giác $ICDE$ nội tiếp nên $\widehat{DEC} = \widehat{DIC}$. Vì $\widehat{MEC} = \widehat{ABC} = \widehat{DEC} = \widehat{DIC}$ nên tứ giác $MENI$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{EMN} = \widehat{DIE}$. Tứ giác $DEIC$ nội tiếp nên $\widehat{ACB} = \widehat{DIE}$. Dẫn tới

$$\widehat{AFE} = \widehat{ACB} = \widehat{DIE} = \widehat{EMN}.$$

Từ đây ta có $MN // AB$. Mà $AB \perp CH$ nên $MN \perp CH$.

c) Ta có $\widehat{EMN} = \widehat{EIN} = \widehat{NCT}$ (do các tứ giác $MENI, ICDE$ nội tiếp) và $\widehat{ENM} = \widehat{TNC}$ (góc đối đỉnh) nên hai tam giác $ENM, TNC$ đồng dạng. Suy ra $NC.NE = NM.NT$ (4). Ta có $\widehat{KEN} = \widehat{CGN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CK}$ của $(O)$), $\widehat{ENK} = \widehat{GNC}$ (góc đối đỉnh) nên hai tam giác $ENK, GNC$ đồng dạng. Suy ra $NC.NE = NG.NK$ (5). Từ (4) và (5) ta có $NM.NT = NG.NK$ hay $\frac{NM}{NG} = \frac{NK}{NT}$. Dẫn tới $\Delta KMN, \Delta TGN$ đồng dạng. Do đó $\widehat{KMN} = \widehat{TGN}$ (6). Mặt khác, do $MN \perp CH$ nên $\widehat{KMN} = 90^0 - \widehat{KHC}$. Ta thấy $HC$ là đường kính của $(O)$ và $K \in (O)$ nên $\widehat{HCK} = 90^0 - \widehat{KHC}$. Dẫn tới $\widehat{KMN} = \widehat{HCK}$. Ta lại có $\widehat{HGN} = \widehat{HCK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{HK}$ của $(O)$). Suy ra $\widehat{KMN} = \widehat{HGN}$ (7). Từ (6) và (7) ta có $\widehat{TGN} = \widehat{HGN}$. Vậy $H, T, G$ thẳng hàng.

**Câu 5.** Gọi $a_i$ là số kẹo trong hộp thứ $i$, với $a_i \in \{1, 2, ..., 1010\}, i \in \{1, 2, ..., 1010\}$.

• Nếu tất cả các hộp có số kẹo bằng nhau thì $a_1 = ... = a_{1010} = 2$ và ta thấy tổng số kẹo trong 505 hộp bất kỳ đều bằng 1010.

• Xét trường hợp tồn tại ít nhất hai hộp có số kẹo khác nhau. Không mất tính tổng quát, ta giả sử hai hộp đó là hộp 1 và hộp 2 ($a_1 \neq a_2$).

Đặt $S_i$ $\overset{i}{\underset{k\ 1}{}}$ $a_k$ với $i = 1, 2, ..., 1010$.

+ Nếu tồn tại hai số trong các số $S_1, S_2, ..., S_{1010}$ có cùng số dư khi chia cho 1010, chẳng hạn $S_m, S_n$ $(m < n)$, thì $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ chia hết cho 1010. Mà 1 $S_n$ $S_m$ 2019 nên

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k = 1010.$$

+ Nếu trong các số $S_1, S_2, ..., S_{1010}$ không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 1010 thì ta xét 1011 số $a_2, S_1, S_2, ..., S_{1010}$. Theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất hai trong số các số $a_2, S_1, S_2, ..., S_{1010}$ có cùng số dư khi chia cho 1010. Hơn nữa, $S_1 = a_1 \neq a_2$ và $a_1, a_2 \in \{1, 2, ..., 1010\}$ nên $a_2, S_1$ không thể có cùng số dư khi chia cho 1010. Như vậy, tồn tại chỉ số $j \in \{2, 3, ..., 1010\}$ để $a_2, S_j$ có cùng số dư khi chia cho 1010. Tức là $S_j - a_2$ chia hết cho 1010. Từ đây và $1 \leq S_j - a_2 = a_1 + a_3 + a_4 + ... + a_k \leq 2019$ suy ra $S_j - a_2 = a_1 + a_3 + a_4 + ... + a_k = 1010$.

**NGUYỄN VĂN XÁ**
*(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)* ***Giới thiệu***


## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/514 (Lớp 6).** Trên bảng đen ta viết 2019 dấu cộng (+) và 2020 dấu trừ (–). Cho phép xóa hai dấu tùy ý và thay vào đó một dấu cộng nếu hai dấu đã xóa là như nhau, một dấu trừ nếu hai dấu đã xóa là khác nhau. Thực hiện phép toán đó 4038 lần. Hỏi trên bảng còn lại là dấu gì?

LÊ MINH HÒA
*(GV THCS Khả Cửu, Thanh Sơn, Phú Thọ)*

**Bài T2/514 (Lớp 7).** Cho tam giác có $\widehat{A}=60^0$ và $AB + AC = 2BC$. Chứng minh rằng đường trung tuyến $AM$, đường cao $BH$ và đường phân giác $CI$ của tam giác $ABC$ đồng quy.

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

**Bài T3/514.** Cho các số thực dương $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}\le\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}.$$

TỪ HỮU SƠN *(Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Tĩnh)*

**Bài T4/514.** Cho tam giác nhọn $ABC$ nội tiếp đường tròn tâm $O$. Kẻ đường cao $AD$, gọi $E$, $F$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $D$ trên các cạnh $AB$ và $AC$. Giả sử hai đoạn thẳng $OA$ và $EF$ cắt nhau tại $I$. Chứng minh rằng $AB.AC.AI = AD^3$.

NGUYỄN SƠN HÀ *(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)*

**Bài T5/514.** Cho đa thức $f(x) = (x + a)(x + b)$ trong đó $a$, $b$ là các số nguyên. Chứng minh rằng luôn tồn tại số nguyên $m$ sao ch $f(m) = f(2020).f(2021)$.

BÙI DUY CHUẨN
*(GV THCS Lai Vu, Kim Thành, Hải Dương)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/514.** Cho $a$, $b$, $c$, $d$ là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{d+1}+\frac{d}{a+1}$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
*(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)*

**Bài T7/514.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\ \ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

có các hệ số thỏa mãn:

1) $a_{ii}>0,\forall i=\overline{1,n}$;

2) $a_{ij}<0,\forall i\ne j,\forall i,j=\overline{1,n}$;

3) $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}>0,\forall i=\overline{1,n}$.

Chứng minh rằng hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

NGÔ THỊ HOÀI NHUNG
*(K25D Toán Tin, ĐHSP Hà Nội 2)*

**Bài T8/514.** Cho đường tròn tâm $O$ và điểm $M$ nằm ngoài đường tròn. Vẽ cát tuyến $MAB$ biến thiên đến đường tròn ($A$ nằm giữa $M$ và $B$). Các tiếp tuyến tại $A$ và $B$ cắt nhau ở $C$. Vẽ $CD$ vuông góc với $MO$, $DE$ vuông góc với $CA$, $DF$ vuông góc với $CB$. Chứng minh rằng đường thẳng $EF$ luôn đi qua một điểm cố định.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN *(Hải Phòng)*

**Bài T9/514.** Cho các số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $x<\sqrt{2}y$, $x.\sqrt{y^2-\frac{x^2}{2}}=2\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}+x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2\sqrt{y^2-\frac{x^2}{2}}$.

NGUYỄN ANH VŨ
*(GV THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, Bình Định)*

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T10/514.** Cho $S=1!2!\ldots100!$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $k$ với $1\le k\le100$ sao cho thương $\frac{S}{k!}$ là số chính phương. Số $k$ như thế có là duy nhất hay không? (kí hiệu $n!=1.2.3\ldots n$ với $n\in\mathbb{N}^*$ và quy ước $0!=1$).

NGUYỄN DUY LIÊN
*(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)*

**Bài T11/514.** Cho hàm số $f(x)$ xác định và không là hàm hằng trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng luôn tồn tại một số thực $a$, một tập $A$ khác rỗng là tập con thực sự của $\mathbb{R}$ và hai hàm số $g(x)$, $h(x)$ thỏa mãn

$g(x) \geq a, \forall x \in A$ và $h(x) < a, \forall x \in \overline{A}$ ($\overline{A} = \mathbb{R} \setminus A$) sao cho: $f(x) = g(x) + h(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

LÊ QUANG KHANH
*(GV THPT Trần Quang Diệu, Hoài Ân, Bình Định)*

**Bài T12/514.** Cho tam giác $ABC$ nhọn. Hai điểm $M$, $N$ nằm trên cạnh $BC$ sao cho $M$, $N$ không trùng với $B$, $C$ đồng thời $BM = CN$. Đường thẳng qua $M$ vuông góc với $CA$, cắt đường thẳng $AB$ tại $F$. Đường thẳng qua $N$ vuông góc với $AB$, cắt đường thẳng $AC$ tại $E$. $MF$ cắt $NE$ tại $P$. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $PEF$ lấy $Q$ sao cho $PQ \parallel BC$. Gọi $R$ là điểm đối xứng với $Q$ qua trung điểm của $BC$. Chứng minh rằng $AR \perp BC$.

TRẦN QUANG HÙNG
*(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)*

**Bài L1/514.** Tại $O$ trên mặt nước có một nguồn phát sóng với tần số $f = 80$ Hz, tốc độ truyền sóng là 1,6 m/s. Ba điểm $A$, $B$, $O$ nằm trên mặt nước tạo thành tam giác vuông tại $O$. Biết $OA = 9$ cm; $OB = 12$ cm. Xác định số điểm dao động cùng pha với $A$ trên đoạn $BA$.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

**Bài L2/514.** Đoạn mạch điện $AB$ gồm hai đoạn mạch $AM$ và $MB$ nối tiếp nhau. Trên đoạn $AM$ chứa biến trở và cuộn cảm thuần, trên đoạn $MB$ chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu $A$, $B$ một điện áp xoay chiều $u_{AB} = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (V) và điều chỉnh biến trở sao cho công suất tiêu thụ trên đoạn mạch $AB$ đạt cực đại $P_{max} = 45$ W. Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch $AM$ có biểu thức là $u_{AM} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (V). Xác định giá trị điện dung của tụ điện.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

**********

**ĐÍNH CHÍNH:** Trong mục **Đề ra kỳ này**, số 513, tháng 3.2020, trong bài T2/513 đã viết:

$$P = \frac{2^2+1}{2^2+3.2+1} + \frac{3^2+1}{3^2+3.3+1} + \ldots + \frac{98^2+1}{98^2+3.98+1}$$

xin được sửa là:

$$P = \frac{2^2+1}{2^2+3.2+1} \cdot \frac{3^2+1}{3^2+3.3+1} \cdots \frac{98^2+1}{98^2+3.98+1}$$

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

TH&TT

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/514 (For 6th grade).** Draw on a board 2019 plus signs (+) and 2020 minus signs (–). We perform a procedure as follows. We delete two arbitrary signs. If they are both plus or both minus, we will add back a plus sign. If not, we add back a minus sign. We do it for 4038 times. What is the remain sign on the board?

**Problem T2/514 (For 7th grade).** Given a triangle $ABC$ with $\widehat{A} = 60^0$ and $AB + AC = 2BC$. Show that the median $AM$, the altitude $BH$ and the angle bisector $CI$ of the triangle are concurrent.

**Problem T3/514.** Suppose that $a$, $b$, $c$ are positive numbers and $a + b + c = abc$. Prove that

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \leq \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}.$$

**Problem T4/514.** Given an acute triangle $ABC$ inscribed in a circle $O$. Draw the altitude $AD$. Let gọi $E$ and $F$ respectively be the perpendicular projections of $D$ on the sides $AB$ and $AC$. Suppose that two line segments $OA$ and $EF$ meet at $I$. Show that $AB.AC.AI = AD^3$.

**Problem T5/514.** Consider the polynomial $f(x) = (x + a)(x + b)$ where $a$ and $b$ are integers. Show that there always exists at least an integer $m$ so that $f(m) = f(2020).f(2021)$.

### FOR HIGH SCHOOL

**Problem T6/514.** Let $a$, $b$, $c$, $d$ be non-negative numbers whose sum is equal to 1. Find the maximum and minimum values of the expression

$$P = \frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{d+1} + \frac{d}{a+1}.$$

**Problem T7/514.** Given the system of equation

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

*(Xem tiếp trang 41)*


**Bài T1/510 (Lớp 6).** *Tìm các số tự nhiên x, y, z sao cho* $3^x + 5^y - 2^z = (2z+3)^3$.

***Lời giải.*** Ta thấy $3^x$, $5^y$ và $2z + 3$ đều là số nguyên lẻ với bất kì giá trị nào của mỗi số tự nhiên $x, y, z$, do đó tổng $3^x + 5^y$ số chẵn và $(2z+3)^3$ là số lẻ với bất kì giá trị nào của mỗi số tự nhiên $x, y, z$, mà $2^z = 3^x + 5^y - (2z+3)^3$ nên $2^z$ phải là số lẻ. Từ đó chỉ có thể xảy ra $2^z = 1$, do đó $z = 0$. Thay vào đẳng thức trên được $3^x + 5^y = 28$, suy ra $5^y < 28$ nên $y \le 2$.

Xét ba trường hợp sau:

• Nếu $y = 0$ thì $5^y = 1$ và $3^x = 27$, suy ra $x = 3$.

• Nếu $y = 1$ thì $5^y = 5$ và $3^x = 23$, không có số tự nhiên $x$ nào thỏa mãn.

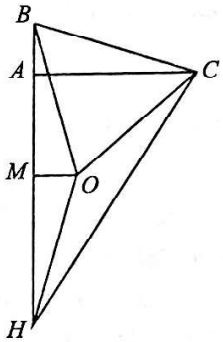
• Nếu $y = 2$ thì $5^y = 25$ và $3^x = 3$, suy ra $x = 1$.

Vậy có hai bộ số tự nhiên $(x; y; z)$ thỏa mãn bài toán là: (3; 0; 0) và (1; 2; 0).

***Nhận xét.*** Một số bạn chỉ nêu ra một nghiệm. Các bạn sau có lời giải đúng. **Thái Nguyên:** *Trần Quang Khôi*, 6A5, THCS Chu Văn An, *Đồng Hoàng Minh Đạo*, 6A4, THCS Nguyễn Du, TP. Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Quang Khải, Nguyễn Huy Hoàng Sơn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; *Nguyễn Hà Linh*, 6A3, *Nguyễn Dương Ứng Pháp*, 6A5, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; *Đinh Chí Bách*, 6A12, THCS Nghĩa Tân, Q. Cầu Giấy; *Đăng Gia Khoa*, 6M1, PTLC Lê Quý Đôn, Q. Nam Từ Liêm; **Nghệ An:** *Phan Quốc Bảo*, 6A, *Thái Minh Quân, Nguyễn Văn Việt, Nguyễn Đăng Quang, Nguyễn Sỹ Bảo Lâm*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Hoàng Anh Quân*, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Trị:** *Võ Nguyên Thăng*, 6A, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà; **Quảng Ngãi:** *Bùi Thị Quỳnh Như*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Phạm Quốc Hoàng Anh*, 6C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Sóc Trăng:** *Lê Ngọc Xuân Thơ*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

**NGUYỄN VIỆT HẢI**

**Bài T2/510 (Lớp 7).** *Cho tam giác ABC vuông tại A,* $\widehat{B} = 75^0$. *Trên tia đối của tia AB lấy điểm H sao cho BH = 2AC. Tính số đo* $\widehat{BHC}$.




***Lời giải.*** Gọi $M$ là trung điểm của $BH$. Khi ấy $BM = MH = AC$. Vẽ tam giác đều $BCO$, tức là

$$BO = BC = CO.$$

Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ và góc $\widehat{B} = 75^0$ nên

$$\widehat{BCA} = 90^0 - \widehat{ABC} = 15^0.$$

$$\widehat{MBO} = \widehat{ABC} - \widehat{OBC} = 75^0 - 60^0 = 15^0.$$

Hai tam giác $BMO$ và $CAB$ bằng nhau vì:

$$BM = CA,\ \widehat{MBO} = \widehat{ACB} = 15^0,\ BO = CB.$$

Suy ra $\widehat{BMO} = \widehat{CAB} = 90^0$ hay $OM \perp BH$.

Tam giác $BOH$ có $OM$ vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên là tam giác cân tại $O$. Do đó $BO = OH$ và $\widehat{BHO} = \widehat{HBO} = 15^0$.

Vậy $\widehat{BOH} = 180^0 - 2.15^0 = 150^0$. Suy ra:

$$\widehat{HOC} = 360^0 - \widehat{BOH} - \widehat{COB}$$
$$= 360^0 - 150^0 - 60^0 = 150^0.$$

Do đó $\triangle BOH = \triangle COH$ vì $BO = CO$, góc $\widehat{BOH} = \widehat{COH} = 150^0$, $OH$ chung.

Suy ra: $\widehat{BHO} = \widehat{CHO} = 15^0$.

Vậy $\widehat{BHC} = 15^0 + 15^0 = 30^0$.

***Nhận xét:*** Các bạn đều giải đúng theo cách trên. Bạn *Nguyễn Hồng Hải Lê* giải chưa trọn vẹn. Ngoài cách giải trên (cách tự nhiên nhất), bạn *Nguyễn Anh Thư* (Sóc Trăng) phát triển thêm ba cách nữa. Dưới đây là danh sách các bạn giải đúng:

**Hà Nội:** *Hà Minh Đức*, 8A01; *Hoàng Nhật Minh*, 4A0, THCS Ngôi sao Hà Nội; *Nguyễn Hồng Hải Lê*, 7I, THCS Marie Curie, Q.Nam Từ Liêm; *Đặng Minh Phương*, 7A8, THCS Dịch Vọng, Cầu Giấy; *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Đống Đa; *Hàn Đức*

*Minh*, Lớp 8A0, THCS Nguyễn Trường Tộ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Viết Quang Anh*, 7H, THCS Trần Mai Ninh, Ba Đình; **Thái Nguyên:** *Đồng Hoàng Minh Đạo*, 6A4, THCS Nguyễn Du; *Trần Quang Khôi*, 6A5, THCS Chu Văn An; **Quảng Ngãi:** *Võ Thị Cẩm Ly*, 7D; *Cao Phương Nga, Nguyễn Thùy Trâm*, 7C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồng Nga*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Phú Thọ:** *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, H. Lâm Thao.

**TẠ DUY PHƯỢNG**

**Bài T3/510**. *Cho*

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz=0.$$

*Chứng minh* $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=(x+y+z)^{2019}$.

***Lời giải.*** Ta có:

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz=0$$

$$\Leftrightarrow [xy(x+y)+xyz]+[yz(y+z)+xyz]+zx(z+x)=0$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y+z)+yz(x+y+z)+zx(z+x)=0$$

$$\Leftrightarrow y(x+y+z)(x+z)+zx(z+x)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+z)[y(x+y)+z(y+x)]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ y=-z. \\ z=-x \end{array}\right.$$

Nếu $x=-y$ thì $x^{2019}=-y^{2019}$ và $x+y+z=z$,

$\Rightarrow x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=-y^{2019}+y^{2019}+z^{2019}$

$=z^{2019}=(x+y+z)^{2019}$.

Tương tự các trường hợp $y=-z$ hoặc $z=-x$, đều thu được $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=(x+y+z)^{2019}$.

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

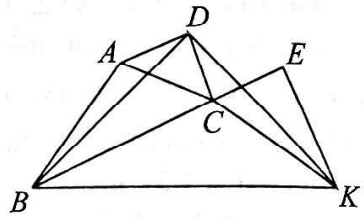
***Nhận xét.*** Đây là bài toán cơ bản về chứng minh đẳng thức có điều kiện cho trước. Đa số các bạn gửi bài đều có lời giải đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hải Phòng**: *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng; **Phú Thọ**: *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, *Trần Thị Thanh Hảo, Nguyễn Đức Quang Vinh*, 8A3, THCS Lâm Thao, *Lại Trường Giang*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Thái Nguyên**: *Đào Hải Đăng*, 8A1, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Viết Quang Anh*, 7H, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An**: *Võ Doanh Nhân*, 9A, THCS Nguyễn Thái Nhự, Đô Lương; *Nguyễn Nhất Huy*, 9C, THCS Hà Huy Tập; **Quảng Ngãi**: *Võ Hữu Thanh Thảo*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng; **Quảng Trị**: *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo.

**PHẠM THỊ BẠCH NGỌC**

**Bài T4/510**. *Cho tam giác ABC có* $\widehat{ABC}=30^0$. *Bên ngoài tam giác ABC, dựng tam giác ACD vuông cân tại D. Chứng minh rằng*

$$2BD^2=BA^2+BC^2+BA.BC.$$

***Lời giải.*** Dựng tam giác $BDK$ vuông cân tại $D$ sao cho $K$ và $A$ khác phía so với $BD$. Hạ $KE\perp BC$ tại $E$. Ta có $\widehat{KDC}=\widehat{BDA}=90^\circ-\widehat{CDB}$, suy ra $\Delta ABD=\Delta CKD$ (c.g.c), nên $AB=CK$ và $\widehat{BAD}=\widehat{KCD}$.




Vậy $\widehat{BCK}=360^\circ-\widehat{BCD}-\widehat{DCK}$

$=360^0-\widehat{BCD}-\widehat{BAD}=120^0$.

Suy ra $\widehat{KCE}=60^\circ$, dẫn đến $KC=2CE$. Ta có:

$2BD^2=BK^2=BE^2+EK^2=(BC+CE)^2+EK^2$

$=BC^2+CK^2+BC.CK=BC^2+AB^2+BC.AB$.

Vậy $2BD^2=AB^2+BC^2+AB.BC$.

***Nhận xét.*** 1) Ngoài cách giải trên, một số bạn kẻ $BH\perp AD$, $BK\perp CD$, $CM\perp AB$ và dùng định lí Pythagoras và công thức diện tích tam giác cũng dẫn tới kết quả.

2) Các bạn sau cho lời giải tốt.

**Phú Thọ:** *Đỗ Khánh Linh*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Nghệ An:** *Nguyễn Công An*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

**NGUYỄN THANH HỒNG**

**Bài T5/510**. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T=\frac{5-3x}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{5-3y}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{5-3z}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Lời giải.** ĐK: $-1<x<1; -1<y<1; 1<z<1$.

Với điều kiện trên suy ra

$$5-3x>0,\ 5-3y>0,\ 5-3z>0.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương, ta có:

$$T=\frac{5-3x}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{5-3y}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{5-3z}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\geq 3.\sqrt[3]{\frac{5-3x}{\sqrt{1-y^2}}.\frac{5-3y}{\sqrt{1-z^2}}.\frac{5-3z}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Dấu đẳng thức đạt được khi

$$\frac{5-3x}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{5-3y}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{5-3z}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lại áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có:

$$5-3x=(1+x)+4(1-x)\geq 2\sqrt{(1+x).4(1-x)}$$

hay $5-3x\geq 4\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow \frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}\geq 4$.

Dấu đẳng thức đạt được khi

$$1+x=4(1-x)\Leftrightarrow x=\frac{3}{5}.$$

Tương tự, có: $\frac{5-3y}{\sqrt{1-y^2}}\geq 4$; $\frac{5-3z}{\sqrt{1-z^2}}\geq 4$.

Do đó $T\geq 3.\sqrt[3]{\frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{5-3y}{\sqrt{1-y^2}}.\frac{5-3z}{\sqrt{1-z^2}}}\geq 3.\sqrt[3]{4^3}=12.$

Dấu đẳng thức đạt được $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{3}{5}$.

Vậy $\min T=12$, đạt được $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{3}{5}$.

***Nhận xét.*** Đây là bài toán không khó, các bạn đều giải theo cách trên. Điều then chốt của lời giải là chứng minh BĐT $\frac{5-3a}{\sqrt{1-a^2}}\geq 4$ với $-1<a<1$ và sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương để ước lượng vế phải của $T$. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8Đ, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Nghệ An:** *Nguyễn Nhất Huy*, 9C, THCS Hà Huy Tập, TP. Vinh, *Phạm Văn Quyền*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Viết Quang Anh*, 7H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai.

**NGUYỄN ANH DŨNG**

**Bài T6/510.** *Tìm tham số m để phương trình* $4^x+2=m.2^x(1-x)x$ *có nghiệm duy nhất.*

***Lời giải.*** (Của bạn *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, huyện Kế Sách, tỉnh **Sóc Trăng**)

Trước hết, biến đổi tương đương, ta có:

$$4^x+2=m.2^x(1-x)x\Leftrightarrow 2^x+2^{1-x}=m.x(1-x).\ (*)$$

*Nhận xét*: Nếu $x$ là nghiệm của phương trình đã cho thì $1-x$ cũng là nghiệm của phương trình này, vì ta có ở đó vai trò của $x$ và của $1-x$ hoán đổi được cho nhau. Vậy khi $x$ là nghiệm duy nhất của phương trình thì phải có $x=1-x$, hay $x=\frac{1}{2}$.

Thay giá trị này vào phương trình, ta có $m=8\sqrt{2}$.

Thay $m=8\sqrt{2}$ vào phương trình (*), ta có phương trình $2^x+2^{1-x}=8\sqrt{2}(1-x)x$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có vế trái là:

$$2^x+2^{1-x}\geq 2\sqrt{2^x.2^{1-x}}=2\sqrt{2}.$$

Trong khi cũng áp dụng BĐT này, ta có vế phải là: $8\sqrt{2}.(1-x)x\leq 2\sqrt{2}.(1-x+x)^2=2\sqrt{2}$.

Như vậy, đẳng thức xảy ra khi chỉ khi trong cả hai BĐT ta có dấu bằng, tức là chỉ khi $x=1-x$, hay là chỉ khi $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m=8\sqrt{2}$.

***Nhận xét.*** Không nhiều bạn giải được bài toán này. Ngoài bạn *Thư*, các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Quảng Trị:** *Nguyễn Ngọc Thọ, Nguyễn Xuân Tiến, Ngô Hoàng Thành Đạt*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Vũ Ngọc Linh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

**VŨ ĐÌNH HÒA**

**Bài T7/510.** *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn* $(a+b)(b+c)(c+a)>0$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}.$$

***Lời giải.*** (Theo đa số các bạn) Từ giả thiết suy ra $ab+bc+ca>0$ và

$$\frac{a}{b+c}-\frac{a^2}{ab+bc+ca}=\frac{abc}{(b+c)(ab+bc+ca)}\geq 0,$$

suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\frac{a}{\sqrt{ab+bc+ca}}$.

Tương tự, ta có: $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{b}{\sqrt{ab+bc+ca}}$

và $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{c}{\sqrt{ab+bc+ca}}$.

Từ đó và theo BĐT Cau chy, suy ra:

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}$$

$$\geq \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}} + \frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}} \frac{4\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}} = 4$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} abc = 0 \\ (a+b+c)^2 = 4(ab+bc+ca) \end{cases}$

hay $a = b \neq 0, c = 0$ hoặc $b = c \neq 0, a = 0$ hoặc $c = a \neq 0, a = 0$.

*Kết luận*: $\min P = 4$ khi $a = b \neq 0, c = 0$, hoặc $b = c \neq 0, a = 0$ hoặc $c = a \neq 0, a = 0$.

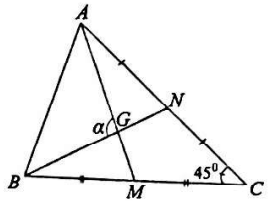
***Nhận xét.*** Đây là dạng toán cơ bản về BĐT Cauchy với bộ 3 số không âm. Đa số các bạn đều giải bằng cách trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng. **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Đồng Tháp:** *Lạc Xuân Thịnh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Đỗ Xuân Trọng*, 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên:** *Đặng Duy Hậu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Quảng Bình:** *Lê Đức Hạnh*, 10T2, *Đặng Hoàng Duy*, 10T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Ngô Hoàng Thành Đạt*, *Trần Nguyễn Phương Linh*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long:** *Lê Minh Tâm*, 11T1, *Dương Thanh Triều*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Quang Huy*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế,

**NGUYỄN VĂN MẬU**

**Bài T8/510**. *Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 45^o$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, $\widehat{AGB} = \alpha$. Chứng minh hệ thức* $\frac{\sqrt{2}}{\sin A \sin B} + 3\cot\alpha = 1$.

***Lời giải.***

Đặt $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$. Sử dụng định lý hàm số côsin cho tam giác




$\Delta AGB$ có:

$$\cot\alpha = \frac{GA^2 + GB^2 - c^2}{4S_{AGB}} = \frac{4AM^2 + 4BN^2 - 9c^2}{12S_{ABC}} \quad (1).$$

Áp dụng công thức đường trung tuyến cho $\Delta ABC$, ta có: $AM^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}; BN^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$.

Thay vào (1) ta được: $\cot\alpha = \frac{a^2 + b^2 - 5c^2}{12S_{ABC}}$ (2).

Sử dụng định lý hàm côsin cho $\Delta ABC$, ta có:

$$\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S_{ABC}} = \frac{3a^2 + 3b^2 - 3c^2}{12S_{ABC}} \quad (3).$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \cot C - \cot\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6S_{ABC}}$ (4).

Chú ý rằng: $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}$ (5).

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \cot C - \cot\alpha = \frac{2}{3}(\cot A + \cot B + \cot C)$

Vì $\widehat{C} = 45^0$ nên: $1 - 3\cot\alpha = \frac{2\sin C}{\sin A \sin B} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A \sin B}$.

Từ đó suy ra hệ thức cần chứng minh.

***Nhận xét.*** Tất cả các bài giải gửi về Tòa soạn đều đúng và trình bày tương tự như lời giải trên. Những bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Trần Vũ Đức Huy*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Cao Trung Hiếu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nghệ An:** *Lê Bá Luật*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Ngô Văn Thông*, *Lưu Ngân Hà*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Trần Phương Linh*, *Lê Đức Hạnh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Trần Nguyễn Phương Linh*, *Nguyễn Xuân Tiến*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Quang Huy*, 10 Toán 1, *Nguyễn Ái Huyền Trang*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10 T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng:** *Đậu Đức Quân*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Long An:** *Phạm Minh Anh*, 10T1, THPT chuyên Long An.

**HỒ QUANG VINH**

**Bài T9/510.** *Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$
$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right).$$

***Lời giải.*** Theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$3=a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}\Rightarrow a+b+c\leq 3 \quad (1).$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1^2}{a+b}+\frac{1^2}{b+c}+\frac{1^2}{c+a}$$
$$\geq\frac{(1+1+1)^2}{a+b+b+c+c+a}=\frac{9}{2(a+b+c)} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}\geq\frac{9}{2.3}=\frac{3}{2} \quad (3).$$

Mặt khác cũng theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2$$
$$\leq 3(a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2)=3.6=18$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)$$
$$\leq\frac{\sqrt{18}}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{2} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) ta có BĐT cần chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

***Nhận xét.*** Đây là bài toán chứng minh BĐT cơ bản. Rất nhiều bạn tham gia giải bài này, các lời giải đều đúng và tương tự như cách giải trên. Các bạn sau có lời giải tương đối ngắn gọn:

**Vĩnh Phúc:** *Phạm Hoàng Hiệp, Nguyễn Vũ Ngọc Linh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Lào Cai:** *Nguyễn Hữu Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Hà Nội:** *Đỗ Xuân Trọng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; *Vũ Hàn Tín*, 11A1, THCS-THPT Nguyễn Tất Thành, ĐHSP Hà Nội. **Hưng Yên:** *Đặng Duy Hậu, Nguyễn Phúc Vinh*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nghệ An:** *Lê Bá Luật*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Quốc Bảo Long*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Hải Anh, Lê Phan Việt Cường, Nguyễn Anh Bảo*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh, *Nguyễn Thị Hoài Mến, Lê Văn Đạt*, 10A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang; **Quảng Trị:** *Trần Nguyễn Hữu Phúc, Nguyễn Xuân Tiến, Nguyễn Ngọc Thọ, Trần Nguyễn Phương*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Nguyễn Anh Quân*, 8d, THCS Trần Hưng Đạo, H. Cam Lộ; **Quảng Bình:** *Trần Phương Linh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 11 Toán 1, *Nguyễn Ái Huyền Trang*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Đoàn Quang Đăng*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre, *Ngô Quốc Bảo*, lớp 10/9, THPT Nguyễn Đình Chiểu **Cần Thơ:** *Trần Danh Nhân*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Lâm Đồng:** *Phạm Khánh Vinh*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đồng Tháp:** *Lạc Xuân Thịnh, Phạm Hữu Đăng*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Sóc Trăng:** *Đậu Đức Quân*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, H. Kế sách; **Vĩnh Long:** *Lê Minh Tâm*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

**TRẦN HỮU NAM**

**Bài T10/510.** *Với ba số thực a, b, c, ta kí hiệu $T(a, b, c) = |a - b| + |b - c| + |c - a|$. Xét dãy (*) gồm các số nguyên $x_1, x_2, ..., x_{12}$ sao cho tồn tại đa thức f(x) với các hệ số nguyên mà các giá trị $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_{12})$ đôi một phân biệt và*

$$\sum_{\substack{1\leq i<j<k\leq 12\\ i,j,k\in\mathbb{N}}} T\left(f(x_i), f(x_j), f(x_k)\right)\leq 3300.$$

*Chứng minh rằng trong (*) luôn chứa một cấp số cộng với ít nhất ba số hạng.*

***Lời giải.*** (Của tác giả bài toán) • Trước hết ta chứng minh kết quả: *Trong một dãy gồm 12 số nguyên đôi một phân biệt $f_1, f_2, ..., f_{12}$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{\substack{1\leq i<j<k\leq 12\\ i,j,k\in\mathbb{N}}} T\left(f_i, f_j, f_k\right)\leq 3300$, có ít nhất ba số nguyên liên tiếp* (1).

Thật vậy, giả sử không có ba số nguyên liên tiếp nào xuất hiện trong dãy 12 số nguyên $f_1, f_2, ..., f_{12}$. Ta coi $f_1 < f_2 < f_3 < ... < f_{12}$.

+ *Nhận xét 1*: Với $f_i < f_j < f_k$ thì

$$T\left(f_i, f_j, f_k\right)=f_j-f_i+f_k-f_j+f_k-f_i=2\left(f_k-f_i\right)$$

là một *số chẵn*. Hơn nữa $f_i, f_j, f_k$ không là ba số liên tiếp nên $T\left(f_i, f_j, f_k\right)=2\left(f_k-f_i\right)\geq 2.3=6$.

+ *Nhận xét 2*: Với $f_i < f_j < f_k$ và $f_i < f_{j'} < f_{k+1}$ thì $T\left(f_i, f_j, f_k\right)<T\left(f_i, f_{j'}, f_{k+1}\right)$, do đó phải có $T\left(f_i, f_{j'}, f_{k+1}\right)\geq T\left(f_i, f_j, f_k\right)+2$.

Ta xét giá trị của $T(f_1,f_j,f_k)$ với $1<j<k$, theo các nhận xét trên thì $T(f_1,f_2,f_3)\ge 6$, $T(f_1,f_j,f_4)\ge 6+2=8$ và ta có đúng hai bộ số dạng $(f_1,f_j,f_4)$ (ứng với $j=2,3$),

$T(f_1,f_j,f_5)\ge 8+2=10$ và ta có đúng ba bộ số dạng $(f_1,f_j,f_5)$ (ứng với $j=2,3,4$)

....

$T(f_1,f_j,f_{12})\ge 24$ và ta có đúng 10 bộ số dạng $(f_1,f_j,f_{12})$ (ứng với $j=\overline{2,11}$).

Tổng quát, với mỗi $i\in\{1;2;...;10\}$ và mỗi $k\in\{3;...;12\}$ (thỏa mãn $k\ge i+2$) cố định trước thì $T(f_i,f_j,f_k)\ge 6+(k-i-2).2=2+2k-2i$ và ta có đúng $k-i-1$ bộ số có dạng $(f_i,f_j,f_k)$ (ứng với $j=\overline{i+1;k-1}$). Theo đó

$$\sum_{\substack{1\le i<j<k\le 12\\ i,j,k\in\mathbb{N}}} T(f_i,f_j,f_k)\ge\sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{k=i+2}^{12}(2+2k-2i)(k-i-1)\right)$$

$$=2\sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{k=i+2}^{12}\left(k^2-2ki+i^2-1\right)\right)$$

$$=2\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{12.13.25}{6}-\frac{(i+1)(i+2)(2i+3)}{6}-\right.$$

$$\left.-2i.\frac{(11-i)(i+14)}{2}+\left(i^2-1\right)(11-i)\right)=3300.$$

Khi xảy ra đẳng thức $\sum\limits_{\substack{1\le i<j<k\le 12\\ i,j,k\in\mathbb{N}}} T(f_i,f_j,f_k)=3300$

thì phải có $\begin{cases}T(f_1,f_2,f_3)=6\\T(f_1,f_2,f_4)=8\\T(f_1,f_2,f_5)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f_3-f_1=3\\f_4-f_1=4\\f_5-f_1=5\end{cases}\Rightarrow f_3,f_4,f_5$

là ba số nguyên liên tiếp, mâu thuẫn. Vậy nếu không có ba số nguyên liên tiếp nào xuất hiện trong dãy 12 số nguyên $f_1,f_2,...,f_{12}$ thì phải có $\sum\limits_{\substack{1\le i<j<k\le 12\\ i,j,k\in\mathbb{N}}} T(f_i,f_j,f_k)>3300$. Do đó (1) được chứng minh.

• Quay trở lại bài toán, $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên nên $f(x_i)\in\mathbb{Z},\forall i=\overline{1,12}$. Đặt kí hiệu $f(x_i)=f_i$ và dùng kết quả (1) dẫn đến việc tồn tại ba chỉ số $i,j,k$ mà $f(x_i),f(x_j),f(x_k)$ là ba số nguyên liên tiếp.

Không mất tổng quát, giả sử $f(x_i)=a$, $f(x_j)=a+1$, $f(x_k)=a+2$ với $a\in\mathbb{Z}$. Khi đó đa thức $f(x)-a-1$ có nghiệm nguyên $x=x_j$ nên có biểu diễn $f(x)-a-1=(x-x_j).H(x)$ với $H(x)$ là đa thức với hệ số nguyên.

Do đó $\begin{cases}1=f(x_k)-a-1=(x_k-x_j).H(x_k)\\-1=f(x_i)-a-1=(x_i-x_j).H(x_i)\end{cases}$,

suy ra: $|x_i-x_j|=|x_k-x_j|\Leftrightarrow x_i-x_j=\pm(x_k-x_j)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_i=x_k\\x_i+x_k=2x_j\end{array}\right..$$

Lại có $P(x_i)\ne P(x_k)$ nên $x_i\ne x_k$. Vậy có $x_i+x_k=2x_j$. Điều này chứng tỏ trong dãy (*) đã cho chứa một cấp số cộng (với ít nhất ba số hạng là $x_i,x_j,x_k$).

***Nhận xét.*** Đề bài toán này đã được sửa so với đề gốc để bài toán được chính xác. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được bài giải nào cho bài toán này.

**ĐẶNG HÙNG THẮNG**

**Bài T11/510**. *Tìm tất cả các hàm số $h(x)$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

i) $h(2019)=0$;

ii) $h(x+1)=h(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

iii) $3^{x+y}[h(x)h(y)+h(x+y)]=$

$=3^x(y+1)h(x)+3^y(x+1)h(y)+3^{xy}h(xy),\forall x,y\in\mathbb{R}$.

***Lời giải.*** Giả sử $h(x),x\in\mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Từ điều kiện ii) ta suy ra $h(x+n)=h(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Do đó từ i) ta có $h(n)=0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$. Lấy $y=2$, từ iii), ta có: $3^{x+2}h(x)=3^{x+1}h(x)+3^{2x}h(2x)$

$$\Rightarrow 6h(x)=3^xh(2x),\ \forall x\in\mathbb{R}\ (1).$$

Lấy $y=4$, ta có: $3^{x+4}h(x)=5.3^xh(x)+3^{4x}h(4x)$

$$\Rightarrow 76h(x)=3^{3x}h(4x),\ \forall x\in\mathbb{R}\ (2).$$

Nhưng theo kết luận (1) thì $6h(x)=3^{2x}h(4x)$. Do đó: $76h(x)=\frac{38}{3}.6h(x)=\frac{38}{3}.3^xh(2x)=\frac{19}{9}.3^x.6h(2x)$

$=\frac{19}{9}.3^x.3^{2x}h(4x)=\frac{19}{9}.3^{3x}.h(4x)$. Kết hợp với (2) ta nhận được: $\frac{19}{9}h(4x)=h(4x)\Rightarrow h(4x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $h(x) = 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Ta thấy ngay hàm số trên thỏa mãn bài toán. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn bài toán là $h(x) = 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

***Nhận xét.*** Bài toán phương trình hàm trên dùng phương pháp: Xét tại các giá trị đặc biệt của $x$, $y$. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Đỗ Xuân Trọng*, 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nghệ An:** *Lê Bá Luật*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bà Rịa - Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

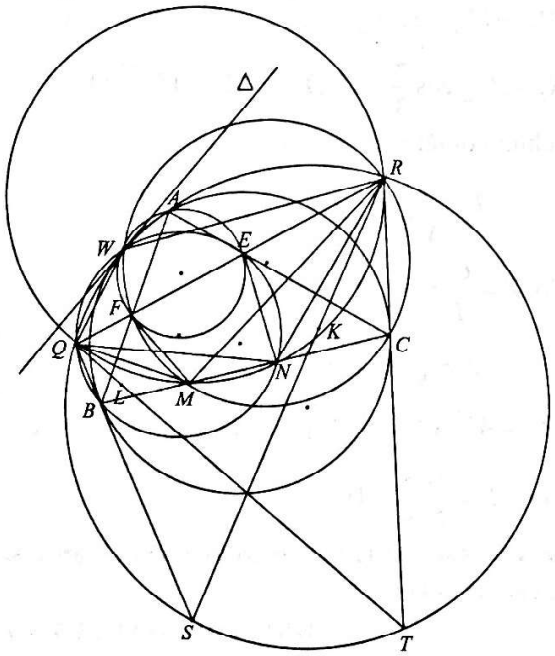
**NGUYỄN MINH ĐỨC**

**Bài T12/510**. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (Ω). Các điểm E, F lần lượt nằm trên cạnh CA, AB sao cho tứ giác BCEF nội tiếp. Trung trực của đoạn thẳng CE lần lượt cắt BC, EF tại các điểm N, R. Trung trực của đoạn thẳng BF lần lượt cắt BC, EF tại các điểm M, Q. K là điểm đối xứng với E qua RM. L là điểm đối xứng với F qua QN. Gọi giao điểm của RK và QB là S; giao điểm của QL và RC là T.*

1) *Chứng minh rằng bốn điểm Q, R, S, T cùng nằm trên một đường tròn, ký hiệu đường tròn này là (ω).*

2) *Chứng minh rằng hai đường tròn (ω) và (Ω) tiếp xúc nhau.*

***Lời giải.***




1) Dễ thấy: $(MN,MQ)\equiv(BC,BF)+(BF,MQ)$

$\equiv(EC,EF)+\frac{\pi}{2}(\text{mod}\,\pi)\equiv(EC,RQ)+(RN,EC)$

$\equiv(RN,NQ)(\text{mod}\,\pi)$.

Do đó $M, N, Q, R$ cùng thuộc một đường tròn.

Vậy $(QT,QS)\equiv(QT,QF)+(QF,QS)$

$\equiv 2(QN,QF)+2(QF,QM)(\text{mod}\,\pi)\equiv 2(QN,QM)$

$\equiv 2(RN,RM)\equiv 2(RN,RE)+2(RE,RM)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(RC,RE)+(RE,RK)\equiv(RC,RK)\equiv(RT,RS)(\text{mod}\,\pi)$.

Do đó $Q, R, S, T$ cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi $W$ là giao điểm thứ hai của các đường tròn $(ABC)$, $(AEF)$. Khi đó:

$(NE,NB)\equiv(NE,NC)\equiv 2(NE,NR)$

$\equiv 2((NR,CA)+(CA,CB))(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv 2\left(\frac{\pi}{2}+(CA,CB)\right)\equiv\pi+2(CA,\ CB)$

$\equiv(CA,\ CB)+(CA,\ CB)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(AC,\ AB)+(AB,CB)+(CA,\ CB)$

$\equiv(AE,\ AF)+(FB,CB)+(CA,\ CB)\ (\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(WE,\ WF)+(FE,CE)+(WA,\ WB)$

$\equiv(WE,\ WF)+(FE,AE)+(WA,\ WB)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(WE,\ WF)+(FW,AW)+(WA,\ WB)$

$\equiv(WE,WB)(\text{mod}\,\pi)$.

Do đó $N, E, B, W$ cùng thuộc một đường tròn (1).

Dễ thấy: $(QB,QE)\equiv(QB,QF)\equiv 2(QM,QF)$

$\equiv 2(QM,QR)\equiv 2(NM,NR)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv 2((NM,NE)+(NE,NR))$

$\equiv 2(NM,NE)+2(NE,NR)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(NM,NE)+(NM,NE)+2(NE,NC)$

$\equiv(NM,NE)+(NM,NC)\equiv(NB,NE)(\text{mod}\,\pi)$.

Do đó $B, E, N, Q$ cùng thuộc một đường tròn (2).

Từ (1) và (2) suy ra $B, E, N, Q, W$ cùng thuộc một đường tròn (3).

Tương tự $C, F, M, R, W$ cùng thuộc một đường tròn (4). Dễ thấy $M, N$ theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $SQR$, $TQR$ (5). Từ (3), (4) và (5), chú ý rằng $MQ\perp AB; NR\perp AC$ và $STRQ$ là tứ giác lồi, suy ra:

$(WQ,WR)\equiv(WQ,WB)+(WB,WC)+(WC,WR)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(NQ,NB)+(MQ,NR)+(MC,MR)$

$\equiv(NQ,MR)+(MQ,NR)(\text{mod}\,\pi)\equiv(NQ,NR)+(MQ,MR)$

$$\equiv \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{TQ},\overrightarrow{TR})+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{SQ},\overrightarrow{SR})(\text{mod}\,\pi)$$

$$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{TQ},\overrightarrow{TR})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{TQ},\overrightarrow{TR})\equiv(\overrightarrow{TQ},\overrightarrow{TR})\equiv(TQ,TR)(\text{mod}\,\pi).$$

Kết hợp với phần 1, suy ra $W$ thuộc đường tròn $(STRQ)$. Gọi $\Delta$ là tiếp tuyến với đường tròn $(ABC)$ tại $W$. Dễ thấy: $(\Delta,WQ)\equiv(\Delta,WB)+(WB,WQ)$

$$\equiv(CW,CB)+(NB,NQ)(\text{mod}\,\pi)$$
$$\equiv(CW,CM)+(NM,NQ)$$
$$\equiv(RW,RM)+(RM,RQ)\equiv(RW,RQ)(\text{mod}\,\pi).$$

Do đó $\Delta$ tiếp xúc với đường tròn $(STRQ)$.

Tóm lại các đường tròn $(ABC)$, $(STRQ)$ tiếp xúc với nhau (đpcm).

***Nhận xét.*** 1) Bài toán này khó, chỉ có ba bạn tham gia giải và lời giải của các bạn đều tương tự như lời giải trên: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; **Hà Nội:** *Phan Văn Thanh*, 10 T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phước*, 11T, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế.

2) Phần 2 của bài toán trên là hệ quả trực tiếp của bổ đề nổi tiếng sau

**Bổ đề.** *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). E là giao điểm của AC và BD. Đường tròn (K) tiếp xúc trong với (O) và theo thứ tự tiếp xúc với các đoạn EC, ED tại M, N. Khi đó MN đi qua tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACD, BCD.*

**NGUYỄN MINH HÀ**

**Bài L1/510.** *Trong môi trường đồng tính, không hấp thụ âm có một nguồn âm đẳng hướng, đặt ở O. Một máy thu âm đặt ở A thu được âm có mức cường độ âm là 50 dB. Nếu dịch chuyển máy thu ra xa nguồn âm thêm một khoảng d thì mức cường độ âm thu được là 30 dB. Nếu tiếp tục dịch chuyển máy thu ra xa thêm một khoảng nữa cũng là d theo phương truyền âm thì mức cường âm thu được là bao nhiêu?*

***Lời giải.*** Ban đầu máy thu cách nguồn âm $O$ một khoảng $r_1=r$, sau là $r_2=r+d$ và vị trí cuối cùng là $r_3=r+2d$. Ta có: $L_1-L_2=10.\lg\frac{I_1}{I_2}=$

$$=10.\lg\frac{r_2}{r_1}=20.\lg\left(1+\frac{d}{r}\right)=20\Rightarrow d=9r.$$

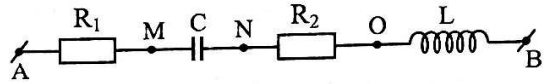
$$L_1-L_3=10.\lg\frac{I_1}{I_3}=20.\lg\left(1+\frac{2d}{r}\right)\approx 25{,}6.$$

Do đó $L_3=L_1-50=24{,}4\ dB$.

***Nhận xét.*** Các bạn có lời giải đúng: **Hải Phòng:** *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng; **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông.

**NGUYỄN XUÂN QUANG**

**Bài L2/510.** *Cho đoạn mạch như hình vẽ. Trong đó $R_1=30\ \Omega$, cuộn cảm thuần. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng U = 150 V và tần số f = 50 Hz thì công suất tiêu thụ trong mạch bằng 500 W. Nối hai đầu cuộn cảm thuần bằng một dây dẫn có điện trở không đáng kể. Khi đó điện áp hiệu dụng trên các đoạn AM và MO bằng nhau và bằng $50\sqrt{3}$ V. Độ tự cảm L của cuộn dây bằng bao nhiêu?*

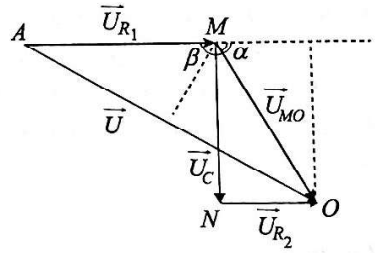



***Lời giải.*** Sau khi nối tắt cuộn cảm thuần, ta có giản đồ vectơ như hình vẽ. Từ giản đồ ta có:

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{U}{2U_{R1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\beta=\frac{2\pi}{3}\quad\text{và}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3}.$$




Từ $U_{R_1}=U_{MO}\Rightarrow Z_{MO}=\sqrt{R_2^2+Z_C^2}=R_1=30\ \Omega$

và $R_2=Z_{MO}\cos\frac{\pi}{3}=15\ \Omega\ \Rightarrow Z_C=15\sqrt{3}\ \Omega$.

Khi chưa nối tắt cuộn cảm thuần thì:

$$I=\sqrt{\frac{P}{R_1+R_2}}=\sqrt{\frac{500}{45}}=\frac{10}{3}\ A.$$

Từ đó $Z=\frac{U}{I}=45\ \Omega$. Mặt khác:

$$Z=\sqrt{(R_1+R_2)^2+(Z_L-Z_C)^2}$$

$$\Rightarrow 45^2=45^2+(Z_L-Z_C)^2\Rightarrow Z_L=Z_C=15\sqrt{3}\ \Omega.$$

Suy ra : $L=\frac{3\sqrt{3}}{20\pi}$ (H).

***Nhận xét.*** Rất tiếc là không có bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này!

**ĐINH THỊ THÁI QUỲNH**


# SUY NGHĨ SÂU HƠN VỀ MỘT BÀI TOÁN

**NGUYỄN TUẤN ANH**

*(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)*

*Trong học toán nói chung và giải toán nói riêng, việc dừng lại và suy nghĩ sâu hơn cho một bài toán là điều thiết yếu, nó cho người giải nhiều góc nhìn cho bài toán cũng như mối tương quan với các bài toán khác. Qua đó người giải sẽ thấy được cái đẹp, cái hay dù đó là bài toán đơn giản nhất. Bài viết này, người viết xin trình bày một bài toán BĐT đơn giản cùng với những ứng dụng thú vị mà nó mang đến.*

**1. Bài toán mở đầu (19th Hong Kong MO – 2016)** *Với $a,b$ là các số thực dương. Tìm số $\lambda \geq 0$ nhỏ nhất sao cho BĐT sau luôn đúng:*

$$\frac{a+b}{2} \geq \lambda\sqrt{ab} + (1-\lambda)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

***Lời giải.*** Ta biến đổi BĐT như sau:

$$\lambda\left[\sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab}\right] \geq \sqrt{2(a^2+b^2)} - a - b$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\lambda(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+2\sqrt{ab}} \geq \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}.$$

Vậy nên để BĐT luôn đúng thì $\lambda$ phải thỏa mãn:

$$2\lambda \geq \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}+2\sqrt{ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b} = 1 - \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}.$$

Cho $a$ tiến về $b$ ta được: $2\lambda \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{1}{2}$. Cuối cùng, từ bài giải trên ta kiểm tra được rằng với $\lambda = \frac{1}{2}$ thì BĐT luôn đúng.

***Nhận xét.*** *Với $\lambda = \frac{1}{2}$, ta có một phép chứng minh đơn giản như sau: Theo BĐT Bunyakovsky, ta có:*

$$\left(\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \leq (1+1)\left(ab + \frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

$$= (a+b)^2.$$

*BĐT thu được từ bài toán trên là một cách làm chặt cho BĐT Cauchy hai biến:*

$$a+b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

*vậy nên chắc hẳn nó sẽ có một số ứng dụng nào đó, ít nhất là trong việc chứng minh cho các bài toán BĐT khác.*

**2. Một số ứng dụng**

**Thí dụ 1. (HSG lớp 9 – Đồng Tháp, năm học 2018 – 2019)** *Với $a,b$ là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} \geq 14.$$

***Lời giải.*** Bài toán không khó và có nhiều cách tiếp cận. Trước tiên ta đến với hai hướng thông thường khi gặp bài toán.

***Cách 1.*** (*Thuần nhất hóa*) BĐT tương đương với $\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} \geq \frac{14}{(a+b)^2}$. Quy đồng, thu gọn ta dễ dàng có được điều phải chứng minh.

***Cách 2.*** (*Sử dụng BĐT cổ điển*) Ta sẽ áp dụng BĐT Cauchy dạng phân thức, tuy nhiên cần điều chỉnh các hệ số một cách hợp lý để tận dụng được giả thiết $a+b=1$. Cụ thể:

$$\frac{1}{n.ab} + \frac{1}{m(a^2+b^2)} \geq \frac{4}{nab + m(a^2+b^2)}.$$

Để tìm được hệ số $m,n$ ta cần đảm bảo vừa đủ để có hằng đẳng thức $(a+b)^2$ và đồng thời đảm bảo dấu bằng xảy ra (dự đoán $a=b=\frac{1}{2}$). Như vậy ta

được $n=2m$. Ta để ý thêm $\frac{1}{ab}$ trội hơn $\frac{1}{a^2+b^2}$ do đó suy nghĩ tự nhiên là ta nên sử dụng hết $\frac{3}{a^2+b^2}$, thừa lại một lượng nào đó $\frac{1}{ab}$ sẽ được đánh giá sau.

Kết hợp hai suy luận trên, ta được $m=\frac{1}{3};n=\frac{2}{3}$.

Lời giải hoàn chỉnh xin dành cho bạn đọc.

*Cuối cùng, ta đến với cách giải áp dụng kết quả bài toán mở đầu. Cách giải không được tự nhiên và tính toán khá nhiều. Tuy nhiên cách giải cho ta nhiều hướng khai thác, mở rộng hơn.*

***Cách 3.*** Ta sử dụng kết quả bài toán mở đầu. Cụ thể:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\le 1-\sqrt{ab}\Leftrightarrow \frac{3}{a^2+b^2}\ge \frac{3}{2\left(1-2\sqrt{ab}+ab\right)}.$$

Do đó ta cần: $\frac{2}{ab}+\frac{3}{2\left(1-2\sqrt{ab}+ab\right)}\ge 14$

$$\Leftrightarrow \frac{4-8\sqrt{ab}+7ab}{2ab\left(1-2\sqrt{ab}+ab\right)}\ge 14$$

$$\Leftrightarrow 4-8\sqrt{ab}+7ab\ge 28ab-56ab\sqrt{ab}+28(ab)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow -28(ab)^2+56ab\sqrt{ab}-21ab-8\sqrt{ab}+4\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-2\sqrt{ab}\right)\left(14ab\sqrt{ab}-21ab+4\right)\ge 0.$$

BĐT cuối là hiển nhiên vì $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ và

$$14ab\sqrt{ab}-21ab+4>\left(12ab\sqrt{ab}+\frac{3}{4}\right)-21ab+13ab$$
$$\ge 9ab-21ab+13ab>0.$$

Bài toán được chứng minh.

***Nhận xét.*** *Một ý tưởng để khai thác bài toán là điều chỉnh hệ số của* $\frac{1}{ab};\frac{1}{a^2+b^2}$ *để có một BĐT chặt hơn hay nói cách khác là chọn* $x,y>0$ *sao cho* $\frac{x}{ab}+\frac{y}{a^2+b^2}\ge 4x+2y$. *Khi đó cách 1 và cách 3 sẽ mang nhiều ý nghĩa hơn.*

**Thí dụ 2. (HSG lớp 9 – Bình Định, năm học 2017 – 2018)** *Với* $a,b$ *là các số thực dương có tích bằng 1. Tìm GTNN của biểu thức:*

$$P=(a+b+1)\left(a^2+b^2\right)+\frac{4}{a+b}.$$

***Lời giải.*** Theo kết quả của bài toán mở đầu ta có: $a+b\ge 1+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, kết hợp với kết quả quen thuộc: $a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$, ta được:

$$P\ge 2(2+t)t^2+\frac{2}{t}=2t^3+4t^2+\frac{2}{t},$$

với $t=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge 1$.

Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$P\ge 2t^3+4t^2+\frac{2}{t}\ge 8\sqrt[8]{\frac{t^3.t^3.t^2.t^2.t^2.t^2}{t.t}}=8\sqrt[8]{t^{12}}\ge 8.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$ tức GTNN của $P$ là 8.

**Thí dụ 3.** *Với* $a,b$ *là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\sqrt{ab}\ge 3\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

***Lời giải.*** Áp dụng kết quả bài toán mở đầu, ta cần chứng minh:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\sqrt{ab}\ge 3\left(a+b-\sqrt{ab}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}-2\sqrt{ab}\ge 3\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}\right)^2}{ab}\ge 3\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2.$$

Mà theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}\right)^2}{ab}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(a+b+\sqrt{ab}\right)^2}{ab}$$
$$\ge\frac{9\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2ab}{ab}=9\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

nên bài toán được chứng minh.

***Nhận xét.*** *Với cách giải trên ta có thể làm mạnh bài toán hơn:*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+3\sqrt{ab}\ge 5\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

*Hơn nữa, bằng cách thay đổi một lượng nào đó trong 3 đại lượng* $\frac{a+b}{2},\sqrt{ab},\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ *kết hợp với kết quả bài toán mở đầu, ta có thể làm chặt hơn BĐT trên. Mời bạn đọc đến với thí dụ tiếp theo.*

**Thí dụ 4. (HSG lớp 9 – Bà Rịa - Vũng Tàu, năm học 2017 – 2018)** *Với* $a,b$ *là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+7(a+b)\ge 8\sqrt{2(a^2+b^2)}..$$

***Lời giải.*** Tương tự như thí dụ 3, ta cần có:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+7(a+b)\ge 8\left(2a+2b-2\sqrt{ab}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\ge 9(a+b)-16\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}\right)^2}{ab}\ge 9\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2.$$

BĐT cuối là hiển nhiên theo BĐT Cauchy (xem chứng minh trong thí dụ 3). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

*Nếu ta thay đổi theo hướng trên, hoặc chọn một BĐT sẵn có và tiến hành thay thế một trong 3 đại lượng trên dựa trên kết quả của bài toán mở đầu, bạn đọc sẽ được các bài toán BĐT hai biến với những đại lượng thuận - nghịch. Phần này mời bạn đọc tiếp tục khám phá. Một vấn đề đặt ra là nếu BĐT với các đại lượng biến đổi khác đi, kết quả trên được vận dụng như thế nào?*

**Thí dụ 5. (HSG – Quảng Ninh, năm học 2017 – 2018)** *Với* $x,y$ *là hai số thực khác 0 và thỏa mãn* $2\left(x^4+y^4\right)=x^4y^4$. *Tìm GTNN của biểu thức:*

$$P=\frac{x^2}{y^2+1}+\frac{y^2}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^4+y^4+1}}.$$

***Lời giải.*** Ta đặt $t=x^2y^2$, theo giả thiết ta có:

$$t^2=x^4y^4=2\left(x^4+y^4\right)\ge 4\sqrt{x^4y^4}\Rightarrow t=x^2y^2\ge 4.$$

***Cách 1.*** Trước tiên ta đến với lời giải bằng cách áp dụng các BĐT cổ điển.

Áp dụng BĐT Schwarz và BĐT Cauchy, ta có:

$$P=\frac{x^2}{y^2+1}+\frac{y^2}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^4+y^4+1}}$$

$$=\frac{x^4}{x^2y^2+x^2}+\frac{y^4}{x^2y^2+y^2}+\frac{1}{\sqrt{x^4+y^4+1}}$$

$$\overset{Schwarz}{\ge}\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2x^2y^2+x^2+y^2}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4y^4}{2}+1}}$$

$$\overset{Cauchy}{\ge}\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2x^2y^2+\sqrt{2\left(x^4+y^4\right)}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4y^4}{2}+1}}$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{3x^2y^2}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4y^4}{2}+1}}$$

$$=\frac{t}{6}+\sqrt{\frac{2}{t^2+2}}+\frac{2}{3}.$$

Cũng theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{t}{6}+\sqrt{\frac{2}{t^2+2}}+\frac{2}{3}\ge 2\sqrt{\frac{t}{9}}+\sqrt{\frac{2}{t^2+2}}$$

$$=4.\sqrt{\frac{t}{36}}+\sqrt{\frac{2}{t^2+2}}$$

$$\ge 5\sqrt[5]{\sqrt{\frac{2t^4}{36^4\left(t^2+2\right)}}}$$

$$\overset{t\ge 4}{\ge} 5\sqrt[10]{\frac{256\left(t^2+2\right)}{9.36^4\left(t^2+2\right)}}=\frac{5}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2=y^2=2$, hay nói cách khác GTNN của $P$ là $\frac{5}{3}$.

*Trên là cách ta áp dụng BĐT cổ điển đi tìm lời giải cho bài toán. Nếu ta vận dụng kết quả của bài toán mở đầu, ta sẽ có được nhiều lời giải khác nhau (không hẳn sẽ ngắn hơn) cho bài toán, qua đó cho ta nhiều góc nhìn hơn.*

***Cách 2.*** Tương tự như cách 1, ta có:

$$P\ge\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2x^2y^2+x^2+y^2}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4y^4}{2}+1}}.$$

Ta dễ thấy rằng hàm số

$$f(a)=\frac{a^2}{2x^2y^2+a},\ (a>0)$$

là hàm số tăng và

$$x^2+y^2\ge\sqrt{x^2y^2}+\sqrt{\frac{x^4+y^4}{2}}=\sqrt{x^2y^2}+\frac{x^2y^2}{2}.$$

Vậy nên:

$$P\ge\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2x^2y^2+x^2+y^2}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4y^4}{2}+1}}$$

$$\ge\frac{\left(\sqrt{t}+\frac{t}{2}\right)^2}{2t+\sqrt{t}+\frac{t}{2}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{2}+1}}=\frac{\left(2\sqrt{t}+t\right)^2}{10t+4\sqrt{t}}+\sqrt{\frac{2}{t^2+2}}.$$

với chú ý $t\ge4$ bạn đọc có thể sử dụng BĐT Cauchy (tách ghép khéo léo như cách 1) hoặc dùng công cụ đạo hàm để tìm GTNN của $P$.

***Cách 3.*** Ta có:

$$P+2=\left(x^2+y^2+1\right)\left(\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{x^4+y^4+1}}$$

$$\overset{\text{Schwarz}}{\ge}\frac{4\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2+y^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^4+y^4+1}}$$

$$=4-\frac{4}{x^2+y^2+2}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4y^4}{2}+1}}.$$

Theo kết quả bài toán mở đầu, ta có:

$$x^2+y^2\ge\sqrt{x^2y^2}+\sqrt{\frac{x^4+y^4}{2}}=\sqrt{x^2y^2}+\frac{x^2y^2}{2}$$

Vậy nên ta được:

$$P+2\ge4-\frac{4}{\sqrt{x^2y^2}+\frac{x^2y^2}{2}+2}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4y^4}{2}+1}}$$

$$=4-\frac{4}{\sqrt{t}+\frac{t}{2}+2}+\frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{2}+1}}.$$

*Đến đây, ngoài tách ghép để sử dụng Cauchy hoặc dùng công cụ đạo hàm để tìm GTNN, ta còn có thể sử dụng phép biến đổi tương đương khi mà có thể dự đoán được GTNN.*

Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{2}+1}}=\frac{6}{2\sqrt{9.\left(\frac{t^2}{2}+1\right)}}\ge\frac{6}{\frac{t^2}{2}+10}=\frac{12}{t^2+20}.$$

Như vậy, ta được: $P\ge2-\frac{4}{\sqrt{t}+\frac{t}{2}+2}+\frac{12}{t^2+20}$.

Ta lại có: $2-\frac{4}{\sqrt{t}+\frac{t}{2}+2}+\frac{12}{t^2+20}-\frac{5}{3}=$

$$=\frac{\left(\sqrt{t}-2\right)\left(\sqrt{t^5}+4t^2+8\sqrt{t}+128-12\sqrt{t^3}-24t\right)}{3\left(\sqrt{t}+\frac{t}{2}+2\right)\left(t^2+20\right)}\ge0.$$

BĐT cuối hiển nhiên vì $t\ge4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2=y^2=2$, tức $\min P=\frac{5}{3}$.

*Như vậy, việc kết hợp một BĐT phụ nào đó không nhất thiết là chìa khóa cho lời giải mà có thể nó góp phần làm cho đa dạng, đặc sắc hơn ở mỗi ý tưởng giải.*

*Tiếp theo, ta đến với các BĐT nhiều hơn 2 biến.*

**Thí dụ 6. (HSG lớp 10 – KHTN)** *Với $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+3\sqrt{6}\le\sqrt{8}abc.$$

***Lời giải.*** Ta thay giả thiết bài toán vào BĐT, ta cần chứng minh:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+3\sqrt{6}\le2\sqrt{2}(a+b+c).$$

Áp dụng kết quả bài toán mở đầu, ta có:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\le a+b$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2ab}\le\sqrt{2}(a+b).$$

Tương tự cho hai số hạng còn lại, cộng theo vế ta được:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+$$
$$+\sqrt{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\le2\sqrt{2}(a+b+c).$$

Bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được rằng: $3\sqrt{6}\le\sqrt{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\ge 3\sqrt{3}.$$

Thật vậy, theo BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{cases} abc=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc} \\ \left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)^2\ge\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)^2\ge 27.$$

Bài toán được giải quyết.

**Thí dụ 7. (Toán Tuổi thơ)** *Với $x,y,z>0$ thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng:*

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}\le\sqrt{2}(x+y+z).$$

***Lời giải.*** Ta có:

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}+\sqrt{x}\le x+1\Rightarrow\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x}\le\sqrt{2}(x+1).$$

Làm tương tự cho hai số hạng còn lại, cộng theo vế ta được:

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}+$$
$$+\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\le\sqrt{2}(x+y+z+3).$$

Hơn nữa, theo giả thiết ta có:

$$3=3\sqrt[6]{xyz}\le\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Như vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

**Thí dụ 8. (Crux Mathematicorum)** *Với $a,b,c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{a^2+ac}+\sqrt{b^2+ba}+\sqrt{c^2+cb}\le\sqrt{2}(a+b+c).$$

***Lời giải.*** Áp dụng bài toán kết quả mở đầu ta có:

$$\sqrt{\frac{a^2+ac}{2}}+\sqrt{\frac{a^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{a(a+c)}{2}}+\sqrt{\frac{a^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{2}}\le a+\frac{a+c}{2}.$$

Làm tương tự cho hai căn thức còn lại rồi cộng theo vế ta được:

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^2+ac}+\sum_{cyc}\sqrt{a^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}\le 2\sqrt{2}(a+b+c).$$

Bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được rằng:

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}\ge\sqrt{2}(a+b+c).$$

BĐT trên dễ dàng được chứng minh dựa trên đánh giá (tương tự cho hai căn thức còn lại):

$$\sqrt{a^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a+\frac{a+c}{2}\right).$$

Bài toán được giải quyết.

***Nhận xét.*** *Bài toán trên có thể giải đơn giản bằng BĐT Cauchy hoặc BĐT Schwarz. Lời giải trên một mặt cho thấy ứng dụng của bài toán mở đầu, mặt khác ta thu được một kết quả khác chặt hơn:*

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^2+ac}+\frac{1}{2}\sum_{cyc}\sqrt{5a^2+2ac+c^2}\le 2\sqrt{2}(a+b+c).$$

**Thí dụ 9. (Chọn đội dự thi VMO – Bắc Giang năm học 2017 - 2018)** *Với $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+3$$
$$\le\sqrt{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right).$$

***Lời giải.*** Áp dụng kết quả bài toán mở đầu, ta có:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}\le\sqrt{2(a+b)}.$$

Tương tự cho hai số hạng còn lại, ta cần chứng minh:

$$\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{2ca}{c+a}}\ge 3$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2abc}\left(\sqrt{\frac{1}{ac+bc}}+\sqrt{\frac{1}{ba+ca}}+\sqrt{\frac{1}{cb+ab}}\right)\ge 3.$$

Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\sqrt{\frac{1}{ac+bc}}+\sqrt{\frac{1}{ba+ca}}+\sqrt{\frac{1}{cb+ab}}$$
$$\ge 3\sqrt[6]{\frac{1}{(ac+bc)(ba+ca)(cb+ab)}}$$
$$\ge 3\sqrt[6]{\frac{1}{8a^3b^3c^3}}=3\sqrt{\frac{1}{2abc}}.$$

Từ đó bài toán được chứng minh.

*Kết lại bài viết, mời bạn đọc đến với 2 lời giải cho bài toán sau để thấy được việc áp dụng bổ đề để*

*có lời giải cho một bài toán, nó phụ thuộc hoàn toàn vào cách tư duy, khéo léo của người làm.*

**Thí dụ 10. (Revista Matematica Timisoara)** *Với $a,b,c$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng:*

$$3\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right) \geq 1+abc+a^2b^2c^2.$$

***Lời giải. Cách 1.*** Áp dụng kết quả bài toán mở đầu, ta có:

$$a^2+1 \geq \sqrt{a^2.1}+\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(a^2-a+1\right) \geq \sqrt{a^4+1}.$$

Tương tự cho $b$ và nhân theo vế, ta được:

$$2\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right) \geq \sqrt{\left(1+a^4\right)\left(1+b^4\right)} \geq 1+a^2b^2.$$

Như vậy, ta cần có:

$$3\left(1+a^2b^2\right)\left(1-c+c^2\right) \geq 2\left(1+abc+a^2b^2c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(3+a^2b^2\right)c^2-\left(3a^2b^2+2ab+3\right)c+1+3a^2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(3+a^2b^2\right)^2c^2-4\left(3+a^2b^2\right)\left(3a^2b^2+2ab+3\right)c +4\left(1+3a^2b^2\right)\left(3+a^2b^2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2\left(a^2b^2+3\right)c-\left(3a^2b^2+2ab+3\right)\right]^2+ +4\left(1+3a^2b^2\right)\left(3+a^2b^2\right)-\left(3a^2b^2+2ab+3\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2\left(a^2b^2+3\right)c-\left(3a^2b^2+2ab+3\right)\right]^2+3(ab-1)^4 \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

***Cách 2.*** Áp dụng kết quả bài toán mở đầu như cách 1, ta được

$$\sqrt{2}\left(a^2-a+1\right) \geq \sqrt{a^4+1}.$$

Với cách 1, ta chỉ áp dụng cho $a$, $b$ điều này làm cho các biểu thức trong vế trái không còn hình dáng tương tự nhau. Điều này ít nhiều làm cho đoạn chứng minh còn lại trở nên khó hơn về mặt tính toán. Một suy nghĩ khá tự nhiên lúc này là ta nên áp dụng kết quả ban đầu cho cả $a$, $b$, $c$, và hy vọng đánh giá này vẫn còn đủ mạnh để chứng minh bài toán. Ta có:

$$8\left[\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right)\right]^2 \geq \left(1+a^4\right)\left(1+b^4\right)\left(1+c^4\right).$$

Vậy nên, ta chỉ cần chứng minh:

$$9\left(1+a^4\right)\left(1+b^4\right)\left(1+c^4\right) \geq 8\left(1+abc+a^2b^2c^2\right)^2.$$

Ta sử dụng đánh giá:

$$9\left(a^4+1\right)^3 \geq 8\left(a^6+a^3+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^4\left(a^8+4a^7+10a^6+4a^5-2a^4+ +4a^3+10a^2+4a+1\right) \geq 0.$$

Ta được: $\left[9\left(1+a^4\right)\left(1+b^4\right)\left(1+c^4\right)\right]^3$

$$\geq 8^3\left[\left(a^6+a^3+1\right)\left(b^6+b^3+1\right)\left(c^6+c^3+1\right)\right]^2.$$

Theo BĐT Holder, ta được:

$$\left(a^6+a^3+1\right)\left(b^6+b^3+1\right)\left(c^6+c^3+1\right) \geq \left(a^2b^2c^2+abc+1\right)^3.$$

Từ đó bài toán được chứng minh.

***Nhận xét.*** *Với cách làm như trên, ta có lời giải cho bài toán sau: Với $a,b,c$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng:*

$$\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right)\left(d^2-d+1\right) \geq \left(\frac{1+abcd}{2}\right)^2.$$

**Gazeta Matematica**

**3. Kết luận.** Trên đây là một số bài toán áp dụng từ một bài toán nhỏ. Chắc hẳn sẽ còn rất nhiều ứng dụng khác, phần này người viết rất mong nhận trao đổi từ bạn đọc. Qua các bài toán trên, người viết mong muốn (với bạn đọc là học sinh) hãy nghiền ngẫm thật lâu, kỹ cho mỗi bài toán mình làm. Qua đó thấy được những ý tưởng ẩn chứa sau lưng nó (sẽ có nhiều điều hay để học và nhiều điều chưa hay để rút kinh nghiệm) và hơn thế là biến kiến thức bài toán mang đến trở thành kiến thức của bản thân có thể áp dụng. Có như vậy con đường học toán mới mang nhiều niềm vui hơn.


# TÍNH CHẤT TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM BẬC BA, HÀM TRÙNG PHƯƠNG

**LÊ XUÂN VINH**
*(Thị trấn Diên Khánh, Khánh Hòa)*

Trong chương trình Toán THPT hiện hành chúng ta đã biết đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số. Tuy nhiên trong khung chương trình, các tính chất của tiếp tuyến chưa được đề cập sâu. Trong bài viết này chúng tôi nêu các tính chất đặc biệt của tiếp tuyến của đồ thị hàm bậc ba và hàm trùng phương.

**1. Tính chất 1**

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ có đồ thị $(C)$. $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc $(C)$. Khi đó:

*Trường hợp* 1: Với $b^2 - 3ac \leq 0$ thì không có hai tiếp tuyến nào của $(C)$ vuông góc với nhau.

*Trường hợp* 2: Với $b^2 - 3ac > 0$. Đặt

$$A = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac + \frac{9a^2}{b^2 - 3ac}}}{3a};\ B = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a};$$

$$C = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a};$$

$$D = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac + \frac{9a^2}{b^2 - 3ac}}}{3a}.$$

- Nếu $x_0 \in (-\infty; A) \cup (B; C) \cup (D; +\infty)$ thì có đúng hai tiếp tuyến của $(C)$ vuông góc với tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(x_0; y_0)$.
- Nếu $x_0 \in \{A; D\}$ thì có đúng một tiếp tuyến của $(C)$ vuông góc với tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(x_0; y_0)$.
- Nếu $x_0 \in (A; B] \cup [C; D)$ thì không có tiếp tuyến nào của $(C)$ vuông góc với tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(x_0; y_0)$.

*Chứng minh.* Xét hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$. Ta xét trong trường hợp $a > 0$, trường hợp $a < 0$ được thực hiện tương tự và kết quả cũng như trường hợp $a > 0$, chỉ có điều khi đó $A$ và $D$; $B$ và $C$ đổi giá trị cho nhau. Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

*Trường hợp* 1: Với $b^2 - 3ac \leq 0$, khi đó

$$a.f'(x) \geq 0 \text{ với mọi số thực } x.$$

Suy ra: $f'(x_1).f'(x_2) \geq 0, \forall x_1, x_2$

$\Rightarrow f'(x_1).f'(x_2) \neq -1, \forall x_1, x_2$. Do đó, không có hai tiếp tuyến nào của $(C)$ vuông góc nhau.

*Trường hợp* 2: Với $b^2 - 3ac > 0$. Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ thuộc $(C)$. Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M_1$, $M_2$ vuông góc nhau khi $f'(x_1).f'(x_2) = -1$

$\Leftrightarrow (3ax_1^2 + 2bx_1 + c)(3ax_2^2 + 2bx_2 + c) = -1$ (1).

Đặt $\alpha = 3ax_2^2 + 2bx_2 + c$. Khi đó,

$$(1) \Leftrightarrow 3a\alpha x_1^2 + 2b\alpha x_1 + c\alpha + 1 = 0 \quad (2).$$

➢ Xét $\alpha = 0$. Ta có:

$3ax_2^2 + 2bx_2 + c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = B \\ x_2 = C \end{array}\right.$. Khi đó, phương trình (2) vô nghiệm. Do đó, không có tiếp tuyến nào của $(C)$ vuông góc với tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có hoành độ $B$ và $C$.

➢ Xét $\alpha \neq 0$. Từ (2), ta có:

$$\Delta' = (b^2 - 3ac)\alpha^2 - 3a\alpha.$$

• Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình (2) chỉ có nghiệm kép $x_1 = -\frac{b}{3a}$.

$$\Delta' = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3a}{b^2 - 3ac}$$

$$\Leftrightarrow 3ax_2^2+2bx_2+c-\frac{3a}{b^2-3ac}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2=A \\ x_2=D \end{array}\right..$$

Như vậy, ứng với $x_2=A$ hoặc $x_2=D$, phương trình $(2)$ chỉ có nghiệm kép $x_1=-\frac{b}{3a}$. Do đó, trên $(C)$ có duy nhất một tiếp tuyến vuông góc với tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có hoành độ $A$ và $D$ (đó chính là tiếp tuyến tại điểm uốn).

• Nếu $\Delta'<0$ thì phương trình $(2)$ vô nghiệm.

Ta có: $(b^2-3ac)\alpha^2-3a\alpha<0 \Leftrightarrow 0<\alpha<\frac{3a}{b^2-3ac}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3ax_2^2+2bx_2+c>0 \\ 3ax_2^2+2bx_2+c-\frac{3a}{b^2-3ac}<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_2<B \\ x_2>C \end{array}\right. \\ A<x_2<D \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A<x_2<B \\ C<x_2<D \end{array}\right..$$

Như vậy, ứng với $x_2$ thỏa mãn $x_2\in(A;B)\cup(C;D)$ thì phương trình $(2)$ vô nghiệm. Do đó, không có tiếp tuyến nào của $(C)$ vuông góc với tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có hoành độ $x_0$ thỏa mãn $x_0\in(A;B)\cup(C;D)$.

• Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có: $(b^2-3ac)\alpha^2-3a\alpha>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha<0 \\ \alpha>\frac{3a}{b^2-3ac} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3ax_2^2+2bx_2+c<0 \\ 3ax_2^2+2bx_2+c-\frac{3a}{b^2-3ac}>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B<x_2<C \\ x_2<A \\ x_2>D \end{array}\right..$$

Như vậy, ứng với $x_2$ thỏa mãn $x_2\in(-\infty;A)\cup(B;C)\cup(D;+\infty)$ thì phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt. Do đó, trên $(C)$ có hai tiếp tuyến vuông góc với tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có hoành độ $x_0$ thỏa $x_0\in(-\infty;A)\cup(B;C)\cup(D;+\infty)$.

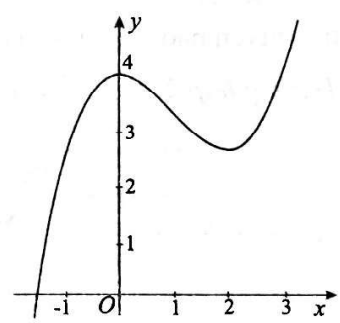
***Nhận xét.*** Ngoài ra, ta còn có các tính chất sau:

- Với $x_0\in(-\infty;A)\cup(D;+\infty)$ thì có hai tiếp tuyến của $(C)$ tại các tiếp điểm $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ vuông góc với tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(x_0;y_0)$. Hơn nữa $x_1, x_2\in(B;C)$ và $M_1, M_2$ đối xứng nhau qua điểm uốn $U\left(-\frac{b}{3a};f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$.

- Với $x_0\in(B;C)$ thì có hai tiếp tuyến của $(C)$ tại các tiếp điểm $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ vuông góc với tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(x_0;y_0)$. Hơn nữa $x_1, x_2\in(-\infty;A)\cup(D;+\infty)$ và $M_1, M_2$ đối xứng nhau qua điểm uốn $U\left(-\frac{b}{3a};f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$.

- $x=B$, $x=C$ là các điểm cực trị của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Các kết quả trên không khó để bạn đọc chứng minh.

**Thí dụ 1.** Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-x^2+4$ có đồ thị $(C)$ như hình vẽ. Ta có:




$A=1-\sqrt{2}$, $B=0$, $C=2$, $D=1+\sqrt{2}$.

Áp dụng tính chất 1, ta có các kết quả sau:

• Tiếp tuyến của $(C)$ tại những điểm có hoành độ $x$ thỏa mãn: $x\in(-\infty;1-\sqrt{2})\cup(0;2)\cup(1+\sqrt{2};+\infty)$ luôn vuông góc với đúng hai tiếp tuyến của $(C)$ và tiếp điểm của hai tiếp tuyến này đối xứng nhau qua điểm uốn $U\left(1;\frac{10}{3}\right)$.

• Tiếp tuyến của $(C)$ tại những điểm có hoành độ $x$ thỏa mãn $x\in(1-\sqrt{2};0]\cup[2;1+\sqrt{2})$ không vuông góc với bất kì tiếp tuyến nào của $(C)$.

• Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M_1\left(1-\sqrt{2};\frac{10+\sqrt{2}}{3}\right)$ và

$M_2\left(1+\sqrt{2};\frac{10-\sqrt{2}}{3}\right)$ vuông góc với đúng một tiếp tuyến của $(C)$, đó là tiếp tuyến tại $U\left(1;\frac{10}{3}\right)$.

**2. Tính chất 2**

Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị $(C)$. $M(x_0;y_o)$ là điểm thuộc $(C)$. Khi đó:

*Trường hợp* 1: Với $ab\geq 0$ thì không có tiếp tuyến nào của $(C)$ song song với tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(x_0;y_0)$.

*Trường hợp* 2: Với $ab<0$. Đặt:

$$A=\sqrt{-\frac{b}{6a}};\ B=\sqrt{-\frac{b}{2a}}.$$

- Nếu $x_0\in(-\infty;-2A)\cup(2A;+\infty)$ thì không có tiếp tuyến nào của $(C)$ song song với tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(x_0;y_0)$.
- Nếu $x_0\in\{-2A;-B;-A;0;A;B;2A\}$ thì có đúng một tiếp tuyến của $(C)$ song song với tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(x_0;y_0)$.
- Nếu $x_0\in(-2A;2A)\setminus\{-B;-A;0;A;B\}$ thì có đúng hai tiếp tuyến của $(C)$ song song với tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(x_0;y_0)$.

***Chứng minh.*** Xét hàm số:

$y=f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$. Ta xét trong trường hợp $a>0$, trường hợp $a<0$ được thực hiện tương tự và kết quả cũng như trường hợp $a>0$.

Ta có: $f'(x)=4ax^3+2bx$.

$M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc $(C)$. Tiếp tuyến của $(C)$ tại $M_1$, $M_2$ song song với nhau khi

$f'(x_1)=f'(x_2)\Leftrightarrow 4ax_1^3+2bx_1=4ax_2^3+2bx_2$

$\Leftrightarrow(x_1-x_2)(2ax_1^2+2ax_1x_2+2ax_2^2+b)=0$

$\Leftrightarrow 2ax_1^2+2ax_2.x_1+2ax_2^2+b=0$ (1).

Từ (1) ta có $\Delta'=-3a^2x_2^2-2ab$

*Trường hợp* 1:

- Nếu $b=0$ thì (1) vô nghiệm khi $x_2\neq 0$. Do đó, không có tiếp tuyến nào của $(C)$ song song với nhau. Nếu $x_2=0$ thì $x_1=0$, do đó $M_1\equiv M_2$, không xảy ra do $M_1\neq M_2$.
- Nếu $b<0$ thì $\Delta'<0$ nên (1) vô nghiệm. Do đó, không có tiếp tuyến nào của $(C)$ song song với nhau.

Do đó, với $ab\geq 0$ thì không có tiếp tuyến nào của $(C)$ song song với tiếp tuyến của $(C)$ tại $M(x_0;y_0)$.

*Trường hợp* 2: Với $ab<0$.

- Nếu $\Delta'<0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

Ta có $\Delta'<0\Leftrightarrow -3a^2x_2^2-2ab<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_2<-2A\\x_2>2A\end{array}\right.$.

Như vậy, ứng với $x_2\in(-\infty;-2A)\cup(2A;+\infty)$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Do đó, không có tiếp tuyến nào của $(C)$ song song với tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có hoành độ $x_0$ thỏa $x_0\in(-\infty;-2A)\cup(2A;+\infty)$.

- Nếu $\Delta'=0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1=-\frac{x_2}{2}$.

Ta có: $\Delta'=0\Leftrightarrow -3a^2x_2^2-2ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_2=-2A\\x_2=2A.\end{array}\right.$

Với $x_2=-2A\Rightarrow x_1=A$; $x_2=2A\Rightarrow x_1=-A$.

Như vậy, ứng với $x_2\in\{-2A;2A\}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x_1\in\{A;-A\}$. Do đó, có đúng một tiếp tuyến của $(C)$ song song với tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có hoành độ $x_0$ thỏa $x_0\in\{-2A;-A;A;2A\}$.

- Nếu $\Delta'>0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Ta có: $\Delta'>0\Leftrightarrow -3a^2x_2^2-2ab>0$

$\Leftrightarrow -2A<x_2<2A.$

Như vậy, ứng với $x_2\in(-2A;2A)$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

- Xét $x_2=-B$. Khi đó (1) có hai nghiệm $x_1=0$ hoặc $x_1=B$.

Vì $x=-B$ và $x=B$ là các điểm cực tiểu của hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a>0)$ nên hai tiếp

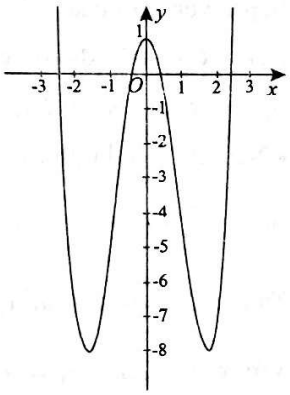
tuyến của $(C)$ tại $x_2=-B$ và $x_1=B$ trùng nhau. Do đó, có đúng một tiếp tuyến của $(C)$ song song với tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có hoành độ $x_0=-B$.

- Xét tương tự với $x_2=-B$ hoặc $x_2=0$ ta được kết quả tương tự.

Như vậy, có đúng hai tiếp tuyến của $(C)$ song song với tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có hoành độ $x_0$ thỏa $x_0\in(-2A;2A)\setminus\{-B;0;B\}$.

***Nhận xét.*** Ba tiếp tuyến của $(C)$ tại các điểm có hoành độ $x_1, x_2, x_3$ song song nhau thì $x_1+x_2+x_3=0$.

**Thí dụ 2.** Cho hàm số $y=x^4-6x^2+1$ có đồ thị $(C)$ như hình vẽ.




Ta có: $A=1$, $B=\sqrt{3}$.

Áp dụng tính chất 2, ta có các kết quả sau:

- Tiếp tuyến của $(C)$ tại những điểm có hoành độ $x$ thỏa $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ không song song với bất kì tiếp tuyến nào khác của $(C)$.
- Tiếp tuyến của $(C)$ tại những điểm có hoành độ $x$ thỏa $x\in(-2;2)\setminus\{\pm\sqrt{3};\pm1;0\}$ song song với đúng hai tiếp tuyến của $(C)$.
- Tiếp tuyến của $(C)$ tại những điểm có hoành độ $x$ thỏa $x\in\{\pm2;\pm\sqrt{3};\pm1;0\}$ song song với đúng một tiếp tuyến của $(C)$.

### 3. Một số bài toán

Để vận dụng các tính chất trên, trong mục này chúng tôi đưa vào một số bài toán kèm hướng giải.

**Bài toán 1.** *Cho hàm số:* $y=f(x)=-x^3+x^2+x+2$ *có đồ thị* $(C)$. $P(\alpha;f(\alpha))$, $Q(\beta;f(\beta))$ *(với* $\alpha<\beta$*) là hai điểm thuộc* $(C)$ *mà với mọi điểm* $M$ *thuộc* $(C)$ *thỏa mãn* $\alpha<x_M<\beta$ *thì tiếp tuyến của* $(C)$ *tại* $M$ *không vuông góc với bất kỳ tiếp tuyến nào của* $(C)$. *Tìm giá trị lớn nhất của* $\beta-\alpha$.

***Lời giải.*** Ta có: $A=-\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=1$, $D=\frac{7}{6}$.

Vì tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ không vuông góc với bất kỳ tiếp tuyến nào của $(C)$ nên theo tính chất 1, ta có: $A\le\alpha<x_M<\beta\le B$ hoặc $C\le\alpha<x_M<\beta\le D$. Do đó, $-\frac{1}{2}\le\alpha<\beta\le-\frac{1}{3}$ hoặc $1\le\alpha<\beta\le\frac{7}{6}$. Suy ra, $(\beta-\alpha)_{max}=\frac{1}{6}$ khi $(\alpha;\beta)=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$ hoặc $(\alpha;\beta)=\left(1;\frac{7}{6}\right)$.

**Bài toán 2.** *Cho hàm số* $y=f(x)=x^4-2x^2+3$ *có đồ thị* $(C)$ $P(\alpha;f(\alpha))$, $Q(\beta;f(\beta))$ *(với* $\alpha<\beta$*) là hai điểm thuộc* $(C)$ *mà tiếp tuyến của* $(C)$ *tại* $P$, $Q$ *song song với đúng một tiếp tuyến của* $(C)$ *Tìm giá trị nhỏ nhất của* $\beta-\alpha$.

***Lời giải.*** Ta có: $A=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $B=1$. Vì tiếp tuyến của $(C)$ tại $P$, $Q$ song song với đúng một tiếp tuyến của $(C)$ nên theo tính chất 2, ta có: $\alpha,\beta\in\{\pm2A;\pm A;\pm B;0\}$. Do đó, $\alpha,\beta\in\left\{\pm\frac{2\sqrt{3}}{3};\pm\frac{\sqrt{3}}{3};\pm1;0\right\}$. Suy ra, $(\beta-\alpha)_{min}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ khi $(\alpha;\beta)=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-1\right)$ hoặc $(\alpha;\beta)=\left(1;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

**Sau đây là một số bài toán để bạn đọc luyện tập**

**Bài toán 3.** Cho hàm số $y=-\frac{x^4}{4}+8x^2+1$ có đồ thị $(C)$. Tìm tọa độ hai điểm $M$, $N$ thuộc $(C)$ thỏa mãn tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$, $N$ song song với đúng một tiếp tuyến của $(C)$ đồng thời khoảng cách giữa hai điểm $M$, $N$ ngắn nhất.

☞

**Bài toán 4.** Cho hàm số: $y=f(x)=-\frac{1}{3}x^3-2x^2+1$ có đồ thị $(C)$. $P$, $Q$ là hai điểm trên $(C)$ (với $x_P<x_Q$) thỏa mãn mọi điểm $M$ thuộc $(C)$ mà $x_P<x_M<x_Q$ thì không tồn tại điểm $N$ nào thuộc đồ thị $(C)$ để tiếp tuyến tại $N$ vuông góc với tiếp tuyến tại $M$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(x_P)-f(x_Q)$.

**Bài toán 5.** Cho hàm số $y=f(x)=x^4-3x^2+2$ có đồ thị $(C)$. $x_1$, $x_2$, $x_3$ là hoành độ ba điểm trên $(C)$ thỏa mãn $x_1x_2x_3=\frac{1}{8}$ và tiếp tuyến của $(C)$ tại ba điểm đó song song với nhau. Tìm $f'(x_1)$.

**Bài toán 6.** Cho hàm số $y=x^4-3x^2$ có đồ thị $(C)$. $x_1$, $x_2$, $x_3$ là hoành độ ba điểm trên $(C)$ mà tiếp tuyến của $(C)$ tại ba điểm đó cùng song song với đường thẳng $2x+y+1=0$. Tính giá trị biểu thức $E=x_1x_2x_3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$.

**Bài toán 7.** $x_1$, $x_2$ là hoành độ hai điểm trên đồ thị hàm số $y=-2x^4+\frac{x^2}{2}+1$ và nằm về cùng một phía đối với trục tung mà tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại hai điểm đó vuông góc nhau. Tìm trị nhỏ nhất của $|x_1-x_2|$.

**Bài toán 8.** $x_1$, $x_2$ là hoành độ hai điểm trên đồ thị hàm số $y=2x^4$ mà tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại hai điểm đó vuông góc nhau. Tìm trị nhỏ nhất của $|x_1-x_2|$.

**Bài toán 9.** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+4$ có đồ thị $(C)$. $P$, $Q$ là hai điểm trên $(C)$ (với $x_P<x_Q$) sao mọi điểm $M$ thuộc $(C)$ mà $x_P<x_M<x_Q$ thì không có tiếp tuyến nào của $(C)$ vuông góc với tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$. Tìm giá trị lớn nhất của $x_P-x_Q$.

## PROBLEMS

(Tiếp theo trang 22)

with the coefficients satisfying:

1) $a_{ii}>0, \forall i=\overline{1,n}$;

2) $a_{ij}<0, \forall i\neq j, \forall i,j=\overline{1,n}$;

3) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}>0, \forall i=\overline{1,n}$.

Prove the system of equation has unique solution $x_1=x_2=...=x_n=0$.

**Problem T8/514.** Given a circle $O$ and a point $M$ outside the circle. Draw a secant $MAB$ ($A$ is in between $M$ and $B$). The tangents at $A$ and $B$ intersect at $C$. Draw $CD$ perpendicular to $MO$; $DE$ perpendicular to $CA$; and $DF$ perpendicular to $CB$. Show that the line $EF$ always passes through a fixed point when the secant $MAB$ varies.

**Problem T9/514.** Given positive numbers $x$, $y$ satisfying $x<\sqrt{2}y$, $x\sqrt{y^2-\frac{x^2}{2}}=2\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}+x$.

Find the minimum value of the expression

$$P=x^2\sqrt{y^2-\frac{x^2}{2}}.$$

**Problem T10/514.** Let $S=1!2!...100!$. Show that there exists an interger $k$, $1\le k\le 100$, so that $\frac{S}{k!}$ is a perfect square. Is such $k$ unique?

(Notice that $n!=1.2.3...n$ with $n\in\mathbb{N}^*$ and $0!:=1$).

**Problem T11/514.** Given a non-constant function $f(x)$ which is determined on $\mathbb{R}$. Show that there always exist a real number $a$, a non-empty proper subset $A$ and two functions $g(x), h(x)$ satisfying $g(x)\ge a, \forall x\in A$ and $h(x)<a, \forall x\in\overline{A}$ ($\overline{A}=\mathbb{R}\setminus A$) so that $f(x)=g(x)+h(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

**Problem T12/514.** Given an acute triangle $ABC$. Two points $M$, $N$ are inside the side $BC$ such that $BM=CN$. The line which passes through $M$ and is perpendicular to $CA$ intersects $AB$ at $F$. The line which passes through $N$ and is perpendicular to $AB$ intersects $AC$ at $E$. Two lines $MF$ and $NE$ intersect at $P$. On the circumcircle of $PEF$ choose $Q$ so that $PQ \parallel BC$. Let $R$ be the reflection point of $Q$ in the midpoint of $BC$. Show that $AR\perp BC$.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
*(College of Science Vietnam National University, Hanoi)*

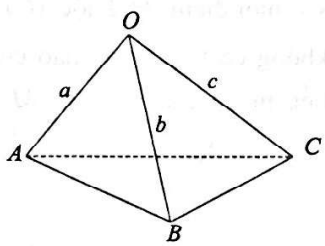
# NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

**BÀI TOÁN 35.** *Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn $ABC$ ta có:*

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2 \le \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C.$$

***Lời giải.*** *Cách* **1.** (*Phương pháp tam diện vuông*)

Xét tam diện vuông $OABC$ có $OA, OB, OC$ đôi một vuông góc và $OA=a$, $OB=b, OC=c$.




Ta có:

$$AB=\sqrt{a^2+b^2};\ BC=\sqrt{b^2+c^2};\ CA=\sqrt{c^2+a^2}.$$

Áp dụng định lý côsin cho $\Delta ABC$ ta có:

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\frac{a^2+b^2+a^2+c^2-b^2-c^2}{2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$$

$$=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}.$$ Tương tự, ta có:

$$\cos B=\frac{b^2}{\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}};\ \cos C=\frac{c^2}{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}}.$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}},$$ tương tự:

$$\sin B=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(b^2+a^2)(b^2+c^2)}};\ \sin C=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}}.$$

BĐT tương đương với:

$$\left[\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}}\right]^2$$

$$\le(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\left[\frac{1}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+\frac{1}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}+\frac{1}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}\right]$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2\sqrt{b^2+c^2}+b^2\sqrt{c^2+a^2}+c^2\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$
$$\le 2(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow\left(a\sqrt{a^2b^2+a^2c^2}+b\sqrt{b^2c^2+b^2a^2}+c\sqrt{c^2a^2+c^2b^2}\right)^2$$
$$\le 2(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$VT\le(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+b^2a^2+c^2a^2+c^2b^2)$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Dấu bằng xảy ra khi tam giác $ABC$ đều.

*Cách* **2.** (*Phương pháp đưa về ba cạnh của tam giác*) Với $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, ta có:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

BĐT $\Leftrightarrow 2\cos A\cos B+2\cos B\cos C+2\cos C\cos A$
$$\le 1+4\cos A\cos B\cos C$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2b^2ca}$$
$$\le 1+\frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{2a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}ca(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$$
$$\le -a^6-b^6-c^6+a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$ab(c^2+a^2-b^2)(c^2+b^2-a^2)\le\frac{(a^2+b^2)(c^4-a^4-b^4+2a^2b^2)}{2}$$
$$=\frac{a^2b^4+a^2c^4+b^2c^4+b^2a^4-a^6-b^6}{2};$$

$$bc\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\le\frac{\left(b^2+c^2\right)\left(a^4-b^4-c^4+2b^2c^2\right)}{2}$$
$$=\frac{b^2a^4+b^2c^4+c^2a^4+c^2b^4-b^6-c^6}{2};$$
$$ca\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(b^2+a^2-c^2\right)\le\frac{\left(c^2+a^2\right)\left(b^4-c^4-a^4+2c^2a^2\right)}{2}$$
$$=\frac{c^2a^4+c^2b^4+a^2b^4+a^2c^4-c^6-a^6}{2}.$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có đpcm.

*Cách* 3. (*Phương pháp chứng minh trực tiếp*)

BĐT $\Leftrightarrow \cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A$
$$\le\frac{1}{2}+2\cos A\cos B\cos C.$$

Trong ba số $\cos A-\frac{1}{2};\cos B-\frac{1}{2};\cos C-\frac{1}{2}$ luôn tồn tại hai số có tích không âm, không mất tính tổng quát giả sử: $\left(\cos A-\frac{1}{2}\right)\left(\cos B-\frac{1}{2}\right)\ge 0$

$$\Leftrightarrow \cos A\cos B-\frac{1}{2}\cos A-\frac{1}{2}\cos B+\frac{1}{4}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \cos A\cos B+\frac{1}{4}\ge\frac{1}{2}(\cos A+\cos B)$$
$$\Leftrightarrow 2\cos A\cos B+\frac{1}{2}\ge\cos A+\cos B$$
$$\Leftrightarrow 2\cos A\cos B\cos C+\frac{1}{2}\cos C\ge\cos A\cos C+\cos B\cos C \quad (1)$$

Mặt khác:
$$1=2\cos A\cos B\cos C+\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$$
$$\ge 2\cos A\cos B\cos C+2\cos A\cos B+\cos^2 C$$
$$\Leftrightarrow (1+\cos C)(2\cos A\cos B+\cos C-1)\le 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos A\cos B+\cos C-1\le 0\Leftrightarrow 1-\cos C\ge 2\cos A\cos B$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos C\ge\cos A\cos B \quad (2).$$

Cộng theo vế các BĐT (1) và (2) ta có đpcm.

*Cách* 4. (*Phương pháp đại số*) Ta có:
$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$$
và đẳng thức
$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}+\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1.$$

Do đó

Đặt $\cos A=\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}$, $\cos B=\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}}$,

$\cos C=\sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}}$ $(a,b,c>0)$.

BĐT $\Leftrightarrow \frac{2a}{b+c}\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}+\frac{2b}{c+a}\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}}$
$$+\frac{2c}{a+b}\sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}}\le 1+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$\Leftrightarrow 2a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}+2b\sqrt{ca(b+c)(b+a)}$$
$$+2c\sqrt{ab(c+a)(c+b)}\le(a+b)(b+c)(c+a)+4abc.$$

Ta có: $\text{VT}=2a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}+2b\sqrt{ca(b+c)(b+a)}$
$$+2c\sqrt{ab(c+a)(c+b)}$$
$$\le a(ab+ba+2bc)+b(ab+bc+2ca)+c(2ab+bc+ca)$$
$$=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+6abc$$
$$=(a+b)(b+c)(c+a)+4abc \text{ (đpcm).}$$

*Cách* 5. (*Phương pháp dồn biến*)

Ta chứng minh BĐT:
$$\cos A\cos B+\cos B.\cos C+\cos C.\cos A\le\frac{1}{2}+2\cos A\cos B.\cos C.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử
$$A\ge B\ge C\Rightarrow A\ge\frac{\pi}{3}\Rightarrow 0<\cos A\le\frac{1}{2} \text{ và } \frac{1}{2}\le\sin\frac{A}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Xét: $f(A,B,C)=2\cos A\cos B+$
$$+2\cos B\cos C+2\cos C\cos A-1-4\cos A\cos B\cos C.$$
$$f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=4\cos A.\sin\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}-1-4\cos A.\sin^2\frac{A}{2}.$$
$$f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=2\cos A\left(\cos B+\cos C-2\sin\frac{A}{2}\right)$$
$$+2\cos A\left(2\sin^2\frac{A}{2}-2\cos B\cos C\right)+2\cos B\cos C-2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=4\cos A\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-1\right)$$
$$+2\cos A\left[1-\cos A+\cos A-\cos(B-C)\right]$$
$$+\left[-\cos A+\cos(B-C)-1+\cos A\right]$$
$$=4\cos A\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-1\right]+2\cos A\left[1-\cos(B-C)\right]$$
$$-\left[1-\cos(B-C)\right].$$
$$=4\cos A\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-1\right]+\left[1-\cos(B-C)\right](2\cos A-1)\le 0,$$

Bây giờ ta chứng minh

$$f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=4\cos A\sin\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}-$$
$$-1-4\cos A\sin^2\frac{A}{2}\le 0.$$

Thật vậy: BĐT $\Leftrightarrow 4\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)\sin\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}$

$$-1-4\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)\sin^2\frac{A}{2}\le 0.$$

Đặt $t=\sin\frac{A}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\le t<\frac{\sqrt{2}}{2}$ và ta có:

$$4\left(1-2t^2\right)t+2t^2-1-4\left(1-2t^2\right)t^2\le 0$$
$$\Leftrightarrow 8t^4-8t^3-2t^2+4t-1\le 0$$
$$\Leftrightarrow 8t^4-4t^3-4t^3+2t^2-4t^2+2t+2t-1\le 0$$
$$\Leftrightarrow (2t-1)^2\left(2t^2-1\right)\le 0 \text{ (đúng vì } t<\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

**PHẠM DUY KHÁNH**
*(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)*

***Nhận xét.*** Ngoài 5 cách giải của bạn *Phạm Duy Khánh*, GV THPT Quỳ Châu, **Nghệ An**, người đề xuất bài toán, Tòa soạn Tạp chí TH&TT không nhận được thêm lời giải nào cho bài toán này.

**LÊ MAI**

Mời các bạn gửi lời giải **BÀI TOÁN 37** dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.5.2020.

**BÀI TOÁN 37.** *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=2.$$

**BÙI TRUNG HIẾU**
*(GV THPT Trần Hưng Đạo, Tứ Kỳ, Hải Dương)*

## GIẢI ĐÁP ĐỐ VUI T7.2019.

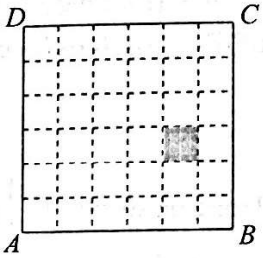
### Phân chia hình vuông khuyết thành các phần bằng nhau

***Đề bài.*** Cho một hình vuông $ABCD$ với cạnh $AB = 6$cm và bị khuyết một ô vuông đơn vị như ở hình vẽ. Bạn hãy phân chia hình vuông $ABCD$ theo cạnh của các ô vuông đơn vị để được:

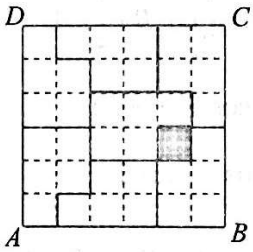
1) Bảy hình đa giác bằng nhau;

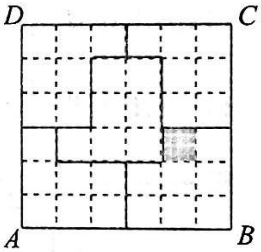
2) Năm hình đa giác bằng nhau.

Ta gọi hai hình đa giác là bằng nhau nếu di chuyển một hình đa giác này trên mặt phẳng hoặc lấy đối xứng qua một trục thì được hình đa giác kia.




***Lời giải.*** Ta có thể phân chia hình vuông khuyết $ABCD$ thành 7 và 5 hình đa giác bằng nhau như sau:




VIỆT HẢI (*Hà Nội*)

## ĐỐ VUI !

### NĂM CANH TÝ VÀ 2020

Bạn hãy thay mỗi chữ cái trong đẳng thức:

**CANH + TÝ = 2020**

bởi một chữ số thập phân khác 0 và 2 sao cho được đẳng thức đúng với điều kiện chữ cái khác nhau thì chữ số thập phân khác nhau. Bạn tìm được bao nhiêu đáp số ?

ĐAN QUỲNH (*Hà Nội*)

# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
# BÀI SỐ 55

***Problem.*** *Find the remainder when we divide $3^{2020}$ by 5.*

***Solution.*** Consider the following table

| | Remainders | | Remainders |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | $3^5$ | 3 |
| $3^2$ | 4 | $3^6$ | 4 |
| $3^3$ | 2 | $3^7$ | 2 |
| $3^4$ | 1 | $3^8$ | 1 |

From the above pattern we see that when we divide $3^4, 3^8, 3^{12},...$ by 5 we always get the remainder 1. Therefore the remainder when we divide $3^{2020}$ by 5 is 1.

**TỪ VỰNG**

*remainder* : *phần dư*
*divide* : *chia*
*pattern* : *quy luật*

(*Translated by* NGUYEN PHU HOANG LAN)
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

**********

# BÀI DỊCH SỐ 52

**Bài toán.** *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n!+2019$ là một số chính phương (trong đó n! là kí hiệu tích tất cả các số nguyên dương từ 1 đến n).*

***Lời giải.*** Với $n = 1, 2$ tương ứng có $n!+2019$ bằng 2020, 2021, chúng đều không phải là số chính phương.

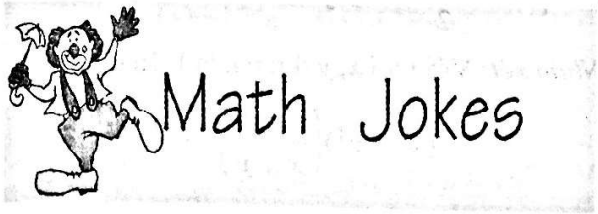
Với $n = 3$, ta có: $n!+2019 = 2025 = 45^2$.

Với $n \geq 4$ thì rõ ràng n! chia hết cho 4. Điều này chứng tỏ $n!+2019$ chia cho 4 dư 3 và do đó $n!+2019$ không thể là một số chính phương. Kết luận, nghiệm duy nhất của bài toán là $n = 3$.

**Chú thích.** Bài toán và lời giải được sưu tầm từ Kỳ thi IMSO 2019, tổ chức tại Hà Nội.

***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Hải Phòng:** *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng; **Thừa Thiên Huế:** *Đào Thị Khánh Nhi*, 10 Toán 1, *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, *Lê Nguyễn Quỳnh Anh*, 10 Toán 2, *Hoàng Bảo Minh Châu*, *Lê Thị Minh Thùy*, 11 Toán 1, *Nguyễn Ái Huyền Trang*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

**HỒ HẢI** (*Hà Nội*)




**********

**Theorem:** A cat has nine tails.

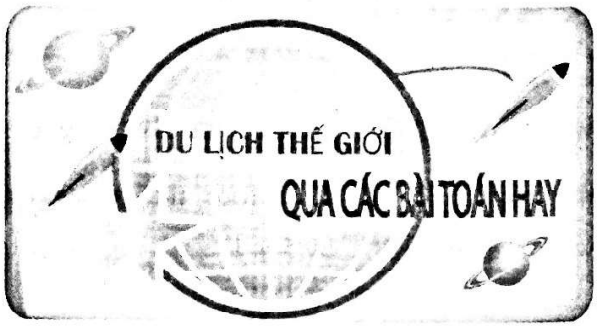
**Proof:** No cat has eight tails. Since one cat has one more tail than no cat, it must have nine tails.

**********

**Q:** What is non- orientable and live in the ocean?

**A:** Mobius Dick ...

**********




Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 5010, T12.2019.

**BÀI 43 (2000 Beijing Math Contest).** *Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\cos B}{\sin^2 B}+\frac{\cos C}{\sin^2 C}\ge\frac{R}{r}.$$

***Lời giải.*** Kí hiệu $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ là độ dài các cạnh của tam giác $ABC$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c$. Theo định lí sin ta có: $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$.

Gọi $S$ là diện tích của tam giác $ABC$ thì ta có:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{abc}{4R}=pr$$

với $p=\frac{a+b+c}{2}$. Suy ra: $abc=4Rrp$.

*Nhận xét:* Với mọi $x, y$ dương, ta luôn có:

$$(x^2-y^2)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\le 0.$$

Do đó: $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\ge x+y$ (1).

Theo định lí côsin và sin ta có:

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:\frac{a^2}{4R^2}=\frac{2R^2}{abc}.\frac{b^2+c^2-a^2}{a}$$

$$=\frac{R}{2rp}.\frac{b^2+c^2-a^2}{a}=\frac{R}{2rp}\left(\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}-a\right).$$

Tương tự ta có:

$$\frac{\cos B}{\sin^2 B}=\frac{R}{2rp}\left(\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{b}-b\right);$$

$$\frac{\cos C}{\sin^2 C}=\frac{R}{2rp}\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}-c\right).$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\cos B}{\sin^2 B}+\frac{\cos C}{\sin^2 C}$$

$$\ge\frac{R}{2rp}\left(\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{a}-a-b-c\right)$$

$$\overset{\text{theo (1)}}{\ge}\frac{R}{2rp}(b+a+c+b+a+c-a-b-c)$$

$$=\frac{R}{2rp}(a+b+c)=\frac{R}{2rp}.2p=\frac{R}{r}.$$

***Nhận xét.*** BĐT(1) chính là hệ quả trực tiếp của BĐT Schwarz. Các bạn tham gia giải bài này có cách giải đều tương tự với lời giải trên. Danh sách các bạn làm đúng là: *Nguyễn Văn Bản*, GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, **Điện Biên**; *Nguyễn Quang Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre, **Bến Tre**; *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Nội**. *Đặng Duy Hậu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Đặng Hoàng Dung*, 10T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**; *Trần Nguyễn Hữu Phúc*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà, **Quảng Trị**.

**NHƯ HOÀNG**

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.5.2020.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**BÀI 45.** *Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn*

$$3x+y+2z\ge 3 \text{ và } -x+2y+4z\ge 5.$$

*Tìm giá trị nhỏ nhất của* $7x+5y+10z$.

**KHÁNH HỮU** (*Hà Nội*)

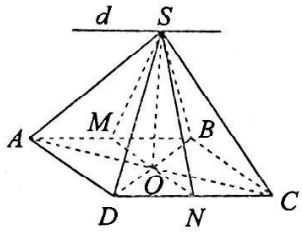

**GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI NÀO ĐÚNG ?**

***(Đề đăng trên TH&TT số 510, tháng 12 năm 2019)***

***Phân tích sai lầm.***

Sai lầm của bạn *Thu* là ngộ nhận góc $\widehat{MSN}$ trong tam giác $SMN$ là góc giữa hai đường thẳng $SM, MN$. Trên thực tế, góc giữa hai đường thẳng $SM, MN$ có thể là góc này, cũng có thể là góc bù với góc này.

***Lời giải đúng.***




Gọi $O = AC \cap BD$ và $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AB, CD$. Gọi $d = (SAB) \cap (SCD)$ thì $S \in d$. Ta có $(SAB) \cap (SCD) = d$, $(SAB) \cap (ABCD) = AB$, $(SCD) \cap (ABCD) = CD$, và $AB // CD$ (do $ABCD$ là hình vuông) nên $d // AB // CD$. Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAB), (SCD)$ là đường thẳng $d$ đi qua đỉnh $S$ và song song với $AB, CD$. Tam giác $SAB$ cân tại $S$ và $M$ là trung điểm của $AB$ nên $SM \perp AB$, suy ra $SM \perp d$. Tương tự ta chứng minh được $SN \perp d$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (SCD)$ là góc giữa hai đường thẳng $SM, SN$ và chính là góc $\widehat{MSN}$ trong tam giác $SMN$, hoặc là góc bù với góc đó. Suy ra $\widehat{MSN} = 60^0$ hoặc $\widehat{MSN} = 120^0$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SMN$ là tam giác cân, lại có $O$ là trung điểm $MN$ nên $\widehat{OSM} = \frac{1}{2}\widehat{MSN}$. Ta có $(SAB) \cap (ABCD) = AB$, $SM \perp AB$, $MN \perp AB$, nên góc giữa $(SAB), (ABCD)$ là góc giữa $SM, MN$ và là góc $\widehat{SMO}$ trong tam giác vuông $SMO$ vuông tại $O$. Vì $\widehat{SMO} = 90^0 - \widehat{OSM} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{MSN}$ nên $\widehat{SMO} = 60^0$ hoặc $\widehat{SMO} = 30^0$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên góc giữa hai mặt phẳng $(SAD), (ABCD)$ bằng góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (ABCD)$ và bằng $60^0$ hoặc $30^0$.

***Nhận xét.*** Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm.

**KIHIVI**

## ĐIỀU KIỆN ĐỂ CÓ CỰC TIỂU!

Trong giờ dạy toán ở lớp 12A, Thầy giáo đưa ra bài toán: *Tìm m để hàm số*

$$f(x) = (m+1)x^4 + 3mx^3 - 2m + 2020$$

*đạt cực tiểu tại* $x = 0$.

Sau đây là lời giải của bạn *Vân*:

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ và

$$f'(x) = 4(m+1)x^3 + 9mx^2,$$
$$f''(x) = 12(m+1)x^2 + 18mx.$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ nếu

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(m+1).0 + 9m.0 = 0 \\ 12(m+1).0 + 18m.0 > 0 \end{cases}.$$

Hệ trên vô nghiệm nên không có giá trị nào của $m$ để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

***Các bạn trong lớp nhìn nhau phân vân. Hãy cho biết ý kiến của bạn về lời giải của bạn Vân. Lời giải của bạn thế nào?***

**NGUYỄN VĂN XÁ**

*(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)*

# Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
# Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 514 (4.2020)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com




## TRONG SỐ NÀY




***Biên tập***: LÊ MAI, THÙY LINH
***Trị sự, phát hành***: THÙY LINH, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
***Mĩ thuật***: QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản***: THÙY LINH

# NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

*Thông báo*

# GIÁ BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 1 MỚI


Bộ SGK *Kết nối tri thức với cuộc sống*

Thực hiện Nghị quyết 29-NQ/TW của BCHTW Đảng về đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo; Nghị quyết 88/2014/QH13 của Quốc hội về đổi mới chương trình, sách giáo khoa (SGK) giáo dục phổ thông; thông tư 32/2018/TT-BGDĐT của Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành chương trình giáo dục phổ thông, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã tổ chức biên soạn các bộ SGK mới. Qua nhiều vòng thẩm định kĩ lưỡng, 4 bộ SGK của NXBGDVN đã được thông qua, được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo kí ban hành.

Để xây dựng giá bán cho các bộ SGK mới nêu trên, NXBGDVN đã thực hiện các bước theo quy định hiện hành của Luật Giá. Theo đó, giá các bộ SGK mới của NXBGDVN cụ thể như sau:

1. Bộ SGK *Kết nối tri thức với cuộc sống*, gồm 10 cuốn, giá **179.000đ**.

2. Bộ SGK *Chân trời sáng tạo*, gồm 9 cuốn, giá **186.000đ**

3. Bộ SGK *Cùng học để phát triển năng lực*, gồm 10 cuốn, giá **194.000đ**

4. Bộ SGK *Vì sự bình đẳng và dân chủ trong giáo dục*, gồm 9 cuốn, giá **189.000đ.**

Để giúp giáo viên, phụ huynh, học sinh thuận tiện trong việc nghiên cứu lựa chọn, góp ý cho SGK, NXBGDVN đã đăng tải để truy cập miễn phí phiên bản điện tử các bộ SGK lớp 1 cùng những tài liệu, câu hỏi xung quanh SGK và học liệu hỗ trợ giảng dạy cho giáo viên tại địa chỉ *nxbgd.vn/sachdientu* và *nxbgd.vn/taphuan*. Ngoài ra, giáo viên, phụ huynh, học sinh có thể trao đổi những vấn đề liên quan SGK mới của NXBGDVN thông qua địa chỉ E-mail: *hoidapsgk@nxbgd.vn* hoặc số điện thoại đường dây nóng: 0377333545.

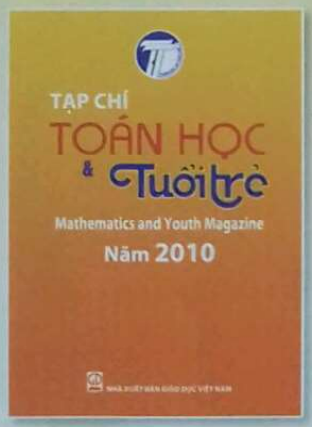
NXBGDVN sẽ tiếp tục thực hiện các công tác xã hội như tặng SGK cho con các gia đình chính sách, gia đình thương binh liệt sĩ, gia đình có hoàn cảnh đặc biệt khó khăn, đồng thời sẽ đầu tư xây dựng Tủ sách dùng chung, tổ chức mua SGK cũ tặng cho thư viện các trường học thuộc địa bàn khó khăn; tổ chức phát động các phong trào quyên góp SGK, khuyến khích học sinh giữ gìn, bảo quản và sử dụng lại SGK.

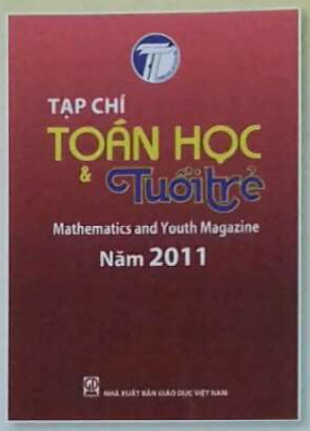
# TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

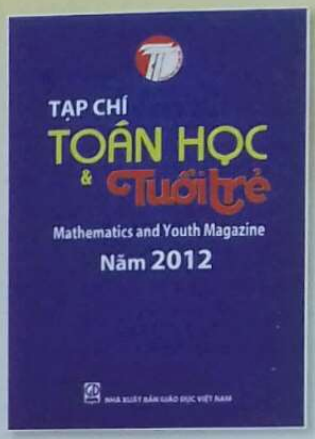
*Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc*

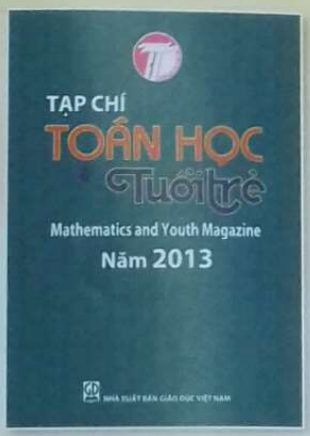
*Bộ đóng tập*

## TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

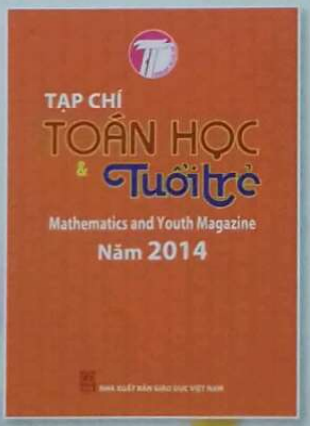


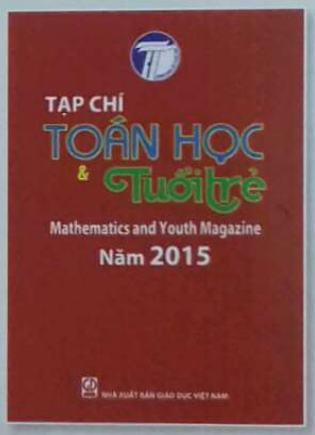



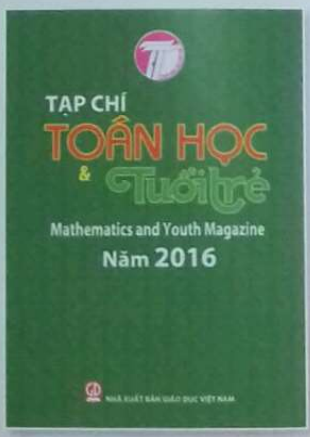



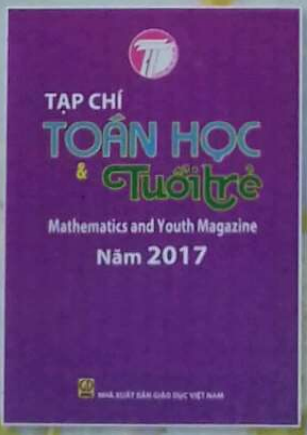



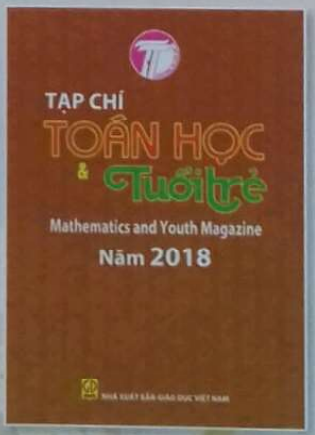

**Năm 2010**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng
**Năm 2011**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng
**Năm 2012**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng
**Năm 2013**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng
**Năm 2014**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng
**Năm 2015**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
**Năm 2016**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
**Năm 2017**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
**Năm 2018**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
**Năm 2019**
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

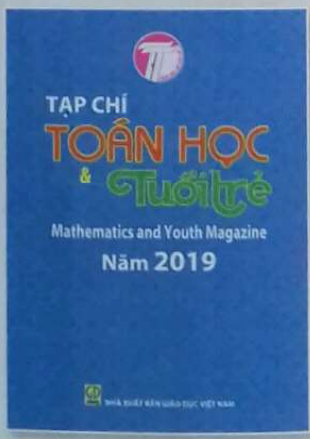



*Mọi chi tiết xin liên hệ:*

**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**
**Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội.**
• Điện thoại: 024.35121606 – 024.35121607 • Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT4M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2020

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng