



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

6 2020
Số 516

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



Nhà toán học lỗi lạc Al-Khorezmi (783-850)





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc

Bộ sách TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THCS

Bộ sách "Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở" có tất cả 8 cuốn, cho các lớp 6, 7, 8, 9, mỗi lớp gồm 2 tập: tập một là Đại số (ở lớp 6, tập một là Số học), tập hai là Hình học. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình Toán ở các lớp THCS.

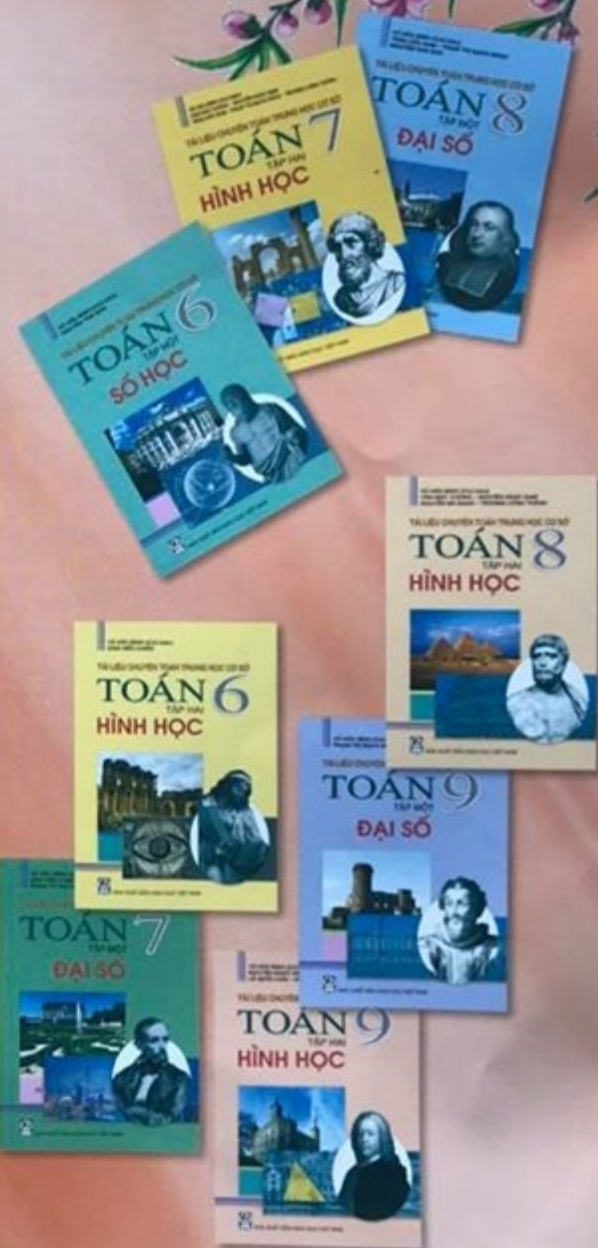
Mỗi cuốn đều có hai phần: phần Các chuyên đề cơ bản (viết theo từng chương của SGK) và phần Một số chuyên đề nâng cao. Phần đầu trong mỗi chuyên đề là tóm tắt các kiến thức lí thuyết của chuyên đề mà HS cần nắm vững, tiếp theo giới thiệu một số ví dụ minh họa và sau đó là các bài tập để nghị để HS luyện tập. Những chuyên đề nâng cao nhằm giúp HS hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình. Những ví dụ và các bài tập trình bày trong sách được các tác giả chọn lọc khá kĩ lưỡng, trong đó có nhiều ví dụ, bài tập là những bài thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Olympic Toán, ... Bằng việc đọc, giải những ví dụ và bài tập này, HS sẽ được mở rộng, đào sâu những kiến thức đã học, qua đó được rèn luyện khả năng tư duy Toán học. Cuối sách sẽ là phần Hướng dẫn giải cho các bài tập được đưa ra ở cuối mỗi chuyên đề.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã hoặc đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học và các trường Trung học phổ thông có uy tín, là những chuyên gia Toán ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, chẳng hạn như: NGND. Vũ Hữu Bình (chủ biên), NGUT Nguyễn Tam Sơn, nhà giáo Đàm Hiếu Chiến, PGS.TS. Văn Như Cương, PGS.TS. Đàm Văn Nhí, TS. Phạm Thị Bạch Ngọc, PGS.TS. Lê Quốc Hán, TS. Trần Hữu Nam, ...

Hì vọng rằng bộ sách sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em học sinh hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, và góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.

Bạn đọc có thể đặt mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị Trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Địa chỉ liên hệ: - PHÒNG KINH DOANH CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI
Địa chỉ: Tầng 4, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
Tel: (024) 35121977, số máy lẻ: 120 - Fax: (024) 35123278
- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trên cả nước





MỘT BÀI TOÁN CƠ BẢN CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG

NGUYỄN ANH TUẤN

(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

Từ một bài toán đơn giản, nếu chịu khó suy nghĩ, tìm tòi, xâu chuỗi các bài toán lại với nhau thì chúng ta sẽ có được nhiều kết quả thú vị. Chúng ta cùng bắt đầu bằng bài toán sau đây:

Bài toán 1. Cho tam giác ABC , đường phân giác trong AD . Qua D kẻ đường thẳng song song với AC cắt cạnh AB tại E . Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AE}$ (*).

Lời giải. Theo định lý Thales ta có:

$$DE \parallel AC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DC}{BC} \quad (1).$$

Vì $DE \parallel AC \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{ADE}$ (hai góc so le trong),

mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt)

nên $\widehat{A_1} = \widehat{ADE}$

$\Rightarrow \triangle EAD$ cân tại

$E \Rightarrow AE = ED$.

Theo hệ quả của định lý Thales ta

$$\text{có: } DE \parallel AC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{AE}{AB} + \frac{AE}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AE}.$$

Nhận xét. • Nếu cho $\widehat{BAC} = 120^\circ$ thì suy ra $\triangle ADE$ đều $\Rightarrow AE = AD$. Thay vào hệ thức (*) ta

$$\text{được: } \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}.$$

• Nếu cho $\widehat{BAC} = 90^\circ$ thì suy ra $\triangle ADE$ vuông cân $\Rightarrow AE = \frac{AD}{\sqrt{2}}$. Thay vào hệ thức (*) ta được:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}.$$

• Nếu cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$ thì suy ra $\triangle EAD$ cân có $\widehat{A_1} = 30^\circ \Rightarrow AE = \frac{AD}{\sqrt{3}}$. Thay vào hệ thức (*) ta

$$\text{được: } \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{AD}.$$

Từ đó ta có các bài toán quen thuộc sau:

Bài toán 1.1. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$, đường phân giác trong AD .

Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$.

Bài toán 1.2. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, đường phân giác trong AD .

Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$.

Bài toán 1.3. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, đường phân giác trong AD .

Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{AD}$.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có $AB=c, BC=a, CA=b$. Gọi l_a, l_b, l_c lần lượt là độ dài các đường phân giác trong ứng với các cạnh a, b, c của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Lời giải. Gọi AD, BM, CN là các đường phân giác trong của $\triangle ABC$ và kẻ

$DE \parallel AC (E \in AC)$.

Theo bài toán 1 ta

có $\triangle ADE$ cân và

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AE} \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào $\triangle ADE$ ta

$$\text{có: } AE + ED > AD \Rightarrow 2AE > AD \Rightarrow \frac{1}{AE} < \frac{2}{AD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} < \frac{2}{AD} \Leftrightarrow \frac{1}{AD} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right)$$

$$\text{hay } \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

$$\text{Tương tự có: } \frac{1}{l_b} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right); \frac{1}{l_c} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \text{ Cộng}$$

từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

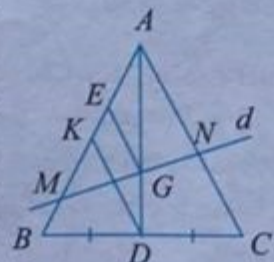
$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Bài toán 3. Cho tam giác ABC cân tại A , một đường thẳng d bất kỳ đi qua trọng tâm G của tam giác và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N .

Chứng minh rằng tổng $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d .

Lời giải. Gọi AD là đường trung tuyến, kẻ $GE \parallel AC (E \in AB)$. Vì

$\triangle ABC$ cho trước nên G cố định, suy ra đường thẳng GE (song song với AC) cố định. Vì E là giao điểm của hai đường thẳng cố định EG và AB nên



điểm E cố định, do đó độ dài đoạn thẳng AE không đổi

Mặt khác theo bài toán 1 ta có:

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{AE} \quad (\text{không đổi}).$$

Vậy tổng $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d .

Nhận xét. Chúng ta cũng có thể chứng minh

tổng $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$ không đổi như sau:

Kẻ $GE \parallel DK \parallel AC (E, K \in AB)$, khi đó theo bài

$$\text{toán 1 ta có: } \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{AE} \quad (1).$$

Xét $\triangle ABC$ có $DB = DC$ và

$$DK \parallel AC \Rightarrow AK = \frac{1}{2} AB.$$

Theo định lý Thales ta có:

$$\begin{aligned} GE \parallel DK &\Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3} &\Rightarrow AE = \frac{1}{3} AB \quad (2). \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{3}{AB} \quad (\text{không đổi}).$$

Bài toán 4. Cho góc $\angle xAy$, các điểm B, C theo thứ tự chuyển động trên các tia Ax, Ay sao cho

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{k} \quad (k \text{ là hằng số dương}).$$

Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định

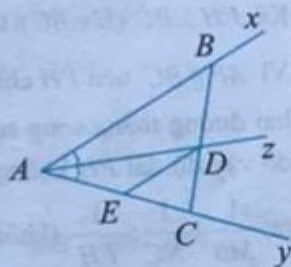
Lời giải.

Kẻ tia phân giác Az của góc $\angle xAy$. Gọi $D = Az \cap BC$, kẻ $DE \parallel Ax (E \in Ay)$. Theo bài

$$\text{toán 1 ta có: } \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AE}. \text{ Kết hợp với giả}$$

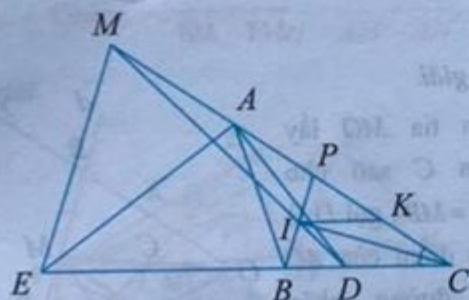
thiết $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{k}$ ta có $AE = k \Rightarrow$ điểm E cố

định nên đường thẳng DE cố định. Như vậy điểm D là giao điểm của hai đường thẳng cố định Az và DE nên điểm D cố định. Vậy đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định D được xác định như trên.



Bài toán 5. Cho tam giác ABC , AD và AE lần lượt là các đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của tam giác. Chứng minh rằng $\frac{1}{CD} + \frac{1}{CE} = \frac{2}{CB}$.

Lời giải.



Trên tia CA lấy điểm M sao cho $CE = CM$. Gọi I là giao điểm của MD với đường phân giác của góc ACB , kẻ $IK \parallel BC (K \in AC)$. Khi đó theo bài

toán 1 ta có: $\frac{1}{CD} + \frac{1}{CE} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{CM} = \frac{1}{CK}$ (1)

Vì AD , AE lần lượt là các đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của $\triangle ABC$ nên

ta có: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{DB}{EB}$ (2)

Vì CI là đường phân giác của $\triangle CMD$

$\Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{CD}{CM} = \frac{DI}{MI}$ (3).

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{DB}{EB} = \frac{DI}{MI} \Rightarrow BI \parallel EM$ (theo định lý Thales đảo).

Kéo dài BI cắt AC tại P , vì $BP \parallel EM$ nên theo định lý Thales ta có: $\frac{CB}{CE} = \frac{CP}{CM} \Rightarrow CB = CP$

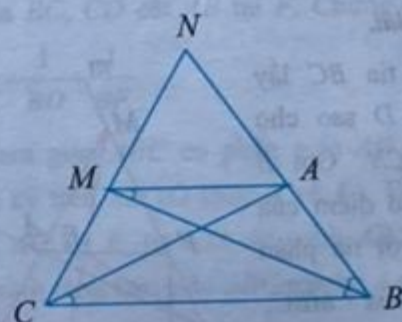
$\Rightarrow \triangle CBP$ cân tại C nên đường phân giác CI cũng chính là đường trung tuyến $\Rightarrow IB = IP$. Xét $\triangle CBP$ có $IB = IP$, $IK \parallel BC$ nên IK là đường trung bình của tam giác đó $\Rightarrow IK = \frac{BC}{2}$, mà

$IK = CK$ nên $CK = \frac{BC}{2}$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra: $\frac{1}{CD} + \frac{1}{CE} = \frac{2}{CB}$.

Bài toán 6. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}$.

Lời giải.



Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt tia phân giác của góc ABC tại M . Gọi $N = AB \cap CM$, theo bài toán 1 ta có:

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{BN}$ (1).

Vì $\widehat{AMB} = \widehat{ABM} = \widehat{ACB}$ nên tứ giác $AMCB$ nội tiếp đường tròn. Suy ra:

$\widehat{ACM} = \widehat{ABM} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{NMA} = \widehat{NCB} = 2\widehat{ACB}$
 $\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{NMA} + \widehat{AMB} = 3\widehat{ACB}$ (2).

Xét $\triangle NMB$ có:

$$\widehat{MNB} = 180^\circ - (\widehat{NMB} + \widehat{MBN}) = 180^\circ - 4\widehat{ACB} \quad (3).$$

Trong $\triangle ABC$ có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ và $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$ nên:

$$7\widehat{ACB} = 180^\circ \Rightarrow 180^\circ - 4\widehat{ACB} = 3\widehat{ACB} \quad (4).$$

Từ (4) và (3) suy ra: $\widehat{MNB} = 3\widehat{ACB}$ (5).

Từ (2) và (5) suy ra: $\widehat{MNB} = \widehat{NMB} \Rightarrow \triangle BMN$ cân tại $B \Rightarrow BM = BN$ (6).

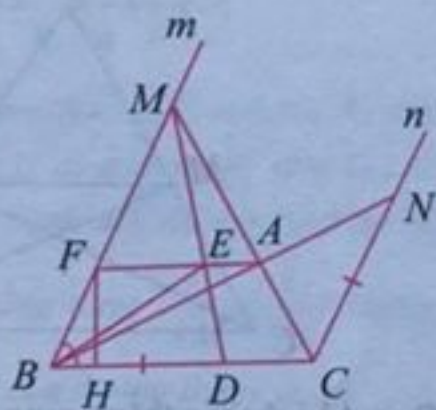
Xét hình thang $ABCM$ có $\widehat{ABC} = \widehat{MCB} = 2\widehat{ACB}$ nên $ABCM$ là hình thang cân $\Rightarrow MB = AC$. Kết hợp với (6) suy ra $NB = AC$. Kết hợp (1) với

$$NB = AC \text{ ta được: } \frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}.$$

Bài toán 7. Cho tam giác ABC . Hai đường thẳng $m \parallel n$ thay đổi tương ứng đi qua B, C mà m, n chỉ có một điểm chung với tam giác ABC . Gọi $M = m \cap AC, N = n \cap AB$. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $\frac{1}{MB} + \frac{1}{NC}$.

Lời giải.

Trên tia BC lấy điểm D sao cho $BD = CN$. Gọi E là giao điểm của MD với tia phân giác của $\widehat{MBC}$, kẻ EF song song với BC ($F \in BM$),



khi đó theo bài toán 1 ta có:

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{NC} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{BD} = \frac{1}{BF} \quad (1).$$

Theo tính chất của đường phân giác trong

$$\triangle BDM \text{ ta có: } \frac{CN}{BM} = \frac{BD}{BM} = \frac{ED}{EM} \quad (2)$$

Vì $BM \parallel CN$ nên theo hệ quả của định lý Thales

$$\text{ta có: } \frac{CN}{BM} = \frac{CA}{MA} \quad (3). \text{ Từ (2) và (3) suy ra:}$$

$$\frac{ED}{EM} = \frac{CA}{MA} \Rightarrow AE \parallel CD \text{ (theo định lý Thales đảo),}$$

mà $EF \parallel BC$ nên ba điểm A, E, F thẳng hàng. Kẻ $FH \perp BC$ ($H \in BC$), ta có: $BF \geq FH$ (4).

Vì $AF \parallel BC$ nên FH chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song cố định AF và BC , do vậy độ dài FH không đổi. Từ (1) và (4) suy

$$\text{ra: } \frac{1}{MB} + \frac{1}{NC} \leq \frac{1}{FH} \text{ (không đổi). Dấu đẳng thức}$$

$$\text{xảy ra } \Leftrightarrow H \equiv B \Leftrightarrow m \perp BC.$$

$$\text{Vậy } \max \left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{NC} \right) = \frac{1}{FH} \Leftrightarrow m \perp BC.$$

Bài toán 8. Cho góc $\widehat{xOy}$ ($\widehat{xOy} \neq 180^\circ$), M là một điểm cố định nằm trong góc đó, d là đường thẳng đi qua M và cắt các cạnh Ox, Oy lần lượt tại A và B . Tìm giá trị lớn nhất của tổng

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}.$$

Lời giải.

Trên tia MO lấy điểm C sao cho $MC = MB$, gọi D là giao điểm của AC với đường phân giác của góc OMA .

Kẻ $DE \parallel OM$,

$MK \parallel Oy$ ($K \in Ox, E \in AB$), theo tính chất đường phân giác trong $\triangle MCA$ ta có:

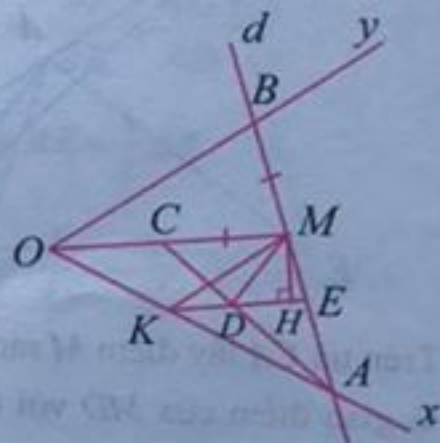
$$\frac{MB}{MA} = \frac{MC}{MA} = \frac{CD}{AD} \quad (1).$$

$$\text{Vì } MK \parallel Oy \text{ suy ra: } \frac{MB}{MA} = \frac{OK}{KA} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) có: } \frac{OK}{KA} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow KD \parallel OC \text{ (định lý}$$

Thales đảo), nên ba điểm K, D, E thẳng hàng.

Kẻ $MH \perp KE$ ($H \in KE$), ta có: $ME \geq MH$ (3).



Vì M cố định nên các đường thẳng MK và OM cố định $\Rightarrow$ đường thẳng KE cố định $\Rightarrow MH$ không đổi (MH là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song cố định OM và KE).

Mặt khác: Theo bài toán 1 ta có:

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MA} = \frac{1}{MC} + \frac{1}{MA} = \frac{1}{ME} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MA} \leq \frac{1}{MH}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow E \equiv H \Rightarrow d \perp OM$.

$$\text{Vậy } \max\left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{MA}\right) = \frac{1}{MH} \Leftrightarrow d \perp OM.$$

Bài toán 9: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Tia AO cắt đường tròn (O) tại M và N (M nằm giữa A và N). Vẽ đường kính CE . AE cắt đường tròn (O) tại D , DB cắt AO tại I . Chứng minh rằng $\frac{1}{AI} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$.

Lời giải.



Trên đoạn AB lấy điểm K sao cho $AK = AM$. Gọi P là giao điểm của KN với tia phân giác của $\widehat{BAN}$. Ta có: $\widehat{EBC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BE \perp BC$, mà $OA \perp BC \Rightarrow OA \parallel BE \Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{IAD}$. Ta lại có:

$$\widehat{BED} = \widehat{ABD} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BD} \right)$$

nên $\widehat{ABD} = \widehat{IAD}$. Từ đó suy ra

$$\triangle IAD \sim \triangle IBA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{ID}{IA} \Rightarrow IA^2 = IB \cdot ID \quad (1)$$

Ta dễ chứng minh được $IM \cdot IN = ID \cdot IB \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra:

$$IA^2 = IM \cdot IN \Rightarrow \frac{IA}{IN} = \frac{IM}{IA} = \frac{IA + IM}{IN + IA} = \frac{AM}{AN} = \frac{AK}{AN} \quad (3).$$

Vì AP là đường phân giác của $\triangle AKN$ nên

$$\frac{AK}{AN} = \frac{KP}{PN} \quad (4). \text{ Từ (3) và (4) suy ra:}$$

$$\frac{IA}{IN} = \frac{KP}{PN} \Rightarrow PI \parallel AK \text{ (theo định lý Thales đảo)}$$

nên theo bài toán 1 ta có:

$$\frac{1}{AI} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}.$$

BÀI TẬP

1. Cho hình bình hành $ABCD$, một đường thẳng đi qua A cắt BD , CB , CD lần lượt ở E , K , G .

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$$

2. Cho tam giác đều ABC . Trên tia BA lấy điểm E (A nằm giữa B và E). Gọi D là điểm đối xứng với E qua BC , CD cắt AB tại F . Chứng minh rằng $\frac{1}{BC} = \frac{1}{BD} + \frac{1}{BF}$.

3. Cho tam giác ABC có phân giác AD , O là điểm bất kỳ trên AD (O khác A và D). Tia BO cắt cạnh AC tại E , tia CO cắt cạnh AB tại F . Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A nếu

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AF^2}.$$

4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, D là điểm bất kỳ nằm trên cung nhỏ BC , DA cắt BC tại E . Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BC, AB, AC .

Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{1}{DE} = \frac{1}{DB} + \frac{1}{DC};$$

$$\text{b) } \frac{1}{DH} = \frac{1}{DI} + \frac{1}{DK}.$$

Bài I. 1) ĐK: $x \geq 0$.

$$PT \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 5x} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+5} - 1)(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Kết hợp với ĐK suy ra $x=1$, và tập nghiệm PT là $S = \{1\}$.

$$2) HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7 = 4y^2 + 4y \\ (x+y)(x+2y+1) = 0 \end{cases}$$

$$TH1: \begin{cases} x+2y+1=0 \\ 8=0 \end{cases} : \text{hệ vô nghiệm.}$$

$$TH2: \begin{cases} x+y=0 \\ 3x^2 - 4x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = -1 \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của HPT là } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Bài II. 1) Vì $a(a-1):2$ nên $P:2$.

TH1: Trong ba số a, b, c có ít nhất một số chia hết cho 3 thì $P:3$.

TH2: Trong ba số a, b, c không có số nào chia hết cho 3.

Vì $a+b+c=2019:3 \Rightarrow$ các số a, b, c chia 3 cùng dư 1 hoặc cùng dư 2.

- Nếu a, b, c chia 3 cùng dư 1 $\Rightarrow (a-1):3 \Rightarrow P:3$.

- Nếu a, b, c chia 3 cùng dư 2 $\Rightarrow (b+4):3 \Rightarrow P:3$.

Mà ƯCLN $(2;3)=1$ nên $P:6$.

2) Đặt $t = \sqrt{n+2}$.

$$Q = t + \sqrt{t^2 + t - 2} \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + t - 2} = Q - t$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 2 = Q^2 - 2Qt + t^2 \Rightarrow (2Q+1)t = Q^2 + 2$$

$$\Rightarrow t = \frac{Q^2 + 2}{2Q+1} \Rightarrow n+2 = \left(\frac{Q^2 + 2}{2Q+1}\right)^2$$

$$\text{Vì } n, Q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{Q^2 + 2}{2Q+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{4Q^2 + 8}{2Q+1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2Q - 1 + \frac{9}{2Q+1} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } Q > 1 \text{ nên } \frac{9}{2Q+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow Q = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow n = 2.$$

Thử lại thấy $n=2$ thỏa mãn.

Bài III. 1) $K \geq -4bc$ vì $ab \geq 0, ac \geq 0$

$$\Rightarrow K \geq -2b \cdot 2c \geq -2 \cdot \frac{(b+2c)^2}{4} = -\frac{(1-a)^2}{2}$$

$$\text{Vì } (1-a)^2 \leq 1 \Rightarrow -\frac{(1-a)^2}{2} \geq -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } K \geq -\frac{1}{2}.$$

2) $K \leq 2ab + 4ac$ (vì $ab \leq 2ab; -4bc \leq 0$)

$$K \leq 2a(b+2c) \leq 2 \cdot \frac{(a+b+2c)^2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$K = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b=0; a=\frac{1}{2}; c=\frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } \max K = \frac{1}{2}, \text{ khi } b=0; a=\frac{1}{2}; c=\frac{1}{4}.$$

Bài IV. 1)



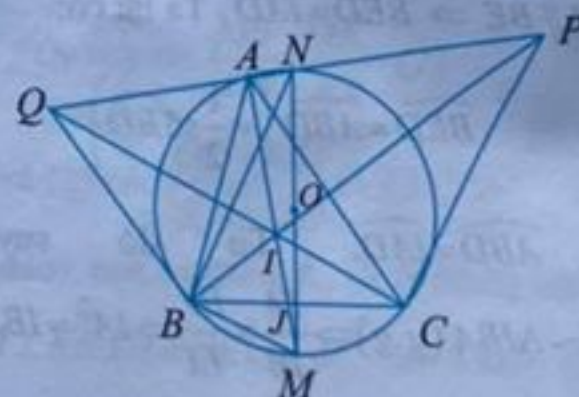
Ta có:

$$\widehat{MBI} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = \widehat{MIB} \Rightarrow MI = MB.$$

Mặt khác $\triangle MBI \sim \triangle MAB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MI}{MB} \Rightarrow MB^2 = MI \cdot MA.$$

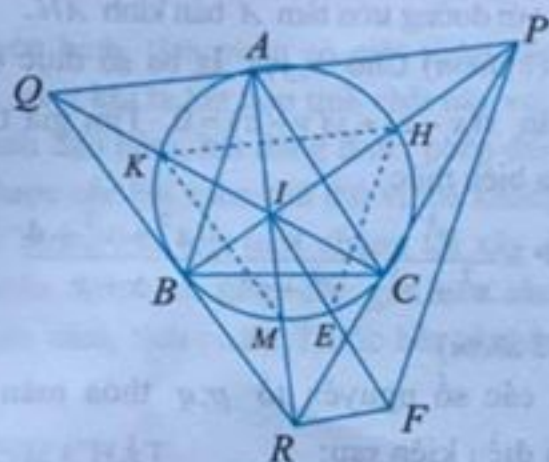
2)



Ta thấy $BQ \perp BP$ (Q là tâm đường tròn bàng tiếp $\triangle ABC$) $\Rightarrow$ tứ giác $BCPQ$ nội tiếp.

$\widehat{BNQ} = \widehat{BCA} = 2\widehat{BCQ} = 2\widehat{BPQ} \Rightarrow \triangle BNP$ cân tại N . Tương tự có $\triangle BNQ$ cân tại $N \Rightarrow NP = NQ (= NB)$ (đpcm).

3)



PC cắt BQ tại R thì ba điểm A, M, R thẳng hàng. BP, CQ cắt (O) tại điểm thứ hai H, K .

Chứng minh K là trung điểm IQ (chứng minh tương tự H và M lần lượt là trung điểm IP và IR). Theo tính chất đường trung bình, do tứ giác $KHEM$ nội tiếp nên tứ giác $PQRF$ nội tiếp, do đó bốn điểm P, Q, R, F cùng thuộc một đường tròn.

Bài V. 1) Xét một tam giác đều cạnh bằng d . Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai đỉnh của tam giác đó có cùng màu và có khoảng cách bằng d .

2) **Cách 1.** **Bước 1:** Chứng minh tồn tại một tam giác “nửa đều” (tam giác có ba góc $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$), có cạnh huyền bằng d và là tam giác đơn sắc.

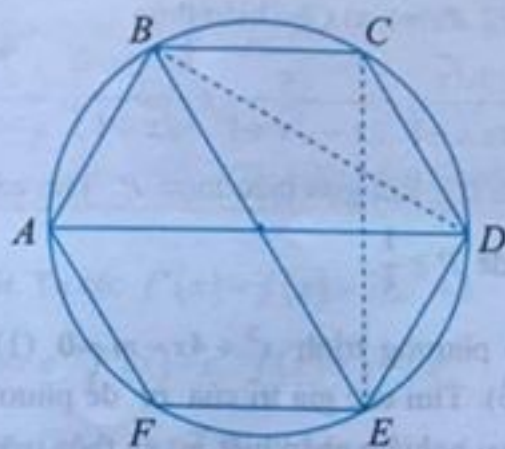
Giả sử hai đỉnh cùng màu là A, D – cùng có màu xanh.

Dựng hình lục giác đều $ABCDEF$ có AD là đường chéo chính độ dài bằng d .

TH1. Một trong bốn đỉnh B, C, E, F màu xanh. Giả sử đỉnh B màu xanh $\Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác nửa đều có ba đỉnh xanh (1).

TH2. Bốn đỉnh B, C, E, F đều có màu đỏ. Ta có $\triangle BCE$ là tam giác nửa đều có ba đỉnh đỏ (2).

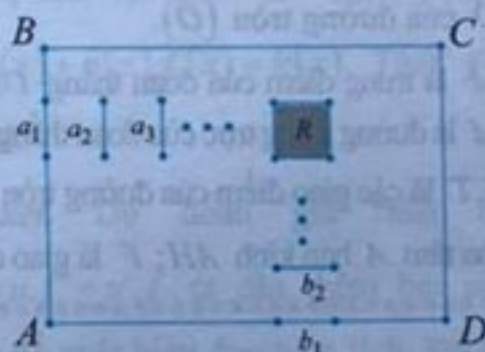
Từ (1) và (2) ta thấy luôn tồn tại một tam giác nửa đều là tam giác đơn sắc và có cạnh huyền bằng d .



Bước 2: Cho $d = 1$ và $d = 2019 \Rightarrow$ có hai tam giác nửa đều, là tam giác đơn sắc và đồng dạng theo tỉ lệ $1:2019$.

Cách 2.

Nhận xét. Tồn tại một hình chữ nhật có 4 đỉnh cùng màu. Thật vậy, xét một lưới vuông 27 điểm gồm 3 hàng và 9 cột. Mỗi cột có $2^3 = 8$ cách tô màu nên tồn tại hai cột có cách tô màu giống nhau. Mặt khác trong mỗi cột có 2 đỉnh cùng màu nên từ đó ta có một hình chữ nhật có 4 đỉnh cùng màu.



Xét hình chữ nhật $ABCD$ có bốn đỉnh cùng màu như hình vẽ. Chia mỗi cạnh AB, AD thành 2019 phần bằng nhau và từ đó chia $ABCD$ thành 2019^2 hình chữ nhật nhỏ bằng nhau. Ta chỉ cần chứng minh tồn tại một hình chữ nhật nhỏ có 3 đỉnh cùng màu, khi đó có một tam giác vuông có ba đỉnh cùng màu (là một nửa của hình chữ nhật đó) đồng dạng với tam giác vuông có ba đỉnh cùng màu (là một nửa của $ABCD$) theo tỉ lệ $1:2019$.

Bài 1. (2 điểm) a) Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{x-\sqrt{x}+1}$$

(với $x \geq 0$). Rút gọn biểu thức P . Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{1}{5}$.

b) Cho phương trình $x^2 + 4x - m = 0$ (1) (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) (x_1^2 + x_2^2) = 4(m+2).$$

Bài 2. (2 điểm) a) Giải phương trình

$$2x^2 + 3x - 2 = (2x-1)\sqrt{2x^2 + x - 3}.$$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y\sqrt{y} = 9 \\ x^2 + 2y = x + 4\sqrt{y} \end{cases}$$

Bài 3. (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Kẻ đường cao AH ($H \in BC$) của tam giác ABC và kẻ đường kính AD của đường tròn (O) .

a) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DH . Chứng minh OM là đường trung trực của đoạn thẳng BC .

b) Gọi S, T là các giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn tâm A bán kính AH ; F là giao điểm của

ST và BC . Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với DH tại E . Chứng minh $FB \cdot FC = FH^2$ và ba điểm F, E, A thẳng hàng.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AH .

Bài 4. (1 điểm) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x(x-z) + y(y-z) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{x^2+z^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+4}{x+y}.$$

Bài 5. (2 điểm)

a) Tìm các số nguyên tố p, q thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $p^2q + p$ chia hết cho $p^2 + q$.

ii) $pq^2 + q$ chia hết cho $q^2 - p$.

b) Viết lên bảng 2019 số: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2018}; \frac{1}{2019}$.

Từ các số đã viết xóa đi 2 số bất kì x, y rồi viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ (các số còn lại trên bảng giữ

nguyên). Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số. Hỏi số đó bằng bao nhiêu?

ĐOÀN THÁI SƠN (Hải Phòng) *Giới thiệu*

HƯỚNG DẪN GIẢI ...

Giả sử phản chứng, không tồn tại hình chữ nhật nhỏ có ba đỉnh cùng màu. Gọi mỗi cạnh của một hình chữ nhật nhỏ là một đoạn. Đoạn có hai đầu mút cùng màu được gọi là đoạn đơn sắc. Do A, B cùng màu và 2019 là số lẻ nên trên AB tồn tại một đoạn đơn sắc, kí hiệu là a_1 . Xét các đoạn $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ theo thứ tự từ trái sang phải có hình chiếu vuông góc là a_i trên AB . Từ giả thiết phản chứng $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ đều đơn sắc và có màu xen kẽ nhau theo thứ tự (1).

Tương tự trên AD ta cũng có một đoạn b_1 đơn sắc. Xét các đoạn $b_1, b_2, \dots, b_{2020}$ theo thứ tự từ dưới lên trên, có hình chiếu vuông góc là b_i trên AD . Khi đó $b_1, b_2, \dots, b_{2020}$ đều là đơn sắc và có màu xen kẽ theo thứ tự (2).

Xét hình chữ nhật R có hình chiếu vuông góc lên AB, AD là a_1, b_1 . Từ (1) và (2) ta thấy các đỉnh của R không có cách tô màu phù hợp. Mâu thuẫn này dẫn tới điều phải chứng minh.

DƯƠNG TÚ (Hà Nội) *Giới thiệu*



KHAI THÁC MỘT TÍNH CHẤT ĐƠN GIẢN CỦA NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

LÊ THẾ THÔNG

(GV THPT Lê Quảng Chí, Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

Nguyên hàm, tích phân có một tính chất rất đơn giản, song khi ta kết hợp tính chất này với các quy tắc tính đạo hàm, bất đẳng thức, phép đổi biến thì thu được các bài toán khá thú vị mà không hề đơn giản. Trong bài viết này, chúng tôi xây dựng các bài toán đó nhằm giúp độc giả hiểu sâu hơn về nguyên hàm, tích phân. Trước hết ta nhắc lại tính chất.

I. TÍNH CHẤT

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $[a; b]$, khi đó ta có: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

Từ đó suy ra: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

Chứng minh. Tính chất được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

II. XÂY DỰNG MỘT SỐ BÀI TOÁN

Bài toán 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên khoảng K . Biết $f(x_1) = a$ và $u(x).f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$. Tính $f(x_j)$ với $x_1, x_j \in K$.

Thí dụ 1. (Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi lần 2, năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = -1$ và $f'(x) - f(x) = x^2 e^x + 1$. Tính $f(3)$.

A. $6e^3 + 3$

B. $6e^2 + 2$

C. $3e^2 - 1$

D. $9e^3 - 1$

Lời giải. Ta có: $f'(x) - f(x) = x^2 e^x + 1$

$$\Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = x^2 + e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = x^2 + e^{-x}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$e^{-x} \cdot f(x) = \frac{1}{3} x^3 - e^{-x} + C$$

Vì $f(0) = -1$ nên $C = 0$. Suy ra:

$$f(x) = \frac{1}{3} x^3 e^x - 1. \text{ Do đó } f(3) = 9e^3 - 1. \text{ Chọn D.}$$

Nhận xét. Ở lời giải trên thay vì lấy nguyên hàm hai vế ta có thể lấy tích phân từ 0 đến 3.

Bài toán tổng quát. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên K . Biết $f(x_1) = a$ và $m(x).f'(x) + n(x).f(x) = h(x)$. Tính $f(x_j)$ với $x_1, x_j \in K$.

Nhận xét. Dự đoán giả thiết có dạng $(u.f)' = u.f' + u'.f$ ta cần thêm bớt một lượng phù hợp để xuất hiện đạo hàm tích. Để tìm lượng đó ta xét $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{n(x)}{m(x)}$. Lấy nguyên hàm hai vế

$$\text{ta được } \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{n(x)}{m(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{n(x)}{m(x)} dx}$$

Khi đó cần nhân vào hai vế với $\frac{u(x)}{m(x)}$.

Bài toán 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai, liên tục trên K . Biết $f(x_1) = a$ và

$$nf^{n-1}(x) \cdot [f'(x)]^2 + f^n(x)f''(x) = g(x)$$

($n \in \mathbb{N}^*$). Tính $f^{n+1}(x_j)$ với $x_i, x_j \in K$.

Thí dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f^3(x) \left[4(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) \right] = e^x, \forall x \in \mathbb{R},$$

biết $f(0) = 0$. Khi đó tích phân $\int_0^{5\ln 2} f^5(x) dx$ bằng

A. $5 \left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2 \right)$ B. $\frac{1}{5} \left(31 - \frac{355\ln 2}{2} \right)$

C. $\frac{1}{5} \left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2 \right)$ D. $5 \left(31 - \frac{355\ln 2}{2} \right)$.

Lời giải. Ta có:

$$f^3(x) \left[4(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) \right] = e^x$$

$$\Leftrightarrow 4f^3(x)(f'(x))^2 + f^4(x) \cdot f''(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow [f^4(x) \cdot f'(x)]' = e^x.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $f^4(x) \cdot f'(x) = e^x + C_1$. Vì $f(0) = 0$ nên $C_1 = -1$.

Suy ra: $f^4(x) \cdot f'(x) = e^x - 1$

$$\Leftrightarrow f^5(x) = 5(e^x - x + C_2).$$

Vì $f(0) = 0$ nên $C_2 = -1$. Do đó

$$f^5(x) = 5(e^x - x - 1).$$

$$\int_0^{5\ln 2} f^5(x) dx = 5 \left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2 \right). \text{ Chọn A.}$$

Bài toán 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên K , $f(x) \neq 0, \forall x \in K$. Biết

$$f(x_i) = a \text{ và } m(x)f'(x) + n(x)[f(x)]^2 = 0.$$

Tính $f(x_j)$ với $x_i, x_j \in K$.

Thí dụ 3. (Trích đề thi thử của Sở GD&ĐT Nam Định lần 2, năm 2018) Cho hàm số $f(x)$

có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$. Biết

$$f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0, \quad f(x) > 0, \forall x > 0,$$

$$f(2) = \frac{1}{15}. \text{ Tính } f(1) + f(2) + f(3).$$

A. $\frac{7}{15}$ B. $\frac{11}{15}$ C. $\frac{11}{30}$ D. $\frac{7}{30}$.

Lời giải. Ta có: $f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = 2x+4.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $\frac{1}{f(x)} = x^2 + 4x + C$. Vì $f(2) = \frac{1}{15}$ nên ta có

$$C = 3. \text{ Suy ra } f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}. \text{ Chọn D.}$$

Thí dụ 4. (Trích đề thi thử THPT Đặng Thúc Hứa, Nghệ An năm 2018) Cho hàm số $f(x)$ có

đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$ và $[f'(x)]^2 = f''(x)$. Đặt $T = f(1) - f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng.

A. $-2 \leq T < -1$

B. $-1 \leq T < 0$

C. $0 \leq T < 1$

D. $1 \leq T < 2$.

Lời giải. Ta có: $[f'(x)]^2 = f''(x)$

$$\Leftrightarrow -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f'(x)} \right)' = -1.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $\frac{1}{f'(x)} = -x + C$.

Vì $f'(0) = -1$ nên $C = -1$. Suy ra

$$f'(x) = \frac{1}{-x-1}. \text{ Vậy } T = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{-x-1} dx = -\ln 2 \approx -0,69. \text{ Chọn B.}$$

Bài toán 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai, liên tục trên K , $f(x) \neq 0, \forall x \in K$.

Biết $f(x_1) = a$ và

$$f''(x) \cdot f(x) - n[f'(x)]^2 - g(x)[f(x)]^{n+1} = 0$$

($n \in \mathbb{N}^*$). Tính $f(x_j)$ nếu $n=1$, tính $f^{n-1}(x_j)$

nếu $n \geq 2$ với $x_1, x_j \in K$.

Thí dụ 5. (Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Hà Tĩnh, năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và

$$\text{thỏa mãn } [f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0.$$

Biết $f(0) = 1, f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

- A. $e^{\frac{3}{2}}$ B. e^3 C. $e^{\frac{5}{2}}$ D. e^2 .

Lời giải. Ta có $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0; 2]$ suy ra $f(x) \geq f(0) = 1 > 0 \forall x \in [0; 2]$. Do đó

$$[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = 1. \text{ Lấy}$$

nguyên hàm hai vế ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} = x + C_1 \Leftrightarrow$

$$\ln|f(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2 \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2}.$$

Vì $f(0) = 1, f(2) = e^6$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 2 + 2C_1 + C_2 = 6 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + 2x}$. Vậy $f(1) = e^{\frac{5}{2}}$. Chọn C.

Thí dụ 6. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0; +\infty)$ có đạo hàm liên tục đến cấp

hai trên $[0; +\infty)$ và thỏa mãn

$$\begin{cases} f'(0) = 0; f(0) = 1 \\ f''(x)f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0, \forall x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

Tính $f(1)$.

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{6}{7}$ D. $f(2)$.

Lời giải. Ta có:

$$f''(x)f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2}{[f(x)]^3} = -x$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot f^2(x) - 2f(x)[f'(x)]^2}{[f(x)]^4} = -x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)' = -x. \text{ Lấy nguyên hàm hai vế ta}$$

được: $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{x^2}{2} + C_1$. Vì $f'(0) = 0, f(0) = 1$

nên $C_1 = 0$. Do đó $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{x^3}{6} + C_2$.

Vì $f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = -1$. Vậy $f(1) = \frac{6}{7}$. Chọn C.

Bài toán 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai, liên tục trên K . Biết $f(x_1) = a$ và

$$f^{2n-2}[f'(x)]^2 = g(x)(A + Bf^n(x)), A + Bf^n(x) > 0, \forall x \in K, n \in \mathbb{N}^*, g(x) \geq 0, \forall x \in K. \text{ Tính } f(x_j) \text{ với}$$

$x_1, x_j \in K$.

Thí dụ 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không

$$\text{âm trên } [0; 1] \text{ thỏa mãn } \frac{[f(x)]^2 [f'(x)]^2}{e^{2x}} = 1 + [f(x)]^2$$

và $f(x) > 0 \forall x \in [0; 1]$, biết $f(0) = 1$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\frac{5}{2} < f(1) < 3$ B. $3 < f(1) < \frac{7}{2}$

C. $2 < f(1) < \frac{5}{2}$ D. $\frac{3}{2} < f(1) < 2$

Lời giải. Vì $f(x) > 0, f'(x) \geq 0 \forall x \in [0; 1]$ nên ta

có: $\frac{[f(x)]^2 [f'(x)]^2}{e^{2x}} = 1 + [f(x)]^2$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)f'(x)}{e^x} = \sqrt{1 + [f(x)]^2}$

$\Leftrightarrow \frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{1 + [f(x)]^2}} = e^x \Leftrightarrow \left(\sqrt{1 + [f(x)]^2} \right)' = e^x$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$\sqrt{1 + [f(x)]^2} = e^x + C$

Vì $f(0) = 1$ nên $C = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow f(1) \approx 2,9$. Chọn A.

Bài toán 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm,

liên tục trên K . Biết $f(x_i) = a$ và

$m(x)f'(x) + n(x)f(x) = 0, f(x) > 0, \forall x \in K$.

Tính $f(x_j)$ với $x_i, x_j \in K$.

Thí dụ 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận

giá trị dương trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn

$f'(x) = \tan x \cdot f(x), \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], f(0) = 1$. Khi đó

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1+\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\ln \frac{\pi+1}{4}$ D. 0.

Lời giải. Ta có $f'(x) = \tan x \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \tan x$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$\ln f(x) = -\ln |\cos x| + C$. Vì $f(0) = 1$ nên $C = 0$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\cos x}$. Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}$. Chọn B.

Bài toán 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm,

liên tục trên K . Biết $f(x_i) = a$ và

$f^{n-1}(x)f'(x)a^{A+B \cdot f^n(x)} = g(x), n \in \mathbb{N}^*, 0 < a \neq 1$.

Tính $f(x_j)$ với $x_i, x_j \in K$.

Thí dụ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

dương và liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$f(1) = 3, \ln \frac{f'(x)}{2x} + f(x) = x^2 + 2, \forall x \in (0; +\infty)$.

Tính $f(3)$.

A. 1 B. 11 C. $3 + \ln 2$ D. $2 + \ln 3$

Lời giải. Ta có $\ln \frac{f'(x)}{2x} + f(x) = x^2 + 2 \Leftrightarrow$

$\ln \frac{f'(x)}{2x} = x^2 + 2 - f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2x} = e^{x^2 + 2 - f(x)}$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = 2xe^{x^2 + 2} \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = 2xe^{x^2 + 2}$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $e^{f(x)} = e^{x^2 + 2} + C$.

Vì $f(1) = 3 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2$. Chọn B.

Thí dụ 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

khác 0 và liên tục đến cấp hai trên đoạn $[1; 2]$ và

thỏa mãn $\begin{cases} \ln 2 f'(1) = f(1) = 1 \\ f'(x) = \sqrt{\frac{f'(x) - xf''(x)}{2^{f(x)-1} \ln^2 2}} \end{cases}, \forall x \in [1; 2]$.

Biết tích phân $\int_1^2 xf(x) dx = a \log_2 5 + \frac{b}{\ln 2} + c$, với

$a, b, c \in \mathbb{Q}$, tính $T = 4a^2 + 12b^2 + 2c^2$.

A. 56 B. 32 C. 45 D. 54.

Lời giải. Ta có: $f'(x) = \sqrt[3]{\frac{f'(x) - xf''(x)}{2^{f(x)-1} \ln^2 2}}$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^3 = \frac{f'(x) - xf''(x)}{2^{f(x)-1} \ln^2 2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot 2^{f(x)-1} \ln^2 2 = \frac{f'(x) - xf''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\Leftrightarrow [2^{f(x)-1} \ln 2]' = \left(\frac{x}{f'(x)} \right)'$$

$$\Leftrightarrow 2^{f(x)-1} \ln 2 = \frac{x}{f'(x)} + C_1.$$

Vì $\ln 2 f'(1) = f(1) = 1$ nên $C_1 = 0$. Suy ra:

$$2^{f(x)-1} \ln 2 = \frac{x}{f'(x)} \Leftrightarrow f'(x) \cdot 2^{f(x)-1} \ln 2 = x$$

$$\Leftrightarrow [2^{f(x)-1}]' = x \Leftrightarrow 2^{f(x)-1} = \frac{1}{2}x^2 + C_2.$$

Vì $f(1) = 1$ nên $C_2 = \frac{1}{2}$. Suy ra:

$$2^{f(x)-1} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) + 1.$$

$$\text{Do đó } \int_1^2 xf'(x)dx = \int_1^2 x \left[\frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) + 1 \right] dx$$

$$= \frac{5}{2} \log_2 5 - \frac{3}{2 \ln 2} - 1.$$

Vậy $T = 4a^2 + 12b^2 + 2c^2 = 54$. Chọn D.

Nhận xét. Nếu kết hợp tính chất trên với bất đẳng thức quen thuộc $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và thay x bởi $f'(x)$ hoặc $f''(x)f'(x), \dots$ ta thu được bài toán sau đây.

Bài toán 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm không âm, liên tục trên $[a; b]$. Biết $\int_a^b e^{f(x)} dx \leq A$,

$$A = \int_a^b [f'(x) + 1] dx. \text{ Tính } f(x_i) \text{ với } x_i \in [a; b].$$

Thí dụ 11. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn $f\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-3}$,

$f(3) = \sqrt[3]{f(1)}$ và $\int_1^3 f(x) e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} dx = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(2) \in \left(\frac{4}{10}; \frac{6}{10}\right)$ B. $f(2) \in \left(\frac{1}{10}; \frac{2}{10}\right)$
C. $f(2) \in \left(\frac{2}{10}; \frac{3}{10}\right)$ D. $f(2) \in \left(\frac{3}{10}; \frac{4}{10}\right)$.

Lời giải. Ta có:

$$f(x) e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = e^{\ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)}} \geq \ln f(x) + \frac{xf'(x)}{f(x)} + 1.$$

$$\text{Do đó } \int_1^3 f(x) e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} dx \geq \int_1^3 \left(\ln f(x) + \frac{xf'(x)}{f(x)} + 1 \right) dx = \int_1^3 (x \ln f(x) + x)' dx = (x \ln f(x) + x) \Big|_1^3 = 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\ln f(x) + \frac{xf'(x)}{f(x)} = 0$

$$\Leftrightarrow x \ln f(x) = C. \text{ Vì } f\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-3} \text{ nên } C = -2.$$

Suy ra $f(x) = e^{-\frac{2}{x}}$. Do đó $f(2) = \frac{1}{e}$. Chọn D.

Nhận xét. Bằng việc thay hàm số $f(x)$ trong các bài toán được xây dựng ở trên bởi hàm tích hợp giữa x và $f(x)$ hay $f(x)$ và $g(x), \dots$ ta thu được các bài toán phức tạp hơn mà việc giải chúng được thực hiện bằng phép đổi biến để đưa về các bài toán gốc. Sau đây là một ví dụ.

Thí dụ 12. (Trích đề thi thử trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa lần 3, năm 2018)
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{và } f(1) = -2. \text{ Tính } \int_1^2 f(x) dx.$$

$$\text{A. } -\frac{1}{2} - \ln 2$$

$$\text{B. } -\frac{3}{2} - \ln 2$$

$$\text{C. } -1 - \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{D. } -\frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{Lời giải. Ta có: } x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$$

$$\Leftrightarrow (xf(x)+1)^2 = xf'(x) + f(x).$$

$$\text{Đặt } g(x) = xf(x) + 1 \Leftrightarrow g'(x) = xf'(x) + f(x).$$

Khi đó $(g(x))^2 = g'(x)$. Đây là bài toán 4, xin nhường cho bạn đọc giải tiếp. Chọn A.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. (Trích đề thi thử trường THPT An Nhơn, Bình Định lần 2, năm 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $(x+3)f(x) + (x+2)(f'(x) - e^x) = 0$ và

$$f(0) = \frac{3}{8}. \text{ Tính } f(2).$$

$$\text{A. } \frac{17}{3}e^2 \quad \text{B. } \frac{11}{16}e^2 \quad \text{C. } \frac{14}{3}e^2 \quad \text{D. } \frac{7}{16}e^2.$$

2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 1$

$$[f'(x)]^2 = e^x f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân}$$

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

$$\text{A. } e-2 \quad \text{B. } e-1 \quad \text{C. } e^2-2 \quad \text{D. } e^2-1.$$

3. (Trích đề thi thử trường THPT Sóc Sơn, Hà Nội lần 2, năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ và thỏa mãn $2xf'(x) - f(x) = 2x\sqrt{x}, \forall x \in [1;4]$. Biết rằng

$$f(1) = 0. \text{ Tính } I = \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx.$$

$$\text{A. } I = \frac{22}{3} \quad \text{B. } I = \frac{20}{3} \quad \text{C. } I = \frac{8}{3} \quad \text{D. } I = \frac{14}{3}.$$

4. (Trích đề thi thử trường THPT Quảng Xương 1, Thanh Hóa lần 4, năm 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1;4]$,

$$f(1) = \frac{3}{2}. \text{ Giá trị } f(4) \text{ bằng}$$

$$\text{A. } \frac{391}{18} \quad \text{B. } \frac{361}{18} \quad \text{C. } \frac{381}{18} \quad \text{D. } \frac{371}{18}.$$

5. (Trích đề thi thử trường THPT Quỳnh Lưu 2, Nghệ An lần 2, năm 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $4f(x) + xf'(x) = x^{2017}$ với $\forall x \in [0;1]$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{A. } I = \frac{1}{2018.2021} \quad \text{B. } I = \frac{1}{2018.2020}$$

$$\text{C. } I = \frac{1}{2018.2019} \quad \text{D. } I = \frac{1}{2019.2021}.$$

6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;4]$, có $f'(x) > -1, \forall x \in [0;4]$ và thỏa mãn $f(1) = 3, [f'(x) + 1]^2 = x^2 + xf(x)$. Tính $f(4)$.

$$\text{A. } \frac{4}{3} \quad \text{B. } \frac{13}{9} \quad \text{C. } \frac{10}{9} \quad \text{D. } \frac{10}{3}.$$

7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0) = \sqrt{3}$ và

$$f(x).f'(x) = \cos x \cdot \sqrt{1 + [f(x)]^2}, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f^2(x)$ trên $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ là

$$\text{A. } \frac{21}{4} \quad \text{B. } 8 \quad \text{C. } 7 \quad \text{D. } \frac{47}{4} + 2\sqrt{3}.$$

8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$, $f'(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^2} f^2(x)$ và $f(1) = -\frac{1}{3}$. Biết rằng

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - 1 \right)$$

với $\frac{a}{b}$ tối giản. Tổng $a + b$ bằng

- A. 4070307 B. 4070308
C. 4066273 D. 40662241.

9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn điều kiện $f(0) = -1$; $f'(x) - 2018f(x) = x.e^{2019x}$. Giá trị $f(1)$ bằng

- A. e^{2019} B. e^{2018} C. 0 D. -1.

10. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$f(1) = 1 + e; f(x) = e^{\frac{1}{x}} + x.f'(x) \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

Giá trị $f(2)$ bằng

- A. $1 + 2\sqrt{e}$ B. $1 + \sqrt{e}$
C. $2 + 2\sqrt{e}$ D. $2 + \sqrt{e}$.

11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$, $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$ và $2f(1) = -1$. Biết rằng

$$\int_1^2 xf(x)dx = \ln \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{N}^*) \quad \text{với } \frac{a}{b} \text{ tối giản.}$$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\frac{a}{b} > 1$ B. $b - a = 5$ C. $a + b = 5$ D. $ab = 2018$.

12. Cho hàm số $y = f(x)$ luôn dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} f(x), \quad \forall x \in [1; 4] \quad \text{và} \quad f(1) = 1. \text{ Tính}$$

diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$.

- A. $e^{2e^2} + 1$ B. $e^{2e^2} + 2$ C. $e^{e^2} + 1$ D. $e^{e^2} + 2$.

13. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f'(1) = g(1) = 1; f(2).g(2) = f(1) \\ 1 - f'(x)g'(x) = g(x) \left[f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) \right], \quad \forall x \neq 0 \end{cases}$$

Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)g'(x)dx$.

- A. $I = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ B. $I = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$
C. $I = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ D. $I = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

14. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$, thỏa mãn $f(3) = \frac{2}{3}$ và $f''(x) = \sqrt{(x+1)f(x)}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $2613 < f^2(8) < 2614$
B. $2614 < f^2(8) < 2615$
C. $2616 < f^2(8) < 2617$
D. $2618 < f^2(8) < 2619$.

15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ $f(1) = \frac{1}{6}$ và

$$f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0, \quad f(x) > 0, \quad \forall x > 0.$$

Tính giá trị của

$$P = 1 + f(1) + f(2) + \dots + f(2017).$$

- A. $\frac{6059}{4038}$ B. $\frac{6055}{4038}$
C. $\frac{6053}{4038}$ D. $\frac{6047}{4038}$.



AL-KHOREZMI NHÀ TOÁN HỌC LỖI LẠC THỜI TRUNG CỔ

NGUYỄN THỦY THANH
(GV Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Theo truyền lại thì từ thế kỉ VIII thành phố Baghdad (Bát-đa) đã trở thành thủ đô của Vương quốc hồi giáo Baghdad, các đời Quốc vương của Vương quốc này đã biến thành phố Baghdad thành một thủ đô trí tuệ chói lọi của Phương Đông. Họ đã sáng lập ở đó trường Đại học lớn, thư viện đồ sộ kiểu thư viện Alexandria thuở xưa. Theo Lịch sử ghi lại thì từ thế kỉ IX đến thế kỉ XV đối với các nhà bác học vùng Trung Á, Cận Đông, Bắc Phi và bán đảo Iberia (tên khác Pyrenees) ngôn ngữ chung được sử dụng là tiếng Ả-rập. Nhờ đó mà Vương quốc Baghdad đã thu hút rất nhiều nhà bác học tài ba lỗi lạc đến làm việc tại đây. Một trong những nhà bác học nổi tiếng được mời lúc đó là Al-Khorezmi. Theo nhà Khoa học Lịch Sử G.Sarton thì Al-Khorezmi là "nhà toán học vĩ đại nhất trong thời đại ông và nếu tính đến mọi lẽ thì ông là một trong những nhà khoa học vĩ đại nhất mọi thời đại." Tên Ả-rập đầy đủ của Al-Khorezmi là Abu Jafar Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi.

1. Đôi nét về tiểu sử

Đáng tiếc là những thông tin về Al-Khorezmi còn lưu lại vô cùng ít ỏi. Người ta chỉ biết ông trưởng thành ở vùng Khorezm, nay là thành phố Hiva của Uzbekistan, Trung Á. Theo truyền lại thì khi bắt đầu thay cha trị vì Vương Quốc, Quốc Vương Al-Mamun (là một nhà thiên văn học) đã cho xây dựng Đài thiên văn ở Baghdad. Cùng với đó ông cho xây dựng ở Thủ đô tòa lâu đài gọi là *Phủ Trí Tuệ*, nơi mà trong khoảng thời gian từ thế kỉ IX đến thế kỉ XII có chức

năng một Viện Hàn lâm Khoa học của Vương quốc Hồi giáo Baghdad.

Việc đầu tiên là Quốc vương yêu cầu dịch hầu hết các tác phẩm khoa học của các nền khoa học Cổ Hy Lạp và Ấn Độ, ... ra tiếng Ả-rập. Chẳng hạn, họ dịch (không phải một lần) bộ "Cơ sở toán học" của Euclid hay tác phẩm toán học được viết dưới dạng thơ gồm hai mươi quyển "Học thuyết Brahma hoàn thiện" (628) của Brahmagupta (Ấn Độ), ...

Nhà bác học Al-Khorezmi được Quốc vương giao trọng trách quản lý thư viện trong Phủ Trí Tuệ, nơi lưu giữ cả một kho các công trình khoa học về Toán học, Thiên văn học và nhiều ngành khoa học khác. Có lẽ nhờ đó mà nền văn minh của xứ sở Ả-rập đã sớm trở thành cầu nối giữa các nền văn minh Phương Đông và Phương Tây. Tại nơi đây Al-Khorezmi đã sáng tạo nên các công trình toán học nổi tiếng thế giới của mình.

2. Các tác phẩm toán học của Al-Khorezmi

Các công trình nổi tiếng nhất của Al-Khorezmi là các chuyên luận "Về các số Ấn Độ" và "Sách giản yếu về phép chuyển về và phép rút gọn" (Kitap al - djebr val - muqabala).

Chuyên luận "Về các số Ấn Độ" là một tác phẩm nổi tiếng. Trong công trình này, lần đầu tiên ông đưa ra sự trình bày một cách hệ thống môn Số học dựa trên hệ tính thập phân theo vị trí của người Ấn Độ với việc sử dụng rộng rãi con số zero, trong đó ông trình bày kỹ càng các phép tính cộng, trừ nhân chia và khai căn bậc hai nhờ các số Ấn Độ.

Mặc dù bản gốc (tiếng Ả-rập) không còn nữa nhưng nhờ bản dịch tái phẩm này ra tiếng Latinh vào thế kỉ XII còn lại mà các nhà bác học Châu Âu làm quen đầu tiên với các phương pháp tính toán Ấn Độ - Ả-rập. Và cũng từ đó các số Ấn Độ (đã từng bị gọi nhầm là chữ số "Ả-rập") đã vĩnh viễn trở về với tên gọi thuở ban đầu của nó: các số Ấn Độ và con số zero!

Khi dịch ra tiếng Latinh, nhan đề "*Về các số Ấn Độ, tác phẩm của Al-Khorezmi*" của bản tiếng Ả-rập được dịch thành "*Algorithmi de numero Indiarum*" trong đó tên của tác giả Al-Khorezmi được phiên âm lệch thành *Algorithmi* (đôi khi là *Algorithmus*, *Algorismi* hay *Algorismus*) và tên (riêng!) của tác giả đã trở thành một danh từ chung của thuật toán (hay còn gọi là giải thuật). Thời trung cổ Châu Âu thuật ngữ "*thuật toán*" có nghĩa là toàn bộ hệ thống số học thập phân theo vị trí. Về sau thuật ngữ đó bao hàm ý nghĩa rộng hơn nhiều.

Trong chuyên luận "*Về các số Ấn Độ*" tác giả viết rằng "*Khi tôi thấy rõ rằng chỉ từ chín mẫu tự (chữ số) người Ấn Độ đã viết được bất cứ số nào nhờ cách sắp xếp mà họ đã xác lập, tôi đã từng ước mong được Thượng Đế phù hộ cho để từ các mẫu tự đó cũng thu được cái cần thiết giúp giảm thiểu nặng nề cho các nhà nghiên cứu...*". Tiếp đó ông viết ra chín chữ số Ấn Độ và "*một vòng tròn nhỏ hết như "0" để thế chỗ cho hàng nào đó vắng mặt của số*", trong đó tại các nước Ả-Rập số zero được gọi là "*sifr*" (= rỗng).

Sự ra đời của chuyên luận thứ hai về Đại số không giống chuyên luận đầu tiên. Nhà khoa học Lịch sử Pháp H.G.Zeuthen viết rằng:

"Quốc Vương Hồi giáo đã yêu cầu Al-Khorezmi biên soạn một cuốn sách giản yếu về các quy tắc al - djebr và al - muqabala để trình bày một số kiến thức tối cần thiết về số học và ứng dụng thực hành... Do vậy, cả hai thuật ngữ [Ả-Rập] vừa nhắc đến đã phần nào quen thuộc trước đó và Al-Khwarizmi đã không cần lý giải gì thêm về nội dung của chúng..."

Người ta cho rằng việc Quốc Vương truyền lệnh một cách cụ thể như vậy cũng chứng tỏ rằng tại thời điểm đó, có lẽ tuyệt phẩm "*Số học*" (thế kỉ III) của Diophantus đã được biết đến ở Vương Quốc Baghdad và đã có ảnh hưởng nhất định nào đó.

Trở lên là bối cảnh ra đời (khoảng 830) của chuyên luận thứ hai với nhan đề "*Kitab Al - djebr van - Muqabala*" (nghĩa là "*Phép rút gọn và phép khử ở hai vế*"). Tên sách tự nó cũng chứng tỏ đó là chuyên luận khoa học về phương trình. Bản dịch Latinh của tác phẩm này có ảnh hưởng rất lớn ở Châu Âu. Cũng từ đây thuật ngữ "al - djebr" được Latinh hóa thành "*algebra*" và đã bắt đầu được sử dụng như từ đồng nghĩa với toàn bộ khoa học "Đại số" (algebra) mà trên thực tế cho đến giữa thế kỉ XIX Đại số không gì khác hơn là khoa học về phương trình.

Vì thời bấy giờ người ta chỉ thừa nhận số dương (như thời Cổ Hy Lạp!) nên phép toán rút gọn có ý nghĩa hết sức sâu xa. Nó cho phép người ta đạt được mục đích là cả hai vế của phương trình đều dương cho dù ẩn số nhận giá trị nào. Do đó, thực chất của hai phép toán nói trên là: *phép chuyển các số hạng của phương trình từ vế này sang vế kia và giản ước các số hạng đồng dạng*. [Hơn năm thế kỉ trước hai phép toán này đã được Diophantus trình bày trong tác phẩm "*Số học*" của ông].

Mọi phương trình đều được Al-Khorezmi đưa về sáu dạng chính tắc:

- | | |
|------------------|----------------------|
| 1) $ax^2 = bx$; | 4) $ax^2 + bx = c$; |
| 2) $ax^2 = c$; | 5) $ax^2 + c = bx$; |
| 3) $bx = c$; | 6) $bx + c = ax^2$; |

trong đó mọi hệ số đều dương và các số hạng chỉ được cộng và hệ số của lũy thừa bậc hai là đơn vị. Trong tác phẩm của ông người ta thấy ba dạng phương trình 4), 5) và 6) được ông khảo sát kỹ càng và khảo sát riêng biệt do các hệ số chỉ nhận giá trị dương.

Đối với mỗi dạng phương trình chính tắc Al-Khorezmi đều chỉ rõ quy tắc chung để giải và

các quy tắc đó thường được chứng minh bằng các ví dụ cụ thể. Ông rất ít khi sử dụng đại lượng vô tỷ vì ông vẫn xem chúng là “*nghiệm điếc*” (trước thế kỉ XIII ở châu Âu người ta vẫn gọi các số vô tỷ là những “*số điếc*” (Latinh: *surdus*). Đối với các phương trình dạng 1) Ông và các nhà toán học khác (cho đến thế kỉ XVII) đều không xét nghiệm $x = 0$.

Do lúc bấy giờ *Al-Khorezmi* chưa có hệ thống kí hiệu và phép tính chữ nên mọi tính toán của ông đều được diễn đạt bằng lời, kể cả chứng minh quy tắc giải và giải toán. Chẳng hạn, quy tắc giải và lời giải các phương trình ở dạng 5) $x^2 + c = bx$ được trình bày trong hai bước. Bước đầu tiên ông thực hiện liên tiếp các phép tính:

$$1) \frac{b}{2}; \quad 2) \left(\frac{b}{2}\right)^2; \quad 3) \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c;$$

$$4) \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}; \quad 5) \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Bước tiếp theo ông xác lập $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ là nghiệm của phương trình và ông cũng chứng tỏ

rằng $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ cũng là nghiệm. Quy

tắc đó được ông minh họa trong ví dụ $x^2 + 21 = 10x$, ... Phương pháp giải của ông chủ yếu là bằng Đại số. Nếu lời giải không đưa được về khai căn đơn giản thì ông thường sử dụng phương pháp của Đại số - Hình học.

Bằng các phương pháp đó, *Al-Khorezmi* có thể giải bất cứ phương trình bậc hai nào để tìm nghiệm dương theo quy tắc chung của ông. Đó là bước tiến khổng lồ về phía trước so với Đại số - Hình học của người Hy Lạp xưa. Ông đã thật sự bảo tồn được các phương pháp Đại số cổ đại.

Mặt khác, trong tác phẩm “*Nghệ thuật vĩ đại hay là các quy tắc đại số*” (1545) của mình, chính *G. Cardano* (1501-1576) đã tôn “*Al-Khorezmi ở vị trí thứ tám trong hàng ngũ những thiên tài vĩ đại nhất của nhân loại*”. Cả

G. Cardano và *N. Tartaglia* (1500-1557), những người mà tên tuổi của họ đã gắn liền với sự khởi đầu của giai đoạn mới (sau *Al-Khorezmi*) trong sự phát triển của môn Đại số (tìm nghiệm trong sự phát triển của môn Đại số (tìm nghiệm của phương trình bậc ba dưới dạng căn thức!) đều gọi *Al-Khorezmi* là người sáng lập của môn Đại số thời trung cổ.

Năm 1979, tại quê hương của *Al-Khorezmi* Viện Hàn lâm khoa học Liên Xô và Viện Hàn lâm khoa học Uzbekistan đồng tổ chức Hội nghị khoa học Quốc tế với chủ đề: *Lý thuyết hiện đại về thuật toán và ứng dụng*. Nhiều chuyên gia hàng đầu thế giới về logic toán, lý thuyết thuật toán đã đến dự. Trong báo cáo “*Về sự nghiệp sáng tạo của Al-Khorezmi*”, Giáo sư người Áo là *Zemanek* đã phát biểu: “*Chúng tôi muốn bày tỏ một ước vọng rằng một nghìn năm sau những ai mà phát hiện ra bất cứ người nào trong chúng ta, họ sẽ nhìn nhận cái được tạo ra bởi chúng ta [bây giờ!] với lòng tôn kính như ngày hôm nay chúng ta nhìn về Al-Khorezmi và các đồng nghiệp của ông ở Phú Trí Tuệ...*”.

Người Ả-Rập hết sức tự hào về xứ sở và nền văn hóa của mình. Đó là xứ sở của những “*Phiên chợ Ba Tư*”^{*} huyền ảo, là xứ sở với Thành Baghdad hoa lệ, quê hương của tuyệt phẩm “*Một nghìn một đêm lẻ*”, một trong những di tích tuyệt diệu nhất của sáng tác truyền khẩu dân gian... Đồng thời với đó, đây cũng là kho báu vô giá của nhân loại lưu giữ các tác phẩm khoa học học có giá trị của người Ả-Rập cùng các tác phẩm khoa học Đông-Tây mà họ sưu tầm rồi chuyển ngữ và biên tập ra tiếng Ả-Rập và tiếng Latinh để truyền bá sang Châu Âu và Phương Đông.

Trong kho báu đó, chắc chắn hai chuyên luận của *Al-Khorezmi* về *Số học* và *Đại số* là một trong những nguồn chính mà nhờ đó châu Âu được làm quen với *Toán học Hy Lạp*, *Đại số Ả-rập* và đặc biệt là với các số Ấn Độ.

^{*} Xin hãy tải về để nghe nhạc phẩm “*In a Persian Market*” (“*Phiên chợ Batur*”) của *Albert Ketelbey*, *Andre Rieu*, *Made by Hassan Shokeir*.



ỨNG DỤNG MỘT CÔNG THỨC TỔ HỢP

DƯƠNG VĂN DUY

(GV THPT Nguyễn Hồng, TP. Bắc Giang)

Ta đã biết công thức:

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k \quad (k, n \in \mathbb{N}; 1 \leq k < n).$$

Trong công thức trên chỉ số dưới ở về trái không đổi, suy nghĩ tương tự ta thử ngược lại cho chỉ số trên không đổi thì thấy:

$$C_1^1 + C_2^1 = C_3^2$$

$$C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 = C_4^2$$

...

$$C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + \dots + C_n^1 = C_{n+1}^2$$

và

$$C_2^2 + C_3^2 = C_4^3$$

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 = C_5^3$$

...

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_n^2 = C_{n+1}^3.$$

Không khó để chứng minh các kết quả trên.

Từ đó ta có dự đoán:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \dots + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1} \quad (*)$$

($n, m \in \mathbb{N}; n \geq 1$).

Có thể chứng minh (*) bằng cách cộng liên tiếp:

$$C_n^n + C_{n+1}^n = C_{n+2}^{n+1}$$

$$C_{n+2}^n + C_{n+2}^{n+1} = C_{n+3}^{n+1}$$

$$C_{n+3}^n + C_{n+3}^{n+1} = C_{n+4}^{n+1}$$

...

$$C_{n+m}^n + C_{n+m}^{n+1} = C_{n+m+1}^{n+1}.$$

Vậy (*) được chứng minh.

Ứng dụng (*) giúp ta giải một số bài toán sau:

Bài toán 1. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m \quad \text{với } m, n \in \mathbb{N}; n \geq 2. \quad (1)$$

Lời giải. • Với $n = 2$ ta có: $x_1 + x_2 = m$.

Xét các trường hợp:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = m$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = m - 1$$

...

$$x_1 = m \Rightarrow x_2 = 0.$$

Số nghiệm là C_{m+1}^1 .

• Với $n = 3$ ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = m$.

Xét các trường hợp:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = m, \text{ có } C_{m+1}^1 \text{ nghiệm.}$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 + x_3 = m - 1, \text{ có } C_m^1 \text{ nghiệm.}$$

...

$$x_1 = m \Rightarrow x_2 + x_3 = 0, \text{ có } C_1^1 \text{ nghiệm.}$$

Vậy số nghiệm là $C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_m^1 + C_{m+1}^1 = C_{m+2}^2$.

Từ đó dự đoán: phương trình (1) có số nghiệm là C_{m+n-1}^{n-1} nghiệm (2).

Thật vậy, ta chứng minh (2) bằng quy nạp:

Với $n = 2, 3$ ta thấy (2) đúng.

Giả sử (2) đúng với $n; n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, tức là:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m \text{ có } C_{m+n-1}^{n-1} \text{ nghiệm.}$$

Ta chứng minh phương trình:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = m \text{ có } C_{m+n}^n \text{ nghiệm.}$$

Thật vậy: xét các trường hợp:

$$x_{n+1} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = m, \text{ có } C_{m+n-1}^{n-1} \text{ nghiệm}$$

$$x_{n+1} = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = m - 1, \text{ có } C_{m+n-2}^{n-1} \text{ nghiệm}$$

...

$$x_{n+1} = m \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, \text{ có } C_{n-1}^{n-1} \text{ nghiệm.}$$

(Xem tiếp trang 22)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/516 (Lớp 6). Cho

$$A = \frac{1}{1!3} + \frac{1}{2!3} + \frac{1}{3!5} + \dots + \frac{1}{(n-2)!n}$$

trong đó $n! = 1.2.3 \dots n$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Chứng tỏ rằng $A < \frac{1}{2}$.

BÙI VĂN TUYẾN

(330B Đường Ngọc Lâm, Quận Long Biên, TP. Hà Nội)

Bài T2/516 (Lớp 7). Chứng minh rằng số $a = 27.7^n + 2021$ không thể là tích của m số tự nhiên liên tiếp ($m \in \mathbb{N}, m \geq 2$) với mọi số tự nhiên n chia hết cho 4.

NGUYỄN ĐỨC TÂN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/516. Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4. \text{ Chứng minh}$$

$$2(a+b+c+d) - 4 \geq \sqrt{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt{\frac{d^3+a^3}{2}}$$

PHẠM VĂN TRƯỜNG

(Sinh viên lớp BK79 - K52, ĐHBK Hà Nội)

Bài T4/516. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Bên ngoài tam giác đó vẽ $\triangle ACE$ đều và $\triangle ABD$ cân có $\widehat{ABD} = 120^\circ$. Chứng minh rằng 4 điểm B, C , trung điểm I của DE và giao điểm F ($F \neq E$) của DE và đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACE$ cùng thuộc một đường tròn.

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/516. Cho đa thức $f(x) = x^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = x$ có hai

nghiệm phân biệt và $b^2 - 2b - 3 \geq 4c$ thì phương trình $f[f(x)] = x$ có bốn nghiệm phân biệt.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/516. Cho đa thức $f(x) = 3x^2 + 8x + 4$. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $g(x) = f(f(f(f(x))))$.

NGUYỄN TIÊN TIẾN

(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T7/516. Cho a, b, c là ba số thực dương.

Chứng minh rằng $\frac{5a+c}{b+c} + \frac{6b}{c+a} + \frac{5c+a}{a+b} \geq 9$.

NGÔ VĂN THÁI

(Tổ 34, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

Bài T8/516. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O có G là trọng tâm, các đường trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt cắt (O) tại A_2, B_2, C_2 . Chứng

minh rằng: $\frac{A_1A_2}{GA_1} + \frac{B_1B_2}{GB_1} + \frac{C_1C_2}{GC_1} \geq 3$.

PHẠM DUY KHÁNH

(GV THPT Quý Châu, Nghệ An)

Bài T9/516. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{y^2 - y + 1} = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4 + x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2 + 1} \end{cases}$$

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/516. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + 1 \mid 3^q + 1, q^2 + 1 \mid 3^p + 1$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/516. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(4xy) = f(2x^2 + 2y^2) + 4(x-y)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong 2, Bắc Ninh)

Bài T12/516. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc $\widehat{BAD}$ nhọn. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua B , cắt đoạn thẳng CD tại M . Đường thẳng AM cắt đường thẳng BC tại N . BM, DN lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN tại K, L khác M, N . Lấy các điểm P và Q sao cho $PN = PK, PN \perp AD, QM = QL$ và $QM \perp AB$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi quanh B .

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/516. Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương thẳng đứng với tần số góc 10 rad/s . Lấy mốc thế năng ở vị trí cân bằng của vật. Biết rằng khi động năng và thế năng bằng

nhau thì độ lớn của lực đàn hồi và tốc độ của vật lần lượt là $1,5 \text{ N}$ và $25\sqrt{2} \text{ cm}$. Biết độ cứng của lò xo $k < 20 \text{ N/m}$ và $g = 10 \text{ m/s}^2$. Xác định độ lớn cực đại của lực đàn hồi.

VIỆT CƯƠNG (Hà Nội)

Bài L2/516. Một máy biến áp có số vòng dây cuộn thứ cấp gấp 3 lần cuộn sơ cấp. Khi đặt vào hai đầu cuộn sơ cấp một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng U thì điện áp hiệu dụng ở đầu cuộn thứ cấp để hở là $2,5U$. Khi kiểm tra thì phát hiện có một số vòng dây cuộn thứ cấp bị quấn ngược chiều so với đa số các vòng dây của nó. Biết số vòng dây cuộn sơ cấp là 500 vòng. Tính số vòng dây quấn ngược của cuộn thứ cấp.

THANH LÂM (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/516 (For 6th grade). Let

$$A = \frac{1}{1!3} + \frac{1}{2!3} + \frac{1}{3!5} + \dots + \frac{1}{(n-2)!n}$$

for $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, where $n! = 1.2.3 \dots n$. Show that $A < \frac{1}{2}$.

Problem T2/516 (For 7th grade). For any natural number n which is divisible by 4, show that the number $a = 27.7^n + 2021$ cannot be a product of m consecutive natural numbers ($m \in \mathbb{N}, m \geq 2$).

Problem T3/516. Given positive numbers a, b, c, d satisfying $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$. Show that $2(a+b+c+d) - 4 \geq$

$$\geq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}.$$

Problem T4/516. Given an acute triangle $\triangle ABC$. Outside the triangle, draw the

equilateral triangle $\triangle ACE$ and the isosceles triangle $\triangle ABD$ with $\widehat{ABD} = 120^\circ$. Let I be the midpoint of DE and F ($F \neq E$) the other intersection between DE and the circumcircle of $\triangle ACE$. Show that B, C, I, F lie on a same circle.

Problem T5/516. Let $f(x) = x^2 + bx + c$. Show that if the equation $f(x) = x$ has two distinct roots and $b^2 - 2b - 3 \geq 4c$ then the equation $f[f(x)] = x$ has four distinct roots.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/516. Let $f(x) = 3x^2 + 8x + 4$. Find the coefficient of x^4 in the polynomial $g(x) = f(f(f(f(x))))$.

Problem T7/516. Given positive numbers a, b, c . Prove that

$$\frac{5a+c}{b+c} + \frac{6b}{c+a} + \frac{5c+a}{a+b} \geq 9.$$

Problem T8/516. A triangle $\triangle ABC$ is inscribed in a circle O . Let G be the centroid of the triangle. The medians AA_1, BB_1, CC_1 of the triangle respectively intersect (O) at A_2, B_2, C_2 .

Show that $\frac{A_1A_2}{GA_1} + \frac{B_1B_2}{GB_1} + \frac{C_1C_2}{GC_1} \geq 3$.

Problem T9/516. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{y^2-y+1} = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{2} \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4+x^3} - 2x^3y\sqrt{4y^2+1} \end{cases}$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/516. Find all the prime numbers p and q so that $p^2 + 1 \mid 3^q + 1$ and $q^2 + 1 \mid 3^p + 1$.

Problem T11/516. Find all continuous functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying

$$f(4xy) = f(2x^2 + 2y^2) + 4(x-y)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problem T12/516. Suppose that $ABCD$ is a parallelogram with the angle $\widehat{BAD}$ is acute. A moving line d , which always passes through B , intersects CD at M . The line AM intersects BC at N . Two lines BM, DN respectively intersect the circumcircle of the triangle CMN at K, L (besides M, N). Choose P and Q so that $PN = PK$, $PN \perp AD$, $QM = QL$ and $QM \perp AB$. Show that PQ always passes through a fixed point when d varies.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

ỨNG DỤNG (Tiếp theo trang 19)

Vậy số nghiệm là

$$C_{n-1}^{n-1} + \dots + C_{m+n-2}^{n-1} + C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n}^n.$$

Vậy số nghiệm của (1) là C_{m+n-1}^{n-1} .

Tương tự ta có bài toán

Bài toán 2. Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ với $m, n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \leq m$.

Bằng lập luận tương tự ta có số nghiệm là C_{m-1}^{n-1} .

Bài toán 3. (Bài toán chia kẹo)

Có bao nhiêu cách chia 12 cái kẹo giống nhau cho 4 em bé mà em bé nào cũng có kẹo?

Lời giải. Số cách chia kẹo chính bằng số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12.$$

Ở đây $n=4; m=12$. Theo bài toán 2 thì số nghiệm là: $C_{11}^3 = 165$. Vậy có 165 cách chia 12 cái kẹo cho 4 em bé mà em bé nào cũng có kẹo.

Chú ý rằng: Ngoài cách trên có thể làm như sau: Xếp 12 cái kẹo thành hàng ngang, giữa chúng có 11 khoảng trống. Đặt một cách bất kỳ 3 vạch vào 3 trong số 11 khoảng trống đó, ta được một cách chia 12 cái kẹo đó cho 4 em bé. Vậy số cách chia là: $C_{11}^3 = 165$.

Bài toán 4. (Bài toán chia kẹo tổng quát)

Có m cái kẹo đem chia cho n em bé ($m, n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \leq m$). Hỏi có bao nhiêu cách chia để em bé nào cũng nhận được kẹo?

Lời giải. Số cách chia kẹo chính là số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m. \text{ Như thế đáp số sẽ là: } C_{m-1}^{n-1}.$$



Bài T1/512. Tìm tất cả các số tự nhiên N biết rằng tổng tất cả các ước số của N bằng $2N$ và tích tất cả các ước số của N bằng N^2 .

Lời giải. *Chú ý:* 1) Nếu a là ước số của số nguyên $N > 1$ mà $1 < a < N$ thì $N = ab$ và b cũng là ước số của N mà $1 < b < N$.

2) Nếu $a > 1$ là ước số nhỏ nhất của số nguyên $N > 1$ thì a là số nguyên tố vì nếu a là hợp số thì $a = bc$ với ước số b của a thỏa mãn $1 < b < a$ và b là ước số của N , trái giả thiết.

3) Khi nói đến số các ước số của một số ta phải hiểu đó là các ước phân biệt.

Trở lại bài toán. Ta không xét số $N = 0$ vì số 0 có vô hạn ước số. Số N khác 1 vì tổng tất cả các ước số của $N = 1$ bằng 1, khác $2N = 2$. Xét $N > 1$.

• Nếu N có đúng hai ước số thì ước số nhỏ hơn N là 1 và N là số nguyên tố, tích tất cả các ước số của N bằng $N = 1 \cdot N = N^2$, suy ra $N = 1$, trái giả thiết $N > 1$.

• Nếu N có đúng ba ước số, gọi a là ước số nhỏ nhất của N mà $1 < a < N$ thì a là số nguyên tố và $N = ab$. Do N chỉ có đúng 3 ước số nên ước số $b = a$ và $N = a^2$. Tích tất cả các ước số của N bằng $a^3 = 1 \cdot a \cdot N = N^2 = a^4$, suy ra $a = 1$, trái giả thiết $a > 1$.

• Nếu N có đúng bốn ước số, gọi a là ước số nhỏ nhất của N mà $1 < a < N$ thì a là số nguyên tố, $N = ab$ và b cũng là ước số của N mà nhỏ hơn N (nếu $b = a$ thì N có đúng ba ước số), lúc đó $1 < a < b < N$. Tổng tất cả các ước số của N bằng $1 + a + b + ab = 1 + a + b + N = 2N = 2ab$, suy ra $1 + a + b = ab$, nên $ab - a - b + 1 = 2$, do đó $a(b - 1) - (b - 1) = 2$, dẫn đến $(a - 1)(b - 1) = 2$, suy ra $a - 1 = 1$ và $b - 1 = 2$, tức là $a = 2$ và $b = 3$, lúc đó $N = ab = 6$ và tổng tất cả các ước số của N bằng $1 + 2 + 3 + 6$

$= 12 = 2 \cdot 6$. Tích tất cả các ước số của N bằng $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36 = 6^2$, thỏa mãn yêu cầu đề bài.

• Nếu N có nhiều hơn bốn ước số, gọi a là ước số nhỏ nhất của N ($a \neq 1$) và c là ước số lớn nhất của N ($c \neq N$) thì tồn tại ít nhất một ước số b thỏa mãn $1 < a < b < c < N$. Từ đó $N = ad$, do a là ước số nhỏ nhất của N thì d là ước số lớn nhất của N nên $d = c$ và $N = ac$. Lúc đó tích tất cả các ước số của N bằng $a^2 c^2 = N^2 = 1 \cdot a \cdot b \cdot \dots \cdot c \cdot N \geq abcac = a^2 c^2 b$, suy ra $b = 1$, trái giả thiết $b > a > 1$.

Vậy bài toán có một nghiệm là $N = 6$.

Nhận xét. Nhiều bạn cho đáp số đúng nhưng lập luận để bài toán có đúng một nghiệm thì chưa chặt chẽ, hoặc quá dài (vì chưa khai thác tính chất ước số nhỏ nhất, ước số lớn nhất của N). Các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Huy Hoàng Sơn, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** Hoàng Tuấn Anh, 6T, THPT Lương Thế Vinh; **Quảng Trị:** Võ Nguyên Thắng, 6A, THCS Trưng Vương, TP. Đông Hà; **Sóc Trăng:** Lê Ngọc Xuân Thơ, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/512. Cho a, b, c là các số tự nhiên thỏa

mãn $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$. Chứng minh rằng

$$\frac{2019b - 2020a}{2019c - 2020b} > 1.$$

Lời giải. Trước hết ta thấy khi $a = b = c = 0$ thì biểu thức $\frac{2019a - 2020a}{2019c - 2020b}$ không xác định, cho

nhên bài toán cần thêm điều kiện là a, b, c là các số nguyên dương. Sau đây là lời giải của nhiều bạn.

Đặt $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = k > 0$, khi đó có

$a = 3k, b = 5k, c = 7k$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2019b - 2020a}{2019c - 2020b} &= \frac{2019 \cdot 5k - 2020 \cdot 3k}{2019 \cdot 7k - 2020 \cdot 5k} \\ &= \frac{4035k}{4033k} = \frac{4035}{4033} > 1. \end{aligned}$$

Nhận xét: Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Nội:** Hoàng Tuấn Anh, 6T THCS Lương Thế Vinh, Ngô Uyển Nhi, 7A5, THCS Phương Liệt, Thanh

Xuân, Đặng Gia Khoa, 6M1, Trường PT liên cấp Lê Quý Đôn, Q. Nam Từ Liêm; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, Nguyễn Tuấn Hải, 7B, THCS Nguyễn Tất Thành, TP. Hưng Yên; **Nghệ An:** Hồ Phương Lê, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nguyễn Cảnh Nam Khánh, Trần Nam Khánh, Lê Văn Quang Hiếu, Lê Văn Hải Phú, Nguyễn Hằng Nga, 7D, Vương Viết Lượng, Nguyễn Văn Mạnh, 7A, Nguyễn Đăng Quang, Nguyễn Hải Triều, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đồ Lương; **Phú Thọ:** Đỗ Ngọc Tiến, 7A3, THSC Lâm Thao, Lâm Thao; **Quảng Ngãi:** Võ Hữu Thanh Thảo, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành; **Sóc Trăng:** Nguyễn Anh Thư, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Thái Nguyên:** Đồng Hoàng Minh Đạo, 6A4, THCS Nguyễn Du, Trần Quang Khôi, 6A5, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** Nguyễn Viết Quang Anh, 7H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, Nguyễn Hoàng Long, 7B, Lê Phú Quang, 7D, THCS Như Bá Sỹ, Bút Sơn, Hoàng Hóa; **Vĩnh Phúc:** Tạ Khắc Hưng, Nguyễn Duy Thành, Hoàng Minh Hiếu, Nguyễn Huy Hoàng Sơn, Nguyễn Minh Huy, Phùng Thu Thủy, Nguyễn Minh Quân, 6A2 THCS Yên Lạc, Yên Lạc.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/512. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = 2z - 1 \\ y^2 = xz \\ z^2 = 2y - 1 \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0 \\ 2y^2 - 2xz = 0 \\ 2z^2 - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

Cộng theo vế các phương trình, ta được:

$$(x^2 - 2xz + z^2) + 2(y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - z)^2 + 2(y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Thử lại, $x = y = z = 1$ thỏa mãn hệ phương trình trong đầu bài. Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Nhận xét. Có thể giải bài toán bằng cách khác như sau: Từ các phương trình

$$\begin{cases} x^2 = 2z - 1 \\ z^2 = 2y - 1 \end{cases} \Rightarrow z \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2};$$

kết hợp với PT thứ hai $y^2 = xz \Rightarrow x > 0$.

Ta có: $2z = x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow z \geq x$;

$$2y = z^2 + 1 \geq 2z \Rightarrow y \geq z,$$

suy ra $y \geq z \geq x > 0 \Rightarrow y^2 \geq xz$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. Do đó phương trình thứ hai trong hệ: $y^2 = xz \Leftrightarrow x = y = z = 1$: thỏa mãn hệ phương trình.

Một số bạn giải cách này nhưng không chứng minh x, y, z là các số dương nên từ $y \geq z \geq x$ suy ra $y^2 \geq xz$ là không chặt chẽ. Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Quảng Trị: Nguyễn Anh Quân, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Nghệ An:** Hồ Phương Lê, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Nội:** Lê Ngọc Tùng, 9A, THCS Nguyễn Trục, Thanh Oai; **Hưng Yên:** Lê Tuấn Nghĩa, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

NGUYỄN ANH DŨNG

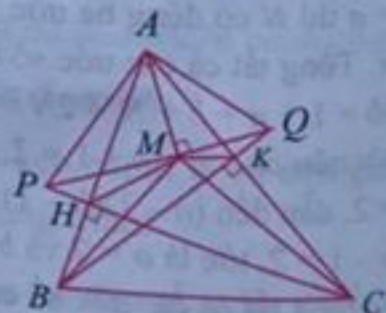
Bài T4/512. Cho tam giác nhọn ABC , kẻ các đường cao CH, BK (H, K lần lượt nằm trên AB và AC). Trên tia CH lấy điểm P , trên tia BK lấy điểm Q sao cho góc $PAQ = 90^\circ$. Kẻ AM vuông góc với PQ (M nằm trên PQ). Chứng minh rằng MB vuông góc với MC .

Lời giải. Ta có:

• $\widehat{AMP} = \widehat{AHP} = 90^\circ$ nên tứ giác $AMHP$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{MHC} = \widehat{MAP}$ (1).

• $\widehat{AMQ} = \widehat{AKQ} = 90^\circ$ nên tứ giác $AMKQ$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{MKA} = \widehat{MQA}$ (2).

Mặt khác, tam giác APQ vuông tại A , có AM là đường cao nên $\widehat{MAP} = \widehat{AQM}$ (3).



Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MHC} = \widehat{MKA}$, nên tứ giác $HMKC$ là tứ giác nội tiếp.

Lại có, $\widehat{BHC} = \widehat{BKC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BCKH$ là tứ giác nội tiếp. Vậy B, C, K, M, H thuộc đường tròn đường kính BC .

Do đó $\widehat{BMC} = 90^\circ$, hay $BM \perp CM$.

Nhận xét. 1) Có thể chứng minh $\triangle AMC \sim \triangle QMB$, từ đó suy ra $BM \perp CM$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Phạm Thanh Nga, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Nguyễn Đức Minh, 8A, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam; **Lê Ngọc Tùng,** 9A, THCS Nguyễn Trục, Thanh Oai; **Sóc Trăng:** Nguyễn Anh Thư, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Nghệ An:** Phạm Trung Kiên, 9A1, THCS Nghi Hương, Cửa Lò; **Quảng Trị:** Nguyễn Anh Quân, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/512. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } P = 3(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}.$$

Lời giải. Tất cả các bất đẳng thức được dùng trong bài toán này là bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương. Ta có:

$$\begin{aligned} \bullet (a+b+c)(ab+bc+ca) &= (a+b)(b+c)(c+a) + abc \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) + \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} \\ &\leq (a+b)(b+c)(c+a) + \frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \\ &= \frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca) = 64(a+b+c).$$

$$\begin{aligned} \bullet 3(a^2 + b^2 + c^2) &= a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} + 2(ab + bc + ca) \\ &\geq 3(ab + bc + ca) = 24. \end{aligned}$$

Sử dụng các bất đẳng thức trên ta nhận được:

$$P = 3(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}$$

$$\geq 3(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3 \cdot 64(a+b+c)}{(a+b+c)^3}$$

$$\geq (a^2 + b^2 + c^2) + 16 + \frac{192}{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{64}{a^2 + b^2 + c^2} + 16$$

$$\geq 2\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{64}{a^2 + b^2 + c^2}} + 16 = 2 \cdot 8 + 16 = 32.$$

$$P = 32 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \text{ Vậy } \min P = 32.$$

Nhận xét. Đây là bài toán bất đẳng thức dạng cơ bản, không quá khó, các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Phú Thọ:** Phùng Đăng Dương, Lương Minh Hiếu, 9C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** Tạ Kim Nam Tuấn, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** Lê Ngọc Tùng, 9A, THCS Nguyễn Trục, Thanh Oai; **Hải Phòng:** Trần Trung Phúc, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng; **Thanh Hóa:** Nguyễn Việt Quang Anh, 7H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** Nguyễn Công An, 8C, Phạm Văn Quyền, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phạm Ngọc Trinh,** 9B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Trị:** Nguyễn Anh Quân, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Sóc Trăng:** Nguyễn Anh Thư, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Cần Thơ:** Nguyễn Duy Khang, 8A5, THCS An Hòa, Liên Trần Huy Hoàng, 8A3, THCS Lương Thế Vinh, Tân Kiều Trang, 9A3, THCS An Khánh, Ninh Kiều, Nguyễn Phan Minh Tiến, 8A2, THCS An Thới, Bình Thủy.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T6/512. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xz}{y^2 + yz} + \frac{y^2}{xz + yz} + \frac{x + 2z}{x + z}.$$

Lời giải. Với x, y, z là các số thực dương nên P

$$\text{được viết thành } P = \frac{\frac{x}{y}}{1 + \frac{y}{z}} + \frac{\frac{y}{z}}{1 + \frac{x}{y}} + \frac{1}{1 + \frac{x}{z}} + 1.$$

Đặt $\frac{x}{y} = a; \frac{y}{z} = b$ ($a, b > 0$) thì $\frac{x}{z} = ab$ và $ab \geq 1$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} + \frac{1}{1+ab} + 1$$

$$= \left(\frac{a}{1+b} + 1 \right) + \left(\frac{b}{1+a} + 1 \right) + \frac{1}{1+ab} - 1$$

$$= (a+b+1) \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \right) + \frac{1}{1+ab} - 1.$$

Từ BĐT $(X-Y)^2 \geq 0$ và với $X > 0, Y > 0$ dễ dàng suy ra hai BĐT sau:

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} \geq \frac{4}{X+Y} \quad (*) ; XY \leq \frac{(X+Y)^2}{4} \quad (**)$$

dấu bằng xảy ra khi $X = Y$.

Áp dụng BĐT (*) và (**) ta có:

$$P \geq (a+b+1) \cdot \frac{4}{a+b+2} + \frac{1}{1 + \frac{(a+b)^2}{4}} - 1$$

$$= \frac{4(t+1)}{t+2} + \frac{4}{t^2+4} - 1 \quad (1), \text{ trong đó } t = a+b$$

$$\text{và } t \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{\frac{x}{z}} \geq 2 \text{ (vì } x \geq z).$$

Cách 1. Nhận thấy

$$\frac{4(t+1)}{t+2} + \frac{4}{t^2+4} - \frac{7}{2} = \frac{(t-2)^3}{2(t+2)(t^2+4)} \geq 0$$

$$\text{nên } \frac{4(t+1)}{t+2} + \frac{4}{t^2+4} \geq \frac{7}{2} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq \frac{5}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi

$t = 2$ và $a = b$, suy ra $a = b = 1$ tức là $x = y = z$.

$$\text{Vậy min } P = \frac{5}{2}.$$

Cách 2. Xét hàm số $f(t) = \frac{t+1}{t+2} + \frac{1}{t^2+4}$ với

$$t \geq 2. \text{ Ta có: } f'(t) = \frac{1}{(t+2)^2} - \frac{2t}{(t^2+4)^2}$$

$$= \frac{(t-2)^2(t^2+2t+4)}{(t+2)^2(t^2+4)^2} \geq 0$$

với mọi $t \geq 2$ nên $f(t)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

$$\text{Vì vậy } f(t) \geq f(2) = \frac{7}{8} \text{ nên } P \geq 4 \cdot \frac{7}{8} - 1 = \frac{5}{2};$$

$$P = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = 2. \text{ Vậy min } P = \frac{5}{2}.$$

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài và đều theo một trong hai cách trên. Tuy nhiên, có trường

hợp các bài có bài giải giống nhau thì không được tính điểm.

2) Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Xuân Tùng, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Quảng Trị:** Nguyễn Anh Quân, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; Nguyễn Hữu Hoàng Long, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng:** Nguyễn Đức Thọ, 10AIT, Lâm Khánh Hòa, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Cần Thơ:** Trần Kiều Trang, 9A3, THCS An Khánh, Ninh Kiều, Phan Trung Đức, 11 A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Quảng Bình:** Lê Đức Hạnh, Lê Hồng Anh, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đồng Tháp:** Nguyễn Thiên Lý, 10T1, THPT Nguyễn Quang Diêu, Cao Lãnh; **Bạc Liêu:** Đỗ Văn Dương, 12CA, THPT Trần Văn Bảy, Phước Long; **Hà Tĩnh:** Lê Phan Việt Cường, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** Nguyễn Huy Hoàng, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/512. Tìm nghiệm nguyên dương của

$$\tan \frac{3\pi}{x} + 4 \sin \frac{2\pi}{x} = \sqrt{x}. \quad (1)$$

Lời giải. (Của bạn Ngô Văn Minh Thắng, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội) Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\tan \frac{3\pi}{x} + 4 \sin \frac{2\pi}{x} \right)^2 = x, x > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \frac{3\pi}{x} + 4 \cos \frac{3\pi}{x} \sin \frac{2\pi}{x} \right)^2 = x \cos^2 \frac{3\pi}{x} \quad (2).$$

Để cho gọn, đặt $\frac{\pi}{x} = t$. Ta có: $2VT(2) =$

$$= 2(\sin^2 3t + 8 \sin 3t \cos 3t \sin 2t + 16 \cos^2 3t \sin^2 2t)$$

$$= (1 - \cos 6t) + 8 \sin 6t \sin 2t + 8(1 + \cos 6t)(1 - \cos 4t)$$

$$= (1 - \cos 6t) + 4(\cos 4t - \cos 8t) + 8(1 + \cos 6t)(1 - \cos 4t)$$

$$= 9 - 4 \cos 4t + 7 \cos 6t - 4 \cos 8t - 8 \cos 6t \cos 4t$$

$$= 9 - 4 \cos 4t + 7 \cos 6t - 4 \cos 8t - 4(\cos 10t + \cos 2t)$$

$$= 9 + 11 \cos 6t - 4(\cos 2t + \cos 4t + \cos 6t + \cos 8t + \cos 10t).$$

$$\text{Ta có: } \cos 2t + \cos 4t + \cos 6t + \cos 8t + \cos 10t$$

$$= \frac{1}{2 \sin t} (2 \sin t \cos 2t + 2 \sin t \cos 4t + 2 \sin t \cos 6t$$

$$+ 2 \sin t \cos 8t + 2 \sin t \cos 10t)$$

$$= \frac{1}{2\sin t} (\sin 3t - \sin t + \sin 5t - \sin 3t + \sin 7t - \sin 5t + \sin 9t - \sin 7t + \sin 11t - \sin 9t)$$

$$= \frac{1}{2\sin t} (\sin 11t - \sin t) = \frac{\sin 11t}{2\sin t} - \frac{1}{2}. \text{ Vậy}$$

$$(2) \Leftrightarrow 9 + 11\cos 6t - 2\frac{\sin 11t}{\sin t} + 2 = x(1 + \cos 6t)$$

$$\Leftrightarrow (11-x)\cos^2 \frac{3\pi}{x} = \frac{\sin \frac{11\pi}{x}}{\sin \frac{\pi}{x}} \quad (3).$$

Nhận xét: $x = 11$ là nghiệm của (3).

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \tan \frac{3\pi}{x} + 4\sin \frac{2\pi}{x} - \sqrt{x}.$$

$$\text{Để } \tan \frac{3\pi}{x} \text{ có nghĩa thì } \frac{3\pi}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2; 6 \quad (\text{do } x \in \mathbb{N}^+).$$

Xét các trường hợp:

$$1) x = 1: VT(1) = \tan 3\pi + 4\sin 2\pi = 0 < \sqrt{1} = VP(1).$$

$$2) x = 3: VT(1) = \tan \pi + 4\sin \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} > \sqrt{3} = VP(1).$$

Vậy (1) không có nghiệm nguyên $0 < x \leq 3$.

$$\text{Nếu } x \geq 4 \text{ thì } 0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}. \text{ Suy ra } 0 < \frac{2\pi}{x} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Do đó $\cos \frac{2\pi}{x} > 0$. Vậy với $x \geq 4$ ta có:

$$f'(x) = -\frac{3\pi}{x^2 \cos^2 \frac{3\pi}{x}} - \frac{8\pi}{x^2} \cos \frac{2\pi}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0.$$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến chặt khi $x \geq 4$.

Chúng ta phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm $x = 11$.

Nhận xét. 1) Chứng minh đẳng thức

$$\tan \frac{3\pi}{11} + 4\sin \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11} \quad (2)$$

và nhiều đẳng thức thú vị khác có thể xem trong

[1] Victor H. Moll, *An elementary trigonometry equation*, The College Mathematics Journal, Vol. 39, No. 5 (Nov., 2008), pp. 395-399.

2) Ngoài bạn **Thắng**, các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bình Định**: Nguyễn Huy Hoàng, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hưng Yên**: Cao Trung Hiếu, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang.

TA DUY PHƯƠNG

Bài T8/512. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi M là trung điểm cạnh BC , X là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O) , P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên CI, BI . Chứng minh rằng $XI \perp PQ$.

Lời giải. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của X trên BI, CI . Ta có $\widehat{MKC} = \widehat{MXC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (1).

$$\text{Mặt khác } \widehat{KIB} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB}$$

$$= \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\widehat{MKC} + \widehat{KIB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow BI \perp MK, \quad \text{mà}$$

$$BI \perp MQ \quad \text{nên ba}$$

$$\text{điểm } M, Q, K \text{ thẳng}$$

$$\text{hàng. Chứng minh}$$

$$\text{tương tự có ba điểm}$$

$$M, P, H \text{ thẳng hàng.}$$

$$\text{Khi đó } \widehat{KPQ} = \widehat{KHQ} = \widehat{KHI} = \widehat{KXI}$$

(do các tứ giác $PQKH, XKIH$ là tứ giác nội tiếp).

Từ đó dễ suy ra $XI \perp PQ$.

Nhận xét. Cũng có thể giải bài toán này theo hướng:

Gọi D, E lần lượt là giao điểm của BI với AC, CI với AB .

Chỉ ra $PQ \parallel DE$, sau đó chứng tỏ rằng XI là

đường trung trực của đoạn thẳng DE . Các bạn sau

có lời giải gọn hơn cả:

Vĩnh Phúc: Trần Ánh Dương, 10A1, THPT chuyên

Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh**: Nguyễn Tất Đạt, 10A1,

THPT Yên Phong số 1, Yên Phong; **Hà Tĩnh**:

Nguyễn Thị Hà Chi, 10 Toán1, THPT chuyên Hà

Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: Đặng Hoàng Duy,

10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP.

Đồng Hới; **Quảng Trị**: Nguyễn Anh Quân, 8D,

THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ, Nguyễn Hữu

Hoàng Long, Ngô Hoàng Thành Đạt, 10 Toán,



THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Đồng Tháp:** Nguyễn Trúc Như Bình, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bình Định:** Nguyễn Huy Hoàng, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** Nguyễn Thanh Phúc, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Sóc Trăng:** Lâm Khánh Hòa, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Cần Thơ:** Phan Trung Đức, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Phúc Thịnh, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/512. Cho tam giác ABC có diện tích S và các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Giải hệ

$$\begin{cases} a^2x + b^2y + c^2z = 4S & (1) \\ xy + yz + zx = 1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Từ (2) ta có: $z(x+y) = 1 - xy$, suy ra $x+y \neq 0$.

Viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} z = \frac{4S - a^2x - b^2y}{c^2} & (3) \\ z = \frac{1 - xy}{x+y} & (4) \end{cases}$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{4S - a^2x - b^2y}{c^2} = \frac{1 - xy}{x+y}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (4S - a^2x - b^2y)(x+y) &= c^2(1 - xy) \\ \Leftrightarrow a^2x^2 + [(a^2 + b^2 - c^2)y - 4S]x &+ b^2y^2 - 4Sy + c^2 = 0 \quad (5). \end{aligned}$$

Sử dụng công thức

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C = \cot C \times 2ab \sin C = 4S \cot C$$

ta xét (5) dưới dạng phương trình bậc hai theo x:

$$a^2x^2 + 4S(y \cot C - 1)x + b^2y^2 - 4Sy + c^2 = 0 \quad (6)$$

có nghiệm nên

$$\begin{aligned} \Delta' &= 4S^2(y \cot C - 1)^2 - a^2(b^2y^2 - 4Sy + c^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (a^2b^2 - 4S^2 \cot^2 C)y^2 &+ (8S^2 \cot C - 4a^2S)y &+ a^2c^2 - 4S^2 \leq 0 \quad (7). \end{aligned}$$

Theo định lý hàm số sin và cosin, thì

$$a^2b^2 - 4S^2 \cot^2 C = \frac{4S^2}{\sin^2 C} - 4S^2 \cot^2 C = 4S^2,$$

$$a^2c^2 - 4S^2 = \frac{4S^2}{\sin^2 B} - 4S^2 = 4S^2 \cot^2 B,$$

$$\begin{aligned} 8S^2 \cot C - 4a^2S &= 4S(2S \cot C - a^2) \\ &= 4S \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} - a^2 \right) = -2S(c^2 + a^2 - b^2) \\ &= -8S^2 \cot B. \end{aligned}$$

Thế các giá trị trên vào (7) ta thu được:

$$4S^2y^2 - 8yS^2 \cot B + 4S^2 \cot^2 B \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4S^2(y - \cot B)^2 \leq 0.$$

Suy ra $y = \cot B$. Hoán vị vai trò x, y, z, ta thu được $x = \cot A$ và $z = \cot C$.

Thử lại, ta thấy nghiệm $(x, y, z) = (\cot A, \cot B, \cot C)$ thỏa mãn.

Kết luận. Bài toán có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (\cot A, \cot B, \cot C)$.

Nhận xét. Có nhiều lời giải gửi đến tòa soạn đã sử dụng các BĐT cổ điển AM-GM (BĐT Cauchy) và BDT Schwarz. Tuy nhiên, các bạn chưa xét chi tiết điều kiện tương ứng để dấu đẳng thức xảy ra nên kết

luận nghiệm $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ là không

đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Đặng Duy Hậu**, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, **Hưng Yên**; **Ngô Quốc Bảo**, 10/9, THPT Nguyễn Đình Chiểu, **Bến Tre**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/512. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì ta luôn có n và $2^{2^n} + 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải (Theo bạn Nguyễn Thanh Phúc, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**).

Trước hết ta chứng minh nhận xét sau: Cho p là số nguyên tố. Nếu $p | 2^{2^n} + 1$ thì $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$.

Thật vậy $p | 2^{2^n} + 1$ suy ra p lẻ. Ta có:

$$\begin{aligned} 2^{2^n} + 1 &\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p} \\ \Rightarrow 2^{2^{n+1}} &\equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Gọi $h = \text{ord}_p(2)$ ta có: $h | 2^{n+1} \Rightarrow h = 2^s$ ($s \leq n+1$).

Giả sử $s < n+1 \Rightarrow h | 2^n \Rightarrow 2^{2^n} \equiv 1 \pmod{p}$. Mà $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 2$, mâu

thuần. Vậy $s = n + 1$ tức là $h = 2^{n+1}$. Lại có theo định lý Fermat nhỏ thì $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Suy ra $h \mid p-1 \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{h} \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$.

Trở lại bài toán, giả sử $p \mid 2^{2^n} + 1$. Theo nhận xét trên $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ nên $p = 2^{n+1}k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Do đó $p = 2^{n+1}k + 1 > 2^{n+1} > (1+1)^n \geq 1+n > n$. Vậy p không là ước của n . Bài toán được giải xong.

Nhận xét. Các bạn tham gia giải đều có lời giải đúng với các cách giải khác nhau. Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** Trần Ảnh Dương, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** Phan Thành Tín, Lưu Ngân Hà, 10 Toán1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Đặng Hoàng Duy, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Duy Phước, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phan Trung Kiên, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/512. Cho các dãy số $(x_n), (y_n)$ được xác định bởi $x_1 = 3, x_2 = 17, y_1 = 4, y_2 = 24,$

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n; y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n \quad (n \geq 1).$$

Chứng minh rằng không có số hạng nào của các dãy số $(x_n), (y_n)$ là lập phương của một số nguyên.

Lời giải. Cách 1. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: x_n, y_n là các số nguyên, x_n là số lẻ, $x_{n+1} > x_n \geq 3, y_{n+1} > y_n \geq 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Cũng bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:

$$x_{n+1} = 3x_n + 2y_n, y_{n+1} = 4x_n + 3y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra: $2x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 = 2x_n^2 - y_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó

$$2x_n^2 - y_n^2 = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

• Giả sử tồn tại số nguyên dương n và số nguyên a sao cho $y_n = a^3$. Suy ra $a \geq 2$ và

$2x_n^2 - a^6 = 2$. Do đó a là số chẵn. Suy ra tồn tại số nguyên b sao cho $a = 2b$. Từ đó:

$$x_n^2 - 32b^6 = 1 \Rightarrow (x_n - 1)(x_n + 1) = 32b^6.$$

Ta có: $(x_n - 1, x_n + 1) = 2$.

TH1: Tồn tại các số nguyên dương c, d sao cho:

$$\begin{aligned} x_n - 1 &= 2c^6, x_n + 1 = 16d^6 \Rightarrow 16d^6 - 2c^6 = 2 \\ \Rightarrow 8d^6 - c^6 &= 1 \Rightarrow (2d^2 - c^2)(4d^4 + 2c^2d^2 + c^4) = 1, \\ \text{đây là điều vô lý.} \end{aligned}$$

TH2: Tồn tại các số nguyên dương c, d sao cho:

$$\begin{aligned} x_n - 1 &= 16c^6, x_n + 1 = 2d^6 \Rightarrow 2d^6 - 16c^6 = 2 \\ \Rightarrow d^6 - 8c^6 &= 1 \\ \Rightarrow (d^2 - 2c^2)(d^4 + 2c^2d^2 + 4c^4) &= 1, \text{ đây là điều} \\ \text{vô lý.} \end{aligned}$$

Vậy không có số hạng nào của dãy số (y_n) là lập phương của một số nguyên.

• Giả sử tồn tại số nguyên dương m và số nguyên

$$k \text{ sao cho } x^m = k^3 \Rightarrow k \geq 2 \text{ và } k \text{ là số lẻ. Do đó}$$

$$2k^6 - 2 = y_m^2. \text{ Suy ra } y_m \text{ là số chẵn. vậy tồn tại số}$$

$$\text{nguyên } h \text{ sao cho } y_m = 2h. \text{ Vì } y_m \geq 4 \text{ nên } h \geq 2.$$

$$\text{Ta có: } 2k^6 - 2 = y_m^2 = 4h^2 \Leftrightarrow k^6 - 1 = 2h^2$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 1)(k^4 + k^2 + 1) = 2h^2.$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 1)(k^4 + k^2 + 1) = 2h^2.$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 1)(k^4 + k^2 + 1) = 2h^2.$$

Gọi t là ước chung lớn nhất của $k^2 - 1$ và $k^4 + k^2 + 1$ thì $t = 1$ hoặc $t = 3$.

TH1: $t = 1$. Khi đó tồn tại các số nguyên dương p, q sao cho $k^2 - 1 = 2p^2, k^4 + k^2 + 1 = q^2$ hoặc tồn tại các số nguyên dương p, q sao cho $k^2 - 1 = p^2, k^4 + k^2 + 1 = 2q^2$.

Nếu $k^2 - 1 = p^2$ thì $(k + p)(k - p) = 1$, vô lý.

Nếu $k^4 + k^2 + 1 = 2q^2$ thì

$$(k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1) = q^2.$$

Vì $k^2 + k + 1$ và $k^2 - k + 1$ nguyên tố cùng nhau nên tồn tại các số nguyên dương r, s sao cho

$$k^2 + k + 1 = r^2, k^2 - k + 1 = s^2. \text{ Suy ra}$$

$$3 = (2k + 1 + 2r)(2r - 2k - 1), \text{ vô lý.}$$

TH2: $t = 3$. Khi đó tồn tại các số nguyên dương p, q sao cho $k^2 - 1 = 6p^2, k^4 + k^2 + 1 = 3q^2$. Suy ra

$$(k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1) = 3q^2.$$

Vì $k^2 + k + 1$ và $k^2 - k + 1$ nguyên tố cùng nhau nên tồn tại các số nguyên dương r, s sao cho

$$k^2 + k + 1 = r^2, k^2 - k + 1 = s^2. \text{ Suy ra}$$

$$3 = (2k + 1 + 2r)(2r - 2k - 1), \text{ vô lý.}$$

$k^2 - k + 1 = 3r^2$, $k^2 + k + 1 = s^2$ hoặc tồn tại các số nguyên dương r, s sao cho $k^2 - k + 1 = r^2$, $k^2 + k + 1 = 3s^2$.

Nếu $k^2 + k + 1 = s^2$ thì

$$(2s + 2k + 1)(2s - 2k - 1) = 3, \text{ vô lý.}$$

Nếu $k^2 - k + 1 = r^2$ thì

$$(2r + 2k - 1)(2r - 2k + 1) = 3, \text{ vô lý.}$$

Vậy không có số hạng nào của dãy số (x_n) là lập phương của một số nguyên.

Kết luận: Không có số hạng nào của các dãy số $(x_n), (y_n)$ là lập phương của một số nguyên.

Cách 2. Xét dãy số (x_n) , ta có:

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \Leftrightarrow \frac{x_{n+2} + x_n}{x_{n+1}} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+2} + x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} + x_{n-1}}{x_n}$$

$$\Rightarrow x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2 = x_{n+1}x_{n-1} - x_n^2 = \dots = x_2x_1 - x_1^2 = 8.$$

Thay $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$ vào kết quả trên ta được:

$$(6x_{n+1} - x_n)x_n - x_{n+1}^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1}^2 - 6x_nx_{n+1} + x_n^2 + 8 = 0 \quad (1).$$

Rõ ràng (x_n) là dãy số nguyên với mọi $n \geq 1$ nên PT(1) ẩn x_{n+1} phải có nghiệm nguyên hay biệt số Δ' phải là số chính phương, tức là:

$$\Delta' = 9x_n^2 - (x_n^2 + 8) = k^2 \quad (1), k \in \mathbb{Z}^+.$$

Ta thấy VT(1) : 8 $\Rightarrow k^2 : 8 \Rightarrow k : 4$. Đặt $k = 4l$ với l nguyên dương $\Rightarrow x_n^2 - 1 = 2l^2$ (2), $l \in \mathbb{Z}^+, n \geq 1$.

Giả sử ngược lại, tồn tại $x_c = a^3$ ($c = 1, \dots, n$) với a là số nguyên dương. Thay vào (2) ta có:

$$a^6 - 1 = 2l^2 \quad (3), a, l \in \mathbb{Z}^+.$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh (3) không có nghiệm nguyên. Để thấy với $l = 1$ (3) không có nghiệm nguyên. Xét $l \geq 2$. Ta có:

$$a^6 - 1 = 2l^2 \Leftrightarrow (a^3 - 1)(a^3 + 1) = 2l^2.$$

Có các trường hợp:

$$\begin{cases} a^3 - 1 = 1 \\ a^3 + 1 = 2l^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a^3 - 1 = 2 \\ a^3 + 1 = l^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a^3 - 1 = l \\ a^3 + 1 = 2l \end{cases}$$

Ta thấy các hệ trên không có nghiệm nguyên dương (a, l) . Vậy mọi số hạng của dãy (x_n) không là lập phương của một số nguyên. Làm tương tự, ta cũng thấy mọi số hạng của dãy (y_n) cũng không là lập phương của một số nguyên.

Nhận xét. Đây là bài toán hay và khó. Chỉ có duy nhất bạn **Lâm Khánh Hòa**, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, Sóc Trăng có lời giải đúng. Lời giải ở cách 1 là của bạn **Trần Xuân Đáng**, tác giả đề toán và ở cách 2 là của bạn **Lâm Khánh Hòa**.

TRẦN HỮU NAM

Bài T12/512. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) . A' đối xứng với A qua O . P là hình chiếu vuông góc của A' trên đường trung trực của BC . Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm các tam giác APA', BPA', CPA' . Chứng minh rằng đường tròn $(H_aH_bH_c)$ tiếp xúc với (O) .

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Nếu $(TA, TB) \equiv (CA, CT) + (DT, DB) \pmod{\pi}$

thì các đường tròn $(TAC), (TBD)$ tiếp xúc với nhau tại T .

Phép chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán T12.

Gọi Q là giao điểm thứ hai của AP và (O) ; D, E, F theo thứ tự là giao điểm của PH_a và AO, AB, AC ;

(P) là đường tròn tâm P bán kính $PB = PC$; R, S theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (P) và các đường tròn $(BPQ), (CPQ)$.

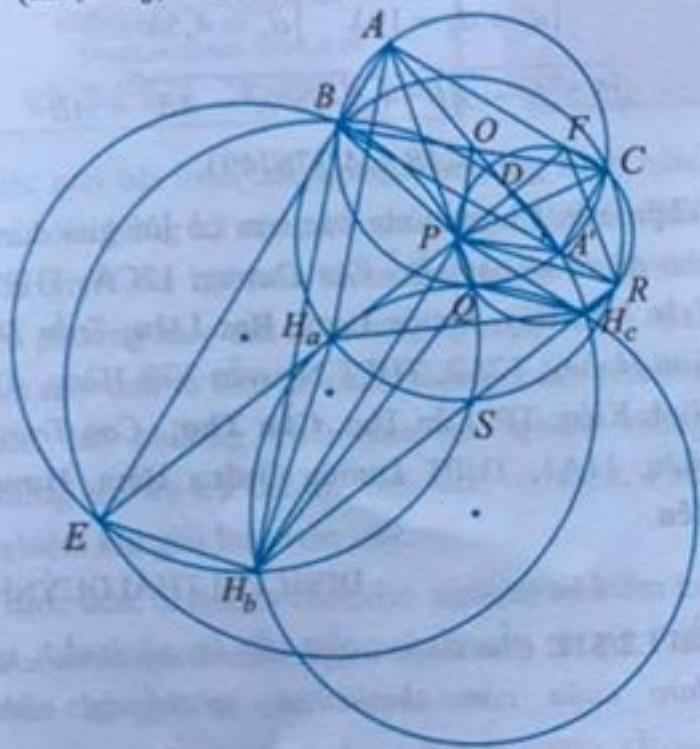
Để thấy: $BE \equiv BA \perp BA'$;

$$DE \equiv DP \equiv PH_a \perp AA' \equiv DA'; QP \equiv QA \perp QA'.$$

Do đó các bộ bốn điểm (B, E, D, A') và (P, Q, D, A') cùng thuộc một đường tròn.

Vậy $\overline{AB.AE} = \overline{AD.AA'} = \overline{AP.AQ}$. Điều đó có nghĩa là bốn điểm B, E, P, Q cùng thuộc một đường tròn (1). Để thấy

$H_bP \perp BA'; BA' \perp BA; H_bB \perp A'P; A'P \perp AH_a$.
 Do đó $H_bP \parallel AB; H_bB \parallel AH_a$.
 Vì $AH_a \perp BC$ và O là tâm đường tròn (ABC) nên
 $(AB, AH_a) \equiv (AO, AC) \equiv (AA', AC) \pmod{\pi}$.



Dễ thấy $EP \equiv H_aP \perp AA'; AB \parallel A'C \perp AC$.
 Vậy $(H_bP, H_bB) \equiv (AB, AH_a) \equiv (AA', AC)$
 $\equiv (EP, EB) \pmod{\pi}$.

Do đó H_b, P, B, E cùng thuộc một đường tròn (2).
 Từ (1) và (2) suy ra H_b, B, P, Q, E cùng thuộc một
 đường tròn (3).
 Tương tự H_c, C, P, Q, F cùng thuộc một đường
 tròn (4). Dễ thấy $BH_b \perp A'P; CH_c \perp A'P$.

Do đó $BH_b \parallel CH_c$. Từ đó, chú ý đến (3) và (4),
 suy ra

$$\begin{aligned} (QH_b, QH_c) &\equiv (QH_b, QP) + (QP, QH_c) \pmod{\pi} \\ &\equiv (BH_b, BP) + (CP, CH_c) \equiv (PC, PB) \pmod{\pi} \quad (5), \\ (PH_b, PH_c) &\equiv (PH_b, PQ) + (PQ, PH_c) \\ &\equiv (BH_b, BQ) + (CQ, CH_c) \pmod{\pi} \\ &\equiv (CQ, BQ) \equiv (CA', BA') \equiv -(A'B, A'C) \pmod{\pi} \quad (6). \end{aligned}$$

Dễ thấy $EB \equiv AB \perp A'B; H_bP \perp A'B$. Do đó
 $EB \parallel H_bP$ (7). Từ (7) suy ra B, P, H_b, E là bốn
 đỉnh của một hình thang cân ($EB \parallel H_bP$).

Kết hợp với $BP = SP$, suy ra $EH_b = BP = SP$.

Do đó $EH_b = SP; EP \parallel H_bS$. Tương tự
 $FH_c = RP; FP \parallel H_cR$.

Vậy, chú ý rằng $SP = RP$, suy ra
 $EH_b = FH_c; EP \parallel H_bS; FP \parallel H_cR$ (8).

Từ (3) và (4), chú ý rằng B, BH_b theo thứ tự là ảnh
 đối xứng của C, CH_c qua OP , suy ra

$$(EH_b, EF) \equiv (EH_b, EP) \equiv (BH_b, BP) \\ \equiv (CP, CH_c) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (FP, FH_c) \equiv (FE, FH_c) \equiv -(FH_c, FE) \pmod{\pi} \quad (9).$$

Từ (8) và (9) suy ra E, F, H_b, H_c là bốn đỉnh của
 một hình thang cân ($EF \parallel H_bH_c \equiv H_bS$) (10).

Từ (3) và (10), chú ý rằng
 $BE \equiv AB \perp A'B; BH_b \perp A'P$, suy ra

$$(H_bH_c, H_bP) \equiv (PE, PH_b) \equiv (BE, BH_b) \\ \equiv (A'B, A'P) \equiv -(A'P, A'B) \pmod{\pi} \quad (11).$$

Từ (6) và (11) suy ra các tam giác $PH_bH_c, A'BC$
 đồng dạng ngược hướng (12). Dễ thấy

$$AE \equiv AB \perp A'B; AH_a \perp A'P; A'P \parallel BC;$$

$$AA' \perp PD \equiv EH_a; AC \perp AB \equiv EA.$$

$$\text{Do đó } (AE, AH_a) \equiv (A'B, A'P) \equiv (BA', BC)$$

$$\equiv (AA', AC) \equiv (EH_a, EA) \pmod{\pi}.$$

Kết hợp với $AE \equiv AB \perp AC$, suy ra $H_aE = H_aA$

$$(13). \text{ Từ (10) và (13) suy ra } H_aH_b = H_aH_c \quad (14).$$

Từ (12) và (14), chú ý rằng

$$PH_a \parallel H_bH_c; PB = PC; A'P \parallel PC, \text{ suy ra tập hợp}$$

$$\Delta PH_bH_c \cup \{H_a\} \text{ và } \Delta A'BC \cup \{P\} \text{ là ảnh của}$$

$$\text{nhau qua một phép đồng dạng ngược hướng (15).}$$

$$\text{Từ (15) suy ra}$$

$$(H_aH_b, H_aH_c) \equiv -(PB, PC) \equiv (PC, PB) \pmod{\pi} \quad (16).$$

$$\text{Từ (5) và (16) suy ra}$$

$$(QH_b, QH_c) \equiv (H_aH_b, H_aH_c) \pmod{\pi}.$$

Nói cách khác Q, H_a, H_b, H_c cùng thuộc một

$$\text{đường tròn (17). Từ (3) và (15), chú ý rằng}$$

$$A'Q \equiv H_aQ, \text{ suy ra:}$$

$$(QB, QH_b) \equiv (BP, BH_b)$$

$$\equiv (BP, H_aH_b) + (H_aH_b, BH_b) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (BP, H_aH_b) - (BH_b, H_aH_b)$$

$$\equiv (BP, H_a H_b) + (A'B, PB) \equiv (A'B, H_a H_b) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (A'B, A'Q) + (H_a Q, H_a H_b)$$

$$\equiv (CB, CQ) + (H_a Q, H_a H_b) \pmod{\pi} \quad (18).$$

Từ (17) và (18), theo bổ đề trên, suy ra đường tròn $(H_a H_b H_c)$ tiếp xúc với (O) tại Q .

Nhận xét. 1) Bài toán này khó, chỉ có 4 bạn tham gia giải: **Hà Nội:** Lê Hoài An, 10T1, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, Nguyễn Đức Minh, 8A, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Duy Phước, 11T1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Bình Định:** Nguyễn Huy Hoàng, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

2) Vì không sử dụng góc định hướng hoặc vì sử dụng góc định hướng chưa thành thạo nên lời giải của các bạn Lê Hoài An, Nguyễn Đức Minh, Nguyễn Duy Phước không khắc phục được tình trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ.

3) Bạn Nguyễn Huy Hoàng cho lời giải bằng phương pháp tọa độ, sau khi chứng minh một bổ đề khó (định lý Ptolemy mở rộng - định lý Purser).

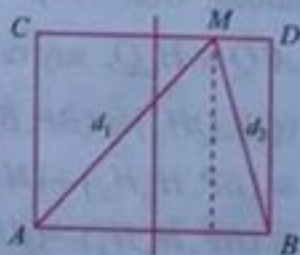
NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/512. Trên mặt nước có hai nguồn kết hợp đặt tại hai điểm A và B, dao động cùng pha theo phương thẳng đứng, phát ra hai sóng có bước sóng λ . Trên đoạn AB có 9 vị trí mà ở đó các phần tử nước dao động với biên độ cực đại. C và D là hai điểm trên mặt nước sao cho ABCD là hình vuông. M là một điểm thuộc cạnh CD và nằm trên vân cực đại giao thoa bậc nhất. Biết phần tử M dao động ngược pha với các nguồn. Hãy xác định độ dài đoạn AB theo bước sóng λ .

Lời giải. Vì M là cực đại giao thoa và ngược pha với nguồn, nên ta có:

$$\begin{cases} d_1 - d_2 = n\lambda \\ d_1 + d_2 = m\lambda \end{cases} \quad (1)$$

với n là số nguyên lẻ, m là số nguyên chẵn. Theo đề bài $n = 1$, nên:



$$\begin{cases} d_1 + d_2 > AB \\ 4\lambda \leq AB \leq 5\lambda \end{cases} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{cases} d_1 - d_2 = \lambda \\ d_1 + d_2 = 10\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 5,5\lambda \\ d_2 = 4,5\lambda \end{cases}$$

$$\sqrt{5,5^2 \lambda^2 - AB^2} + \sqrt{4,5^2 \lambda^2 - AB^2} = AB$$

$$\Rightarrow AB = 4,376749\lambda.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn có lời giải đúng cho đề ra kì này: Đỗ Văn Dương, 12CA, THPT Trần Văn Bảy, Phước Long, Bạc Liêu; Trần Thị Kim Hoàng, 12A2, THPT Nguyễn Việt Hồng, Q. Ninh Kiều, TP. Cần Thơ, Cần Thơ; Cao Trung Hiếu, 11A1, THPT Dương Quang Hàm, Hưng Yên.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/512. Cho đoạn mạch điện xoay chiều chỉ chứa cuộn cảm thuần có hệ số tự cảm

$$L = \frac{1}{\pi} \text{ (H)}. \text{ Đặt điện áp xoay chiều có tần số } 50$$

Hz vào hai đầu đoạn mạch. Tại thời điểm điện áp hai đầu mạch có giá trị $100\sqrt{3} \text{ V}$ thì cường độ dòng điện trong mạch là 1 A. Xác định điện áp hiệu dụng giữa hai đầu cuộn cảm.

Lời giải. Cường độ dòng điện qua cuộn thuần cảm trễ pha hơn điện áp $\frac{\pi}{2}$. Giả sử $u = U_0 \cos \omega t$ suy ra $i = I_0 \cos(\omega t - \pi/2) = I_0 \sin \omega t$.

Ta có: $\left(\frac{u}{U_0}\right)^2 + \left(\frac{i}{I_0}\right)^2 = 1$. Thay các giá trị của u ,

$$i, \text{ và } I_0 = \frac{U_0}{Z_L} = \frac{U_0}{2\pi fL} = \frac{U_0}{100} \text{ vào biểu thức trên}$$

ta tìm được: $U_0 = 200 \text{ V}$. Do đó:

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2} \text{ (V)}.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: Hải Phòng: Trần Trung Phúc, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng; Cần Thơ: Trần Thị Kim Phụng, 12A2, THPT Nguyễn Việt Hồng, Q. Ninh Kiều.

NGUYỄN XUÂN QUANG



MỘT SỐ CÁCH GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM, BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM VÀ NGHIỆM

NGUYỄN THẾ ANH

(GV THPT Nguyễn Huệ, Vũng Liêm, Vĩnh Long)

Việc giải bài toán tìm nghiệm phương trình hàm đòi hỏi những kỹ năng rất đa dạng. Đặc biệt khi giải quyết các bài toán kiểm định tính vô nghiệm của phương trình hàm cần có những kỹ năng riêng. Bài viết này đưa ra một số cách chứng minh phương trình hàm, bất phương trình hàm vô nghiệm thông qua những thí dụ cụ thể để bạn đọc có thêm kinh nghiệm khi giải loại toán này.

Trước tiên, ta đưa ra cách tìm nghiệm và kiểm tra lại điều kiện để dẫn đến mâu thuẫn từ giả thiết phản chứng thông qua bài toán sau

Bài toán 1 (Olimpiad Áo – Balan 1997). Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x) - y \quad (1), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn bài toán.

Cho $x = 0$ ta có:

$$f(f(y)) = f(0) - y, \quad \forall y \in \mathbb{Z} \quad (2).$$

Từ đây, dễ thấy f là song ánh trên $\mathbb{Z}$. Thật vậy, trước tiên f là toàn ánh vì $\forall y \in \mathbb{Z}$ thì

$$f(f(f(0) - y)) = y. \text{ Giả sử } f(y_1) = f(y_2) \text{ thì}$$

$$f(0) - y_1 = f(f(y_1)) = f(0) - y_2, \text{ suy ra } y_1 = y_2,$$

do đó f là đơn ánh. Vậy f là song ánh trên $\mathbb{Z}$.

Từ (2) cho $y = 0$ ta có: $f(f(0)) = f(0)$. Do f là đơn ánh nên $f(0) = 0$.

Suy ra: $f(f(y)) = -y, y \in \mathbb{Z}$. Do f là toàn ánh trên $\mathbb{Z}$ nên với mọi y tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ để $y = f(a)$.

Khi đó $f(y) = f(f(a)) = -a$. Từ đây, với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$f(x + y) = f(x + f(a)) = f(x) - a = f(x) + f(y).$$

Theo phương trình Cauchy ta có:

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{Z}, \text{ suy ra } c^2 = -1 \text{ (vô lý).}$$

Vậy không tồn tại hàm f thỏa mãn đề bài.

Nhận xét 1. - Với cách dựa vào kết quả phương trình Cauchy và điều kiện đề bài đã dẫn đến mâu thuẫn như mong muốn.

- Nếu f là đơn ánh và nếu x_1, x_2, x_3 phân biệt mà ta chứng minh được $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ không phân biệt thì ta cũng khẳng định được không tồn tại hàm số f . Để rõ hơn vấn đề ta có bài toán sau.

Bài toán 2. (IMO-1997, Shortlist). Tồn tại hay không các hàm số $f(x), g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

$$f(g(x)) = x^2, g(f(x)) = x^3, x \in \mathbb{R} \quad (1)?$$

Lời giải. Giả sử tồn tại các hàm $f(x), g(x)$ thỏa mãn bài toán. Từ $g(f(x)) = x^3$ suy ra $f(x)$ là đơn ánh, vì nếu

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Do đó $f(1), f(-1), f(0)$ là 3 giá trị phân biệt.

Nhưng ta lại có $[f(x)]^2 = f(g(f(x))) = f(x^3)$ nên $f(0), f(1), f(-1)$ là 3 nghiệm của phương trình $t^2 = t$, mâu thuẫn vì $f(0), f(1), f(-1)$ là 3 giá trị phân biệt.

Vậy không tồn tại các hàm f, g thỏa mãn bài toán.

Nhận xét 2. - Trong cách giải này ta có thể chỉ chọn được ba số $-1; 0; 1$ để nhằm tạo ra mâu thuẫn của $f(0), f(1), f(-1)$.

- Nếu chứng minh được f là đơn ánh ta có thể tập trung tạo ra mâu thuẫn từ số phần tử không có tạo ảnh. Bài toán sau đây sẽ thể hiện rõ ý tưởng này.

Bài toán 3 (IMO-1987). Chứng minh không tồn tại hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thoả mãn

$$f(f(n)) = n + 1987 \quad (1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thoả mãn bài toán. Dễ thấy f là đơn ánh vì nếu $f(n) = f(m)$ thì $f(f(n)) = f(f(m))$, suy ra $n = m$. Giả sử $f(n)$ không nhận k giá trị phân biệt $c_1, c_2, \dots, c_k$ trong $\mathbb{N}$. Khi đó $f(f(n))$ không nhận $2k$ giá trị phân biệt $c_1, c_2, \dots, c_k$ và $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_k)$ trong $\mathbb{N}$. Vì f là đơn ánh nên các giá trị $f(c_i)$ là khác nhau. Bây giờ nếu

$$w \notin \{c_1, c_2, \dots, c_k, f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_k)\}$$

thì tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $f(m) = w$. Do đó cũng tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $f(n) = m$. Khi đó $f(f(n)) = w$ điều này chỉ ra rằng $f(f(n))$ không chỉ nhận $2k$ giá trị $c_1, c_2, \dots, c_k$ và $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_k)$ mà còn nhận mọi giá trị khác. Nhưng khi n thay đổi trên $\mathbb{N}$ thì $f(f(n)) = n + 1987$ chỉ không thể nhận 1987 giá trị là $0, 1, \dots, 1986$ và $2k \neq 1987$ do đó mâu thuẫn. Vậy không tồn tại hàm f thoả mãn bài toán.

Nhận xét 3. - Ta có thể nhận thấy mâu thuẫn ở chỗ số phần tử không thể nhận được của f là số chẵn nên ta có thể thay số 1987 thành một số tự nhiên lẻ và bài toán giải theo ý tưởng này.

- Đôi khi chứng minh phương trình hàm vô nghiệm ta có thể chú ý các phần tử không nằm trong tập giá trị. Nhờ điều này ta có thể tạo ra mâu thuẫn. Để rõ hơn vấn đề ta có bài toán sau

Bài toán 4. Tồn tại hay không các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thoả mãn

$$(x+y)f(yf(x)) = x^2 f(f(x)) + f(y) \quad (1),$$

với mọi $x, y \in (0; +\infty)$?

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thoả mãn đề bài. Giả sử $f(a) = f(b)$, lần lượt thay x bởi a và x bởi b , ta có:

$$(a+y)f(yf(a)) = a^2 f(f(a)) + f(y), \quad \forall y > 0;$$

$$(b+y)f(yf(b)) = b^2 f(f(b)) + f(y), \quad \forall y > 0.$$

$$\text{Do đó: } \frac{a+y}{a^2} = \frac{b+y}{b^2}, \quad \forall y > 0$$

$$\Leftrightarrow ab^2 + yb^2 = a^2b + ya^2, \quad \forall y > 0$$

$$\Leftrightarrow ab(b-a) = y(a^2 - b^2), \quad \forall y > 0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)[ab + y(a+b)] = 0, \quad \forall y > 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

nên f là đơn ánh.

Thay x bởi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và y bởi 1, ta có

$$f\left(f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = f\left(\left(f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) + f(1)\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + f(1)$$

$$\Rightarrow f(1) = 0 \in (0; +\infty) \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy không tồn tại hàm số nào thoả mãn đề bài.

Nhận xét 4. - Ở đây, giá trị của hàm số tại biên của tập đích là 0 làm cho chúng ta có thể định hướng được.

- Nếu tập đích mà loại ra một vài phần tử thì ta nên chú ý vào các phần tử đó để giải quyết bài toán.

Bài toán 5. (APMO-2015). Cho $S = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Hỏi có tồn tại hàm số $f: S \rightarrow S$ thoả mãn điều kiện

$$f(a)f(b) = f(a^2b^2) \quad (1), \quad \forall a, b \in S, a \neq b \text{ không?}$$

Phân tích: Quan sát tập $S = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ta có thể cố gắng chứng minh $\exists x_0 \mid f(x_0) = 1$ để dẫn tới mâu thuẫn.

Lời giải. Giả sử tồn tại f thoả mãn yêu cầu bài toán. Với a, b tùy ý thuộc S , chọn số nguyên c sao cho $c > a$ và $c > b$. Do $bc > a$ và $c > b$ suy ra:

$$f(a^4b^4c^4) = f(a^2)f(b^2c^2) = f(a^2)f(b)f(c) \quad (2).$$

Do $ac > b$ và $c > a$ ta có:

$$f(a^4b^4c^4) = f(b^2)f(a^2c^2) = f(b^2)f(a)f(c) \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$f(a^2)f(b)f(c) = f(b^2)f(a)f(c)$$

$$\Rightarrow \frac{f(a^2)}{f(a)} = \frac{f(b^2)}{f(b)}$$

Do đó tồn tại $k \in \mathbb{Q}^+$ sao cho $f(a^2) = kf(a)$ (4).

Thay vào (1) ta được:

$$f(ab) = \frac{f(a)f(b)}{k}, \forall a, b \in S, a \neq b \quad (5).$$

Từ (1), (4) và (5) ta có:

$$\begin{aligned} f(a)f(a^2) &= f(a^6) = \frac{f(a)f(a^5)}{k} \\ &= \frac{f(a)f(a)f(a^4)}{k^2} = \frac{f(a)f(a)f(a^2)}{k} \end{aligned}$$

Suy ra $f(a) = k, \forall a \in S$. Thay $a = 2, b = 3$ vào (1) ta được $k = 1$. Tuy nhiên $1 \notin S$. Vậy không tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét 5. - Trong cách giải bài toán, để dẫn tới mâu thuẫn ta có thể thay $a = 2, b = 3$ bởi các giá trị khác.

- Ta có thể dựa vào tập giá trị và kết hợp với điều kiện liên tục của bài toán tạo ra mâu thuẫn. Để rõ hơn ta có bài toán sau

Bài toán 6. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai tính chất sau:

f liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f(x+m)(f(x)+\sqrt{m+1}) = -(m+2), \forall x \in \mathbb{R}$$

với m là số nguyên dương cho trước.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện đề bài. Vì m là số nguyên dương nên $m+2 > 0$. Gọi A là tập giá trị của hàm số. Suy ra $f(x) \neq 0; f(x) \neq -\sqrt{m+1}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì f liên tục nên chỉ xảy ra một trong 3 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $A \subset (-\infty; -\sqrt{m+1})$, khi đó:

$$f(x+m)(f(x)+\sqrt{m+1}) > 0 > -(m+2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2: $A \subset (-\sqrt{m+1}; 0)$, khi đó:

$$-\sqrt{m+1} < f(x+m) < 0 \Rightarrow |f(x+m)| < \sqrt{m+1}.$$

Suy ra:

$$|f(x+m)(f(x)+\sqrt{m+1})| < m+1 < m+2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 3: $A \subset (0; +\infty)$, khi đó:

$$f(x+m)(f(x)+\sqrt{m+1}) > 0 > -(m+2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy không tồn tại hàm số f thỏa mãn đề bài.

Nhận xét 6. - Ở đây, ta thấy nếu thay đổi $m+1$ và $m+2$ phù hợp thì có thể tạo ra bài toán mới mà cách giải vẫn đúng.

- Trong phương trình hàm có một số kỹ thuật xử lý khi chứng minh vô nghiệm. Bất phương hàm cũng có một số cách giải quyết. Để rõ hơn ta có bài toán sau

Bài toán 7 (Iran MO-2009). Có tồn tại hay không hai hàm số $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| > 1$ (1) với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$?

Lời giải. Giả sử tồn tại hai hàm f, g thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta sẽ chứng minh tồn tại 2 số thực x, y sao cho

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}; |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}.$$

Khi đó mâu thuẫn với điều kiện bài toán.

Ta có: $\mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \left[\frac{z}{2}; \frac{z+1}{2} \right]$ và xét tập

$$F_z = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \left[\frac{z}{2}; \frac{z+1}{2} \right] \right\}, \quad \text{suy ra}$$

$$\mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} F_z. \text{ Do tập } \mathbb{R} \text{ là tập không đếm được và}$$

$\mathbb{Z}$ là tập đếm được nên tồn tại $z_1 \in \mathbb{Z}$ sao cho F_{z_1} là không đếm được. Với mỗi

$$x \in F_{z_1} \Rightarrow g(x) \in \mathbb{R} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \left[\frac{z}{2}; \frac{z+1}{2} \right]. \text{ Xét các tập}$$

$$G_z = \left\{ x \in F_{z_1} \mid g(x) \in \left[\frac{z}{2}; \frac{z+1}{2} \right] \right\}, \quad \text{suy ra:}$$

$$F_{z_1} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} G_z. \text{ Do tập } F_{z_1} \text{ là tập không đếm được}$$

và $\mathbb{Z}$ là một tập đếm được nên tồn tại $z_2 \in \mathbb{Z}$ sao cho G_{z_2} là một tập không đếm được. Lấy $x, y \in G_{z_2} \Rightarrow x, y \in F_{z_1}$. Từ cách xác định F_{z_1} và G_{z_2} ta có:

$$f(x), f(y) \in \left[\frac{z_1}{2}, \frac{z_1+1}{2} \right]; g(x), g(y) \in \left[\frac{z_2}{2}, \frac{z_2+1}{2} \right].$$

Suy ra $|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq 1$ (mâu thuẫn). Vậy không tồn tại hai hàm số f, g thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét 7. - Ở đây, nếu thay 1 thành một số $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có bài toán mới với cách giải tương tự.

Bài toán 8 (USA MO-2000). Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều

kiện $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1).

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn đề bài. Từ (1) thay x bởi $\frac{3x+y}{4}$ và thay y bởi

$$\frac{x+3y}{4}, \text{ ta có: } \frac{f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + f\left(\frac{x+3y}{4}\right)}{2}$$

$$\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2}|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + f\left(\frac{x+3y}{4}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Bây giờ, thay y bởi $\frac{x+y}{2}$ vào (1) ta được:

$$\frac{f(x) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2} \geq f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + \frac{1}{2}|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+3y}{4}\right) + \frac{1}{2}|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4).$$

Từ (2), (3) và (4), ta có:

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5).$$

Từ (5), đánh giá tương tự và sử dụng quy nạp ta có:

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2^n|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad (6).$$

Trong (6) ta thay $x=1, y=0$ ta có:

$$\frac{f(1) + f(0)}{2} - f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 2^n, n \in \mathbb{N} \quad (7).$$

Vì n là số tự nhiên đủ lớn thì $\frac{f(1) + f(0)}{2} - f\left(\frac{1}{2}\right) < 2^n$ nên (7) không thể xảy

ra. Vậy không tồn tại hàm số f thỏa mãn đề bài.

Nhận xét 8. - Ở đây, nếu thay 2 ở (1) thành số 4 ta có lời giải tương tự.

- Nếu điều kiện bài toán biến đổi thành tam thức bậc hai thì ta có thể vận dụng tính chất về dấu của tam thức bậc hai.

Bài toán 9 (Iran MO-2015). Chứng minh rằng không tồn tại các hàm số $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + g(y)) - f(x^2) + g(y) - g(x) \leq 2y, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{và } f(x) \geq x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại các hàm số f, g thỏa mãn các yêu cầu bài toán. Khi đó

$$\begin{aligned} 2y &\geq f(x^2 + g(y)) - f(x^2) + g(y) - g(x) \\ &\geq (x^2 + g(y))^2 - f(x^2) + g(y) - g(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } (g(y))^2 + (2x^2 + 1)g(y) + x^4 - g(x) - f(x^2) - 2y \leq 0$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Ta xét (3) là một tam thức bậc hai theo $g(y)$, có biệt thức:

$$\begin{aligned} \Delta &= (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - g(x) - f(x^2) - 2y) \\ &= 4x^2 + 4g(x) + 4f(x^2) + 8y + 1. \end{aligned}$$

Với mỗi x cố định thì

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (4x^2 + 4g(x) + 4f(x^2) + 8y + 1) = -\infty.$$

Do đó khi lấy y đủ nhỏ thì $\Delta < 0$, dẫn tới

$$(g(y))^2 + (2x^2 + 1)g(y) + x^4 - g(x) - f(x^2) - 2y > 0$$

(mâu thuẫn với (3)). Vậy không tồn tại các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét 9. - Ở đây, nếu ta thay đổi $2y$ ở (1) phù hợp thì ta tạo ra một lớp bài toán mới

- Nếu hàm số tăng hoặc giảm thì với cách chọn giá trị số phù hợp sẽ dẫn tới việc giải quyết bài toán bất phương trình hàm. Xét bài toán sau

Bài toán 10. *Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời hai tính chất sau*

1) f là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$;

$$2) f\left(x + \frac{1}{f(x)}\right) \geq 2f(x), \forall x > 0.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện đề bài. Với mỗi $x > 0$, xét dãy $\{x_n\}$ như sau:

$$x_1 = x, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{f(x_n)}, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Ta có: } f(x_{n+1}) = f\left(x_n + \frac{1}{f(x_n)}\right) \geq 2f(x_n)$$

$$\geq 2^2 f(x_{n-1}) \geq \dots \geq 2^n f(x_1).$$

Vậy ta có: $f(x_n) \geq 2^{n-1} f(x_1), \forall n = 1, 2, \dots$ Tiếp

theo ta có: $x_2 = x_1 + \frac{1}{f(x_1)}, x_3 = x_2 + \frac{1}{f(x_2)}, \dots$

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{f(x_{n-1})}.$$

Cộng lại ta được:

$$x_n = x_1 + \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \dots + \frac{1}{f(x_{n-1})}.$$

Vì $\frac{1}{f(x_n)} \leq \frac{1}{2^{n-1} f(x_1)}, \forall n = 1, 2, \dots$ nên

$$x_n \leq x_1 + \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{2^1 f(x_1)} + \dots + \frac{1}{2^{n-2} f(x_1)}$$

$$= x_1 + \frac{1}{f(x_1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}\right)$$

$$= x_1 + \frac{1}{f(x_1)} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = a > 0.$$

Do f là hàm tăng trên $(0; +\infty)$ nên từ $x_n \leq a$, ta

có: $2^{n-1} f(x_1) \leq f(x_n) \leq f(a), n = 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow f(a) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} [2^{n-1} f(x_1)] = +\infty. \text{ Điều này vô lý.}$$

Vậy không tồn tại hàm số f thỏa điều kiện đề bài.

Nhận xét 10. - Ở điều kiện (2) là mấu chốt vấn đề để chọn dãy số và tạo ra mâu thuẫn để giải quyết bài toán.

- Nếu thay đổi điều kiện (2) của bài toán phù hợp ta sẽ tạo ra bài toán mới.

- Ta có thể dựa vào tính bị chặn để dẫn đến mâu thuẫn. Ta có bài toán sau

Bài toán 11. *Tồn tại hay không hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y) > y[f(x)]^2 \quad (1), \forall x, y > 0?$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn đề bài.

Thay x bởi $\frac{x}{2}$ và thay y bởi $\frac{x}{2}$ vào (1) ta có:

$f(x) > 0, \forall x > 0$. Với mỗi $a > 0$ và $x \in (0; a]$, thay y bởi $2a - x$ vào (1), ta có:

$$f(2a) > (2a - x)[f(x)]^2 \geq a[f(x)]^2 \\ \Rightarrow [f(x)]^2 < \frac{f(2a)}{a}.$$

Do đó f là hàm số bị chặn trên $(0; a]$. Đặt $f(1) = u > 0$ và xét dãy (x_n) như sau:

$$x_0 = 1; x_{n+1} = x_n + \frac{2}{f(x_n)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Thay x bởi x_n và thay y bởi $\frac{2}{f(x_n)}$ vào (1), ta

có: $f(x_{n+1}) \geq 2f(x_n) \Rightarrow f(x_n) \geq 2^n u, \forall n \geq 1$.

Do $x_1 = 1 + \frac{2}{u}$ và $x_{n+1} < x_n + \frac{1}{2^{n-1} u}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên

$$x_n < x_1 + \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = 1 + \frac{1}{u} \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) \\ < 1 + \frac{4}{u}.$$

với mọi $n = 1, 2, \dots$ ta có $x_n < 1 + \frac{4}{u}$ và

$f(x_n) \geq 2^n u$ mà $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n u = +\infty$ nên suy ra hàm

f không bị chặn trên $\left(0; 1 + \frac{4}{u}\right)$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy không tồn tại hàm số f thoả mãn điều kiện bài toán.

Nhận xét 11. - Khi dựa vào tính bị chặn của hàm số ta cần chú ý tập nguồn của hàm số.

- Có khi ta cần vận dụng ý nghĩa của giới hạn để làm cơ sở cho việc lập luận. Ta có bài toán sau.

Bài toán 12. (Olympic Sinh viên Toàn quốc-2001) Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời $f(0) > 0$ và

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)) \quad (1), \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Lời giải. Giả sử tồn tại tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời (1) và $f(0) > 0$. Nếu như $f(f(x)) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì với bất kỳ $y < 0$ ta có:

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)) \geq f(x).$$

Như thế f là hàm giảm. Từ đó do $f(0) > 0 \geq f(f(x))$ suy ra $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (mâu thuẫn). Nên tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)) > 0$. Cố định x và cho $y \rightarrow +\infty$ trong (1) ta được: $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x+y) = +\infty$, do đó:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty; \lim_{y \rightarrow +\infty} f(f(y)) = +\infty.$$

Vì thế, tồn tại $a > 0$ và $b > 0$ sao cho

$$f(a) \geq 0, f(f(x)) > 1, b \geq \frac{a+1}{f(f(x))-1},$$

$$f(f(a+b+1)) \geq 0.$$

Khi đó, ta có:

$$f(a+b) \geq f(a) + bf(f(a)) \geq a+b+1 \text{ và như thế:}$$

$$\begin{aligned} f(f(a+b)) &= f(a+b+1 + [f(a+b) - (a+b+1)]) \\ &\geq f(a+b+1) + [f(a+b) - (a+b+1)]f(f(a+b+1)) \end{aligned}$$

$$\geq f((a+b)+1) \geq f(a+b) + f(f(a+b))$$

$$\geq f(a) + bf(f(a)) + f(f(a+b)) > f(f(a+b))$$

(mâu thuẫn). Vậy không tồn tại hàm f thoả mãn các điều kiện nói trên.

Nhận xét 12. - Ở đây, ta dựa vào ý nghĩa của giới hạn để thấy tồn tại a, b đây là cơ sở lập luận tạo ra mâu thuẫn.

- Trong quá trình biến đổi ta có gắng tạo ra sao cho một bên là hữu hạn và một bên là vô hạn, từ đó có thể lập luận điều vô lý trong trường hợp hữu hạn. Ta có bài toán sau

Bài toán 13 (Bulgaria-2007). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời $f(0) \leq 0$ và

$$f(x+y) \leq x + f(f(x)) \quad (1), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Trong (1) thay x bởi 0 và y bởi $f(x)$, ta được: $f(f(x)) \leq f(f(0)) \quad (2), \forall x \in \mathbb{R}.$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$f(x+y) \leq x + f(f(0)) \quad (3), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trong (3), thay x bởi $y - f(f(0))$ và thay y bởi $1 + f(f(0)) - y$, ta được: $f(1) \leq y \quad (4), \forall y \in \mathbb{R}.$

Dễ thấy (4) không đúng. Chẳng hạn khi chọn $y = f(1) - 3$. Vậy không tồn tại hàm số f nào thoả mãn đề bài.

Rõ ràng nắm được kỹ năng chứng minh bài toán phương trình hàm, bất phương trình hàm vô nghiệm là rất cần thiết. Qua các bài toán đã nêu trên cũng phần nào nói lên điều này. Với quan điểm tìm thêm nhiều cách chứng minh các bài toán về phương trình hàm, bất phương trình hàm vô nghiệm, chúng tôi mong muốn bạn đọc thấy hứng thú hơn khi tìm hiểu vấn đề này. Cuối cùng mời bạn đọc tham khảo một số bài tập rèn luyện sau.

1. (Italy-2000) Chứng minh rằng, với $1 < n \in \mathbb{N}$, không tồn tại hàm đơn điệu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn $f(x+f(y)) = f(x) + y^n, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$

2. Tìm tất cả các hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thoả mãn đồng thời hai tính chất sau

a) f là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$b) f\left(x + \frac{2008}{f(x)}\right) \geq 2009 f(x), \forall x > 0.$$

3. (Olympic Rumani-2001) Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thoả mãn

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)), \forall x, y \in (0; +\infty).$$



TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG NGHỊCH ĐẢO (BÀI TOÁN BASEL)

HOÀNG NGỮ HUÂN

(GV Đại học Mỏ - Địa chất, Hà Nội)

TỔNG CHUỖI CÁC BÌNH PHƯƠNG NGHỊCH ĐẢO

Trong lịch sử toán học, có rất nhiều trường hợp, một bài toán xuất hiện và nó không có lời giải trong hàng chục năm, thậm chí là hàng thế kỷ. Thông thường, trong quá trình giải những bài như vậy dẫn tới xuất hiện những ngành toán học mới.

Trong nội dung bài báo này, chúng ta sẽ đề cập tới bài toán có lịch sử như vậy. Đó chính là bài toán Basel (bài toán tìm tổng của chuỗi các nghịch đảo bình phương, tên gọi Basel xuất phát từ tên của một thành phố của Thụy Sĩ). Nó được nêu ra trước các nhà toán học châu Âu vào năm 1644, và không có lời giải tương ứng cho tới năm 1734, khi *Leonard Euler* công bố công trình của mình. Sau đây chúng ta sẽ thấy, lời giải của *Euler* là một phát minh vĩ đại, mặc dù hàm lượng toán học chứa trong nó không vượt qua khóa học sơ cấp về đại số.

BÀI TOÁN BESEL

Bài toán Basel được phát biểu rất đơn giản:

Tìm giá trị chính xác của tổng vô hạn sau:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Cũng giống như mọi chuỗi vô hạn khác, xuất hiện một câu hỏi: chuỗi có hội tụ về một giá trị cụ thể không? Trên thực tế, mặc dù các số hạng của nó tiến tới vô cùng bé, nhưng cũng không là

điều kiện đủ để đảm bảo tính hội tụ. Ví dụ, chuỗi sau

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

có tổng là vô hạn, tức là phân kỳ, mặc dù các số hạng của chúng là các giá trị vô cùng bé khi $n \rightarrow +\infty$ (đây là chuỗi điều hòa, ta sẽ chứng minh chuỗi phân kỳ sau).

Sau đó, người ta đã chứng minh được rằng: chuỗi là hội tụ tới một số nhỏ hơn hai, còn cụ thể số đó là số nào thì vẫn là câu hỏi mở.

Hai đối thủ và thầy giáo của họ đều không thành công.

Các nhà toán học tầm cỡ thế giới đầu tiên thử giải bài toán Basel là hai anh em người Thụy Sĩ: nhà toán học *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705), nhà toán học *Johann Bernoulli* (1667 – 1784). Lưu ý là bài toán mang tên Basel vì đây chính là thành phố quê hương của hai nhà toán học này. Anh em nhà *Bernoulli* là những người đầu tiên áp dụng phép tính vi phân để giải nó (họ đã học công cụ vi phân từ chính *Gottfried Leibniz* (1646 - 1716)). Đến năm 1690, hai anh em nhà *Bernoulli* đã trở thành những nhà toán học hàng đầu Châu Âu. Rất đáng tiếc, là thời điểm này hai anh em đã trở thành hai đối thủ kinh địch, và mâu thuẫn đến độ muốn trừ khử nhau: họ có thể làm tất cả: nói dối, ăn cắp, sao chép bản quyền chỉ để chứng tỏ là người này hơn người

kia. Sự đối kháng và thù nghịch thậm chí còn không chấm hết ngay cả khi *Jacob* chết đi: người em *Johann* còn muốn công bố những công trình mà người anh chưa kịp công bố và nói là của mình; *Johann* cũng từ chối giúp đỡ việc công bố công trình của *Jacob* về lý thuyết xác suất vì lo sợ: điều đó sẽ nâng uy tín của anh trai mình. Rất có thể, *Johann* chỉ đơn thuần là con người không tốt: khi con trai riêng của ông là *Daniel* giành được giải thưởng toán học (chính *Johann* cũng tranh cử giải này), ông đã đuổi *Daniel* ra khỏi nhà và tước quyền thừa kế của con trai mình.

Trong nhiều năm liền, anh em nhà *Bernulli* cố gắng giải bài toán tính tổng của chuỗi các bình phương nghịch đảo, có lẽ một trong những động lực để họ đua tranh nhau là muốn chứng tỏ hơn người kia. Thế nhưng họ không thu được kết quả. *Leibniz* cũng đi tìm lời giải trong nhiều năm liền, nhưng cũng không thu được bất kỳ kết quả nào.

EULER THAM GIA VÀO CUỘC ĐUA

Leonard Euler (1707 – 1786) cũng sinh ra ở Basel. Điều thú vị là bố của ông biết *Johann Bernulli*. Khi *Euler* 14 tuổi, ông mời *Johann* dạy con mình toán học. *Johann* đồng ý một cách bất đắc dĩ, nhưng sau đó nhanh chóng nhận ra rằng: học trò mới của ông vượt trội hơn so với tất cả những người khác. Rất nhanh sau đó, vai trò được trao đổi: *Johann* phải học chính *Euler*. *Johann* khuyên cha của *Euler* từ bỏ ý định nuôi dưỡng *Euler* thành bộ trưởng, và thay vào đó là trở thành nhà toán học. Và cũng nhờ uy tín của ông mà người cha đã đồng ý.

Sau một vài năm, *Euler* giữ chức sắc trong Viện Hàn lâm Saint-Peterburg, nước Nga. Chính tại nơi đây, vào năm 1734, *Euler* tìm ra lời giải bài

toán Basel. Kết quả là ngay lập tức, ông được coi là nhà toán học hàng đầu của Châu Âu.

LỜI GIẢI

Đầu tiên ta xem xét phương trình đại số với số mũ được giả định là bằng bốn như sau

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

Giả sử rằng, nghiệm của nó là b, c, d và e . Khi đó, ta có thể phân tích đa thức thành các nhân tử tuyến tính như sau:

$$(b-x)(c-x)(d-x)(e-x)=0.$$

Nếu không có nghiệm nào bằng không, ta có thể viết lại dưới dạng sau

$$\frac{(b-x)(c-x)(d-x)(e-x)}{bcde} = \left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{x}{c}\right)\left(1-\frac{x}{d}\right)\left(1-\frac{x}{e}\right)=0.$$

Tiếp theo, chúng ta có đa thức với bậc vô cùng như sau:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Những chuỗi đặc biệt như trên được công bố bởi *Newton*, ta cũng có thể dễ dàng thu được khai triển trên bằng công cụ giải tích. Ở đây, ta sẽ coi nó là mặc nhiên đúng. Chúng ta đã biết rằng, hàm $\sin x$ có các nghiệm là $0, \pm\pi, \pm2\pi \dots$ Ý tưởng đầu tiên của *Euler* là: ta có thể khai triển thành nhân tử đối với đa thức có bậc vô cùng

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right) \times \left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right) \times \dots$$

Để ý rằng mỗi cặp nhân tử có thể rút gọn lại theo hằng đẳng thức đáng nhớ:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Vì thế ta có thể viết lại

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

Tiếp đó, Euler coi rằng: tổng vô hạn bằng tích vô hạn!? (Hãy chú ý tới các mẫu số trong tích trên: chúng chứa bình phương của các số tự nhiên và cho ta liên tưởng tới tổng các bình phương nghịch đảo).

Mặc dù tích chứa vô hạn các nhân tử, nhưng ta vẫn có thể làm rõ được hệ số nào đứng trước mỗi lũy thừa của x . Ta có thể xem xét qua ví dụ cụ thể là tích hữu hạn sau

$$(a+b)(c+d)(e+f) = ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf.$$

Mỗi số hạng trong tổng thu được sau khi phá ngoặc: ví dụ như ace bằng tích các số hạng đứng bên trái trong mỗi dấu ngoặc. Và Euler phát hiện ra rằng: trong tích vô hạn trên, số hạng chứa x^2 bằng

$$\left(-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \dots\right) \left(\frac{1}{\pi^2}\right) x^2.$$

Thêm vào đó, tích vô hạn bằng tổng vô hạn của

$$\frac{\sin x}{x}, \text{ nên hệ số của } x^2 \text{ là } -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

Cho hai biểu thức của hệ số bằng nhau và cùng nhân với $-\pi^2$ ta thu được:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1,644934066848...$$

Như vậy sau 90 năm, bài toán được giải và nó là một trong những kết quả kỳ lạ và rất đỗi ngạc nhiên của toán học. Chúng ta liên hệ số π với đường tròn, thế nhưng trong bài toán Basel thì lại với chuỗi các bình phương nghịch đảo. Có lẽ đây cũng là một trong những lý do làm hàm $\sin x$ khác biệt trong lượng giác? Khi Johann

Bernulli nhìn thấy lời giải của Euler, ông đã phải thốt lên "Giá mà anh trai tôi còn sống để được chiêm ngưỡng nó". Có lẽ, tâm hồn Johann đã nhẹ nhõm đi nhiều cùng năm tháng.

Không chỉ dừng lại ở đây, trong công trình lịch sử của mình, bằng phương pháp tương tự, Euler đã chỉ ra rằng:

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945}.$$

Một câu hỏi tự nhiên xuất hiện: Thế còn đối với các bậc lẻ của các số tự nhiên thì sao?

Phương pháp nói trên không thể áp dụng được đối với các bậc lẻ. Trong suốt cuộc đời mình Euler đã nhiều lần thử tìm tổng của các chuỗi này, nhưng không đi đến kết quả nào. Cuối cùng, ông chỉ nói "bài toán khó". Khi mà Euler đã nói là bài toán khó, thì các nhà toán học thông thường có lẽ cũng không nên bận tâm tới việc đi tìm lời giải của nó. Và tất nhiên, cho tới ngày hôm nay, hơn 200 năm trôi qua, các tổng này vẫn chưa được tìm ra.

HỆ QUẢ

Những người có tư tưởng thực tế có thể đưa ra câu hỏi: phải chăng bao nhiêu công sức đổ ra để giải các bài toán trên nhưng lại không đem đến ứng dụng thực tế nào? Câu trả lời đơn giản là: Bài toán trên xuất hiện trong lý thuyết số và trong lý thuyết này những câu hỏi tương tự không hề xuất hiện. Câu trả lời ít khiếm nhã hơn có thể là: Lý thuyết số đôi khi cũng có con đường riêng trong thế giới thực. Một ví dụ tốt có thể lấy là định lý Fermat (được đưa ra năm 1640) và được biết đến với cái tên: Định lý Ferma nhỏ. Dựa trên kết quả của định lý này

người ta xây dựng thuật toán mã hóa thông tin và được áp dụng trong Internet để truyền thông tin mật: ví dụ như số của thẻ điện tử. Không có thuật toán này thì không thể có thương mại điện tử.

Quay lại bài toán về tổng bình phương các nghịch đảo: sau này nó có mối liên hệ mật thiết với giả thuyết Riemann – cho tới ngày hôm nay nó vẫn là một trong những giả thuyết quan trọng mà chưa được giải đáp. Giả thuyết này được đưa ra vào năm 1859. Nó được coi là đúng nhưng vẫn chưa có ai có thể chứng minh được. Chúng ta cần một *Leonard Euler* mới.

PHỤ CHƯƠNG. TÍNH PHÂN KỲ CỦA CHUỖI ĐIỀU HÒA

Như chúng ta đã nói ở trên, chuỗi điều hòa là

$$\text{chuỗi } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Jacob Bernulli đã chứng minh được rằng: đây là tổng vô hạn. *Jacob* nhận thấy rằng có thể tách chuỗi điều hòa thành các nhóm như sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = (1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{5^2}\right) + \dots$$

Giá trị của tổng trong mỗi dấu ngoặc đều lớn hơn hoặc bằng một. Và như vậy có nghĩa là tổng của chuỗi điều hòa là vô cùng lớn, vì nó bằng tổng của vô hạn các số đều lớn hơn hoặc bằng một (số các dấu ngoặc và vô cùng lớn). Để chứng minh rằng tổng trong mỗi dấu ngoặc đều lớn hơn hoặc bằng một, ta xét riêng một trường hợp

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{k^2}.$$

Số các số hạng trong nhóm trên là $k^2 - k$ và số hạng bé nhất là số hạng cuối. Ta có:

$$(k^2 - k) \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{k^2}$$

hay là

$$1 - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{k^2}.$$

Thêm cả hai vế vào $\frac{1}{k}$, ta thu được kết quả cần chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Дербишир, Джон*. Простая одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике. – Астрель, 2010. – С. 90–92, 103–109. – 464 с. – ISBN 978-5-271-25422-2.
2. Leonhard Euler biography. Проверено 16 апреля 2016.
3. *Пойа, Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. – Изд. 2-е, исправленное. – М.: Наука, 1975. – С. 40.
4. E41 -- De summis serierum reciprocarum. Проверено 17 апреля 2016.
5. *Наварро, Хоакин*. До предела чисел. Проверено 10 августа 2016.
6. История математики, том III, 1972, с. 337.
7. Антонио Дуран, 2014, с. 109.
8. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. – М.: ГИФМЛ, 1960. – С. 143–144. – 468 с.
9. Кохась К. П., 2004.
10. Фихтенгольц Г. М., 1966.
11. *Cauchy A. L.* Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. – Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. – 576 p.
12. *Терещенко И. В.* Базельская задача i. Метод Коши и его обобщение для вычисления сумм чисел обратных четвертой степени // Научные труды КубГТУ. – 2014. – № №2.
13. Robin Chapman.
14. *Жуков А. В.* Вездесущее число «пи». – 2-е изд. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – С. 145. – 216 с. – ISBN 978-5-382-00174-6.
15. Leonhard Euler, Institutiones calculi integrals

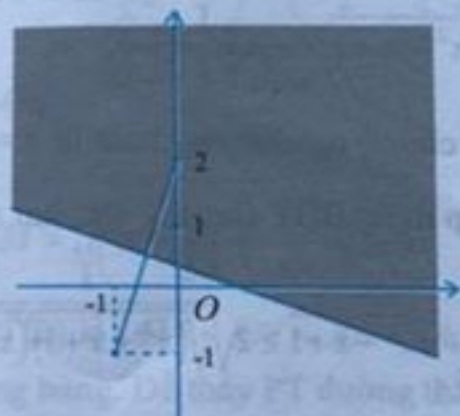
TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 57

Problem. Find the locus of the points representing the complex numbers z satisfying $|z + 1 + i| > |z - 2i|$.

Solution. We know that $|z + 1 + i| = |z - (-1 - i)|$ is the distance from the point representing z to the point representing $-1 - i$ which is $(-1; -1)$.

Similarly $|z - 2i|$ is the distance from the point representing z to the point representing $2i$ which is $(0; 2)$.



So the locus of the points representing the complex numbers z satisfying $|z + 1 + i| > |z - 2i|$ is the open half plane determined by the perpendicular bisector to the line segment connecting $(-1; -1)$ and $(0; 2)$ which contains the point $(0; 2)$.

TỪ VỰNG

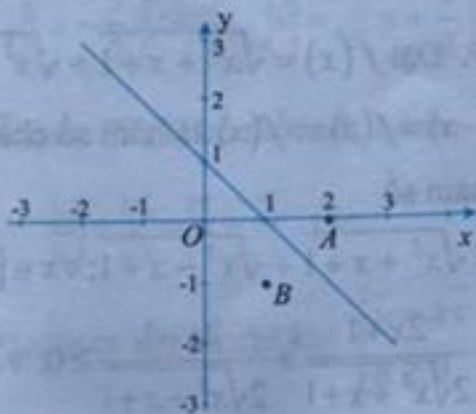
locus	: quỹ tích
represent	: biểu diễn
perpendicular bisector	: đường trung trực
half plane	: nửa mặt phẳng xác định bởi một đường
line segment	: đoạn thẳng

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

BÀI DỊCH SỐ 54

Bài toán. Tìm quỹ tích những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = |z - 2|$.

Lời giải.



Chúng ta biết rằng $|z - 1 + i| = |z - (1 - i)|$ là khoảng cách từ điểm biểu diễn số phức z đến điểm biểu diễn số phức $1 - i$, điểm này có tọa độ là $(1; -1)$.

Tương tự $|z - 2|$ là khoảng cách từ điểm biểu

diễn số phức z đến điểm biểu diễn 2, điểm này có tọa độ $(2; 0)$. Vì vậy quỹ tích những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn

$|z - 1 + i| = |z - 2|$ là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm $(1; -1)$ và $(2; 0)$.

(Bạn có thể viết phương trình của đường thẳng đó không?).

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Trần Trung Phúc**, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; **Đỗ Ngọc Tiến**, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; **Lê Mỹ Duyên**, 11Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**; **Nguyễn Thị Bảo Ngọc**, 11Toán 1, **Hồ Ngọc Hùng**, 11Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; **Võ Hoàng Khôi Nguyên**, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

HỒ HẢI (Hà Nội)



BÀI TOÁN 37. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = 2 \quad (1).$$

Lời giải. Do $\begin{cases} x^2+x+1 > 0 \\ x^2-x+1 > 0 \end{cases}; \forall x \in \mathbb{R}$ nên tập xác định của phương trình là $\mathbb{R}$.

Cách 1. Bình phương hai vế của (1) ta được:

$$\begin{aligned} 2(x^2+1) + 2\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} &= 4 \\ \Leftrightarrow (x^2+1) + \sqrt{[(x^2+1)+x][(x^2+1)-x]} &= 2 \\ \Leftrightarrow (x^2+1) + \sqrt{x^4+x^2+1} &= 2. \end{aligned}$$

Ta có: $\begin{cases} x^2+1 \geq 1; \forall x \in \mathbb{R} \\ x^4+x^2+1 \geq 1; \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

nên $(x^2+1) + \sqrt{x^4+x^2+1} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=0$. Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Cách 2. Sử dụng hằng đẳng thức:

$$a^2+b^2 = (a-b)^2 + 2ab; \forall a, b \in \mathbb{R}$$

với $a = \sqrt[4]{x^2+x+1}; b = \sqrt[4]{x^2-x+1}$ ta có:

$$VT(1) = (\sqrt[4]{x^2+x+1} - \sqrt[4]{x^2-x+1})^2 + 2\sqrt[4]{x^4+x^2+1} \geq 2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt[4]{x^2+x+1} - \sqrt[4]{x^2-x+1})^2 = 0 \\ \sqrt[4]{x^4+x^2+1} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x^2+x+1} = \sqrt[4]{x^2-x+1} \\ x^4+x^2+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Cách 3. Ta có

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \sqrt{[(x^2+1)+x][(x^2+1)-x]} = \sqrt{x^4+x^2+1} \geq 1. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra: $\sqrt{x^2-x+1} \geq \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Do đó: $VT(1) \geq \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \stackrel{BĐT Cauchy}{\geq} 2.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \\ \sqrt{x^2-x+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Cách 4. Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} &\geq 2\sqrt{\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}} \\ &\geq 2\sqrt{[(x^2+1)+x][(x^2+1)-x]} = 2\sqrt{x^4+x^2+1} \geq 2. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2-x+1} \\ \sqrt[4]{x^4+x^2+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Cách 5. Đặt $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$, ta thấy $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Ta xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}; \forall x \in [0; +\infty) \text{ có:}$$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \geq 0; \forall x \in [0; +\infty).$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		2	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

$f(x) \geq 2; \forall x \in [0; +\infty); f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 0$.
 Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Cách 6. Ta có: $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$
 $= \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$.

PT(1) có thể viết lại thành:

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2 \quad (2)$$

Trong hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy ta

chọn các điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); M(x; 0)$.

Khi đó: $AM = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$;

$$BM = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}; AB = 2.$$

Do đó, PT(2) là $AM + BM = AB \Rightarrow A; B; M$ là ba điểm thẳng hàng. Dễ thấy PT đường thẳng AB có dạng $\sqrt{3}x - y = 0$. Do $A; B; M$ thẳng hàng nên ta có $x = 0$. Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Cách 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , chọn hai vector: $\vec{u} = \left(-x + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \vec{v} = \left(x + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ta có: $|\vec{u}| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}; |\vec{v}| = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$;

$|\vec{u} + \vec{v}| = 2$. Khi đó PT(2) có thể viết thành:

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}| \quad (3).$$

Mặt khác (3) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \vec{u} = k\vec{v} \\ k \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{1}{2} = k\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = k \frac{\sqrt{3}}{2} \\ k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

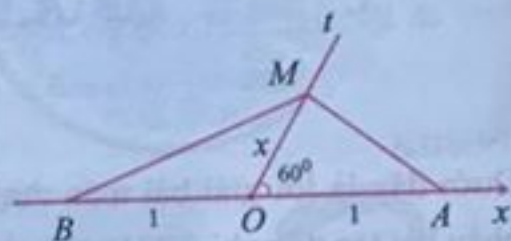
Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Cách 8. Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$ ta thấy $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$. Ta xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}; \forall x \in [0; +\infty).$$

Trên tia Ox

lấy điểm A ,
 trên tia đối
 của tia Ox lấy
 điểm B sao



cho $OA = OB = 1$. Trên tia Ot tạo với tia Ox một góc bằng 60° ta lấy điểm M và đặt $OM = x$. Áp dụng định lý hàm số cosin trong $\triangle OAM$ và $\triangle OBM$ ta có: $MA^2 = x^2 + x + 1; MB^2 = x^2 - x + 1$. Do đó, PT(1) là $AM + BM = AB$. Điều này chỉ xảy ra khi $M = O$, tức là $x = 0$.

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 0$.

BÙI TRUNG HIẾU.

(GV THPT Trần Hưng Đạo, Tứ Kỳ, Hải Dương)

Nhận xét. Ngoài 8 cách giải của bạn Bùi Trung Hiếu, Tòa soạn xin hoan nghênh các bạn sau cũng đóng góp nhiều cách giải cho bài toán này: **Hà Nội:** Lê Ngọc Tùng, 9A, THCS Nguyễn Trục, Thanh Oai, **Trần Quốc Hội**, GV THCS Tự Lập, Mê Linh; **Nghệ An:** Trần Ngọc Cường, GV THPT Mường Quạ, Con Cuông; **Gia Lai:** Cao Hải Vân, GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku;

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải **BÀI TOÁN 39** dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.7.2020.

BÀI TOÁN 39. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ không chứa A . Vẽ đường tròn tâm O' qua A, D . Đường tròn này cắt AB tại E (E khác A, B), cắt AC tại G (G khác A, C). Gọi trung điểm của BC , EG theo thứ tự là H, K . Chứng minh rằng KH vuông góc với AD .

TRẦN THANH HƯNG

(GV THCS Võ Trĩ, Tuy An, Phú Yên)



Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 514, T4.2020.

Bài 45 (π in the sky, issue 20, 2017). Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn

$$3x + y + 2z \geq 3 \text{ và } -x + 2y + 4z \geq 5.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $7x + 5y + 10z$.

Lời giải. Với A, B là hai số thực dương, ta có:

$$A(3x + y + 2z) + B(-x + 2y + 4z) \geq 3A + 5B$$

$$\Leftrightarrow (3A - B)x + (A + 2B)y + (2A + 4B)z \geq 3A + 5B.$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} 3A - B = 7 \\ A + 2B = 5 \\ 2A + 4B = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{19}{7} \\ B = \frac{8}{7} \end{cases} \text{ thì bất đẳng thức}$$

trên có thể viết dưới dạng $7x + 5y + 10z \geq \frac{97}{7}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $7x + 5y + 10z$ là $\frac{97}{7}$.

Nhận xét. Những bạn tham gia giải bài đều có cách giải tương tự như lời giải trên. Xin hoan nghênh các bạn giải đúng bài này: **Thanh Hóa:** Nguyễn Đại Dương, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa, Nguyễn Hoàng Long, 7B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phan Trung Kiên, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Quảng Bình:** Đặng Hoàng Duy, 10T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** Lê Nguyễn Quỳnh Anh, 10 Toán 2, Nguyễn Đức Phát, Nguyễn Thị Minh Phúc, 11 Toán 2, Nguyễn Đăng Khánh Toàn, 11 Toán 1, THPT chuyên

Quốc học Huế; **Hà Nội:** Lê Ngọc Tùng, 9A, THCS Nguyễn Trữ, Thanh Oai. **Đồng Tháp:** Phạm Hữu Đăng, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu.

NHƯ HOÀNG (Hà Nội)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.7.2020.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 47. Cho ba số thực dương a, b, c và $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \right) \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{3}}.$$

NGÔ VĂN THÁI

(Tổ 34, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)



BÁC HỒ

(Bài thơ xương)

Tha thiết cầu đời, Bác xuất dương
Xa xôi muôn dặm, một con đường
Mặt mừng biển Á trong mưa gió
Thăm thẳm trời Âu giữa tuyết sương
Trịnh trọng Tuyên ngôn mong nước thịnh
Lung linh Di chúc ước dân cường
Dặn dò hậu thế lời tâm huyết
Tận tụy quên mình, sáng tựa gương.

NGUYỄN DUY NAM

(Tổ 1, khối 12, Quỳnh Xuân, Hoàng Mai, Nghệ An)



GIẢI ĐÁP: ĐÚNG HAY SAI?

(Đề đăng trên TH&TT số 512, tháng 2 năm 2020)

Phân tích. Để $F = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ thì ở cả hai bất đẳng

thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ và $20x^2 - 48x + 36 \geq \frac{36}{5}$

cùng phải trở thành đẳng thức. Đẳng thức ở $20x^2 - 48x + 36 \geq \frac{36}{5}$ xảy ra khi $x = \frac{6}{5}$. Đẳng

thức ở $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng. Mà $\vec{u} = (x; 2x - 1)$, $\vec{v} = (x; 2x - 5)$, nên $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng khi và chỉ khi $2x - 1 = 2x - 5$

(vô nghiệm). Do đó $F > \frac{6\sqrt{5}}{5}, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ

$\frac{6\sqrt{5}}{5}$ không phải giá trị nhỏ nhất của F .

Lời giải đúng. Từ $2x - y = 2$ suy ra $y = 2x - 2$.

Ta có: $F = \sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$.

$$= \sqrt{\left(\sqrt{5}x - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{\left(\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}\right)^2 + 5}.$$

$$\text{Chọn } \vec{u} = \left(\sqrt{5}x - \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \vec{v} = (2\sqrt{5} - \sqrt{5}x; \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \left(2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}; \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

$$F = \sqrt{\left(\sqrt{5}x - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{\left(\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}\right)^2 + 5}$$

$$= |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5}x - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot 5 = 2\sqrt{5} - \sqrt{5}x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } \min F = 2\sqrt{5}, \text{ đạt được khi } x = \frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}.$$

Nhận xét. Hoan nghênh bạn Ngô Văn Minh Thắng, 12 Toán1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHI VI

THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY!



Trong tiết Đại số ở lớp 12A, Thầy giáo ra đề bài:

Bài toán. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục tung của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y^3 - x^2 - y^2 = 0$ trong miền $x \geq 0$, trục tung và đường thẳng $y = 2$.

Bạn Như Hà xung phong lên bảng trình bày lời giải như sau:

$$\text{Ta có: } y^3 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^3 - y^2.$$

Giải phương trình tung độ giao điểm giữa (C) với trục tung: $y^3 - y^2 = 0$ dễ dàng tìm được hai giao điểm là $y = 0$ và $y = 1$. Vậy thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_0^1 (y^3 - y^2) dy + \pi \int_1^2 (y^3 - y^2) dy$$

$$= \pi \int_0^2 (y^3 - y^2) dy$$

thì

$$= \pi \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} \pi.$$

Em hãy cho biết lời giải của bạn Như Hà đúng hay sai, nếu sai thì lời giải của em thế nào!

VŨ NGUYỄN DUY

(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang)



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên
NXBGD Việt Nam

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập
NXBGD Việt Nam

PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, TS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ,
TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, TS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT,
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHÁC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯƠNG,
TS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, TS. VŨ KIM THÚY, PGS. TS. VŨ
DƯƠNG THUY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Nguyễn Anh Tuấn – Một bài toán cơ bản có
nhiều ứng dụng.

6 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10

Trung học phổ thông chuyên Hà Nội, năm học
2019 – 2020.

8 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trung học phổ

thông chuyên Trần Phú, Hải Phòng, năm học
2019 – 2020.

9 Chuẩn bị cho kỳ thi THPT Quốc gia

Lê Thế Thống – Khai thác một tính chất đơn
giản của nguyên hàm, tích phân.

16 Lịch sử toán học

Nguyễn Thúy Thanh – Al-Khorezmi, nhà toán
học lỗi lạc thời trung cổ

19 Bạn đọc tìm tòi

Dương Văn Duy – Ứng dụng một công thức tổ
hợp.

20 Đề ra kỳ này

T1/516, ..., T12/516, L1/516, L2/516.

Problem in This Issue

23 Giải bài kì trước

T1/511, ..., T12/511, L1/511, L2/511.

Solutions to Previous Problems

33 Phương pháp giải toán

Nguyễn Thế Anh – Một số cách giải quyết bài
toán phương trình hàm, bất phương trình hàm
vô nghiệm.

39 Bạn có biết

Hoàng Ngự Huân – Tổng các bình phương
nghịch đảo (Bài toán Basel).

43 Tiếng Anh qua các bài toán – Bài số 57

Bài dịch số 54.

44 Nhiều cách giải cho một bài toán

46 Du lịch thế giới qua các bài toán hay

47 Sai lầm ở đâu?

NỀN TẢNG SÁCH GIÁO KHOA ĐIỆN TỬ VÀ TẬP HUẤN – NGUỒN TÀI LIỆU HỖ TRỢ TÍCH CỰC CHO GIÁO VIÊN DẠY HỌC THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SÁCH GIÁO KHOA MỚI

Từ tháng 2/2020, nhằm phục vụ và hỗ trợ kịp thời nhu cầu tìm và lựa chọn sách giáo khoa lớp 1 mới của các nhà quản lý, giáo viên trên cả nước, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã công bố phiên bản điện tử của 4 bộ sách giáo khoa lớp 1 (gồm *Kết nối tri thức với cuộc sống*, *Chân trời sáng tạo*, *Cùng học để phát triển năng lực*, *Vì sự bình đẳng và dân chủ trong giáo dục*). Đây cũng là nguồn tư liệu hữu ích giúp các bậc phụ huynh và các em học sinh tham khảo, làm quen với nội dung sách mới, chuẩn bị tâm thế sẵn sàng bước vào năm học đầu tiên thực hiện chương trình và sách giáo khoa mới.

Nền tảng sách điện tử của NXBGDVN có tên gọi **Hành trang số** được xây dựng với các tính năng: Cung cấp phiên bản sách điện tử với những công cụ trải nghiệm sách online nhằm hỗ trợ tích cực việc dạy và học, qua đó phát huy toàn diện tiềm năng của các bộ SGK; Cung cấp kho học liệu và bài tập bổ trợ phục vụ việc tự học của học sinh và soạn giáo án, bài giảng của giáo viên; Cung cấp mô hình lớp học trực tuyến phục vụ việc quản trị lớp học, khai thác tối ưu những thế mạnh của việc áp dụng công nghệ thông tin trong đổi mới phương pháp dạy học, quản trị lớp học và đánh giá năng lực học sinh. Để tiếp cận với sách giáo khoa điện tử của NXBGDVN, bạn đọc có thể truy cập theo địa chỉ: <http://nxbgd.vn/sachdientu> hoặc <http://hanhtrangso.nxbgd.vn> để chọn bộ sách, tên sách cần đọc.

Song hành cùng nền tảng sách điện tử **Hành trang số**, NXBGDVN đã xây dựng nền tảng **Tập huấn**, bao gồm các phiên bản điện tử của SGK, SGV; các tài liệu thuyết minh SGK; các slide và video bài giảng tập huấn giáo viên của tác giả sách; các video tiết học minh họa; giải đáp các câu hỏi thường gặp; các bài tập để giáo viên tự kiểm tra, đánh giá kết quả tập huấn; phần hướng dẫn sử dụng, khai thác các tài liệu trên trang Hành trang số và Tập huấn của NXBGDVN. Ngoài ra, người dùng còn có thể tham gia trao đổi ý kiến, kinh nghiệm giảng dạy-học tập theo từng môn; đặt câu hỏi và

nhận câu trả lời từ những người tham gia biên soạn sách. Để khai thác nguồn tài nguyên hữu ích trên, mời bạn đọc truy cập địa chỉ: <http://nxbgd.vn/taphuan>.

Với các câu hỏi cần giải đáp và góp ý liên quan đến SGK mới của NXBGDVN, giáo viên có thể gửi e-mail theo địa chỉ: hoidapsgk@nxbgd.vn.

NXBGDVN đang tiếp tục hoàn thiện các nội dung trên trang **Hành trang số** và **Tập huấn**, nhằm tạo ra những sản phẩm hỗ trợ tích cực và hiệu quả nhất, đồng hành cùng giáo viên và các em học sinh trong năm học 2020-2021 và những chặng đường tiếp theo.



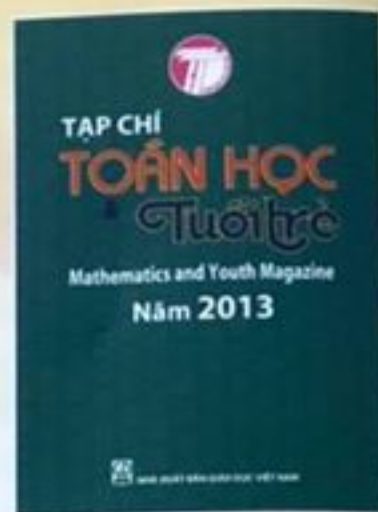
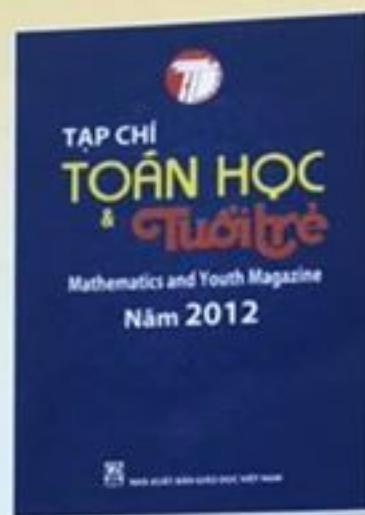
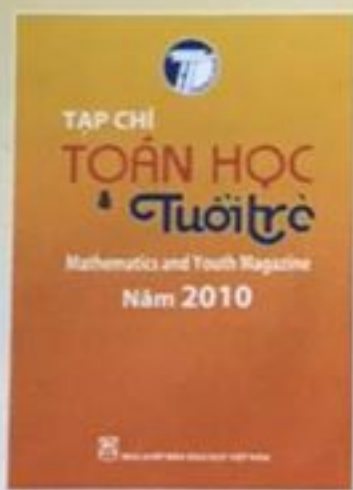


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

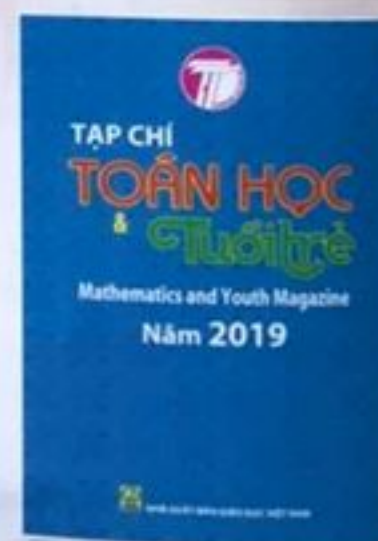
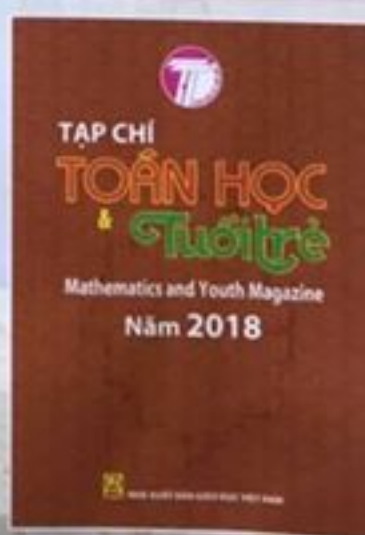
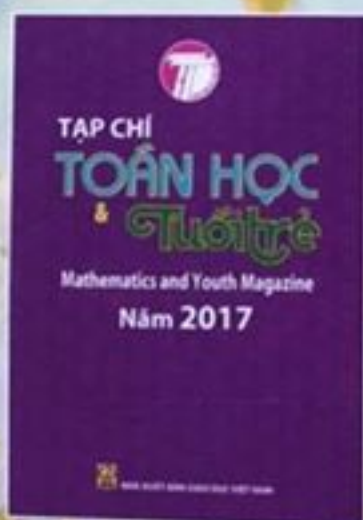
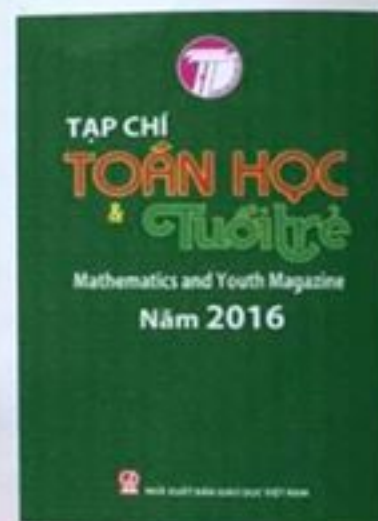
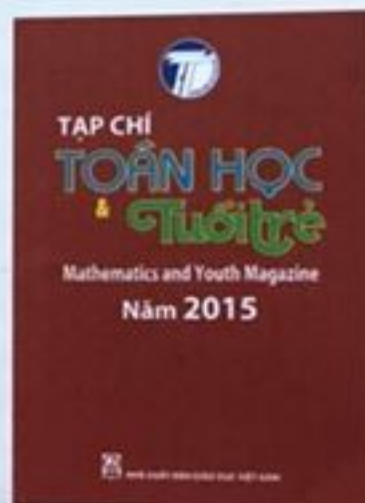
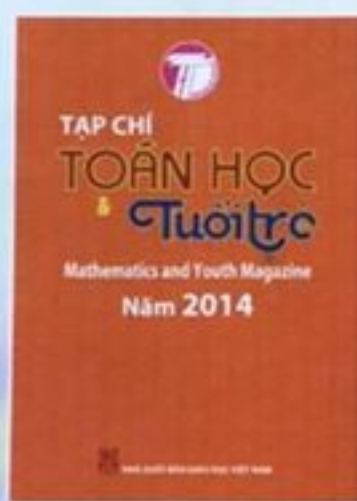
Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

• Điện thoại: 024.35121606 – 024.35121607 • Email: toanhocvatuoi@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT6M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xi nghiệp Bàn đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2020

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng