TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

8 2020
Số 518

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

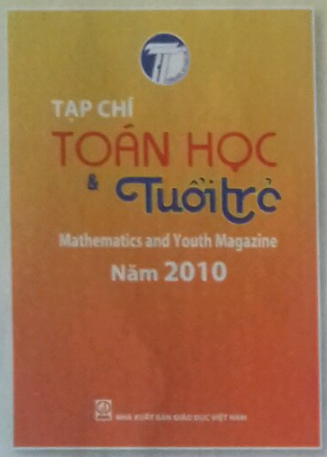
Lễ tuyên dương thành tích học sinh Việt Nam tại IMO 1994 của Bộ Giáo dục và Đào tạo

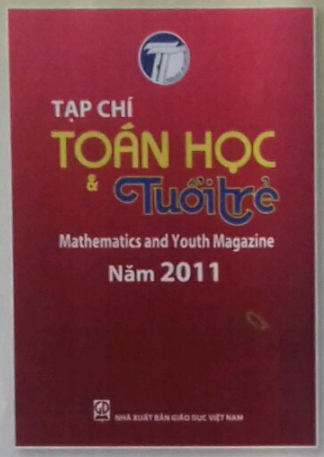
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

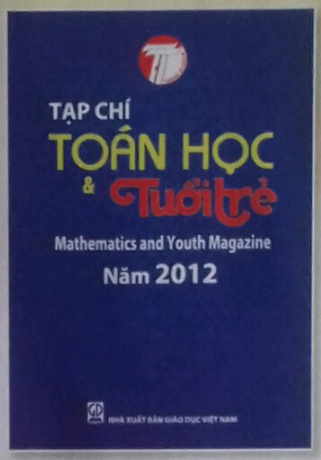
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

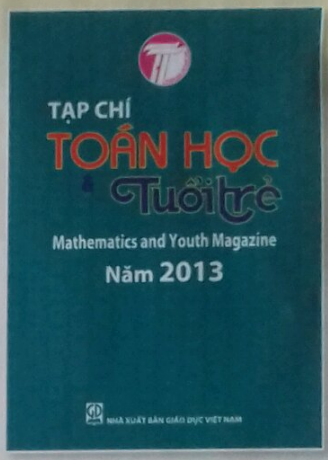
Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

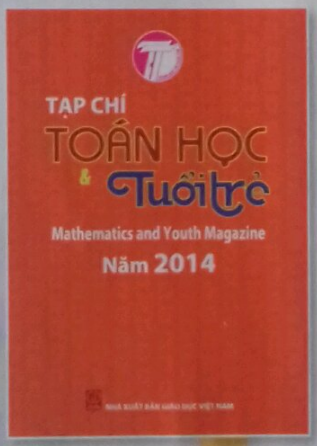


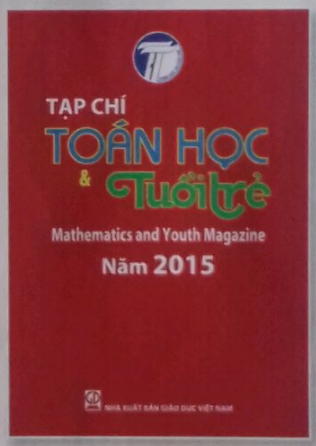


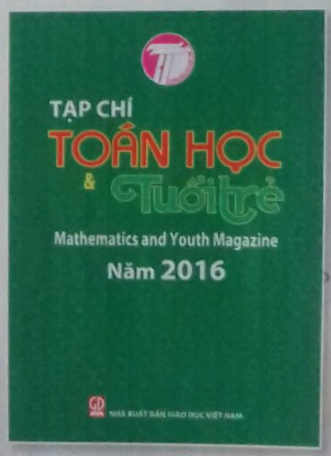


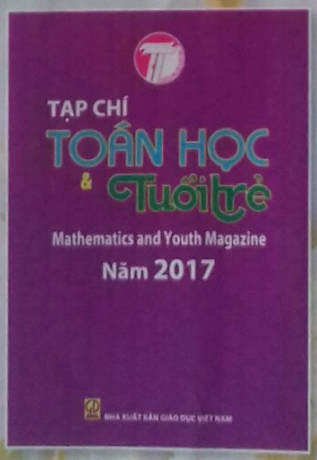


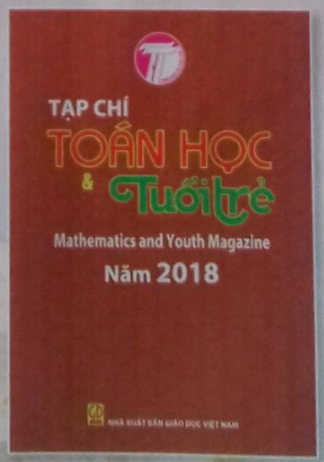
Năm 2010
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng
Năm 2011
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng
Năm 2012
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng
Năm 2013
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng
Năm 2014
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng
Năm 2015
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2016
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2017
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2018
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng
Năm 2019
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

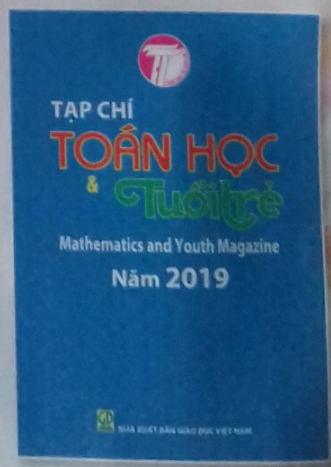










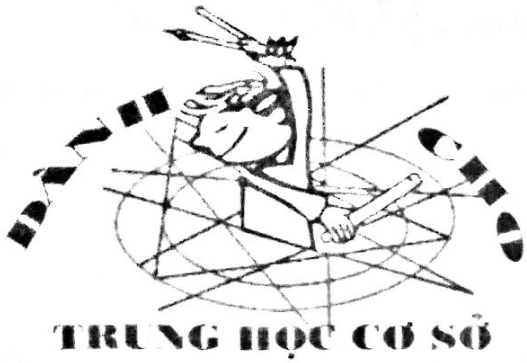


Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

• Điện thoại: 024.35121606 – 024.35121607 • Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com



KHAI THÁC MỘT SỐ BÀI TOÁN ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Hiện nay, trong các đề thi học sinh giỏi hay đề thi vào lớp 10 chuyên toán, có những bài toán về ước chung lớn nhất mang tính chất rời rạc, học sinh không biết đâu là bài toán gốc. Chẳng hạn hai bài toán "*Chứng minh rằng* $(3a+5b,8a+13b)=(a,b)$" và bài toán "*Cho* $(a,b)=1$. *Chứng minh rằng phân số* $\frac{3a+5b}{8a+13b}$ *tối giản*". Thật ra hai bài toán này có mối liên hệ với nhau và có chung một phương pháp giải. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ đưa ra một số bài toán như vậy về ước chung lớn nhất và khai thác thêm một số bài toán liên quan. Cũng trong phạm vi bài viết này ta quy ước khi nói một số nào đó mà không nói gì thêm thì ta hiểu đó là số tự nhiên.

1. Một số kiến thức về ước chung lớn nhất

• Một số nguyên d được gọi là ước chung của nhiều số $a_1,a_2,\ldots,a_n$ khi nó là ước của mỗi số đó.

• Một ước chung $d>0$ của các số $a_1,a_2,\ldots,a_n$ không đồng thời bằng 0 được gọi là ước chung lớn nhất nếu mọi ước chung khác của $a_1,a_2,\ldots,a_n$ đều là ước của d. Ký hiệu: $d=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

• Nếu 1 là ước chung lớn nhất của các số $a_1,a_2,\ldots,a_n$ thì các số $a_1,a_2,\ldots,a_n$ được gọi là nguyên tố cùng nhau.

• Tập hợp các ước chung của nhiều số trùng với tập hợp các ước của ước chung lớn nhất của các số đó.

• Ước chung lớn nhất của các số $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

• Nếu d là ước chung lớn nhất của các số $a_1,a_2,\ldots,a_n$ thì tồn tại các số nguyên $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sao cho $d=a_1x_2+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$.

• Các số $a_1,a_2,\ldots,a_n$ nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sao cho $1=a_1x_2+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$.

Nếu $(a,b)=1$ thì $(ac,b)=(c,b)$.

• Nếu $[a,b]$ là bội chung nhỏ nhất của 2 số nguyên a,b thì $[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}$.

2. Khai thác một số bài toán ước chung lớn nhất

Bài toán 1. *Cho a,b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng*

$$(3a+5b,8a+13b)=(a,b).$$

Lời giải. Đặt $d_1=(3a+5b,8a+13b)$ và $d_2=(a,b)$.

Ta có: $d_2|a$ và $d_2|b \Rightarrow d_2|(3a+5b)$, $d_2|(8a+13b)$.

Suy ra: $d_2|(3a+5b,8a+13b)\Rightarrow d_2|d_1$ (1).

Mặt khác ta có: $d_1|(3a+5b)$ và $d_1|(8a+13b)$,

suy ra: $\begin{cases} d_1|8(3a+5b) \\ d_1|3(8a+13b) \end{cases} \Rightarrow d_1|(8(3a+5b)-3(8a+13b))$

$\Rightarrow d_1|b$. Do đó $d_1|d_2$ (2).

Từ (1) và (2) ta kết luận $d_1=d_2$.

Tương tự cách giải Bài toán 1 ta có các bài toán liên quan sau:

Bài toán 1.1. *Cho a,b là hai số nguyên dương thỏa $(a,b)=1$. Chứng minh rằng phân số $\frac{3a+5b}{8a+13b}$ tối giản.*

Lời giải. Từ kết quả trên ta có:

$$(3a+5b,8a+13b)=(a,b)=1.$$

Vậy $\frac{3a+5b}{8a+13b}$ tối giản.

Bài toán 1.2. *Cho a,b là hai số nguyên dương Chứng minh $(a+cb,b)=(a,b)$.*

Lời giải. Đặt $d_1=(a+cb,b)$ và $d_2=(a,b)$.

Ta có: $\begin{cases} d_2|a \\ d_2|b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2|a \\ d_2|cb \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2|a+cb \\ d_2|b \end{cases} \Rightarrow d_2|d_1$ (1).

Mặt khác: $d_1|(a+cb,b) \Rightarrow d_1|(a+cb)$ và $d_1|b$ $\Rightarrow d_1|(a+cb)$ và $d_1|cb \Rightarrow d_1|(a+cb-cb) \Rightarrow d_1|a$.

Do đó: $d_1|d_2$ (2). Từ (1) và (2) ta kết luận $d_1=d_2$.

Bài toán 1.3. *Cho a,b là hai số nguyên dương thỏa mãn $(a,b)=1$. Chứng minh phân số $\frac{2a+b}{a(a+b)}$ tối giản.*

Lời giải. Giả sử $d=(2a+b,a(a+b))$. Ta có:

$$\begin{cases} d|(2a+b) \\ d|(a^2+ab) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|(2a^2+ab) \\ d|(a^2+ab) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d|2a^2+ab-a^2-ab \Rightarrow d|a^2.$$

Ta lại có:

$$\begin{cases} d|(2a+b) \\ d|(a^2+ab) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|(2ab+b^2) \\ d|(2a^2+2ab) \end{cases} \Rightarrow d|(b^2-2a^2).$$

Mặt khác: $d|a^2 \Rightarrow d|2a^2 \Rightarrow d|b^2-2a^2+2a^2 \Rightarrow d|b^2$.

Từ đó ta có: $d|(a^2,b^2)=1$. Vậy $d=1$.

Bài toán 1.4. *Cho hai số nguyên dương $a,b\,(a>b)$ thỏa mãn $(a-b,ab+1)=1$ và $(a+b,ab-1)=1$. Chứng minh rằng $(a^2+1,b^2+1)=1$.*

Lời giải. Đặt $d=(a^2+1,b^2+1)$. Giả sử $d>1$, gọi p là ước nguyên tố của d, suy ra: $p|(a^2+1)$ và $p|(b^2+1) \Rightarrow p|(a^2-b^2)$, do đó $p|(a-b)$ hoặc $p|(a+b)$.

Nếu $p=2$ thì a,b phải cùng tính chẵn lẻ. a và b không thể cùng lẻ vì nếu không sẽ mâu thuẫn với $(a-b,ab+1)=1$. a và b không thể cùng chẵn vì khi đó ta có mâu thuẫn: $p=2|(a^2+1)$. Vậy p là số nguyên tố lẻ.

- Nếu $p|(a-b)$ thì $p|(a^2-2ab+b^2)$, mặt khác $p|(a^2+b^2+2)$ nên $p|(2ab+2) \Rightarrow p|(ab+1)$, mâu thuẫn với $(a-b,ab+1)=1$.

- Nếu $p|(a+b)$ thì $p|(a^2+2ab+b^2)$, mặt khác $p|(a^2+b^2+2)$ nên $p|(2ab-2) \Rightarrow p|(ab-1)$, mâu thuẫn với $(a+b,ab-1)=1$.

Những mâu thuẫn đó chứng tỏ $d=(a^2+1,b^2+1)=1$.

Bài toán 2. *Tìm tất cả các cặp số tự nhiên a,b thỏa mãn điều kiện $[a,b]=2496$ và $(a,b)=24$.*

Lời giải. Do vai trò a,b như nhau nên giả sử $a\le b$. Đặt $d=(a,b)$. Ta có: $a=a_1d$, $b=b_1d$ trong đó $a_1,b_1\in\mathbb{N}$, $a_1\le b_1$ và $(a_1,b_1)=1$.

Ta có: $[a,b]=2496 \Leftrightarrow \frac{ab}{(a,b)}=2496$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1b_1d^2}{d}=2496 \Leftrightarrow a_1b_1=\frac{2496}{24}=104.$$

Ta có hệ: $\begin{cases} a_1b_1=104 \\ a_1\le b_1 \\ (a_1,b_1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ b_1=104 \end{cases} \vee \begin{cases} a_1=8 \\ b_1=13 \end{cases}.$

Vậy có 4 cặp số tự nhiên (a; b) cần tìm là:

$(a,b)\in\{(24,2496),(192,312),(2496,24),(312,192)\}.$

Tương tự cách giải Bài toán 2 ta giải được các bài toán liên quan sau

Bài toán 2.1. *Tìm tất cả các cặp số tự nhiên a,b thoả mãn điều kiện $ab=8400$ và $(a,b)=20$.*

Lời giải. Tương tự như trên, từ $ab=8400 \Leftrightarrow d^2a_1b_1=8400 \Leftrightarrow a_1b_1=\frac{8400}{d^2}=21.$

Ta có: $\begin{cases} a_1b_1=21 \\ a_1\le b_1 \\ (a_1,b_1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ b_1=21 \end{cases} \vee \begin{cases} a_1=3 \\ b_1=7 \end{cases}$

Vậy có 4 cặp số tự nhiên (a; b) cần tìm là:

$(a,b)\in\{(20,420),(60,140),(420,20),(140,60)\}.$

Bài toán 2.2. *Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (a; b) thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2=468$ và $[a,b]+(a,b)=42$.*

Lời giải. Tương tự như trên, từ $a^2+b^2=468$ suy ra $d^2\left(a_1^2+b_1^2\right)=468.$

Từ $[a,b]+(a,b)=42 \Rightarrow \frac{ab}{d}+d=42 \Leftrightarrow da_1b_1+d=42$

$\Leftrightarrow d(a_1b_1+1)=42 \Rightarrow d|42.$

- Với $d=1$ ta có hệ $\begin{cases} a_1b_1=41 \\ a_1^2+b_1^2=468 \\ a_1\le b_1 \end{cases}$ vô nghiệm.

- Với $d=2$ ta có hệ $\begin{cases} a_1b_1=20 \\ a_1^2+b_1^2=117 \\ a_1\le b_1 \end{cases}$ vô nghiệm.

- Với $d=3$ ta có hệ $\begin{cases} a_1b_1=13 \\ a_1^2+b_1^2=52 \\ a_1\le b_1 \end{cases}$ vô nghiệm.

- Với $d=6$ ta có hệ $\begin{cases} a_1b_1=6 \\ a_1^2+b_1^2=13 \\ a_1\le b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=2 \\ b_1=3 \end{cases}.$

- Với $d=7$ ta có hệ $\begin{cases} a_1b_1=5 \\ a_1^2+b_1^2=\frac{468}{49} \\ a_1\le b_1 \end{cases}$ vô nghiệm.

- Với $d=14$ ta có hệ $\begin{cases} a_1b_1=2 \\ a_1^2+b_1^2=\frac{468}{196}\notin\mathbb{Z} \\ a_1\le b_1 \end{cases}$ vô nghiệm.

- Với $d=21$ ta có hệ $\begin{cases} a_1b_1=1 \\ a_1^2+b_1^2=\frac{468}{441}\notin\mathbb{Z} \\ a_1\le b_1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy có 2 cặp số cần tìm $(a,b)\in\{(12,18),(18,12)\}.$

Bài toán 3. *Giả sử m và n là các số nguyên dương, a là số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng: $\left(a^n-1,a^m-1\right)=a^{(m,n)}-1.$*

Lời giải. Đặt $d_1=\left(a^n-1,a^m-1\right)$, $d_2=(m,n)$. Ta chứng minh rằng $d_1=a^{d_2}-1$.

Ta có: $\left(a^{d_2}-1\right)|\left(a^m-1\right)$ và $\left(a^{d_2}-1\right)|\left(a^n-1\right)$.

Suy ra $\left(a^{d_2}-1\right)|d_1$ (1).

Do $d_2=(m,n)$ nên tồn tại $x,y\in\mathbb{Z}$ sao cho

$$mx-ny=d_2.$$

Vì $\begin{cases} d_1|\left(a^m-1\right) \\ d_1|\left(a^n-1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1|\left(a^{mx}-1\right) \\ d_1|\left(a^{ny}-1\right) \end{cases}$ nên ta có:

$$d_1 \mid \left(a^{mx} - a^{ny}\right) \Rightarrow d_1 \mid a^{ny}\left(a^{mx-ny} - 1\right)$$

Mặt khác $(d_1, a) = 1$ nên $\left(d_1, a^{ny}\right) = 1$, suy ra:

$$d_1 \mid \left(a^{mx-ny} - 1\right) \text{ hay } d_1 \mid \left(a^{d_2} - 1\right) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $d_1 = a^{d_2} - 1$.

Áp dụng kết quả Bài toán 3 ta giải được các bài toán sau

Bài toán 3.1. *Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho $2^n - 2$ chia hết cho n. Hãy tìm ước chung lớn nhất của $2^{2^n-1} - 2$ và $2^n - 1$.*

Lời giải. Ta có:

$$\left(2^{2^n-1} - 2, 2^n - 1\right) = \left(2\left(2^{2^n-2} - 1\right), 2^n - 1\right).$$

Do $\left(2, 2^n - 1\right) = 1$ nên

$$\left(2^{2^n-1} - 2, 2^n - 1\right) = \left(2\left(2^{2^n-2} - 1\right), 2^n - 1\right)$$

$$= \left(2^{2^n-2} - 1, 2^n - 1\right) = 2^{\left(2^n-2, n\right)} - 1.$$

Theo giả thiết $2^n - 2$ chia hết cho n nên $\left(2^n - 2, n\right) = n$. Vậy $\left(2^{2^n-1} - 2, 2^n - 1\right) = 2^n - 1$.

Bài toán 3.2. *Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng mọi ước nguyên tố của $2^p - 1$ có dạng $2pk + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$.*

Lời giải. Gọi q là ước nguyên tố của $2^p - 1$.

Theo định lý Fermat bé ta có: $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$

$\Rightarrow q \mid \left(2^{q-1} - 1\right)$ (1).

Theo giả thiết ta có $q \mid \left(2^p - 1\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$q \mid \left(2^{q-1} - 1, 2^p - 1\right) \Rightarrow q \mid \left(2^{(q-1,p)} - 1\right).$$

Mặt khác, vì p là số nguyên tố nên ta có $(q-1, p) = p$. Suy ra $q - 1$ chia hết cho p.

Đặt $q - 1 = np \Rightarrow q = np + 1$. Vì q là số lẻ nên ta có $n = 2k$. Vậy $q = 2kp + 1$.

Bài toán 3.3. *Cho trước số nguyên tố p và số nguyên dương a với $1 < a < p - 1$. Giả sử $A = 1 + a + \ldots + a^{p-1}$, chứng minh rằng mọi ước nguyên tố q của A ta đều có $q - 1$ chia hết cho p.*

Lời giải. Từ giả thiết ta có $A = \dfrac{a^p - 1}{a - 1}$.

Do $q \mid A \Rightarrow a^p - 1 \equiv 0 \pmod{q} \Leftrightarrow a^p \equiv 1 \pmod{q}$.

Theo định lý Fermat bé ta có:

$$a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow a^{q-1} - 1 \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow q \mid \left(a^{q-1} - 1\right)$$

$$\Rightarrow q \mid \left(a^p - 1, a^{q-1} - 1\right) \Rightarrow q \mid \left(a^{(p,q-1)} - 1\right).$$

Nếu $(p, q-1) = 1 \Rightarrow q \mid (a - 1) \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{q}$.

Vì $a \equiv 1 \pmod{q}$, suy ra:

$\left(1 + a + \ldots + a^{p-1}\right) \equiv p \pmod{q}$ hay $A \equiv p \pmod{q}$.

Mặt khác ta có $A \equiv 0 \pmod{q}$, suy ra $p \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow p \vdots q$ điều này mâu thuẫn với giả thiết p là số nguyên tố.

Vậy $(p, q-1) \neq 1$ hay $q - 1 \not\vdots\, p$.

Bài toán 3.4. *Cho p là số nguyên tố, $p > 3$ và $n = \dfrac{2^{2p} - 1}{3}$. Tìm ước chung lớn nhất của $2^{2^n-1} - 2$ và $2^n - 1$.*

Lời giải. Ta chứng minh $2^n - 2 \vdots\, n$. Ta có:

$$n - 1 = \frac{2^{2p} - 1}{3} - 1 = \frac{2^{2p} - 4}{3} = \frac{(2^p - 2)\left(2^p + 2\right)}{3}$$

$$= \frac{4\left(2^{p-1} - 1\right)\left(2^{p-1} + 1\right)}{3} \quad (1).$$

Vì p là số nguyên tố lẻ nên $2^{p-1}\equiv 1 \pmod 3$.

Theo định lý Fermat bé ta có: $2^{p-1}\equiv 1 \pmod p$, từ đó:

$$2^{p-1}\equiv 1 \pmod{3p} \text{ hay } 2^{p-1}-1 \vdots 3p.$$

Kết hợp với (1) ta được: $n-1 \vdots 2p$. Suy ra $\left(2^{n-1}-1\right) \vdots \left(2^{2p}-1\right)$.

Mặt khác vì $2^{2p}-1=3n$ nên $2^{n-1}-1 \vdots 3n$ $\Rightarrow 2^{n-1}-1 \vdots n \Rightarrow 2^n-2 \vdots n$.

Ta có: $\left(2^{2^n-1}-2, 2^n-1\right)=\left(2\left(2^{2^n-2}-1\right), 2^n-1\right)$

$$=\left(2^{2^n-2}-1, 2^n-1\right)=2^{\left(2^n-2,n\right)}-1=2^n-1.$$

Bài toán 4. *Cho m, n là hai số tự nhiên thỏa mãn $1\le m<n$. Chứng minh rằng*

$$\left(2^{2^n}+1, 2^{2^m}+1\right)=1.$$

Lời giải. Số $F_k=2^{2^k}+1$ gọi là số Fermat thứ k, trong đó k là số nguyên không âm. Ta chứng minh bổ đề sau:

Với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$F_0F_1F_2\ldots F_{n-1}=F_n-2.$$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Với $n=1$ ta được: $F_0=3=F_1-2$.

Giả sử ta có $F_0F_1F_2\ldots F_{n-1}=F_n-2$. Khi đó

$$F_0F_1F_2\ldots F_{n-1}F_n=(F_n-2)F_n=\left(2^{2^n}-1\right)\left(2^{2^n}+1\right)$$

$$=\left(2^{2^n}\right)^2-1=2^{2^{n+1}}-1=F_{n+1}-2.$$

Bổ đề được chứng minh.

Chứng minh bài toán:

Giả sử d là ước chung của $F_n=2^{2^n}+1$ và $F_m=2^{2^m}+1$, $m<n$. Khi đó $d|(F_n-F_0F_1\ldots F_{n-1})$ $\Rightarrow d|2$. Như vậy $d=1$ hoặc $d=2$. Vì F_m, F_n lẻ nên suy ra $d=1$. Vậy $\left(2^{2^n}+1, 2^{2^m}+1\right)=1$.

Áp dụng kết quả Bài toán 4 ta giải được bài toán sau

Bài toán 4.1. *Chứng minh rằng số $2^{2^{2019}}-1$ có ít nhất 2019 ước số nguyên tố phân biệt.*

Lời giải. Khai triển

$$2^{2^{2019}}-1=(2-1)(2+1)\left(2^2+1\right)\ldots\left(2^{2^{2018}}+1\right).$$

Ta có $2^{2^0}+1, 2^{2^1}+1, \ldots, 2^{2^{2018}}+1$ là 2019 số hạng. Theo Bài toán 4 thì các số này nguyên tố cùng nhau và mỗi số hạng có ít nhất một ước số nguyên tố. Do đó, các ước số nguyên tố này khác nhau.

Vậy số $2^{2^{2019}}-1$ có ít nhất 2019 ước số nguyên tố phân biệt.

3. Bài tập tương tự

1. Cho $(a,b)=1$. Chứng minh các phân số sau đây là tối giản

a) $\dfrac{a-b}{ab}$; b) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$.

2. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện:

a) $a+b=432$ và $(a,b)=36$.

b) $7a=11b$ và $(a,b)=45$.

3. Tìm ước chung lớn nhất của hai số $2^{1964}-1$ và $2^{2020}-1$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Hà Huy Khoái, 2004, *Số học*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2] Nguyễn Hữu Hoan, 2007, *Lý thuyết số*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.

[3] Nguyễn Tiến Quang, 2003, *Bài tập Số học*, Nhà xuất bản Giáo dục.

DẠY HỌC PHÁT TRIỂN PHẨM CHẤT, NĂNG LỰC HỌC SINH THÔNG QUA DẠY MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC Ở BẬC THCS

ĐỖ QUANG MINH
(GV THCS Đinh Tiên Hoàng, An Cư, Tuy An, Phú Yên)

Dạy học theo định hướng phát triển phẩm chất, năng lực học sinh là một vấn đề không đơn giản đối với thầy, cô giáo. Để làm được điều này, mỗi giáo viên chúng ta cần đầu tư thời gian, luôn tìm tòi và phát hiện những vấn đề mới lạ từ đó hướng học sinh khám phá những điều thú vị còn tìm ẩn từ bài toán ban đầu. Trong bài viết này chúng tôi xin trao đổi cùng đồng nghiệp việc dạy một bài toán đơn giản, qua đó định hướng phát triển phẩm chất, năng lực học sinh. Chúng ta hãy đến bài toán bất đẳng thức sau

Bài toán. *Cho a, b là các số dương. Chứng minh rằng:* $a^3+b^3\ge ab(a+b)$ (*).

Lời giải. Với hai số dương *a*, *b*, ta có:

$$(*)\Leftrightarrow (a-b)(a^2-b^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\ge 0 \text{ luôn đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Nhận xét. Đây là một bài toán cơ bản nên việc tìm nhiều lời giải là không khó. Nếu chúng ta chỉ dừng lại ở kết quả này thì việc dạy và học toán thật là đơn điệu và khô khan quá. Hơn nữa, qua lời giải trên ta thấy bất đẳng thức (*) không chỉ đúng với *a*, *b* là hai số dương mà còn đúng với mọi *a*, *b* có tổng không âm. Sau đây là một số định hướng

ĐỊNH HƯỚNG 1. ***Khai thác kết quả bài toán ban đầu để tìm ra các bài toán mới.***

Chẳng hạn:

- Từ (*) ta có:

$$3(a^3+b^3)\ge 3ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 4(a^3+b^3)\ge (a+b)^3\Leftrightarrow \left(\frac{c}{a+b}\right)^3\ge \frac{c^3}{4(a^3+b^3)}$$

(với $a,b,c>0$).

Tương tự, từ đó ta có kết quả sau:

$$\left(\frac{c}{a+b}\right)^3+\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3\ge$$

$$\ge\frac{1}{4}\left(\frac{c^3}{a^3+b^3}+\frac{a^3}{b^3+c^3}+\frac{b^3}{c^3+a^3}\right).$$

Kết hợp với bất đẳng thức Nesbitt, ta có bài toán mới sau

Bài toán 1. *Cho* $a,b,c>0$. *Chứng minh rằng:*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3\ge\frac{3}{8}.$$

- Cũng từ

$$4(a^3+b^3)\ge (a+b)^3\Leftrightarrow \frac{1}{4(a^3+b^3)}\le\frac{1}{(a+b)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}\le\frac{\sqrt[3]{4}.c}{a+b} \text{ (với } c>0\text{)},$$

kết hợp với bất đẳng thức trong tam giác: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$, ta lại có bài toán mới sau

Bài toán 2. *Cho* a,b,c *là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b^3+c^3}}+\frac{b}{\sqrt[3]{c^3+a^3}}+\frac{c}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}<2\sqrt[3]{4}.$$

- Với $c>0$, từ (*) ta có:

$$a^3+b^3+abc\geq ab(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^3+b^3+abc}\leq\frac{1}{ab(a+b+c)}.$$

Từ đó ta có các bài toán mới sau

Bài toán 3. (USA MO 1998). *Chứng minh rằng với mọi số dương a,b,c ta có:*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

Bài toán 4. *Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\leq 1.$$

Gợi ý: Đặt $x=a^3; y=b^3; z=c^3$.

Bài toán 5. (IMO Shortlist 1996). *Cho x,y,z là ba số dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng:* $\frac{xy}{x^5+y^5+xy}+\frac{yz}{y^5+z^5+yz}+\frac{zx}{z^5+x^5+zx}\leq 1.$

Gợi ý: Ta chứng minh bất đẳng thức

$a^5+b^5\geq a^2b^2(a+b)$, với mọi $a,b>0$.

ĐỊNH HƯỚNG 2. *Quy lạ về quen.*

Chúng ta hãy bắt đầu từ các bài toán sau

Bài toán 6. *Cho a, b, c là các số dương, thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:* $P=\frac{a^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^3}{c^2+a^2+ca}.$

Nhận xét. Ta tìm cách đưa bài toán trên về dạng (*). Muốn vậy ta tìm mối liên hệ giữa tử và mẫu của mỗi phân thức và kết hợp với $a+b+c=3$. Từ đó ta có lời giải sau

Lời giải. Với hai số dương a, b, ta có:

$$a^3+b^3\geq ab(a+b)\Leftrightarrow a^3\geq a^2b+ab^2-b^3$$

$$\Leftrightarrow 3a^3\geq 2a^3+a^2b+ab^2-b^3=(2a-b)(a^2+b^2+ab)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a^2+b^2+ab}\geq\frac{2a-b}{3}.$$

Tương tự, ta cũng có :

$$\frac{b^3}{b^2+c^2+bc}\geq\frac{2b-c}{3};\ \frac{c^3}{c^2+a^2+ca}\geq\frac{2c-a}{3}.$$

Do đó: $P\geq\frac{2a-b}{3}+\frac{2b-c}{3}+\frac{2c-a}{3}=\frac{a+b+c}{3}=1.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Vậy min $P=1\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài toán 7. *Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\leq a+b+c.$$

Lời giải. Với hai số dương a, b, ta có:

$$a^3+b^3\geq ab(a+b)\Leftrightarrow b^3-a^2b-ab^2\geq -a^3$$

$$\Leftrightarrow 6b^3-a^2b-ab^2\geq 5b^3-a^3$$

$$\Leftrightarrow (ab+3b^2)(2b-a)\geq 5b^3-a^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\leq 2b-a.$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}\leq 2c-b;\ \frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\leq 2a-c.$$

Do đó: $\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}$

$$\leq(2b-a)+(2c-b)+(2a-c)=a+b+c.$$

Bài toán 8. *Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$Q=\frac{1}{x^3(y^3+z^3)+1}+\frac{1}{y^3(z^3+x^3)+1}+\frac{1}{z^3(x^3+y^3)+1}.$$

(Xem tiếp trang 11)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9 TỈNH HƯNG YÊN, NĂM HỌC 2018 - 2019

Câu 1. Ta có $A\sqrt{2}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow A=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$.

Câu 2. a) ĐK: $x\ge -2$.

Ta có $x=-1$ không là nghiệm của PT.

Với $x\ne -1$ ta có PT đã cho tương đương với

$\dfrac{(x+1)(4-x)}{\sqrt{x+2}-1}=2(x+1)\Leftrightarrow 4-x=2\sqrt{x+2}-2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}=6-x\Leftrightarrow \begin{cases}6-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 6\\ 4(x+2)=(6-x)^2\ (*)\end{cases}$

$(*)\Leftrightarrow x^2-16x+28=0\Leftrightarrow (x-2)(x-14)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=2 & (\text{thỏa mãn})\\ x=14 & (\text{loại})\end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=2$.

b) ĐK: $x\ne 0$.

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=\dfrac{2}{x}-1 & (1)\\ (x-2y)^2-\dfrac{4}{x^2}+1=0 & (2)\end{cases}$.

Thay (1) vào (2) ta được: $\left(\dfrac{2}{x}-1\right)^2-\dfrac{4}{x^2}+1=0$.

Giải phương trình tìm được $x=2$ (thỏa mãn).

Thay vào (1) ta được $y=1$. Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(2;1)$.

Câu 3.

a) Để $d_1 // d_2$ thì $\begin{cases}m^2-5m=-6 & (1)\\ 2m\ne m+3 & (2)\end{cases}$

Giải (1) tìm được $m=2;\ m=3$

Kết hợp điều kiện (2) suy ra $m=2$ (thỏa mãn).

Vậy $m=2$ thỏa mãn đề bài

b) Gọi số lần đi của robot là x (với x là số tự nhiên lớn hơn 1) thì số lần nghỉ là $x-1$.

Thời gian đi là:

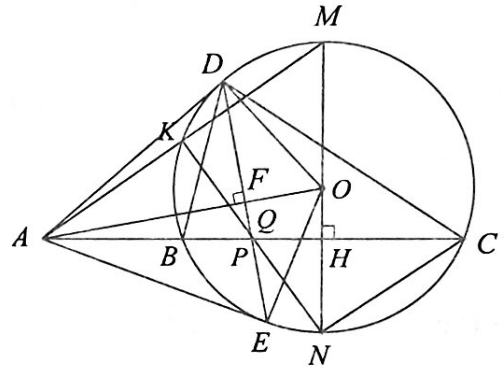
$\dfrac{5}{2,5}+\dfrac{10}{2,5}+\dfrac{15}{2,5}+...+\dfrac{5x}{2,5}=2+4+6+...+2x=x(x+1)$

giây. Theo bài ra, ta có phương trình:

$$x(x+1)+\frac{x(x-1)}{2}=551.$$

Giải phương trình ta được $x=19$ (chọn) và $x=-\dfrac{58}{3}$ (loại). Vậy thời gian đi của robot là: 19.(19 +1) = 380 giây. Quãng đường robot chuyển động từ A đến B là 380.2,5 = 950m.

Câu 4.



a) Xét ΔADC và ΔABD có: $\widehat{DAC}$ chung,

$\widehat{ACD}=\widehat{ADB}\left(=\text{sđ}\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BD}\right)\Rightarrow \Delta ADC\sim\Delta ABD\ (g.g)$.

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AC}{AD}\Rightarrow AD^2=AB.AC\Rightarrow AD=\sqrt{AB.AC}$.

Vì A, B, C cố định nên AB và AC có độ dài không đổi. Suy ra $AD=\sqrt{AB.AC}$ không đổi. Vậy D luôn nằm trên đường tròn cố định tâm A, bán kính $\sqrt{AB.AC}$.

b) Gọi AB cắt DE tại P, ta phải chứng minh NK đi qua P. Gọi giao điểm của DE với AO là F. Gọi giao điểm của MN với BC là H.

Vì AD và AE hai tiếp tuyến cắt nhau nên $AO\perp DE$ tại F. Ta có: $\Delta AFP\sim\Delta AHO$ (g.g). Suy ra:

$$AF.AO=AP.AH.$$

Mà $AF.AO=AD^2$ (vì ΔADO vuông tại D có đường cao DF), $AB.AC=AD^2$ (câu a), Suy ra:

$$AH.AP=AB.AC\ (1).$$

Giả sử NK cắt AB tại Q, ta chứng minh P và Q trùng nhau.

Ta có: $\Delta AKQ \sim \Delta AHM$ (g.g)

$\Rightarrow AK.AM = AQ.AH$ (*).

Lại có $\Delta ABM \sim \Delta AKC$ (g.g)

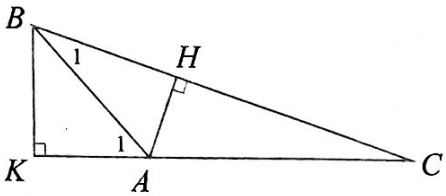
$\Rightarrow AK.AM = AB.AC$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra $AQ.AH = AB.AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $AQ = AP \Rightarrow Q \equiv P$.

Vậy ba đường thẳng AB, NK, DE đồng quy tại một điểm (đpcm).

Câu 5.



a) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên BC, AC. Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{B_1} + \widehat{C}$ (góc ngoài tam giác)

$\Rightarrow \sin(B_1 + C) = \sin A_1 = \dfrac{BK}{AB}$ (1).

Lại có:

$$\sin B_1.\cos C + \cos B_1.\sin C = \frac{AH}{AB}\cdot\frac{CH}{AC} + \frac{BH}{AB}\cdot\frac{AH}{AC}$$

$$= \frac{AH}{AB}\left(\frac{CH}{AC} + \frac{BH}{AC}\right) = \frac{AH}{AB}\cdot\frac{BC}{AC}$$

và $AH.BC = BK.AC$ ($= 2\,S_{ABC}$). Suy ra:

$$\sin B_1.\cos C + \cos B_1.\sin C = \frac{BK.AC}{AB.AC} = \frac{BK}{AB} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\sin(B + C) = \sin B.\cos C + \cos B.\sin C.$$

b) + Xét A, B là 2 trong 25 điểm đã cho mà khoảng cách AB là lớn nhất trong số các đoạn thẳng mà 2 đầu mút là 2 trong 25 điểm đã cho.

+ Nếu $AB < 1$: Khi đó, với mọi điểm C trong số các điểm còn lại cũng có $AC < 1$. Xét đường tròn (A, 1) sẽ chứa toàn bộ 25 điểm đã cho, ta có điều chứng minh.

+ Nếu $AB \geq 1$: Xét điểm C tùy ý trong các điểm còn lại. Theo giả thiết ta có: $AC < 1$ hoặc $BC < 1$. Suy ra ít nhất 12 đoạn thẳng xuất phát từ A có độ dài nhỏ hơn 1, hoặc ít nhất 12 đoạn thẳng từ B có độ dài nhỏ hơn 1.

+ Do đó đường tròn (A; 1) hoặc đường tròn (B; 1) sẽ chứa trong nó ít nhất 13 điểm trong 25 điểm đã cho.

+ Vậy trong mọi trường hợp luôn tồn tại một hình tròn có bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm trong 25 điểm đã cho.

Câu 6. Áp dụng BĐT Cauchy có:

$$a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Tương tự có: $\dfrac{b}{b^2+ac} \leq \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{c}} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)$;

$$\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Do đó ta có:

$$P = \frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad (1).$$

Mặt khác: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{ab+bc+ca}{abc}$

$$\leq \frac{\dfrac{a^2+b^2}{2} + \dfrac{c^2+b^2}{2} + \dfrac{a^2+c^2}{2}}{abc}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \quad (2).$$

Từ giả thiết $\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2018}\right)^2 \leq 2019a^2b^2c^2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{2018} \leq abc\sqrt{2019}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \leq 2018\sqrt{2019} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$P \leq \frac{2018\sqrt{2019}}{2} = 1009\sqrt{2019}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{3}{2018\sqrt{2019}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $1009\sqrt{2019}$ tại $a = b = c = \dfrac{3}{2018\sqrt{2019}}$.

NGUYỄN THANH GIANG

(*GV THPT chuyên Hưng Yên*) ***Giới thiệu***

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI NĂM HỌC 2020-2021

VÒNG 1

(Dành cho tất cả các thí sinh, thời gian làm bài: 120 phút)

Câu I. (4 *điểm*)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ 9x^3=xy^2+70(x-y) \end{cases}.$$

2) Giải phương trình

$$11\sqrt{5-x}+8\sqrt{2x-1}=24+3\sqrt{(5-x)(2x-1)}.$$

Câu II. (2 *điểm*)

1) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn

$$x^2y^2-16xy+99=9x^2+36y^2+13x+26y.$$

2) Với a, b là những số thực dương thỏa mãn

$$2\le 2a+3b\le 5,\ 8a+12b\le 2a^2+3b^2+5ab+10.$$

Chứng minh rằng

$$3a^2+8b^2+10ab\le 21.$$

Câu III. (3 *điểm*)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc nhỏ nhất trong ba góc của tam giác và nội tiếp đường tròn (O). Điểm D thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác $\widehat{BAC}$. Lấy các điểm M, N thuộc (O) sao cho các đường thẳng CM và BN cùng song song với đường thẳng AD.

1) Chứng minh rằng $AM=AN$.

2) Gọi giao điểm của đường thẳng MN với các đường thẳng AC, AB lần lượt là E, F. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM, AN. Chứng minh rằng các đường thẳng EQ, FP và AD đồng quy.

Câu IV. (1 *điểm*)

Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)}+\frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)}+\frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)}\ge 4.$$

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, thời gian làm bài: 150 phút)

Câu I. (4 *điểm*)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+y)(x+1)=4 \\ (y^2+xy+x+y+5)(x^3+y^3+12y+13)=243 \end{cases}.$$

2) Giải phương trình

$$(x-12)^7+(2x-12)^7+(24-3x)^7=0.$$

Câu II. (2 *điểm*)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho cả ba số $4a^2+5b, 4b^2+5c, 4c^2+5a$ đều là bình phương của số nguyên dương.

2) Từ một bộ bốn số thực (a, b, c, d) ta xây dựng bộ số mới $(a+b, b+c, c+d, d+a)$ và liên tiếp xây dựng các bộ số mới theo quy tắc trên.

☞

☞ 3) Chứng minh rằng nếu ở hai thời điểm khác nhau ta thu được cùng một bộ số (có thể khác thứ tự) thì bộ số ban đầu phải có dạng $(a,-a,a,-a)$.

Câu III. (3 *điểm*)

Cho tam giác ABC cân tại A với $\widehat{BAC}<90°$. Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{AEB}>90°$. Gọi P là giao điểm của BE với trung trực BC. Gọi K là hình chiếu vuông góc của P lên AB. Gọi Q là hình chiếu vuông góc của E lên AP. Gọi giao điểm của EQ và PK là F.

1) Chứng minh rằng bốn điểm A,E,P,F cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi giao điểm của KQ và PE là L. Chứng minh rằng LA vuông góc với LE.

3) Gọi giao điểm của FL và AB là S. Gọi giao điểm của KE và AL là T. Lấy R là điểm đối xứng của A qua L. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AST và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPR tiếp xúc với nhau.

Câu IV. (1 *điểm*)

Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)^2+1\geq\frac{4}{abc}+3\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right).$$

NGUYỄN VŨ LƯƠNG - PHẠM VĂN HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*), ***Giới thiệu***

****

DẠY HỌC PHÁT TRIỂN ... (*Tiếp theo trang 7*)

Hướng dẫn. Vì $xyz=1$ nên $x=\frac{1}{yz}, y=\frac{1}{zx}, z=\frac{1}{xy}$.

Do đó: $$Q=\frac{1}{\frac{1}{(yz)^3}(y^3+z^3)+1}+\frac{1}{\frac{1}{(zx)^3}(z^3+x^3)+1}+\frac{1}{\frac{1}{(xy)^3}(x^3+y^3)+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{z^3}+\frac{1}{y^3}+1}+\frac{1}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}+1}+\frac{1}{\frac{1}{y^3}+\frac{1}{x^3}+1}.$$

Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$.

Ta có: $a,b,c>0$ và $abc=1$. Khi đó:

$$Q=\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}.$$

Theo kết quả bài toán 3, ta dễ dàng suy ra $Q\leq 1$. Hơn nữa, với $x=y=z=1$, ta có $xyz=1$ và $Q=1$. Vậy max $Q=1$ khi $x=y=z=1$.

Như vậy, khai thác và phát triển bài toán ban đầu là một việc làm không thể thiếu của người giáo viên. Trong quá trình giảng dạy (đặc biệt là công tác bồi dưỡng học sinh giỏi), chúng tôi thường quan tâm đến điều này. Vẫn biết rằng xung quanh bài toán (*) còn nhiều vấn đề thú vị chưa được đề cập đến, nhưng trong khuôn khổ của bài viết và kiến thức giới hạn ở bậc THCS nên chúng tôi chỉ nêu vài ý tưởng như thế. Rất mong các bạn đồng nghiệp bổ sung thêm những ý tưởng khác, mới và xúc tích hơn nữa để chúng ta cùng nhau trao đổi, học hỏi. Xin trân trọng cảm ơn!

NHỚ VỀ THẦY PHAN ĐỨC CHÍNH VÀ NGHĨ VỀ KỲ THI IMO

ĐẶNG HÙNG THẮNG

(GV Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

A. NHỚ VỀ THẦY PHAN ĐỨC CHÍNH

PGS.TS.NGND *Phan Đức Chính* sinh ngày 15/9/1936 và qua đời ngày 26/8/2017 tại TP. Hồ Chí Minh, hưởng thọ 82 tuổi. Ông là Giảng viên Khoa Toán-Cơ Trường ĐHTH Hà Nội (nay là Khoa Toán - Cơ-Tin học ĐHKHTN Hà Nội) từ năm 1956. Ông nhận học vị Tiến sỹ tại ĐHTH Lô-mô-nô-xốp (Liên Xô) (năm1965), được nhận học hàm PGS (năm 1980), danh hiệu Nhà giáo Ưu tú (năm 1994), Nhà giáo Nhân dân (năm 2008), được tặng thưởng Huân chương Lao động hạng Ba (năm 1999)và Huân chương Lao động hạng Nhì (năm 2003). Năm 2019, tên ông được dùng đặt cho một giảng đường lớn tại Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

PGS.*Phan Đức Chính* có nhiều đóng góp trong công tác đào tạo bồi dưỡng học sinh giỏi Toán. Ông đã nhiều năm dạy ở Khối Chuyên Toán ĐHTH Hà Nội, có nhiều bài viết và đề toán hay đăng trên *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, là Phó Tổng biên tập của Tạp chí trong nhiều năm.Ông là Phó Trưởng đoàn đội tuyển Toán Việt Nam lập chiến công đầu vẻ vang tại IMO1974 (CHDC Đức), nhiều lần làm Trưởng đoàn và Phó Trưởng đoàn đội tuyển Toán Việt Nam tại IMO.

Sau khi ông mất, gia đình ông đã thành lập *Giải thưởng Phan Đức Chính* hằng năm trị giá 100 triệu VND tặng cho Thầy và Trò của Trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên. *Giải thưởng Phan Đức Chính* bắt đầu trao từ năm 2018, mỗi năm trao tối đa 2 giải cho 2 Thầy,mỗi giải trị giá 30 triệu VND và 2 giải cho 2 Trò, mỗi giải trị giá 20 triệu VND.

Đã ba năm trôi qua kể từ khi thầy vĩnh biệt chúng ta.Tôi nghĩ đến cái cơ duyên đã đưa tôi đến với thầy và hồi tưởng lại những lần gặp gỡ, tiếp xúc với thầy.

1) Năm 1974, giữa lúc chiến tranh Việt Nam đang diễn ra ác liệt, nước chủ nhà CHDC Đức mời ta dự thi IMO. Bộ Giáo dục xin phép Thủ tướng *Phạm Văn Đồng* "đem chuông đi đấm xứ người". Thủ tướng đồng ý và nói "*Tôi chỉ yêu cầu các đồng chí cố gắng không đứng cuối bảng xếp hạng*" (tức là "chỉ cần không bét là được").

Tháng 7/1974, Việt Nam cử một đội tuyển gồm 5 em do thầy *Lê Hải Châu* làm Trưởng đoàn, thầy *Phan Đức Chính* làm Phó Trưởng đoàn sang CHDC Đức tranh tài với 18 nước tại IMO1974. Đội tuyển Việt Nam xuất sắc dành 1 HCV, 1 HCB và 2 HCĐ.Kết quả này làm nhiều người ngạc nhiên.Thật khó tưởng tượng một đội tuyển đến từ một đất nước đang có chiến tranh ác liệt, lần đầu tham gia, mà đã dành được HCV.

Khoa Toán-Cơ ĐHTH Hà Nội tổ chức một buổi nói chuyện của thầy *Chính* về IMO cho sinh viên. Lúc đó tôi vừa kết thúc năm thứ ba. Sau buổi nói chuyện, niềm hứng thú của tôi với Toán sơ cấp, vốn ngủ quên đã lâu, bỗng thức

dậy.Tôi quan tâm tới Bài toán số 6,một trong hai bài toán khó nhất của kỳ thi.Tôi tìm được một cách giải khác ngắn gọn hơn và từ đó tổng quát hóa bài toán số 6. Tôi muốn khoe kết quả đó với thầy *Chính* nhưng chưa biết làm thế nào để gặp thầy vì thầy không dạy lớp tôi. Bỗng tôi nhớ ra cô bạn gái học cùng lớp, *Phan Thu Hương,* là em ruột của thầy.Tôi bèn nhờ *Hương* thu xếp cho tôi gặp thầy.

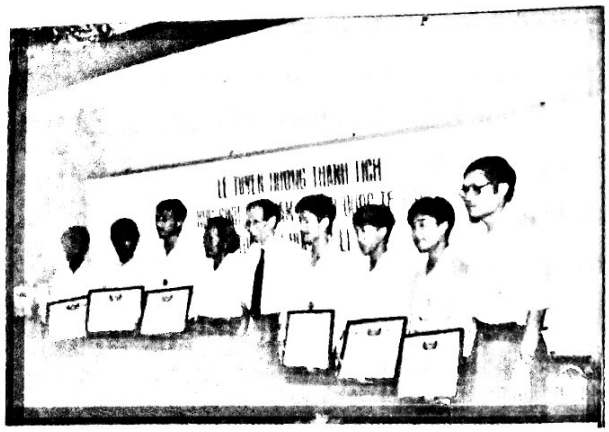
Vào một buổi tối cuối năm 1974, *Hương* nhắn tôi đến nhà, số10 phố Đỗ Hạnh. Gia đình thầy cũng sống ở đó.Tôi ngồi chờ ở phòng khách một lúc thì thấy thầy từ trên gác đi xuống .Tôi trình bày mục đích đến gặp thầy và đưa thầy bài viết của mình với nhan đề "Mở rộng bài toán số 6". Thầy nói *"Anh để đây để tôi xem. Nếu được thì tôi sẽ cho đăng trên Báo Toán học và Tuổi trẻ"*.Vài tháng sau, tôi rất vui khi thấy bài của mình được đăng trên Báo Toán học và Tuổi trẻ số 84,1975. Đây là "công trình" Toán học đầu tiên của tôi được công bố.

2) Tháng 3/1976, theo lời mời của GS.*Tạ Quang Bửu*, Bộ trưởng Bộ Đại học và Trung học chuyên nghiệp,GS *Laurent Schwartz* (1915-2002) nhà Toán học Pháp, giải thưởng Fields (1950), sang thăm Việt Nam và giảng bài. Tại Trường ĐHBK Hà Nội,liên tục trong vòng một tháng, GS.*L.Schwartz* đã có bài giảng về Độ đo Radon và ứng dụng trong Lý thuyết Xác suất. Vừa mới tốt nghiệp đại học, khi biết tin tôi đã háo hức đến nghe. Giảng đường chật kín người. Người phiên dịch là thầy *Chính*. Thầy vốn là học sinh Trường Tây, Trường Albert Sarraut, một trường danh giá nhất của xứ Đông Dương dành cho con em người Pháp. Chỉ có người vừa thông thạo tiếng Pháp, vừa nắm vững Lý thuyết Xác suất, Lý thuyết Độ đo và Giải tích hàm mới có thể dịch trôi chảy, chính xác bài giảng của GS *L.Schwartz*. Bài giảng của GS đã góp phần định hướng nghiên cứu cho tôi. Tôi cũng nhớ ơn thầy *Chính* vì nhờ có sự phiên dịch tuyệt vời của thầy, tôi mới tiếp thu được bài giảng của GS *L.Schwartz*.

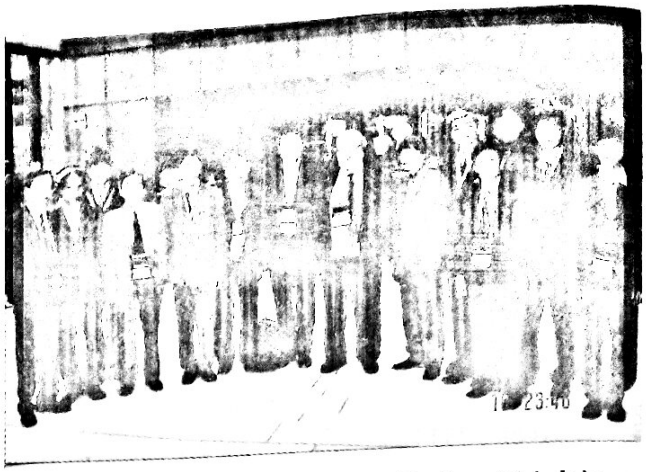
3) Sau IMO 1974, thầy *Châu* và thầy *Chính* tiếp tục làm Trưởng đoàn và Phó Trưởng đoàn tại IMO 1975 (Bungari) và IMO 1976 (Áo).18 năm sau, năm 1994, thầy *Chính* lần đầu tiên được Bộ Giáo dục và Đào tạo cử làm Trưởng đoàn tại IMO 1994 (Hồng Kông). Một cách ngẫu nhiên, tôi cũng lần đầu tiên được cử làm Phó Trưởng đoàn. Thế là tôi có dịp ở cùng, làm việc và trò chuyện với thầy trong suốt kỳ thi. Thầy kể rằng thầy xuất thân trong một gia đình công chức, sống ở Hà Nội trong thời tạm chiếm (1946-1954). Có một thời gian ở nước ta, công tác đào tạo và sử dụng cán bộ được quán triệt bởi chủ nghĩa lý lịch. Với lý lịch như vậy, thầy rất khó được xếp vào danh sách các "hạt giống đỏ". Nhưng năm 1961 thầy bỗng may mắn "lọt lưới" sang Liên Xô làm Nghiên cứu sinh.

IMO 1994 đã chứng kiến những điều "*lạ lùng, có một không hai*" sau đây:

1. Có 5/6 thành viên của đội tuyển VN là học sinh Khối Chuyên Toán ĐHTH Hà Nội.
2. Toàn bộ 6 thành viên của Đội tuyển Mỹ đều dành HCV với điểm tuyệt đối 42/42.
3. Duy nhất một cô gái, cô *Mirzakhani* của đội tuyển Iran, dành được HCV với điểm sát nút tuyệt đối 41/42. Năm sau, tại IMO 1995 (Canada) cô dành HCV với điểm tuyệt đối 42/42. Năm 2014, cô là nhà toán học nữ đầu tiên trên thế giới được giải thưởng Fields, một giải "Nobel Toán học". Ba năm sau, năm 2017, cô qua đời vì bệnh ung thư khi vừa tròn 40 tuổi!



Lễ tuyên dương thành tích đội tuyển Việt Nam tại IMO 1994 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.



Đội tuyển Toán Việt Nam cùng Trưởng, Phó đoàn, GS. Jozsef Pelican (Hungari), President of IMO Board và 4 quan sát viên sau lễ trao Huy chương. Đội tuyển VN dành 4 HCV, 2 HCB. Xếp thứ 4/85.Cho đến nay đây là thành tích tốt nhất của Đội tuyểnViệt Nam nếu xét trên số huy chương.

Sau IMO 1994, thầy *Chính* được cử làm Trưởng đoàn tại IMO 1996 (Ấn Độ) và IMO 1997 (Achentina) còn tôi được cử làm Trưởng đoàn tại IMO 1998 (Đài Loan), IMO 1999 (Rumani), IMO 2000 (Hàn Quốc) và IMO 2004 (Hy Lạp). Ở bốn kỳ IMO mà tôi làm Trưởng đoàn có những điều đáng nhớ sau:

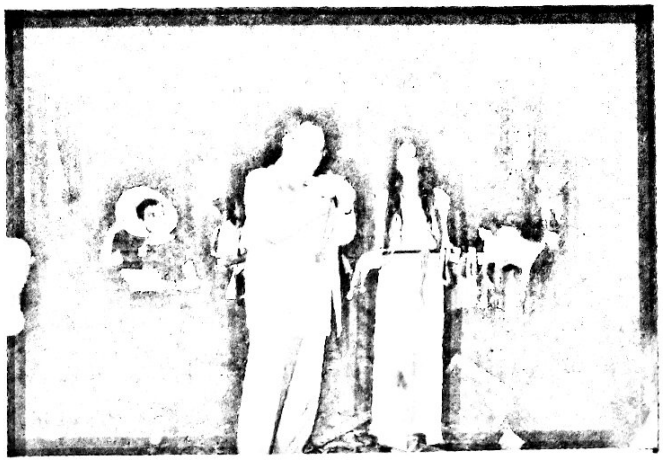
- Tại IMO 1998 (Đài Loan), Trung Quốc không tham dự để phản đối Đài Loan, trong thư mời đã xưng danh là Republic of China. Kể lần đầu dự thi năm1985, cho đến nay Trung Quốc chỉ duy nhất một lần không tham dự và đã có 20 lần xếp thứ nhất trong đó 12 lần dành trọn cả 6 HCV.
- Tại IMO 1999 (Rumani), Việt Nam dành 3 HCV và 3 HCB, xếp thứ 3/82. Cho đến nay, xếp thứ ba là thứ hạng cao nhất của đội tuyển Việt Nam.
- Tại IMO 2000 (Hàn Quốc), Việt Nam dành được 3 HCV, 2 HCB, 1 HCĐ trong đó cả 3 HCV đều thuộc về học sinh Khối Chuyên Toán ĐHTH Hà Nội. Cho đến nay, đây là ngôi trường duy nhất ở nước ta mang về 3 HCV tại một kỳ IMO.
- Tại IMO 2004 (Hy lạp), Việt Nam dành được 4 HCV, 2 HCB. Cho đến nay, đây là thành tích tốt nhất của Việt Nam xét trên số huy chương.

B. NGHĨ VỀ KỲ THI IMO

Nói về thầy *Chính* thì không thể không nhắc đến IMO. Sau đây là một số ý kiến phản ánh quan điểm cá nhân của tôi về kỳ thi IMO.

- IMO là cuộc thi Toán Quốc tế sáng giá và lâu đời nhất dành cho học sinh bậc THPT dưới 20 tuổi, một Thế vận hội Thể thao Trí tuệ của tuổi trẻ. IMO được tổ chức lần đầu năm 1959 tại Rumani với 7 nước tham dự. Từ đó IMO được tổ chức thường niên và hiện nay số nước tham dự đã lên tới trên 100. Mỗi nước được cử không quá 6 thí sinh. IMO bao gồm hai buổi thi liên tiếp, mỗi buổi thi có 3 bài toán "khó vỡ đầu". Mỗi bài toán được tối đa 7 điểm, thời gian làm bài là 4 giờ 30 phút. IMO không gặp phải vấn đề Dopping vì hiện chưa có loại thuốc nào làm tăng khả năng giải toán.

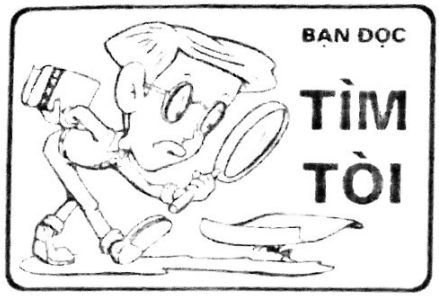
- Đấu trường IMO không phải là nơi gặp gỡ của các nhà tài tử, nghiệp dư. Các đỉnh cao thành tích tại IMO đã và đang được thiết lập bởi một cơ chế chuyên nghiệp,nhà nghề. Muốn có thành tích cao tại IMO, nhất thiết phải có sự chuẩn bị kỹ lưỡng từ khâu tuyển chọn đến khâu tập huấn, "luyện gà chọi".
- Thành tích tại IMO không phản ánh trình độ Toán học cũng như chất lượng dạy và học Toán của một Quốc gia. Nó chỉ chứng tỏ Quốc gia đó có những cá nhân đạt đẳng cấp cao về Toán ở bậc THPT.
- Cần thấy sự khác nhau giữa thi học sinh giỏi Toán với nghiên cứu Toán. Thứ nhất, nghiên cứu Toán không tiến hành trong phòng thi.Thứ hai, nghiên cứu Toán cần một tố chất khác với tố chất của thi học sinh giỏi Toán, một cuộc thi mang tính chất thể thao.Thứ ba, sự thành công trong nghề làm Toán, ngoài năng khiếu Toán học, còn phụ thuộc vào môi trường làm việc,kỹ năng mềm và một số yếu tố chủ quan và khách quan khác.
- Phân tích dữ liệu cho thấy có mối tương quan khá chặt chẽ giữa thi học sinh giỏi Toán với nghề làm Toán. Tương quan này mang tính chất thống kê. Một số nhà toán học nổi tiếng, quá khứ có thành tích rực rỡ tại IMO nhưng cũng có một số người từng dành HCV tại IMO mà hiện chỉ là một người làm toán hạng xoàng. Lại có một số nhà toán học có tên tuổi nhưng chẳng có thành tích gì tại các kỳ thi học sinh giỏi Toán ở bậc PTTH.
- Có ít thí sinh IMO chọn Toán Lý thuyết (TLT) làm nghề nghiệp của mình. Có lẽ vì TLT chẳng giúp ai xây nhà máy, đóng tàu thủy, chế tạo máy bay, chữa trị bệnh tật, phân tích dữ liệu,..., không đóng góp ngay và luôn cho sự phát triển kinh tế xã hội. Vì thế thị trường việc làm chỉ tiếp nhận được một số ít các nhà TLT.



IMO 1999 (Rumani): Lễ trao Huy chương tại Tòa nhà Quốc hội:Tổng thống Rumani trao HCV cho Lê Thái Hoàng (chuyên Toán ĐHSP Hà Nội).

- VĂN HÓA TÍNH TOÁN, TƯ DUY LOGIC, TƯ DUY THỐNG KÊ là những giá trị tinh túy mà Giáo dục Toán học mang đến cho người học. Trong thời đại chuyển đổi số và cách mạng 4.0, những giá trị này tạo lợi thế cạnh tranh và đang trở thành yếu tố không thể thiếu được trong học vấn của mỗi công dân có giáo dục. Thống kê cho thấy nhiều thí sinh IMO đã thành công trong các lĩnh vực ngoài Toán như Tin học, Khoa học Tự nhiên, Công nghệ, Tài chính, Kinh tế,...

Vì thế các nước trên thế giới đều quan tâm tới việc đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán. Mục đích là cung cấp nguồn "nguyên liệu" để sản xuất ra các "sản phẩm" chất lượng cao với nhiều chủng loại, không chỉ là Toán học.

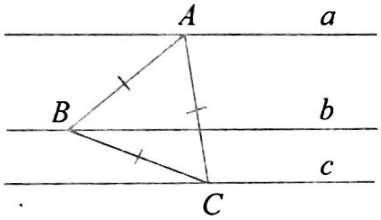


TƯ DUY VỀ MỘT BÀI TOÁN TAM GIÁC ĐỀU VÀ PHÉP QUAY

PHẠM ĐĂNG LONG
(GV ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Hồi học cấp hai ở quê huyện Vĩnh Bảo, Hải Phòng, tôi được học với thầy *Trần Trọng Nhận*, quê ở xã Liên Am. Thầy ra cho cả lớp bài toán sau:

Bài toán 1. *Cho ba đường thẳng a, b và c song song với nhau. Hãy dựng một tam giác đều ABC sao cho A, B và C lần lượt nằm trên a, b và c tương ứng?* (h.1).



Hình 1

Cả lớp không ai làm ra. Tôi cũng chịu. Chờ một lúc, thầy mới gợi mở dần dần.... Cuối cùng thầy giảng giải:

Giả sử hình đã dựng xong, ta thấy C là ảnh của B trong phép quay quanh A một góc 60°, mà B thuộc b, nên quay b đi quanh A góc 60°, khi đó đường thẳng b biến thành đường thẳng b' thì C chính là giao của b' và c.

Cả lớp rất vui và nhớ mãi vì biết được lời giải hay,

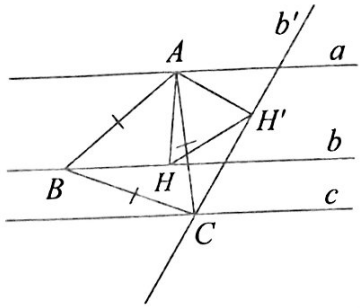
Cách dựng (h.2).

Bước 1. Dựng b' bằng cách hạ AH vuông góc với b, dựng tam giác đều AHH' (tức là quay AH quanh A thành AH' góc 60°), rồi dựng b' vuông góc với AH' tại H'.

Bước 2. Lấy C là giao điểm của b' và c.

Bước 3. Dựng B bằng cách quay C quanh A theo chiều ngược lại, cắt b tại B.

Mọi thủ tục còn lại của bài toán dựng hình trên thì không còn khó nữa!

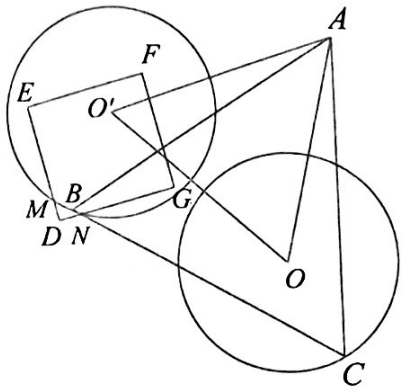


Hình 2

Nhờ bài toán này, phương pháp này, mà tôi đã áp dụng được nhiều trong quá trình làm toán. Đây là phương pháp áp dụng các phép biến hình để giải các bài toán hình học.

Nói vậy thì quá rộng, nên tôi chỉ nêu một vài mẫu bài toán liên quan đến tam giác đều cùng phép quay một góc $\pm 60^o$ mà thôi. Chẳng hạn: Cho điểm A và hai hình F_1 và F_2. Hãy dựng tam giác đều ABC, mà $B \in F_1$ và $C \in F_2$. Với mẫu này, bạn có thể cụ thể hóa F_1 và F_2 là những hình quen biết.

Bài toán 2. *Cho F_1 là hình vuông DEFG và F_2 là đường tròn (O; R). Hãy dựng tam giác đều ABC, mà $B \in F_1$ và $C \in F_2$.*



Hình 3

Phân tích. Gia sử hình đã dựng xong (h.2).

Ta thấy B là ảnh của C trong phép quay Q quanh A góc -60°. Mà $C \in F_2$ nên B phải thuộc F_2', ảnh của F_2 trong phép quay đó.

Mặt khác $B \in F_1$ nên B thuộc giao của F_1 và F'_2.

Cách dựng.

- Dựng O' là ảnh của O trong phép quay Q.
- Vẽ F_2', tức là đường tròn (O'; R).
- Lấy giao của F_1 với F_2', tức là cung MN.
- Điểm B thuộc cung MN.
- C là nghịch ảnh của B.

Biện luận.

Nếu F_2' không cắt F_1 thì bài toán vô nghiệm.

Trái lại bài toán có một nghiệm hoặc vô số nghiệm.

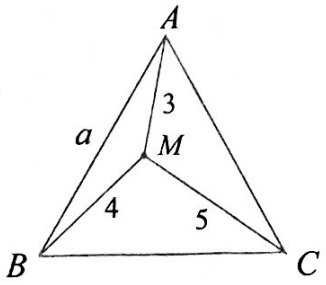
Nói chung cứ cho F_1 và F_2 là các hình cố định, như đường thẳng, đoạn thẳng, đường tròn hay một hình bất kỳ, ...

Gần đây tôi nhận được từ anh *Đỗ Minh Khoa*, cựu học sinh A_o (Khối chuyên Toán, Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội) một bài toán khá lý thú như sau:

Bài toán 3. *Cho tam giác đều ABC cạnh a. Ở trong tam giác có một điểm M mà MA = 3cm, MB = 4cm, MC = 5cm. Tính a?* (h.4).

Tìm lời giải. Tôi đã mất nhiều thời gian, tìm đủ cách, kể cả giải phương trình lượng giác loằng ngoằng, loay hoay mãi mới tìm ra cách giải thỏa đáng.

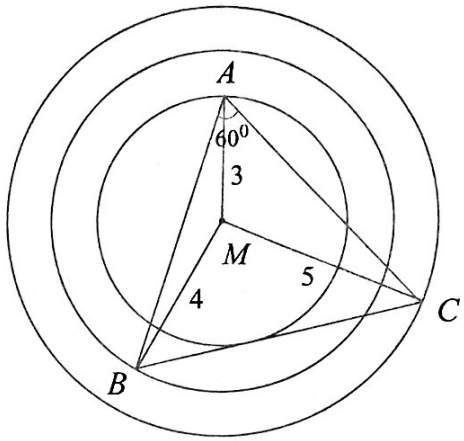
Đó là dùng phương pháp biến hình như ở các thí dụ vắn tắt nêu trên. Không những thế mà còn tạo ra những bài toán mới tương tự cũng coi như là hay.



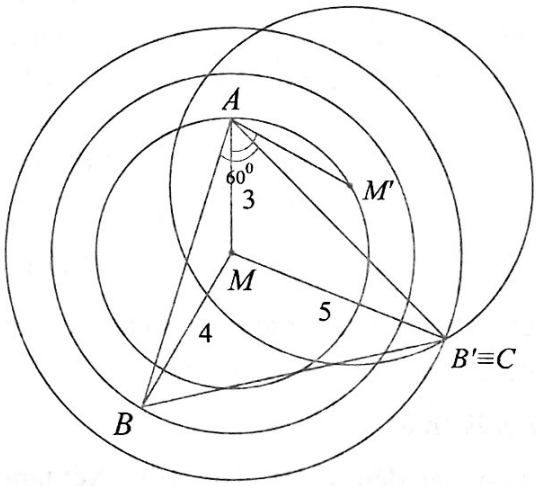
Hình 4

Phân tích.

Gần giống như bài toán 1: Dựng tam giác đều ABC, nhưng A, B và C không nằm trên ba đường thẳng a, b và c, mà nằm trên ba đường tròn đồng tâm M (h.5).



Hình 5



Hình 6

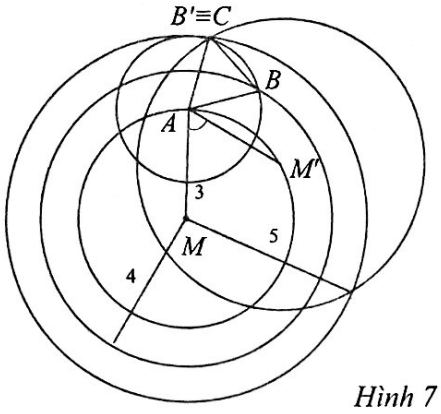
Trên hình đó, ta thấy C là ảnh của B (thuộc đường tròn (M; 4)) trong phép quay tâm A góc $+60^o$, mà C lại nằm trên đường tròn (M; 5).

Do vậy, sau khi quay đường tròn (M; 4) đi thành đường tròn (M';4), và cắt đường tròn (M; 5) ở đâu thì đó chính là đỉnh C (h.6).

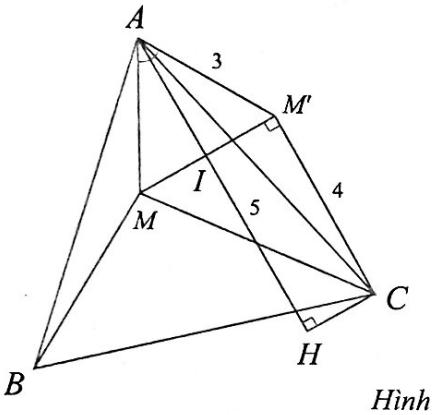
Nghịch ảnh của C, tức là quay C quanh A theo chiều ngược lại, thì đó chính là B.

Có 2 giao điểm C, nhưng chỉ điểm C trên Hình 6 chấp nhận được vì M phải ở miền trong tam

giác ABC. Như vậy, tam giác ABC hoàn toàn xác định.



Hình 7



Hình 8

Trích từ hình 6 ta được hình 8 cho dễ nhìn. Ta có thể có lời giải gọn gàng hơn!

Lời giải. (h.8)

Vẽ tam giác đều AMM'. Nối $M'C$. Xét tam giác ABM và tam giác ACM' có $AB = AC$, $\widehat{BAM} = \widehat{CAM'}$, $AM = AM'$, do đó chúng bằng nhau. Từ đó suy ra $M'C = MB = 4$ cm. Theo định lý Pythagore đảo thì tam giác $M'MC$ vuông tại M'. Thêm điểm H, I như trên hình. Ta có ngay AC là cạnh huyền của tam giác vuông HAC, có

$$HC = M'I = \frac{3}{2},$$

$$AH = AI + IH = AI + M'C$$

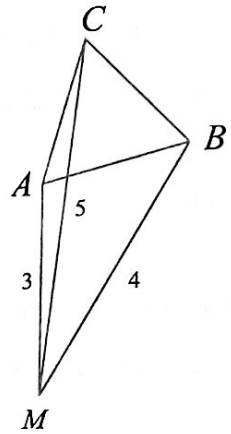
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + 4 = \frac{8+3\sqrt{3}}{2}, \text{ từ đó}$$

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{8+3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 25+12\sqrt{3}.$$

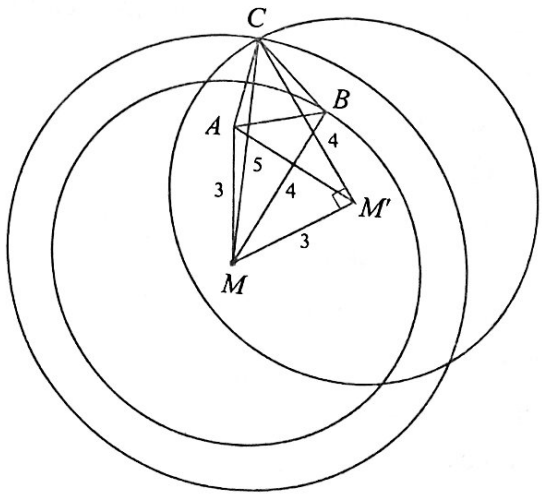
Do đó $a = AC = \sqrt{25+12\sqrt{3}} \approx 6{,}677432568.$

Bài toán 4. *Cho tam giác đều ABC cạnh a. Ở bên ngoài tam giác có một điểm M mà MA = 3 cm, MB = 4 cm, MC = 5 cm. Tính a?* (Hình 9).



Hình 9

Phân tích. Vẽ các đường tròn (M; 4) và (M; 5). Điểm C là ảnh của B trong phép quay quanh A góc 60° (h.10). Ta quay M thành M' (tam giác AMM' đều), ảnh của đường tròn (M; 4) là đường tròn (M'; 4), nó cắt đường tròn (M; 5) tại C. Có hai điểm C, ta lấy C ở vị trí thích hợp, nghịch ảnh của C là B (h.10). Tam giác ABC được xác định. Vấn đề là tính cạnh a nữa là xong.



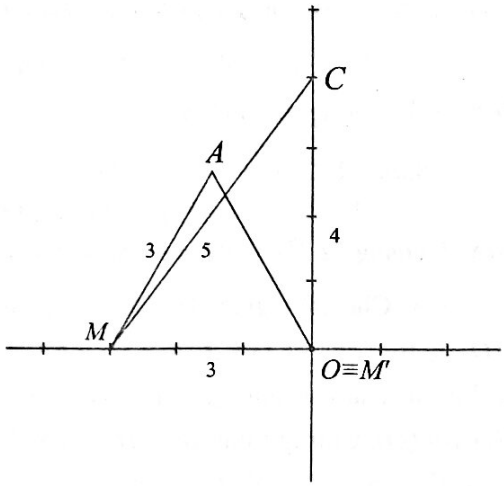
Hình 10

Bằng phương pháp tọa độ ta có ngay

$$A\left(-\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ và } C(0;\,4),$$

nên $AC^2 = \frac{9}{4}+\left(4-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 25-12\sqrt{3}.$

$$a = AC = \sqrt{25-12\sqrt{3}} \approx 2{,}053141571.$$



Hình 11

Để ý là kết quả cạnh của tam giác ABC ở trường hợp M ở trong và ngoài là hai căn thức liên hợp. Lại gây tò mò!

Khái quát hơn nữa ta làm việc với bộ số Pythagore (m, n, p) tùy ý xem sao!

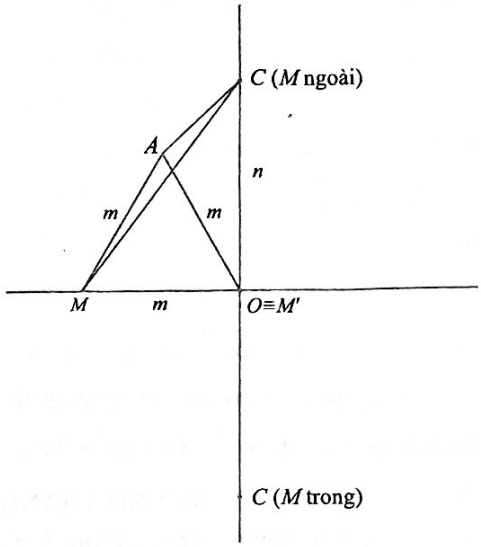
Bài toán 5. *Cho tam giác đều ABC cạnh a và một điểm M mà MA = m, MB = n, MC = p mà $m^2 + n^2 = p^2$, ở đây m, n và p là các độ dài nguyên. Hãy tính cạnh a trong hai trường hợp M ở trong tam giác và M ở ngoài tam giác?* (h.12)

Giải vắn tắt.

Với kinh nghiệm giải bài toán 3 và bài toán 4, ta đi đến đáp số:

$$a=\sqrt{p^2 \pm mn\sqrt{3}}\,.$$

Dấu +/– cho trường hợp M ở trong hay ngoài tam giác tương ứng. Nhưng nếu M ở ngoài tam giác không cần điều kiện $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\geq\sqrt{3}$ (suy từ bất đẳng thức Cauchy).

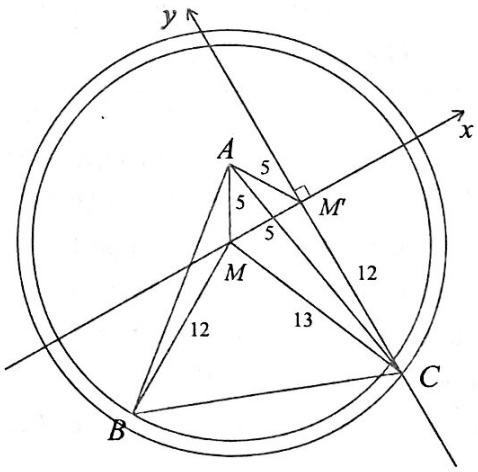


Hình 12

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác đều ABC, biết rằng bên trong nó có một điểm M cách các đỉnh khoảng cách 5 cm, 12 cm và 13 cm. Tính cạnh của tam giác đều đã cho.

Hướng dẫn trên hình 13.



Hình 13

Bài 2. Cho tam giác vuông cân ABC vuông tại A. Giả sử có điểm M ở ngoài tam giác sao cho MA = 3 cm, MB = 4 cm và MC = 5 cm. Tính diện tích tam giác đã cho.

Bài 3. Cho tam giác cân ABC, cân tại A và góc $\widehat{BAC}=20^0$. Trên AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính số đo góc $\widehat{BDC}$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/518 (Lớp 6). Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn đẳng thức $x^5 + y^3 - (x+y)^2 = 3z^3$.

HUỲNH THANH TÂM
(Bưu điện thị xã An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/518 (Lớp 7). Cho tam giác ABC, M là điểm trên cạnh AB sao cho $MB = \frac{1}{4}AB$, I là điểm trên cạnh BC sao cho $IC = \frac{3}{8}BC$, N là điểm đối xứng với điểm A qua I. Chứng minh rằng $MN // AC$.

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Bài T3/518. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+2020} + \sqrt[3]{x+2021} + \sqrt[3]{x+2022} = 0.$$

LƯƠNG VĂN BÁ
(GV THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T4/518. Cho tam giác ABC nhọn ($AB > BC$) nội tiếp đường tròn (O). Vẽ hai đường cao AD và CE của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của DE. Tia AI cắt (O) tại K ($K \neq A$). Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IDK nằm trên BD.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ngĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/518. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a^3}{1-a^2} + \frac{b^3}{1-b^2} + \frac{c^3}{1-c^2}$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

CAO XUÂN NAM
(GV THPT chuyên Hà Giang)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/518. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+8x+5}} + \dfrac{1}{\sqrt{4y^2-8y+5}} = \dfrac{2}{\sqrt{(x+y)^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{y-3}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

NGUYỄN VĂN BẢN
(GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, Điện Biên)

Bài T7/518. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$8abc - 8 \leq (ab + bc + ca + 1)^2.$$

NGUYỄN SONG MINH
(P518T1, chung cư The Golden An Khánh, Hà Nội)

Bài T8/518. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường tròn (AOH), (BOH), (COH) với (O). Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ. (Kí hiệu (UVW) chỉ đường tròn ngoại tiếp tam giác UVW).

HÀ HUY KHÔI *(Hà Nội)*

Bài T9/518. Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn phương trình $2^{x^2-3y+z} + 2^{y^2-3z+x} + 2^{z^2-3x+y} = \frac{3}{2}$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/518. Các số nguyên từ 51 đến 150 được xếp thành một bảng ô vuông kích thước 10×10. Tồn tại hay không cách xếp để với mọi cặp $(a; b)$ đứng kề nhau trong một hàng hoặc một cột thì có ít nhất một trong hai phương trình

$$x^2 - ax + b = 0 \text{ và } x^2 - bx + a = 0$$

có nghiệm nguyên?

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T11/518. Cho dãy số $(a_n)(n \in \mathbb{N}^*)$ được xác định bởi:

$$a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ và } a_{n+2} = 2a_{n+1} - pa_n,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó p là số nguyên tố. Tìm tất cả các giá trị của p sao cho tồn tại số nguyên dương m thỏa mãn $a_m = -3$.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định)

Bài T12/518. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp góc A của tam giác ABC không cân. D là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính AI và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. E là giao điểm của AI và BC. P là điểm chính giữa cung tròn $\overset{\frown}{BAC}$. Chứng minh PJ và DE cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

TRẦN VIỆT HÙNG

(Xã Tân Phú, huyện Châu Thành, tỉnh Sóc Trăng)

Bài L1/518. Trên bề mặt chất lỏng có hai nguồn sóng kết hợp A, B cách nhau 12 cm dao động ngược pha. Biết sóng do mỗi nguồn phát ra có tần số $f = 10$ Hz, tốc độ truyền sóng là 40 cm/s. Gọi M là một điểm nằm trên đường vuông góc với AB tại A, gần A nhất dao động với biên độ cực tiểu. Xác định độ dài đoạn AM.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/518. Trên đoạn mạch điện xoay chiều có bốn điểm theo đúng thứ tự A, M, N và B. Giữa hai điểm A và M chỉ có điện trở thuần, giữa hai điểm M và N chỉ có cuộn dây, giữa hai điểm N và B chỉ có tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch một điện áp xoay chiều 175 V – 50 Hz thì điện áp hiệu dụng trên đoạn AM là 25 V, trên đoạn MN là 25 V và trên đoạn NB là 175 V. Xác định hệ số công suất của toàn mạch.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEM IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/518 (For 6th grade). Find prime numbers x, y, z which satisfy the equality $x^5 + y^3 - (x+y)^2 = 3z^3$.

Problem T2/518 (For 7th grade). Given a triangle ABC. Let M be the point on the side AB so that $MB = \frac{1}{4}AB$, and I the point on the side BC so that $IC = \frac{3}{8}BC$. The point N is the reflection of A in the point I. Show that $MN \parallel AC$.

Problem T3/518. Solve the equation

$$\sqrt[3]{x+2020} + \sqrt[3]{x+2021} + \sqrt[3]{x+2022} = 0.$$

Problem T4/518. Given an acute triangle ABC ($AB > BC$) inscribed in a circle (O). Let AD and CE be two altitudes of the triangle ABC. Let I be the midpoint of DE. The ray AI intersects (O) at K ($K \neq A$). Show that the circumcenter of the triangle IDK lies on BD.

Problem T5/518. Find the minimum value of the expression

$$\frac{a^3}{1-a^2} + \frac{b^3}{1-b^2} + \frac{c^3}{1-c^2}$$

where a, b, c are positive numbers satisfying $a + b + c = 1$.

FOR HIGH SCHOOL

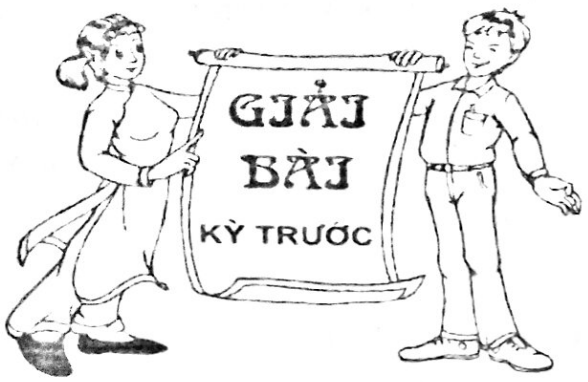
Problem T6/518. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+8x+5}} + \dfrac{1}{\sqrt{4y^2-8y+5}} = \dfrac{2}{\sqrt{(x+y)^2+1}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{y-3}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

Problem T7/518. Given real numbers a, b, c satisfying $a + b + c = 1$. Show that

$$8abc - 8 \leq (ab+bc+ca+1)^2.$$

(Xem tiếp trang 31)



Bài T1/514. *Trên bảng đen ta viết 2019 dấu cộng (+) và 2020 dấu trừ (–). Cho phép xóa hai dấu tùy ý và thay vào đó một dấu cộng nếu hai dấu đã xóa là như nhau, một dấu trừ nếu hai dấu đã xóa là khác nhau. Thực hiện phép toán đó 4038 lần. Hỏi trên bảng còn lại là dấu gì ?*

Lời giải. Sau mỗi lần xóa dấu thì trên bảng bớt đi một dấu. Khi xóa hai dấu cộng, hoặc khi xóa một dấu cộng với một dấu trừ thì số dấu trừ được giữ nguyên và bớt đi một dấu cộng. Khi xóa hai dấu trừ thì số dấu trừ giảm đi 2 và thêm một dấu cộng. Như vậy, sau mỗi lần xóa dấu thì số dấu trừ hoặc không giảm, hoặc có giảm thì luôn giảm đi một số chẵn. Ban đầu số dấu trừ bằng 2020, là một số chẵn, nên sau khi xóa 4037 lần (vì 2019 + 2020 – 4037 = 2) thì trên bảng chỉ còn hai dấu, do đó hoặc còn hai dấu trừ, hoặc không còn dấu trừ nào. Vậy sau khi xóa 4038 lần thì trên bảng chỉ còn lại một dấu cộng.

Nhận xét. 1) Một số bạn cho xóa các dấu cộng trước, hoặc cho xóa các dấu trừ trước, như thế chỉ nêu ra một cách xóa, trong khi bài toán yêu cầu mỗi lần xóa hai dấu tùy ý và thêm một dấu.

2) Có thể giải bài toán bằng cách thay dấu cộng bởi số 1 và thay dấu trừ bởi số – 1, việc thay hai dấu chuyển thành thay bằng tích của chúng do (+ 1)(+ 1) = (+ 1); (– 1) (– 1) = (+ 1) ; (+ 1) (– 1) = (– 1). Ban đầu tích của 2020 số – 1 bằng 1, còn tích các số 1 bằng 1. Sau mỗi lần xóa hai số và thay bằng số mới thì bớt đi một số nhưng tích của chúng không đổi, cuối cùng còn lại số 1.

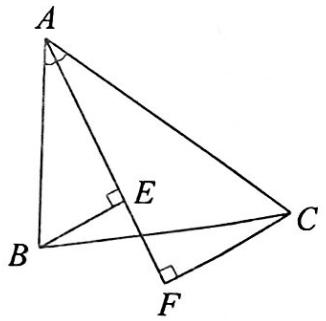
3) Trong lời giải trên ta chỉ chú ý số các dấu trừ là số chẵn hay số lẻ, còn số các dấu cộng là tùy ý. *Bài toán tổng quát*: Trên bảng cho m dấu cộng và n dấu trừ. Thực hiện phép xóa dấu như đề ra. Sau khi thực hiện $m + n - 1$ lần phép xóa dấu thì trên bảng còn lại dấu gì ?

4) Các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Huy Hoàng Sơn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Hoàng Tuấn Anh*, 6T, THPT Lương Thế Vinh; **Nghệ An:** *Nguyễn Thái Hoàng Anh*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Võ Nguyên Thăng*, 6A, THCS Trương Vương, TP. Đông Hà.

NGUYỄN VIỆT HẢI

T2/514. *Cho tam giác có $\hat{A}=60^0$ và $AB+AC=2BC$. Chứng minh rằng các đường trung tuyến AM, đường cao BH và đường phân giác CI của tam giác ABC đồng quy.*

Lời giải. (Dựa trên ý giải của nhiều bạn). Ta chứng minh tam giác ABC thỏa mãn giả thiết bài toán phải là tam giác đều và kết luận của bài toán là hiển nhiên đúng.



Thật vậy, ta hạ BE, CF vuông góc với đường phân giác góc $\hat{A}=60^o$, các tam giác vuông ABE, CAF là các nửa tam giác đều, cho nên ta có $BE=\frac{AB}{2}$ và $CF=\frac{AC}{2}$. Từ $AB+AC=2BC$ ta có $BE+CF=BC$, điều này chỉ xảy ra khi $E\equiv F$ (do cạnh huyền trên BC của các tam giác vuông lớn hơn cạnh góc vuông BE, CF), tức là khi BC vuông góc với phân giác của góc A. Khi đó tam giác ABC là tam giác đều (điều phải chứng minh).

Nhận xét. Các bạn lớp sau đây có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Duy Gia Kiệt, Nguyễn Thị Phương Linh, Nguyễn Thùy Dương,* 7A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ** : *Nguyễn Thị Trà Giang, Nguyễn Duy Anh, Kiều Công Tuấn, Tạ Minh Dũng, Nguyễn Đức Tiến, Đỗ Ngọc Tiến,* 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Thái Nguyên:** *Trần Quang Khôi,* 6A5, *Đồng Hoàng Minh Đại,* 6A4, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Hà Nội:** *Ngô Uyển Nhi,* 7A5, THCS Phương Liệt, Thanh Xuân, *Hoàng Tuấn Anh,* 6T, THCS Lương Thế Vinh; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa,* 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư,* 7A1, THCS Kế An, huyện Kế Sách; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng,* 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Nghệ An:** *Lê Văn Quang Hiếu,* 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/514. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn a + b + c = abc. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}\le\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\quad(1).$$

Lời giải. Cách 1. Từ $a+b+c=abc$ suy ra $c=\dfrac{a+b}{ab-1}$ và $ab>1$. Ta có:

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}=\frac{\dfrac{a+b}{ab-1}}{\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{ab-1}\right)^2+1}}=\frac{\dfrac{a+b}{ab-1}}{\sqrt{\dfrac{a^2b^2+a^2+b^2+1}{(ab-1)^2}}}$$

$$=\frac{a+b}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}=\frac{(a+b)\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}{(a^2+1)(b^2+1)}.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$(a^2+1)(b^2+1)\ge(ab+1)^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\ge ab+1.$$

Do đó:

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}=\frac{(a+b)\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}{(a^2+1)(b^2+1)}\ge\frac{(a+b)(ab+1)}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

$$=\frac{a^2b+ab^2+a+b}{(a^2+1)(b^2+1)}=\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}.$$

Vậy BĐT (1) được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi $a=b>1, c=\dfrac{2a}{a^2-1}$.

Cách 2. Đặt $x=\dfrac{1}{a}, y=\dfrac{1}{b}, z=\dfrac{1}{c}$ (với $x, y, z>0$). Khi đó ta có $xy+yz+zx=1$. Ta có:

$$\frac{a}{a^2+1}=\frac{\dfrac{1}{a}}{1+\dfrac{1}{a^2}}=\frac{x}{1+x^2}.$$

Tương tự: $\dfrac{b}{b^2+1}=\dfrac{y}{1+y^2}; \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Do đó BĐT (1) trở thành

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}\le\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\quad(2).$$

Vì $xy+yz+zx=1$ nên

$1+x^2=xy+yz+zx+x^2=(x+y)(x+z)$;

$1+y^2=(x+y)(y+z)$; $1+z^2=(x+z)(y+z)$.

Do đó BĐT (2) trở thành:

$$\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(x+y)(y+z)}\le\frac{1}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2xy+yz+xz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\le\frac{1}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}$$

$$\Leftrightarrow(x+y)\sqrt{(x+z)(y+z)}\ge 2xy+(x+y)z$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+z)(y+z)}\ge\frac{2xy}{x+y}+z\qquad(3).$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ nên

$$\sqrt{(x+z)(y+z)}=\sqrt{xy+z^2+(x+y)z}$$

$$\ge\sqrt{xy+z^2+2\sqrt{xy}z}=\sqrt{xy}+z\ge\frac{2xy}{x+y}+z.$$

Vậy BĐT (3) đúng, do đó BĐT (1) được chứng

minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y < 1$ và $z = \frac{1-x^2}{2x}$, tức là $a = b > 1$ và $c = \frac{2a}{a^2-1}$.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều tìm ra kết quả và cách làm tương tự theo một trong hai cách trên.

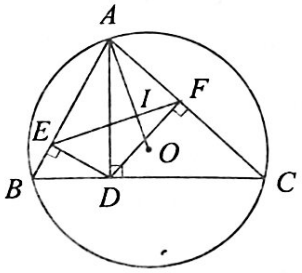
Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Sóc Trăng: *Nguyễn Anh Thư,* 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng,* 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Trị**: *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Hưng yên**: *Lê Tuấn Nghĩa,* 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ. **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng,* 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai. **Hưng Yên**: *Trần Quốc Thái,* 9A1, THCS Vĩnh Yên.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/514. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ đường cao AD, gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các cạnh AB và AC. Giả sử hai đoạn thẳng OA và EF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng* $AB.AC.AI = AD^3$.

Lời giải. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADB và ADC ta có:



$$AD^2 = AE.AB$$
$$= AF.AC.$$

Suy ra: $AD^4 = AE.AF.AB.AC$ (1).

Lại có, tứ giác $AEDF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ADF}$. Hơn nữa

$$\widehat{OAC} = \frac{180° - \widehat{AOC}}{2} = 90° - \widehat{ABC} = \widehat{BAD}$$

suy ra $\Delta DAE \sim \Delta FAI$ (g.g). Do đó:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AE}{AI} \text{ hay } AD.AI = AE.AF \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có: $AD^4 = AD.AI.AB.AC$.

Do đó $AB.AC.AI = AD^3$ (đpcm).

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Vĩnh Phúc: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Gia Khánh*, 8B, THCS Nguyễn Tất Thành, TP. Hưng Yên; **Nghệ An:** *Ngô Thị An Bình*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Thùy Dung*, 8C, THCS Ttr. Triệu Sơn; **Phú Thọ:** *Hà Quang Tùng*, 9A3, THCS Lâm Thao.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/514. *Cho đa thức* $f(x) = (x + a)(x + b)$ *trong đó a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng luôn tồn tại số nguyên m sao cho*

$$f(m) = f(2020).f(2021).$$

Lời giải. Ta có: $f(2020)f(2021) =$

$$= (2020+a)(2020+b)(2021+a)(2021+b)$$
$$= (2020+a)(2021+b).(2020+b)(2021+a)$$
$$= (2020.2021+2020b+2021a+ab)\times$$
$$\times(2020.2021+2020a+2021b+ab)$$
$$= (2020.2021+2020b+2020a+ab+a)\times$$
$$\times(2020.2021+2020a+2020b+ab+b)$$
$$= f(2020.2021+2020b+2020a+ab).$$

Đặt $m = 2020.2021+2020b+2020a+ab$, ta có m là số nguyên thỏa mãn

$f(m) = f(2020)f(2021)$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Một số bạn đã giải bài toán bằng cách chứng minh hệ thức

$$f(x)f(x+1) = f(f(x)+x), \forall x$$

(bạn đọc tự kiểm tra); với $x = 2020$, ta có:

$$f(2020)f(2021) = f(f(2020)+2020);$$

đặt $m = f(2020)+2020$ suy ra điều phải chứng minh.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi

Xuân; **Phú Thọ:** *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, H. Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc, H. Yên Lạc; **Nghệ An:** *Nguyễn Công An*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hải Phòng:** *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng; **Thái Nguyên:** *Đào Hải Đăng*, 8A1, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Thùy Dung*, 8C, THCS TTr. Triệu Sơn; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, huyện Kế Sách.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/514. *Cho a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{d+1}+\frac{d}{a+1}.$$

Lời giải (của tác giả *Nguyễn Việt Hùng* kết hợp với lời giải của một số bạn).

1) Tìm giá trị nhỏ nhất: Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$P=\frac{a^2}{a(b+1)}+\frac{b^2}{b(c+1)}+\frac{c^2}{c(d+1)}+\frac{d^2}{d(a+1)}$$

$$\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+bc+cd+da+a+b+c+d}$$

$$=\frac{1}{(a+c)(b+d)+1}$$

$$\geq\frac{1}{\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2+1}=\frac{4}{5}.$$

$\min P=\frac{1}{4} \Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{4}.$

2) Tìm giá trị lớn nhất: Do a,b,c,d không âm nên $ab,bc,cd,da\geq 0$ và $a+1,b+1,c+1,d+1\geq 1$.

Suy ra:

$$1-P=a+b+c+d-\left(\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{d+1}+\frac{d}{a+1}\right)$$

$$=\left(a-\frac{a}{b+1}\right)+\left(b-\frac{b}{c+1}\right)+\left(c-\frac{c}{d+1}\right)+\left(d-\frac{d}{a+1}\right)$$

$\geq 0.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a=c=0\\b+d=1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}b=d=0\\a+c=1\end{cases}.$$

Nhận xét. Tuy đề ra cho bậc THPT, nhưng nhiều bạn lớp 7, 8, 9 cũng tham gia giải và giải tốt. Các bạn sau đây có lời giải chuẩn: **Hà Nội**: *Như Hà Xuân Anh*, 8D, THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam; *Hàn Đức Minh*, 8A0, THCS Nguyễn Trường Tộ, Q. Đống Đa; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 10 Toán 2, chuyên Quốc học Huế; **Thanh Hóa**: *Lê Thị Thùy Dung*, 8C, THCS thị trấn Triệu Sơn.

Các bạn sau đây còn thiếu sót khi trả lời câu hỏi: **Khi nào** giá trị lớn nhất đạt được (mặc dù đầu bài không yêu cầu). **Bình Định**: *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ**: *Trần Thị Kim Dung*, THPT Nguyễn Việt Hồng, Q. Ninh Kiều; *Phan Trung Đức*, 11A1 chuyên Lý Tự Trọng; **Đăk Lăk**: *Trịnh Thị Thúy Nga*, 10A11, THPT Krông Bông; **Đồng Tháp**: *Phan Hữu Đăng*, *Lê Văn Anh Khoa*, *Nguyễn Thiên Lý*, *Lạc Xuân Thịnh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội**: *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; *Nguyễn Đức Trọng*, 9E, THCS Đa Tốn, Gia Lâm; *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; *Nguyễn Duy Anh Quốc*, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên**: *Cao Trung Hiếu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Quảng Bình**: *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1; *Trương Thị Thu Hà*, 10 Toán 1, *Lê Đức Hạnh*, 10 Toán 2,

THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị**: *Ngô Hoàng Thành Đạt, Nguyễn Ngọc Thọ*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đông Hà; *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, huyện Cam Lộ; **Sóc Trăng**: *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, huyện Kế Sách; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Đại Dương*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn. (Bạn *Nguyễn Đại Dương* cần gửi bài T6 và T8 trong hai tờ giấy riêng biệt (để 2 thầy chấm).

Bài T7/514. *Cho hệ phương trình*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

có các hệ số thỏa mãn:

1) $a_{ii} > 0, \forall i = \overline{1,n}$;

2) $a_{ij} < 0, \forall i \neq j, \forall i, j = \overline{1,n}$;

3) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0, \forall i = \overline{1,n}$.

Chứng minh rằng hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Giả sử $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn (1). Không mất tính tổng quát, giả thiết rằng

$$|x_1| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \ (2).$$

Từ phương trình đầu của hệ (1) ta có:

$$a_{11}x_1 = -a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n.$$

Do đó: $|a_{11}x_1| = |a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n|$

$$\leq |a_{12}x_2| + \ldots + |a_{1n}x_n|$$

hay $a_{11}|x_1| = -a_{12}|x_2| - \ldots - a_{1n}|x_n|$

$$\leq -a_{12}|x_1| - \ldots - a_{1n}|x_1|.$$

Suy ra: $a_{11}|x_1| \leq -(a_{12} + \ldots + a_{1n})|x_1|$

$$\Leftrightarrow (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n})|x_1| \leq 0.$$

Từ giả thiết 3) thì $a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} > 0$, suy ra $|x_1| \leq 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$.

Từ (2) suy ra $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$.

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

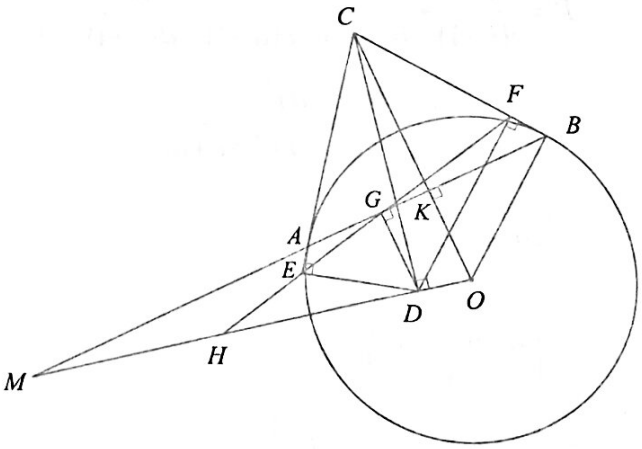
Nhận xét. Đây là dạng toán về hệ phương trình tổng quát của đại số tuyến tính nên có ít bạn tham gia giải. Các bạn sau đây có lời giải đúng.

Bà Rịa - Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Ngô Quốc Bảo*, 10/9, THPT Nguyễn Đình Chiểu, TP. Bến Tre; **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; *Ngô Văn Minh Thắng*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/514. *Cho đường tròn tâm O và điểm M nằm ngoài đường tròn. Vẽ cát tuyến MAB biến thiên đến đường tròn (A nằm giữa M và B). Các tiếp tuyến tại A và B cắt nhau ở C. Vẽ CD vuông góc với MO, DE vuông góc với CA, DF vuông góc với CB. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải.



Gọi K là giao điểm của CO và AB. Khi đó $OD.OM = OK.OC = OB^2$, suy ra $OD = \dfrac{OB^2}{OM}$ (không đổi). Vì vậy điểm D cố định. Giả sử đường thẳng EF cắt OM tại H. Chú ý rằng năm điểm A, B, C, D, O cùng nằm trên đường tròn

đường kính OC. Từ đó nếu kẻ DG vuông góc với AB (G thuộc AB) thì G thuộc đường thẳng EF (*đường thẳng Simson* của tam giác ABC ứng với điểm D) và $DG // OC$. Ta có $\widehat{GDH} = \widehat{COH}$ (do $DG // OC$) $= \widehat{CBD}$ (do bốn điểm C, B, O, D cùng nằm trên một đường tròn) $= \widehat{HGD}$ (do bốn điểm G, F, B, D cùng nằm trên một đường tròn). Do đó tam giác HGD cân tại H. Trong tam giác vuông MGD có $HG = HD$ nên $HM = HD$ hay H là trung điểm của MD. Suy ra H là điểm cố định mà đường thẳng EF luôn đi qua, ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Đức Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, *Nguyễn Anh Tuấn*, 10 Toán, THPT Chu Văn An, *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Quảng Bình:** *Đặng Hoàng Duy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Quảng Trị:** *Ngô Hoàng Thành Đạt*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Quang Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Trúc Như Bình*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Sóc Trăng:** *Lâm Khả Hân*, 10A2T, *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng; **Cần Thơ:** *Phan Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ;

Bà Rịa - Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bến Tre:** *Ngô Quốc Bảo*, 10/9, THPT Nguyễn Đình Chiểu, TP. Bến Tre; **Tiền Giang:** *Mai Võ Phúc Thành*, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/514. *Cho các số thực dương x, y thỏa mãn*

$$x < \sqrt{2}y,\ x.\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}} = 2\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}} + x.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}}$.

Lời giải. Đặt $a = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}}$. Từ giả thiết ta suy ra $a > 0$ và

$$x.a = 2\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{4}} + x \Leftrightarrow x(a-1) = 2\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow a > 1, x^2(a-1)^2 = 4\left(a^2 + \frac{x^2}{4}\right) = 4a^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(a^2 - 2a\right) = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 4\right)a = 2x^2 \Leftrightarrow x > 2, a = \frac{2x^2}{x^2 - 4}.$$

Do đó

$$P = x^2\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}} = x^2.\frac{2x^2}{x^2-4} = 2.\frac{((x^2-4)+4)^2}{x^2-4}$$

$$= 2.\frac{(x^2-8)^2 + 16(x^2-4)}{x^2-4} = 2.\frac{(x^2-8)^2}{x^2-4} + 32 \geq 32.$$

$$P = 32 \Leftrightarrow x^2 = 8,\ a = \frac{2x^2}{x^2-4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8, y^2 = 20 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}, y = 2\sqrt{5}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 32.

Nhận xét. Bài toán cực trị có ràng buộc trên có nhiều cách khác nhau. Cách giải trên thông qua đặt ẩn phụ a để biểu diễn biểu thức P theo x. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Xuân Tùng*, 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Hồng Đăng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Nguyễn Khánh Huy*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị**: *Nguyễn Hữu Huy Hoàng*, 11A8, THPT Cam Lộ, Cam Lộ; **Lâm Đồng**: *Tô Gia Bảo*, 10T, THPT chuyên Thăng

Long, TP. Đà Lạt; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thiên Lý*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng; **Bến Tre:** *Ngô Quốc Bảo*, 10/9, THPT Nguyễn Đình Chiểu, TP. Bến Tre; **Cần Thơ**: *Trần Thị Kim Hoàng, Trần Thị Kim Phụng*, 12A2, THPT Nguyễn Việt Hồng, Ninh Kiều, TP. Cần Thơ.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/514. *Cho* $S=1!2!\ldots100!$. *Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k với* $1\le k\le 100$ *sao cho thương* $\frac{S}{k!}$ *là số chính phương. Số k như thế có là duy nhất hay không?* (*kí hiệu* $n!=1.2.3\ldots n$ *với* $n\in\mathbb{N}^*$ *và quy ước* $0!=1$).

Lời giải (Dựa theo lời giải của bạn *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** và của tác giả bài toán).

Ta có $\frac{S}{50!}=\left(2^{98}.3^{98}.4^{96}\ldots99^2\right).2^{50}$. Do đó với $k=50$ thì $\frac{S}{k!}$ là số chính phương. Giả sử tồn tại k, $1\le k\le100$ và $k\ne50$ thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 1: $1\le k<50$. Ta có $\frac{S}{k!}=\frac{S}{50!}.\frac{50!}{k!}$. Suy ra $\frac{50!}{k!}$ là số chính phương. Khi phân tích 50! ra thừa số nguyên tố thì $\gamma_{47}(50!)=1$. Do đó $k\ge47$. Thử với $k=47, 48, 49$ ta thấy $\frac{50!}{k!}$ không là số chính phương.

Trường hợp 2: $50<k\le100$. Ta có $\frac{k!}{50!}=\frac{\frac{S}{50!}}{\frac{S}{k!}}$. Do đó $\frac{k!}{50!}$ là số chính phương (do $\frac{S}{50!}$ và $\frac{S}{k!}$ đều là số chính phương). Với $k=51, 52$ thì $\frac{k!}{50!}$ không là số chính phương.

Với $53\le k\le100$ ta thấy $\frac{k!}{50!}$ chia hết cho 53 và $\frac{k!}{50!}$ không chia hết cho 53^2 do đó $\frac{k!}{50!}$ không là số chính phương.

Kết luận: $k=50$ là số duy nhất để $\frac{S}{k!}$ là số chính phương.

Nhận xét. Có ít bạn tham gia giải bài này, Tất cả các bạn đều có lời giải đúng với các cách giải (dài hay ngắn). Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Tĩnh: *Ngô Văn Thông, Lê Văn Danh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Trương Thị Thu Hà*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Bà Rịa - Vũng Tàu**: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bình Dương**: *Lê Minh Thành*, 10A2, THPT Nguyễn Khuyến, TP. Thủ Dầu Một; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, 11 Toán 1; *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/514. *Cho hàm số* $f(x)$ *xác định và không là hàm hằng trên* $\mathbb{R}$. *Chứng minh rằng luôn tồn tại một số thực a, một tập A khác rỗng là tập con thực sự của* $\mathbb{R}$ *và hai hàm số* $g(x), h(x)$ *thỏa mãn* $g(x)\ge a, \forall x\in A$ *và* $h(x)<a$, $\forall x\in\overline{A}$ $(\overline{A}=\mathbb{R}\setminus A)$ *sao cho:*

$$f(x)=g(x)+h(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lời giải. Vì $f(x)$ không là hàm hằng nên tồn tại x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ sao cho $f(x_1) > f(x_2)$.

Đặt $a = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$. Xét các tập hợp:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq a\}$ và $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < a\}$.

Dễ thấy $x_1 \in A, x_2 \in \overline{A}, A \cup \overline{A} = \mathbb{R}$ và A là tập con thực sự của $\mathbb{R}$.

Đặt $\lambda_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in A \\ 0 \text{ nếu } x \notin A \end{cases}$; $\lambda_{\overline{A}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in \overline{A} \\ 0 \text{ nếu } x \notin \overline{A} \end{cases}$.

Xét các hàm số:

$$g(x) = f(x)\lambda_A(x),\ h(x) = f(x)\lambda_{\overline{A}}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có: $g(x) = f(x)\lambda_A(x) \geq a,\ \forall x \in A;$

$$h(x) = f(x)\lambda_{\overline{A}}(x) < a, \forall x \in \overline{A}.$$

Ta sẽ kiểm tra: $f(x) = g(x) + h(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Thật vậy:

- Xét trường hợp $x \in A$, ta có:

$$g(x) + h(x) = f(x)\lambda_A(x) + f(x)\lambda_{\overline{A}}(x)$$
$$= f(x).1 + f(x).0 = f(x).$$

- Xét trường hợp $x \in \overline{A}$, ta có:

$$g(x) + h(x) = f(x)\lambda_A(x) + f(x)\lambda_{\overline{A}}(x)$$
$$= f(x).0 + f(x).1 = f(x).$$

Vậy $f(x) = g(x) + h(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Yêu cầu của bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Đây là bài toán có sử dụng đến kiến thức về tập hợp, rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

TRẦN HỮU NAM

Bài T12/514. *Cho tam giác ABC nhọn. Hai điểm M, N nằm trên cạnh BC sao cho M, N không trùng với B, C đồng thời BM = CN. Đường thẳng qua M vuông góc với CA, cắt đường thẳng AB tại F. Đường thẳng qua N vuông góc với AB, cắt đường thẳng AC tại E. MF cắt NE tại P. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF lấy Q sao cho PQ // BC. Gọi R là điểm đối xứng với Q qua trung điểm của BC. Chứng minh rằng AR ⊥ BC.*

Lời giải.

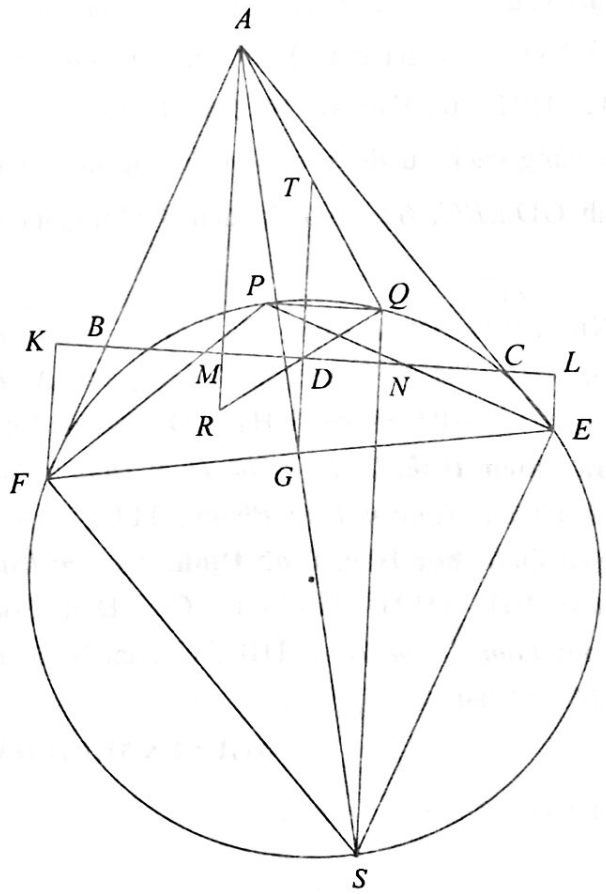
Gọi D, G, T theo thứ tự là trung điểm của BC, EF, AQ; S là điểm đối xứng của A qua G; K, L thứ tự là hình chiếu của F, E trên BC. Dễ thấy $AFSE$ là hình bình hành. Do đó:

$$FS // AE \equiv AC; ES // AF \equiv AB.$$

Kết hợp với $FP \perp AC; EP \perp AB$, suy ra $FP \perp FS$; $EP \perp ES$.

Do đó P, S, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính PS. Từ đó, chú ý rằng Q thuộc đường tròn (PEF), suy ra $QP \perp QS$.

Kết hợp với $QP // BC$, suy ra $BC \perp QS$.



Vì T, G theo thứ tự là trung điểm của AQ, AS nên $TG // QS$. Vậy $BC \perp TG$ (1).

Vì $FB \equiv AB \perp NE; FK \perp BC \equiv NL$ nên

$$\widehat{BFK}=\widehat{ENL}.$$

Do đó các tam giác vuông FKB, NLE đồng dạng. Tương tự các tam giác vuông ELC, MKF đồng dạng. Chú ý rằng $MB=NC$; $DB=DC$, ta có:

$$\frac{KB}{CL}=\frac{KB}{KF}.\frac{KF}{LC}=\frac{LE}{LN}.\frac{KM}{LE}=\frac{KM}{LN}$$

$$=\frac{KM-KB}{LN-CL}=\frac{MB}{NC}=1=\frac{DB}{DC}=\frac{DB+KB}{DC+LC}=\frac{DK}{DL}.$$

Kết hợp với $GF=GE$, suy ra $\frac{DK}{DL}=\frac{GF}{GE}$.

Kết hợp với $FK//EL\perp BC$, theo định lí Thales đảo, suy ra $GD\perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $TD\perp BC$. Từ đó, chú ý rằng $TA=TQ; DR=DQ$, suy ra $AR\perp BC$.

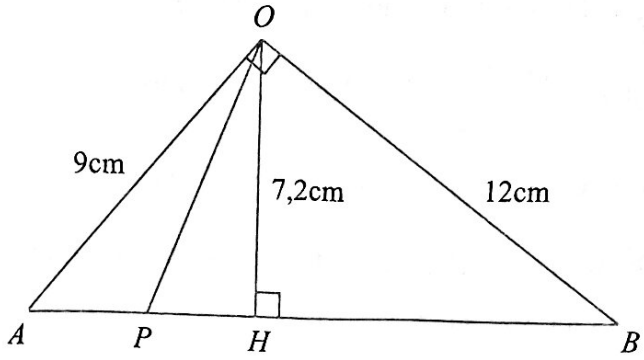
Nhận xét. 1) Bài toán này không khó nhưng chỉ có 7 bạn tham gia giải. Bạn *Nguyễn Anh Tuấn*, 10T, THPT Chu Văn An, **Hà Nội** cho lời giải khá gọn bằng cách sử dụng tích vô hướng để chứng minh $GD\perp BC$, 6 bạn còn lại đều cho lời giải quá dài.

2) Xin nêu tên tất cả 7 bạn: **Hà Nội:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 10T, THPT Chu Văn An, *Nguyễn Xuân Tùng*, 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Minh Thùy*, *Hoàng Bảo Minh Châu*, *Nguyễn Duy Phước*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/514. *Tại O trên mặt nước có một nguồn phát sóng với tần số f = 80* Hz, *tốc độ truyền sóng là* 1,6 m/s. *Ba điểm A, B, O nằm trên mặt nước tạo thành tam giác vuông tại O. Biết OA* = 9 cm; *OB* = 12 cm. *Xác định số điểm dao động cùng pha với A trên đoạn BA.*

Lời giải.



Ta có $\lambda=\frac{160}{80}=2$cm. Đường cao tam giác OAB hạ từ O là $OH=7{,}2$cm.

Lại có $OA=9\text{cm}=4{,}5\lambda$ nên sóng tại điểm A dao động ngược pha với O.

Gọi P là điểm thuộc cạnh AB dao động ngược pha với O. Khi đó:

$$OP=\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda=\left(k+\frac{1}{2}\right)2.$$

+ Xét khi điểm P trên đoạn AH, ta thấy không có giá trị nguyên nào của k thỏa mãn.

+ Xét khi điểm P trên đoạn HB, ta có:

$$OH\le OP\le OB \text{ hay } 7{,}2\le\left(k+\frac{1}{2}\right)2\le 12.$$

Có hai giá trị nguyên của k (k = 4 hoặc k = 5) thỏa mãn. Do vậy trên AB có 2 điểm dao động cùng pha với A.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: **Hưng Yên:** *Cao Trung Hiếu*, lớp 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Cần Thơ:** *Nguyễn Trần Quốc Thái*, 11A1, THPT An Khánh, TP. Cần Thơ.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/514. *Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB nối tiếp nhau. Trên đoạn AM chứa biến trở và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều* $u_{AB}=U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$ (V) *và điều chỉnh biến trở sao cho công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB đạt cực đại* P_{max} = 45 W. *Biết rằng khi đó điện áp*

☞

 (Tiếp theo trang 21)

Problem T8/518. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O). Let H be the orthocenter of the triangle. Let X, Y, Z respectively be the second intersection between the circles (AOH), (BOH), (COH) with (O). Show that H is the incenter of the triangle XYZ. (The notation (UVW) denotes the circumcircle of the triangle UVW).

Problem T9/518. Find all real numbers x, y, z such that $2^{x^2-3y+z}+2^{y^2-3z+x}+2^{z^2-3x+y}=\frac{3}{2}$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/518. The integers from 51 to 150 are aranged in a chess board of the size 10×10. Does there exist an arrangment so that for any pair of numbers $(a; b)$ which are adjacent in a row or in a column at least one of the following equations

$$x^2-ax+b=0 \text{ and } x^2-bx+a=0$$

has an integral solution?

Problem T11/518. A sequence $(a_n)(n\in\mathbb{N}^*)$ is determined as follows

$$a_1=1, a_2=2 \text{ and } a_{n+2}=2a_{n+1}-pa_n,\ n\in\mathbb{N}^*,$$

where p is some prime number. Find all possible values for p so that there exists a posivete integer m satisfying $a_m=-3$.

Problem T12/518. Given a non-isosceles triangle ABC and let I, J respectively be the center of the incircle of ABC and the excircle corresponding to the angle A. Let D be the second intersection between the circle with the diameter AI and the circumcircle of ABC. Assume that E is the intersection between AI and BC and P is the midpoint of the arc $\overset{\frown}{BAC}$. Show that the intersect between PJ and DE lies on the circumcircle of ABC.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Ha Noi*)

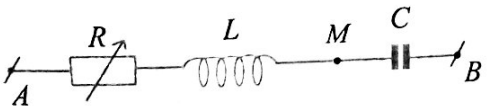
☞ *trên đoạn mạch AM có biểu thức là*

$$u_{AM}=120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)(\text{V}).$$

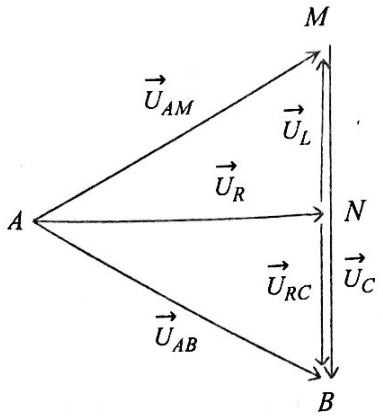
Xác định giá trị điện dung của tụ điện.

Lời giải.

a)



b)



Khi công suất tiêu thụ trên AB cực đại thì:

$$R=|Z_L-Z_C|,\ \widehat{NAB}=45^\circ.$$

Theo đề bài $\widehat{MAB}=105^\circ$. Suy ra $\widehat{MAN}=60^\circ$.

$U_R=U_{AM}\cos\widehat{MAN}=120\cos 60^o=60$ V;

$R=\dfrac{U_R^2}{P_{\max}}=80\ \Omega$;

$U_L=U_{AM}.\sin\widehat{MAN}=120\sin 60^o=60\sqrt{3}$ V;

$U_C=U_L+U_R=60(\sqrt{3}+1)$ V;

$\dfrac{Z_C}{R}=\dfrac{U_C}{U_R}=\sqrt{3}+1$. Suy ra: $Z_C=218{,}6\ \Omega$ và $C=15\ \mu$F.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Cao Trung Hiếu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, **Hưng Yên**; *Nguyễn Trần Quốc Thái*, 11 A3, THPT An Khánh, quận Ninh Kiều, **Cần Thơ**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

NGUYỄN TUẤN ANH
(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Giới thiệu. Phương pháp quy nạp là cách gọi tắt cho phương pháp quy nạp Toán học, một trong số những phương pháp chứng minh cơ bản nhất của Toán học. Nguyên lý nền tảng (nguyên lý quy nạp) và cách sử dụng phương pháp đã khá quen thuộc với bạn đọc học và làm Toán. Trong bài viết này ta sẽ nhìn lại phương pháp dưới góc độ kết hợp với các kỹ thuật, ý tưởng chứng minh khác, qua đó thấy được tính hiệu quả của phương pháp.

1. Nguyên lý quy nạp Toán học.

a) Nguyên lý quy nạp Toán học: *Với P_n là một mệnh đề (n là một số tự nhiên). Giả sử rằng:*

- *P_1 là một mệnh đề đúng.*
- *Nếu $k \geq 1$ và P_k đúng thì P_{k+1} cũng đúng.*

Khi đó P_n đúng với mọi n.

Cách chứng minh dựa trên nguyên lý quy nạp Toán học được gọi là phương pháp quy nạp. Nói cách khác phương pháp quy nạp bao gồm hai bước sau:

- **Bước cơ sở:** Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$ (có thể xuất phát là $n = n_0$ nào đó).
- **Bước quy nạp:** Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, cố gắng chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$.

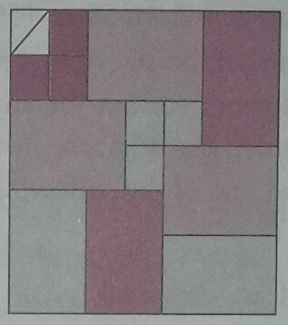
Khi đó mệnh đề sẽ đúng với mọi n.

b) Thí dụ minh họa

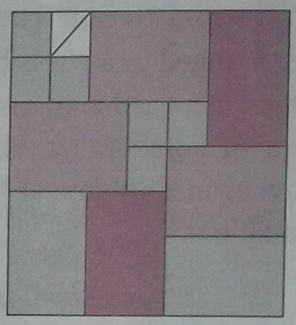
Bài toán 1. *Với bảng kích thước $7^n \times 7^n$; ($n \in \mathbb{N}^*$) bị xóa một ô nào đó. Chứng minh rằng bảng có thể phủ được bởi các L tromino.*

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp.

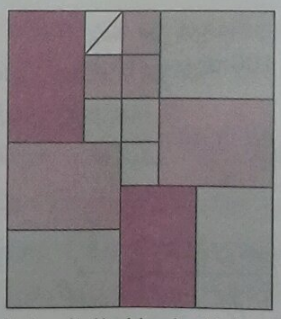
Với $n = 1$, vì tính đối xứng của bảng nên ta có thể giả sử vị trí của ô bị xóa là $(i; j)$ (ô thuộc hàng i cột j) với $1 \leq i, j \leq 4$. Ta chia bảng tùy theo vị trí ô bị xóa như các hình vẽ sau:



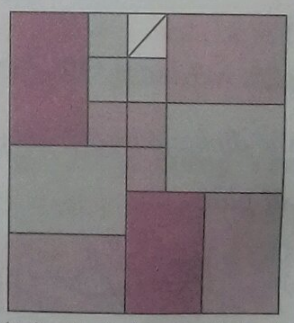
$(i; j) = (1;1)$ chia như hình vẽ
Hình 1



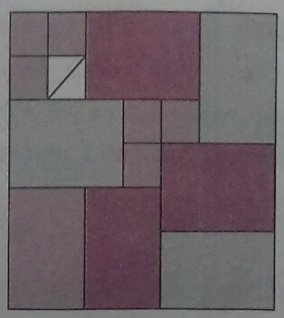
$(i; j) = (1;2)$ chia như hình vẽ
Hình 2



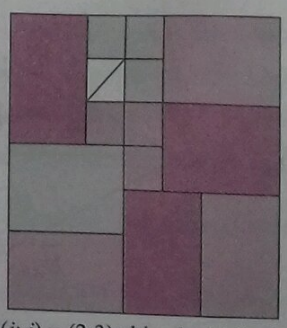
$(i; j) = (1;3)$ chia như hình vẽ
Hình 3



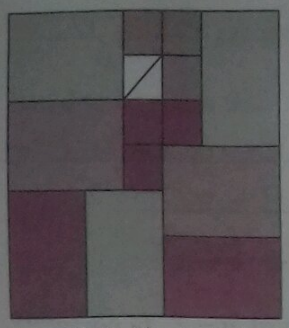
$(i; j) = (1;4)$ chia như hình vẽ
Hình 4



$(i; j) = (2;2)$ chia như hình vẽ
Hình 5

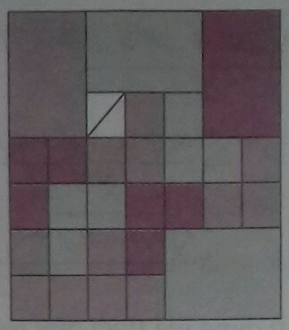


$(i; j) = (2;3)$ chia như hình vẽ
Hình 6



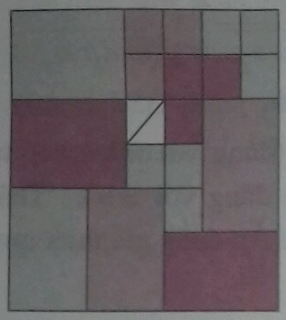
$(i;j) = (2;4)$ chia như hình vẽ

Hình 7



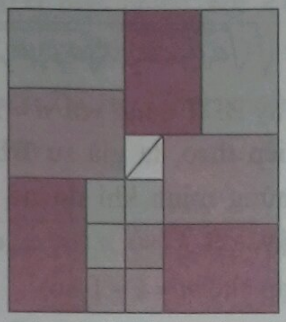
$(i;j) = (3;3)$ chia như hình vẽ

Hình 8



$(i;j) = (3;4)$ chia như hình vẽ

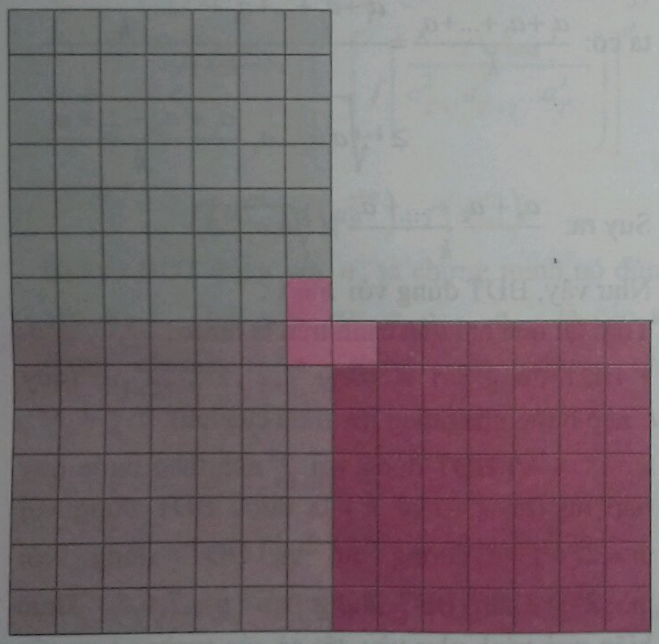
Hình 9



$(i;j) = (4;4)$ chia như hình vẽ

Hình 10

(mỗi phần hình chữ nhật nhỏ có kích thước là 2×3 hoặc 3×2)



Hình 11

Giả sử kết luận đúng với $n = k$, ta chứng minh nó đúng với $n = k+1$. Thật vậy, ta chia bảng $7^{k+1} \times 7^{k+1}$ thành $7^k \times 7^k$ hình vuông kích thước 7×7. Khi đó ô vuông đơn vị bị xóa sẽ thuộc về một hình 7×7 nào đó. Theo giả thiết quy nạp trong trường hợp $n = 1$, hình này có thể phủ được bởi các L tromino.

Với phần còn lại của bảng, ta xem mỗi hình 7×7 như một ô vuông đơn vị, hình 7×7 chứa ô bị xóa đã phủ bên trên như một ô đơn vị bị xóa. Theo giả thiết quy nạp với k bảng sẽ được phủ bởi các L tromino mới (là L tromino ghép bởi ba hình vuông 7×7).

Vấn đề còn lại là ta chứng minh L tromino mới có thể phủ được bởi các L tromino ban đầu. Để thực hiện được điều đó, ta đặt một L tromino ban đầu lên phần giao của ba hình 7×7 như **hình 11**. Khi đó, theo trường hợp với $n = 1$ phần L tromino mới này có thể phủ được bởi các L tromino ban đầu. Bài toán được giải.

Nhận xét 1. Khi sử dụng phương pháp quy nạp ta cần lưu ý một số vấn đề, kỹ thuật sau:

- Bước cở sở là quan trọng (dù kiểm tra không quá khó), đây là nền tảng để bước quy nạp có thể vận hành, bỏ qua bước này rất có thể dẫn đến sai sót.
- Trong bước quy nạp, đôi lúc ta cần áp dụng giả thiết quy nạp cho các trường hợp của $k, k-1, k-2, \ldots$ mới có thể chứng minh được cho trường hợp $k+1$.
- Bước quy nạp thường được kết hợp với một số kỹ thuật như là tách ghép, thêm bớt (với các bài toán đại số, số học), đánh giá (với các bài toán BĐT), chia hình, tô màu (với các bài toán tổ hợp), và các kỹ thuật khác nữa.

Để thấy rõ hơn về ba nhận xét trên mời bạn đọc đến với một số bài toán sau (điều này là cần thiết với bạn đọc mới tiếp cận với phương pháp quy nạp).

Bài 1. Với n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Bài 2. Với $\{F_n\}_{n \geq 0}$ là dãy số được xác định bởi $\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng

$$F_1F_2 + F_2F_3 + \ldots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2.$$

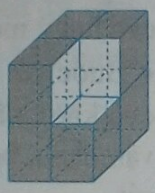
Bài 3. Với α là một số thực thỏa mãn $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ là một số nguyên. Chứng minh rằng $\alpha^n + \dfrac{1}{\alpha^n}$ cũng là một số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 4. Với n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$

Bài 5. Với n là một số tự nhiên và $n\ge 2$. Cho $2n$ điểm trong không gian, các điểm này được nối với nhau theo một cách nào đó bởi đúng n^2+1 đoạn thẳng khác nhau. Chứng minh rằng luôn tồn tại ba điểm nào đó được nối cạnh đôi một với nhau.

Bài 6. Với bảng ô vuông kích thước $2^n\times 2^n$ bị xóa một ô nào đó. Chứng minh rằng bảng có thể phủ được bởi các L tromino (hình vẽ), biết rằng các L tromino có thể xoay.

Bài 7. Một hình lập phương kích thước $2\times 2\times 2$ (được ghép thành từ 8 hình lập phương đơn vị) bị mất đi một hình lập phương đơn vị gọi là hình lập phương khuyết.



Chứng minh rằng với m nguyên dương thì khối lập phương $2^m\times 2^m\times 2^m$ bị mất đi một hình lập phương đơn vị có thể được ghép thành từ các hình lập phương khuyết.

2. Phương pháp quy nạp và một số kỹ thuật kết hợp

Trong mục này ta sẽ đến với một số kỹ thuật được kết hợp khi sử dụng phương pháp quy nạp. Qua đó, bạn đọc sẽ thấy tính đa dạng, linh hoạt của phương pháp quy nạp cũng như vẻ đẹp mà nó ẩn chứa. Tất cả chỉ phụ thuộc vào cách mà ta vận hành cho từng bài toán.

a) Quy nạp nhảy bước

Ta đến với ví dụ điển hình thể hiện cho cách quy nạp nhảy bước: Quy nạp kiểu Cauchy.

Bài toán 2. (AM – GM) *Với $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Lời giải. Trước tiên ta thấy rằng BĐT đúng với $n=2$. Giả sử BĐT đúng với $n=2^k$, ta chứng minh nó đúng với $n=2^{k+1}$. Xét các số $a_1,a_2,...,a_{2^{k+1}}$. Áp dụng giả thiết quy nạp với $n=2^k$, ta có:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$$
$$=\frac{a_1+a_2+...+a_{2^k}}{2^{k+1}}+\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+...+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$$
$$\ge\frac{\sqrt[2^k]{a_1a_2...a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}...a_{2^{k+1}}}}{2}.$$

Áp dụng giả thiết quy nạp với $n=2$, ta có:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\ge\frac{\sqrt[2^k]{a_1a_2...a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}...a_{2^{k+1}}}}{2}$$
$$\ge\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2...a_{2^k}}.\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}...a_{2^{k+1}}}}=\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2...a_{2^{k+1}}}.$$

Vậy BĐT đúng với $n=2^{k+1}$.

Tiếp theo, ta giả sử BĐT đúng với $n=k+1$, ta chứng minh khi đó nó sẽ đúng với $n=k$. Thật vậy, xét k số $a_1,a_2,...,a_k$. Áp dụng giả thiết quy nạp cho $n=k+1$ số:

$$a_1,a_2,...,a_k \text{ và } \frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}$$

ta có: $$\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}=\frac{a_1+a_2+...+a_k+\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}}{k+1}$$
$$\ge\sqrt[k+1]{a_1a_2...a_k.\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}}.$$

Suy ra: $\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}\ge\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}$.

Như vậy, BĐT đúng với $n=k$.

Tóm lại qua hai quá trình trên ta được:

- BĐT đúng với n bằng $2,2^2,2^3,...,2^n,...$ (quy nạp bước nhảy theo lũy thừa của hai).
- Vì BĐT đúng với 2^2 nên theo bước quy nạp lùi (từ $k+1$ về k) ta được BĐT đúng với $n=2^2-1=3$. Tương tự vì BĐT đúng với $n=2^3=8$ nên BĐT đúng với $n=7,6,5$. Thực hiện quá trình như vậy, tất cả các trường hợp của n BĐT đều đúng.

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét 2. Trên là quy nạp nhảy bước, thường được gọi là quy nạp kiểu Cauchy, một cách quy nạp hay về mặt ý tưởng, tinh tế về mặt kỹ thuật. Chính vì vậy mà nhiều tài liệu về BĐT gọi đây là BĐT Cauchy (tuy nhiên một số tài liệu cho rằng BĐT này không do nhà Toán học Cauchy (1789 - 1857) phát hiện). Số hạng thứ $k+1$ là

$\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}$ có thể thay thế bằng $\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}$, bạn đọc hãy làm thử.

Bài toán 3. *Cho* $f(x)=x^{2019}+2x^{2018}+3x^{2017}...+2019x+2020$ *và* $a_1,a_2,...,a_n$ *là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\left[f(a_1a_2...a_n)\right]^n \le f(a_1^n)f(a_2^n)...f(a_n^n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Với $n=1$ thì BĐT hiển nhiên, với $n=2$ thì BĐT đúng theo BĐT Bunyakovsky.

Giả sử BĐT đúng với $n=2^k$, ta chứng minh nó đúng với $n=2^{k+1}$. Thật vậy,

$$\left[f(a_1a_2...a_{2^{k+1}})\right]^{2^{k+1}}=\left\{\left[f\left(\overbrace{a_1a_2...a_{2^k}}^{2^k\text{ số hạng}}.\overbrace{a_{2^k+1}a_{2^k+2}...a_{2^{k+1}}}^{2^k\text{ số hạng}}\right)\right]^2\right\}^{2^k}$$

$$\overset{\text{Áp dụng với } n=2}{\le}\left\{f\left[\left(\overbrace{a_1a_2...a_{2^k}}^{2^k\text{ số hạng}}\right)^2\right].f\left[\left(\overbrace{a_{2^k+1}a_{2^k+2}...a_{2^{k+1}}}^{2^k\text{ số hạng}}\right)^2\right]\right\}^{2^k}$$

$$=\left[f\left(\overbrace{a_1^2a_2^2...a_{2^k}^2}^{2^k\text{ số hạng}}\right)\right]^{2^k}.\left[f\left(\overbrace{a_{2^k+1}^2a_{2^k+2}^2...a_{2^{k+1}}^2}^{2^k\text{ số hạng}}\right)\right]^{2^k}$$

$$\overset{\text{Áp dụng với } n=2^k}{\le} f\left(a_1^{2^{k+1}}\right).f\left(a_2^{2^{k+1}}\right)...f\left(a_{2^{k+1}}^{2^{k+1}}\right).$$

Giả sử BĐT đúng với n, ta chứng minh nó đúng với $n-1$. Thật vậy, với $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ là các số thực dương. Áp dụng giả thiết cho $b_1=\sqrt[n]{a_1^{n-1}}, b_2=\sqrt[n]{a_2^{n-1}},...,b_{n-1}=\sqrt[n]{a_{n-1}^{n-1}}$ và $b_n=\sqrt[n]{a_1a_2...a_{n-1}}$, ta có:

$$\left[f(b_1b_2...b_n)\right]^n \le f(b_1^n)f(b_2^n)...f(b_n^n)$$

$$\Leftrightarrow\left[f(a_1a_2...a_{n-1})\right]^n \le f(a_1^{n-1})f(a_2^{n-1})...f(a_{n-1}^{n-1})f(a_1a_2...a_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow\left[f(a_1a_2...a_{n-1})\right]^{n-1} \le f(a_1^{n-1})f(a_2^{n-1})...f(a_{n-1}^{n-1}).$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Nhận xét 3. Hàm số $y=f(x)$ trong bài toán chỉ mang hình thức. Khi ta chọn một hàm f khác đi có thể che giấu được bản chất quy nạp của bài toán. Chẳng hạn, **USSR – năm 1990:** *Với a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Xét tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ và các số thực dương $x_1,x_2,...,x_n$ có tích bằng 1. Chứng minh rằng:*

$$f(x_1)f(x_2)...f(x_n)\ge 1.$$

b) Quy nạp trên cấu hình đặc biệt

Trong bước quy nạp, không phải lúc nào cũng thuận lợi, nhất là các bài toán mà giả thiết quy nạp trở nên rời rạc với điều cần chứng minh. Khi đó, một ý tưởng đơn giản là sử dụng cấu hình đặc biệt của bài toán (lớn nhất, nhỏ nhất....), cấu hình mà ta có thể sử dụng được giả thiết quy nạp.

Bài toán 4. *Trong một buổi tiệc có $n\ge 4$ người sao cho cứ mỗi nhóm nhỏ gồm 4 người thì có 3 người nào đó đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau. Một nhóm được gọi là nhóm loại 1 nếu mọi người thuộc nhóm đó đôi một quen nhau. Nhóm được gọi là loại 2 nếu mọi người thuộc nhóm đó đôi một không quen nhau. Chứng minh rằng ta có thể chia nhóm n người dự tiệc bên trên thành 2 nhóm sao cho có một nhóm là nhóm loại 1 và nhóm còn lại là nhóm loại 2 (quy ước rằng một nhóm rỗng hoặc nhóm có đúng một người thì có thể xem là nhóm loại 1 hoặc cũng có thể xem là nhóm loại 2).*

Lời giải. Trước tiên, ta diễn đạt lại bài toán dưới dạng đồ thị. Ta xét một đồ thị đầy đủ với tập đỉnh là tập n người. Nếu hai người nào đó là quen nhau thì cạnh nối hai đỉnh tương ứng ta sẽ tô màu xanh. Ngược lại, ta tô cạnh bằng màu đỏ. Bài toán được chuyển đổi là chứng minh rằng ta có thể phân chia tập đỉnh thành hai tập (có thể rỗng) sao cho có một tập mà mỗi cạnh nối hai đỉnh của nó là các cạnh xanh (gọi là tập loại 1) và tập còn lại thỏa mãn mỗi cạnh (nếu có) nối hai đỉnh thuộc nó được tô màu đỏ (gọi là tập loại 2).

Với $n=4$ kết luận bài toán là hiển nhiên. Giả sử kết luận đúng với n, ta chứng minh nó đúng với $n+1$. Xét đỉnh X_0 tùy ý trong $n+1$ đỉnh. Theo giả thiết quy nạp, tập n đỉnh còn lại (gọi là V') có thể phân hoạch thành hai tập V_1 và V_2 sao cho hai đỉnh tùy ý thuộc V_1 thì được nối cạnh là các cạnh xanh và hai đỉnh tùy ý thuộc V_2 thì được nối cạnh là các cạnh đỏ.

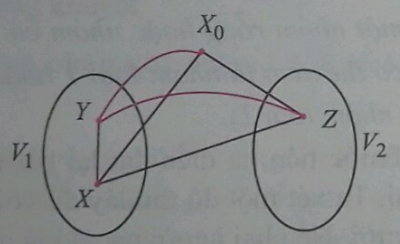
TH1: Nếu là tập rỗng V_1 và V_2, chẳng hạn $V_1 = \Phi$ thì kết luận bài toán với $n + 1$ là đúng ứng với cách phân chia là $V = X_0 \cup V_2$.

TH2: Ngược lại V_1 và V_2 khác Φ, vì số cách phân chia trên là hữu hạn nên ta xét cách phân chia nào đó mà tổng số cạnh đỏ nối từ X_0 đến đỉnh thuộc V_1 với số cạnh xanh nối từ X_0 đến đỉnh thuộc V_2 là nhỏ nhất.

Giả sử ta không thể đặt X_0 thêm vào tập V_1, V_2 tức là tồn tại một đỉnh $Y \in V_1, Z \in V_2$ sao cho X_0Y là cạnh đỏ và X_0Z là cạnh xanh.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử YZ là cạnh đỏ. Vì số đỉnh của V' là $n \geq 4$ nên ta có hai trường hợp sau:

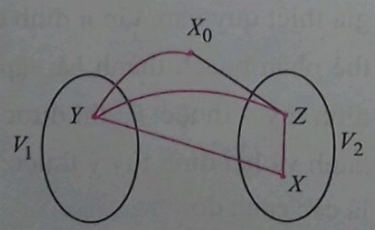
- **TH2.1:** Với $V_2 = \{Z\}$, xét một đỉnh tùy ý khác thuộc V_1, giả sử là X. Vì nhóm 4 đỉnh X_0, X, Y, Z phải có ba đỉnh nào đó lập thành một tam giác xanh hoặc một tam giác đỏ. Điều này kéo theo XX_0, XZ đều phải là cạnh xanh.



Vì tính tùy ý của $X \in V_1$ nên ta thu được kết quả: X_0, Z nối đến tất cả các đỉnh thuộc $V_1 \setminus \{Y\}$ bởi cạnh xanh. Khi đó ta có một cách phân chia tập V' là: $V' = (\{Z\} \cup V_1 \setminus Y) \cup \{Y\}$.

Với cách phân chia này, tổng số cạnh đỏ nối từ X_0 đến đỉnh thuộc $\{Z\} \cup V_1 \setminus Y$ là bé hơn tổng khi ta tính với cách phân chia V' ban đầu. Mâu thuẫn với cách ta chọn cách phân chia bên trên.

- **TH2.2:** Với $|V_2| > 1$. Xét một đỉnh X tùy ý thuộc V_2. Khi đó XY phải là cạnh đỏ vì nếu ngược lại bốn đỉnh X_0, X, Y, Z không thỏa mãn giả thiết.



- Xét một cách phân chia khác cho tập V' là $V' = (V_1 \setminus \{Y\}) \cup (V_2 \cup \{Y\})$.. Ta thấy rằng với phân chia này thì tổng số cạnh đỏ nối từ X_0 đến đỉnh thuộc $V_1 \setminus \{Y\}$ với số cạnh xanh nối từ X_0 đến đỉnh thuộc $V_2 \cup \{Y\}$ là bé hơn tổng khi ta tính với cách phân chia V' ban đầu. Điều này mâu thuẫn với cách ta chọn cách phân chia V' bên trên.

Tóm lại cả hai trường hợp đều dẫn tới mâu thuẫn. Suy ra giả sử trên là sai, hay nói cách khác khẳng định bài toán đúng với $n + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, bài toán được chứng minh.

Bài toán 5. (Chọn đội dự thi VMO năm 2021 – Đồng Tháp) *Viết n số thực có tổng bằng $n - 1$ quanh một đường tròn. Chứng minh rằng ta có thể gắn nhãn cho các số đó theo chiều kim đồng hồ là $x_1, x_2, ..., x_n$ sao cho:*

$$x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k - 1, \forall 1 \leq k \leq n.$$

Lời giải. Ta chứng minh quy nạp theo n. Với $n = 1$ khẳng định trên là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đúng với n, ta chứng minh nó đúng với $n + 1$. Xét $n + 1$ số thực số có tổng bằng n. Trong các số này, xét số nhỏ nhất, gọi là α. Suy ra $\alpha \leq 1$, gọi β là số kề với α theo ngược chiều kim đồng hồ. Thay hai số α, β bởi số $\alpha + \beta - 1$, ta được số có tổng bằng $n - 1$. Theo giả thiết quy nạp, ta có thể gắn nhãn cho các số này theo chiều kim đồng hồ sao cho: $x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k - 1, \forall 1 \leq k \leq n$.

Giả sử với cách đánh số đó số $\alpha + \beta - 1$ đang được đánh là x_p. Khi đó ta có một cách đánh thỏa mãn bài toán cho $n + 1$ số là:

$$y_1, y_2, ..., y_{p-1}, y_p, y_{p+1}, y_{p+2}, ..., y_{n+1}$$

với $\begin{cases} x_i = y_i, \forall i \leq p - 1 \\ y_p = \beta \\ y_{p+1} = \alpha \\ y_{p+1+i} = x_{p+i}, \forall i \leq n - p \end{cases}$. Cách đánh này thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tức khẳng định bài toán đúng với $n + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, bài toán được chứng minh.

c) Nửa quy nạp

Bước quy nạp trong một số bài toán ta không thể áp dụng ngay giả thiết quy nạp. Khi đó ý tưởng

phân chia trường hợp có thể suy nghĩ đến. Có thể ở mỗi trường hợp giả thiết quy nạp được áp dụng một cách khác nhau, thậm chí có một số trường hợp giả thiết quy nạp không thể áp dụng mà phải xử lý theo một hướng khác đi.

Bài toán 6. *Trong mặt phẳng cho n (với $n \geq 3$) điểm không đồng thời thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể vẽ ít nhất n đường thẳng phân biệt nhau sao cho mỗi đường thẳng đi qua ít nhất hai trong số n điểm trên.*

Lời giải. Với $n=3$ khẳng định bài toán là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đúng với $n=k$, ta chứng minh nó đúng với $n=k+1$. Giả sử ta có $k+1$ điểm là $A_1, A_2, ..., A_{k+1}$. Theo định lý Sylvester–Gallai tồn tại một đường thẳng nào đó đi qua đúng hai điểm trong $k+1$ điểm trên. Không mất tính tổng quát, ta giả sử đường thẳng đó là Δ và nó đi qua A_{k+1}, A_k. Khi đó ta có hai trường hợp sau:

• **TH1:** Nếu $A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_k$ thẳng hàng nhau, giả sử chúng thuộc đường l. Khi đó các đường thẳng $A_{k+1}A_i$ với $i=1,2,....,k$ là phân biệt nhau đôi một và phân biệt với l. Vậy ta có thể vẽ ít nhất $k+1$ đường thẳng.

• **TH2:** Ngược lại $A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_k$ không đồng thời thẳng hàng. Theo giả thiết quy nạp, từ các điểm này ta có thể vẽ được ít nhất k đường thẳng. Hiển nhiên các đường này phân biệt với Δ (chú ý cách ta chọn đường Δ), do đó ta được $k+1$ đường thẳng.

Vậy khẳng định trên đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, bài toán được chứng minh.

d) Quy nạp kết hợp với phản chứng

Cũng như các phương pháp chứng minh khác, để phương pháp quy nạp hiệu quả hơn ta thường kết hợp với một số phương pháp khác, phương pháp phản chứng là một kết hợp điển hình.

Bài toán 7. (Canada MO - 2015) *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho*

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2+n; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh $f(n)=n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp.

Với $n=1$, ta có $0 < f(1)f(f(1)) < 2$. Suy ra $f(1)=1$. Giả sử $f(n)=n$ với mọi $n \leq k$. Ta chứng minh $f(k+1)=k+1$. Giả sử ngược lại, ta có hai trường hợp sau:

• **TH1:** Nếu $f(k+1) \leq k$ khi đó theo giả thiết quy nạp ta được: $f(f(k+1)) = f(k+1)$

Kết hợp với điều kiện bài toán, ta được:

$$k^2 < f(k+1)f(f(k+1)) = [f(k+1)]^2 \leq k^2.$$

Điều trên là không thể.

• **TH2:** Nếu $f(k+1) \geq k+2$, giả sử $f(k+1) = M \geq k+2$. Ta được:

$$(k+2)f(M) \leq M.f(M) = f(k+1)f(f(k+1))$$
$$< (k+1)^2 + (k+1) = (k+1)(k+2).$$

Vậy nên $f(M) < k+1 \Rightarrow f(M) \leq k$. Theo giả thiết quy nạp khi đó: $f(f(M)) = f(M)$

Kết hợp với điều kiện bài toán, ta được:

$$(M-1)^2 < f(M).f(f(M)) = [f(M)]^2$$
$$\leq k^2 \leq (M-2)^2.$$

Điều trên cũng không thể xảy ra.

Vậy cả hai trường hợp điều không thể, tức ta được $f(k+1) = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp ta được điều phải chứng minh.

Ngược lại, không khó để có thể bắt gặp một bài toán mà ở đó phương pháp quy nạp quay trở lại hỗ trợ để thực hiện phản chứng. Điều này một mặt nhấn mạnh vai trò của phương pháp quy nạp, mặt khác thể hiện tính liên kết chặt chẽ giữa các phương pháp chứng minh với nhau.

Bài toán 8. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hai điều kiện sau:*

i) *Tồn tại số $k>1$ sao cho $f(kx) = kf(x), \forall x \in \mathbb{R}$..*

ii) *Tồn tại $m \neq 0$ sao cho*

$$|f(x) - x| \leq m^{2020}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq x_0$. Đặt $f(x_0) = x_0 + \varepsilon; (\varepsilon \neq 0)$.

• Ta chứng minh

$$f(k^n x) = k^n f(x), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, với $n = 1$ điều này đúng theo giả thiết bài toán. Giả sử khẳng định đúng với n, ta chứng minh nó đúng với $n+1$. Ta có:

$$f(k^{n+1}x) = f(k.k^n x) = kf(k^n x) = k^{n+1} f(x).$$

(đẳng thức cuối có được nhờ giả thiết quy nạp). Vậy $f(k^n x) = k^n f(x), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

• Áp dụng kết quả trên, ta được $f(k^n x_o) = k^n f(x_0) = k^n (x_0 + \varepsilon)$. Suy ra:

$$|k^n \varepsilon| = |k^n (x_0 + \varepsilon) - k^n x_0| = |f(k^n x_0) - k^n x_o| \leq m^{2020}.$$

Vì m là số hữu hạn nên khi n đủ lớn ta được điều mâu thuẫn. Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn hai điều kiện bài toán.

e) Quy nạp theo nhiều biến

Bài toán 9. *Với m,n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = \frac{mn(m+n+2)}{2}.$$

Lời giải. Đặt $S(m;n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$. Ta chứng minh bằng quy nạp hai lần.

• Trước tiên ta chứng minh $S(m,1) = \frac{m(m+1+2)}{2}$ đúng với mọi $m \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, với $m = 1$ đẳng thức là hiển nhiên. Giả sử đẳng thức đúng với m, ta chứng minh nó đúng với $m+1$. Ta có:

$$S(m+1;1) = S(m;1) + (m+1+1) = \frac{m(m+3)}{2} + m + 2$$

$$= \frac{m^2 + 5m + 4}{2} = \frac{(m+1)(m+4)}{2}.$$

Tức đẳng thức đúng với $m+1$. Theo nguyên lý quy nạp, đẳng thức đúng với mọi m.

• Với mỗi m_0 cố định tùy ý. Ta chứng minh rằng $S(m_0, n)$ đúng với mọi n.

Với $n = 1$ thì đẳng thức đúng theo chứng minh bên trên. Giả sử đẳng thức đúng với n ta chứng minh nó đúng với $n+1$. Ta có:

$$S(m_0; n+1) = S(m_0; n) + \sum_{i=1}^{m_0}(i+n+1)$$

$$= \frac{m_0 n(m_0+n+2)}{2} + \frac{m_0(m_0+1)}{2} + m_0(n+1)$$

$$= \frac{m_0(n+1)(m_0+n+1+2)}{2}.$$

Tức đẳng thức đúng với $n+1$. Vậy đẳng thức đúng với mọi n. Qua hai lần quy nạp trên ta được

$$S(m;n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = \frac{mn(m+n+2)}{2}, \forall m,n \in \mathbb{N}^*.$$

Nhận xét 6. Ý tưởng quy nạp cho nhiều biến là quy nạp theo từng biến các biến còn lại là cố định. Tuy nhiên, với một số bài toán mà kết quả mang tính liên kết nhau thì cách quy nạp trên tỏ ra không hiệu quả. Bài toán sau đây sẽ thể hiện điều đó, đồng thời qua đó ta có một cách quy nạp khác cho nhiều biến.

Bài toán 10. (Chọn đội dự thi VMO - Quảng Bình năm 2019) *Cho số nguyên dương $n \geq 2$, xét $2n$ điểm phân biệt trong mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Trong số các điểm trên ta nối n^2+1 cặp điểm lại với nhau. Chứng minh rằng:*

a) Có ít nhất 1 tam giác tạo thành với ba đỉnh là ba trong số cách đỉnh trên.

b) Có ít nhất n tam giác tạo thành với ba đỉnh là ba trong số cách đỉnh trên.

Lời giải. Xét một đồ thị có $2n$ đỉnh là $2n$ điểm đã cho. Hai đỉnh được nối cạnh với nhau nếu hai điểm đó được nối đoạn thẳng trong số n^2+1 đoạn được nối.

a) Khẳng định bài toán là hiển nhiên theo định lý Mantel.

b) Bài toán có thể thực hiện cách quy nạp thông thường (bạn đọc hãy thực hiện thử). Ở đây ta sẽ đến với lời giải tổng quát hơn và sử dụng phép quy nạp cho hai biến song song.

Ta chứng minh bằng quy nạp kết quả tổng quát hơn như sau: *Với một đồ thị có $|V| = 2n + x$ với*

$n \geq 2$ nguyên, $x \in \{0,1\}$ và có $|E| = n(n+x)+1$ thì đồ thị có ít nhất n tam giác.

Trước tiên ta thấy rằng trong đồ thị lúc bấy giờ luôn có một đỉnh có bậc không vượt quá n. Thật vậy, nếu mọi đỉnh có bậc từ $n+1$ trở lên thì ta có:

$$(n+1)(2n+x) = (n+1)|V| \leq \sum_{X \in V} \deg(X)$$
$$= 2|E| = 2n(n+x)+2.$$

Điều này kéo theo:

$$(n+1)(2n+x) \leq 2n(n+x)+2 \Leftrightarrow (n-1)(x-2) \geq 0.$$

BĐT trên là không đúng vì $n \geq 2, x \leq 1$.

Với mỗi $n \geq 2$ là số nguyên dương và $x \in \{0,1\}$ ta gọi $P(n,x)$ là mệnh đề có dạng:

"Với mọi đồ thị $G(V,E)$ có $|V| = 2n+x$ với $n \geq 2$ nguyên, $x \in \{0,1\}$ và có $|E| = n(n+x)+1$ thì đồ thị có ít nhất n tam giác"

TH1: Với $x = 1$, ta giả sử $P(n,0)$ là đúng. Đặt X là đỉnh có bậc không vượt quá n (theo nhận xét trên X là tồn tại). Xét đồ thị G' thu được từ G bằng cách bỏ đi X và các cạnh liên thuộc với X. Khi đó đồ thị G' có $2n$ đỉnh và có số cạnh ít nhất là $n(n+1)+1-\deg_G(X) \geq n(n+1)+1-n = n(n+0)+1$.

Vì $P(n,0)$ đúng nên G' chứa ít nhất n tam giác. Suy ra $P(n,1)$ đúng.

TH2: Với $x = 0$, ta giả sử $P(n-1,1)$ đúng. Đặt X là đỉnh có bậc không vượt quá n (theo nhận xét trên X là tồn tại). Xét đồ thị G' thu được từ G bằng cách bỏ đi X và các cạnh liên thuộc với X. Khi đó đồ thị G' có $2n-1 = 2(n-1)+1$ đỉnh và có số cạnh ít nhất là:

$$n \times n+1-\deg_G(X) \geq n \times n+1-n = (n-1)(n-1+1)+1.$$

Vì $P(n-1,1)$ đúng nên đồ thị G' chứa ít nhất $n-1$ tam giác.

Ta lại có:

• **TH2.1:** Nếu $\deg_G(X) < n$ thì số cạnh của G' là lớn hẳn hơn $(n-1)(n-1+1)+1$ cạnh.

Vì $P(n-1,1)$ đúng nên G' chứa ít nhất $n-1 \geq 1$ tam giác. Gọi ABC là một tam giác như vậy.

Xét đồ thị mới G'' con của G' thu được bằng cách xóa bớt đi cạnh AB. Khi đó G'' vẫn có $2(n-1)+1$ đỉnh và có ít nhất $(n-1)(n-1+1)+1$ cạnh. Do đó G'' có ít nhất $n-1$ tam giác. Hiển nhiên các tam giác này cũng là tam giác thuộc đồ thị G'. Kết hợp thêm tam giác ABC ta được G' thật sự có ít nhất là n tam giác. Suy ra G có ít nhất n tam giác.

• **Trường hợp 2.2:** Nếu $\deg_G(X) = n$, ta gọi $N(X)$ là tập các đỉnh liền kề với X trong G và $\overline{N(X)}$ là tập $n-1$ đỉnh còn lại. Nếu có hai đỉnh nào đó trong $N(X)$ là liền kề nhau thì hai đỉnh đó kết hợp với X tạo thành một tam giác (đương nhiên tam giác này không trùng với bất kỳ tam giác nào trong $n-1$ tam giác của G'). Do đó G có ít nhất n tam giác.

Ngược lại, $N(X)$ không có hai đỉnh nào liền kề nhau. Khi đó mọi đỉnh $Y \in N(X)$ thì $\deg_{G'}(Y) \leq n-1$.

Nếu có một đỉnh $Z \in N(X)$ sao cho $\deg_{G'}(Z) \leq n-2$ thì $\deg_G(Z) \leq n-1$. Khi đó ta thay thế X cho Z. Áp dụng trường hợp 2.1 ta được G chứa ít nhất n tam giác.

Ngược lại, mọi đỉnh $Y \in N(X)$ thì $\deg_{G'}(Y) = n-1$.

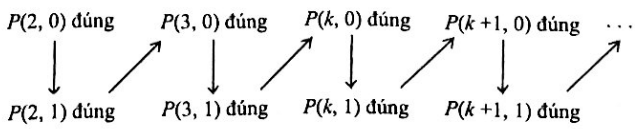
Như vậy số cạnh của đồ thị G' có đỉnh thuộc $N(X)$ và đỉnh còn lại thuộc $\overline{N(X)}$ chỉ là

$$n(n-1) < n(n-1)+1$$

(ta chú ý thêm là hai đỉnh thuộc $N(X)$ không nối cạnh nhau trong trường hợp này). Khi đó tồn tại một cạnh nào đó nối hai đỉnh của $\overline{N(X)}$. Cạnh này kết hợp tất cả các cạnh nối từ các đỉnh thuộc $N(X)$ ta được n tam giác (Đồ thị con thu được từ G' bằng cách bỏ đi tất cả các cạnh có hai đỉnh thuộc $\overline{N(X)}$ là đồ thị hai phe $K_{n-1,n}$ đầy đủ).

Tóm lại $P(n,0)$ đúng.

Để hoàn tất bài chứng minh, ta sẽ kết nối lại các bước chứng minh như sau (một kiểu quy nạp theo hai biến):



Bước cơ sở ban đầu tức $P(2,0)$ có đúng hay rất không là quan trọng. Kiểm tra trực tiếp một đồ thị 4 đỉnh và có ít nhất 5 cạnh, ta thấy $P(2,0)$ đúng.

Bài chứng minh hoàn tất.

Với các kỹ thuật thông dụng bên trên mời bạn đọc có thể thực hành với các bài toán sau:

Bài 11. Một phú hộ có 3^n (với n là số nguyên dương) đồng tiền xu. Trong đó có đúng 1 đồng tiền xu giả. Đồng xu giả thì có khối lượng nhẹ hơn so với đồng xu thật nhưng hình dáng của chúng thì giống nhau. Phú hộ có một cái cân đĩa không có quả cân (cân đĩa chỉ xác định được hai vật đặt lên hai bên cái cân, bên nào nặng hơn). Chứng minh rằng với n lần cân ta có thể lấy ra được đồng tiền xu giả từ đống tiền trên.

Bài 12. (Russia - 2000) Cho dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực thỏa mãn

$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$$

với mọi giá trị n thỏa mãn $1 \le n \le 200$. Chứng minh rằng các số hạng a_i của dãy trên là các số nguyên.

Bài 14. (Canada MO – 2018) Trên một đường thẳng cho $\frac{3^{100}+1}{2}$ điểm cách đều nhau được đánh dấu. Chứng minh rằng ta có thể tô đỏ 2^{100} điểm trong số các điểm trên sao cho không có điểm đỏ nào có cùng khoảng cách đến hai điểm đỏ khác.

3. Quy nạp trong một số bài toán trò chơi

Khép lại bài viết ta đến với một số bài toán trò chơi với lời giải bằng phương pháp quy nạp.

Bài toán 11. *Trên bàn có 2024 đồng xu. An và Bình cùng chơi một trò chơi luân phiên theo quy tắc sau:*

- *An là người thực hiện chơi trước.*
- *Với mỗi lượt chơi, người chơi sẽ lấy trên bàn 1, 3 hoặc 5 đồng xu.*

Ai đến lượt mình không còn đồng xu để lấy theo quy tắc trên là người thua cuộc.

a) *Hỏi ai là người chiến lượt thắng?*

b) *Nếu ban đầu có 2025 đồng xu thì ai là người chiến lượt thắng?*

c) *Tìm tất cả các giá trị của n sao cho bàn ban đầu có n đồng xu thì An là người có chiến lượt thắng.*

Lời giải. Bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng minh nếu ban đầu trên bàn có $m = 6n+4, 6n+2, 6n$ (với n là số tự nhiên) đồng xu thì *Bình* là người có chiến lượt thắng, ngược lại *An* là người có chiến lượt thắng.

Với $m = 1,2,3,4,5,6$ khẳng định trên là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đúng với mọi $m \le T$ (với $T \ge 6$), ta chứng minh nó đúng với $T + 1$. Ta có các trường hợp sau:

TH1: Với $T = 6n, 6n+2, 6n+4$ thì $T+1 = 6n+1, 6n+3, 6n+5$. Khi đó, *An* chỉ cần chọn ra đồng xu ở lượt chơi đầu, trên bàn còn lại $6n, 6n+2, 6n+4$ đồng xu. Lượt tiếp theo là của *Bình*. Theo giả thiết quy nạp (Bình lúc bấy giờ đóng vai trò như người chơi đầu) *An* là người có chiến lượt thắng.

TH2: Với $T = 6n+1, 6n+3, 6n+5$ thì $T+1 = 6n+2, 6n+4, 6n+6$. Ta xét đơn cử với $T+1 = 6n+2$ (các trường hợp khác tương tự). Khi đó, nếu *An* lấy ra 1, 3, 5 đồng xu thì số đồng xu còn lại trên bàn tương ứng lần lượt là $6n+1, 6(n-1)+5, 6(n-1)+3$. Lượt tiếp theo là của *Bình*. Theo giả thiết quy nạp (*Bình* lúc bấy giờ đóng vai trò như người chơi đầu) *Bình* là người có chiến lượt thắng.

Như vậy khẳng định trên đúng với $T + 1$. Theo nguyên lý quy nạp khẳng định trên được chứng minh. Từ đó ta có câu trả lời cho ý (a), (b) và (c).

Bài toán 12. (Baltic Way năm 2013) *Một số nguyên dương được viết lên bảng. An và Bình cùng tiến hành chơi một trò chơi luân phiên theo quy tắc sau:*

- *An là người chơi trước.*
- *Với mỗi lượt chơi, số trên bảng giả sử là n thì người chơi sẽ thay thế nó bởi $n - m$ với $1 < m < n$ và m là ước của n.*

Ai đến lượt mình mà không thể thực hiện thay thế số theo quy tắc trên là người thua cuộc. Hỏi với số nguyên dương ban đầu như thế nào thì Bình là người có chiến lượt thắng.

Lời giải. Ta gọi một số nguyên dương là số "đẹp" nếu xuất phát ban đầu cho trò chơi bởi số đó thì *Bình* có chiến lượt thắng. Ngược lại, các số nguyên dương nếu xuất phát ban đầu cho trò chơi

bởi số đó thì *An* là người có chiến lược thắng thì được gọi là số "xấu".

Bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng minh n là số đẹp khi và chỉ khi $n = 2^{2k-1}$ với k là số nguyên dương hoặc n là số lẻ và các số còn lại là các số xấu.

Trước hết ta thấy rằng $n = 1, 2, 3$ khẳng định trên là đúng.

Giả sử khẳng định đúng với $n \geq 3$, ta chứng minh nó đúng với $n + 1$. Ta có các trường hợp sau:

TH1: Với $n + 1$ là số nguyên tố. Khi đó nó chỉ có 1 và chính nó là ước nên *An* không thể thực hiện bước thay số. Do đó $n + 1$ là số đẹp. Tức khẳng định đúng trong trường hợp này.

TH2: Với $n+1 = 2^{2k+1}$ với k là số nguyên dương nào đó. Ta sẽ chứng minh đây là số đẹp. Thật vậy, *An* chỉ có thể chọn m có dạng $m = 2^j$ với $1 \leq j \leq 2k$. Số được thay thế là:

$$n+1-m = 2^j(2^{2k+1-j}-1).$$

Số trên là số chẵn. Nó là một lũy thừa của 2 khi và chỉ khi $j = 2k$ (các trường hợp khác $2^{2k+1-j}-1$ là số lẻ nên $n+1-m$ không là một lũy thừa của 2). Tuy nhiên, điều này xảy ra thì $n+1-m = 2^{2k}$ lũy thừa với số mũ chẵn. Lượt tiếp theo là của *Bình* (*Bình* đang đóng vai trò người chơi thứ nhất). Theo giả thiết quy nạp, số này là số "xấu" với người chơi thứ hai (tức là *An*). Do đó, *Bình* là người có chiến lược thắng. Vậy khẳng định đúng trong trường hợp này.

TH3: Với n là số lẻ không là nguyên tố. Khi đó *An* có thể thực hiện lượt chơi của mình (vì n là hợp số). Giả sử m là ước số mà *An* chọn, khi đó n có thể viết lại là $n = mk$ với m, k là các số lẻ. Số thay thế trên bảng sẽ là: $n - m = m(k-1)$.

Đây là một số chẵn và không là lũy thừa của 2 vì m là số lẻ. Theo giả thiết quy nạp, *Bình* là người có chiến lược thắng.

TH4: Với n là lũy thừa với số mũ chẵn của 2. Giả sử $n = 2^{2k}$. Khi đó, *An* chỉ cần chọn $m = 2^{2k-1}$ thì số được thay thế là $n - m = 2^{2k-1}$.. Theo giả thiết quy nạp, *An* là người có chiến lược thắng.

TH5: Với n là số chẵn và không là lũy thừa của 2. Giả sử $n = 2^k l$ với $l > 1$ và là số lẻ. Khi đó, *An* chỉ cần chọn $m = l$ thì số được thay thế là $n - m = l(2^k - 1)$. Theo giả thiết quy nạp, *An* sẽ là người có chiến lược thắng.

Tóm lại, với $n + 1$ khẳng định trên là đúng. Theo nguyên lý quy nạp ta được điều phải chứng minh.

Bạn đọc có thể thực hành phương pháp quy nạp qua các bài toán sau:

Bài 19. Với bàn cờ kích thước 2021 × 2021. Ban đầu có một quân vua được đặt ở một ô nào đó của bảng khác ô ở tâm. *An* và *Bình* cùng chơi một trò chơi luân phiên nhau theo quy tắc sau:

- *An* là người thực hiện chơi trước.
- Mỗi lượt chơi, người chơi sẽ di chuyển quân vua theo nước đi của quân vua trong cờ vua thông thường và không đi vào các ô mà quân vua đã đi qua.

Người thắng cuộc là người đưa được quân vua về ô ở tâm của bàn cờ hoặc người còn lại không thể di chuyển quân vua thỏa mãn quy tắc trên. Xác định tất cả các vị trí đặt quân vua ban đầu để *Bình* là người có chiến lược thắng.

Bài 20. Cho bàn cờ vua kích thước $n \times n$. Một quân vua được đặt ở một ô nào đó của bàn cờ trừ ô dưới cùng bên trái của bàn cờ. *An* và *Bình* cùng chơi một trò chơi luân phiên theo quy tắc sau:

- *An* là người chơi đầu tiên
- Với mỗi lượt chơi, người chơi sẽ di chuyển quân vua theo một trong ba cách đi sau: đi xuống, sang trái hoặc đi chéo ô hướng xuống bên trái.

Ai trong lượt chơi của mình có thể di chuyển quân vua đến góc dưới cùng bên trái của bàn cờ là người chiến thắng.

a) Với bàn cờ 2021 × 2021. Ban đầu có một quân vua được đặt ở một ô nào và quân vua đặt tại ô ở tâm của bàn cờ. Hỏi ai là người có chiến lược thắng?

b) Xác định tất cả các ô trên bàn cờ sao cho khi ta đặt quân vua ban đầu tại một trong các ô đó thì *An* là người có chiến lược thắng.

Tài liệu tham khảo

1. *Nguyễn Hữu Điển*, Phương pháp quy nạp Toán học, Nhà Xuất bản Giáo dục, 2000.

2. Tạp chí Epsilon, số 16, 2019.

3. *Titu Andreescu-Vlad Crisan*, Mathematical Induction: A Powerful and Elegant Method of Proof (Xyz), Xyz Pr, 2017.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 59

Problem. *There are 30 candies which are exactly the same. In how many ways can we distribute them, may be not all, among 4 childrens? We count the case some child can receive nothing as well.*

Solution. Let include one friend of these four children to make 5 of them. To distribute 30 candies, may be not all, among the first four children is now the same as to distribute all 30 candies among the group of 5 children.

Then the problem becomes the familiar Euler candy problem which was introduce in a previous issue. The answer is the number of ways we can choose 4 positions (without order) among 34 positions (30 for candies and 4 for the walls). And the result is C_{34}^{4}.

TỪ VỰNG

distribute	*: phân phát*
the Euler candy problem	*: bài toán chia kẹo của Ơ-le*
issue	*: ấn phẩm, số báo*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

****

BÀI DỊCH SỐ 56

Bài toán. *Tìm điểm dừng của hàm số $y(x)$ được cho dưới dạng ẩn như sau:*

$$x^2-4xy-y^2+20=0 \ (y>0) \quad (1)$$

Lời giải. Ta cần giải phương trình $y'(x)=0$.

Lấy đạo hàm hai vế của (1) theo x ta được

$$2x-4(y+xy')-2yy'=0$$

(lưu ý rằng ở đây ta áp dụng quy tắc nhân và quy tắc lấy đạo hàm của hàm hợp).

Từ đó: $y'=\dfrac{x-2y}{2x+y}$. Với $y'=0$ thì $x=2y$ (2).

Từ (1) và (2) ta thấy hàm số $y(x)$ có duy nhất một điểm dừng là $(x;y)=(4;2)$.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Trần Trung Phúc*, 8A4, THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Cao Thị Tường Vy*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Võ Hoàng Khôi Nguyên*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**

HỒ HẢI *(Hà Nội)*

Họa bài: BÁC HỒ của tác giả *Nguyễn Duy Nam* trong số TH&TT T7.2020.

Bài 1: VƯỢT TRÙNG DƯƠNG

Bồng bềnh sóng cả vượt trùng dương
Xa thăm băng qua mọi chặng đường
Tít tắp trời Âu khi giá lạnh
Mịt mù biển Á lúc dầm sương
Một lòng vì nước mong dân thịnh
Rất mực thương dân ước nước cường
Bác viết luận cương "ĐƯỜNG CÁCH MỆNH"
Chiếu soi dẫn lối sáng như gương

Bài 2: RẠNG VÀNG DƯƠNG

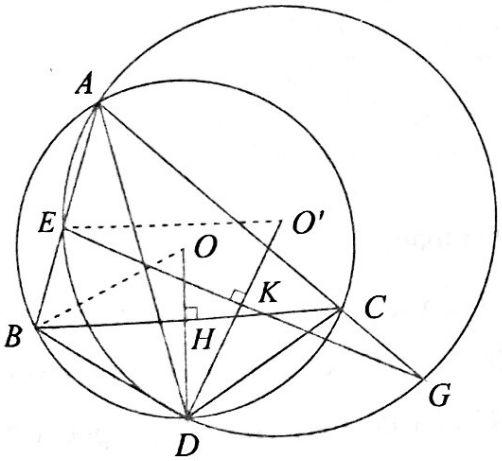
Vững vàng chí lớn rạng vầng dương
Gian khổ băng qua mọi nẻo đường
Nhớ mãi chiến khu vầng trán rộng
Quên nào Pắc Pó tóc pha sương
Tuyên ngôn độc lập mong dân thịnh
Di chúc thiêng liêng ước nước cường
Nam Bắc một nhà ngày thống nhất
Tiên tri lời Bác sáng như gương

LÊ BÁ CHƯƠNG
(Thôn Dục Tú, thị trấn Tân Phong, Quảng Xương, Thanh Hóa)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

Bài toán 39. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm chính giữa cung BC không chứa A. Vẽ đường tròn tâm O' qua A, D và đường tròn này cắt AB tại E (E ≠ A, B), cắt AC tại G (G ≠ A, C). Gọi trung điểm của BC, EG theo thứ tự là H, K. Chứng minh KH ⊥ AD.*

Cách 1. *Chứng minh đường nối tâm OO' song song với KH.*



Dễ thấy ba điểm O, H, D thẳng hàng.

Từ $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$ (giả thiết) suy ra:

$\widehat{EAD} = \widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{DAG}$, do đó D là điểm chính giữa $\overset{\frown}{EG}$.

Kết hợp với K là trung điểm của EG suy ra O', K, D thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{BOH} = \widehat{BOD} = 2\widehat{BAD}$

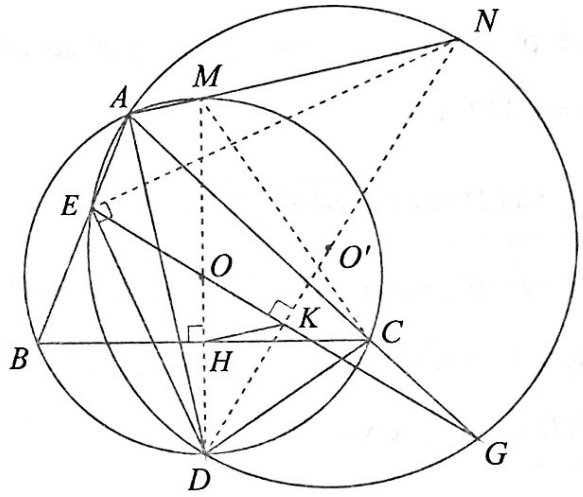
$= 2\widehat{EAD} = \widehat{EO'D} = \widehat{EO'K}$

và $\widehat{BHO} = \widehat{EKO'} = 90^0$ suy ra:

$\Delta OBH \sim \Delta O'EK$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OH}{OD} = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{O'K}{O'E} = \dfrac{O'K}{O'D}$. Áp dụng định lí Thales đảo ta có $HK // OO'$. Do $OO' \perp AD$ suy ra $HK \perp AD$.

Cách 2. *Tạo ra đường thẳng MN vuông góc với AD rồi chứng minh nó song song với HK.*



Ta có:

$\widehat{DCH} = \widehat{DCB} = \widehat{DAB} = \widehat{DAE} = \widehat{DEG} = \widehat{DEK}$

$\Rightarrow \Delta DCH \sim \Delta DEK$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DH}{DK} = \dfrac{DC}{DE}$ (1).

Vẽ hai đường kính DM của đường tròn (O) và DN của đường tròn (O') ta có $\widehat{DNE} = \widehat{DAG} = \widehat{DAC} = \widehat{DMC}$ suy ra:

$\Delta DNE \sim \Delta DMC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DM}{DN} = \dfrac{DC}{DE}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{DH}{DK} = \dfrac{DM}{DN} \Rightarrow MN // HK$.

Mặt khác ta có $MN \perp AD$ tại A do đó $HK \perp AD$.

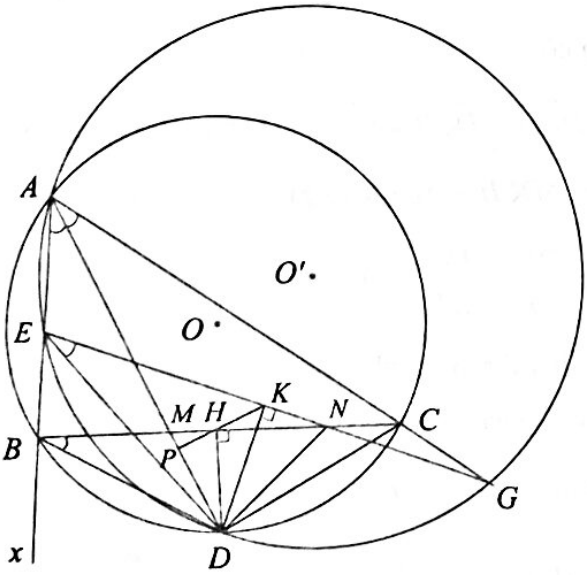
Cách 3. Chứng minh hai góc của tam giác phụ nhau.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của BC với AD và EG; P là giao điểm của HK và AD. Dễ thấy các tứ giác $BDNE$ và $DHKN$ nội tiếp. Đặt tia Ax trùng với tia AB, ta có : $\widehat{DBx} = \widehat{DHP}$ (1) (cùng bằng $\widehat{DNE}$). Áp dụng tính chất góc ngoài vào các tam giác ABD, ACM, ta có :

$\widehat{DBx} = \widehat{BAD} + \widehat{BDA}, \widehat{CMP} = \widehat{MAC} + \widehat{MCA}$.

Do vế phải hai đẳng thức này bằng nhau nên $\widehat{DBx} = \widehat{CMP}$ (2).

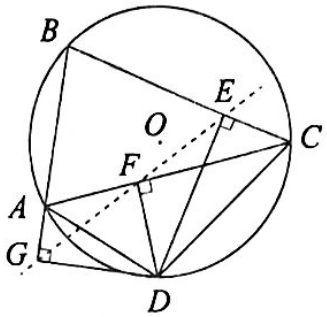
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DHP} = \widehat{CMP}$ hay $\widehat{DHP} = \widehat{HMP}$, mà $\widehat{DHP} + \widehat{PHM} = \widehat{DHM} = 90^0$, vậy $\widehat{HMP} + \widehat{PHM} = 90^0$. Suy ra: $\widehat{HPM} = 90^0$ hay KH vuông góc với AD.



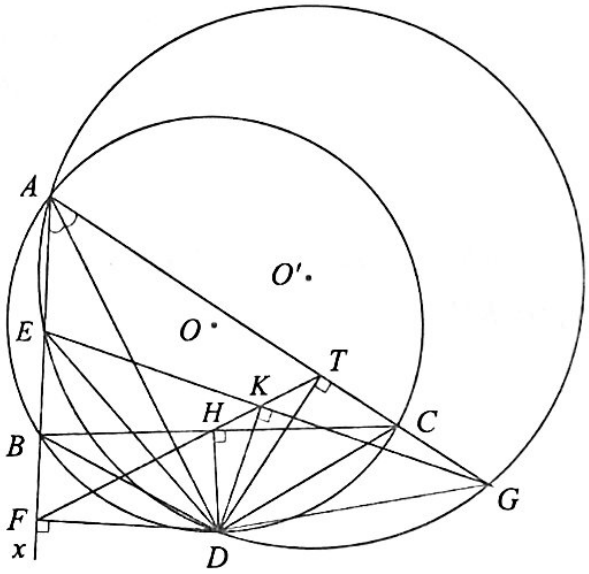
Cách 4. Chứng minh đường phân giác của tam giác cân cũng chính là đường cao

Bổ đề. *Bài toán Simson:*

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Điểm D thuộc đường tròn (O). Gọi E, F, G lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ D đến BC, AC, AB. Khi đó E, F, G thẳng hàng.



Đường thẳng đó gọi là đường thẳng Simson ứng với điểm D của tam giác ABC (bổ đề này bạn đọc tự chứng minh).

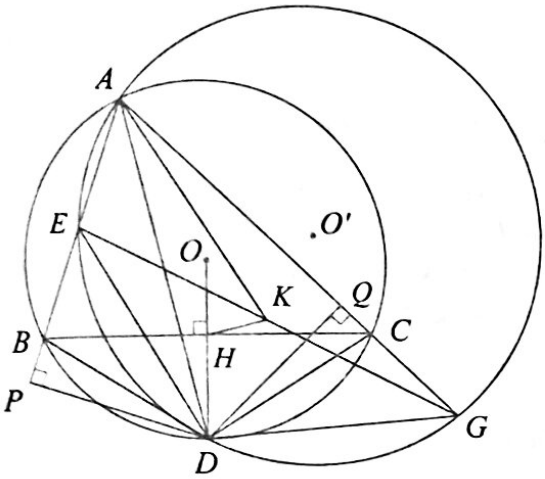


Trở lại bài toán:

Gọi F, T lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ D đến AB, AC. Vì D nằm trên tia phân giác góc BAC nên dễ thấy AD vuông góc với FT. Bây giờ ta chứng minh K, H nằm trên đường thẳng FT. Thật vậy, vì tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên ba điểm T, H, F thẳng hàng, đó là đường thẳng Simson ứng với điểm D của tam giác ABC. Tương tự, tứ giác $AEDG$ nội tiếp nên ba điểm F, K, T thẳng hàng, đó là đường thẳng Simson ứng với điểm D của tam giác AEG. Từ đây suy ra H, K thuộc đường thẳng FT hay HK vuông góc với AD.

Cách 5. Chứng minh tích vô hướng của hai vectơ bằng 0.

Vì các tứ giác $ABDC$ và $AEDG$ nội tiếp nên $\widehat{BDC} = \widehat{EDG} = 180^0 - \widehat{A}$. Điều này chứng tỏ nếu E nằm trong đoạn AB thì G nằm ngoài đoạn AC.



Sử dụng phép quay tâm D một góc $\alpha = 180^0 - \widehat{A}$ ta có:

$$\begin{cases} Q_D^{\alpha}(B) = C \\ Q_D^{\alpha}(E) = G \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_D^{\alpha}(BE) = CG$$

$$\Rightarrow BE = CG.$$

Vì K, H lần lượt là trung điểm của EG và BC nên ta có:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}}{2};$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AK}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{GC}\right).$$

Ta có: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{KH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{GC}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GC}\right).$$

Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của D lên AB, AC thì được $AP = AQ$ và

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{GC}$$

$$= \overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BE}.$$

Do $BE = CG$ và $AP = AQ$ dẫn đến

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BE}$$

$$= -AQ.GC + AP.BE$$

$$= 0.$$

Suy ra $AD \perp KH$.

TRẦN THANH HƯNG

(GV THCS Võ Trứ, Tuy An, Phú Yên)

Nhận xét. Ngoài 5 cách giải của bạn *Trần Thanh Hưng*, người giới thiệu đề toán, Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số cách giải từ các bạn *Nguyễn Văn Bản*, GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, **Điện Biên**; *Trương Thị Thu Hà*, 10 Toán 1, *Lê Thị Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

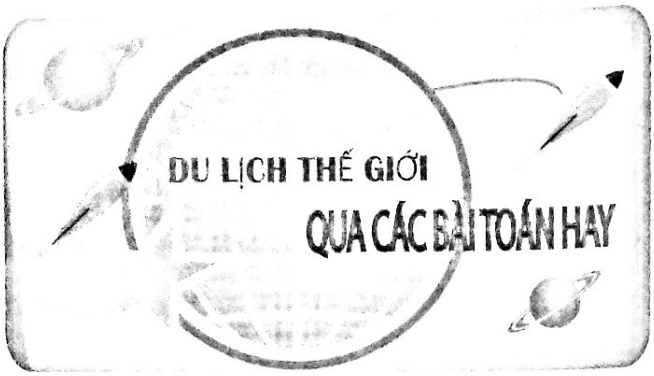
Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 41 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.9.2020.

BÀI TOÁN 41. *Giải phương trình*

$$3\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2\sin x - 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0.$$

TRẦN ĐỨC PHƯƠNG

(GV THPT Giao Thủy, Nam Định)



Dưới đây là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 516, T6.2020.

BÀI 47 (Olympic Poland 2009).

Cho ba số thực dương a, b, c và $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^{n+1}}{b+c}+\dfrac{b^{n+1}}{c+a}+\dfrac{c^{n+1}}{a+b}$

$$\geq\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right)\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$

Lời giải. Đặt $S=\sqrt[n]{\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3}}$, bài toán cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^{n+1}-a^nS}{b+c}+\frac{b^{n+1}-b^nS}{c+a}+\frac{c^{n+1}-c^nS}{a+b}\geq 0 \quad (*).$$

Bài toán đề ra và (*) đều là BĐT đối xứng. Không mất tính tổng quát giả sử: $a\geq b\geq c>0$. Khi đó:

$$a^{n+1}-a^n\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}\geq 0,$$

$$c^{n+1}-c^n\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}\leq 0,$$

$$0<b+c\leq c+a\leq a+b.$$

Suy ra: $\dfrac{a^{n+1}-a^nS}{b+c}\geq\dfrac{a^{n+1}-a^nS}{c+a}$ (1);

$\dfrac{b^{n+1}-b^nS}{c+a}=\dfrac{b^{n+1}-b^nS}{c+a}$ (2); $\dfrac{c^{n+1}-c^nS}{a+b}\geq\dfrac{c^{n+1}-c^nS}{c+a}$ (3).

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) thì

$$\text{VT}(*)\geq\frac{\left(a^{n+1}-a^nS\right)+\left(b^{n+1}-b^nS\right)+\left(c^{n+1}-c^nS\right)}{c+a}.$$

Đến đây BĐT(*) sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$\left(a^{n+1}-a^nS\right)+\left(b^{n+1}-b^nS\right)+\left(c^{n+1}-c^nS\right)\geq 0$$

hay

$$a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}\geq\left(a^n+b^n+c^n\right)\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$

Nhưng BĐT này đúng vì nó chính là BĐT trung bình lũy thừa

$$\sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{3}}\geq\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}b+c=c+a=a+b\\ \left(a^{n+1}-a^nS\right)+\left(b^{n+1}-b^nS\right)+\left(c^{n+1}-c^nS\right)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow a=b=c$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. 1) Ngoài cách giải nêu trên, bạn *Ngô Văn Thái*, người giới thiệu bài toán cũng đưa ra nhận xét: Với cách giải tương tự, ta cũng giải được hai bài toán khó sau:

a) *Cho ba số thực dương a,b,c và $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha\geq 0$.*

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^{n+1}}{b^\alpha+c^\alpha}+\dfrac{b^{n+1}}{c^\alpha+a^\alpha}+\dfrac{c^{n+1}}{a^\alpha+b^\alpha}$

$$\geq\left(\frac{a^n}{b^\alpha+c^\alpha}+\frac{b^n}{c^\alpha+a^\alpha}+\frac{c^n}{a^\alpha+b^\alpha}\right)\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$

b) *Cho ba số thực dương a,b,c và $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha\geq 1$.*

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^{n+1}}{(b+c)^\alpha}+\dfrac{b^{n+1}}{(c+a)^\alpha}+\dfrac{c^{n+1}}{(a+b)^\alpha}$

$$\geq\left[\frac{a^n}{(b+c)^\alpha}+\frac{b^n}{(c+a)^\alpha}+\frac{c^n}{(a+b)^\alpha}\right]\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$ 2)

2) Bạn *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa-Vũng Tàu** sử dụng BĐT Holder cũng cho một lời giải gọn gàng. Các bạn: *Đặng Hoàng Duy*, 10T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**; *Nguyễn Hùng Cường*, GV THCS Nhơn An, TX. An Nhơn, **Bình Định** cũng có lời giải đúng.

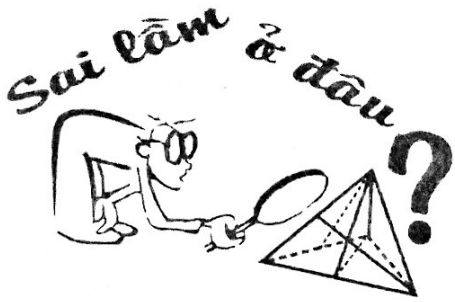
NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.9.2020.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI 49. *Cho m, n là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tìm ước chung lớn nhất của* 5^m+7^m và 5^n+7^n.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: ĐIỀU KIỆN ĐỂ CÓ CỰC TIỂU!

(Đề đăng trên TH&TT số 514, tháng 4 năm 2020)

Phân tích. Nếu $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f''(0)>0 \end{cases}$ thì $x = x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ nhưng điều ngược lại không đúng. Do đó lời giải của bạn *Vân* bị sai.

Lời giải đúng.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ và

$$f'(x) = 4(m+1)x^3 + 9mx^2.$$

- Nếu $m = -1$ thì hàm số trở thành

$$f(x) = -3x^3 + 2022$$

có $f'(x) = -9x^2 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ không có cực trị.

- Nếu $m = 0$ thì hàm số trở thành

$$f(x) = x^4 + 2020$$

có $f'(x) = 4x^3, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dễ kiểm tra thấy $f(x)$ có cực tiểu tại tại $x = 0$.

- Xét $x \ne 0$ và $x \ne -1$. Khi đó

$$f'(x) = x^2(4(m+1)x + 9m).$$

Lúc này $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \dfrac{-9m}{4(m+1)}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ chỉ có một điểm cực trị $x = \dfrac{-9m}{4(m+1)} \ne 0$ ($f'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua $x = \dfrac{-9m}{4(m+1)}$ nhưng không đổi dấu khi x chạy qua $x = 0$).

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi $m = 0$.

Nhận xét. Tuyên dương hai bạn đã phát hiện ra sai lầm trong lời giải của bạn *Vân*, đó là các bạn: *Lê Ngô Nhật Huy*, số nhà 111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre, **Bến Tre**; *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Nội**.

KIHIVI

SAI Ở ĐÂU ?

Thầy giáo gọi *An* lên bảng làm một bài toán ôn ập thi vào lớp 10 như sau:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{x}{x^2+4} \text{ với } x \ge 3.$$

Lời giải của *An* như sau:

Ta có: $\dfrac{x}{x^2+4} = \dfrac{1}{x+\dfrac{4}{x}}$ (do $x \ge 3$).

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$x + \frac{4}{x} \ge 2\sqrt{4} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+\dfrac{4}{x}} \le \frac{1}{4} \text{ hay } \frac{x}{x^2+4} \le \frac{1}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x = \pm 2$ loại (do $x \ge 3$).

Vậy biểu thức $\dfrac{x}{x^2+4}$ không có giá trị lớn nhất với $x \ge 3$.

Các bạn thấy lời giải của An có đúng không? Lời giải của bạn thế nào?

NGUYỄN KHẮC TOÀN

(36 *Đào Nhuận, Hải Phòng*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 518 (8.2020)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Trần Văn Hạnh – Khai thác một số bài toán ước chung lớn nhất.

6 **Diễn đàn dạy học toán**
Đỗ Quang Minh – Dạy học phát triển phẩm chất năng lực học sinh qua dạy học một bài toán bất đẳng thức ở bậc THCS.

8 Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9 tỉnh Hưng Yên năm học 2018 - 2019.

10 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội năm học 2020-2021.

12 *Đặng Hùng Thắng* – Nhớ về thầy *Phan Đức Chính* và nghĩ về kỳ thi IMO.

16 **Bạn đọc tìm tòi**
Phạm Đăng Long – Tư duy về một bài toán tam giác đều và phép quay.

20 **Đề ra kỳ này**
T1/518, ..., T12/518, L1/518, L2/518.
Problem in This Issue

22 **Giải bài kì trước**
T1/514, ..., T12/514,L1/514, L2/514.
Solutions to Previous Problems

32 **Phương pháp giải toán**
Nguyễn Tuấn Anh – Phương pháp quy nạp toán học.

42 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 59
Bài dịch số 56.

43 **Nhiều cách giải cho một bài toán**

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay**

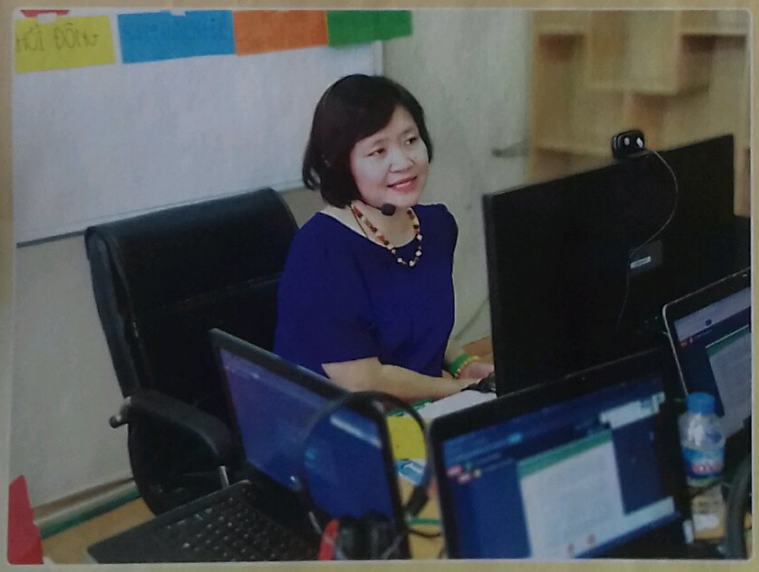
47 **Sai lầm ở đâu?**

Ảnh bìa 1 (từ trái qua phải): Em *Tô Đông Vũ*, 11CT, ĐHTH Hà Nội, HCB; em *Nguyễn Chu Gia Vượng*, 12CT, ĐHTH Hà Nội, HCB; em *Nguyễn Quý Tuấn*, 12CT, ĐHTH Hà Nội, HCB, thầy *Phan Đức Chính*, Bộ trưởng Bộ GD&ĐT *Trần Hồng Quân*; em *Nguyễn Duy Lân*, 12CT, ĐHSP Hà Nội, HCB, em *Trần Ngọc Nam*, 12CT, ĐHTH Hà Nội, HCB; em *Đào Hải Long*, 11CT, ĐHTH Hà Nội, HCV; thầy *Đặng Hùng Thắng*.

Biên tập: LÊ MAI, DƯƠNG THUẬN
Trị sự, phát hành: NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: DƯƠNG THUẬN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TÍCH CỰC TẬP HUẤN GIÁO VIÊN SỬ DỤNG SÁCH GIÁO KHOA LỚP 1 MỚI



Thực hiện chỉ đạo của Bộ GD&ĐT tại Công văn số 2058 ngày 10/6/2020 về việc bồi dưỡng giáo viên sử dụng SGK lớp 1 mới, NXBGDVN đã đầu tư lớn về con người, trang thiết bị và các điều kiện kỹ thuật, … để tổ chức tập huấn giáo viên theo 3 phương án: (1) Tập huấn trực tiếp theo kế hoạch chung của Bộ GD&ĐT và kế hoạch riêng của một số địa phương; (2) Tập huấn trực tuyến với hệ thống các studio tại Hà Nội và TP. Hồ Chí Minh. Qua quá trình triển khai vừa qua được các địa phương đánh giá cao. Hiện nay, NXBGDVN đang tiếp tục triển khai ở các địa phương có nhu cầu tập huấn thêm; (3) Tập huấn thông qua các học liệu điện tử, được đăng tải miễn phí trên trang Web tập huấn (taphuan.nxbgd.vn) nhằm đảm bảo 100% giáo viên dạy lớp 1 sẽ được tập huấn sử dụng SGK của NXBGDVN theo chỉ đạo của Bộ GD&ĐT.

Tính đến ngày 27/7/2020, đối với tập huấn trực tiếp, NXBGDVN đã hoàn thành việc triển khai ở 56/63 tỉnh, thành phố với hơn 800 điểm, phòng tập huấn và hơn 122.000 lượt giáo viên tham gia.

Với phương án tập huấn trực tuyến, NXBGDVN đã phối hợp tổ chức ở 58/63 tỉnh, thành phố với hơn 26.000 điểm cầu, gần 300.000 lượt giáo viên tham gia.

Đối với việc truy cập và tham gia tập huấn tại trang Web tập huấn của NXBGDVN, đã có gần 110.000 giáo viên, hơn 8.500 trường và 52/63 Sở GD&ĐT tỉnh, thành phố được cấp tài khoản để truy cập và quản lí. Lượng truy cập hàng ngày trung bình trên 30.000 lượt, có gần 40.000 giáo viên đến thời điểm 27/7/2020 đã hoàn thành các bài kiểm tra tập huấn.

Thanh Tùng

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT8M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2020

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng