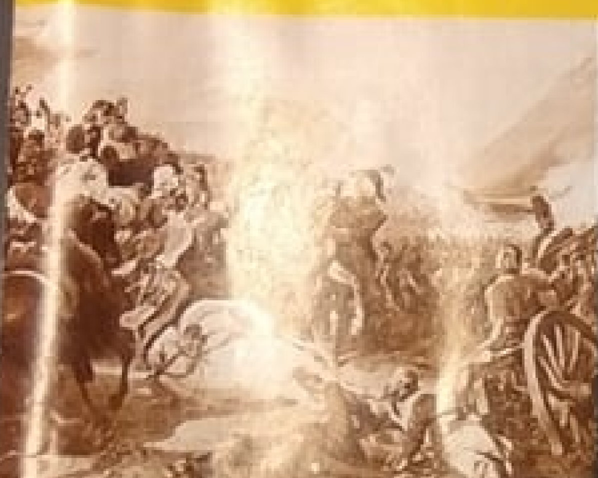
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

5 2020
Số 515

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Napoléon Bonaparte (1769-1821)

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT SỐ BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐA THỨC

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

1. Với mọi cặp đa thức $f(x)$, $g(x)$ trong đó $g(x) \neq 0$, tồn tại duy nhất cặp đa thức $q(x)$, $r(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ và bậc của $r(x)$ nhỏ hơn bậc của $g(x)$.

- Nếu $r(x) = 0$, thì đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$.

- Nếu $r(x) \neq 0$, thì đa thức $f(x)$ không chia hết cho đa thức $g(x)$, khi đó $q(x)$ là đa thức thương và $r(x)$ là đa thức dư.

2. Đa thức dư khi chia $f(x)$ cho nhị thức $(x-a)$ bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$.

3. Đa thức $f(x)$ chia hết cho $(x-a)$ khi và chỉ khi $f(a) = 0$.

I. XÁC ĐỊNH ĐA THỨC TRONG PHÉP CHIA ĐA THỨC.

Bài 1.1. *Cho đa thức*
$P(x) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x + m.$
Biết $P(x)$ chia hết cho $x+5$, tìm số dư r khi chia $P(x)$ cho $x-3$.

Lời giải. Từ $P(x)$ chia hết cho $(x+5)$ nên $P(-5) = 0$, do đó:
$(-5)^4 - 4(-5)^3 - 19(-5)^2 + 106.(-5) + m = 0$
$\Leftrightarrow m = -120$. Với $m = -120$ thì
$P(x) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120$.
Khi đó số số dư r khi chia $P(x)$ cho $x-3$ là:
$r = P(3) = 3^4 - 4.3^3 - 19.3^2 + 106.3 - 120 = 0.$

Nhận xét. Bài toán xác định giá trị dư khi chia đa thức bậc 4 cho nhị thức bậc nhất.

Bài 1.2. *a) Tìm đa thức dư khi chia đa thức $x^{33} - 2x^{16} + 1$ cho $x^2 - 4$.*
b) Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức $f(x) = x^{2021} + x^{2020} + x^{2019} + ... + x + 1$ cho $x^2 - 1$.

Lời giải. a) Do đa thức chia là đa thức bậc 2 nên:
$$x^{33} - 2x^{16} + 1 = (x^2-4).Q(x) + (ax+b)$$
Thay $x = \pm 2$ vào đẳng thức trên, ta có:
$$\begin{cases} 2a+b = 8589803521 \\ -2a+b = -8590065663 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4294967296 \\ b = -131071 \end{cases}.$$
Vậy đa thức dư cần tìm là: $429467296x - 1310714$.

b) Do đa thức chia là đa thức bậc 2 nên
$$x^{2021} + x^{2020} + ... + x + 1 = (x^2-1).Q(x) + (ax+b).$$
Thay $x = \pm 1$ vào đẳng thức trên, ta có:
$$\begin{cases} a+b = 2022 \\ -a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1011.$$
Vậy đa thức dư cần tìm là: $1011x + 1011$.

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức dư khi đa thức chia là đa thức bậc hai.

Bài 1.3. *Khi chia đa thức x^8 cho $x + \frac{1}{2}$, ta được thương là $f(x)$ và dư là số r_1. Khi chia $f(x)$ cho $x + \frac{1}{2}$, ta được thương là $g(x)$ và dư là số r_2. Tính r_2.*

Lời giải. Đặt $a = -\frac{1}{2}$, ta có: $x^8 = (x-a).f(x) + r_1$.
Cho $x = a$ thì $r_1 = a^8$, do đó: $x^8 - a^8 = (x-a).f(x)$.
Suy ra: $f(x) = \dfrac{x^8 - a^8}{x-a} = (x^4+a^4)(x^2+a^2)(x+a)$.
Ta có: $(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x+a) = (x-a).g(x) + r_2$.
Cho $x = a$, ta được: $2a^4.2a^2.2a = r_2 \Rightarrow r_2 = 8a^7$.
Thay $a = -\frac{1}{2}$, ta được $r_2 = 8.\left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{16}$.

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức thương trong phép chia thứ nhất từ đó xác định được số dư trong phép chia thứ hai.

Bài 1.4. *Tìm đa thức dư $r(x)$ của phép chia đa thức $f(x)$ cho $(x-1)(x^3+1)$, biết $f(x)$ chia cho $x-1$ dư 1, $f(x)$ chia cho x^3+1 dư x^2+x+1.*

Lời giải. Ta có: $f(x)=(x-1)(x^3+1)q(x)+ax^3$
$+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ (1).

$$f(x)=(x^3+1)[(x-1)q(x)+a]+bx^2+cx+d-a \text{ (2)}.$$

Do $f(x)$ chia cho x^3+1 dư x^2+x+1, suy ra $bx^2+cx+d-a=x^2+x+1$ với mọi x, do đó $b=1, c=1, d-a=1$ (3). Lại có $f(1)=1$, từ (1) suy ra: $a+b+c+d=1$. Kết hợp với (3), suy ra:

$$\begin{cases}a+1+1+d=1\\ d-a=1\end{cases}\Leftrightarrow a=-1, d=0.$$

Vậy $r(x)=-x^3+x^2+x$.

Nhận xét. Bài toán tìm đa thức dư dựa vào quan hệ giữa hai phép chia có dư.

Bài 1.5. *Cho đa thức $P(x)=x^4-x^3+ax^2+bx+c$. Biết $P(x)$ chia cho x^2+d có dư là x và $P(x)$ chia cho x^2-d có dư là $-x$. Tìm đa thức $P(x)$.*

Lời giải. Thực hiện phép chia ta có:

$P(x)$ chia cho x^2+d dư $(b+d)x+c-ad+d^2$;

$P(x)$ chia cho x^2-d dư $(b-d)x+c+ad+d^2$.

Đồng nhất các hệ số ta có:

$$\begin{cases}b+d=1\\ c-ad+d^2=0\\ b-d=-1\\ c+ad+d^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\ d=1\\ c-ad+d^2=0\\ c+ad+d^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=0\\ c=-1\\ d=1\end{cases}$$

Vậy $P(x)=x^4-x^3-1$.

Nhận xét. Bài toán tìm đa thức bị chia bậc 4 thông qua hai phép chia có dư.

Bài 1.6. *Cho đa thức*

$$P(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f.$$

Biết đa thức $P(x)$ chia cho đa thức $f(x)=x^3+3x^2-4x-5$ thì được đa thức dư $r(x)=x^2-3x+7$ và $P(-1)=18; P(1)=-20; P(2)=75$. Xác định đa thức $P(x)$.

Lời giải. Theo giả thiết có:

$$P(x)=f(x).(ax^2+mx+n)+r(x)$$

$$\Leftrightarrow P(x)=(x^3+3x^2-4x-5).(ax^2+mx+n)+x^2-3x+7.$$

Ta có: $f(-1)=1; f(1)=-5; f(2)=7$ và $r(-1)=11; r(1)=5; r(2)=5$.

Từ $P(-1)=18; P(1)=-20; P(2)=75$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}a-m+n=7\\ a+m+n=5\\ 4a+2m+n=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m=-2\\ a+m+n=5\\ 4a+2m+n=10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\ a-1+n=5\\ 4a-2+n=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ m=-1\\ n=4\end{cases}.$$

Vậy $P(x)=(x^3+3x^2-4x-5).(2x^2-x+4)+x^2-3x+7$.

Khai triển và thu gọn ta có:

$$P(x)=2x^5+5x^4-7x^3+7x^2-14x-13.$$

Nhận xét. Bài toán tìm đa thức bị chia khi đã biết đa thức chia và đa thức dư, đồng thời biết một số giá trị của đa thức bị chia.

II. TÌM CÁC HỆ SỐ CỦA ĐA THỨC TRONG PHÉP CHIA ĐA THỨC.

Bài 2.1. *Cho đa thức $f(x)=(2020x^2+2021x-2020)^{2022}$. Tính tổng S các hệ số của các hạng tử có chứa lũy thừa lẻ của x.*

Lời giải. Ta có

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0,$$

$f(x)$ là đa thức bậc chẵn và là bậc 4044. Suy ra:

$f(1)=a_n+a_{n-1}+....+a_1+a_0$; n là số chẵn.

$$f(-1)=(-1)^na_n+(-1)^{n-1}a_{n-1}+....+(-1)a_1+a_0$$
$$=a_n-a_{n-1}+....-a_1+a_0.$$

Do đó $f(1)-f(-1)=2S$. Mà

$$f(1)-f(-1)=(2020.1^2+2021.1-2020)^{2022}$$
$$-[2020.(-1)^2+2021.(-1)-2020]^{2022}$$
$$=2021^{2022}-2021^{2022}=0.$$

Do đó $2S=0\Leftrightarrow S=0$.

Nhận xét. Bài toán tìm tổng các hệ số của đa thức bậc n dựa vào giá trị đa thức tại $x=\pm1$.

Bài 2.2. *Khai triển biểu thức $(1+7x+2x^2)^{15}$ ta được đa thức $a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_{30}x^{30}$. Tính giá trị của biểu thức*

$$M=a_0-3a_1+9a_2-27a_3+....+(-3)^{30}.a_{30}.$$

Lời giải. Đặt

$$P(x)=(1+7x+2x^2)^{15}=a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_{30}x^{30}.$$

$$M=a_0+(-3)a_1+(-3)^2a_2+(-3)^3a_3+....+(-3)^{30}a_{30}$$

$$\Rightarrow M=P(-3)=\left[1+7.(-3)+2.(-3)^2\right]^{15}$$

$$=(-2)^{15}=-32768.$$

Nhận xét. Bài toán tính giá trị của biểu thức dựa vào tính giá trị của đa thức tại $x=-3$.

Bài 2.3. *Xét đa thức*

$$P(x)=(1-x+x^2-x^3+....-x^{2019}+x^{2020})\times$$
$$\times(1+x+x^2+x^3+....+x^{2019}+x^{2020}).$$

Khai triển và viết

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_{4040}x^{4040}.$$

Hãy tìm $S=a_0+a_1+a_2+.....+a_{4040}$.

Lời giải. Xét $P(x).(x+1)(x-1)=$

$$(1-x+x^2-x^3+....-x^{2019}+x^{2020})(x+1)$$
$$\times(1+x+x^2+x^3+....+x^{2019}+x^{2020})(x-1)$$
$$\Leftrightarrow P(x).(x^2-1)=(x^{2021}+1).(x^{2021}-1)$$
$$\Rightarrow P(x).(x^2-1)=x^{4042}-1.$$
$$\Rightarrow P(x).(x^2-1)=(x^2-1).(x^{4040}+x^{4038}+....+x^2+1).$$
$$\Rightarrow P(x)=x^{4040}+x^{4038}+....+x^2+1.$$

Suy ra $S=a_0+a_1+a_2+.....+a_{4040}$

$$=P(1)=1+1+1+....+1=2021.$$

Nhận xét. Để tính tổng các hệ số của đa thức, trước tiên rút gọn đa thức một cách hợp lý.

Bài 2.4. *Cho đa thức*

$$P(x)=x^{2015}+ax^{2013}+bx^{2000}+cx^7+2016x+1$$

thỏa mãn $P(x)$ chia cho $x-2$ dư 4 và chia cho $x-3$ dư 7. Cho

$$Q(x)=x^{2015}+ax^{2013}+bx^{2000}+cx^7+mx+n$$

chia hết cho $(x-2)(x-3)$. Tính giá trị $T=m+n^4$.

Lời giải. Ta có:

$$P(x)-Q(x)=2016x+1-mx-n.$$

Lại có: $P(2)=4;\ P(3)=7;\ Q(2)=0;\ Q(3)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}P(2)-Q(2)=4\\P(3)-Q(3)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2016.2+1-2m-n=4\\2016.3+1-3m-n=7\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m=2013\\n=3\end{cases}\Rightarrow T=m+n^4=2013+3^4=2022.$$

Nhận xét. Bài toán tính giá trị biểu thức có các hệ số của đa thức bị chia bằng cách tìm các hệ số.

Bài 2.5. *Cho đa thức $f(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất bằng 1. Biết $f(1)=3, f(3)=11, f(5)=27$. Tính $f(-2)+7.f(6)$.*

Lời giải. Ta có:

$$f(1)=3=1^2+2; f(3)=11=3^2+2; f(5)=27=5^2+2$$

Đặt $g(x)=f(x)-(x^2+2)$, ta có $g(1)=g(3)=g(5)=0$.

Suy ra: $g(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-k)$.

Do đó: $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-k)+x^2+2$.

Ta có:

$$f(-2)=-3.(-5).(-7).(-2-k)+6=3.5.7.(2+k)+6.$$

Tương tự: $f(6)=5.3.1.(6-k)+38$. Do đó:

$$f(-2)+7f(6)=3.5.7.8+266+6=1112.$$

Nhận xét. Bài toán tính tổng các giá trị của đa thức có bậc bốn bằng cách đặt đa thức trung gian phù hợp nhận các giá trị làm nghiệm.

Bài 2.6. *Cho hai đa thức*

$$P(x)=6x^4-7x^3-12x^2+ax+2$$

và $Q(x)=x^2+bx-2.$

Xác định a,b để đa thức $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.

Lời giải. Thực hiện phép chia ta có:

$$P(x)=Q(x).\left[6x^2-(7+6b)x+7b+6b^2\right]$$
$$+(a-6b^3-7b^2-12b-14)x+12b^2+14b+2.$$

$P(x)$ chia hết cho $Q(x)$

$$\Leftrightarrow(a-6b^3-7b^2-12b-14)x+12b^2+14b+2=0$$

với $\forall x\Leftrightarrow\begin{cases}a-6b^3-7b^2-12b-14=0 & (1)\\12b^2+14b+2=0 & (2)\end{cases}$.

Giải phương trình (2) ta được $b \in \left\{-1; -\frac{1}{6}\right\}$.

Với $b=-1$ thay vào (1), tìm được $a=3$.

Với $b=-\frac{1}{6}$ thay vào (1), tìm được $a=\frac{73}{6}$.

Vậy cặp (a,b) cần tìm là: $(3;-1), \left(\frac{73}{6}; -\frac{1}{6}\right)$.

Nhận xét. Bài toán xác định hệ số của đa thức để được phép chia hết bằng việc thực hiện phép chia hai đa thức.

Bài 2.7. *Khi chia đa thức $P(x)=x^{81}+ax^{57}+bx^{41}+cx^{19}+2x+1$ cho $(x-1)$ được số dư là 5 và chia $P(x)$ cho $(x-2)$ được số dư là -4. Hãy tìm các số thực A, B biết đa thức $Q(x)=x^{81}+ax^{57}+bx^{41}+cx^{19}+Ax+B$ chia hết cho đa thức (x^2-3x+2).*

Lời giải. Ta có: $P(1)=5$

$\Rightarrow 1+a+b+c+2+1=5 \Leftrightarrow a+b+c=1$.

Lại có: $P(2)=-4$

$\Rightarrow 2^{81}+a.2^{57}+b.2^{41}+c.2^{19}+2.2+1=-4$

$\Leftrightarrow 2^{81}+a.2^{57}+b.2^{41}+c.2^{19}=-9$.

Từ $Q(x)$ chia hết cho đa thức

$(x^2-3x+2)=(x-1)(x-2)$ suy ra $Q(1)=Q(2)=0$.

Ta có: $Q(1)=0 \Rightarrow 1+a+b+c+A+B=0$

$\Rightarrow A+B=-2$ (1);

$Q(2)=0 \Rightarrow 2^{81}+a.2^{57}+b.2^{41}+c.2^{19}+2A+B=0$

$\Rightarrow 2A+B=9$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $A=11; B=-13$.

Nhận xét. Bài toán xác định hệ số của đa thức trong phép chia có dư và phép chia hết của đa thức.

Bài 2.8. *Xác định các hệ số a, b, c của đa thức $P(x)=ax^3+bx^2+cx-2007$ sao cho khi chia $P(x)$ cho $(x-16)$ được số dư là 29938, khi chia $P(x)$ cho $(x^2-10x+21)$ thì được dư là $\frac{10873}{16}x-3750$.*

Lời giải. Ta có

$P(16)=29938 \Rightarrow a.16^3+b.16^2+c.16-2007=29938$

$\Leftrightarrow 256a+16b+c=\frac{31945}{16}$ (1).

Ta có: $P(x)=(x-3)(x-7).Q(x)+\frac{10873}{16}x-3750$.

Suy ra: $P(3)=-\frac{27381}{16}$

$\Rightarrow a.3^3+b.3^2+c.3-2007=-\frac{27381}{16}$

$\Leftrightarrow 9a+3b+c=\frac{1577}{16}$ (2);

$P(7)=\frac{16111}{16} \Rightarrow a.7^3+b.7^2+c.7-2007=\frac{16111}{16}$

$\Leftrightarrow 49a+7b+c=\frac{6889}{16}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) có hệ: $\begin{cases} 256a+16b+c=\frac{31945}{16} \\ 9a+3b+c=\frac{1577}{16} \\ 49a+7b+c=\frac{6889}{16} \end{cases}$.

Giải hệ phương trình, tìm được:
$a=7, b=13, c=-3,4375$.

Nhận xét. Bài toán xác định hệ số của đa thức bị chia có bậc ba trong hai phép chia có dư.

III. XÁC ĐỊNH ĐA THỨC KHI BIẾT CÁC GIÁ TRỊ CỦA ĐA THỨC

Bài 3.1. *Tìm đa thức bậc ba $P(x)$ biết: $P(0)=10; P(1)=12; P(2)=4; P(3)=1$.*

Lời giải. Gọi đa thức cần tìm là:
$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Do $P(0)=10$ nên $d=10$. Do $P(1)=12; P(2)=4;$ $P(3)=1$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=-3 \\ 9a+3b+c=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ 3a+b=-5 \\ 8a+2b=-5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ a=2,5 \\ b=-12,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=12 \\ a=2,5 \\ b=-12,5 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(x)=2,5x^3-12,5x^2+12x+10$.

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức bậc ba tổng quát, khi biết 4 giá trị của đa thức.

Bài 3.2. *Tìm đa thức $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-13$ biết $P(1)=1, P(2)=6, P(3)=11$.*

Lời giải. Từ $P(1)=1, P(2)=6, P(3)=11$, ta có:

$$\begin{cases}1^4+a.1^3+b.1^2+c.1-13=1\\2^4+a.2^3+b.2^2+c.2-13=6\\3^4+a.3^3+b.3^2+c.3-13=11\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=13 & (1)\\8a+4b+2c=3 & (2).\\9a+3b+c=-19 & (3)\end{cases}$$

Suy ra $(a+b+c)+(9a+3b+c)-(8a+4b+2c)$ $=13-19-3\Leftrightarrow a=-4,5.$

Thay $a=-4,5$ vào (1) và (2), suy ra:

$$\begin{cases}-4,5+b+c=13\\8.(-4,5)+4b+2c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=17,5\\4b+2c=39\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\c=15,5\end{cases}.$$

Vậy $P(x)=x^4-4,5x^3+2x^2+15,5x-13$.

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức bậc 4 cần tìm ba hệ số khi biết ba giá trị của đa thức.

Bài 3.3. *Tìm đa thức $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$, biết $P(0)=P(1)=12; P(2)=0; P(4)=60$.*

Lời giải. Từ $P(0)=12$, suy ra $d=12$. Ta có đa thức $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+12$.

Từ $P(1)=12; P(2)=0; P(4)=60$, ta có:

$$\begin{cases}a+b+c=-1\\4a+2b+c=-14\\16a+4b+c=-52\end{cases}.$$

Giải hệ tìm được: $a=-2, b=-7, c=8$.

Vậy $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$.

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức bậc 4, cần tìm bốn hệ số khi biết bốn giá trị của đa thức, cách giải dựa vào việc giải hệ phương trình ba ẩn.

Bài 3.4. *Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất bằng 1, thỏa mãn: $P(-2)=4; P(-1)=-2$; $P(1)=-11; P(2)=6$. Tìm đa thức $P(x)$.*

Lời giải. Cách 1. Đặt

$$P(x)=(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$
$$+a(x+2)(x+1)(x-1)+b(x+2)(x+1)+c(x+2)+d.$$

Vì $P(-2)=4\Rightarrow d=4$ suy ra:

$$P(x)=(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$
$$+a(x+2)(x+1)(x-1)+b(x+2)(x+1)+c(x+2)+4.$$

Vì $P(-1)=-2\Rightarrow c(-1+2)+4=-2\Rightarrow c=-6.$

$$\Rightarrow P(x)=(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$
$$+a(x+2)(x+1)(x-1)+b(x+2)(x+1)-6x-8.$$

Tương tự, vì $P(1)=-11\Rightarrow b=\frac{1}{2}; P(2)=6\Rightarrow a=\frac{5}{3}.$

Do đó: $P(x)=(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

$$+\frac{5}{3}.(x+2)(x+1)(x-1)+\frac{1}{2}.(x+2)(x+1)-6x-8.$$

Thực hiện phép nhân và thu gọn ta được:

$$P(x)=x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{7}{6}x^2-\frac{37}{6}x-\frac{19}{3}.$$

Cách 2. Từ $P(-1)=-2; P(1)=-11; P(2)=6$

Xét đa thức bậc bốn $Q(x)=(x^2-1)(x^2-4)$.

Ta có $Q(1)=Q(2)=Q(-1)=Q(-2)=0$.

Giả sử $P(x)=Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d$. Ta có hệ:

$$\begin{cases}-11=a+b+c+d\\6=8a+4b+2c+d\\-2=-a+b-c+d\\4=-8a+4b-2c+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2b+2d=-13\\8b+2d=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{23}{6}\\d=-\dfrac{31}{3}\end{cases}.$$

Suy ra $a=\frac{5}{3}, c=-\frac{37}{6}$;

Vậy $P(x)=(x^2-1)(x^2-4)+\frac{5}{3}x^3+\frac{23}{6}x^2-\frac{37}{6}x-\frac{31}{3}.$

Khai triển và thu gọn ta có:

$$P(x)=x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{7}{6}x^2-\frac{37}{6}x-\frac{19}{3}.$$

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức bậc 4, cần tìm bốn hệ số khi biết bốn giá trị của đa thức. Cách giải 1) dựa vào việc đặt đa thức đã cho một cách phù hợp. Cách giải 2) lập hệ phương trình 4 ẩn.

Bài 3.5. *Xác định đa thức*

$$P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+6,$$

biết $P(-1)=3; P(1)=21; P(2)=120; P(3)=543$.

Lời giải. Từ $P(-1)=3; P(1)=21; P(2)=120$; $P(3)=543$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}a-b+c-d=-2\\a+b+c+d=14\\16a+8b+4c+2d=82\\81a+27b+9c+3d=294\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=6-a\\a+b+c+d=14\\8a+4b+2c+d=41\\27a+9b+3c+d=98\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=6-a \\ b+d=8 \\ 6a+4b+d=29 \\ 24a+9b+d=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=6-a \\ d=8-b \\ 6a+3b=21 \\ 24a+8b=72 \end{cases}.$$

Tìm được: $a=2, b=3, c=4, d=5$.

Vậy $P(x)=x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$.

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức bậc 5, cần tìm bốn hệ số khi biết bốn giá trị của đa thức.

Bài 3.6. *Xác định đa thức*

$$P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

biết $P(-1)=-2\frac{5}{6}$; $P(1)=-2\frac{1}{6}$; $P(2)=-7\frac{5}{6}$; $P(-3)=-19\frac{1}{2}$; $P(4)=-31\frac{1}{6}$.

Lời giải. Ta có:

$P(-1)=-2\frac{5}{6}=-2.(-1)^2+\frac{1}{3}.(-1)-\frac{1}{2}$;

$P(1)=-2\frac{1}{6}=-2.1^2+\frac{1}{3}.1-\frac{1}{2}$;....

$P(4)=-31\frac{1}{6}=-2.4^2+\frac{1}{3}.4-\frac{1}{2}$.

Đặt $Q(x)=P(x)-\left(-2x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right)$. Ta có:

$$Q(-1)=Q(1)=Q(2)=Q(-3)=Q(4)=0.$$

Do đó $Q(x)$ có các nghiệm $-1; 1; 2; -3; 4$.

Suy ra $Q(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)$.

Do đó: $P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)$

$$-2x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}$$

$$=x^5-3x^4-11x^3+25x^2+\frac{31}{3}x-\frac{49}{2}.$$

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức bậc 5 cần tìm năm hệ số, khi biết năm giá trị của đa thức. Bằng cách đặt đa thức trung gian nhận các giá trị là nghiệm của đa thức tránh được giải hệ phương trình 5 ẩn.

Bài 3.7. *Cho đa thức*

$$f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+102017.$$

Biết rằng $f(3)=3, f(9)=9, f(12)=12$, $f(2016)=2016$ *và* $f(x)$ *chia cho* $(x-1)$ *được dư là* $b+c+d+e+102016$. *Tìm đa thức* $f(x)$ *(không cần thu gọn đa thức).*

Lời giải. Từ $f(x)$ chia cho $(x-1)$ được dư là $(b+c+d+e+102016)$ nên

$$f(1)=b+c+d+e+102016.$$

Lại có $f(1)=a+b+c+d+e+102017 \Rightarrow a=-1$.

Do đó $f(x)=-x^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+102017$.

Đặt $Q(x)=f(x)-x$. Do $f(3)=3, f(9)=9$, $f(12)=12, f(2016)=2016$,

suy ra $Q(3)=Q(9)=Q(12)=Q(2016)=0$. Do đó $Q(x)$ có 4 nghiệm 3; 9; 12; 2016.

Suy ra: $Q(x)=-(x-3)(x-9)(x-12)(x-2016)(x-m)$.

Vậy $f(x)=-(x-3)(x-9)(x-12)(x-2016)(x-m)+x$.

Lại có:

$$f(0)=-(-3).(-9).(-12).(-2016)(-m)=102017$$

$\Rightarrow m=\frac{102017}{653184}$. Vậy:

$$f(x)=-(x-3)(x-9)(x-12)(x-2016)\left(x-\frac{102017}{653184}\right)+x$$

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức bậc 5 cần tìm năm hệ số, khi biết năm giá trị của đa thức. Bằng cách đặt đa thức trung gian nhận các giá trị là nghiệm của đa thức.

Bài 3.8. *Đa thức*

$$P(x)=x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$$

có giá trị 3; 0; 3; 12; 27; 48 *khi x lần lượt nhận giá trị là* 1; 2; 3; 4; 5; 6. *Xác định đa thức* $P(x)$.

Lời giải. Ta có $P(1)=3=3.(1-2)^2$; $P(2)=0=3.(2-2)^2$;...; $P(6)=48=3.(6-2)^2$.

Đặt $Q(x)=P(x)-3(x-2)^2$ thì $Q(x)$ có các nghiệm 1; 2; 3; 4; 5; 6. Do đó:

$$Q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$$

$$\Rightarrow P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)+3(x-2)^2.$$

Khai triển, rút gọn ta có:

$$P(x)=x^6-21x^5+175x^4-735x^3+1627x^2-1776x+732.$$

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức bậc 6, cần tìm sáu hệ số. Bằng cách đặt đa thức trung gian nhận các giá trị là nghiệm của đa thức ta tìm được các hệ số này. Khó nhất bài toán là chọn đa thức trung gian.

Bài 3.9. *Tìm đa thức bậc sáu $P(x)$ có hệ có của x^6 bằng 1, biết $P(2)=7$, $P(-3)=-28$, $P(4)=63$, $P(-5)=-126$, $P(6)=215$, $P(-7)=-344$.*

Lời giải. Ta có: $P(2)=7=2^3-1;$

$$P(-3)=-28=(-3)^3-1;...;(-7)=-344=(-7)^3-1.$$

Đặt $Q(x)=P(x)-\left(x^3-1\right)$, ta có:

$$Q(2)=Q(-3)=Q(4)=Q(-5)=Q(6)=Q(-7)=0.$$

Do đó $Q(x)$ là đa thức bậc 6 nhận $2;-3;4;-5;6;-7$ làm nghiệm. Suy ra:

$$Q(x)=(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)(x-6)(x+7),$$

($P(x)$ có hệ có của x^6 bằng 1). Do đó:

$$P(x)=(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)(x-6)(x+7)+x^3-1.$$

Khai triển và rút gọn, ta được:

$$P(x)=x^6+3x^5-65x^4-135x^3$$
$$+1144x^2+1212x-5040+x^3-1$$
$$=x^6+3x^5-65x^4-134x^3+1144x^2+1212x-5041.$$

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức bậc 6, cần tìm sáu hệ số. Bằng cách đặt đa thức trung gian nhận các giá trị là nghiệm của đa thức.

Bài 3.10. *Tìm đa thức bậc sáu $P(x)$ có hệ số của x^6 bằng 1, biết $P(-1)=-12$, $P(1)=-10$, $P(2)=0$, $P(3)=32$, $P(4)=98$, $P(5)=210$.*

Lời giải. Gọi đa thức cần tìm là:

$$P(x)=x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f.$$

Ta có: $P(-1)=-12=(-1-2).\left[2.(-1)^2+3.(-1)+5\right];$

$$P(1)=-10=(1-2).\left[2.1^2+3.1+5\right];...;$$

$$P(5)=210=(5-2).\left[2.5^2+3.5+5\right].$$

Đặt $Q(x)=P(x)-(x-2)\left(2x^2+3x+5\right)$. Ta có:

$$Q(-1)=Q(1)=Q(2)=Q(3)=Q(4)=Q(5)=0.$$

$$Q(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5),$$

(vì $Q(x)$ có hệ số của x^6 bằng 1).

Suy ra: $P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$
$$+(x-2)\left(2x^2+3x+5\right).$$

Khai triển và rút gọn, ta được:

$$P(x)=x^6-14x^5+70x^4-138x^3+48x^2+153x-130.$$

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức bậc 6, cần tìm sáu hệ số. Bằng cách đặt đa thức trung gian nhận các giá trị là nghiệm của đa thức ta tìm được các hệ số này. Trong bài toán trên khó nhất là việc chọn đa thức trung gian.

Bài 3.11. *Cho đa thức*

$$P(x)=x^{16}+a_{15}x^{15}+a_{14}x^{14}+....+a_2x^2+a_1x+a_0$$

thỏa mãn $P(1)=6; P(2)=6; P(3)=8; P(4)=12;$ $P(5)=18; P(6)=26; P(7)=36; P(8)=48;$ $P(9)=62; P(10)=78; P(11)=96; P(12)=116;$ $P(13)=138; P(14)=162; P(15)=188; P(16)=216.$

Hãy xác định đa thức $P(x)$ (không cần thu gọn đa thức).

Lời giải. Ta có $P(1)=6=1^2-3.1+8;$

$$P(2)=6=2^2-3.2+8;...$$

$$P(16)=256=16^2-3.16+8.$$

Xét $Q(x)=x^2-3x+8$, đặt $H(x)=P(x)-Q(x)$ ta có $H(i)=0\ \left(\forall i=\overline{1,16}\right)$.

Suy ra $H(x)=(x-1)(x-2)(x-3)...(x-16)$

$$\Rightarrow P(x)=Q(x)+H(x)$$

$$\Rightarrow P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)...(x-16)+x^2-3x+8.$$

Nhận xét. Bài toán xác định đa thức có bậc 16, biết 16 giá trị của đa thức. Bằng cách đặt đa thức trung gian nhận các giá trị là nghiệm của đa thức, từ đó tìm được đa thức ban đầu.

IV. XÁC ĐỊNH ĐA THỨC BIẾT ĐA THỨC THỎA MÃN CÁC TÍNH CHẤT

Bài 4.1. *Cho $f(x)$ là đa thức bậc ba thỏa mãn $f(x)-f(x-1)=x^2$. Tìm đa thức $f(x)$, từ đó hãy tính tổng $T=1^2+2^2+3^2+....+2020^2$.*

Lời giải. Vì đa thức cần tìm là đa thức bậc ba, nên

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

Do $f(x)-f(x-1)=x^2$ nên

$$ax^3+bx^2+cx+d-\left[a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d\right]=x^2.$$

$$\Leftrightarrow 3ax^2+(2b-3a)x+a-b+c=x^2.$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta có $a=\frac{1}{3}; b=\frac{1}{2}; c=\frac{1}{6}$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+d$ (với d tùy ý).

• Ta có: $f(x)-f(x-1)=x^2$, cho x các giá trị lần lượt 1; 2; 3; ....; 2020. Ta được $T=f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+.....+f(2020)-f(2019)$

$=f(2020)-f(0)$.

$=\frac{1}{3}.2020^3+\frac{1}{2}.2020^2+\frac{1}{6}.2020+d-d$

$=2749509870$.

Nhận xét. Dựa vào tính chất của đa thức, ta tìm được các hệ số của đa thức. Căn cứ vào đa thức tìm được tính tổng.

Bài 4.2. *Tìm đa thức $f(x), g(x)$ biết*

$f(0)=2020, g(1)=2021$ *đồng thời*

$f(x)-f(y)=(x+y).g(x-y)$ *với mọi* x, y.

Lời giải. Từ $f(x)-f(y)=(x+y).g(x-y)$ với mọi x, y:

+ Cho y bằng $-x \Rightarrow f(x)=f(-x)$ (1);

+ Cho x bằng $x+1$

$\Rightarrow f(x+1)-f(y)=(x+1+y).g(x+1-y)$.

Lại cho $y=x \Rightarrow f(x+1)-f(x)=(2x+1).g(1)$

$\Rightarrow f(x+1)-f(x)=2021.(2x+1)$ (2).

+ Cho x bằng $x+1$

$\Rightarrow f(x+1)-f(y)=(x+1+y).g(x+1-y)$;

Lại cho $y=-x$

$\Rightarrow f(x+1)-f(-x)=1.g(2x+1)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$2021.(2x+1)=g(2x+1)$, với mọi x.

Do đó $g(x)=2021x$. Từ $f(x)-f(y)=(x+y).g(x-y)$, cho $y=0$, suy ra:

$f(x)-f(0)=x.g(x) \Rightarrow f(x)=x.g(x)+f(0)$

$\Rightarrow f(x)=x.2021x+2020 \Rightarrow f(x)=2021x^2+2020$.

Vậy $f(x)=2021x^2+2020$, $g(x)=2021x$.

Nhận xét. Dựa vào quan hệ của hai đa thức, ta tìm được hai đa thức đã cho bằng cách cho các đa thức các giá trị hợp lý.

Bài 4.3. *Cho $P(x)$ là đa thức có hệ số bậc cao nhất bằng 1 và thỏa mãn:*

$(x^3-3x^2+3x-2).P(x)=(x^3+3x^2+3x+2).P(x-1)$

với mọi x. Xác định đa thức $P(x)$.

Lời giải. Ta có:

$(x^3-3x^2+3x-2).P(x)=(x^3+3x^2+3x+2).P(x-1)$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x+1).P(x)=(x+2)(x^2+x+1).P(x-1)$

với mọi x (1).

Cho $x=-2 \Rightarrow (-2-2).[(-2)^2-(-2)+1].P(-2)=0 \Rightarrow P(-2)=0$

Cho $x=-1 \Rightarrow P(-1)=P(-2)=0$.

Cho $x=0 \Rightarrow P(0)=P(-1)=0$.

Cho $x=1 \Rightarrow P(1)=P(0)=0$.

Do đó $P(-2)=P(-1)=P(0)=P(1)=0$.

Khi đó ta có:

$$P(x)=x(x-1)(x+1)(x+2).Q(x).$$

Thay vào (1) ta có:

$(x-2)(x^2-x+1)x(x-1)(x+1)(x+2).Q(x)$

$=(x+2)(x^2+x+1)(x-1)(x-2)x(x+1).Q(x-1)$

$\Rightarrow (x^2-x+1).Q(x)=(x^2+x+1).Q(x-1)$

$\Rightarrow \frac{Q(x)}{x^2+x+1}=\frac{Q(x-1)}{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow \frac{Q(x)}{x^2+x+1}=\frac{Q(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1}$.

Đặt $R(x)=\frac{Q(x)}{x^2+x+1}$ $(x \neq 0,-2,\pm 1)$

$\Rightarrow R(x)=R(x-1)$, $(x \neq 0,-2,\pm 1) \Rightarrow R(x)=C$ (hằng số).

Vậy $P(x)=x(x-1)(x+1)(x+2)(x^2+x+1)$

(do hệ số có bậc cao nhất của $P(x)$ bằng 1).

Nhận xét. Dựa vào tính chất của đa thức, ta tìm được các giá trị là nghiệm của đa thức. Từ đó xác định được đa thức cần tìm.

Bài 4.4. *Cho hai đa thức $P(x)=x^2+d$ $(d \neq 0)$ và $Q(x)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $P[Q(x)]=Q[P(x)]$. Tìm đa thức $P(x), Q(x)$.*

Lời giải. Vì $P[Q(x)]=Q[P(x)]$

$\Rightarrow (x^3+ax^2+bx+c)^2+d$

$=(x^2+d)^3+a(x^2+d)^2+b(x^2+d)+c$

$$\Rightarrow x^6+2ax^5+(a^2+2b)x^4+(2c+2ab)x^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2+d$$
$$=(x^2+d)^3+a(x^2+d)^2+b(x^2+d)+c.$$

Do vế phải không có hạng tử chứa x^5 và x^3 nên $\begin{cases}2a=0\\2c+2ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\c=0\end{cases}.$

Khi đó ta được: $Q(x)=x^3+bx$

$$\Rightarrow (x^3+bx)^2+d=(x^2+d)^3+b(x^2+d)$$
$$\Rightarrow x^6+2bx^4+b^2x^2+d$$
$$=x^6+3dx^4+(3d^2+b)x^2+bd+d^3 \text{ với mọi } x.$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2b=3d\\b^2=3d^2+b\\bd+d^3=d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b=3d\\b^2=3d^2+b\\b+d^2=1\end{cases}.$$

Giải hệ phương trình, tìm được: $b=-3;d=-2$.

Do đó $P(x)=x^2-2;\ Q(x)=x^3-3x.$

Nhận xét. Dựa vào quan hệ giữa hai đa thức, từ đó xác định các hệ số của hai đa thức.

Bài 4.5. *Cho hai đa thức $P(x), Q(x)$ đều có bậc lớn hơn 0 và có hệ số cao nhất bằng 1 thoả mãn $P[Q(x)]=P(x).Q(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính $Q(2021)-P(2020)$.*

Lời giải. Gọi bậc của $P(x)$ là k, bậc của $Q(x)$ là r; $(k,r\in\mathbb{N}^*)$. Vì $P[Q(x)]=P(x).Q(x)$ nên $kr=k+r\Leftrightarrow(k-1)(r-1)=1\Rightarrow k=r=2.$

Do $P(x)$ và $Q(x)$ đều có hệ số cao nhất bằng 1 nên $P(x)=x^2+bx+c, Q(x)=x^2+mx+n.$

Theo đề bài $P[Q(x)]=P(x).Q(x)$ nên

$$(x^2+mx+n)^2+b(x^2+mx+n)+c=(x^2+bx+c)(x^2+mx+n)$$
$$\Leftrightarrow x^4+2mx^3+(m^2+b+2n)x^2+(2mn+mb)x+n^2+bn+c$$
$$=x^4+(b+m)x^3+(n+bm+c)x^2+(cm+nb)x+nc$$

Đồng nhất hệ số ta được:

$$\begin{cases}2m=b+m\\m^2+b+2n=n+bm+c\\2mn+mb=cm+nb\\n^2+bn+c=nc\end{cases}.$$

Từ đó ta có: $b=m, c=0, b+n=0$

$$\Rightarrow P(x)=x^2+bx,\ Q(x)=x^2+bx-b.$$
$$Q(2021)-P(2020)=2021^2+2021b-b-(2020^2+2020b)=4041.$$

Nhận xét. Dựa vào quan hệ giữa hai đa thức, từ đó xác định bậc của hai đa thức. Khi đó ta xác định hai đa thức và tính được giá trị biểu thức.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

1. Cho đa thức bậc bốn $P(x)$ có hệ số của x^4 bằng 1. Biết $P(1)=10, P(2)=20, P(3)=30$, $P(-12)+P(15)=30$. Tìm đa thức $P(x)$.

2. Cho đa thức $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx-7$. Xác định các hệ số a,b,c,d biết rằng: $P(1)=2003; P(2)=2004; P(3)=2005; P(4)=2006.$

3. Cho đa thức $P(x)=2x^4+ax^2+bx+c$. Biết $P(x)$ chia hết cho $(x-2)$, $P(x)$ chia cho x^2-1 dư x. Tìm đa thức $P(x)$.

4. Cho đa thức $P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Biết $P(1)=0, P(2)=7, P(3)=26,$ $P(4)=63, P(5)=124$. Tìm đa thức $P(x)$.

5. a) Tìm đa thức bậc ba $P(x)$ có hệ số của x^3 bằng 1, biết

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{39}{8}; P\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{407}{64}; P\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{561}{125}.$$

b) Cho đa thức $Q(x)=x^4-10x^3+40x^2-125x-P(-9)$.

Chứng tỏ đa thức $R(x)=P(x)+Q(x)$ luôn là số chẵn với mọi x là số nguyên.

6. Cho đa thức $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. Biết rằng khi x nhận lần lượt các giá trị là: -1; 2; 3; 4 thì $f(x)$ nhận các giá trị tương ứng là 540; 120; 476; 1080.

a) Xác định đa thức $f(x)$.

b) Tìm x nguyên để $f(x)$ là số chính phương.

7. Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên và $P(21)=17, P(37)=33$. Biết $P(N)=N+51$. Tính giá trị của N.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10, THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH, NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1. a) Ta có:

$$x^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\right)^2$$

$$=6+2\sqrt{9-\left(5+2\sqrt{3}\right)}=6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$=6+2\left(\sqrt{3}-1\right)=\left(\sqrt{3}+1\right)^2.$$

Vì $x=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}>0$ nên $x=\sqrt{3}+1$. Do đó: $P=x(2-x)=\left(\sqrt{3}+1\right)\left[2-\left(\sqrt{3}+1\right)\right]$

$$=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(1-\sqrt{3}\right)=1-3=-2.$$

b) Thay $ab+bc+ca=2019$ vào vế trái của đẳng thức ta được: $\dfrac{a^2-bc}{a^2+2019}+\dfrac{b^2-ca}{b^2+2019}+\dfrac{c^2-ab}{c^2+2019}$

$$=\frac{a^2-bc}{a^2+ab+bc+ca}+\frac{b^2-ca}{b^2+ab+bc+ca}+\frac{c^2-ab}{c^2+ab+bc+ca}$$

$$=\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ca}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$$

$$=\frac{\left(a^2-bc\right)(b+c)+\left(b^2-ca\right)(a+c)+\left(c^2-ab\right)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{\left(a^2b+a^2c-b^2c-bc^2\right)+\left(b^2a+b^2c-a^2c-ac^2\right)+\left(ac^2+bc^2-a^2b-ab^2\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$=0.$

Câu 2. a) ĐK: $x\ge -1$. Ta có:

$$x^3+1+\sqrt{(x+1)^3}-9(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+1\right)+(x+1)\sqrt{x+1}-9(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x-8+\sqrt{x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[x^2-x-6+\left(\sqrt{x+1}-2\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[(x-3)(x+2)+\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)\left[x+2+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right]=0$$

Vì $x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}>0$ (do $x\ge -1$) nên

$$\left[\begin{array}{l}x+1=0\\x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right. \text{(thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1;3\}$.

b) ĐK: $x,y\ne 0$. Từ PT thứ hai của hệ, sử dụng hằng đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

Ta có: $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+(-xy)^3-3.\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}.(-xy)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-xy\right)\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+xy\right)^2+\left(\frac{1}{x}+xy\right)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=xy\\\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(\dfrac{1}{y}+xy\right)^2+\left(\dfrac{1}{x}+xy\right)^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=xy\\\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}=-xy\end{array}\right.$$

• *Trường hợp 1.* Ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=xy\\\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=3+x^2y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=xy\\\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2-\dfrac{2}{xy}=3+x^2y^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=xy\\x^2y^2-\dfrac{2}{xy}=3+x^2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=xy\\\dfrac{2}{xy}=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=xy\\xy=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x;y)=\left(\dfrac{2+\sqrt{58}}{9};\dfrac{2-\sqrt{58}}{9}\right)\\(x;y)=\left(\dfrac{2-\sqrt{58}}{9};\dfrac{2+\sqrt{58}}{9}\right)\end{array}\right.$$

• *Trường hợp 2.* Ta có: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}=-xy & (1)\\\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=3+x^2y^2 & (2)\end{cases}$,

từ PT thứ nhất ta có: $\begin{cases}x^2y=-1\\xy^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2y=-1\\x^3y^3=1\end{cases}$

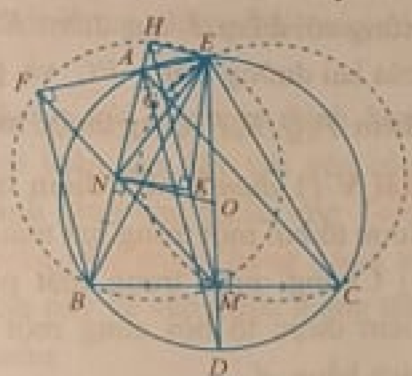
$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1\\x=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=-1$. Thử lại vào PT thứ hai ta thấy không thỏa mãn. Vậy HPT có nghiệm

$$(x;y)\in\left\{\left(\frac{2+\sqrt{58}}{9};\frac{2-\sqrt{58}}{9}\right);\left(\frac{2-\sqrt{58}}{9};\frac{2+\sqrt{58}}{9}\right)\right\}.$$

Câu 3. a) Do M là trung điểm BC, D, E lần lượt là trung điểm cung BC nhỏ và cung BC lớn nên E, O, M, D thẳng hàng và $OM \perp BC$.

Vì $\widehat{EGC}=\widehat{EMC}=90^0$ nên tứ giác $EGMC$ nội tiếp, do đó $\widehat{MGC}=\widehat{MEC}=\widehat{DAC}$, suy ra $GM \,//\, AD$.

b) Ta có MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN \,//\, AC$, suy ra $\widehat{NFA}=\widehat{EAC}$ (đồng vị) mà $\widehat{NAF}=\widehat{HAE}$ (đối đỉnh), AE là đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{EAC}=\widehat{HAE}$, như vậy $\widehat{NFA}=\widehat{NAF}$ nên ΔNFA cân tại N, suy ra $NF=NA=NB$ nên ΔABF vuông tại F.



Lại có AD và AE lần lượt là đường phân giác trong và ngoài góc $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{DAE}=90^0$, suy ra $BF \,//\, AD$. Mà $AD \,//\, HM$ nên $BF \,//\, HM$, vậy $BFHM$ là hình thang (1). Ta có $\widehat{HGE}=\widehat{ECM}=\widehat{HAE}$ nên $AHEG$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{BHE}=90^0$. Do đó $\widehat{BHE}=\widehat{BFE}=\widehat{BME}=90^0$ nên B, F, H, E, M cùng thuộc một đường tròn (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BFHM$ là hình thang cân, vậy $FH=BM$ mà $BM=MC$ nên $FH=MC$.

c) Ta có: $\widehat{MGE}=\widehat{MGC}+\widehat{CGE}=\widehat{BAD}+90^0$

$$=\widehat{BAD}+\widehat{DAE}=\widehat{BAE}\ (3).$$

Mặt khác $\widehat{ABE}=\widehat{GME}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{HE}$) (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\Delta BAE \sim \Delta MGE$ (g.g), mà N là trung điểm AB và K là trung điểm GM nên $\Delta ANE \sim \Delta GKE$ (c.g.c), suy ra $\widehat{ANE}=\widehat{GKE}$ (hai góc tương ứng), suy ra tứ giác $HNKE$ nội tiếp.

Dẫn đến $\widehat{NKE}=90^0$. Áp dụng định lý Pythagore vào ΔNKE ta có: $(KN+KE)^2 \le 2(KN^2+KE^2)=2NE^2$

$$\Rightarrow KN+KE \le \sqrt{2}EN.$$

Câu 4. a) Ta có:

$$\frac{n^5+29n}{30}=\frac{n^5-n}{30}+n=\frac{n(n-1)(n+1)(n^2+1)}{30}+n.$$

Do đó ta cần chứng minh $A=n(n-1)(n+1)(n^2+1) \vdots 30$. Do n và $n-1$ là hai số nguyên liên tiếp nên $n(n-1) \vdots 2 \Rightarrow A \vdots 2$ (1).

Do $n, n-1, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên nên $n, n-1, n+1 \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 3$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A \vdots 6$. Ta chứng minh $A \vdots 5$, xét lần lượt các trường hợp:

- $n=5k, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow A \vdots 5;$
- $n=5k+1, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n-1 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5;$
- $n=5k+2, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n^2+1=25k^2+20k+5 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5;$
- $n=5k+3, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n^2+1=25k^2+30k+10 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5;$
- $n=5k+4, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n+1=5k+5 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5.$

Tổng hợp các trường hợp này ta có $A \vdots 5$, như vậy nếu n là số nguyên thì $\dfrac{n^5+29n}{30}$ cũng là số nguyên.

b) Do $2(x^2+y^2-3x+2y)-1$ và $5(x^2+y^2+4x+2y+3)$ đều là các số chính phương nên tồn tại hai số $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2-3x+2y)-1=a^2 \\ 5(x^2+y^2+4x+2y+3)=b^2 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=7\left[(x+1)^2+(y+1)^2\right]$$

Đặt $X=x+1; Y=y+1, (X, Y \in \mathbb{N}^*)$, khi đó

$$a^2+b^2=7(X^2+Y^2)\ (1).$$

Nhận xét: Một số chính phương khi chia cho 7 được các số dư lần lượt là 0; 1; 2; 4.

Gọi $(A_0; B_0; X_0; Y_0)$ là cặp nghiệm thỏa mãn phương trình (1) sao cho X_0+Y_0 đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

$$A_0^2+B_0^2=7(X_0^2+Y_0^2) \Rightarrow A_0^2+B_0^2 \vdots 7.$$

Từ *nhận xét* ta có A_0 và B_0 phải chia hết cho 7. Đặt $A_0=7A_1; B_0=7B_1, (A_1; B_1 \in \mathbb{N})$. Khi đó

$$49A_1^2+49B_1^2=7\left(X_0^2+Y_0^2\right) \Leftrightarrow 7\left(A_1^2+B_1^2\right)=X_0^2+Y_0^2.$$

Lại áp dụng *nhận xét* ta có $X_0^2+Y_0^2 \vdots 7$ nên $X_0; Y_0$ phải chia hết cho 7. Đặt $X_0=7X_1; Y_0=7Y_1, (X_1; Y_1 \in \mathbb{N}^*)$, suy ra

$$7\left(A_1^2+B_1^2\right)=49X_1^2+49Y_1^2 \Leftrightarrow A_1^2+B_1^2=7\left(X_1^2+Y_1^2\right).$$

Như vậy ta tìm được một cặp số $(X_1; Y_1)$ thỏa mãn phương trình (1) mà $X_1+Y_1<X_0+Y_0$, mâu thuẫn với điều kiện $(X_0; Y_0)$ là cặp nghiệm có tổng nhỏ nhất.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ NỘI
NĂM HỌC 2019 – 2020 *(Thời gian làm bài: 150 phút)*

Bài I *(2 điểm)*

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x^2+5x}\right)=5.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+7=4y^2+4y \\ x^2+3xy+2y^2+x+y=0 \end{cases}.$

Bài II *(2 điểm)*

1) Cho biểu thức $P=abc(a-1)(b+4)(c+6)$, với a,b,c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c=2019$. Chứng minh giá trị của biểu thức P chia hết cho 6.

2) Tìm tất cả số tự nhiên n để giá trị của biểu thức $Q=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+\sqrt{n+2}}$ là số nguyên.

Bài III *(2 điểm)*. Cho biểu thức $K=ab+4ac-4bc$, với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+2c=1$.

1) Chứng minh $K\geq -\dfrac{1}{2}$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức K.

Bài IV *(3 điểm)*. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tia AI cắt đoạn thẳng BC tại điểm J, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (M khác A).

1) Chứng minh $MI^2=MJ.MA$.

2) Kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Đường thẳng AN cắt các tia phân giác trong của góc ABC và góc ACB lần lượt tại các điểm P và Q. Chứng minh N là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

3) Lấy điểm E bất kỳ thuộc cung nhỏ MC của đường tròn (O) (E khác M). Gọi F là điểm đối xứng với điểm I qua điểm E. Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng PC và QB. Chứng minh bốn điểm P,Q,R,F cùng thuộc một đường tròn.

Bài V *(1 điểm)*. Mỗi điểm trong một mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ.

1) Chứng minh trong mặt phẳng đó tồn tại hai điểm được tô bởi cùng một màu và có khoảng cách bằng d.

2) Gọi tam giác có ba đỉnh được tô bởi cùng một màu là tam giác *đơn sắc*. Chứng minh trong mặt phẳng đó tồn tại hai tam giác *đơn sắc* là hai tam giác vuông và đồng dạng với nhau theo tỉ số $k=\dfrac{1}{2019}$.

DƯƠNG TÚ *(Hà Nội)* ***Giới thiệu***

HƯỚNG DẪN GIẢI ...

Như vậy, PT(1) vô nghiệm. Từ đó không tồn tại các cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $2(x^2+y^2-3x+2y)-1$ và $5(x^2+y^2+4x+2y+3)$ đều là các số chính phương.

Câu 5. a) Ta chứng minh BĐT phụ:

$2\left(a^2-ab+b^2\right)^2\geq a^4+b^4$ (*), $\forall a,b\in\mathbb{R}$. Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow 2\left(a^4+b^4+a^2b^2-2a^3b-2ab^3+2a^2b^2\right)\geq a^4+b^4$

$\Leftrightarrow a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^4\geq 0$, $(\forall a,b\in\mathbb{R})$. Áp dụng BĐT (*) có:

$$(a^2-ab+b^2)^2(b^2-bc+c^2)^2(c^2-ca+a^2)^2\geq\frac{(a^4+b^4)(b^4+c^4)(c^4+a^4)}{8}=1$$

Lại có: $(a^2-ab+b^2)^2(b^2-bc+c^2)^2(c^2-ca+a^2)^2=$

$$\left[\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]\left[\left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2\right]\left[\left(c-\frac{1}{2}a\right)^2+\frac{3}{4}a^2\right]\geq 0.$$

Do đó $(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\geq 1$.

b) Gọi $a_i,\left(i=\overline{1,32}\right)$ là số bút mà bạn thứ i nhận được từ thầy giáo. Khi đó

$$a_i\in\mathbb{N}^*,\left(i=\overline{1,32}\right), a_1+a_2+a_3+...+a_{32}\leq 49.$$

Đặt: $S_1=a_1, S_2=a_1+a_2, S_3=a_1+a_2+a_3,...,$
$S_{32}=a_1+a_2+a_3+...+a_{32}$.

Dễ thấy $S_1;S_2;....;S_{32}$ nhận 32 giá trị khác nhau và xét số dư khi chia cho 25 có 25 loại số dư khác nhau. Do đó phải có hai tổng $S_i;S_j$ với $1\leq i<j\leq 32$ sao cho $S_j-S_i\,\vdots\,25$. Lại có $1\leq S_j-S_i\leq 49-1=48$ nên $S_j-S_i=25$. Suy ra: $a_{i+1}+a_{i+2}+...+a_j=25$. Như vậy có một số bạn lớp 9A được nhận số lượng bút tổng cộng là 25.

LƯƠNG XUÂN VINH - NGUYỄN THÁI HÀ
(GV ĐH Kinh tế-Tài chính TP.HCM) ***Giới thiệu***

DIỄN ĐÀN

DẠY HỌC TOÁN

HAI BÀI TOÁN HÌNH HỌC SƠ CẤP HAY VÀ NHỮNG KẾT QUẢ THÚ VỊ THU ĐƯỢC TỪ CHÚNG

LÊ QUỐC HÁN

(GV Viện Sư phạm Tự nhiên, Đại học Vinh)

I. BÀI TOÁN STEINER - LEHMUS

1. 1. Xuất xứ

Trong các định lý trong hình học sơ cấp, *Bài toán Steiner - Lehmus* là một trong những bài toán có số phận kỳ lạ nhất.

Năm 1840, *S. I. Lehmus* gửi cho nhà hình học Thụy Sĩ *J. Steiner* bài toán sau đây với yêu cầu đưa ra một chứng minh hình học thuần túy: ***Tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau là tam giác cân.*** Bài toán này về sau được mang tên *Định lý Steiner - Lehmus.*

Trong chứng minh của mình, *J. Steiner* đã phải dùng công thức tính độ dài đường phân giác trong theo các cạnh của tam giác và các phép biến đổi đại số, không đáp ứng yêu cầu của *S. I. Lehmus*. Vì vậy việc tìm những phương pháp chứng minh sơ cấp và hình học thuần túy cho Định lý Steiner- Lehmus một thời đã trở thành một trào lưu hấp dẫn nhiều nhà toán học trẻ. Trong các chứng minh tìm được như vậy, phải kể đến chứng minh của *Lida Kopeikina* - một nữ sinh lớp 10 ở Matxcơva - năm 1939 và chứng minh của *Volodia Bolchialxki* - một nam sinh lớp 8 cũng ở Matxcova hai năm sau đó. Hiện nay đã có trên 10 cách chứng minh Định lý Steiner- Lehmus, trong đó hơn một nửa chỉ sử dụng kiến thức hình học bậc THCS. Phương pháp chứng minh bằng phản chứng của *R.W. Hogg* đăng trên Tạp chí *The Mathematical Gazette* của Anh năm 1982 được xem là đơn giản nhất.

Jakob Steiner
(1796-1863)

1. 2. Một số phương pháp chứng minh *Định lý Steiner - Lehmus*

a) *Sử dụng công cụ đại số*

Trong chứng minh của mình, *Steiner* đã dùng công thức tính độ dài đường phân giác trong theo ba cạnh của tam giác: *Nếu* d_a, d_b, d_c *là độ dài các đường phân giác trong của tam giác ABC ứng với ba cạnh đối diện* a, b, c *thì*

$$d_a^2 = bc\left[1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right], d_b^2 = ac\left[1-\frac{b^2}{(a+c)^2}\right],$$

$$d_c^2 = ab\left[1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right] \quad (1).$$

Khi đó từ đẳng thức $d_a = d_b$, suy ra

$$(a-b)\left[1+ab.\frac{a^2+ab+b^2+2c(a+b)+c^2}{(b+c)^2(a+c)^2}\right]=0,$$

từ đó $a=b$.

b) *Sử dụng công cụ lượng giác*

Trước hết hãy chứng minh công thức:

$$d_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c},\ d_b = \frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}.$$

Xét hiệu: $d_a - d_b = \dfrac{2c}{(a+c)(b+c)}\times$

$$\times\left[c\left(b\cos\frac{A}{2}-a\cos\frac{B}{2}\right)+ab\left(\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}\right)\right] \quad (2).$$

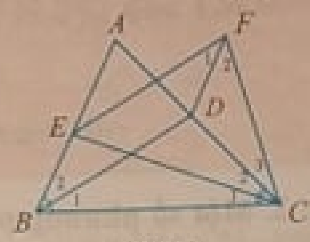
Chú ý rằng $\dfrac{\widehat{A}}{2}, \dfrac{\widehat{B}}{2} \in (0, 90^\circ)$ và hàm số $y=\cos x$ nhận giá trị dương và nghịch biến trong khoảng $(0, 90^\circ)$. Từ (2) suy ra: nếu $a>b$ thì $\widehat{A}>\widehat{B}$ nên $d_a - d_b < 0$, từ đó $d_a < d_b$. Tương tự, từ $a<b$ suy ra $d_a > d_b$.

c) *Sử dụng công cụ hình học*

Sau đây là cách giải của *R.W. Hogg*.

Giả sử tam giác ABC có hai đường phân giác trong BD và CE bằng nhau. Ta hãy chứng minh tam giác ABC cân tại A bằng phương pháp phản chứng.

Giả thiết rằng $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$. Dựng hình bình hành $BEFD$. Khi đó $EF = BD = CE$ và $\widehat{F_1} = \widehat{B_2}$ (h.1).



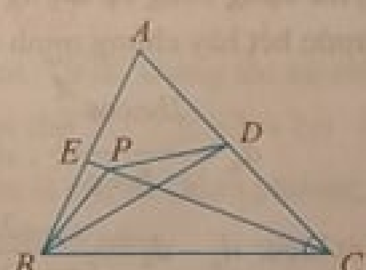
Hình 1

Từ đó tam giác CEF cân tại E nên $\widehat{ECF} = \widehat{EFC}$. Vì $\widehat{C_2} < \widehat{B_2} = \widehat{F_1}$ nên $\widehat{C_1} > \widehat{F_2}$. Suy ra $CD < DF = BE$. Vì hai tam giác BDC và CBE có BC chung, $BD = CE$ và $CD < BE$ nên $\widehat{B_1} < \widehat{C_1}$. Từ đó $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$: mâu thuẫn với giả thiết phản chứng. Tương tự, trường hợp $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$ cũng không thể xảy ra. Vậy $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ và do đó tam giác ABC cân tại A.

3. Một số kết quả tương tự

Từ (2) nhận được kết quả sau: *Trong một tam giác, ứng với góc lớn hơn là đường phân giác trong bé hơn.* Tạp chí *American Mathematical Monthly* năm 1963 đã đăng lời giải thuần túy hình học kết quả trên của hai kỹ sư người Anh là *G. Jylbert* và *D. Mac Donnell* như sau:

Giả sử $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$, ta phải chứng minh $BD < CE$ (h.2). Lấy điểm P trên đoạn CE sao cho $\widehat{DBP} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$.



Hình 2

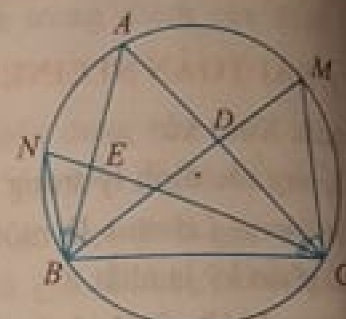
Do $\widehat{DBP} = \widehat{DCP}$ nên bốn điểm B, P, D, C cùng nằm trên một đường tròn. Vì góc $\widehat{DCB} < \widehat{PBC}$ nên sđ $\overset{\frown}{BD} <$ sđ $\overset{\frown}{CP}$, do đó $BD < CP$, suy ra $BD < CP < CE$.

Bây giờ ta xét một số bài toán tương tự.

Bài toán 1. *Hai đường phân giác trong BD, CE của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác đó tương ứng tại M, N. Xác định hình dạng của tam giác ABC biết rằng BM = CN.*

Bài này xem ra có vẻ dễ, và không ít học sinh trả lời rằng tam giác ABC cân tại A. Thực ra không phải hoàn toàn như vậy. Nếu chỉ dùng thuần túy kiến thức hình học, câu trả lời khó đầy đủ. Ở đây ta sử dụng công cụ lượng giác.

Lời giải. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Hình 3

Đặt $\widehat{ABC} = \alpha, \widehat{ACB} = \beta$. Theo định lý hàm số sin, ta có:

$$BM = 2R\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$CN = 2R\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right).$$

Do đó:

$$BM = CN \Leftrightarrow \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \beta + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \frac{\beta}{2} \\ \beta + \frac{\alpha}{2} = 180^0 - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \alpha + \beta = 120^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB = AC \\ \widehat{BAC} = 60^0 \end{array}\right..$$

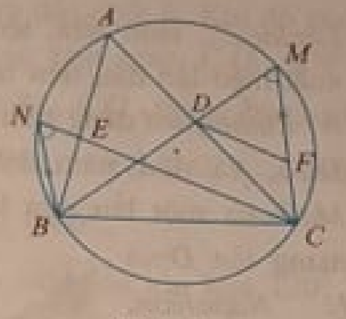
Vậy điều kiện cần và đủ để $BM = CN$ là tam giác ABC cân tại A hoặc góc A bằng 60^0.

Kết quả khá bất ngờ khi xuất hiện điều kiện thứ hai $\widehat{BAC} = 60^0$. Có thể giải bài toán này chỉ bằng kiến thức hình học không?

Bài toán 2. *Hai đường phân giác trong BD, CE của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác đó tương ứng tại M, N. Xác định hình dạng của tam giác ABC biết rằng DM = EN.*

Khác với bài toán trên, nếu sử dụng công cụ đại số hay lượng giác thì lời giải sẽ khá phức tạp (chẳng hạn có thể dùng hệ thức lượng trong đường tròn $BD.DM = AD.DC, CE.EN = AE.EB$ và tính chất đường phân giác của tam giác $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}, \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC}$). Ta sẽ chứng minh tam giác ABC cân tại A bằng thuần túy hình học. Muốn vậy ta dùng phương pháp phản chứng.

Lời giải. Giả sử tam giác ABC không cân tại A. Không mất tổng quát, giả sử $AB < AC$.



Hình 4

Thế thì $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ (3) nên $\widehat{MBC} > \widehat{NCB}$. Từ đó $MC > NB$. Trên MC lấy điểm F sao cho $MF = NB$ (h.4). Khi đó $\Delta ENB = \Delta DMF$ (c.g.c) nên $\widehat{NEB} = \widehat{MDF} < \widehat{MDC}$ hay

$$\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{ACB} < \widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

Từ đó $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$, mâu thuẫn với (3).

Tương tự như Định lý Steiner- Lehmus, từ Bài toán 2 ta suy ra

Bài toán 2a. *Hai đường phân giác trong BE, CF của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác đó tương ứng tại M, N. Chứng minh rằng $EM > FN$ khi và chỉ khi $AB < AC$.*

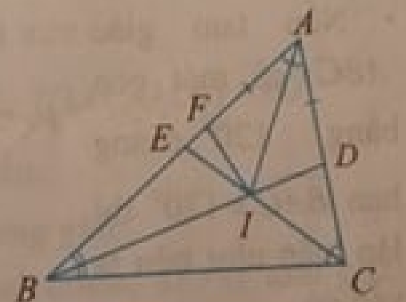
Bạn đọc tự chứng minh kết quả này.

Đề cập đến đường phân giác trong tam giác, không thể không nhắc đến đường tròn nội tiếp tam giác. Sau đây là một ví dụ.

Bài toán 3. *Hai đường phân giác trong BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại I. Xác định hình dạng của tam giác ABC biết rằng $ID = IE$.*

Có thể giải bài toán này bằng hình học như sau. Xét hai trường hợp:

- Nếu $AD = AE$ thì $\Delta AID = \Delta AIE$ (c.c.c) nên $\widehat{ADI} = \widehat{AEI}$. Từ đó $\Delta ADB = \Delta AEC$ (g.c.g). Suy ra $AB = AC$.
- Nếu $AD \neq AE$, không mất tổng quát, giả sử $AD < AE$. Trên đoạn AE lấy điểm F sao cho $AD = AF$ (h.5). Khi đó $\Delta ADI = \Delta AFI$ (c.g.c) nên



Hình 5

$$IF = ID = IE.$$

Do đó tam giác IEF cân tại I, suy ra $\widehat{IFE} = \widehat{IEF}$. Từ đó $\widehat{ADI} = \widehat{AFI} = \widehat{BEI}$.

Suy ra tứ giác $ADIE$ nội tiếp và từ đó: $\widehat{BAC} + \widehat{DIE} = 180^0$ hay $\widehat{BAC} + 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 180^0$.

Suy ra $\widehat{BAC} = 60^0$. Như vậy, nếu $ID = IE$ thì tam giác ABC cân tại A hoặc góc A bằng 60^0. Điều ngược lại cũng đúng. Ta có thể chứng minh kết quả này bằng thuần túy hình học hoặc dùng công thức tính độ dài đường phân giác trong của tam giác theo ba cạnh của nó.

Kết quả sau đây có thể chứng minh tương tự Định lý Steiner- Lehmus. Chú ý rằng lời giải các bài toán sau có thể xem hình 5.

Bài toán 4. *BD, CE là hai đường phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $BD + BE = CD + CE$ thì tam giác ABC cân tại A.*

Lời giải. Từ $BD + BE = CD + CE$ suy ra

$$BD - CE = CD - BE$$

hay
$$\frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c} - \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b} = \frac{ab}{a+c} - \frac{ac}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{(a+b)(a+c)}\left[bc\left(\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right) + a\left(c\cos\frac{B}{2} - b\cos\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{a}{(a+b)(a+c)}(b-c)(a+b+c) \quad (4).$$

Do đó nếu $AB > AC$ hay $c > b$ và $0 < \frac{\widehat{B}}{2} < \frac{\widehat{C}}{2} < 90^0$ thì $\cos\frac{B}{2} > \cos\frac{C}{2}$ nên vế trái của (4) dương, trong khi đó vế phải (4) âm, mâu thuẫn. Tương tự nếu $AB < AC$ cũng nhận được mâu thuẫn. Vậy $AB = AC$ và do đó tam giác ABC cân tại A.

Các bài toán trên đều có tính đối xứng. Trong trường hợp giả thiết không có tính đối xứng, lời giải khó hơn chút ít.

Bài toán 5. (Olympic Toán Quốc tế, 2001) *BD, CE là hai đường phân giác trong của tam giác ABC. Tính các góc B, C của tam giác ABC biết $\widehat{ABC} = 60^0$ và $BC + CD = BE + EC$.*

Lời giải. Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$ và

$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Từ $BC+CD=BE+EC$ suy ra:

$$a+\frac{ab}{a+c}=\frac{ac}{a+b}+\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow a(a+b)(a+c)+ab(a+b)=ac(a+c)+2ab(a+c)\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow bc+(a+b)^2-c^2=2b(a+c)\cos\frac{C}{2}.$$

Thay $(a+b)^2-c^2=4p(p-c)=4ab\cos^2\frac{C}{2}$ (định lý hàm số côsin cho ΔABC) vào nhận được:

$$bc+4ab\cos^2\frac{C}{2}=2b(a+c)\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow c\left(1-2\cos\frac{C}{2}\right)=2a\cos\frac{C}{2}\left(1-2\cos\frac{C}{2}\right).$$

Vì $\widehat{ABC}=60^0$ nên $1-2\cos\frac{C}{2}\neq 0$. Từ đó

$$c=2a\cos\frac{C}{2}\Leftrightarrow \sin C=2\sin A\cos\frac{C}{2}$$

hay $\sin\frac{C}{2}=\sin A$. Từ đó $\widehat{C}=2\widehat{A}$ nên

$$\widehat{A}=40^0, \widehat{C}=80^0 \text{ (vì } \widehat{ABC}=60^0\text{)}.$$

Bài toán này có thể giải bằng thuần túy hình học nhưng lời giải phức tạp hơn nhiều.

Cuối cùng, bạn đọc có thể chuyển các kết quả trên bằng cách thay "*phân giác trong*" bởi "*phân giác ngoài*" hoặc "*đường cao*" hay "*đường trung tuyến*" của tam giác để nhận được kết quả tương tự.

II. BÀI TOÁN NAPOLÉON

2.1. Vài nét lịch sử

Kết quả sau đây thường được gọi là *Bài toán Napoléon*

Bài toán 6. *Dựng về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều BCD, CAE, ABF. Khi đó các tâm O_1, O_2, O_3 của ba tam giác đều vừa dựng (theo thứ tự) là đỉnh của một tam giác đều.*

Napoléon Bonnaparte là một vị Hoàng đế nước Pháp nổi tiếng hồi đầu thế kỉ XIX, thời thơ ấu là một học sinh xuất sắc về toán, và khi trở thành Hoàng đế, ông là bạn bè khá thân thiết của những nhà toán học đương thời như *Fourier*, *Monge*, *Laplace*,... Hơn nữa, tên gọi cho định lý đó đã xuất hiện lần đầu tiên trong bài báo của Tiến sĩ *W. Rutherford* đăng trên *The Ladies Diary* năm 1825, và đến năm 1938 Tạp chí Toán học *Mathesis* một lần nữa khẳng định kết quả trên mang tên *Định lý Napoléon*, nhưng chứng đó bằng chứng chưa đủ sức thuyết phục rằng *Napoléon* là *người đầu tiên* tìm ra kết quả đó.

Napoléon Bonaparte
(1769-1821)

2. 2. Một số phương pháp chứng minh *Bài toán Napoléon*

Bài toán Napoléon có nhiều cách giải. Sau đây là một số cách giải quen thuộc.

a) *Sử dụng công cụ hình học thuần túy*

• Xét trường hợp các góc của tam giác ABC nhỏ hơn 120^0.

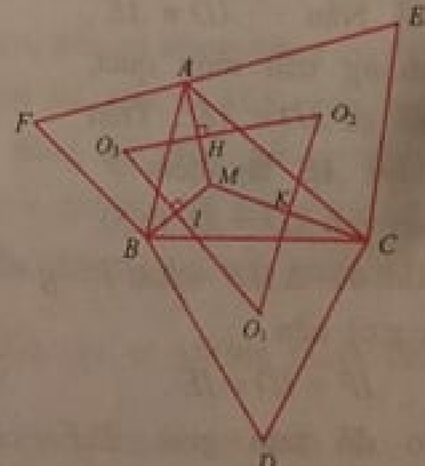
Hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và CAE cắt nhau tại M.

Khi đó $\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=120^0$ nên $\widehat{AMB}=120^0$ và do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF đi qua M. Gọi H, I, K là các giao điểm của O_2O_3 với AM, của O_3O_1 với BM và của O_1O_2 với CM. Khi đó $O_2O_3\perp AM, O_3O_1\perp BM$ và $\widehat{AMB}=120^0$ nên $\widehat{O_1O_3O_2}=180^0-\widehat{AMB}=60^0$ (vì tứ giác MHO_3I nội tiếp). Tương tự: $\widehat{O_3O_2O_1}=60^0$ nên $\Delta O_1O_2O_3$ đều.

• Nếu tam giác ABC có một góc bằng 120^0, chẳng hạn $\widehat{BAC}=120^0$ thì lập luận như trên ta vẫn có

$$\widehat{O_1O_3O_2}=60^0,$$

nhưng lập luận để chứng tỏ hai góc



Hình 6

còn lại bằng 120^0 có thay đổi chút ít. Khi đó các đường tròn ngoại tiếp các tam giác CAE, ABF tiếp xúc nhau tại A nên O_3, A, O_2 thẳng hàng và $\widehat{O_3AC} = \widehat{O_2AE} = 30^0$, mà $AC \perp O_1O_2$ nên $\widehat{AO_2O_1} = 60^0$ hay $\widehat{O_3O_2O_1} = 60^0$.

• Nếu tam giác ABC có một góc lớn hơn 120^0, chẳng hạn $\widehat{BAC} > 120^0$ thì giao điểm M của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác CAE, ABF sẽ nằm ngoài tam giác ABC và $O_2O_3 \perp AM$ nên lập luận còn lại thay đổi ít nhiều.

Khi đó $\widehat{BMA} = \widehat{BFA} = 60^0, \widehat{AMC} = \widehat{AEC} = 60^0$ nên $\widehat{BMC} = 120^0$. Mà $\widehat{BDC} = 60^0$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD đi qua M. Từ đó $\widehat{O_1O_3O_2} = \widehat{BMA} = 60^0$.

Tương tự: $\widehat{O_1O_2O_3} = \widehat{AMC} = 60^0$.

b) *Sử dụng công cụ biến hình*

Ta cần sử dụng tính chất của tích hai phép quay sau đây:

Tính chất. *Tích hai phép quay $Q_1(O_1;\varphi_1)$ và $Q_2(O_2;\varphi_2)$ với $\varphi_1 + \varphi_2 \neq k.360^0$ $(k \in \mathbb{Z})$ là một phép quay có tâm O_3, trong đó O_3 là giao điểm của hai tia O_1x và O_2y với $(O_1x, O_1O_2) = \frac{\varphi_1}{2}$ và*

$(O_2O_1, O_2y) = \frac{\varphi_2}{2}$.

Trở lại với định lý Napoléon: Xét các phép quay $Q_3(O_3;-120^0)$, $Q_2(O_2;-120^0)$ và $Q_1(O_1;60^0)$. Thế thì $Q_3 : B \mapsto A, Q_2 : A \mapsto C, Q_1 : B \mapsto C$. Ta thấy tích hai phép quay Q_3 và Q_2 là một phép quay 60^0 biến B thành C. Đó chính là phép quay Q_1. Theo tính chất trên có:

$$(O_3O_1, O_3O_2) = 60^0,\ (O_2O_1, O_2O_3) = 60^0$$

nên tam giác $O_1O_2O_3$ đều.

c) *Sử dụng công cụ lượng giác*

Sử dụng định lý hàm số côsin: *Trong tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$ có*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ và công thức}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$ và diện tích tam giác ABC bằng S. Khi đó $S = \frac{1}{2}bc\sin A$. Thế thì $O_2A = \frac{2}{3}.\frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Tương tự: $O_3A = \frac{c}{\sqrt{3}}$. Vì $\widehat{O_2AO_3} = 60^0 + \hat{A}$ nên

$$\cos\widehat{O_2AO_3} = \cos(60^0 + A) =$$

$$= \cos 60^0 \cos A - \sin 60^0 \sin A = \frac{1}{2}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A.$$

Áp dụng định lý hàm số côsin cho ΔO_2AO_3, có:

$$O_2O_3^2 = O_2A^2 + O_3A^2 - 2O_2A.O_3A.\cos\widehat{O_2AO_3}$$

$$= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{4bc} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S\right).$$

Tương tự: $O_1O_2^2 = \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S\right)$,

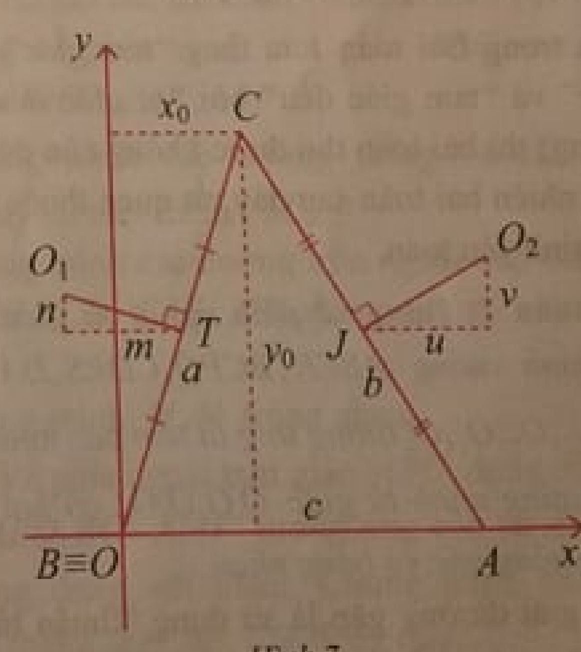
$$O_1O_3^2 = \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S\right).$$

Do đó $O_1O_2 = O_1O_3 = O_2O_3$, nên tam giác $O_1O_2O_3$ là tam giác đều.

d) *Sử dụng công cụ tọa độ*

Lập hệ trục tọa độ vuông góc xOy có gốc tọa độ $O \equiv B$, trục Ox chứa A.

Gọi T và J tương ứng là trung điểm của BC và CA. Thế thì $TO_1 = \frac{a}{\sqrt{12}}$.



Hình 7

Đặt $x_C = x_0, y_C = y_0, |x_T - x_{O_1}| = m, |y_T - y_{O_1}| = n,$

$|x_J - x_{O_2}| = u, |y_J - y_{O_2}| = v.$

Khi đó $m^2 + n^2 = \frac{a^2}{12}$, $\frac{m}{n} = \frac{y_0}{x_0}$. Chú ý rằng $x_0^2 + y_0^2 = a^2$ nhận được $m = \frac{y_0}{\sqrt{12}}, n = \frac{x_0}{\sqrt{12}}$.

Tương tự, có $u^2 + v^2 = \frac{b^2}{12}$, $\frac{u}{v} = \frac{y_0}{c - x_0}$ và $(c - x_0)^2 + y_0^2 = b^2$ nhận được $u = \frac{y_0}{\sqrt{12}}, v = \frac{c - x_0}{\sqrt{12}}$.

Vì $O_1\left(\frac{x_0}{2} - m; \frac{y_0}{2} + n\right)$, $O_2\left(\frac{c + x_0}{2} + u; \frac{y_0}{2} + v\right)$

nên $O_1O_2^2 = \left(\frac{x_0}{2} - m - \frac{c + x_0}{2} - u\right)^2 + \left(\frac{y_0}{2} + n - \frac{y_0}{2} - v\right)^2$

$= \left(-\frac{c}{2} - u - m\right)^2 + (n - v)^2 = \left(\frac{c}{2} + \frac{2y_0}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{-c + 2y_0}{\sqrt{12}}\right)^2$

$= \frac{c^2}{4} + \frac{cy_0}{\sqrt{3}} + \frac{y_0^2}{3} + \frac{c^2}{12} - \frac{cx_0}{3} + \frac{x_0^2}{3}.$

Mặt khác $x_0^2 + y_0^2 = a^2$ và $2cx_0 = a^2 - b^2 + c^2$ nên

$$O_1O_2^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{cy_0}{\sqrt{3}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2S_{\Delta ABC}}{\sqrt{3}}.$$

$$= \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S_{\Delta ABC}\right).$$

Tương tự: $O_2O_3^2 = O_3O_1^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S_{\Delta ABC}).$

Suy ra ΔABC đều.

3. Một số kết quả tương tự

Nếu trong Bài toán 1 ta thay "*tam giác*" bởi "*tứ giác*" và "tam giác đều" bởi "*tứ giác đều*" (hình vuông) thì bài toán thu được không còn đúng nữa. Tuy nhiên bài toán sau đây rất quen thuộc với các học sinh yêu toán.

Bài toán 7. *Dựng về phía ngoài tứ giác ABCD các hình vuông ABEN, BCPQ, CDRS, DATV và gọi O_1, O_2, O_3, O_4 tương ứng là tâm các hình vuông đó. Chứng minh tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ có hai đường chéo vuông góc và bằng nhau.*

Cách giải thường gặp là sử dụng "thuần túy hình học" (bạn đọc tự vẽ hình).

Lời giải. Trước hết ta nhận xét rằng $\Delta ABQ = \Delta EBC$ (c.g.c) nên $AQ = EC, \widehat{BAQ} = \widehat{BEC}$. Mà $AB \perp EB$ nên $AQ \perp EC$. Gọi M là trung điểm của AC thì O_1M là đường trung bình của tam giác AEC nên $O_1M // EC$ và $O_1M = \frac{1}{2}EC$.

Tương tự có $O_2M // QA$ và $O_2M = \frac{1}{2}QA$. Suy ra $O_1M \perp O_2M, O_1M = O_2M$. Tương tự có $O_3M \perp O_4M, O_3M = O_4M$ nên $\Delta O_1MO_3 = \Delta O_2MO_4$ (c.g.c). Từ đó $O_1O_3 = O_2O_4$ và $\widehat{MO_1O_3} = \widehat{MO_2O_4}$. Mà $O_1M \perp O_2M$ nên $O_1O_3 \perp O_2O_4$.

Để tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông cần thêm một giả thiết nữa: *tứ giác ABCD là hình bình hành*. Do đó nhận được

Bài toán 8. *Dựng về phía ngoài hình bình hành ABCD các hình vuông ABEN, BCPQ, CDRS, DATV và gọi O_1, O_2, O_3, O_4 tương ứng là tâm các hình vuông đó. Chứng minh tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.*

Bây giờ ta sử dụng "Định lý bốn điểm": *Với bốn điểm A, B, C, D thì AC vuông góc với BD khi và chỉ khi* $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ để giải một số bài toán tương tự hay tổng quát hơn.

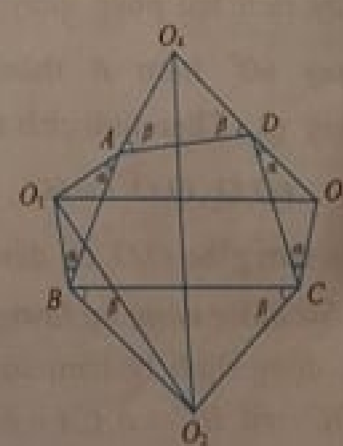
Bài toán 9. *Dựng về phía ngoài tứ giác ABCD các tam giác cân $AO_1B, BO_2C, CO_3D, DO_4A$ sao cho $\widehat{O_1AB} = \widehat{O_1BA} = \alpha, \widehat{O_2BC} = \widehat{O_2CB} = \beta$, $\widehat{O_3CD} = \widehat{O_3DC} = \alpha, \widehat{O_4DA} = \widehat{O_4AD} = \beta$ với $\alpha + \beta = 90^0$. Chứng minh O_1O_3 vuông góc với O_2O_4.*

Lời giải. Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d.$

Từ giả thiết suy ra:

$$O_1B = \frac{a}{2\cos\alpha},$$

$$O_2B = \frac{b}{2\cos\beta}.$$



Hình 8

Áp dụng định lí hàm số côsin cho tam giác O_1BO_2 có:

$$O_1O_2^2 = O_1B^2 + O_2B^2 - 2.O_1B.O_2B.\cos\left(90^0 + \widehat{ABC}\right)$$

$$= \frac{a^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{b^2}{4\cos^2\beta} + 2.\frac{ab}{2\cos\alpha.2\cos\beta}.\sin\widehat{ABC}$$

$$= \frac{a^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{b^2}{4\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}S_{\Delta ABC}.$$

Tương tự: $O_3O_4^2 = \frac{c^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{d^2}{4\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}S_{\Delta ACD}.$

Do đó $O_1O_2^2 + O_3O_4^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{b^2}{4\cos^2\beta} +$

$$+\frac{c^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{d^2}{4\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}S_{ABCD}.$$

Tương tự: $O_1O_4^2 + O_2O_3^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{b^2}{4\cos^2\beta} +$

$$+\frac{c^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{d^2}{4\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos\alpha.\cos\beta}S_{ABCD}$$

nên $O_1O_2^2 + O_3O_4^2 = O_1O_4^2 + O_2O_3^2 \Rightarrow O_1O_3 \perp O_2O_4$.

Bài toán 7 là trường hợp đặc biệt của bài toán 9 khi $\alpha = \beta = 45^0$. Với $\alpha = \beta = 30^0$ ta nhận được:

Bài toán 10. *Dựng về phía ngoài tứ giác $ABCD$ các tam giác đều ABM, BCE, CDN, DAF và gọi O_1, O_2, O_3, O_4 tương ứng là tâm các tam giác đều đó. Chứng minh O_1O_3 vuông góc với EF; O_2O_4 vuông góc với MN.*

Sau đây là một số bài toán liên quan dành cho bạn đọc.

1. K là một điểm tùy ý trên đường phân giác trong AD của tam giác ABC. Gọi E, F tương ứng là các giao điểm của các đường thẳng BK, CK với AC, AB. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A khi và chỉ khi $BE = CF$.

Phát biểu và giải bài toán tương tự.

2. Gọi AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi $4S_{\Delta DEF} = S_{\Delta ABC}$.

Phát biểu và giải bài toán tương tự.

3. Các đường phân giác trong AD, BE, CF của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ấy tương ứng tại M, N, P. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$\frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP} = \frac{9}{4}.$$

Phát biểu và giải bài toán tương tự.

4. Gọi AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác không cân ABC. Chứng minh rằng nếu tam giác DEF cân tại D thì tam giác ABC có góc A tù.

5. Cho tam giác ABC cân tại A có AD, BE là các đường phân giác trong. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC. Tính số đo góc A của tam giác ABC biết $\widehat{BEK} = 45^0$.

6. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy các điểm M, N sao cho $AM = MN = NC$. Trên cạnh BC lấy các điểm P, Q sao cho $BP = PQ = QC$. Trên cạnh CA lấy các điểm R, S sao cho $CR = RS = SA$. Dựng phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều MND, PQE, RSF. Chứng minh tam giác DEF là tam giác đều.

7. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và diện tích bằng S. Dựng về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều CAE, ABF và gọi M, N là tâm của các tam giác đều đó. Gọi I và J tương ứng là các điểm đối xứng của M và N qua AC và AB.

a) Tính IJ^2 theo a, b, c và S. Từ đó suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

b) Chứng minh bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

8. Giải chi tiết các Bài toán 7 và Bài toán 10.

9. Dựng về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều BCD, CAE, ABF.

a) Chứng minh các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại một điểm (M).

b) Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều BCD, CAE, ABF đồng quy tại một điểm (N).

c) Chứng minh M, N trùng nhau.

10. a) Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác ABD, BCE, CAF tương ứng cân tại D, E, F và đồng dạng với nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng AE, BF, CD đồng quy.

b) Đề xuất và giải các bài toán tương tự.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/515 (Lớp 6). Hai nhà ga A và B cách nhau 999 km. Những cột cây số dọc theo đường sắt nối liền A và B chỉ những khoảng cách từ các cột cây số đến A và đến B. Chúng ghi như sau:

$$0/999;\ 1/998;\ 2/997;\ \ldots;\ 999/0.$$

Hỏi trong các cột trên, có bao nhiêu cột chỉ có hai chữ số khác nhau?

TẠ MINH HIẾU
(GV THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Bài T2/515 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cạnh BC cố định, đỉnh A di động. Kẻ phân giác AD của tam giác. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với phân giác AD tại N. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng khi đỉnh A di động thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

ĐẬU CÔNG NHO
(GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)

Bài T3/515. Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $(a,6)=1$ và $a+b\,\vdots\,3$. Giả sử p,q là các số nguyên tố sao cho $pq+a$ và $bp+q$ cũng là các số nguyên tố. Chứng minh rằng $a+6$ là số nguyên tố.

HOÀNG NGỌC MINH
(GV THPT chuyên KHTN, Hà Nội)

Bài T4/515. Cho đường tròn (O,R). Từ một điểm A ở ngoài đường tròn kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm) và cát tuyến ADE (D nằm giữa A và E). BC cắt OA tại H. Từ H kẻ đường thẳng song song với BE cắt AB tại K. Chứng minh BD đi qua trung điểm của HK.

PHẠM TUẤN KHẢI
(Quận Hoàng Mai, Hà Nội)

Bài T5/515. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3+x(y+z)^2=26 \\ y^3+y(z+x)^2=40. \\ z^3+z(x+y)^2=54 \end{cases}$$

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/515. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^3+x+2}=x^4-x^3-7x^2-x+10$$

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Bài T7/515. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x+y\le 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=x^2(6-x)+y^2(6-y)+(x+y)\left(\frac{1}{xy}-xy\right).$$

NGUYỄN VĂN NHO
(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghệ An)

Bài T8/515. Cho tam giác ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. D là giao điểm thứ hai của (O) và AI. P là giao điểm của BC và đường thẳng qua I vuông góc với AI. Q là điểm đối xứng của I qua O. Chứng minh rằng $\widehat{PAQ}=\widehat{PDQ}=90^0$.

DƯƠNG THỊ XUÂN AN
(GV THPT chuyên Bến Tre, Bến Tre)

Bài T9/515. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{n^3+3n^2+3n}\right]}{n^4},$$

trong đó n là số nguyên dương và kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/515. Cho số nguyên dương n sao cho $6n+1$ và $20n+1$ đều là các số chính phương. Chứng minh rằng $58n+11$ là hợp số.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T11/515. Cho hàm $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục với $g(a) \le g(b)$ và $f:[a,b] \to [g(a), g(b)]$ là hàm tăng. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm.

TRẦN MINH HIỀN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T12/515. Cho tam giác ABC, O, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác. S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. K, L theo tự là điểm đối xứng của S qua AB, AC. Chứng minh rằng KL đi qua trung điểm của OH.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

NGUYỄN NGỌC TÚ

(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài L1/515. Một sóng ngang truyền trên sợi dây với tốc độ và biên độ không đổi, bước sóng 60 cm. Hai phần tử sóng tại M, N có vị trí cân bằng cách nhau 10 cm. Tại một thời điểm li độ của M, N đối nhau và chúng cách nhau 12,5cm. Xác định biên độ của sóng.

VIỆT CƯỜNG *(Hà Nội)*

Bài L2/515. Điện năng từ một trạm điện được truyền đi dưới điện áp 20kV, hiệu suất trong quá trình truyền tải là $H_1 = 80\%$. Biết rằng công suất truyền tải đến nơi tiêu thụ là không đổi, muốn hiệu suất truyền tải tăng lên $H_2 = 95\%$ thì phải tăng điện áp truyền đi đến giá trị bằng bao nhiêu?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/515 (For 6th grade). Two stations A and B are 999 km away. The milestones along the railway from A to B show the distances from that point to A and B as follows

0/999; 1/998; 2/997; . . .; 999/0.

Among these milestones, how many of them contains only two different digits?

Problem T2/515 (For 7th grade). Given a triangle ABC with the side BC is fixed and the vertex A can vary. Draw the perpendicular bisector AD. Through C draw a perpendicular line to AD at N. Let M be the midpoint of AC. Show that when A is moving, MN always passes through a fixed point.

Problem T3/515. Suppose that a and b are positive integers so that $(a,6)=1$ and $a+b \vdots 3$. Assume that p, q are prime numbers so that both $pq+a$ and $bp+q$ are also prime numbers. Prove that $a+6$ is a prime number.

Problem T4/515. Given a circle (O,R). From a point A outside the circle we draw two tangents AB, AC (B, C are touch points) and a secant ADE (D is in between A and E). The line BC intersects OA at H. From H draw the line parallel to BE. That line intersects AB at K. Show that BD passes through the midpoint of HK.

Problem T5/515. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^3 + x(y+z)^2 = 26 \\ y^3 + y(z+x)^2 = 40. \\ z^3 + z(x+y)^2 = 54 \end{cases}$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/515. Solve the equation

$$\sqrt{x^3+x+2} = x^4 - x^3 - 7x^2 - x + 10.$$

Problem T7/515. Suppose that x, y are positive numbers so that $x+y \le 6$. Find the minimum value of the expression

$$P = x^2(6-x) + y^2(6-y) + (x+y)\left(\frac{1}{xy} - xy\right).$$

Problem T8/515. Given a triangle ABC. Let O and I be the circumcenter and the incenter of the triangle respectively. Let D be the second intersection between (O) and AI. Let P be the intersection between BC and the line which passes though I and perpendicular to AI. Let Q be the reflection point of I in O. Show that $\widehat{PAQ}=\widehat{PDQ}=90^0$.

Problem T9/515. Find the limit

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+...+[\sqrt[3]{n^3+3n^2+3n}]}{n^4},$$

where n is a positive integer and the notion $[x]$ denote the integer which does not exceed x.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/515. Given a positive integer n so that both $6n+1$ and $20n+1$ are perfect squares. Show that $58n+11$ is a composite number.

Problem T11/515. Suppose that g: $[a,b]\to\mathbb{R}$ is a continuous functions with $g(a)\le g(b)$ and $f:[a,b]\to[g(a),g(b)]$ is an increasing function. Show that the equation $f(x)=g(x)$ has at least one solution.

Problem T12/515. Given a triangle ABC. Let O and H be the circumcenter and the orthocenter of the triangle respectively. Let S be the circumcenter of the triangle OBC. Denote K and L the reflection points of S in AB and AC respectively. Show that KL passes through the the midpoint of OH.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science Vietnam National University, Hanoi)

GIẢI ĐÁP ĐỐ VUI T12.2019:
MA PHƯƠNG 4×4 VỚI SỐ 2019

Đề bài. *Cho hình vuông ABCD gồm 16 ô vuông như hình 1. Bạn hãy điền tiếp vào mỗi ô vuông còn trống của hình vuông đó một số gồm ba chữ số với các chữ số đó thuộc tập hợp các chữ số {3, 4, 5, 6} sao cho các số trong các ô vuông đều khác nhau mà tổng các số theo mỗi hàng ngang, tổng các số theo mỗi cột dọc, tổng các số theo mỗi đường chéo AC và BD đều bằng nhau và bằng 2019.*

A — B

346			
	464		
		545	
			664

D — C

Hình 1

Lời giải. Tổng các số theo đường chéo AC bằng 346 + 464 + 545 + 664 = 2019. Gọi a, b, c, d là các chữ số hàng đơn vị của 4 số thuộc một cột thì phải có $12 = 3.4 \le a + b + c + d \le 6.4 = 24$ nên $a + b + c + d = 19$. Từ 19 = 3 + 4 + 6 + 6 = 3 + 5 + 5 + 6 = 4 + 4 + 5 + 6 = 4 + 5 + 5 + 5 ta tạo được ma phương 4×4 sao cho tổng các số theo mỗi hàng ngang, tổng các số theo mỗi cột dọc, tổng các số theo mỗi đường chéo AC và BD đều bằng nhau và bằng 19. Làm tương tự khi a, b, c, d là các chữ số hàng chục của 4 số thuộc một cột thì phải có $a + b + c + d = 20$, khi a, b, c, d là các chữ số hàng trăm của 4 số thuộc một cột thì phải có $a + b + c + d = 18$. Tổ hợp ba ma phương đó ta được ma phương 4×4 mà mỗi ô vuông là một số có ba chữ số với các chữ số thuộc tập hợp {3, 4, 5, 6} thỏa mãn yêu cầu về tổng các số, chỉ còn xét tất cả 16 số đó phải khác nhau. Một cách điền số thỏa mãn đề bài như hình 2.

A — B

346	564	663	446
645	464	355	555
465	655	545	354
563	336	456	664

D — C

Hình 2

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Ngọc Diệp*, 6A3, THCS Pom Lót, huyện Điện Biên, **Điện Biên** đã cho một đáp án đúng.

NGUYỄN VIỆT HẢI (*Hà Nội*)

Bài T1/511. *Tìm tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số sao cho nó là bình phương của một số nguyên đồng thời là lập phương của một số nguyên khác.*

Lời giải. Gọi số cần tìm là n, theo giả thiết thì $n = x^2 = y^3$ với x, y đều là các số nguyên. Từ đó $y = \left(\frac{x}{y}\right)^2$. Đặt $\frac{x}{y} = t$, ta sẽ chứng minh rằng t là số nguyên. Giả sử $t = \frac{r}{s}$ là phân số tối giản với các số nguyên r, s mà $(r, s) = 1$. Từ đó r và s không có ước số nguyên tố chung nên $(r^2, s^2) = 1$. Do $r = st$ thì $r^2 = s^2t^2$ nên s^2 là ước số của r^2, nhưng vì $(r^2, s^2) = 1$ nên $s^2 = 1$, do đó $s = 1$, suy ra $t = r$ là số nguyên. Thay vào hệ thức ở trên có $y = t^2$ và $n = y^3 = t^6 = x^2$, do đó $x = t^3$.

Theo giả thiết n là số có 6 chữ số nên

$$100000 \le y^3 < 1000000 \Rightarrow 46 < y < 100.$$

Hơn nữa

$y = t^2$ nên y chỉ có thể là $49 = 7^2$; $64 = 8^2$; $81 = 9^2$, suy ra $n = y^3 = t^6 = x^2$ lấy ba giá trị sau:

$7^6 = 49^3 = 343^2 = 117649$; $8^6 = 64^3 = 512^2 = 262144$; $9^6 = 81^3 = 729^2 = 531441$.

Nhận xét. Trong các bài giải của các bạn thì phần lập luận để t là số nguyên chưa rõ ràng. Một số bạn không được nêu tên vì chưa chỉ ra số n với 6 chữ số như yêu cầu của đề bài. Các bạn sau cho kết quả đúng:

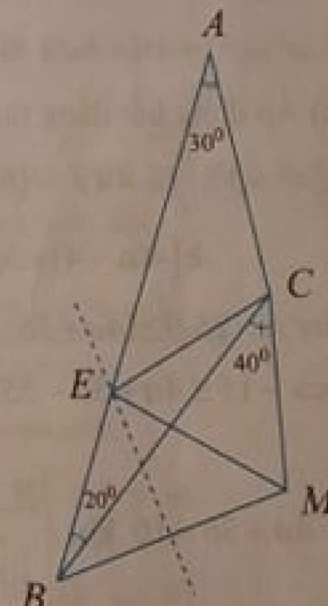
Phú Thọ: *Kiều Minh Vương*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Tiến Thành, Nguyễn Huy Hoàng Sơn, Nguyễn Duy Thành*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Nghệ An**: *Nguyễn Thái Hoàng Anh, Hoàng Văn Quyết, Thái Minh Quân, Nguyễn Sỹ Bảo Lâm, Nguyễn Đăng Quang, Nguyễn Hải Triều*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Hồ Hoàng Vũ*, 6B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Trị:** *Võ Nguyên Thăng*, 6A, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà; **Quảng Ngãi**: *Võ Hữu Thanh Thảo*, 6B, *Phạm Quốc Hoàng Anh*, 6C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Sóc Trăng**: *Lê Ngọc Xuân Thơ*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

T2/511. *Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 30^0, \hat{B} = 20^0$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính số đo góc $\widehat{BCD}$.*

Lời giải. Gọi E là giao điểm đường trung trực cạnh BC và cạnh AB. Có góc ngoài

$\widehat{AEC} = 2.\widehat{EBC} = 40^\circ$.



Trên nửa mặt phẳng bờ CE không chứa A dựng tam giác đều CEM.

Ta có:

$\widehat{BEC} = 180^0 - 20^0 - 20^0 = 140^0$.

Do $\widehat{CEM} = 60^0$ cho nên $\widehat{BEM} = 80^0$.

Do $EB = EC = EM = CM$ nên trong tam giác cân EBM có: $\widehat{EBM} = \widehat{EMB} = \frac{180^0 - \widehat{BEM}}{2} = 50^0$, suy ra: $\widehat{CBM} = \widehat{EBM} - \widehat{EBC} = 30^0$. Hai tam giác CBM và EAC có các góc tương ứng bằng nhau và có 2 cạnh tương ứng $CM = CE$, cho nên chúng bằng nhau (g.c.g). Từ đó suy ra $AE = BC$, cho nên $D \equiv E$ và khi đó $\widehat{BCE} = 20^0$.

Nhận xét.: Các bạn sau đây có đáp số đúng:

Hà Nội: *Ngô Uyển Nhi*, 7A5, THCS Phương Liệt, *Nguyễn Hằng Hải*, 7I1, Trường Marie Curie Mỹ Đình; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Phú Thọ:** *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, *Phạm Trí Dũng* 7A2, THCS Lâm Thao, huyện Lâm Thao; **Thái Nguyên:** *Trần Quang Khôi*, 6A5, THCS Chu Văn An, *Đồng Hoàng Minh Đạo*, 6A4, THCS Nguyễn Du, TP. Thái Nguyên; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, huyện Kế Sách; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Viết Quang Anh*, 7H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/511. *Cho* $a^2+b^2+16=8a+6b,(a,b\in\mathbb{R})$.

Chứng minh:

a) $10\le 4a+3b\le 40$;

b) $7b\le 24a$.

Lời giải. Cách 1. Ta có:

$$a^2+b^2+16=8a+6b\Leftrightarrow (a-4)^2+(b-3)^2=9.$$

a) Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$(4^2+3^2)\left[(a-4)^2+(b-3)^2\right]$$
$$\ge\left[4(a-4)+3(b-3)\right]^2=(4a+3b-25)^2.$$

Suy ra: $25.9\ge(4a+3b-25)^2$

$$\Leftrightarrow -15\le 4a+3b-25\le 15\Leftrightarrow 10\le 4a+3b\le 40.$$

$$4a+3b=10 \text{ khi } \begin{cases}\dfrac{a-4}{4}=\dfrac{b-3}{3}\\ 4a+3b=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{8}{5}\\ b=\dfrac{6}{5}\end{cases};$$

$$4a+3b=40 \text{ khi } \begin{cases}\dfrac{a-4}{4}=\dfrac{b-3}{3}\\ 4a+3b=40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{32}{5}\\ b=\dfrac{24}{5}\end{cases}.$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\left[(-24)^2+7^2\right]\left[(a-4)^2+(b-3)^2\right]$$
$$\ge\left[-24(a-4)+7(b-3)\right]^2=(-24a+7b+75)^2.$$

Suy ra: $625.9\ge(-24a+7b+75)^2$

$$\Rightarrow -24a+7b+75\le 75\Leftrightarrow 7b\le 24a.$$

$$7b=24a \text{ khi } \begin{cases}\dfrac{a-4}{-24}=\dfrac{b-3}{7}\\ 7b=24a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{28}{5}\\ b=\dfrac{96}{5}\end{cases}.$$

Cách 2. a) Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có: $(4a+3b)^2\le(4^2+3^2)(a^2+b^2)$.

Theo giả thiết

$a^2+b^2+16=8a+6b\Leftrightarrow a^2+b^2=2(4a+3b)-16$

nên $(4a+3b)^2\le 50(4a+3b)-400$

$\Leftrightarrow (4a+3b-10)(4a+3b-40)\le 0$

$\Leftrightarrow 10\le 4a+3b\le 40.$

Đẳng thức $4a+3b=10$ khi $a=\dfrac{8}{5},\ b=\dfrac{6}{5}$;

$$4a+3b=40 \text{ khi } a=\frac{32}{5},\ b=\frac{24}{5}.$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$a^2+b^2+16=\left(a^2+\frac{28^2}{25^2}\right)+\left(b^2+\frac{96^2}{25^2}\right)$$
$$\ge\frac{56a}{25}+\frac{192b}{25}.$$

Kết hợp với giả thiết thì

$$8a+6b\ge\frac{56a}{25}+\frac{192b}{25}\Leftrightarrow 24a\ge 7b.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=\dfrac{28}{5},\ b=\dfrac{96}{5}$.

Nhận xét. 1) Bài này thuộc dạng chứng minh bất đẳng thức có điều kiện, ta thường dùng các bất đẳng thức đã biết để giải. Rất nhiều bạn tham gia giải bài và đều làm theo một trong hai cách trên. Tuy nhiên, nhiều bạn suy luận quá dài dòng.

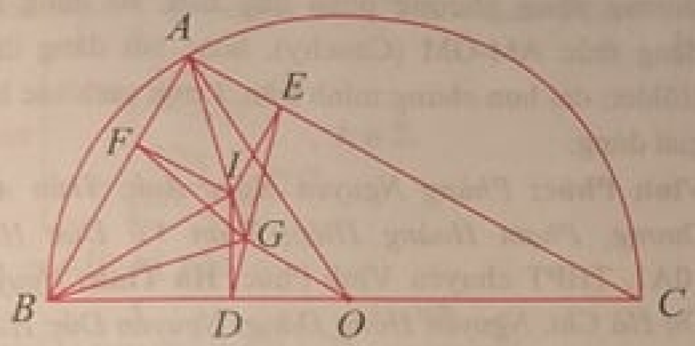
2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Phú Thọ:** *Lý Nguyệt Ánh*, *Trần Quang Chiến*, *Bùi Phương Thảo*, 8A3, *Trần Thị Yến Khanh*, *Triệu Hoàng Ánh Dương*, 9A3, THCS Lâm Thao, *Trần Minh Khôi*, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Hải Phòng:** *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/511. *Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính BC và một điểm G nằm trong nửa đường tròn đó sao cho $\widehat{BGO} = 135^0$. Đường vuông góc với GB tại G cắt nửa đường tròn tại A. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA lần lượt tại D và E. Chứng minh G nằm trên ED.*

Lời giải.



Ta có: $\widehat{AGO} = 360° - \widehat{BGO} - \widehat{BGA} = 135^0$.

Trên tia GA lấy A' sao cho $GB = GA'$.

Dễ thấy $\Delta OGA' = \Delta OGB$ (c.g.c), suy ra $OB = OA'$, do đó $A' \equiv A$.

Như vậy tam giác AGB vuông cân tại G, nên $\widehat{GAB} = 45°$, suy ra AG là phân giác của góc BAC. Vậy A, I, G thẳng hàng.

Gọi F là tiếp điểm của đường tròn (I) với $AB \Rightarrow AE = AF$, từ đó $\Delta AGE = \Delta AGF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AGF} = \widehat{AGE}$.

Dễ thấy các điểm B, D, G, I, F thuộc đường tròn đường kính BI. Suy ra:

- $\widehat{IGD} = 180° - \widehat{IBD} = 180^0 - \dfrac{\widehat{B}}{2}$ (1)

- $\widehat{IGE} = \widehat{IGF} = \widehat{IBF} = \dfrac{\widehat{B}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IGE} + \widehat{IGD} = 180^0$ hay D, G, E thẳng hàng.

Nhận xét. Có hai bạn cho lời giải tốt là bạn *Trần Thị Yến Khanh*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**; và bạn *Nguyễn Gia Khánh*, 8B, THCS Nguyễn Tất Thành, Lam Sơn, **Hưng Yên**.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/511 *Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y \le 2z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{x+z} - \dfrac{x+y}{2z}$.*

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có:

$$z \ge \frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy} \Rightarrow z^2 \ge xy.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Lại có

$$P = \frac{2xz(x+z) + 2yz(y+z) - (x+y)(y+z)(x+z)}{2z(y+z)(x+z)}$$

$$= \frac{(x^2z + y^2z - 2xyz) + (xz^2 + yz^2 - x^2y - y^2x)}{2z(y+z)(x+z)}$$

$$= \frac{z(x-y)^2 + (x+y)(z^2 - xy)}{2z(y+z)(x+z)} \ge 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Vậy $\min P = 0$ giá trị đó đạt được khi và chỉ khi $x = y = z$.

Nhận xét. Điều then chốt trong cách giải trên là từ giả thiết suy ra $z^2 - xy \ge 0$ và biến đổi

$$P = \frac{z(x-y)^2 + (x+y)(z^2 - xy)}{2z(y+z)(x+z)} \ge 0.$$

Có thể giải bằng cách khác như sau:

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \ge 4xy$ và

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \ge \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (x, y > 0)$$

(bạn đọc tự chứng minh), ta có:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} = \frac{x^2}{xy+xz} + \frac{y^2}{xy+zy} \ge \frac{(x+y)^2}{2xy + (x+y)z}$$

$$\ge \frac{(x+y)^2}{\dfrac{(x+y)^2}{2} + (x+y)z} = \frac{2(x+y)}{x+y+2z}$$

$$\ge \frac{2(x+y)}{2z+2z} = \frac{x+y}{2z}$$

$\Rightarrow P = \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{x+z} - \dfrac{x+y}{2z} \ge 0$, suy ra kết quả.

Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Hà Nội: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Viết Quang Anh*, 7H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Nhất Huy*, 9C, THCS Hà Huy Tập, TP. Vinh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Phú Thọ:** *Trần Thị Yến Khanh, Triệu Hoàng Ánh Dương, Nguyễn Phạm Thanh Nga*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, *Lương Minh Hiếu, Trần Minh Khôi*, 9C, THCS Văn Lang, Việt Trì.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/511. *Chứng minh bất đẳng thức:*

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2020}+\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^{2020}+\left(\frac{z+x}{z-x}\right)^{2020}>\frac{2^{2010}}{3^{1009}} \quad (1)$$

trong đó x, y, z đôi một khác nhau.

Lời giải. (của bạn *Phan Trung Đức* và bạn *Phan Trung Kiên*) Ta có:

$$\frac{2^{1010}}{3^{1009}}=\frac{2^{1007}\cdot 2^3}{3^{1007}\cdot 3^2}=\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1007}<1.$$

Nếu một trong ba số, thí dụ, $x=0$ thì vế trái của bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2020}+\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^{2020}+\left(\frac{z+x}{z-x}\right)^{2020}$$

$$=(-1)^{2020}+\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^{2020}+(1)^{2020}\geq 2>\frac{2^{2010}}{3^{1009}}.$$

Vậy (1) đúng.

Trong ba số thực $xyz\neq 0$, theo nguyên lí Dirichlet, có hai số cùng dấu. Không giảm tổng quát, giả sử $xy>0$. Khi ấy ta có:

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2}=1+\frac{4xy}{(x-y)^2}>1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2020}=\left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2}\right)^{1010}>1.$$

Vậy $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2020}+\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^{2020}+\left(\frac{z+x}{z-x}\right)^{2020}$

$$>1+\left(\frac{y+z}{y-z}\right)^{2020}+\left(\frac{z+x}{z-x}\right)^{2020}>1>\frac{2^{1010}}{3^{1009}}.$$

Dấu bằng không bao giờ xảy ra.

Nhận xét. Các bạn tham gia giải đúng, nhưng thường dùng phương pháp quy nạp, sử dụng bất đẳng thức AM-GM (Cauchy), hoặc bất đẳng thức Hölder, dài hơn chứng minh trên. Danh sách các bạn giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Phùng Nguyễn Ngọc Anh, Trần Ánh Dương, Phạm Hoàng Hiệp, Trần Vũ Đức Huy*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Hà Chi, Nguyễn Hồng Đăng, Nguyễn Đức Hiệp, Phan Thành Tín*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Quảng Bình:** *Lê Đức Hạnh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Vũng Tàu; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thiên Lý*, 10 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. **Quảng Trị:** *Nguyễn Ngọc Thọ, Nguyễn Xuân Tiến*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, huyện Kế Sách; **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán 1, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/511. *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} x_2=x_1^3-3x_1 \\ x_3=x_2^3-3x_2 \\ \dots \\ x_{2020}=x_{2019}^3-3x_{2019} \\ x_1=x_{2020}^3-3x_{2020} \end{cases}$$

Lời giải. Với $|x_1|>2$ thì $|x_2|=|x_1||x_1^2-3|>2$.

Do đó $|x_3|=|x_2||x_2^2-3|>2$. Chứng minh tương tự ta được: $|x_i|>2, \forall i=\overline{1,2020}$. Suy ra:

$$|x_1x_2\dots x_{2020}|=|x_1x_2\dots x_{2020}|\prod_{i=1}^{2020}(|x_i|^2-3),$$

điều này là vô lý. Vậy $|x_i|\leq 2$.

Đặt $x_1 = 2\cos\alpha,\ \alpha \in [0;\pi]$. Khi đó:

$x_2 = x_1^3 - 3x_1 = 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha = 2\cos 3\alpha.$

Tương tự: $x_3 = 2\cos 3^2\alpha, \ldots, x_{2020} = 2\cos 3^{2019}\alpha.$

Ta có: $x_1 = x_{2020}^3 - 3x_{2020}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\alpha = 8\cos^3 3^{2019}\alpha - 3.2\cos 3^{2019}\alpha$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 3^{2019}\alpha - 3\cos 3^{2019}\alpha = \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos 3^{2020}\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow 3^{2020}\alpha = \pm\alpha + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{k2\pi}{3^{2020}+1} \quad (1) \\ \alpha = \dfrac{k2\pi}{3^{2020}-1} \quad (2) \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Do $\alpha \in [0;\pi]$ nên

- từ (1) suy ra: $k = 0,1,2,\ldots,\dfrac{3^{2020}+1}{2}$;

- từ (2) suy ra: $k = 0,1,2,\ldots,\dfrac{3^{2020}-1}{2}$.

Kết hợp lại ta có:

$$x_1 = 2\cos\alpha = \left[\begin{array}{l} 2\cos\dfrac{k2\pi}{3^{2020}+1}, k = 0,1,\ldots,\dfrac{3^{2020}+1}{2} \\ 2\cos\dfrac{k2\pi}{3^{2020}-1}, k = 0,1,\ldots,\dfrac{3^{2020}-1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của $(x_1; x_2; \ldots; x_{2020})$ của hệ là

$\left(2\cos\alpha; 2\cos 3\alpha; \ldots, 2\cos 3^{2019}\alpha\right)$

$$\text{với} \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{k2\pi}{3^{2020}+1}, k = 0,1,\ldots,\dfrac{3^{2020}+1}{2} \\ \alpha = \dfrac{k2\pi}{3^{2020}-1}, k = 0,1,\ldots,\dfrac{3^{2020}-1}{2} \end{array}\right..$$

Nhận xét. Ở trên ta đã giải phương trình đại số đã cho bằng phương pháp lượng giác. Mấu chốt của bài toán là đánh giá được

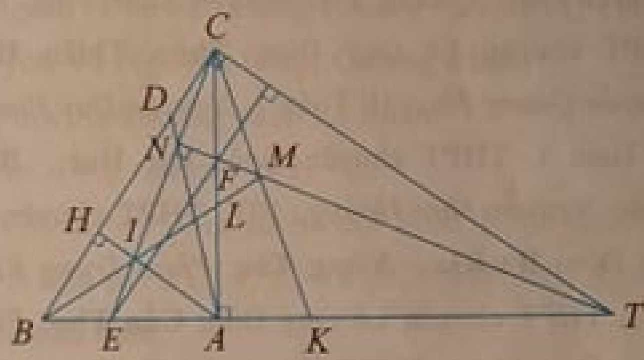
$$|x_i| \le 2, \forall i = 1,\ldots,2020$$

(mặc dù trong lời giải chỉ cần dùng với $|x_1| \le 2$), từ đó đưa được phương trình đã cho về dạng lượng giác đã biết cách giải. Có không nhiều bạn tham gia giải bài này. Một số bạn giải sai, một số bạn xét không hết trường hợp nên dẫn tới thiếu nghiệm. Các bạn sau có lời giải đúng là: **Hưng Yên:** *Đặng Duy Hậu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Đồng Tháp:** *Lạc Xuân Thịnh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ. **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/511. *Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Trên đoạn AH lấy điểm I, đường thẳng CI cắt AB tại E. Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho EF song song với BC. Đường thẳng qua F vuông góc với CE tại N và cắt đường thẳng BI tại M. Gọi D là giao điểm của AN với BC. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, D, C cùng thuộc một đường tròn.*

Lời giải.



Gọi T là giao điểm của MN và AB. Dễ thấy F là trực tâm của ΔCET, nên $EF \perp CT$. Do $EF \,//\, BC$, suy ra $BC \perp CT$ hay ΔBCT vuông tại C.

Gọi L là giao điểm của BM và AC. Sử dụng định lý Ceva cho ΔABC với ba đường đồng quy AH, BL, CE ta được

$$\frac{BE}{EA}.\frac{AL}{LC}.\frac{CH}{HB} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AL}{LC}.\frac{CH}{HB} = \frac{AL}{LC}.\frac{AT}{AB} \quad (1)$$

Gọi K là giao điểm của CM và AB. Áp dụng định lý Menelaus cho ΔACK với các cát tuyến TMF và BLM ta có:

$$\frac{CM}{MK}.\frac{KT}{TA}.\frac{FA}{FC} = 1; \frac{CM}{MK}.\frac{KB}{BA}.\frac{AL}{LC} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{KB}{BA}.\frac{AL}{LC} = \frac{KT}{TA}.\frac{FA}{FC} \ (2).$$

Mặt khác $\dfrac{FA}{FC} = \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AL}{LC}.\dfrac{AT}{AB}$ (do (1)) nên từ (2)

ta thấy $\dfrac{KB}{BA}.\dfrac{AL}{LC} = \dfrac{KT}{TA}.\dfrac{AL}{LC}.\dfrac{AT}{AB} \Rightarrow KB = KT.$

Vì ΔBCT vuông tại C nên $KB = KC$. Hay ΔKBC cân tại K. Từ đó ta có biến đổi góc: $(CB, CK) \equiv (BC, BK) \equiv (CA, CT) \equiv (NA, NT)$ $(\bmod\ \pi)$ (do bốn điểm A, N, C, T cùng nằm trên một đường tròn). Suy ra bốn điểm M, N, D, C cùng thuộc một đường tròn.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc**: *Vũ Đức Huy*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Tất Đạt*, 10A1, THPT Yên Phong số 1, Yên Phong; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Hà Chi*, 10 Toán1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Bùi Thị Thu Hà*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị**: *Nguyễn Xuân Tiến*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Quang Huy*, 10 Toán 1, *Nguyễn Duy Phước*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ**: *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Phúc Thịnh*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/511. *Cho các số thực x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\sin^4 x\left(\sin^4 y+\cos^4 y+\frac{9}{8}\cos^2 x.\sin^2 2y\right)+\cos^4 x.$$

Lời giải. Đặt $a=\sin^2 x,\ b=\cos^2 x,\ c=\sin^2 y,$ $d=\cos^2 y$. Ta có: $0\le a,b,c,d\le 1,$

$a+b=c+d=1,\ \sin^2 2y=4\sin^2 y.\cos^2 y=4cd.$

Do đó:

$$P=\sin^4 x\left(\sin^4 y+\cos^4 y+\frac{9}{8}\cos^2 x.\sin^2 2y\right)+\cos^4 x$$

$$=a^2\left(c^2+d^2+\frac{9}{2}bcd\right)+b^2$$

$$=a^2\left((c+d)^2-2cd+\frac{9}{2}bcd\right)+b^2$$

$$=a^2+b^2+\frac{a^2cd}{2}(9b-4)$$

$$=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}+\frac{a^2cd}{2}.(9b-4)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{a^2cd}{2}(9b-4)\ge\frac{1}{2}$$

nếu $9b-4\ge 0$ (1).

Xét trường hợp $9b-4<0$. Ta có:

$$cd=\frac{1}{4}\left[(c+d)^2-(c-d)^2\right]\le\frac{1}{4}(c+d)^2=\frac{1}{4}.$$

Suy ra:

$$P=a^2+b^2+\frac{a^2cd}{2}(9b-4)\ge a^2+b^2+\frac{a^2}{8}(9b-4)$$

$$=a^2+(1-a)^2+\frac{a^2}{8}\left[9(1-a)-4\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[8a^2+8(1-a)^2+a^2(5-9a)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left(8a^2+8a^2-16a+8-9a^3+5a^2\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(-9a^3+21a^2-16a+4\right)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{8}(1-a)\left(4-12a+9a^2\right)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{8}(1-a)(2-3a)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}\ (\text{vì } 1\ge a)\quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta nhận được trong mọi trường hợp $P\ge\frac{1}{2}$, $P=\frac{1}{2}$ ví dụ khi $a=b=\frac{1}{2}, cd=0$

(ví dụ khi $x=\frac{\pi}{4}, y=0$). Vậy giá trị nhỏ nhất của

P bằng $\frac{1}{2}$.

Nhận xét. Cách giải trên chỉ dùng kĩ thuật phân tích nhân tử của lớp 8, mặc dù đây là bài toán cực trị về hình thức có mặt của yếu tố lượng giác. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng (trong thời gian học sinh đang phải nghỉ học vì dịch Covid 19)

Hà Nội: *Nguyễn Xuân Tùng*, 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh:** *Lê Phan Việt Cường, Nguyễn Hồng Đăng, Lê Văn Danh*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Bùi Thị Thu Hà*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/511. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(2f(x)+2y)=x+f(2f(y)+x), \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1).$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Giả sử $f(t)$ thỏa mãn (1). Thay $y=-f(x)$ vào (1), ta được:

$$f(0)=x+f(2f(-f(x))+x), \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(2f(-f(x))+x)=f(0)-x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra f là toàn ánh. Vậy nên, tồn tại $a\in\mathbb{R}$ để $f(a)=0$. Thế $y=a$ vào (1), ta được:

$$f(2f(x)+2a)=x+f(x), \forall x\in\mathbb{R}\quad (2).$$

Ta chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(x_1)=f(x_2)$ thì $f(2f(x_1)+2a)=f(2f(x_2)+2a)$ nên theo (2), ta có:

$$x_1+f(x_1)=x_2+f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Thay $x=0$ vào (2) và sử dụng tính đơn ánh của f, ta được: $f(2f(0)+2a)=f(0)$

$$\Rightarrow 2f(0)+2a=0\Leftrightarrow f(0)=-a.$$

Từ (1) cho $x=0$ ta có:

$$f(2f(0)+2y)=f(2f(y))\ \forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(y)=y+f(0)=y-a, \forall y\in\mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy hàm số $f(t)=t+c$, ($c\in\mathbb{R}$ tùy ý) thỏa mãn điều kiện bài ra.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm nên có nhiều bạn tham gia giải. Đa số các bạn đều giải phương trình theo cách chứng minh f là song ánh. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Đỗ Xuân Trọng*, 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Nam:** *Ngô Việt Anh*, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Trúc Như Bình*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Hồng Đăng, Nguyễn Thị Hà Chi, Phan Thành Tín, Nguyễn Danh Gia Minh*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Nguyễn Quỳnh Anh*, 11T2, *Nguyễn Duy Phước* 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Nghệ An:** *Lê Bá Luật*, 11A1; THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Bình:** *Lê Đức Hạnh, Lê Hồng Anh, Phan Phú Trường*, 10T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11AT2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Vĩnh Phúc**: *Phùng Nguyễn Ngọc Anh, Phạm Hoàng Hiệp, Trần Vũ Đức Huy*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/511 *Có $n\geq 2$ đội bóng tham gia một giải bóng đá. Giải đấu được tổ chức theo thể thức đá vòng tròn. Ở mỗi trận, nếu hòa thì hai đội đều được 1 điểm. Nếu không hòa thì đội thắng được ba điểm, đội thua 0 điểm. Sau khi giải kết thúc, người ta thấy rằng không có đội nào bằng điểm nhau. Hỏi khoảng cách tối thiểu về điểm giữa đội đứng đầu và đội đứng cuối là bao nhiêu?*

Lời giải. (Của bạn *Đặng Hoàng Huy*,10T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**)

Gọi $d(n)$ là khoảng cách tối thiểu.

i) Với $n=2$ rõ ràng $d(2)=3$.

ii) Với $n=3$: Giả sử ba đội là A, B, C. Giải đấu có 3 trận (A, B), (A, C) và (B, C) với đội A có số điểm cao nhất.

+) Nếu A thắng cả 2 trận (A, B), (A, C): Trận (B, C) không thể hòa do B, C không cùng điểm. Giả sử B thắng, C thua. Như vậy A 6 điểm, B 3 điểm, C 0 điểm. Khoảng cách là 6.

+) Nếu A chỉ thắng một trận với A, B hòa, A thắng C: A được 4 điểm

Xét trận (B, C)

- Nếu B, C hòa: B 2 điểm, C 1 điểm. Khoảng cách là 3
- Nếu B thắng, C thua: B 4 điểm bằng điểm của A. Loại.
- Nếu B thua, C thắng: B 1 điểm; C 3 điểm. Khoảng cách là 3.

+) Nếu A chỉ thắng một trận với A thua B, A thắng C: A được 3 điểm

Xét trận (B, C)

- Nếu B, C hòa: B 4 điểm, loại
- Nếu B thắng, C thua: B 6 điểm, loại.
- Nếu B thua, C thắng: B 3 điểm, C 3 điểm, loại

Vậy $d(3)=3$.

iii) Xét $n\geq 4$. Vì không có đội nào bằng điểm nhau nên $d(n)\geq n-1$. Ta chứng minh bằng quy nạp khẳng định sau:

Tồn tại một giải đấu mà sau khi giải kết thúc, số điểm của các đội lập thành một dãy số nguyên liên tiếp từ $n-2$ đến $2n-3$.

Do đó $d(n) = (2n-3)-(n-2) = n-1$.

Chứng minh bằng quy nạp: Với $n = 4$, giả sử 4 đội là A, B, C, D. Có 6 trận: $(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)$ với A thắng B ,hòa với C, D; B thắng D và hòa với C, C hòa D. Khi đó số điểm của D, C, B, A là 2;3;4;5.

Giả sử khẳng định đúng với $n = m$. Tồn tại m đội $A(1),\ldots A(m)$ đấu vòng tròn với nhau có số điểm là $m-2, m-1,\ldots, 2m-3$.

Xét $n = m + 1$. Xét đội $A(m+1)$ đấu m trận với $A(1),\ldots, A(m)$.

TH1: $m=3k$. Cho $A(m+1)$ hòa $A(1)$, thua k đội $A(2), A(5),\ldots, A(3k-1)$ và thắng $2k-1$ đội còn lại

Điểm của $A(1),\ldots, A(m)$ sau khi đấu với $A(m+1)$ là $m-1, m, m+1,\ldots., 2m-3, 2m-1$.

Điểm của $A(m+1)$ là $3(2k-1)+1= 6k-2 = 2m-2$

Vậy điểm của $A(1),\ldots, A(m), A(m+1)$ là

$$m-1, m, m+1,\ldots., 2m-3, 2m-2, 2m-1.$$

TH2: $m = 3k + 1$. Cho $A(m + 1)$ hòa $A(1)$, thua k đội $A(2), A(5),\ldots, A(3k-1)$ và thắng $2k$ đội còn lại. Điểm của $A(1),\ldots, A(m)$ sau khi đấu với $A(m+1)$ trở thành $m-1, m, m+1,\ldots., 2m-3, 2m-2$.

Điểm của $A(m+1)$ là $3(2k)+1= 6k+1 = 2m-1$.

Vậy điểm của $A(1),\ldots, A(m), A(m+1)$ là

$$m-1, m, m+1,\ldots., 2m-3, 2m-2, 2m-1.$$

TH3: $m = 3k+2$. Xét số điểm của $A(1),\ldots A(m)$ thứ tự là $2m-3, 2m-2,\ldots, m-2$. Cho $A(m+1)$ hòa $A(1)$, thua $k+1$ đội $A(2), A(5),\ldots, A(3k+2)$ và thắng $2k$ đội còn lại. Khi đó điểm của $A(1),\ldots, A(m)$ (không nhất thiết theo thứ tự) sau khi đấu với $A(m+1)$ là $m-1, m, m+1,\ldots, 2m-4, 2m-2, 2m-1$. Điểm của $A(m+1)$ là $3(2k) + 1 = 6k + 1 = 2m-3$. Vậy điểm của $A(1), \ldots, A(m), A(m+1)$ là

$$m-1, m, m+1,\ldots., 2m-3, 2m-2, 2m-1.$$

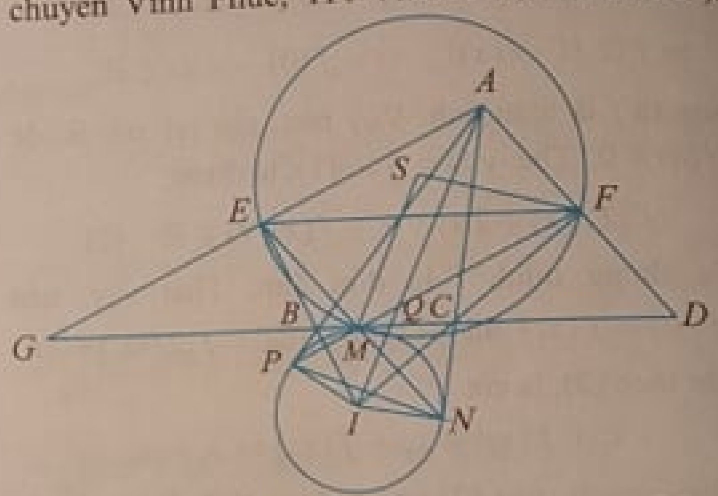
Vậy khẳng định của ta đúng với mọi n.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay và khó.Có rất ít bạn tham gia giải và chỉ có duy nhất bạn *Huy* có lời giải tốt.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/511. *Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Đường tròn này tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi E là giao điểm của MN và BI, F là giao điểm của MP và CI. Đường thẳng BC cắt AE, AF lần lượt tại G, D. Chứng minh rằng AI song song với đường thẳng đi qua M và tâm đường tròn Euler của tam giác AGD.*

Lời giải. (theo bạn *Vũ Đức Huy*, 10T1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**).



Gọi (S) là đường tròn Euler của tam giác AGD, Q là giao điểm của AI và BC.

$$\text{Dễ thấy } \widehat{PFI} = \widehat{MFC} = 180^\circ - \widehat{FMC} - \widehat{FCM}$$

$$= 180^\circ - \widehat{FMC} - \widehat{FCA} - \widehat{ACM}$$

$$= 180^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{180^0 - \widehat{C}}{2} - \widehat{C}$$

$$= 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{BAI} = \widehat{PAI}.$$

Do đó tứ giác $APIF$ nội tiếp.

Vậy $\widehat{IFA} = 180^0 - \widehat{IPA} = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

Nói cách khác $CF \equiv IF \perp AF \equiv AD$. Từ đó, chú ý rằng $\widehat{FCA} = \widehat{FCD}$, suy ra $FA = FD$ (1).

Tương tự $EA = EG$ (2).

Dễ thấy $ME \equiv MN \perp CI \equiv CF \perp AD$.

Do đó $ME \parallel AD$.

Kết hợp với (2), suy ra $MG = MD$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra (S) chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác MEF. Kết hợp với $SM = SF, EF \parallel GD, BM = BP, CM = CN$, suy ra

$$\widehat{SMC} = \widehat{SMF} + \widehat{FMC} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{MSF} + \widehat{PMB}$$

$$= 90^0 - \widehat{MEF} + \widehat{PMB} = 90^0 - \widehat{CMN} + \widehat{PMB}$$

$$= 90^0 - \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{B}$$

$= \widehat{QAB} + \widehat{QBA} = \widehat{AQC}.$

Vậy $MS \,//\, AQ \equiv AI$ (đpcm).

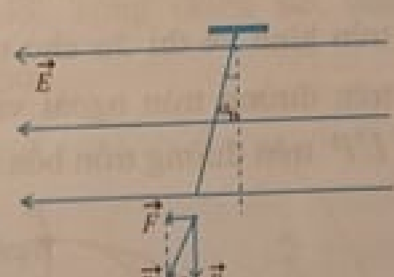
Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, nhiều bạn tham giai giải, tuy nhiên lời giải của bạn *Huy* là ngắn gọn hơn cả.

2) Xin nêu tên tất cả các bạn: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Tất Đạt*, 10A1, THPT Yên Phong 1, Yên Phong; **Hà Tĩnh:** *Ngô Văn Thông*, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Bùi Thị Thu Hà*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phước*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn: **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phúc Thịnh*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong: **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/511. *Một con lắc đơn dao động điều hòa trong không khí với chu kì 2,0000 s. Tích điện cho con lắc rồi cho nó dao động trong một điện trường đều theo phương nằm ngang. Biết dây treo cách điện và bỏ qua lực cản của không khí, khi cân bằng dây treo con lắc lệch so với phương thẳng đứng một góc α = 3°. Coi con lắc đơn vẫn dao động điều hòa, xác định chu kì dao động của nó trong điện trường.*

Lời giải.



Khi con lắc đặt trong không khí:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Khi con lắc đặt trong điện trường:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{F}{m}\right)^2}}} = \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2}}}.$$

Từ hình vẽ ta có : $\tan\alpha_B = \frac{qE}{m} = \tan 3^\circ$

$$\Rightarrow \frac{qE}{m} = g\tan 3^\circ \Rightarrow T = 2\sqrt{\frac{g}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2}}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{g}{g\sqrt{1 + \tan^2 3^O}}} \approx 1{,}9986\text{s}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Nội**; *Cao Trung Hiếu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/511. *Đặt vào giữa hai đầu một tụ điện điện áp xoay chiều có biểu thức $u = U_0\cos\omega t$. Điện áp giữa hai bản tụ điện và cường độ dòng điện qua tụ điện tại thời điểm t_1, t_2 tương ứng lần lượt là: $u_1 = 60$V; $i_1 = \sqrt{3}$ A; $u_2 = 60\sqrt{2}$ V; $i_2 = \sqrt{2}$ A. Xác định biên độ của điện áp giữa hai bản tụ điện và cường độ dòng điện qua tụ điện.*

Lời giải. Giả sử $i = I_0\cos\omega t$ thì

$$u = U_0\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_0\sin\omega t.$$

Suy ra $\left(\frac{i}{I_0}\right)^2 + \left(\frac{u}{U_0}\right)^2 = 1.$

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{3}}{I_0}\right)^2 + \left(\frac{60}{U_0}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{I_0}\right)^2 + \left(\frac{60\sqrt{2}}{U_0}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được:

$$U_0 = 120(\text{V});\ I_0 = 2(\text{A}).$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: **Cần Thơ:** *Trần Thị Kim Phụng*, 12A2, THPT Nguyễn Việt Hồng, Q. Ninh Kiều, TP. Cần Thơ; **Bạc Liêu:** *Đỗ Văn Dương*, 12CA. THPT Trần Văn Bảy, Phước Long; **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1 THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông.

NGUYỄN XUÂN QUANG

BÀI TOÁN SƯ TỬ VÀ ĐẤU SĨ

HOÀNG ĐỨC TÂN (*Hà Nội*)
Sưu tầm và biên soạn

Vào cuối những năm 30 của thế kỷ trước, nhà toán học người Đức - Anh *Richard Rado* đã nêu ra bài toán sau:

Sư tử và Đấu sĩ (mỗi đối tượng được coi như là một điểm đơn) di chuyển trong một đấu trường hình tròn khép kín với cùng tốc độ tối đa của cả hai là như nhau. Liệu Sư tử có thể bắt được Đấu sĩ trong một khoảng thời gian hữu hạn hay không?

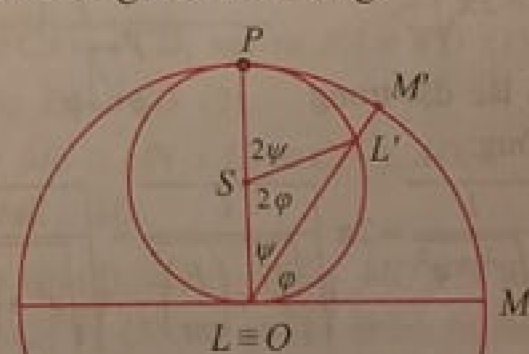
Bài toán đã được phổ biến rộng rãi bởi *J. E. Littlewood*, người đã dành cho bài toán này bốn trang trong Tuyển tập của ông. *R. Rado* đã đặt tên cho bài toán là "***Sư tử và Đấu sĩ***", và chính ông đã đưa ra một "*lời giải đơn giản*" cho bài toán.

Chính "*Lời giải*" của *Rado* vẫn luôn là câu trả lời trong khoảng hai mươi năm, trước khi nhà toán học người Anh gốc Nga *Abram S. Besicovitch*, giáo sư ở Đại học Cambridge, đã tìm ra một lời giải tuyệt vời và bất ngờ cho bài toán vào những năm 50.

"Lời giải" của R. Rado:

Thoạt nhìn, đó là một lời giải rõ ràng và rất đơn giản. Thật vậy, ký hiệu O là tâm của đấu trường, L là *Sư tử* và M là *Đấu sĩ*, nếu L luôn ở trên OM và tiếp cận tới M với tốc độ tối đa thì chúng ta có thể đơn giản hóa các phép tính bằng cách cho M chạy dọc theo đường tròn biên bán kính 1. Khi đó, nếu L ban đầu ở tại tâm (rõ ràng ta có thể giả định như vậy) thì L sẽ chạy dọc theo vòng tròn bán kính $\frac{1}{2}$, do đó L sẽ bắt được M trong khoảng thời gian cần thiết để lấp đầy khoảng cách π. Khẳng định này được chứng minh trực tiếp bởi vì hình 1 cho thấy rằng nếu độ dài cung MM' trên đường tròn ngoài bán kính 1 là φ thì $\widehat{MOM'} = \varphi$ và do đó $\widehat{OSL'} = 2\varphi$, trong đó S là tâm của đường tròn nhỏ bên trong (có bán kính $\frac{1}{2}$) tiếp xúc với đường tròn bên ngoài tại P và đường thẳng OM tại O. Do đó, trong thời gian Đấu sĩ phải đi từ M đến M' trên vòng tròn ranh giới, thì Sư tử đi từ $L \equiv O$ đến L'. Do đó L sẽ bắt được M tại P.

Một cách tương đương, với kí hiệu góc ψ như trên hình vẽ thì 2ψ cho thấy độ dài cung $M'P$ trên đường tròn ngoài và cũng là độ dài cung $L'P$ trên đường tròn bên trong.

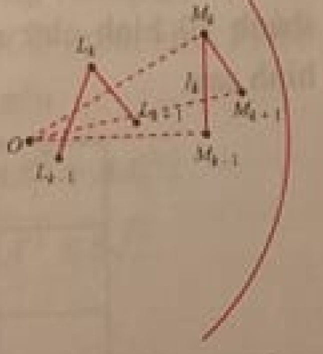


Hình 1. Vị trí của Sư tử và Đấu sĩ, với Đấu sĩ chạy dọc theo đường tròn và Sư tử luôn ở trên bán kính OM

Bạn đọc nên kiểm tra xem điều này có thực sự đúng đắn hay không. Thực tế, lập luận trên là không chính xác: chúng ta không chỉ thất bại trong việc biện minh cho giả định rằng M nên chạy dọc theo đường tròn ngoài, mà giả định này hoàn toàn không thể thực hiện được. Như sẽ được xác định rõ bởi *A.S. Besicovitch* vào năm 1952, và được *J. E. Littlewood* trình bày trong Tuyển tập của mình, thì ***Đấu sĩ có thể không bị Sư tử bắt nếu anh ta tránh xa ranh giới và chạy dọc theo một con đường gấp khúc phù hợp***.

Lời giải của A.S. Besicovitch:

Chúng ta có thể giả định rõ ràng rằng khi cuộc rượt đuổi bắt đầu, *Đấu sĩ* đang ở điểm M_0 nằm bên trong của đấu trường hình tròn bán kính 1; để theo dõi khoảng cách, ta gọi $1-\varepsilon<1$ là độ dài khoảng cách OM_0. Giả sử rằng chúng ta đã dựng được điểm M_{k-1} và khi *Đấu sĩ* đến M_{k-1}, thì *Sư tử* ở $L_{k-1} \neq M_{k-1}$. Đặt M_k sao cho $M_{k-1}M_k$ vuông góc với OM_{k-1}, có chiều dài l_k, và giả sử L_{k-1} không nằm trong nửa mặt phẳng mở được xác định bởi đường OM_{k-1} chứa L_{k-1}, như trong hình 2. Trong khi *Đấu sĩ* chạy dọc theo đoạn $M_{k-1}M_k$ từ M_{k-1} đến M_k (tất nhiên là với tốc độ tối đa), anh ta sẽ không thể bị bắt và khi đến M_k, con *Sư tử* đang ở một điểm $L_k \neq M_k$ nào đó. Tổng chiều dài của đường gấp khúc $M_0M_1M_2...$ là $\sum_{k=1}^{\infty} l_k$; nếu tổng này là **vô hạn** thì *Đấu sĩ* sẽ không bị bắt khi chạy dọc theo đường gấp khúc này, vì vậy anh ta sẽ không bao giờ bị bắt: ***anh ta sẽ chạy mãi mãi.***



Hình 2. *Đường chạy gấp khúc của Đấu sĩ*

Nhưng chúng ta có thể đảm bảo rằng có một con đường gấp khúc như vậy luôn nằm bên trong đấu trường hay không? Rõ ràng bình phương của khoảng cách OM_n là bằng $(1-\varepsilon)^2+\sum_{k=1}^{\infty} l_k^2 < 1-\varepsilon+\sum_{k=1}^{\infty} l_k^2$, do đó, đường gấp khúc $M_kM_1M_2...$ sẽ luôn nằm ở bên trong đấu trường nếu như $\sum_{k=1}^{\infty} l_k^2 < \varepsilon$.

Vậy nên những gì còn lại là ta phải chọn một dãy phù hợp $l_1, l_2,...$ thỏa mãn yêu cầu trên. Đặt $l_k = ck^{-\frac{3}{4}}$ với $c=\frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó, một cách tầm thường, $\sum_{k=1}^{\infty} l_k$ là vô hạn và

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k^2 = c^2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{3}{2}} < c^2\left(1+\int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}}dx\right) = 3c^2 < \varepsilon,$$

do đó dãy (l_k) sẽ thỏa mãn yêu cầu trên.

[Rõ ràng là việc chọn $l_k = ck^{-\frac{3}{4}}$ sẽ được thực hiện yêu cầu trên nếu c là hằng số dương đủ nhỏ. Một lựa chọn tự nhiên khác là $l_k = (k+s)^{-\frac{3}{4}}$ với s đủ lớn]. Ta có điều phải chứng minh.

Vậy là bài toán đã được giải trọn vẹn một cách rất bất ngờ và rất đẹp. Cho đến nay bài toán này vẫn là một chủ đề được nhiều nhà toán học quan tâm.

Nhiều năm sau khi *Besicovitch* tìm thấy lời giải trên, *H. T. Croft* đã nghiên cứu một số biến thể của bài toán. Chẳng hạn, ông đã chứng minh rằng nếu *Đấu sĩ* chạy dọc theo một đường cong có độ cong giới hạn đồng đều thì anh ta sẽ bị một con *Sư tử* thông minh bắt được, mà con *Sư tử* ấy không nhất thiết phải luôn ở trên bán kính OM. Ngoài ra, ông còn xét bài toán:

Các con chim bắt một con ruồi. *Có một số con chim và một con ruồi trong hình cầu đơn vị đóng d chiều, mỗi con chim và con ruồi có cùng tốc độ tối đa. Số lượng chim tối thiểu có thể bắt được con ruồi là bao nhiêu?* (Xem tiếp trang 36)

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ YẾU TỐ LÂN CẬN

VŨ ĐÌNH HÒA *(Hà Nội)*

Hình học tổ hợp là một thể loại khó trong các bài thi học sinh giỏi. Trong bài viết này tôi muốn giới thiệu với các bạn trẻ yêu toán một số thể loại dùng kỹ thuật lân cận. Không phải lúc nào các kỹ thuật này cũng được sử dụng giống nhau, mà ta phải linh hoạt áp dụng tùy với tình huống ta gặp. Thông thường các kỹ thuật đó là: mở rộng (hoặc thu hẹp) biến, sử dụng biên của hình đã cho, tìm các điểm đặc biệt. Sau đây là một số bài toán tiêu biểu với độ khó và độ phức tạp khi áp dụng các kỹ thuật trên tăng dần:

Bài 1 (Bài số 3 ngày 1 Kỳ thi chọn học sinh Quốc gia 2018).

Mội nhà đầu tư có hai mảnh đất hình chữ nhật cùng kích thước $120\text{m}\times100\text{m}$.

a) *Trên mảnh đất thứ nhất, nhà đầu tư muốn xây một ngôi nhà có nền hình chữ nhật có kích thước* $25\text{m}\times35\text{m}$ *và xây bên ngoài 9 bồn hoa hình tròn đường kính* 5m. *Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở đâu thì trên phần đất còn lại vẫn đủ xây ngôi nhà đó.*

b) *Trên mảnh đất thứ hai, nhà đầu tư muốn xây một hồ cá hình đa giác lồi sao cho từ một điểm bất kì trên phần đất còn lại có thể đi không quá 5m thì đến bờ hồ. Chứng minh rằng chu vi hồ không nhỏ hơn* $440-20\sqrt{2}$ m.

Bài 2 (Bài 4 IMO 1973). *Một người lính cần kiểm tra sự hiện diện của mìn trong một khu vực có hình dạng tam giác đều. Bán kính hoạt động của máy dò của anh ta bằng một nửa độ cao h của tam giác. Người lính xuất phát từ một đỉnh tam giác. Con đường nào anh nên đi, để đi một độ dài ngắn nhất có thể mà vẫn hoàn thành nhiệm vụ của mình?*

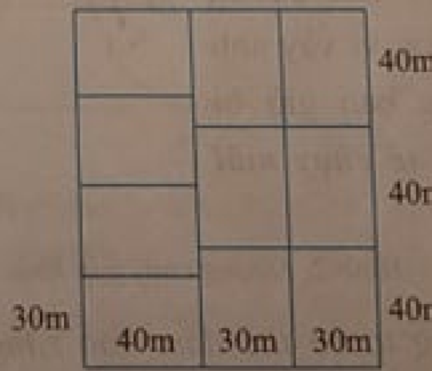
Bài 3 (Bài 15.123 trang 19, "*Các bài toán về hình học phẳng*", Praxolov, Nguyễn Đễ và Hoàng Đức Chính dịch, NXB Hải phòng, 1996). *Bên trong hình vuông cạnh 100 đặt một đường gấp khúc L có tính chất là mọi điểm của hình vuông đều cách L một khoảng không lớn hơn 0,5. Khi đó trên L có 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 1, nhưng khoảng cách dọc theo L giữa chúng không nhỏ hơn 198.*

(Bài toán này được thầy *Văn Như Cương* đề nghị lên Hội đồng thi Toán Quốc Tế 1980 và được chọn trở thành bài số 3 trong kỳ thi IMO 1981.)

Bài 1a) là một bài chia hình khá quen thuộc. Trong đề thi này, bài toán khó hơn chút so với các bài toán thường gặp là ta phải chia cắt và xoay hình khi chia hình chữ nhật lớn thành các hình chữ nhật nhỏ.

Chứng minh bài toán 1a).

Trước hết ta chia hình chữ nhật $120\text{m}\times100\text{m}$ thành 10 hình chữ nhật $30\text{m}\times40\text{m}$ như trong hình sau.

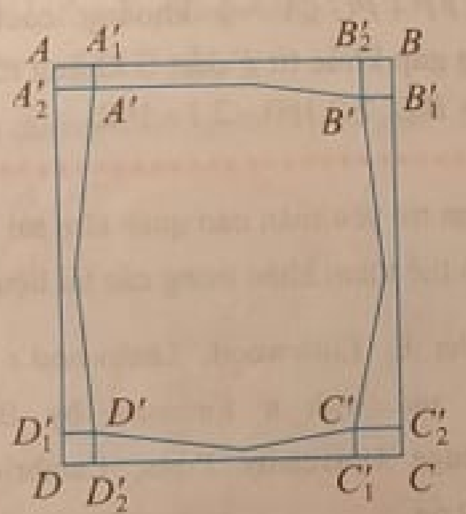


Hình 1. Chia hình chữ nhật đã cho thành 10 hình chữ nhật nhỏ

Như vậy, dù 9 bồn hoa được xây trước ở đâu chăng nữa, tồn tại 1 hình chữ nhật nhỏ không chứa tâm bồn hoa nào cả. Thu hẹp các cạnh hình chữ nhật nhỏ này mỗi chiều 2,5m thì ta thu được một hình chữ nhật kích thước $25\text{m}\times 35\text{m}$ không có phần chung nào với bồn hoa nào cả. Ta có thể xây ngôi nhà cần xây trên miếng đất này.

Lời giải bài 1b).

Theo giả thiết đầu bài thì tồn tại các điểm A', B', C', D' trên biên hồ cá và cách các đỉnh A, B, C, D của miếng đất hình chữ nhật $120\text{m}\times 100\text{m}$ một khoảng $\le 5\text{m}$. Dễ thấy chu vi của hồ cá không nhỏ hơn chu vi tứ giác $A'B'C'D'$, cho nên chỉ cần xác định khi nào tứ giác $A'B'C'D'$ có chu vi nhỏ nhất.



Hình 2. Xác định các điểm đặc biệt

Từ A', B', C', D' hạ các đường vuông góc lên các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$ (xem hình 2). Do khoảng cách $AA'\le 5$, cho nên

$$AA'_1 + AA'_2 \le \sqrt{2(AA'^2_1 + AA'^2_2)}$$
$$= \sqrt{2AA'^2} \le 5\sqrt{2}.$$

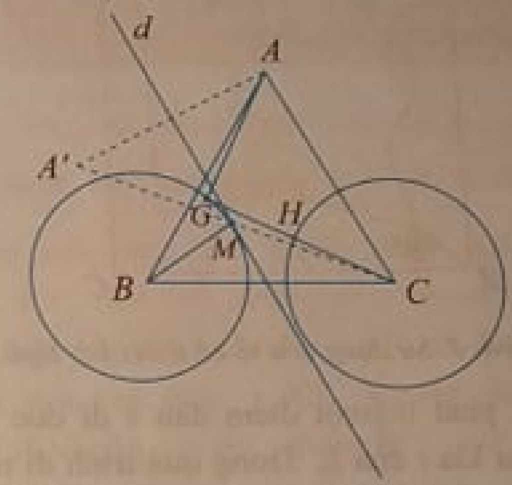
Tương tự, suy ra:

$$AA'_1 + AA'_2 + BB'_1 + BB'_2 + CC'_1 + CC'_2$$
$$+ DD'_1 + DD'_2 \le 20\sqrt{2}.$$

Bằng so sánh đơn giản, có thể thấy chu vi tứ giác $A'B'C'D' \ge A'_1B'_2 + B'_1C'_2 + C'_1D'_2 + D'_1A'_2$

$$\ge AB + BC + CD + DA - (AA'_1 + AA'_2$$
$$+ BB'_1 + BB'_2 + CC'_1 + CC'_2 + DD'_1 + DD')$$
$$\ge (AB + BC + CD + DA) - 20\sqrt{2}$$
$$= 440 - 20\sqrt{2}.$$

Lời giải bài 2).

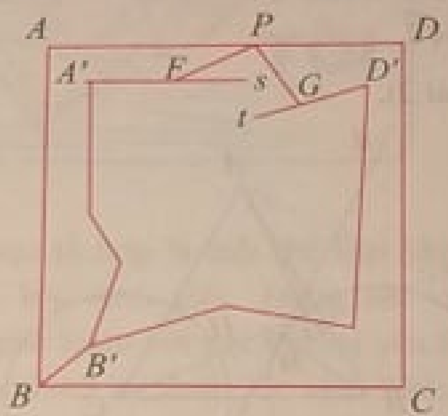


Hình 3. Xác định các điểm đặc biệt

Giả sử người lính xuất phát từ đỉnh A, tiếp theo, lúc nào đó anh ta phải dò mìn tại đỉnh B và sau đó là đỉnh C. Như vậy anh ta phải tới một điểm G trên đường tròn tâm B bán kính nửa đường cao h. Sau đó anh ta phải đến một điểm H trên đường tròn tâm C bán kính nửa h. Dễ thấy bài toán quy về bài toán tìm điểm G trên $\left(B,\frac{h}{2}\right)$ sao cho tổng khoảng cách $GA+GC$ bé nhất có thể. Gọi M là giao của phân giác góc $\widehat{ABC}$ với đường tròn $\left(B,\frac{h}{2}\right)$, d là tiếp tuyến của đường tròn $\left(B,\frac{h}{2}\right)$ tại M, và A' là điểm đối xứng của A qua d. Do tính đối xứng, ta dễ thấy rằng luôn có $GA+GC = GA'+GC \ge CA'$, đẳng thức khi và chỉ khi $G\equiv M$.

Như vậy con đường dò mìn ngắn nhất xuất phát từ A đi tới điểm M và từ M đi dọc MC cho tới khi đến khi gặp đường tròn $\left(C,\frac{h}{2}\right)$.

Lời giải bài toán 3).



Hình 4. Sử dụng yếu tố có tính chất tôpô

Ta xuất phát từ một điểm đầu s đi dọc L tới điểm đầu kia t của L. Trong quá trình đi này ta sẽ tới các đỉnh A', B', D' gần các đỉnh A, B, D hình vuông một cách tương ứng một khoảng không vượt quá 0,5. Giả sử không mất tổng quát là ta đến A' đầu tiên, sau đó đến B' và cuối cùng là D'. Dễ thấy là khoảng cách từ A' đến B', và tương tự là khoảng cách từ B' đến D', dọc theo bờ suối không nhỏ hơn $100-1=99$. Ký hiệu M_1 là tập điểm trên AD có khoảng cách tới điểm nào đó trên đoạn dọc theo L từ s đến B' không vượt quá 0,5, và M_2 là tập điểm trên AD có khoảng cách tới điểm nào đó trên đoạn dọc theo L từ B' đến t không vượt quá 0,5. Vì điểm nào trên AD cũng cách một điểm nào đó trên L một khoảng $\le 0,5$ cho nên $AD = M_1 \cup M_2$. Vì M_1 và M_2 đều là hợp của các đoạn thẳng cho nên giao của M_1 và M_2 không phải là $\varnothing$. Chọn P là điểm như vậy và F là điểm trên đoạn từ s đến B' và G là trên đoạn B' tới t (dọc theo L) sao cho $PF, PG \le 0,5$. Dễ chứng minh rằng hai điểm F, G thỏa mãn yêu cầu bài toán, vì $FG \le FP + PG \le 1$ và khoảng cách dọc theo đường gấp khúc từ F đến G không nhỏ hơn tổng $A'B' + B'D' \ge 2.100 - 2.1 = 198$.

***

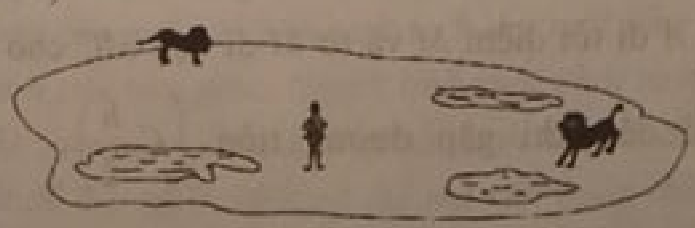
BÀI TOÁN SƯ TỬ VÀ ĐẤU SĨ (*tiếp theo trang 33*)

Lời giải bài toán Sư tử và Đấu sĩ của *Besicovitch* cho chúng ta biết rằng đối với $d = 2$ một con chim là không đủ; dễ dàng thấy rằng hai con chim là đủ. Nói chung, với $d-1$ con chim là không đủ, nhưng với d con chim là đủ.

Còn rất nhiều các biến thể thú vị khác của bài toán, mà các bạn có thể tìm thấy trong tài liệu tham khảo. Bài toán sau được đề cập bởi *J. E. Littlewood* hiện vẫn chưa được giải quyết.

Hai con Sư tử trên một sân gôn. *Có thể hai con Sư tử bắt được Đấu sĩ trên một sân golf có nhiều hồ nước hay không?*

Đương nhiên ta giả định là cả *Đấu sĩ* và *Sư tử* đều không được phép bước vào các hồ, và ranh giới của các hồ nước là "đẹp" theo nghĩa kỹ thuật (xem hình 3).



Hình 3. Các con Sư tử đang cố bắt một Đấu sĩ

Các bạn trẻ yêu toán nào quan tâm tới các bài toán trên có thể tham khảo trong các tài liệu dưới đây.

[1] John E. Littlewood, *Littlewood's Miscellany*. Edited and with a foreword by B. Bollobas. Cambridge University Press, Cambridge (1986), VI+200 pp.

[2] Bela Bollobas, *The Art of Mathematics - Coffee Time in Memphis*. Cambridge University Press, New York (2006), XVI+359 pp.

[3] Bela Bollobas, Imre Leader, and Mark Walters, *Lion and man - can both win?* (2009).

[4] Hallard T. Croft, "*Lion and man*": *a postscript*. Journal of the London Mathematical Society39, 385–390 (1964)

[5] Vladimir Jankovic, *About a man and lions*. Matematicki Vesnik 2, 359–361 (1978)

[6] Paul J. Nahin, Chases and Escapes - *The Mathematics of Pursuit and Evasion*. Princeton University Press, Princeton (2007), xvi+253 pp.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

BỔ ĐỀ VỀ ĐIỂM CHÍNH GIỮA CỦA MỘT CUNG

NGUYỄN VĂN THANH
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)
TRƯƠNG THỊ THÚY VÂN
(GV trường ĐHSPKT Vĩnh Long)

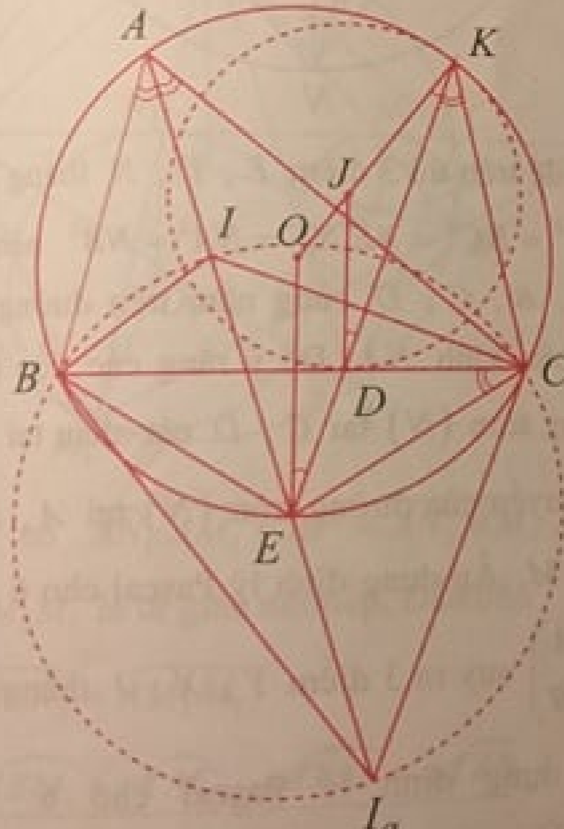
Trong hình học phẳng ở cấp THCS, ắt hẳn bạn đọc rất quen với bổ đề sau đây:

Bổ đề. *Cho tam giác ABC có O, I, I_a lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{BAC}$; J là tâm đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại K và tiếp xúc với cạnh BC tại D; E là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A, ta có:*

a) *Ba điểm K, D, E thẳng hàng.*

b) $EB^2 = EC^2 = EI^2 = ED.EK$.

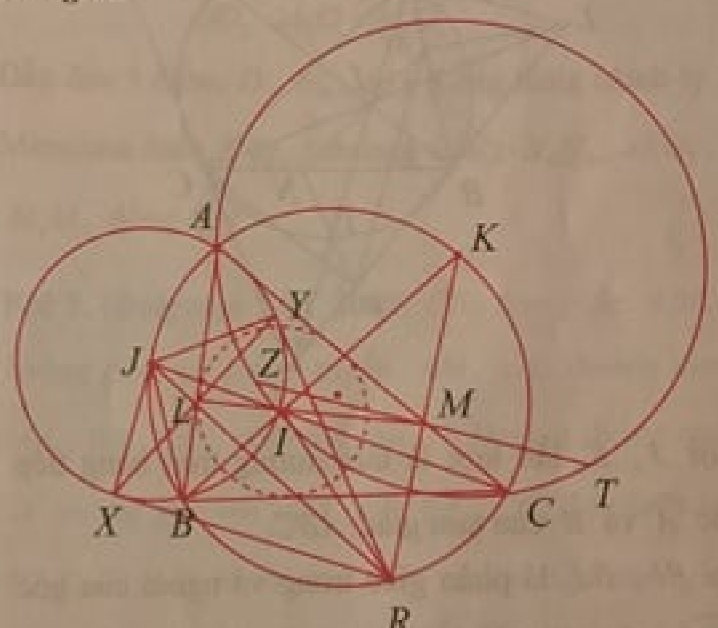
c) *E là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác IBI_aC.*



Các tính chất cơ bản này bạn đọc có thể tự chứng minh dễ dàng. Tuy nhiên bổ đề này lại có rất nhiều ứng dụng hay trong hình học phẳng. Bây giờ, chúng ta sẽ đến với một số bài toán khai thác bổ đề trên.

Bài 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). R là điểm bất kì nằm trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Kẻ tiếp tuyến RX, RY tới đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI và tiếp tuyến RZ, RT tới đường tròn ngoại tiếp tam giác ACI. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng XY, ZT và điểm I thẳng hàng.*

Lời giải.

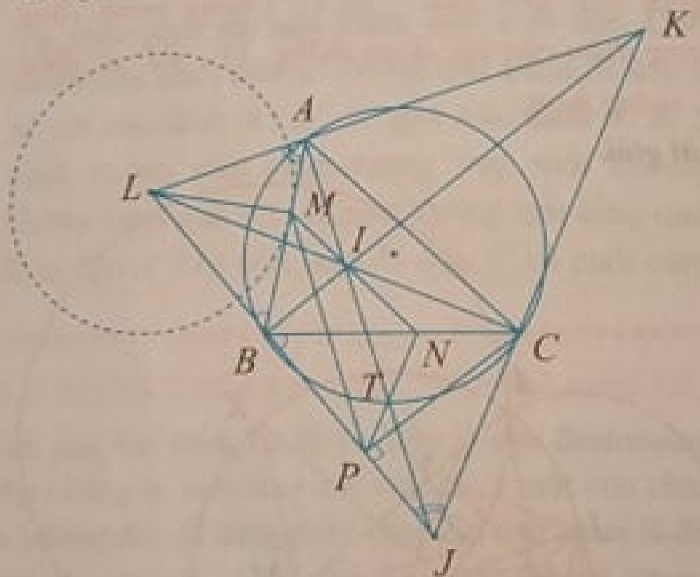


Gọi J, K lần lượt là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa điểm C và cung $\overset{\frown}{AC}$ không chứa điểm B. Theo bổ đề trên ta có J, K lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACI. Gọi $L = RJ \cap XY$, $M = RK \cap ZT$. Khi đó L, M lần lượt là trung điểm của các cạnh XY và ZT.

Lại có AB, RJ, XY là trục đẳng phương của 3 đường tròn (J), (O) và đường tròn đường kính JR nên 3 điểm A, B, L thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta có 3 điểm A, C, M thẳng hàng. Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} A & K & J \\ B & C & B \end{pmatrix}$ suy ra 3 điểm L, M, I thẳng hàng.

Bài 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn bàng tiếp (L) ứng với góc $\widehat{C}$ của tam giác ABC tiếp xúc với AB tại M. MI cắt BC tại N. P là hình chiếu vuông góc của C lên LB. Chứng minh rằng AI và PN cắt nhau trên đường tròn (O).*

Lời giải.



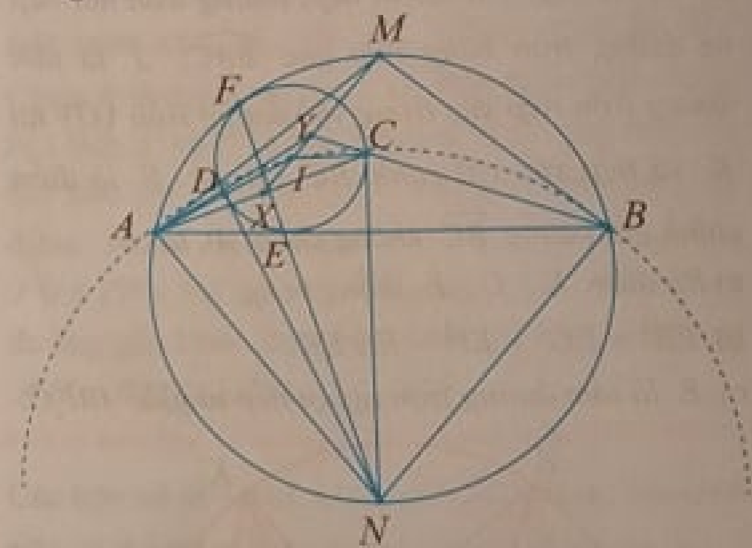
Gọi J, K lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ của tam giác ABC.

Do BI, BJ là phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{ABC}$ nên $B(AN, IJ) = -1 \Rightarrow B(MN, IJ) = -1$ $\Rightarrow P(MN, IJ) = -1$ (1). Lại có $\widehat{LBA} = \widehat{CBJ}$ và $\widehat{LAB} = 90^o - \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{BJC}$. Do đó ΔBAL và ΔBJC đồng dạng, có các đường cao tương ứng là LM và CP nên ta có $\dfrac{BM}{MA} = \dfrac{BP}{PJ} \Rightarrow PM // AJ$.

Kết hợp với (1) ta suy ra PN đi qua trung điểm IJ. Mặt khác theo bổ đề trên, trung điểm IJ thuộc đường tròn (O). Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. *Cho đường tròn (O), dây cung AB. Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại F và tiếp xúc với AB tại E. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AB}$ chứa điểm F và cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa điểm F. Kẻ tiếp tuyến NC, ND của đường tròn (I) (hai điểm C, D nằm trên đường tròn (I)). AC cắt BD tại X, AD cắt BC tại Y. Chứng minh rằng bốn điểm X, Y, M, I thẳng hàng.*

Lời giải.



Theo bổ đề trên thì 3 điểm E, F, N thẳng hàng và $ND^2 = NC^2 = NE.NF = NA^2 = NB^2$ nên các điểm A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn tâm N bán kính NA. Để ý rằng các tiếp tuyến của đường tròn (N) tại C, D cắt nhau tại I và các tiếp tuyến của đường tròn (N) tại A, B cắt nhau tại M. Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} C & D & A \\ D & C & B \end{pmatrix}$ suy ra 3 điểm Y, X, I thẳng hàng.

Lại áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & D \end{pmatrix}$ suy ra 3 điểm M, Y, X thẳng hàng.

Vậy 4 điểm X, Y, M, I thẳng hàng.

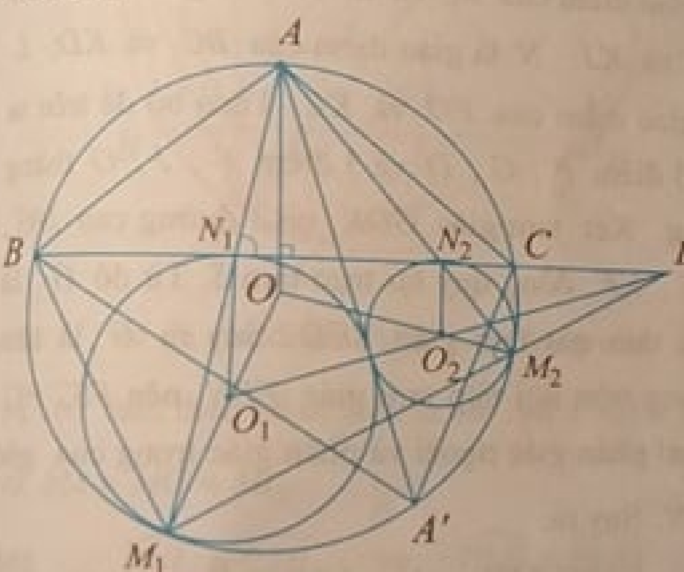
Bài 4. *Cho đường tròn (O) và hai đường tròn (O_1), (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau và tiếp xúc* *trong với đường tròn (O). Gọi I là tiếp điểm của hai đường tròn (O_1) và (O_2); M_1, M_2 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (O) với hai đường tròn (O_1), (O_2). Tiếp tuyến chung tại I của hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt đường tròn (O) tại hai điểm A, A' sao cho A, I nằm cùng phía so với đường thẳng M_1M_2; AM_1 cắt lại đường tròn (O_1) tại N_1; AM_2 cắt lại đường tròn (O_2) tại N_2.*

a) Chứng minh rằng $OA \perp N_1N_2$.

b) N_1N_2 cắt đường tròn (O) ở B, C. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A'BC$.

c) Chứng minh rằng ba đường thẳng N_1N_2, O_1O_2, M_1M_2 đồng quy.

Lời giải.



a) Ta có $\overline{AN_1}.\overline{AM_1} = AI^2 = \overline{AN_2}.\overline{AM_2}$, suy ra $N_1N_2M_2M_1$ là tứ giác nội tiếp. Dẫn đến

$$\widehat{AN_1N_2} = \widehat{AM_2M_1}$$

$$\Rightarrow \frac{sđ\,\widehat{BM_1} + sđ\,\widehat{AC}}{2} = \frac{sđ\,\widehat{BM_1} + sđ\,\widehat{AB}}{2}$$

$\Rightarrow sđ\,\widehat{AC} = sđ\,\widehat{AB}$ hay A là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$. Từ đó $OA \perp N_1N_2$.

b) Theo bổ đề trên thì

$$AB^2 = AC^2 = \overline{AN_1}.\overline{AM_1} = AI^2$$

hay $AB = AC = AI$ (1).

Theo câu a, ta có $A'I$ là phân giác của $\widehat{BA'C}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'BC$.

c) Gọi R, R_1, R_2 lần lượt là bán kính của các đường tròn (O), (O_1) và (O_2). Giả sử O_1O_2 cắt N_1N_2 tại D. Theo bổ đề trên, ta có N_1, N_2 lần lượt là tiếp điểm của hai đường tròn (O_1) và (O_2) với BC. Từ đó suy ra D là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (O_1) và (O_2) nên $\frac{DO_1}{DO_2} = \frac{R_1}{R_2}$.

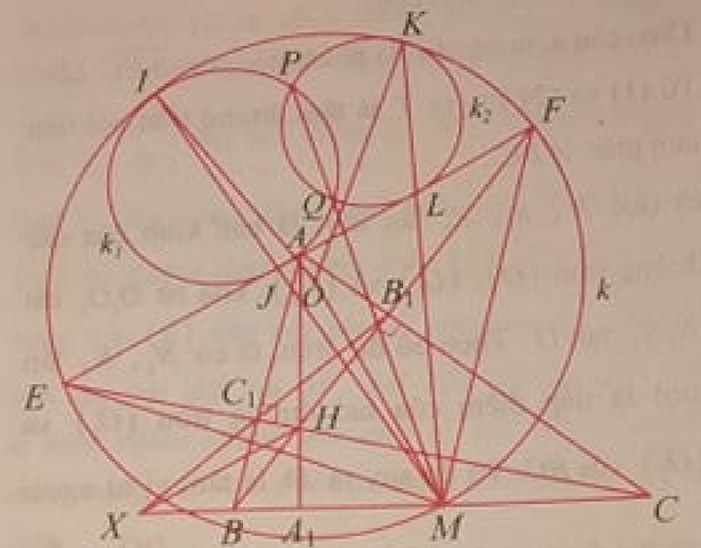
Lại có $\frac{M_2O_2}{M_1O_1} = \frac{R_2}{R_1}$. Suy ra:

$$\frac{DO_1}{DO_2}.\frac{M_2O_2}{M_2O}.\frac{M_1O}{M_1O_1} = 1.$$

Dẫn đến 3 điểm D, M_1, M_2 thẳng hàng (định lý Menelaus đảo). Vậy, 3 đường thẳng N_1N_2, O_1O_2, M_1M_2 đồng quy.

Bài 5. (Bulgaria TST 2008) *Cho tam giác ABC không cân, có trung tuyến AM, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt BB_1, CC_1 lần lượt tại F, E. Gọi k là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFM. Giả sử k_1, k_2 là các đường tròn tiếp xúc với EF và tiếp xúc với cung $\widehat{EF}$ của đường tròn k không chứa điểm M. Chứng minh rằng nếu k_1, k_2 cắt nhau tại P, Q thì ba điểm P, M, Q thẳng hàng.*

Lời giải. Gọi X là giao điểm của B_1C_1 và BC. Ta có tứ giác BCB_1C_1 nội tiếp đường tròn đường kính BC nên theo định lý Brocard ta có $HX \perp AM \Rightarrow HX // EF$ (1).



Mặt khác $(XA_1, BC) = -1 \Rightarrow H(XA_1, BC) = -1$

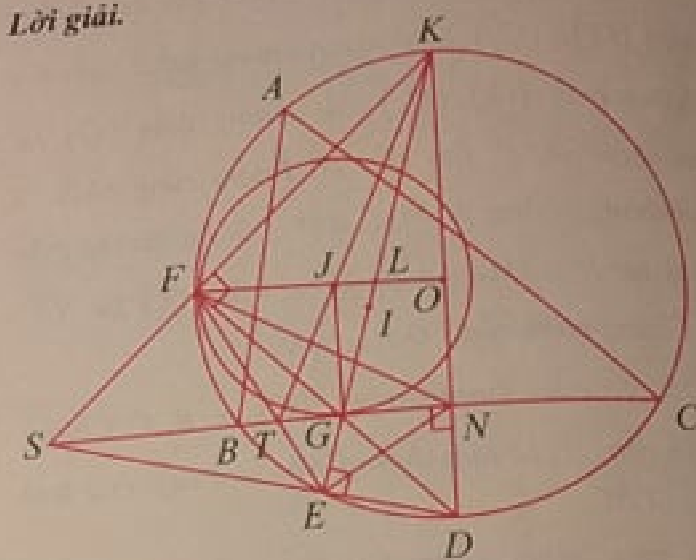
$\Rightarrow \quad H(XA_1, EF) = -1$. Mà $HC \cap EF = E$, $HA_1 \cap EF = A$, $HB \cap EF = F$ (2) nên từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$. Do đó ΔMEF cân tại M, suy ra $ME = MF$ hay M là điểm chính giữa cung $\widehat{EF}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEF.

Gọi tiếp điểm của đường tròn k_1 với đường tròn k và EF lần lượt là I, J; tiếp điểm của đường tròn k_2 với đường tròn k và EF lần lượt là K, L. Áp dụng bổ đề trên ta suy ra 3 điểm I, J, M thẳng hàng, 3 điểm K, L, M thẳng hàng và $ME^2 = MI.MJ$; $MF^2 = MK.ML$. Kết hợp với $ME = MF$ suy ra $MI.MJ = MK.ML$.

Suy ra M thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn k_1 và k_2. Vậy, 3 điểm P, M, Q thẳng hàng.

Bài 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). K là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$. KI cắt BC tại G và cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. (J) là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại F và tiếp xúc với BC tại G. Chứng minh rằng ba đường thẳng EF, JK, BC đồng quy.*

Lời giải.



Kẻ đường kính DK của đường tròn (O). Gọi T là giao điểm của BC và EF; T' là giao điểm của BC và KJ; N là giao điểm của BC và KD; L là giao điểm của FO và KE. Theo bổ đề trên ta có 3 điểm F, G, D và 3 điểm F, J, O thẳng hàng. Xét tam giác GDK có 3 đường cao NG, DE, KF đồng quy tại trực tâm S. Từ đó G là trực tâm của tam giác SKD. Suy ra G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác FEN nên FS, FG là hai phân giác ngoài và phân giác trong của góc $\widehat{TFN}$. Suy ra:

$$F(SG, TN) = -1 \Rightarrow (SG, TN) = -1 \ (1).$$

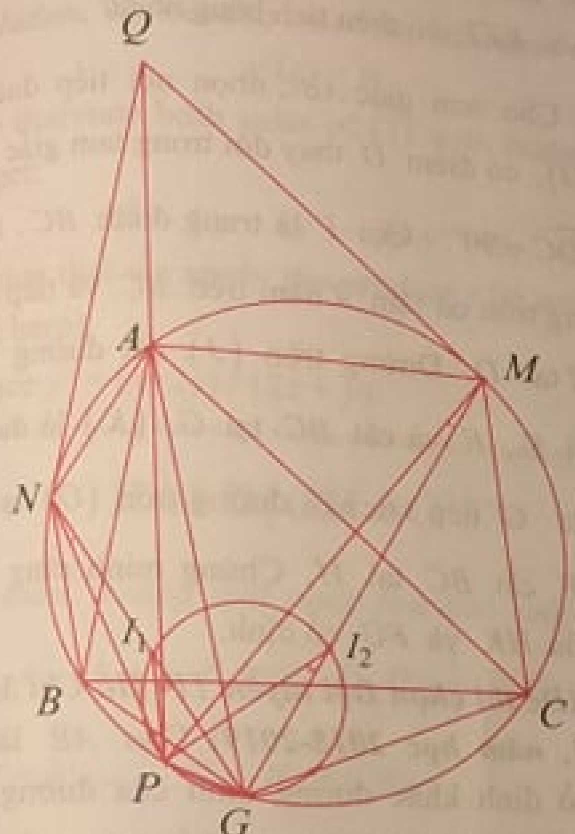
Mặt khác, $\dfrac{LJ}{LO} = \dfrac{JG}{OK} = \dfrac{GJ}{OD} = \dfrac{FJ}{FO}$ nên

$$(FL, JO) = -1 \Rightarrow K(FL, JO) = -1$$

hay $(SG, T'N) = -1$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $T \equiv T'$, ta được điều phải chứng minh.

Bài 7. *Cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của hai cung nhỏ $\widehat{AC}$, $\widehat{AB}$ của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Lấy điểm G trên cung nhỏ BC (G khác B, C). Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp* các tam giác ABG và ACG; P là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác GI_1I_2. Kẻ tiếp tuyến của (O) tại N, M cắt nhau ở Q. Chứng minh rằng 3 điểm A, P, Q thẳng hàng.

Lời giải.



Do N, M là các điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AC}$ nên theo bổ đề trên ta có $NA = NB = NI_1$ và $MA = MC = MI_2$.

Mà $\widehat{PNI_1} = \widehat{PMI_2}$ và $\widehat{PI_1G} = \widehat{PI_2G}$ nên $\Delta PI_1N \backsim \Delta PI_2M$. Suy ra $\dfrac{PN}{PM} = \dfrac{NI_1}{MI_2} = \dfrac{NA}{MA}$.

Do đó tứ giác $NAMP$ điều hòa, hay ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

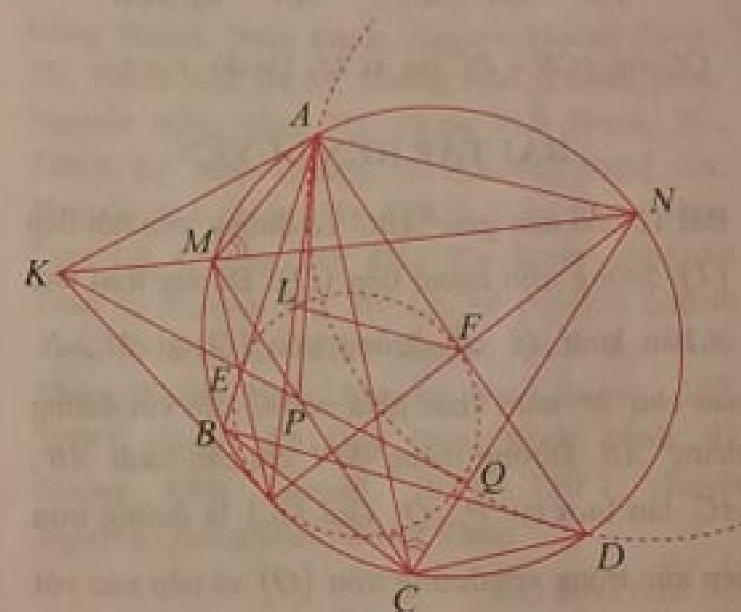
Nhận xét. Có một sự trùng hợp thú vị là điểm P trong bài toán trên chính là tiếp điểm của đường tròn *mixtilinear* nội tiếp ứng với góc $\widehat{BAC}$ với đường tròn (O). Tiếp tục khai thác mô hình này, chúng ta đến với bài toán sau đây.

Bài 8. (Đề thi HSG tỉnh Ninh Bình ngày 2 năm học 2018-2019) *Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), đường tròn tâm I tiếp xúc với các tia AB, AD lần lượt tại E và F đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại T. Hai tiếp tuyến tại A và T của đường tròn (O) cắt nhau tại K. Các đường thẳng TE, TF lần lượt cắt lại đường tròn (O) thứ tự tại các điểm M, N.*

a) Chứng minh rằng ba điểm K, M, N thẳng hàng.

b) Đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt MC tại P, đường thẳng KP cắt CN tại Q. Chứng minh rằng nếu N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ thì bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ACD bằng nhau.

Lời giải.



a) Gọi L là giao điểm thứ hai của đường thẳng AT với đường tròn (I). Do đường tròn (I) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại T nên tồn tại phép vị tự tâm T biến đường tròn (I) thành đường tròn (O). Do đó $E \mapsto M$, $F \mapsto N$, $L \mapsto A$, $T \mapsto T$ nên biến tứ giác điều hòa $TELF$ thành tứ giác điều hòa $TMAN$, hay ba điểm K, M, N thẳng hàng.

b) Theo bổ đề trên, ta có M, N lần lượt là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AC}$. Do đó điểm P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Mặt khác, Q nằm trên tia phân giác của góc $\widehat{ACD}$ và $NQ = NA = ND$ nên Q là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD. Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp hai tam giác ABC và ACD. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác MCN với cát tuyến K, P, Q ta có:

$$\frac{PC}{PM}.\frac{MK}{KN}.\frac{NQ}{QC}=1 \Leftrightarrow \frac{PC}{AM}.\frac{MK}{KN}.\frac{NA}{QC}=1 \Leftrightarrow \frac{QC}{PC}=\frac{AN}{AM}.\frac{KM}{KN}.$$

Mà $\Delta KAM \backsim \Delta KNA$ (g.g) nên $\frac{KA}{KN}=\frac{KM}{KA}=\frac{AM}{AN}$. Suy ra $\frac{KM}{KN}=\left(\frac{AM}{AN}\right)^2$, dẫn đến $\frac{QC}{PC}=\frac{AN}{AM}.\left(\frac{AM}{AN}\right)^2=\frac{AM}{AN}=\frac{\sin\widehat{ACM}}{\sin\widehat{ACN}}$ hay $QC.\sin\widehat{ACN}=PC.\sin\widehat{ACM}$. Do đó $r_1 = r_2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I), đường tròn ngoại tiếp (O). Đường tròn tâm A, bán kính IA cắt đường tròn (O) tại M, N sao cho M nằm khác phía với C đối với đường thẳng AB. Đường thẳng MN cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q. Gọi (K) là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) và tiếp xúc với các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

Bài 2. (***Đề thi Olympic KHTN Hà Nội ngày 2, năm 2017***) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. AI cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại K khác A. P là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC và nằm trong tam giác ABC. PK cắt BC tại L. AL cắt đường tròn (O) tại F khác A. Giả sử KF cắt BC tại T. Điểm Q đối xứng với P qua K. AQ cắt đường tròn (O) tại R khác A.

a) Chứng minh rằng $PT // KR$.

b) Đường thẳng AP cắt lại đường tròn (O) tại điểm E khác điểm A. Chứng minh rằng tam giác KEP và KET có diện tích bằng nhau.

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), có điểm D thay đổi trong tam giác sao cho $\widehat{BDC} = 90^\circ$. Gọi I là trung điểm BC. (J) là đường tròn có tâm J nằm trên BC và tiếp xúc với DI tại D. Đường tròn (J) cắt đường tròn (O) tại E, F và cắt BC tại G. (K) là đường tròn qua G tiếp xúc với đường tròn (O) tại E. Gọi EF cắt BC tại H. Chứng minh rằng giao điểm của HK và FG cố định.

Bài 4. (***Đề thi chọn Đội tuyển TP. Hồ Chí Minh, ngày 1, năm học 2018-2019***) Cho AB là dây cung cố định khác đường kính của đường tròn (O) cố định. Gọi M là trung điểm cung nhỏ AB. Xét đường tròn (O') thay đổi tiếp xúc với đoạn thẳng AB và tiếp xúc với (O) tại điểm thuộc cung lớn AB (O' khác phía với M so với đường thẳng AB). Các đường thẳng qua M vuông góc với $O'A$ và $O'B$ cắt đoạn thẳng AB lần lượt tại C, D.

a) Chứng minh rằng $AB = 2CD$.

b) Gọi T là điểm thuộc đường tròn (O') sao cho $\widehat{ATB} = 90^\circ$. Giả sử tiếp tuyến của đường tròn (O') tại T cắt đoạn thẳng AB tại N và đường thẳng MN cắt lại đường tròn (O) tại K. Vẽ đường tròn qua M, K và tiếp xúc ngoài với đường tròn (O') tại S. Chứng minh rằng điểm S luôn di động trên đường tròn cố định khi đường tròn (O') thay đổi.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 56

Problem. *Find the stationary points of the function $y(x)$ which is given implicitly as follows* $x^2-4xy-y^2+20=0$ $(y>0)$. (1)

Solution. We need to solve the equation

$$y'(x)=0.$$

We deriviate both sides of (1) with respect to x to get:

$$2x-4(y+xy')-2y.y'=0,$$

(notice that we apply the product rule and chain rule here).

Hence $y'=(x-2y)/(2x+y)$.

Then $y'=0$ implies that $x=2y$ (2).

We use (1) and (2) to get the unique stationary point $(x;y)=(4;2)$.

TỪ VỰNG

stationary point : *điểm dừng*

implicitly : *ẩn (cho dưới dạng ẩn)*

deriviate : *lấy đạo hàm*

chain rule : *quy tắc đạo hàm hàm hợp*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 53

Bài toán. *Trong một phép thử xác suất có hai biến cố A và B với* $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{4}$ *và* $P(A'\cap B')=\frac{3}{5}$. *Tìm* $P(A\cap B)$.

Lưu ý. A' là phần bù của biến cố A.

Lời giải. Ta có: $P(A\cup B)=1-P((A\cup B)')$

$$=1-P(A'\cap B')$$

$$=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}.$$

Từ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,

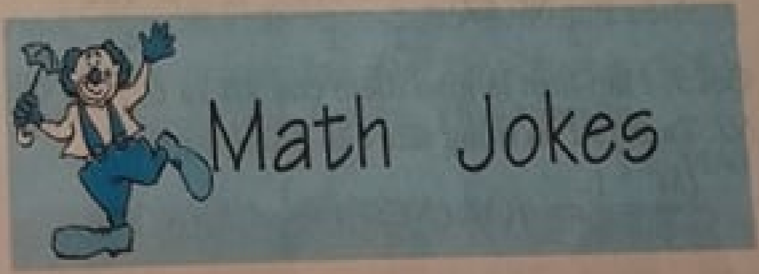
$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

suy ra: $P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=\frac{7}{2}-\frac{2}{5}$

$$=\frac{35}{60}-\frac{24}{60}=\frac{11}{60}.$$

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Phạm Việt Hòa*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Nguyễn Hoàng Long*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Hằng Nga*, 7D, *Phạm Viết Thịnh*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ, **Quảng Trị**; *Đào Thị Khánh Nhi*, 10 Toán 1, *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, *Lê Nguyễn Quỳnh Anh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**; *Võ Hoàng Khôi Nguyên*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)



A math professor, a native Texan, was asked by one of his students:

"*What is mathematics good for?*"

He replied: "*This question makes me sick! If you show someone the Grand Canyon for the first time, and he asks you, 'What's it good for?' what would you do? Well, you'd kick that guy off the cliff!*"

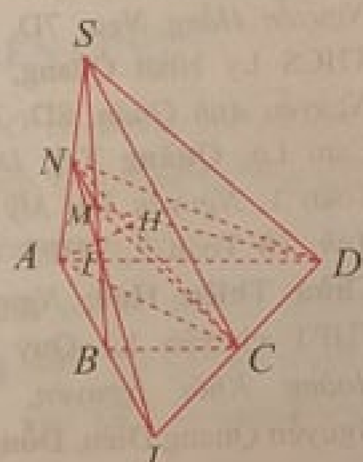
NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 36. *Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, biết $AB = BC = a, AD = 2a, SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB, SA. Tính thể tích khối tứ diện MNCD theo a.*

Lời giải. *Cách 1.* ΔNAC có:

$$NC^2 = NA^2 + AC^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 = \frac{11a^2}{4}$$

$$\Rightarrow NC = \frac{a\sqrt{11}}{2}.$$



Từ giả thiết hình thang $ABCD$ có $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$, ta suy ra $CD \perp AC$. Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp SA$ $\Rightarrow CD \perp (SAC)$ $\Rightarrow NC \perp CD$.

Đến đây, ta tính được:

$$S_{NCD} = \frac{1}{2}NC.CD = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{11}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{22}}{4}.$$

Gọi J, I lần lượt là giao điểm của AB và CD, SB và NJ. Ta thấy I là trọng tâm của ΔSAJ, suy ra:

$$\frac{IM}{IS} = \frac{1}{4} \Rightarrow d(M;(NCD)) = \frac{1}{4}d(S;(NCD)).$$

Gọi AH là đường cao của ΔANC. Ta có: $CD \perp (SAC) \Rightarrow AH \perp CD$. Ta cũng có: $AH \perp NC \Rightarrow AH \perp (NCD) \Rightarrow d(A;(NCD)) = AH$.

Trong ΔANC có: $AH = \dfrac{AN.AC}{NC} = \dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

Do SA cắt mp(NCD) tại trung điểm N của SA, suy ra: $d(S;(NCD)) = d(A;(NCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{66}}{11}$

$$\Rightarrow d(M;(NCD)) = \frac{1}{4}.\frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

Vậy $V_{MNCD} = \dfrac{1}{3}S_{NCD}.d(M;(NCD)) = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Cách 2. (*Hình ở cách 1*) Tính được:

$$S_{NCD} = \frac{1}{2}NC.CD = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{11}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{22}}{4}.$$

Ta có: $V_{NBCD} = \dfrac{1}{3}NA.S_{BCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}SA.\dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lại có: $V_{NBCD} = \dfrac{1}{3}d(B;(NCD)).S_{NCD}$

$$\Rightarrow d(B;(NCD)) = \frac{3V_{NBCD}}{S_{NCD}} = \frac{a\sqrt{66}}{22}.$$

Ta có BM cắt mp(NCD) tại I và $\dfrac{MI}{BI} = \dfrac{\frac{1}{6}SB}{\frac{1}{3}SB} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow d(M;(NCD)) = \frac{1}{2}d(B;(NCD)) = \frac{a\sqrt{66}}{44}.$$

Đến đây ta có:

$$V_{MNCD} = \frac{1}{3}S_{NCD}.d(M;(NCD)) = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Cách 3. Ta có:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SA.AB.\frac{AD+BC}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có: $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$

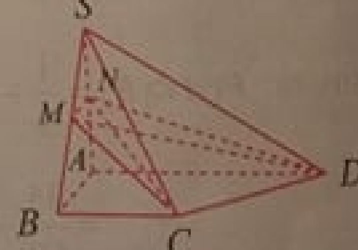
$$\Rightarrow V_{C.MNAB} = \frac{1}{3}BC.S_{MNAB} = \frac{1}{3}BC.\frac{MN+AB}{2}.AN = \frac{a^3\sqrt{3}}{8};$$

$$V_{N.ACD} = \frac{1}{3}AN.S_{ACD} = \frac{1}{3}AN.\frac{1}{2}AB.AD = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Từ

$$\frac{V_{S.MND}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM.SN.SD}{SA.SB.SD} = \frac{1}{4}$$

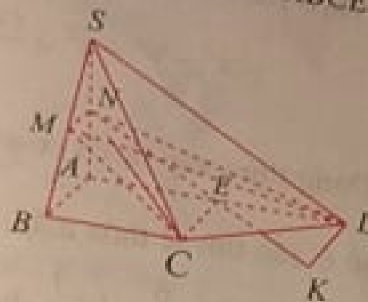
$$\Rightarrow V_{S.MND} = \frac{1}{4}V_{S.ABD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12};$$



$$\frac{V_{S.MCD}}{V_{S.BCD}} = \frac{SM.SC.SD}{SB.SC.SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.MCD} = \frac{1}{2}V_{S.BCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12};$$

$$V_{MNCD} = V_{S.ABCD} - V_{C.MNAB} - V_{NACD} - V_{S.MND} - V_{S.MCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Cách 4. Gọi E là trung điểm của AD, khi đó $ABCE$ là hình vuông. Dễ thấy $CE \perp (SAD) \Rightarrow CE \perp NE$.



Vì $MN // AB, MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ $\Rightarrow$ $MCNE$ là hình thang vuông tại N và E. Trong tam giác vuông SAD, ta tính được: $SD = a\sqrt{7} \Rightarrow NE = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

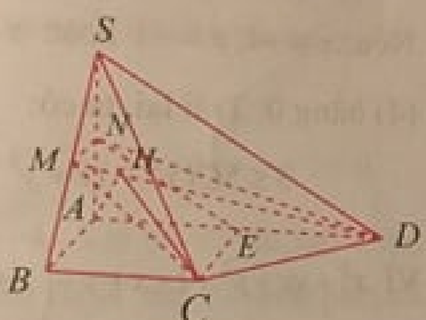
$\Rightarrow S_{MNC} = \frac{1}{2}NE.MN = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}$. Gọi DK là đường cao của ΔDNE, suy ra:

$DK \perp (NCE) \Rightarrow d(D;(CENM)) = DK$. Ta có:

$S_{DEN} = \frac{1}{4}S_{SAD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}DK.NE = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow DK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Khi đó $V_{MNCD} = \frac{1}{3}S_{MNC}.d(D;(MNC)) = \frac{1}{3}S_{MNC}.DK = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Quan sát cách giải trên, ta có thể tính khoảng cách từ D đến (MNC) gọn hơn như sau.



Gọi E là trung điểm của AD, khi đó $ABCE$ là hình vuông. Dễ thấy $CE \perp (SAD)$.

Gọi AH là đường cao của ΔANE. Ta có: $CE \perp (SAD) \Rightarrow AH \perp CE$, ta lại có: $AH \perp NE \Rightarrow AH \perp (MNEC) \Rightarrow d(A;(MNEC)) = AH$.

Trong ΔANE, ta có:

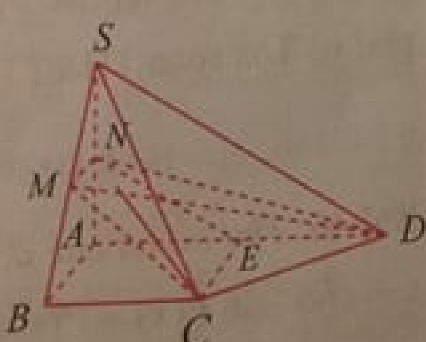
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Mà AD cắt mp$(NMEC)$ tại trung điểm E của AD nên $d(D;(MNEC)) = d(A;MNEC)) = AH$.

Cách 5. Gọi E là trung điểm của AD, khi đó $ABCE$ là hình vuông. Dễ thấy $CE \perp (SAD) \Rightarrow CE \perp NE$.

Vì $MN // AB$,

$MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2} \Rightarrow MCEN$ là hình thang vuông tại N và E.



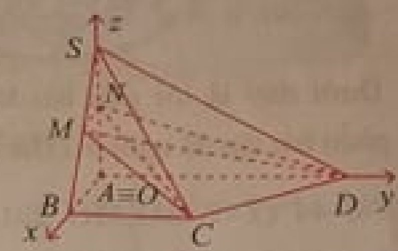
Ta có:

$S_{DEN} = \frac{1}{4}S_{SAD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, đến đây tính được:

$$V_{CNED} = \frac{1}{3}S_{NED}.CE = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Ta có: $S_{MNC} = \frac{1}{2}S_{NCE} \Rightarrow V_{MNCD} = \frac{1}{2}V_{DNCE} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Cách 6. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$ và $S(0;0;a\sqrt{3})$.



Khi đó: $N\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{NC} = \left(a;a;\frac{-a\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{ND} = \left(0;2a;\frac{-a\sqrt{3}}{2}\right)$$

suy ra $S_{NCD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{NC} \wedge \overrightarrow{ND}\right| = \frac{a^2\sqrt{22}}{4}$ và vectơ pháp tuyến của mp(NCD) là $\vec{n} = (\sqrt{3};\sqrt{3};4)$.

Phương trình mp(NCD):

$$\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + 4z - 2a\sqrt{3} = 0, d(M,(NCD)) = \frac{a\sqrt{66}}{44}.$$

Vậy $V_{MNCD} = \frac{1}{3}S_{MNC}.d(D;(MNC)) = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Nhóm HTS (*Happy To Succeed*), 12 Toán, *THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn*, **Bình Định**

Nhận xét. Ngoài 6 cách giải của Nhóm HTS, 12 Toán, *THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn*, **Bình Định**, Tòa soạn còn nhận được thêm một số cách giải tương tự của bạn *Đỗ Thị Phương*, 12A1, THPT Nguyễn Huệ, Đại Từ, **Thái Nguyên**.

LÊ MAI

Mời các bạn gửi lời giải **BÀI TOÁN 37** dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.6.2020.

BÀI TOÁN 37. *Cho tam giác ABC nhọn có AB = AC. Kẻ BM vuông góc với AC. Chứng minh rằng* $\frac{AM}{MC} + 1 = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2$.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 513, T3.2020.

Bài 44 (T–2, MEMO 2017). *Xác định hằng số thực C nhỏ nhất có thể sao cho bất đẳng thức*

$$\left|x^3+y^3+z^3+1\right| \le C\left|x^5+y^5+z^5+1\right| \quad (1)$$

luôn đúng với mọi số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=-1$.

Lời giải. Cách 1. Thay 1 bởi $-(x+y+z)^3$ và $-(x+y+z)^5$ vào vế trái và vế phải của (1) ta có:

$$\left|x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3\right|$$
$$\le C\left|x^5+y^5+z^5-(x+y+z)^5\right| \ (2).$$

Nhận xét rằng với $z=-x$ thì VT(2) = VP(2) = 0 nên (2) có nhân tử là $x+z$.

Tương tự: $(x+y)$, $(y+z)$ cũng là các nhân tử. Từ đó suy ra:

$$\left|3(x+y)(x+z)(y+z)\right|$$
$$\le C\left|5(x+y)(x+z)(y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)\right|.$$

Do đó với $(x+y)(x+z)(y+z)=0$ thì BĐT sẽ trở thành đẳng thức. Vậy ta có thể giả sử rằng $(x+y)(x+z)(y+z)\neq 0$ và phải chứng tỏ

$$3\le 5C.\left|(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)\right| \quad (3).$$

Vì $\left|x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz\right|=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz$

nên (3) $\Leftrightarrow \dfrac{3}{5C}\le x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5C}\le x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5C}-1\le x^2+y^2+z^2.$$

Theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$x^2+y^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=-\dfrac{1}{3}$. Do đó hằng số C cần tìm sẽ thỏa mãn:

$$\frac{6}{5C}-1\le\frac{1}{3} \text{ hay } C\ge\frac{9}{10}.$$

Suy ra hằng số C nhỏ nhất cần tìm là $C=\dfrac{9}{10}$ và bất đẳng thức đã cho trở thành đẳng thức khi $(x+y)(x+z)(y+z)=0$ hoặc $x=y=z=-\dfrac{1}{3}$.

Cách 2. Thay $-1-x-y$ vào hai vế của (1) và biến đổi ta có:

$$\left|3(x+1)(y+1)(x+y)\right|$$
$$\le 5C\left|(x+1)(y+1)(x+y)\right|(x^2+xy+y^2+1+x+y) \ (4).$$

Nếu $x=-1, y=-1$ hoặc $x=-y$ thì cả hai vế của (4) bằng 0. Trái lại, ta có:

$$3\le 5C(x^2+xy+y^2+1+x+y) \ (5).$$

Vì $x^2+xy+y^2+1+x+y=\left(x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\left(y+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$

$$\ge\frac{2}{3}$$

tức là VP(5) có giá trị nhỏ nhất là $5C.\dfrac{2}{3}=\dfrac{10C}{3}$,

nên $3\le\dfrac{10C}{3}$ hay $C\ge\dfrac{9}{10}$.

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được bài giải nào cho bài này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.6.2020.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 46. *Tìm tất cả các đa thức* $P(x)$ *với hệ số thực sao cho* $\sin P(x)=P(\sin x)$, $x\in\mathbb{R}$.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: CÓ ĐÚNG KHÔNG ?

(Đề đăng trên TH&TT số 51, tháng 1 năm 2020)

Phân tích sai lầm. Lời giải chưa chuẩn xác ở chỗ, bạn *Nam* mới chỉ giải quyết ý thứ hai của bài toán. Tức là khi hàm số đã có giá trị lớn nhất, thì yêu cầu giá trị lớn nhất đó không vượt quá 2. Còn yêu cầu tìm m để hàm số đó có giá trị lớn nhất thì chưa làm, do đó đã nhận cả giá trị bằng $m=-1$, trong khi giá trị này làm cho hàm số không có giá trị lớn nhất.

Lời giải đúng. Bài này có thể dùng khảo sát hàm số để biện luận giá trị lớn nhất. Nhưng tiếp nối kiến thức lời giải của bạn *Nam*, ta có thể hoàn chỉnh như sau: Lấy y thuộc vào tập giá trị của hàm số. Khi đó tồn tại $x\in\mathbb{R}$ sao cho

$$y=\frac{x^2-mx-3}{x^2+x+2}\Leftrightarrow (y-1)x^2+(y+m)x+y+3=0.$$

Nếu $y=1$ thì $(1+m)x=-4$. Khi đó để tồn tại x thì $m\neq -1$. Nếu $y\neq 1$, để tồn tại x tức PT trên phải có nghiệm x hay $\Delta\geq 0\Leftrightarrow 3y^2+2(4-m)y-m^2-12\leq 0.$

Giải ra được

$$\frac{m-4-2\sqrt{m^2-2m+13}}{3}\leq y\leq\frac{m-4+2\sqrt{m^2-2m+13}}{3}.$$

Suy ra giá trị lớn nhất của y (theo m) là

$$\frac{m-4+2\sqrt{m^2-2m+13}}{3}.$$

Để thỏa yêu cầu bài toán thì

$$\frac{m-4+2\sqrt{m^2-2m+13}}{3}\leq 2.$$

Giải BPT trên được: $-2-2\sqrt{5}\leq m\leq -2+2\sqrt{5}.$

Do đó các giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán là $m\in\left[-2-2\sqrt{5},-2+2\sqrt{5}\right]\setminus\{-1\}$. Từ đó các giá trị nguyên của m là $\{-6;-5;-4;-3;-2;0;1;2;\}$, tức là có 8 giá trị nguyên của m. Đáp án bài toán là C.

Nhận xét. Đã không có bạn nào phát hiện được sai lầm.

KIHIVI

SAI Ở ĐÂU ?

Trong giờ ôn tập tích phân ở lớp 12T, thầy giáo có cho bài tập trắc nghiệm sau:

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn $[-2;2]$. Biết $\int_{-1}^{0}f(x)dx=-1$, $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(-2x)dx=2$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_{0}^{1}f(x)dx=-1$; B. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx=-4$;

C. $\int\limits_{-2}^{2}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{2}f(x)dx$; D. $\int\limits_{0}^{2}f(x)dx=-3$.

Sau khi đề ghi lên bảng, bạn *Nhật Khánh* liền xung phong lên bảng. Sau đây là lời giải của bạn *Khánh*:

Ta biết, nếu $y=f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx=-\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$.

Thật vậy, ta đặt $t=-x\Rightarrow dx=-dt$ và

$$\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx=-\int\limits_{0}^{a}f(-t)(-dt)=-\int\limits_{0}^{a}f(t)dt=-\int\limits_{0}^{a}f(x)dx.$$

Áp dụng kết quả trên ta có: $\int\limits_{0}^{1}f(x)dx=-\int\limits_{-1}^{0}f(x)dx=1,$

suy ra khẳng định ở đáp án A sai. Ta có:

$$\int\limits_{-2}^{2}f(x)dx=\int\limits_{-2}^{0}f(x)dx+\int\limits_{0}^{2}f(x)dx=-\int\limits_{0}^{2}f(x)dx+\int\limits_{0}^{2}f(x)dx=0,$$

suy ra khẳng định ở đáp án C sai.

Từ giả thiết $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(-2x)dx=2\Rightarrow -2=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(2x)\frac{1}{2}d(2x)\Rightarrow$

$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(2x)d(2x)=-4$. Mà $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\int\limits_{a}^{b}f(u)du$ nên từ

$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(2x)d(2x)=-4$ suy ra $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx=-4.$

Vậy đáp án B là đáp án đúng.

Sau khi *Khánh* giải xong, *Xuân Hoài* xin ý kiến, "*Bạn Khánh cho mình hỏi đáp án D sai như thế nào?*". Bạn *Khánh* hơi lúng túng. Theo các bạn, *Nhật Khánh* giải đúng chưa?

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, Bình Định)