

Chủ đề 2: RÚT GỌN BIỂU THỨC

Rút gọn biểu thức là phải làm công việc gì ? Đã gọi là rút gọn biểu thức thì phải làm cho biểu thức gọn hơn và gọn nhất có thể. Và một điều đặc biệt ở lớp 9 là biểu thức có mặt trong dấu căn. Khi mới bắt đầu học thì biểu thức rất đơn giản, có thể chỉ có một căn hoặc cùng lắm là hai căn nhân với nhau, hai căn chia cho nhau. Nhưng càng học thì càng nhiều căn, nhiều mẫu số rồi các phép toán cộng, trừ, nhân, chia có chứa căn. Tuy nhiên, dù bài toán có cho trời cho biển đi nữa thì vẫn là những công thức bình thường em đã học. Hãy liên kết lại những công thức em đã được học từ Bài 2 đến Bài 7 và ” Ứm ba la ! Hô biến ” (đây là câu thần chú đấy nhé ☺) và thế là các bài toán “Rút gọn biểu thức thành một diện mạo mới gọn hơn, đẹp hơn và chính xác nhất” em nhé! 👍

CÔNG THỨC THẦN KÌ $\sqrt{A^2} = |A|$ (hằng đẳng thức)

Em muốn cho một biểu thức ra khỏi căn thì phải có cái gì đó bình phương. Và khi ra ngoài thì sẽ mất căn, và xuất hiện trị tuyệt đối. Công việc tiếp theo là bỏ trị tuyệt đối thì phải xét xem biểu thức trong trị tuyệt đối âm hay dương. Đừng quên điều này, đừng vứt trị tuyệt đối đi mà không có lí do 👍

Bài tập: Rút gọn các biểu thức sau

1) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$	2) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$
Ta có: $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ $= 2-\sqrt{3} $ $= 2-\sqrt{3} \text{ (vì } 2 > \sqrt{3} \text{)}$ HS tư duy : Áp dụng đúng công thức và bỏ trị tuyệt đối	
3) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$	4) $2\sqrt{3} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$
	

	
5) $\sqrt{(x-1)^2}$	6) $\sqrt{(x+5)^2}$
Ta có $\sqrt{(x-1)^2} = x-1 = \begin{cases} (x-1) \text{ nếu } x \geq 1 \\ -(x-1) \text{ nếu } x < 1 \end{cases}$ HS tư duy : Biểu thức trong căn có luôn có nghĩa nên các em không cần tìm điều kiện nữa nhé. Công việc còn lại là áp dụng công thức $\sqrt{A^2} = A$. Đến đây muốn bỏ trị tuyệt đối ta phải tự chia thành hai trường hợp. 🍷	
7) $\sqrt{(5x-5)^2}$ với $x \geq 1$	8) $\sqrt{(-9+10x)^2}$ với $x < \frac{9}{10}$
	

Với bài tập 1 các em chỉ việc áp dụng công thức $\sqrt{A^2} = |A|$ là xong, vậy còn bài tiếp theo thì thế nào nhỉ. Nếu nhìn qua thì sẽ không thấy biểu thức trong căn có bình phương, nhưng việc tạo ra bình phương không quá khó. Hãy nghĩ đến các hằng đẳng thức sau :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ hoặc } (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Bài 2: Rút gọn

1) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$	2) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$
-------------------------	-------------------------

Ta có :

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}$$

(Tách 9 theo số 5 thì $9=5+4$)

$$=\sqrt{5+4\sqrt{5}+4}$$

(Lưu ý có 1 căn thức to bên ngoài
và bên trong có căn bé)

$$=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot 2+2^2} \quad (\text{Tạo HĐT})$$

$$=\sqrt{(\sqrt{5}+2)^2}$$

(Úm ba la ! Hô biến) $\Rightarrow$ Tự làm ☺ 👍

HS tư duy : Để có hằng đẳng thức số 1 và số 2 thì cần phải tách 1 vị trí nào đó. Và chắc chắn phải tách số $9=5+4$.

Hơn nữa những bài tập này các em đã được làm đi làm lại nhiều lần, thì lần sau nếu gặp lại theo phản xạ sẽ nhớ ra ngay cách làm. Đến đây em đã hiểu tại sao ra khỏi căn thức phải có bình phương chưa ? Phần nào đã được khai sáng rồi nhé ! 👍

3) $\sqrt{23+8\sqrt{7}}$

4) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$

5) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-3+\sqrt{2}$

6) $\sqrt{23-8\sqrt{7}}-\sqrt{7}$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

7) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$	8) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$
-------------------------	-------------------------

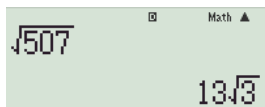
Ta có: $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2.\sqrt{3}.2 + (\sqrt{2})^2}$ $= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$ $= \dots$	
---	--

<u>HS tư duy</u> : Với câu này nếu học sinh tách số 5 theo số 6 như các ý trên thì không thu được kết quả gì cả. Chẳng nhẽ $5 = 6 - 1$, và nếu em có làm như vậy đi chẳng nữa thì cũng không ra được hằng đẳng thức. Vậy thì làm thế nào đây. Hãy suy nghĩ một chút nhé. Chúng ta vẫn tách số 5 theo số 6 nhưng lúc này cần thông minh hơn. Ta có: $\sqrt{6} = \sqrt{3.2} = \sqrt{3}.\sqrt{2} \text{ .Vậy } 5 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 \text{ .}$ Khi đó nhẩm lại ta có hằng đẳng thức $(\sqrt{3})^2 + 2.\sqrt{3}.2 + (\sqrt{2})^2$ Vậy là xong rồi nhé ! 🐣	9) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$
---	--

10) $\sqrt{19+2\sqrt{90}}$	11) $\sqrt{19-2.3\sqrt{10}}$
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
12) $\sqrt{x^2+2x+1}$	13) $\sqrt{x^2-2x+1}$
Ta có : $\sqrt{x^2+2x+1}$ $= \sqrt{(x+1)^2}$ $= x+1 $ $= \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$	
14) $\sqrt{4x^2+4x+1}$ với $x \geq \frac{-1}{2}$	15) $\sqrt{9-6x+x^2}$ với $x < 3$
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
16) $\sqrt{9x^2-2x}$ với $x < 0$	17) $x-4+\sqrt{16-8x+x^2}$ với $x > 4$
.....	

Với một số khá to mà em không biết cách tách thì đừng lo. Ví dụ $\sqrt{507} = ?$

Hãy cầm máy tính lên và bấm:



Khi nhìn thấy số 13 ngoài dấu căn và số 3 trong dấu căn thì chắc chắn phải tách số $507 = 13^2 \cdot 3 = 169 \cdot 3$

4) $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a} \ (a \geq 0)$

5) $-\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b} \ (b \geq 0)$

6) $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3}$ với $x < 3$

7) $4x - \sqrt{8} + \frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}} \ (x > 0)$

Giải quyết xong bài tập trên chúng ta đã biết cách tách một căn thành tích của hai căn. Tuy nhiên với bài này các em có cách làm khác bằng cách sử dụng công thức $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A| \cdot \sqrt{B}$. Nhìn công thức quen quá. Trong căn có bình phương, vậy hãy cho biểu thức chứa bình phương ra khỏi căn còn biểu thức không chứa bình phương thì giữ nguyên căn. Chúng ta làm thử cách này nhé ! 🍷

Bài tập: Rút gọn các biểu thức sau

1) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{18}$	3) $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{27} + 2\sqrt{507}$
Ta có: $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{18}$ $= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{3^2 \cdot 2} \quad (\text{Phân tích})$ $= 3\sqrt{2} + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{2} \quad (\text{Áp dụng } \sqrt{A^2 \cdot B} = A \cdot \sqrt{B})$ $= 3\sqrt{2} + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ $= 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ $= 8\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{98} - \sqrt{72} + 0,5\sqrt{8}$	4) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$
5) $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a} \quad (a \geq 0)$	6) $-\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b} \quad (b \geq 0)$

---	---

CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI – MẪU SỐ CÓ CHỨA CĂN

1. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0)$
2. $\frac{C}{\sqrt{A} + B} = \frac{C(\sqrt{A} - B)}{A - B^2} \quad (A \geq 0 \text{ và } A \neq B^2)$
3. $\frac{C}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B}$

Với dạng toán có chứa căn thức ở mẫu số chúng ta cần khử căn ở mẫu (tức là làm biến mất căn ở mẫu số). Với dạng toán này chỉ cần nhân liên hợp và thu gọn là xong.

Chú ý: Biểu thức liên hợp

	Biểu thức	Biểu thức liên hợp
HĐT3	$\sqrt{A} + \sqrt{B}$	
	$\sqrt{A} - B$	
HĐT7	$\sqrt{A} + \sqrt{B}$	
	$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	

Dạng 1: Sử dụng công thức $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$

Bài 1: Khử mẫu của biểu thức lấy căn

1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$	2) $\frac{9}{\sqrt{10}}$
Ta cĩ: $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	
3) $\frac{5}{3\sqrt{8}}$	4) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$
.....	
5) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$	6) $\frac{1}{3\sqrt{20}}$
.....	
7) $\frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}$	8) $\frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}$
.....	
9) $\frac{2}{\sqrt{b}}$ vĩi $b > 0$	10) $\frac{-5}{\sqrt{a+1}}$ vĩi $a > -1$

.....	
.....	
.....	

Bài 2: Khử mẫu của biểu thức lấy căn (*giả thiết các biểu thức đều có nghĩa*)

1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$	2) $\sqrt{\frac{3}{125}}$
Cách 1: $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2.3}{3.3}} = \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ Cách 2: $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$	
3) $\sqrt{\frac{3}{50}}$	4) $\sqrt{\frac{5}{98}}$
.....	
5) $\sqrt{\frac{5}{b}}$	6) $ab\sqrt{\frac{a}{b}}$
Ta có: $\sqrt{\frac{5}{b}} = \sqrt{\frac{5.b}{b.b}} = \frac{\sqrt{5.b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{5b}}{ b } = \frac{\sqrt{5b}}{b}$	
7) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$	8) $3xy.\sqrt{\frac{2}{xy}}$
.....	

..... 	
9) $\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}$	10) $ab \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{a^2 b^2}}$
..... 	

Dạng 2: Sử dụng công thức $\frac{C}{\sqrt{A} + B} = \frac{C(\sqrt{A} - B)}{A - B^2}$ ($A \geq 0$ và $A \neq B^2$)

Bài 1: Khử mẫu của biểu thức lấy căn (*giả thiết các biểu thức đều có nghĩa*)

1) $\frac{10}{\sqrt{3} + 1}$	2) $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$
Ta có $\frac{10}{\sqrt{3} + 1}$ $= \frac{10(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$ $= \frac{10(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1}$ $= 5(\sqrt{3} - 1)$ HS tự duy: Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu. Ta có, mẫu số là $\sqrt{3} + 1$ có biểu thức liên hợp là $\sqrt{3} - 1$.	
3) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$	4) $\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$
.....	

..... 	
5) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}$	6) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}$
..... 	
7) $\frac{b}{3+\sqrt{b}}$	8) $\frac{p}{2\sqrt{p}-1}$
Ta có : $\frac{b}{3+\sqrt{b}}$ $= \frac{b(3-\sqrt{b})}{(3+\sqrt{b})(3-\sqrt{b})}$ $= \frac{b(3-\sqrt{b})}{9-b}$ <u>HS tự duy</u> : Biểu thức liên hợp của $3+\sqrt{b}$ là $3-\sqrt{b}$	
9) $\frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$	10) $\frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}$

Dạng 3: Sử dụng công thức $\frac{C}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B}$

Bài 1: Khử mẫu của biểu thức lấy căn (*giả thiết các biểu thức đều có nghĩa*)

1) $\frac{3}{\sqrt{10} + \sqrt{7}}$	2) $\frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$
3) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$	4) $\frac{2ab}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$