TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

9 2020
Số 519

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 57
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Nhà toán học Hungary
Paul Erdős (1913 - 1996)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM CHUẨN BỊ, CUNG ỨNG ĐẦY ĐỦ SÁCH GIÁO KHOA PHỤC VỤ NĂM HỌC 2020-2021

1. Thực hiện công văn số 2058/BGDĐT-GDTH ngày 10/6/2020 của Bộ GD&ĐT về việc thực hiện bồi dưỡng giáo viên (GV) và cung ứng SGK lớp 1 năm học 2020-2021, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã hoàn thành công tác bồi dưỡng GV sử dụng SGK lớp 1 và chuẩn bị đầy đủ SGK, cung ứng tới các địa phương trong cả nước.

- NXBGDVN đã hoàn thành việc in, nhập kho hơn 113 triệu bản SGK phục vụ học sinh từ lớp 2 đến lớp 12. Tính đến ngày 15/8/2020, NXBGDVN đã phát hành được 93% sản lượng theo kế hoạch về các địa phương, đạt 92% so với cùng kỳ (do ảnh hưởng của đại dịch COVID-19 nên việc mua sắm SGK và đồ dùng học tập diễn ra chậm hơn mọi năm).

- Đối với SGK lớp 1, NXBGDVN đã hoàn thành việc in, nhập kho được hơn 14 triệu bản, tương đương 115% kết quả lựa chọn của các địa phương. Đến ngày 15/8/2020, NXBGDVN đã cung ứng tới các địa phương hơn 13 triệu bản SGK lớp 1 đạt tỉ lệ 107% so với kết quả lựa chọn SGK của các địa phương.

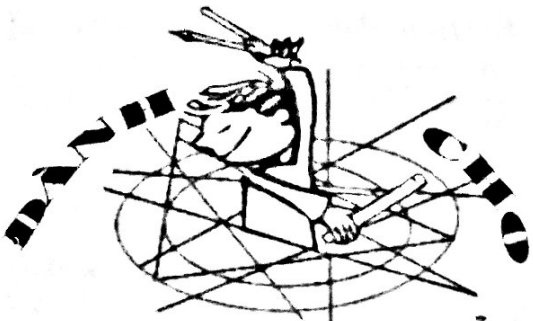
2. *Giá bán SGK từ lớp 2 đến lớp 12 vẫn được giữ như những năm học trước.* Bảng giá SGK được niêm yết tại các cửa hàng sách của NXBGDVN, các công ty Sách và Thiết bị trường học trên cả nước và trên webiste của NXBGDVN tại địa chỉ: www. nxbgd.vn.

3. NXBGDVN đã tiếp tục kiện toàn, củng cố hệ thống kênh phát hành trong toàn quốc nhằm đảm bảo cung ứng đầy đủ, đồng bộ, kịp thời đến các nhà trường, học sinh (HS), GV, không để xảy ra tình trạng thiếu sách, sốt sách đặc biệt trong giai đoạn triển khai áp dụng Chương trình giáo dục phổ thông 2018. Phát triển hệ thống bán lẻ, tại các địa phương để phục vụ nhu cầu của HS và GV.

Trong tháng phát hành phục vụ khai giảng năm học mới, hệ thống cửa hàng bán lẻ thuộc hệ thống NXBGDVN chuẩn bị đầy đủ hàng hoá, mở cửa bán hàng tất cả các ngày trong tuần, niêm yết đầy đủ bảng giá, đồng thời tổ chức các chương trình khuyến mại phong phú.

• Đường dây nóng (0377 3[illegible]) giải đáp mọi thắc mắc về nhu cầu mua SGK được [illegible] từ 8h00 đến 22h00 hàng ngày trong khoảng thời gian [illegible] ngày 15/6 đến ngày 15/9/2020, kể cả thứ Bảy, Chủ nhật và ngày lễ.

NXBGDVN khẳng định sẽ tiếp tục chủ động ứng phó với diễn biến phức tạp của dịch bệnh, các hiện tượng bất thường của thời tiết để đảm bảo cung ứng đầy đủ SGK tới tay HS khi bước vào năm học mới.



ĐẠI LƯỢNG BẤT BIẾN VÀ ỨNG DỤNG

TẠ MINH HIẾU
(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

I. Định nghĩa. Cho a, b, c là những số thực, ta xét tổng $S = a + b + c$. Nếu ta đổi chỗ a cho b, b cho c, c cho a, thì tổng S luôn luôn chỉ là một (không đổi). Tổng này không thay đổi đối với thứ tự phép cộng. Dù a, b, c có thay đổi thứ tự như thế nào chăng nữa S vẫn không thay đổi, nghĩa là S ***bất biến*** đối với việc thay đổi các biến khác. Trong thực tế cũng như trong toán học, rất nhiều vấn đề liên quan đến ***một số đối tượng nghiên cứu lại bất biến đối với sự thay đổi của nhiều đối tượng khác.***

Định nghĩa: *Bất biến là những đại lượng (hay tính chất) không thay đổi trong quá trình chúng ta thực hiện các phép biến đổi.*

II. Giải toán bằng đại lượng bất biến

Để giải toán được bằng đại lượng bất biến ta thực hiện theo các bước sau:

+ *Bước 1*: Ta phải phát hiện ra những đại lượng bất biến trong bài toán. Bước này tương đối khó nếu ta không luyện tập thường xuyên.

+ *Bước 2*: Xử lý tiếp đại lượng bất biến để tìm ra các quy luật, những điểm mâu thuẫn, ... để giải quyết bài toán.

III. Một số thí dụ minh họa

Thí dụ 1. (Đề thi HSG Toán 9 tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2014 – 2015)

Cho dãy gồm 2015 số:

$$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...;\frac{1}{2014};\frac{1}{2015}.$$

Người ta biến đổi dãy nói trên bằng cách xóa đi hai số u, v bất kì trong dãy và viết thêm vào dãy một số có giá trị bằng u + v + uv vào vị trí của u hoặc v. Cứ làm như thế đối với dãy mới thu được và sau 2014 lần biến đổi, dãy cuối cùng chỉ còn lại một số. Chứng minh rằng giá trị của số cuối cùng không phụ thuộc vào việc chọn các số u, v để xóa trong mỗi lần thực hiện việc biến đổi dãy, hãy tìm số cuối cùng đó.

Lời giải. Thực hiện cộng mỗi số trên bảng với 1 ta được dãy số: $\frac{1}{1}+1;\frac{1}{2}+1;\frac{1}{3}+1;....;\frac{1}{2015}+1.$

Đặt $u + v + uv = m$, khi đó ta được:

$$m + 1 = (u + 1)(v + 1).$$

Như vậy sau mỗi lần xóa đi hai số $u + 1$ và $v + 1$ của dãy thì lại thay bởi số $(u + 1)(v + 1)$.

Do đó lúc đầu ta có dãy số u, v, a, b, c,... và sau khi xóa đi hai số u và v ta được dãy số m, a, b, c,... nên ta có:

$$(u + 1)(v + 1)(a + 1)(b + 1)\ldots = (m + 1)(a + 1)(b + 1)\ldots$$

Như vậy sau mỗi lần xóa và viết thêm thì tích trên không thay đổi. Gọi k là số cuối cùng trên bảng sau khi xóa thì ta được:

$$k+1=\left(\frac{1}{1}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2015}+1\right)$$
$$=\frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}\ldots\frac{2016}{2015}=2016.$$

Do đó ta được $k=2015$ hay số cuối cùng còn lại trên bảng là 2015.

Nhận xét. Ta phát hiện ra *tính chất bất biến* nhờ đẳng thức: $u + v + uv + 1 = (u + 1)(v + 1)$. Nên sau mỗi lần xóa thì tích:

$$(u + 1)(v + 1)(a + 1)(b + 1)\ldots = (m + 1)(a + 1)(b + 1)\ldots$$

không thay đổi. Và đây chính là đại lượng bất biến của bài toán này. Như vậy nếu *giữ nguyên đẳng thức* này và *thay đổi dãy số* trên thì ta tìm được bài toán mới hoặc *thay đổi đẳng thức* trên ta cũng được bài toán mới.

Thí dụ 2. *Người ta viết lên bảng dãy số 1; 2; 3;....2019. Mỗi lần xóa đi hai số bất kì x, y trên bảng thì lại viết thêm số x + y + xy vào vị trí của x hoặc y trên bảng. Sau một số lần thực hiện như vậy thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó.*

HD: Theo thí dụ 1 thì ta có:

$$x + y + xy + 1 = (x + 1)(y + 1).$$

Nên sau mỗi lần xóa và viết thêm thì tích

$$(x + 1)(y + 1)(a + 1)(b + 1) \ldots$$

không thay đổi. Gọi k là số cuối cùng trên bảng sau khi xóa thì ta được:

$$k + 1 = (1 + 1)(2 + 1)(3 + 1)\ldots(2019 + 1)$$
$$= 2.3.4\ldots.2020 = 2020! \Rightarrow k = 2020!-1.$$

Vậy số còn lại cuối cùng trên bảng là số:

$$2020! - 1.$$

Thí dụ 3. *Người ta viết lên bảng dãy số:*

$$\frac{1010}{1};\ \frac{1010}{2};\ \frac{1010}{3};\ldots;\frac{1010}{2017};\ \frac{1010}{2018};\ \frac{1010}{2019}.$$

Mỗi lần xóa đi hai số bất kì x, y trên bảng thì lại viết thêm số 2xy − x − y + 1. Sau một số lần thực hiện như vậy thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó.

HD: Đặt $m = 2xy - x - y + 1$. Khi đó ta có:

$$2m - 1 = 4xy - 2x - 2y + 1 = (2x - 1)(2y - 1).$$

Như vậy đối với dãy số $2x - 1$, $2y - 1$, $2a - 1$, $2b - 1$,... thì mỗi lần xóa đi hai số $2x - 1$ và $2y - 1$ của dãy và viết thêm vào số $(2x - 1)(2y - 1)$ tích: $(2x - 1)(2y - 1)(2a - 1)(2b - 1) \ldots$

$$= (2m - 1)(2a - 1)(2b - 1) \ldots$$

không thay đổi sau mỗi lần xóa và thay số.

Gọi k là số cuối cùng trên bảng sau khi xóa thì ta được:

$$2k-1=\left(2.\frac{1010}{1}-1\right)\left(2.\frac{1010}{2}-1\right)\ldots\left(2.\frac{1010}{1010}-1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(2.\frac{1010}{2018}-1\right)\left(2.\frac{1010}{2019}-1\right)$$
$$=\frac{2019}{1}.\frac{2018}{2}\ldots1\ldots\frac{2}{2018}.\frac{1}{2019}=1.$$

Vậy $2k - 1 = 1$ nên $k = 1$. Vậy số còn lại cuối cùng trên bảng là số 1.

Thí dụ 4. *Trên bảng có ghi 2019 số* $\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots;\frac{1}{2019}$. *Mỗi lần xóa đi hai số x, y bất kì trên bảng thì ta thay bằng số* $z=\frac{xy}{x+y+1}$ *và giữ nguyên các số còn lại. Sau 2018 lần thực hiện thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó.*

HD: Ta có $\frac{1}{z}=\frac{1+x+y}{xy}=\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Khi đó ta được: $\frac{1}{z}+1=\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)$.

Như vậy sau mỗi lần xóa đi $\frac{1}{x}+1$ và $\frac{1}{y}+1$ và thay bằng số $\frac{1}{z}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)$ thì tích các số sau mỗi lần xóa và thay số mới là không đổi. Do đó nếu k là số cuối cùng thì ta được:

$$\frac{1}{k}+1=\left(\frac{1}{\frac{1}{1}}+1\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{\frac{1}{2019}}+1\right)=2020!$$

Từ đó ta được: $k=\frac{1}{2020!-1}$.

Thí dụ 5. *Người ta viết trên bảng dãy các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100. Thực hiện trò chơi như sau: Tiến hành xóa hai số a, b bất kì trong dãy số trên và viết lại một số là* a^3+b^3. *Thực hiện trò chơi như trên cho đến khi trên bảng còn lại một số. Hỏi số còn lại trên bảng có thể là 9876543212019 không?*

Lời giải. Với dãy số tự nhiên từ 1 đến 100 ta có tổng $1+2+3+\ldots+100=\frac{(1+100)100}{2}=5050$.

Tiến hành xóa hai số a, b bất kì trong dãy số trên và viết lại một số là a^3+b^3. Khi đó tổng dãy số trên bảng tăng một đại lượng $(a^3+b^3)-(a+b)$. Ta thấy $1+2+3+\ldots+100=5050$ chia 3 có số dư là 1. Lại thấy:

$(a^3+b^3)-(a+b)=(a-1)a(a+1)+(b-1)b(b+1)$ chia hết cho 3. Do đó đại lượng tăng lên luôn chia hết cho 3. Như vậy sau mỗi lần tiến hành trò chơi thì tổng dãy số trên bảng luôn chia cho 3 có số dư là 1. Mà ta lại có 9876543212019 chia hết cho 3. Do đó sau một số lần tiến hành trò chơi thì trên bảng không thể còn lại số 9876543212019.

Thí dụ 6. (***Đề thi học sinh giỏi Toán 6 huyện Yên Lạc, năm học*** **2017 – 2018**)

Cho một hình tròn được chia thành 10 ô hình quạt. Trên mỗi ô hình quạt ta đặt một hòn bi. Thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần lấy ở hai ô bất kì mỗi ô một hòn bi và chuyển sang ô liền kề theo chiều ngược nhau. Hỏi sau một số lần thực hiện trò chơi có thể chuyển tất cả các viên bi về cùng một ô được không?

Lời giải. Trước hết ta tô màu xen kẽ các ô hình quạt và ta có 5 ô được tô màu và 5 ô không được tô màu. Nếu di chuyển một viên bi ở ô màu và một viên bi ở ô không màu sang ô liền kề thì tổng số viên bi ở các ô màu cũng như ô không màu là không thay đổi. Nếu di chuyển hai viên bi ở mỗi ô màu sang ô không màu thì tổng số viên bi ở ô màu bị giảm đi 2. Còn nếu di chuyển hai viên ở hai ô không màu sang ô liền kề thì tổng số viên bi ở ô màu được tăng lên 2. Như vậy sau mỗi lần thực hiện trò chơi thì ***tổng số viên bi ở các ô màu không thay đổi tính chẵn lẻ so với lúc đầu***. Mà ban đầu tổng số viên bi trong các ô màu là 5, như vậy sau hữu hạn lần thực hiện trò chơi thì tổng số viên bi trong các ô màu luôn là số lẻ. Do đó tổng số viên bi trong các ô màu luôn khác 0 và khác 10. Như vậy sau một số lần thực hiện trò chơi ta không thể được tất cả các viên bi về cùng một ô được.

Thí dụ 7. *Mỗi lần cho phép thay thế cặp số (a, b) thuộc tập hợp M cho dưới đây bằng cặp số (a + c, b + d) trong đó cặp số (c, d) cũng thuộc M. Hỏi sau một số hữu hạn lần thay thế ta có thể nhận được tập hợp các cặp số như trong tập hợp M_1 hay không?*

$M=\{(16,2),(4,32),(6,62),(78,8)\}$

$M_1=\{(2018,702),(844,2104),(1056,2176),(2240,912)\}$

Lời giải. Ta thấy hai số trong cùng một cặp số của tập hợp M đều có cùng số dư khi chia cho 7. Do đó với hai cặp số (a, b), (c, d) thuộc tập hợp M, ta có: $a = 7m + r$; $b = 7n + r$; $c = 7i + q$; $d = 7k + q$ với $m,n,i,k,r,q \in \mathbb{N}$ và $0 < r,q < 7$.

Khi đó ta được: $a + c = 7(m + i) + r + q$;

$b + d = 7(n + k) + r + q$.

Suy ra $a + c$; $b + d$ có cùng số dư khi chia cho 7. Như vậy sau một số hữu hạn lần thay đổi, tập hợp gồm các cặp số như vậy vẫn giữ nguyên tính chất hai số trong cùng một cặp số có cùng số dư khi chia cho 7.

Trong khi đó ở tập hợp M_1 có chứa cặp số (2240, 912) có $2240 \vdots 7$ và 912 chia 7 dư 2.

Như vậy sau một số hữu hạn lần thay thế ta không thể nhận được tập hợp các cặp số như trong tập hợp M_1.

Thí dụ 8. *Trên bảng đen viết ba số* $\sqrt{2}, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Ta bắt đầu thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần chơi ta xoá hai số nào đó trong ba số trên bảng, giả sử là a và b rồi viết vào hai vị trí vừa xoá hai số mới* $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ *và* $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ *đồng thời giữ nguyên số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng luôn có ba số. Chứng minh rằng dù ta có chơi bao nhiêu lần đi chăng nữa thì trên bảng không đồng thời có ba số* $\frac{1}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$.

Lời giải. Giả sử ba số trên bảng là a, b, c, khi thay a, b bằng $x=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $y=\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$, ta có:

$$x^2+y^2=\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{2}=a^2+b^2.$$

Như vậy sau khi xoá hai số a, b thay bởi hai số mới $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ thì tổng bình phương hai số mới không đổi. Do đó tổng bình phương của ba số trên bảng không đổi và bằng $2+4+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$. Mặt khác tổng bình phương ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$ là $\left(\frac{1}{8}+2+3+2\sqrt{2}\right)\neq\frac{13}{2}$.

Vậy không thể có đồng thời trên bảng ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$.

Thí dụ 9. *Trên bảng cho 2020 số tự nhiên từ 1 đến 2020. Thực hiện liên tiếp phép biến đổi sau: Mỗi lần xoá đi hai số bất kỳ a, b có trên bảng rồi viết thêm số $a+b-\frac{1}{2}ab$ vào bảng. Khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số thì dừng lại. Tìm số còn lại đó.*

Lời giải. Trong quá trình biến đổi, giả sử trên bảng có dãy số $a_1, a_2, ..., a_n$. Ta xét biểu thức sau: $P=|(a_1-2)(a_2-2)...(a_n-2)|$. Ta chứng minh sau mỗi lần xóa thì giá trị biểu thức P giảm đi hai lần.

Giả sử ta xóa đi hai số a và b khi đó tích P mất đi thừa số $(a-2)(b-2)$ nhưng khi thay bằng $a+b-\frac{1}{2}ab$ thì tích P có thêm thừa số $\left|a+b-\frac{1}{2}ab-2\right|=\frac{|(a-2)(b-2)|}{2}$ giảm đi một nửa nên P giảm đi một nửa. Khi xóa đi hai số và thay bằng một số nên sau mỗi lần xóa trên bảng giảm đi một số.

Mà trên bảng có 2020 số nên sau 2019 lần xóa thì P giảm đi 2^{2019} lần. Khi đó ta có giá trị $P=|(1-2)(1-2)...(2020-2)|=0$.

Giả sử số còn lại trên bảng là x khi đó ta có $P=|x-2|=0\Rightarrow x=2$. Vậy số cuối cùng trên bảng là 2.

Thí dụ 10. *Trên bảng viết các số $\frac{1}{2020}, \frac{2}{2020}, ..., \frac{2018}{2020}, \frac{2019}{2020}$. Mỗi lần biến đổi, xóa đi hai số a, b bất kỳ và thay bằng số $a+b-5ab$. Hỏi sau 2018 lần thực hiện phép biến đổi trên bảng còn lại số nào?*

Lời giải. Trong dãy số trên có số $\frac{404}{2020}=\frac{1}{5}$. Nếu xóa hai số a và b bất kì và thay bằng số mới là $c=a+b-5ab$, như vậy sau mỗi lần xóa dãy trên giảm đi một số. Như vậy sau 2018 lần xóa trên bảng còn lại một số.

Đến một lúc nào đó ta sẽ xóa $\frac{1}{5}$ và một số b thì ta thay bằng $c=\frac{1}{5}+b-5.\frac{1}{5}b=\frac{1}{5}$. Như vậy cứ xóa số $\frac{1}{5}$ thì lại xuất hiện số $\frac{1}{5}$. Vậy số cuối cùng còn lại là $\frac{1}{5}$.

Thí dụ 11. *Cho tam thức bậc hai f(x). Mỗi lần thay tam thức này bởi một trong hai tam thức $x^2 f\left(1+\frac{1}{x}\right)$ hoặc $(x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right)$. Như vậy nếu cho tam thức $f(x)=x^2+4x+3$ thì sau một số lần thay đổi có thể cho ta tam thức $f(x)=x^2+10x+9$ không?*

Lời giải.

Giả sử tam thức đã cho có dạng $f(x)=ax^2+bx+c$ với a, b, c là các hệ số và a khác 0. Khi đó ta có:

$$x^2 f\left(1+\frac{1}{x}\right)=x^2\left[a\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+b\left(1+\frac{1}{x}\right)+c\right]$$
$$=(a+b+c)x^2+(b+2a)x+a.$$

Từ đó ta được: $\Delta=(b+2a)^2-4(a+b+c)a=b^2-4ac$.

Lại có:

$$(x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right)=(x-1)^2\left[a\left(\frac{1}{x-1}\right)^2+b.\frac{1}{x-1}+c\right]$$
$$=cx^2+(b-2c)x+a-b+c.$$

Từ đó ta được:

$$\Delta = (b-2c)^2 - 4(a-b+c)c = b^2 - 4ac.$$

Như vậy sau mỗi lần thay đổi thì tam thức mới có biệt thức Δ không đổi.

Nếu cho tam thức $f(x) = x^2 + 4x + 3$ thì ta có $\Delta = 4^2 - 4.3 = 4$, như vậy sau một số lần thay đổi thì ta không thu được tam thức $f(x) = x^2 + 10x + 9$ vì $\Delta = 10^2 - 4.9 = 64 \neq 4$.

Thí dụ 12. *Cho bốn số 2; 3; 4; 5 trên bảng. Mỗi lần xóa đi hai số a, b trong bốn số trên thì ta thay bằng hai số $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ và $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$, đồng thời giữ nguyên hai số còn lại. Hỏi sau một số lần thay đổi thì có khi nào ta thu được bốn số mới trên bảng đều nhỏ hơn 1 hay không?*

Lời giải. Nếu bốn số được ghi trên bảng là a; b; c; d thì tổng các nghịch đảo là $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.

Sau mỗi lần thay đổi ta có bốn số đó là $a+b+\sqrt{a^2+b^2}, a+b-\sqrt{a^2+b^2}, c, d.$

Ta có: $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}$

$$= \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}+a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)^2-(a^2+b^2)} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Khi đó: $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$

$$= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

Như vậy sau mỗi lần thay đổi thì tổng nghịch đảo của bốn số đã cho không đổi.

Mặt khác với bốn số 2; 3; 4; 5 trên bảng thì $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} < 4$. Giả sử sau một số lần thay đổi ta thu được bốn số x; y; z; t đều bé hơn 1. Khi đó ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t} > 4$. Điều này dẫn mâu thuẫn. Do đó sau một quá trình thay đổi ta không thể thu được bốn số đều bé hơn 1.

Nhận xét.

- Ta có $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} < 2$ nên sau một số lần thay đổi ta cũng không thể thu được hai trong bốn số nhỏ hơn 1.
- Ta cũng có thể giải bài toán trên theo cách khác như sau:

Gọi bốn số trên bảng là a; b; c; d, khi đó sau mỗi lần thay đổi ta có bốn số có dạng như sau:

$$a+b+\sqrt{a^2+b^2}, a+b-\sqrt{a^2+b^2}, c, d.$$

Ta có: $\begin{cases} a+b+\sqrt{a^2+b^2} > a,\ a+b+\sqrt{a^2+b^2} > b \\ a+b-\sqrt{a^2+b^2} > 0 \end{cases}$

Khi đó ta được:

$$a+b+\sqrt{a^2+b^2}+a+b-\sqrt{a^2+b^2}+c+d > a+b+c+d.$$

Như vậy sau mỗi lần thay đổi ta thu được bốn số có tổng lớn hơn bốn số cũ. Do đó:

$$a+b+\sqrt{a^2+b^2}+a+b-\sqrt{a^2+b^2}+c+d > 2+3+4+5 = 14.$$

Do đó không thể tồn tại bốn số mới đều nhỏ hơn 1.

Thí dụ 13. *Trên một hòn đảo có ba giống tắc kè sinh sống gồm 133 con màu xám, 155 con màu nâu và 177 con màu đỏ. Nếu hai con tắc kè khác màu nhau khi gặp nhau chúng sẽ cùng chuyển sang màu loại tắc kè thứ ba, còn nếu hai con tắc kè cùng màu khi gặp nhau thì chúng giữ nguyên màu. Hỏi trên đảo có khi nào xảy ra tình trạng tất cả các con tắc kè có cùng màu hay không?*

Lời giải. Đặc điểm của bài toán nằm ở bộ ba số 133; 155; 177 và khi chia chúng cho 3 thì được các số dư lần lượt là 1; 2; 0. Ta xét một con tắc kè xám gặp một con tắc kè nâu khi đó chúng chuyển thành màu đỏ và lúc này số tắc kè trên đảo là 132 con màu xám, 154 con màu nâu và 179 con màu đỏ. Ta nhận thấy nếu chia các số 132; 154; 179 cho 3 thì ta được các số dư lần lượt là 0; 1; 2. Ta xét một con tắc kè xám gặp

một con tắc kè đỏ khi đó chúng chuyển thành màu nâu và lúc này số tắc kè trên đảo là 132 con màu xám, 157 con màu nâu và 176 con màu đỏ. Ta nhận thấy nếu chia các số 132; 157; 176 cho 3 thì ta được các số dư lần lượt là 0; 1; 2. Ta xét một con tắc kè nâu gặp một con tắc kè đỏ khi đó chúng chuyển thành màu xám và lúc này số tắc kè trên đảo là 135 con màu xám, 154 con màu nâu và 176 con màu đỏ. Ta nhận thấy nếu chia các số 135; 154; 176 cho 3 thì ta được các số dư lần lượt là 0; 1; 2. Như vậy dù thay đổi màu như thế nào thì khi chia số con tắc kè mỗi màu cho 3 thì ta thấy xuất hiện đầy đủ các số dư là 0; 1; 2.

Tổng số tắc kè trên đảo là

$$133 + 155 + 177 = 465$$

luôn chia hết cho 3. Nếu như xảy ra tình trạng trên đảo tất cả các con tắc kè chỉ có một màu thì số dư chi chia các con tắc kè mỗi màu cho 3 là 0; 0; 0. Điều này vô lí. Do vậy không thể xảy ra tình trạng tất cả các con tắc kè trên đảo có cùng màu.

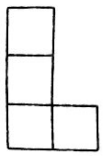
Thí dụ 14. *Có 2021 đồng xu, mỗi đồng xu có hai mặt gồm một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ. Xếp các đồng xu sao cho các mặt màu xanh ngửa lên. Thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần cho phép thực hiện đổi bốn mặt của bốn đồng xu tương ứng. Hỏi sau một số lần thực hiện trò chơi ta có thể thu được tất cả các đồng xu đều có mặt màu đỏ ngửa lên hay không?*

Lời giải. Thay mỗi đồng xu có mặt màu xanh ngửa lên bằng số -1 và thay mỗi đồng xu có mặt màu đỏ ngửa lên bằng số $+1$. Khi đó cách thực hiện trò chơi theo bài ra được mô tả như sau: Mỗi lần xóa bốn số bất kì và thay bằng bốn số là đối của nó. Ban đầu ta có 2021 số -1 tương ứng với 2021 đồng xu có mặt màu xanh ngửa lên. Như vậy khi thực hiện trò chơi thay đổi bốn số a, b, c, d bằng bốn số $-a, -b, -c, -d$ thì tích ta có tích $(-a)(-b)(-c)(-d) = abcd$.

Điều đó có nghĩa là khi thực hiện trò chơi một số lần thì tích của 2017 số không thay đổi và bằng -1.

Nếu như tất cả 2021 đồng xu đều có mặt màu đỏ ngửa lên thì tích các số thay thế luôn bằng $+1$. Như vậy sau một số lần thực hiện trò chơi thì ta không thể có 2021 đồng xu có mặt màu đỏ ngửa lên.

Thí dụ 15. *Xác định các số dương m, n sao cho bảng chữ nhật $m \times n$ có thể lát được bằng các quân hình chữ L như hình bên.*



Lời giải. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $m < n$. Để lát được bằng quân hình chữ L như trên thì bảng $m \times n$ phải có $m > 2$, $n > 3$. Giả sử bảng được lát bằng a quân hình chữ L. Khi đó do mỗi quân hình chữ L có 4 ô vuông nên ta có $m.n = 4a$. Mặt khác từ $m > 2$, $n > 3$ nên ta được $m.n > 6$, do đó $a \geq 2$.

• Xét trường hợp $a = 2$, khi đó ta có bảng 2×4 có thể lát bằng hai quân hình chữ L như hình bên.

×			
×	×	×	

• Xét trường hợp $a = 3$, khi đó ta có hai bảng 2×6 và 3×4. Dễ dàng kiểm tra được rằng hai bảng này không lát được bởi các quân hình chữ L.

Như vậy từ hai kết quả trên ta dự đoán bảng có lát được bằng các quân hình chữ L khi a là số chẵn.

Để chứng minh dự đoán này đi tô màu các ô trong bảng như sau:

Giả sử m là số chẵn, khi đó các ô ở hàng lẻ ta tô màu đen và các số ở hàng chẵn ta tô màu trắng. Ta có số ô màu đen và số ô màu trắng bằng nhau và bằng $2a$. Mỗi quân hình chữ L được lát vào bảng chiếm 3 ô màu đen và một ô màu trắng hoặc 3 ô màu trắng và một ô màu đen. Giả sử trong bảng được lát bằng x quân hình chữ L chiếm ba ô màu đen và một ô màu trắng, y quân

hình chữ L chiếm 3 ô màu trắng và một ô màu đen. Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=a \\ 3x+y=3y+x=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ a=2x \end{cases}.$$

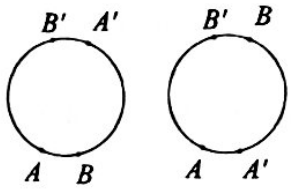
Như vậy ta được a là số chẵn. Bây giờ ta chứng minh với a là số chẵn thì bảng $m \times n$ có thể lát được bằng quân hình chữ L. Điều này có nghĩa là ta cần chứng minh tích $m.n$ chia hết cho 8 thì bảng $m \times n$ lát được bằng quân hình chữ L.

Thật vậy, nếu m chia hết cho 2 và m chia hết cho 4 thì bảng có thể trở thành bảng 2×4 và có thể lát được bằng các quân hình chữ L. Nếu m là số lẻ và n chia hết cho 8 thì ta viết $m = 2k + 3$, khi đó bảng có thể thia thành các bảng hình chữ nhật 2×4 và 3×8. Từ đó bảng có thể lát được bằng các quân hình chữ L.

Vậy điều kiện cần và đủ để bảng $m \times n$ có thể lát được bằng các quân hình chữ L là tích mn chia hết cho 8 với $m > 2$, $n > 2$.

Thí dụ 16. *Có tất cả 2n ngài đại sứ được mời đến một bữa tiệc. Mỗi ngài đại sứ có nhiều nhất $n-1$ kẻ thù. Chứng minh rằng có thể xếp các ngài đại sứ ngồi quanh một bàn tròn để không ai phải ngồi cạnh kẻ thù của mình.*

Lời giải. Đầu tiên ta xếp chỗ ngồi cho các ngài đại sứ theo mọi cách có thể. Gọi m là số cặp kẻ thù ngồi cạnh nhau. Gọi $(A; B)$ là một cặp kẻ thù với B ngồi bên phải của A (hình thứ nhất), ta sẽ cần phải tách họ ra. Xét một cặp $(A';B')$ với A' là một người bạn của A. Ta sẽ đạt được mục đích bằng cách đảo 2 đầu mút của cung BA' (hình thứ 2). Khi đó m sẽ bị giảm nếu $(A;A')$ và $(B;B')$ trong hình hai là một cặp thân thiện. Ta cần chỉ ra rằng luôn tồn tại B' nằm bên phải của A' và B là bạn của B'. Ta bắt đầu từ A và đi khắp xung quanh bàn theo chiều kim đồng hồ. Ta có ít nhất n người bạn của A và bên phải họ sẽ có n chỗ ngồi. Họ không thể bị chiếm giữ bởi tất cả kẻ thù của B' vì B' chỉ có $n-1$ kẻ thù. Như vậy luôn tồn tại một đại sứ A' để cho bên phải của nó có B' là một người bạn của B. Kết hợp với nguyên lý bất biến mà ta đã tìm ra ở trên thì việc làm giảm m là luôn thực hiện được. Vậy sau một số lần nhất định thực hiện thuật toán như với cặp $(A; B)$ thì ta sẽ có một cách xếp thoả mãn yêu cầu của bài toán.



Thí dụ 17. *Trong bảng ô vuông 4×4 gồm 16 ô vuông, người ta viết mỗi ô vuông một dấu cộng hoặc một dấu trừ. Cho phép thay đổi dấu của các ô vuông trên cùng một hàng hoặc một cột bằng cách thay dấu cộng thành dấu trừ và ngược lại. Tiến hành thuật toán một số lần như vậy cho đến khi số dấu trừ trong bảng không thể giảm được nữa. Khi đó số dấu trừ nhỏ nhất có trong bảng mà sau khi thực hiện thuật toán đưa về được gọi là số đặc trưng của bảng. Hỏi số đặc trưng của bảng có thể nhận các giá trị nào?*

Lời giải. Giả sử bảng T_1 sau các phép biến đổi dấu trên mỗi hàng hoặc mỗi cột ta được bảng T_2 mà số dấu trừ trong bảng là bé nhất, điều đó có nghĩa là nếu biến đổi tiếp bảng T_2 thì ta không thể thu được số dấu trừ bé hơn được nữa. Ta sẽ gọi bảng như vậy là bảng cực tiểu. Ta sẽ chứng minh số dấu trừ trong bảng cực tiểu không lớn hơn 4.

Thật vậy, trong mỗi hàng hoặc mỗi cột của bảng cực tiểu có không quá hai dấu trừ (vì nếu một hàng hoặc một cột nào đó có nhiều hơn hai dấu trừ thì ta thực hiện tiếp thuật toán trên số hàng hoặc cột đó số dấu trừ sẽ giảm). Giả sử tồn tại một bảng cực tiểu có nhiều hơn 4 dấu trừ. Khi đó trong một hàng (cột) A nào có của bảng có ít nhất hai dấu trừ. Ta kí hiệu P và Q là các cột (hàng) chứa các dấu trừ đó, hai dấu trừ còn lại có thể ở cột P và Q hoặc các cột khác. Khi biến đổi hàng A (nếu cần thiết) ta sẽ có bảng mà mà một cột P và Q có đúng hai dấu trừ. Ta xét

dấu trừ thứ năm, dấu trừ này ở hàng B, khi đổi dấu một trong hai cột P và Q thì số dấu trừ trên hàng B là 3, điều này mâu thuẫn với bảng T_2 là bảng cực tiểu.

Các bảng có 1, 2, 3, 4 dấu trừ trên đường chéo và các ô vuông còn lại có dấu cộng là một bảng cực tiểu. Để chứng minh điều này ta chú ý đến kết quả của phép biến đổi T_1 thành T_2 không phụ thuộc vào số lần biến đổi một hàng hay một cột của bảng mà phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của số đó. Thật vậy, giả sử hàng thứ nhất thay đổi a lần và các cột tương ứng thay đổi $b_1; b_2; b_3; b_4$ lần thì dấu đứng ở góc trên bên trái thay đổi $a+b_1$ lần, còn các ô còn lại thay đổi lần lượt là $a+b_2$; $a+b_3$; $a+b_4$ lần. Nếu a là số chẵn thì thay a bằng 0 và nếu a à số lẻ thì thay a bằng 1 thì kết quả vẫn giữ nguyên. Vì vậy ta chỉ cần xét sự biến đổi không quá một lần. Sử dụng các kết quả này ta thấy các bảng trên chính là các bảng cực tiểu.

Vậy số đặc trưng của bảng cố thể nhận là 1, 2, 3, 4.

Thí dụ 18. *Trong một bảng ô vuông $n \times n$ với n lẻ có $n.n$ ô vuông đơn vị. Trong mỗi ô vuông đơn vị ta viết một số $+1$ hoặc -1. Gọi a_i là tích tất cả các số trong hàng thứ i và b_j là tích tất cả các số trong cột thứ j với $i, j = 1,2, ..., n$. Chứng minh rằng*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_n \neq 0.$$

Lời giải. Nếu ta thay đổi dấu các số nằm ở hàng thứ p và ở cột thứ q, những số a_p và b_q cũng đổi dấu còn các số khác thì giữ nguyên. Ta đi khảo sát sự thay đổi của $a_p + b_q$ trước và sau khi đổi dấu

	Trước	Sau	Trước	Sau	Trước	Sau	Trước	Sau
a_p	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1
b_q	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1
$a_p + b_q$	-2	2	0	0	0	0	2	-2

Từ bảng trên ta thấy tổng $a_p + b_q$ biến đổi bằng cách thay đổi bằng một bội của 4.

Ta xét bảng chỉ có các số $+1$, khi đó $a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_n = 2n$, do n là số lẻ nên $2n$ không chia hết cho 4. Bởi vì các bảng khác sẽ nhận được từ bảng gồm toàn số 1 sau một số phép biến đổi. Do đó tổng $a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_n = 2n$ không thể chia hết cho 4. Từ đó suy ra tổng $a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_n \neq 0.$.

Thí dụ 19. *Có ba đống sỏi gồm 51, 49, 5 viên. Ta thực hiện một trong hai bước đi như sau: Bước thứ nhất là dồn hai đống bất kì thành một đống và bước hai thứ hai là chọn đống có số viên sỏi là chẵn để chia thành hai đống bằng nhau. Hỏi sau khi thực hiện một dãy bước đi như thế có thể chia ba đống sỏi thành 105 đống mà mỗi đống chỉ có một viên không?*

Lời giải. Ban đầu có ba đống sỏi gồm 51, 49, 5 viên đều là số lẻ nên bước đi đầu tiên phải là dồn hai đống sỏi thành một đống sỏi. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Dồn hai đống sỏi 5 viên và 49 viên ta được một đống sỏi 54 viên. Lúc này ta có hai đống sỏi 54 viên và 51 viên. Số sỏi ở mỗi đống đều là bội của 3. Bước thứ hai là ta chia đống sỏi 54 viên thành hai đống bằng nhau mà mỗi đống có 27 viên. Như vậy ta lại có ba đống sỏi 27 viên, 27 viên, 51 viên. Bây giả các ba đống sỏi đều có số sỏi là số lẻ nên ta sẽ thực hiện bước đi dồn hai đống 27 viên và 51 viên để được một đống 78 viên. Đến lúc này ta lại được hai đống sỏi là 27 viên và 78 viên, số sỏi mỗi đống đều chia hết cho 3. Tiếp tục thực hiện bước đi chia đống sỏi 78 viên thành hai đống sỏi 39 viên thì ta lại được ba đống sỏi mà số viên sỏi chia hết cho 3. Như vậy thức hiện một số bước đi luân phiên ta thu được các sống sỏi mà số viên sỏi luôn chia hết cho 3. Đây chính là bất biến của trường hợp thứ nhất. Thật vậy, khi gộp hai đống sỏi có số viên sỏi chia hết cho 3 ta

được một đống sỏi có số viên sỏi chia hết cho 3, còn chia chia một đống sỏi có số viên sỏi chẵn và chia hết cho 3 thì ta lại được hai đống sỏi có số viên sỏi bằng nhau và chia hết cho 3. Như vậy khi thực hiện các bước đi thì số viên sỏi ở mỗi đống sỏi luôn chia hết cho 3 và số đóng sỏi được chia ra nhiều nhất là 35 đống với mỗi đống sỏi có 3 viên.

• Trường hợp 2: Dồn hai đống sỏi 5 viên và 51 viên ta được một đống sỏi 56 viên. Lúc này ta có hai đống sỏi 49 viên và 56 viên. Số sỏi ở mỗi đống đều là bội của 7. Bước thứ hai là ta chia đống sỏi 56 viên thành hai đống bằng nhau mà mỗi đống có 28 viên. Như vậy ta lại có ba đống sỏi 28 viên, 28 viên, 49 viên. Ta thấy số viên sỏi mỗi đống đều chia 7. Đến hay ta có thể thực hiện bước đi chia đống 28 viên thành hai đống sỏi bằng nhau hoặc dồn hai đống sỏi 28 viên và 49 viên, khi đó ta cũng được các đống sỏi có số viên sỏi chia hết cho 7. Như vậy thức hiện một số bước đi luân phiên ta thu được các đống sỏi mà số viên sỏi luôn chia hết cho 7. Đây chính là bất biến của trường hợp thứ hai. Như vậy khi thực hiện các bước đi thì số viên sỏi ở mỗi đống sỏi luôn chia hết cho 7 và số đóng sỏi được chia ra nhiều nhất là 15 đống với mỗi đống sỏi có 7 viên.

• Trường hợp 3: Dồn hai đống sỏi 51 viên và 49 viên ta được một đống sỏi 100 viên. Lúc này ta có hai đống sỏi 100 viên và 5 viên. Số sỏi ở mỗi đống đều là bội của 5. Bước thứ hai là ta chia đống sỏi 100 viên thành hai đống bằng nhau mà mỗi đống có 50 viên. Như vậy ta lại có ba đống sỏi 50 viên, 50 viên, 5viên. Ta thấy số viên sỏi mỗi đống đều chia hết cho 5. Đến hay ta có thể thực hiện bước đi chia đống 50 viên thành hai đống sỏi bằng nhau hoặc dồn hai đóng sỏi 50 viên và 5 viên, khi đó ta cũng được các đống sỏi có số viên sỏi chia hết cho 5. Như vậy thức hiện một số bước đi luân phiên ta thu được các sống sỏi mà số viên sỏi luôn chia hết cho 5. Đây chính là bất biến của trường hợp thứ ba. Như vậy khi thực hiện các bước đi thì số viên sỏi ở mỗi đống sỏi luôn chia hết cho 5 và số đống sỏi được chia ra nhiều nhất là 21 đống với mỗi đống sỏi có 5 viên.

Như vậy từ các trường hợp trên ta thấy không thể chia ba đống sỏi thành 105 đống mà mỗi đống chỉ có một viên.

Thí dụ 20. *Trên bàn cờ ô vuông* 8×8 *có* 32 *quân màu trắng và* 32 *quân màu đen, mỗi quân chiếm một ô vuông. Thực hiện trò chơi như sau: Tại mỗi bước đi ta thay toàn bộ quân đen thành quân trắng và ngược lại trên một hàng hoặc một cột nào đó. Hỏi sau một số hữu hạn bước thì trên bàn cờ có thể còn lại đúng một quân đen không?*

Lời giải. Nếu trước khi biến đổi có k quân đen trên một hàng (cột) thì trên hàng (cột) đó có $8 - k$ quân trắng. Khi thực hiện biến đổi hàng (cột) đó thì k quân đen chuyển thành k quân trắng và $8 - k$ quân trắng chuyển thành $8 - k$ quân đen. Như vậy sau bước biến đổi trên hàng (cột) đó thì số quân đen trên bảng tăng thêm $8 - k$ và đồng thời giảm đi k quân, điều này có nghĩa là số quân đen trên bảng thay đổi một lượng là $(8 - k) - k = 8 - 2k$ quân. Số quân đen thay đổi này sẽ là số dương nếu $k < 4$, là số âm nếu $k > 4$ và bằng 0 nếu $k = 4$. Chú ý rằng $(8 - k) - k = 8 - 2k$ là số chẵn nên sau mỗi bước thay đổi thì số quân đen bị thay đổi luôn là số chẵn, mà lúc đầu ta có 32 quân đen nên tổng số quân đen trên bàn cờ sau mỗi bước thay đổi luôn là số chẵn. Như vậy sau hữu hạn bước đi trên bảng luôn tồn tại trạng thái số quân đen và quân trắng là các số chẵn. Do đó không thể biến đổi bàn cờ về trạng thái còn lại đúng một quân đen được.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trên bảng ghi một số nguyên dương có hai chữ số trở lên. Người ta thiết lập số mới bằng cách xóa đi chữ số hàng đơn vị của số đã cho, sau đó cộng vào số còn lại 7 lần số vừa bị xóa. Ban đầu trên bảng

ghi số 6^{100}. Hỏi sau một số bước thực hiện như trên ta có thể thu được 100^6 hay không ? Tại sao ?

Bài 2. Giả sử rằng n là một số lẻ. Đầu tiên ta viết các số từ 1 tới $2n$ trên một bảng đen. Sau đó ta chọn ra hai số bất kì a, b và xóa chúng, rồi thay thế chúng bởi $|a-b|$. Chứng minh rằng số còn lại cuối cùng là một số lẻ.

Bài 3. Có 2010 viên sỏi. Hai người chơi thay phiên nhau bốc sỏi, mỗi lượt đi người chơi được quyền bốc một số lượng viên sỏi là luỹ thừa với số mũ tự nhiên bất kì của 2 (1, 2, 4, ...). Ai bốc được viên sỏi cuối cùng là thắng cuộc. Giả sử cả hai người chơi đều là người thông minh. Hỏi ai là người thắng cuộc?

Bài 4. Trong một hộp có 2010 viên sỏi. Có hai người tham gia trò chơi, mỗi người lần lượt phải bốc ít nhất là 11 viên sỏi và nhiều nhất là 20 viên sỏi. Người nào bốc viên sỏi cuối cùng sẽ thua cuộc. Hãy tìm thuật chơi để đảm bảo người bốc đầu tiên luôn là người thắng cuộc.

Bài 5. Cho một bảng ô vuông chứa số như hình a. Ta thực hiện một thuật toán T như sau: Chọn ra 2 số bất kì nằm ở hai ô vuông cạnh nhau và cộng 2 số đó với một số nguyên nào đó. Hỏi rằng sau một số lần thực hiện thuật toán T thì bảng hình vuông chứa các số như hình a có thể thành bảng hình vuông như hình b hay không?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Hình a

7	8	9
6	2	4
3	5	1

Hình b

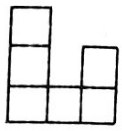
Bài 6. Cho một bàn cờ quốc tế 8×8. Hỏi rằng quân mã có thể đi nước đầu tiên từ ô dưới cùng bên trái và kết thúc ở ô trên cùng bên phải hay không. Với điều kiện nó phải đi qua tất cả các ô trên bàn cờ và mỗi ô chỉ đi qua đúng một lần

Bài 7. Mỗi số trong các số $a_1, a_2, ..., a_n$ nhận một trong hai giá trị là -1 hoặc 1. Biết rằng $S = a_1a_2a_2a_4 + a_2a_3a_4a_5 + ... + a_na_1a_2a_3 = 0$, chứng minh rằng n chia hết cho 4

Bài 8. Trên mặt phẳng cho 2011 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xét tất cả các đoạn thẳng nối các cặp điểm trong 2011 điểm này. Vẽ đường thẳng d không đi qua điểm nào trong số 2011 điểm nói trên. Chứng minh rằng nếu đường thẳng d cắt một số đoạn thẳng xét ở trên thì số đoạn thẳng bị đường thẳng d cắt là một số chẵn.

Bài 9. Cho trước số nguyên dương n lẻ. Tại mỗi ô vuông của bàn cờ kích thước $n \times n$ người ta viết một số $+1$ hoặc -1. Gọi a_k là tích của tất cả những số ghi trên hàng thứ k (tính từ trên xuống) và b_k là tích của tất cả những số ghi trên cột thứ k (tính từ trái sang). Chứng minh rằng với mọi cách điền số như trên, đều có: $a_1 + a_2 + ... + a_n + b_1 + b_2 + ... + b_n \neq 0$.

Bài 10. Ta định nghĩa viên gạch hình móc câu là hình gồm 6 ô vuông đơn vị như hình vẽ dưới đây hoặc hình nhận được do lật hình đó (sang trái, sang phải,...) hoặc hình nhận được do xoay hình đó đi một góc. Xác định các hình chữ nhật kích thước $m \times n$ với m, n là các số nguyên dương sao cho có thể lát được bằng các viên gạnh hình móc câu.



Bài 11. Trên bảng người ta viết 100 chữ số 1 và 10 chữ số 2 sau đó thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần xóa hai số bất kỳ và viết một số mới bằng tích 2 số đã xóa. Việc làm này thực hiện liên tục cho đến khi còn một số trên bảng. Hỏi số cuối cùng trên bảng còn lại là bao nhiêu? Tại sao?

Bài 12. Trên bảng người ta viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100 sau đó thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần xóa hai số bất kỳ và viết một số mới bằng tổng lập phương của hai số đã cho. Việc làm này thực hiện liên tục cho đến khi còn một số trên bảng. Hỏi số cuối cùng còn lại trên bảng có thể là số: 98754321^{2016} hay không? Tại sao?

Bài 13. Ở ngoài biển, trên một hòn đảo sinh sống ba giống thằn lằn có ba loại màu: màu xám có 133 con, màu nâu có 155 con và màu đỏ có 177 con. Nếu hai con thằn lằn khác màu gặp nhau thì chúng đồng thời đổi sang màu thứ ba (ví dụ: nếu thằn lằn màu xám gặp thằn lằn màu nâu thì cả hai con đều đổi sang màu đỏ). Trong những trường hợp hai con thằn lằn cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên không đổi màu. Có xảy ra tình trạng là trên đảo tất cả thằn lằn cùng một màu được không?

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10, THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI, NĂM HỌC 2020 - 2021

VÒNG 1

Câu I. 1) PT thứ hai của hệ tương đương với

$$9x^3 = xy^2 + 10(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$\Leftrightarrow 9x^3 = xy^2 + 10(x^3 - y^3)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + xy^2 - 10y^3 = 0 \quad (*).$$

Nếu $y = 0$ thì hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x^2 = 7 \\ 9x^3 = 70x \end{cases}$, hệ này vô nghiệm.

Xét $y \neq 0$ chia hai vế (*) cho y^3 ta có:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right) - 10 = 0 \Leftrightarrow t^3 + t - 10 = 0 \left(t = \frac{x}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+5) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 2y.$$

Thu được hệ: $\begin{cases} x = 2y \\ 7y^2 = 7 \end{cases}$.

Đáp số: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$.

2) ĐK: $\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 5.$

Đặt $u = \sqrt{5-x}$, $v = \sqrt{2x-1}$ $(u, v \geq 0)$ thu được:

$$\begin{cases} 2u^2 + v^2 = 9 \\ 11u + 8v = 24 + 3uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2 + v^2 = 9 \\ 11u + 8v = 15 + 2u^2 + v^2 + 3uv \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2 + v^2 = 9 \\ 3(2u+v) + 5(u+v) = 15 + (2u+v)(u+v) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2 + v^2 = 9 \\ (2u+v-5)(u+v-3) = 0 \end{cases}.$$

• Giải hệ: $\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 2u^2 + v^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - 2u \\ 3u^2 - 10u + 8 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}, \begin{cases} u = \frac{4}{3} \\ v = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{29}{9} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

• Giải hệ: $\begin{cases} u + v = 3 \\ 2u^2 + v^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ u^2 - 2u = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}, \begin{cases} u = 0 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, x = 5 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy PT có 3 nghiệm: $x = 1, x = 5, x = \frac{29}{9}$.

Câu II.

1) $x^2y^2 - 16xy + 99 = 9x^2 + 36y^2 + 13x + 26y$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + 20xy + 100$$
$$= 9x^2 + 36xy + 36y^2 + 13(x+2y) + 1$$

$$\Leftrightarrow (xy+10)^2 = 9(x+2y)^2 + 13(x+2y) + 1.$$

Đặt $m = x + 2y$, suy ra $9m^2 + 13m + 1$ là bình phương của số nguyên dương. Ta có:

$$(3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1$$
$$< 9m^2 + 13m + 1 < (3m+3)^2 = 9m^2 + 18m + 9.$$

Suy ra: $9m^2 + 13m + 1 = (3m+2)^2 \Leftrightarrow m = 3$. Ta thu được: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ (xy+10)^2 = 11^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

Đáp số: $x = y = 1$.

2) Từ điều kiện $(a+b)(2a+3b) + 10 \geq 4(2a+3b)$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} + \frac{5}{2a+3b} \geq 2.$$

$$3a^2 + 8b^2 + 10ab \leq 21 \Leftrightarrow (a+b)^2 + 5^2 \geq 2^2 + (2a+3b)^2.$$

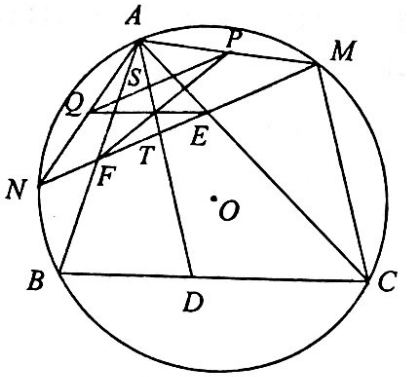
Ta có: $(a+b)^2 + 5^2 = 2^2\left(\frac{(a+b)^2}{2^2} + \frac{5^2}{(2a+3b)^2}\right) +$

$$+\left((2a+3b)^2 - 2^2\right)\frac{5^2}{(2a+3b)^2}$$

$$\geq 2 \cdot 2^2 \left(\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{5}{2a+3b}}{2}\right)^2 + \left((2a+3b)^2 - 2^2\right)\frac{5^2}{(2a+3b)^2}$$

$$\geq 2 \cdot 2^2 + (2a+3b)^2 - 2^2 = 2^2 + (2a+3b)^2.$$

Câu III. 1) Do $\widehat{NBA} = \widehat{DAB} = \widehat{DAC} = \widehat{ACM}$ nên hai cung AM và AN bằng nhau, do đó $AM = AN$.



2) Ta có: $\widehat{AFM} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AM} + \text{sđ}\overset{\frown}{BN})$

$$= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AN} + \text{sđ}\overset{\frown}{BN}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \widehat{ACB}.$$

Do đó tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

3) Gọi AD cắt PQ, MN tại S, T. Ta thấy $\widehat{AQP} = \widehat{ANM} = \widehat{ACM} = \widehat{CAD}$ và

$$\widehat{SAQ} = \widehat{SAB} + \widehat{BAN} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AN} + \text{sđ}\overset{\frown}{BN}) = \widehat{ACB}.$$

Ta suy ra $\Delta AQS \sim \Delta CAD$ (g.g) và tương tự $\Delta APS \sim \Delta BAD$ (g.g). Vậy ta có:

$$\frac{SP}{DA} = \frac{AP}{BA}, \frac{DA}{SQ} = \frac{AC}{AQ}.$$

Theo 1), $AM = AN$ nên $AP = AQ$, suy ra $\frac{SP}{SQ} = \frac{AC}{AB}$. Vì $BCEF$ nội tiếp, $\frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE}$.

Hơn nữa, theo tính chất phân giác $\frac{AF}{AE} = \frac{TF}{TE}$, vậy $\frac{SP}{SQ} = \frac{TF}{TE}$. Từ đây theo định lý Thales đảo, suy ra ST, QE, PF đồng quy.

Câu IV. Ta có:

$$M = \frac{a^2(a+bc)^2}{ab(ab+2c^2)} + \frac{b^2(b+ca)^2}{bc(bc+2a^2)} + \frac{c^2(c+ab)^2}{ca(ca+2b^2)}$$

$$\Rightarrow M \ge \frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{(ab+bc+ca)^2} \quad (1).$$

Giả sử $c = \min(a,b,c)$ ta có:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \ge \frac{a^2+b^2+c^2+c^2}{ab+bc+ca+c^2} \text{ (vì } \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \ge 1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Suy ra:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\ge \frac{a^2+b^2+2c^2}{(c+a)(c+b)} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = P.$$

Ta chứng minh: $P \ge 2$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+2c^2)(a+b) + 8abc \ge 2(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+2c^2)(a+b) + 8abc \ge 2a^2(b+c) + 2b^2(c+a) + 2c^2(a+b) + 4abc$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+4abc \ge ab(a+b) + 2c(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \ge 2c(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-2c) \ge 0 \text{ (đúng vì } c \le a; c \le b).$$

Suy ra $\frac{a^2+b^2+2c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 2.$

Ta có: $8(a+b+c)(ab+bc+ca) \le 9(a+b)(b+c)(c+a)$

Nên $2 \le \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)}$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{3abc}{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca) \le a^2+b^2+c^2+3abc \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $M \ge 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

VÒNG 2

Câu I. 1) Từ PT thứ nhất của hệ suy ra $x^2 + xy + x + y = 4$. Do đó

$$y^2 + xy + x + y + 5 = y^2 + xy + x + y + (x^2 + xy + x + y) + 1$$

$$= x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2x + 2y = (x+y+1)^2.$$

Ta có: $x^3 + y^3 + 12y + 13 = x^3 + y^3 + 1 + 12(y+1)$

$$= x^3 + y^3 + 1 + 3 \cdot 4(y+1)$$

$$= x^3 + y^3 + 1 + 3(x+y)(x+1)(y+1)$$

$$= (x+y+1)^3.$$

Vậy PT thứ hai của hệ tương đương với

$$(x+y+1)^5 = 3^5 \Leftrightarrow x+y+1=3.$$

Ta thu được $\begin{cases} x+y=2 \\ x+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$

Đáp số $x=y=1$.

2) Đặt $u=x-12, v=2x-12, t=24-3x,$ thu được $u+v+t=0$. Chú ý rằng $u^3+v^3+t^3=3uvt$.

Ta có:

$$u^7+v^7+t^7=(u^3+v^3+t^3)(u^4+v^4+t^4)$$
$$-u^3v^3(u+v)-v^3t^3(v+t)-t^3u^3(t+u)$$
$$=3uvt(u^4+v^4+t^4)-u^3v^3(-t)+v^3t^3(-u)-t^3u^3(-v)$$
$$=uvt\left[3(u^4+v^4+t^4)+u^2v^2+v^2t^2+t^2u^2\right].$$

Vì u, v, t không đồng thời bằng 0 nên ta có:

$$3(u^4+v^4+t^4)+u^2v^2+v^2t^2+t^2u^2>0.$$

Suy ra: $u^7+v^7+t^7=0 \Leftrightarrow uvt=0$

$\Leftrightarrow x=12,\ x=6,\ x=8.$

Đáp số: $x \in \{6; 8; 12\}$.

Câu II.

1) Đặt $A=4a^2+5b,\ B=4b^2+5c,\ C=4c^2+5a,$ giả sử $c=\max\{a,b,c\}$.

Khi đó: $(2c)^2<4c^2+5a\le 4c^2+5c<(2c+2)^2$

$\Rightarrow 4c^2+5a=(2c+1)^2 \Rightarrow 5a=4c+1.$

Suy ra $A=4a^2+5b, B=4b^2+5\cdot\dfrac{5a-1}{4}.$

TH1: Nếu $a\le b$. Ta có:

$$(2b)^2<B\le 4b^2+5\cdot\frac{5b-1}{4}<(2b+2)^2$$

$$\Rightarrow B=4b^2+5\cdot\frac{5a-1}{4}=(2b+1)^2 \Rightarrow 25a=16b+9.$$

Khi đó $(2a)^2<A=4a^2+5\cdot\dfrac{25a-9}{16}<(2a+2)^2$

$\Rightarrow A=(2a+1)^2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=c=1$ (thỏa mãn).

TH2: Nếu $a>b$, tương tự ta có

$(2a)^2<A<4a^2+5a<(2a+2)^2$

$\Rightarrow A=4a^2+5b=(2a+1)^2 \Rightarrow 5b=4a+1.$

Khi đó

$$(2b)^2<B=4b^2+\frac{25}{4}\cdot\frac{5b-1}{4}-\frac{5}{4}<(2b+2)^2$$

$\Rightarrow B=(2b+1)^2 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=c=1$ (loại vì $a>b$).

Vậy $a=b=c=1$.

2) Gọi bộ số nhận được sau n phép biến đổi là (a_n, b_n, c_n, d_n). Đặt $A_n=a_n+b_n+c_n+d_n$, trong đó $a_0=a, b_0=b, c_0=c, d_0=d$. Từ quy tắc xây dựng trên suy ra

$A_n=2A_{n-1}=4A_{n-2}=\cdots=2^nA_0$. Nếu thu được hai bộ số giống nhau ở hai thời điểm khác nhau $i\ne j \Rightarrow 2^iA_0=2^jA_0 \Rightarrow A_0=0 \Rightarrow A_n=0.$ (1)

Đặt $B_n=a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2$

$$\Rightarrow B_{n+1}=(a_n+b_n)^2+(b_n+c_n)^2+(c_n+d_n)^2+(d_n+a_n)^2$$
$$=2B_n+2(a_nb_n+b_nc_n+c_nd_n+d_na_n)$$
$$=2B_n+2(a_n+c_n)(b_n+d_n).$$

Vì $a_n+c_n=(a_{n-1}+b_{n-1})+(c_{n-1}+d_{n-1})=A_{n-1}=0\ (n\ge 1)$

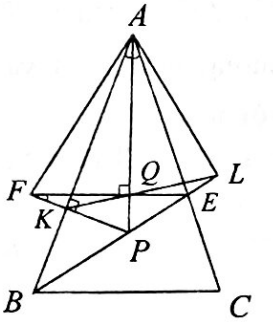
$\Rightarrow B_{n+1}=2B_n=4B_{n-1}=\cdots=2^nB_1$. Lập luận tương tự như trên $B_1=0$

$\Rightarrow (a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(d+a)^2=0$

$\Rightarrow a+b=b+c=c+d=d+a=0$

$\Rightarrow b=-a, c=-b=a, d=-c=-a$ (đpcm).

Câu III.



1) Dễ thấy AP là phân giác $\widehat{BAC}$ và $AQKF$ nội tiếp nên

$\widehat{KFQ}=\widehat{KAQ}=\widehat{PAE}$

do đó $AEPF$ nội tiếp.

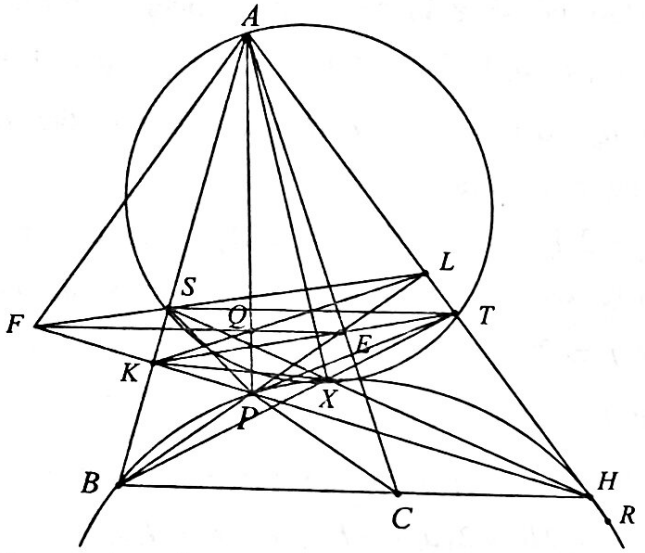
2) Do $AQKF$ và $AEPF$ nội tiếp nên $\widehat{QKP}=\widehat{QAF}=\widehat{QEP}$, do đó $FKEL$ nội tiếp. Ta suy ra $\widehat{QLE}=\widehat{QFK}=\widehat{QAK}=\widehat{QAE}$. Từ đó $ALEQ$ nội tiếp, suy ra $LA\perp LE$.

3) Gọi giao điểm của KP và BC là H, khi đó H là trực tâm tam giác PAB. Vậy R nằm trên đường tròn (BPH), ta cần chứng minh đường tròn (PBH) tiếp xúc với đường tròn (AST).

Theo 2), tứ giác $FKEL$ nội tiếp nên

$$\widehat{SKE} = \widehat{FKE} - 90^\circ = 90^\circ - \widehat{ELF} = \widehat{SLA},$$

do đó $SLTK$ nội tiếp. Ta thu được $\dfrac{AS}{AT} = \dfrac{AL}{AK} = \dfrac{AB}{AH}$, từ đó $ST \parallel BH$ (1).



Cũng từ tứ giác $SLTK$ nội tiếp nên $\Delta FSK \sim \Delta ETL$. Từ đó: $\dfrac{SK}{LT} = \dfrac{FK}{EL} = \dfrac{AK}{AL} = \dfrac{HK}{BL}$.

Vậy hai tam giác vuông KSH và LTB đồng dạng, ta suy ra $\widehat{LBT} = \widehat{SHK}$. Từ đó BT cắt HS tại X thì tứ giác $BHXP$ nội tiếp hay X thuộc (BPH) (2).

Từ (2), $\widehat{SXT} = \widehat{BXH} = 180^\circ - \widehat{BAH}$, nên X nằm trên đường tròn (AST) (3). Từ (1) và (3), suy ra đường tròn (AST) và đường tròn (BPH) tiếp xúc với nhau.

Câu IV. +) Ta chứng minh

$$\left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3\right]^2 \geq \frac{4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{a}(b+c)+\frac{1}{b}(c+a)+\frac{1}{c}(a+b)\right]^2 \geq \frac{4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow \left(bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\right)^2 \geq 4abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2(a+b)^2+b^2c^2(b+c)^2+c^2a^2(c+a)^2 + 2abc^2(b+c)(a+c)+2bca^2(c+a)(a+b) + 2cab^2(a+b)(c+b) \geq 4a^4bc+4b^4ca+4c^4ab + 4a^3bc(b+c)+4b^3ca(c+a)+4c^3ab(a+b).$$

Ta có

$$VT = a^2b^2(a^2+b^2+2ab)+b^2c^2(b^2+c^2+2bc) + c^2a^2(c^2+a^2+2ca)+2abc^2(c^2+(a+b)c+ab) + 2bca^2(a^2+(b+c)a+bc)+2cab^2(b^2+(c+a)b+ca)$$

$$VP = 4a^4bc+4b^4ca+4c^4ab+4a^3bc(b+c) + 4b^3ac(a+c)+4c^3ab(a+b).$$

Giản ước hai vế thu được:

$$a^2b^2(a^2+b^2+2ab)+b^2c^2(b^2+c^2+2bc) + c^2a^2(c^2+a^2+2ca)+6a^2b^2c^2 \geq 2a^4bc+2b^4ca+2c^4ab+2a^3bc(b+c) + 2b^3ac(a+c)+2c^3ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^4(b-c)^2+b^4(c-a)^2+c^4(a-b)^2 + 2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+6a^2b^2c^2 \geq 2a^3bc(b+c) + 2b^3ca(c+a)+2c^3ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a^4(b-c)^2+\frac{1}{2}b^4(c-a)^2+\frac{1}{2}c^4(a-b)^2 + a^2b^2(c-a)(c-b)+b^2c^2(a-b)(a-c) + c^2a^2(b-c)(b-a) \geq 0.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh rằng

$$M = b^2c^2(b-a)(c-a)+c^2a^2(c-b)(a-b) + a^2b^2(a-c)(b-c) \geq 0.$$

Do tính đối xứng, ta giả sử $a \geq b \geq c$, ta có:

$$a^2b^2(a-c)(b-c) = a^2b^2(a-b+b-c)(b-c) = a^2b^2(a-b)(b-c)+a^2b^2(b-c)^2.$$

Suy ra:

$$M = b^2c^2(b-a)(c-a)+a^2b^2(b-c)^2 + (a-b)(b-c)(a^2b^2-c^2a^2) \geq 0$$

(đúng vì $b^2c^2(b-a)(c-a) \geq 0$, $a^2b^2(b-c)^2 \geq 0$, $(a-b)(b-c)(a^2b^2-c^2a^2) \geq 0$).

Cho $a+b+c=3$ ta thu được:

$$3abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)^2 \geq 4(a^2+b^2+c^2) \text{ (1).}$$

☞

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH
NĂM HỌC 2020-2021
MÔN TOÁN CHUYÊN (*Thời gian làm bài 150 phút*)

Câu 1. (1,5 *điểm*) Giả sử a, b, c là các số thực khác 0 sao cho hệ $\begin{cases} ax+by=c \\ bx+cy=a \\ cx+ay=b \end{cases}$ có nghiệm (x, y).

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}=3$.

Câu 2. (2,5 *điểm*) a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4-2x^2y=1 \\ 2x^2+y^2-2y=2 \end{cases}.$$

b) Giải phương trình:

$$2(x-2)\sqrt{x+2}=-x^2+3x+3.$$

Câu 3. (2,5 *điểm*) a) Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho các số $2n + 2021$ và $3n + 2020$ là các số chính phương?

b) Tìm tất các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $\dfrac{x^2-2}{xy+2}$ có giá trị là số nguyên.

Câu 4. (2,5 *điểm*) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B sao O và O' nằm về hai phía đối với đường thẳng AB. Đường thẳng d thay đổi qua B cắt đường tròn (O) tại C và cắt đường tròn (O') tại D (d không trùng với đường thẳng AB).

a) Xác định vị trí đường thẳng d sao cho đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất.

b) Gọi M là điểm di chuyển trên từ điểm A, ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn (O), N là điểm di chuyển trên từ điểm A, cùng chiều kim đồng hồ trên đường tròn (O') sao cho $\widehat{AOM}=\widehat{AO'N}$. Chứng minh đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (1 *điểm*) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2z^2+y^2z^2+1\le 3z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{8}{(y+3)^2}+\frac{4z^2}{(1+2z)^2}.$$

LÊ BÁ HOÀNG
(*Phòng GD&ĐT TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh*) ***Giới thiệu***

****

☞ +) Tiếp theo ta chứng minh $a^2+b^2+c^2+abc\ge 4$. Thật vậy, ta có:

$$Q=\frac{a}{3a+bc}+\frac{b}{3b+ca}+\frac{c}{3c+ab}$$
$$=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$$
$$\Rightarrow Q=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$\le\frac{2(ab+bc+ca)}{\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)}=\frac{3}{4}.$$

Suy ra:

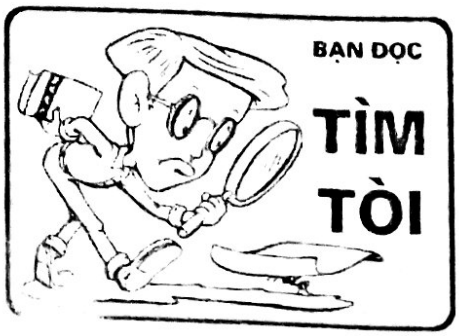
$$9=(a+b+c)^2=\left(\sqrt{\frac{a}{3a+bc}}\sqrt{a(3a+bc)}+\sqrt{\frac{b}{3b+ca}}\sqrt{b(3b+ca)}+\sqrt{\frac{c}{3c+ab}}\sqrt{c(3c+ab)}\right)^2$$
$$\le Q\left(3(a^2+b^2+c^2)+3abc\right)\le\frac{9}{4}(a^2+b^2+c^2+abc)$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+abc\ge 4 \quad (2).$$

Áp dụng (1), (2) suy ra:

$$3abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)^2+abc\ge 4+3(a^2+b^2+c^2)$$
$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)^2+1\ge\frac{4}{abc}+3\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)$$

(đpcm).

NGUYỄN VŨ LƯƠNG - PHẠM VĂN HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*) ***Giới thiệu***



MỘT CÁCH CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC TỪ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ

DƯƠNG VĂN DUY
(GV THPT Nguyễn Hồng, Bắc Giang)

Chúng ta đã biết định lý cơ bản của đại số: "*Phương trình* $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ *với* $a_i \in \mathbb{R}$ *không có quá* n *nghiệm thực*. Từ đó suy ra: "*Nếu phương trình*

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0;\ a_i \in \mathbb{R}$$

có từ $n+1$ *nghiệm phân biệt trở lên thì* $f(x) \equiv 0$".

Ứng dụng kết luận này ta có thêm cách chứng minh các đẳng thức.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng*

$$(a-b)(1+bc)(1+ac) + (b-c)(1+ab)(1+ac) + \\ + (c-a)(1+ab)(1+bc) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Lời giải. Dễ thấy nếu $b = c$ hoặc $b.c = 0$ thì đẳng thức đã cho đúng.

Xét đa thức

$$f(a) = (a-b)(1+bc)(1+ac) + (b-c)(1+ab)(1+ac) \\ + (c-a)(1+ab)(1+bc) - (a-b)(b-c)(c-a)$$

là đa thức với lũy thừa bậc cao nhất của a là a^2. Với $b \neq c; b.c \neq 0$ ta có:

$$f(0) = -b(1+bc) + b - c + c(1+bc) + bc(b-c) = 0;$$

$$f(b) = (b-c)(1+b^2)(1+bc) + (c-b)(1+b^2)(1+bc) \\ = 0;$$

$$f(c) = (c-b)(1+cb)(1+c^2) + (b-c)(1+cb)(1+c^2) \\ = 0.$$

Như vậy $f(a) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow f(a) \equiv 0$. Đẳng thức được chứng minh.

Thí dụ 2. *Cho* $a + b + c - abc = 1 - ab - bc - ac$. *Chứng minh rằng:*

$$4bc(1-a^2) + 4ac(1-b^2) + 4ab(1-c^2) \\ = (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2).$$

Lời giải. Xét đa thức

$$f(a) = 4bc(1-a^2) + 4ac(1-b^2) + 4ab(1-c^2) \\ -(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2).$$

Với $a = 0$, từ giả thiết có:

$b + c + bc = 1 \Leftrightarrow (b+1)(c+1) = 2$. Suy ra:

$$f(0) = 4bc - (1-b^2)(1-c^2) \\ = 4bc - 2(1-b)(1-c) = 2(b+c+bc) - 2 = 0.$$

Với $a = 1$ ta có:

$1 + b + c - bc = 1 - b - bc - c \Leftrightarrow b + c = 0$. Suy ra:

$$f(1) = 4c(1-b^2) + 4b(1-c^2) \\ = 4(b+c) - 4bc(b+c) = 0.$$

Với $a = -1$ ta cũng có:

$-1 + b + c + bc = 1 + b - bc + c \Leftrightarrow bc = 1$. Suy ra:

$$f(-1) = -4c(1-b^2) - 4b(1-c^2) \\ = -4c - 4b + 4b^2c + 4bc^2 \\ = -4c - 4b + 4c + 4b = 0.$$

Vậy $f(a) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow f(a) \equiv 0$. Đẳng thức được chứng minh.

Thí dụ 3. *Cho* $ab + bc + ac = 1$. *Chứng minh rằng:* $a + b + c - 3abc$

$$= a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2).$$

Lời giải. Xét đa thức

$$f(a) = a + b + c - 3abc - a(b^2 + c^2) \\ - b(a^2 + c^2) - c(a^2 + b^2).$$

Với $a = 0$ ta có: $bc = 1$. Suy ra:

$f(0)=b+c-bc^2-b^2c=b+c-c-b=0.$

Với $a=1$ ta có: $b+bc+c=1 \Leftrightarrow b+c=1-bc.$

Suy ra:

$$f(1)=1+b+c-3bc-(b^2+c^2)-b-bc^2-c-b^2c$$
$$=1-3bc-\left[(b+c)^2-2bc\right]-bc(b+c)$$
$$=1-3bc-\left[(1-bc)^2-2bc\right]-bc(1-bc)$$
$$=1-3bc-1+4bc-b^2c^2-bc+b^2c^2$$
$$=0.$$

Với $a=-1$ ta có:

$-b-c+bc=1 \Leftrightarrow b+c=bc-1.$ Suy ra:

$$f(-1)=-1+3bc+b+c+b^2+c^2-bc^2-b-c-b^2c$$
$$=-1+3bc+(b+c)^2-2bc-bc(b+c)$$
$$=-1+bc+(bc-1)^2-bc(bc-1)$$
$$=-1+bc+b^2c^2-2bc+1-b^2c^2+bc$$
$$=0.$$

Vậy $f(a)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow f(a)\equiv 0$. Đẳng thức được chứng minh.

Thí dụ 4. *Cho ba số $a,b,c\neq 0$ thỏa mãn*

$$\begin{cases} ayz+bxz+cxy=0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

Lời giải. Trường hợp $b=c$ việc chứng minh đẳng thức không khó (dành cho bạn đọc). Xét đa thức $f(x)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$ với $b\neq c$

- Với $x=0$, từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} ayz=0 \\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz=0 \\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \end{cases}.$$ Suy ra:

$$f(0)=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=(\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2-2\frac{yz}{bc}-1$$
$$=1^2-1=0.$$

- Với $x=a$ ta có:

$$\begin{cases} ayz+abz+acy=0 \\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cy+bz=0 \\ yz=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow y=z=0.$ Suy ra:

$$f(a)=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

- Với $x=b$ ta có:

$$\begin{cases} ayz+b^2z+bcy=0 \\ \dfrac{b}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b}.\dfrac{y}{b}.\dfrac{z}{c}+\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=0 \\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1-\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{y}{b}\dfrac{z}{c}=\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{b}{a}-1\right) \end{cases}.$$ Suy ra:

$$f(b)=\frac{b^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$
$$=\frac{b^2}{a^2}+\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2-2\frac{y}{b}.\frac{z}{c}-1$$
$$=\frac{b^2}{a^2}+\left(1-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}-1\right)-1$$
$$=0.$$

Như vậy $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow f(x)\equiv 0$. Đẳng thức được chứng minh.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1. Cho $ab+bc+ac=1$. Chứng minh rằng

$$4abc=a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-c^2)(1-a^2)+c(1-a^2)(1-b^2).$$

Bài 2. Cho $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:

$$abc(ab+bc+ac-1)=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2).$$

Bài 3. Cho $a,b,c\neq 0$ thỏa mãn

$$a+b+c=x+y+z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$$

Chứng minh rằng $xa^2+yb^2+zc^2=0$.

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC TRONG GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài viết này không đề cập hết các ứng dụng của Hình học trong giải toán Đại số mà chỉ xin trình bày về việc sử dụng vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn; mặt phẳng và mặt cầu để giải một số bài toán Đại số.

A. KIẾN THỨC CẦN BIẾT

1) Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(x_0;y_0)$, đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0\ (a^2+b^2\neq 0)$ và đường tròn $(C): (x-m)^2+(y-n)^2=R^2$. Đường tròn (C) có tâm $I(m;n)$, bán kính R.

a) Khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ được tính theo công thức: $d(A,\Delta)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b) Điều kiện cần và đủ để Δ và (C) có điểm chung là $d(I,\Delta)\leq R$.

c) Giả sử $A\in(C)$. Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại A có phương trình là

$$(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=R^2.$$

2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_0;y_0;z_0)$, mặt phẳng $(\alpha): ax+by+cz+d=0$ và mặt cầu $(S): (x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2=R^2$. Mặt cầu (S) có tâm $I(m;n;p)$ và bán kính R.

a) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$d(A,(\alpha))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

b) Điều kiện cần và đủ để (α) và (S) có điểm chung là $d(I,(\alpha))\leq R$.

c) Giả sử $A\in(S)$. Tiếp diện của mặt cầu (S) tại A có phương trình là:

$$(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)+(z_0-p)(z-p)=R^2.$$

B. THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1. *Cho các số thực a và b thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+16=8a+6b$.*

a) Chứng minh rằng $10\leq 4a+3b\leq 40$.

b) Chứng minh rằng $7b\leq 24a\leq 7b+150$.

Lời giải. Ta có:

$$a^2+b^2+16=8a+6b\Leftrightarrow (a-4)^2+(b-3)^2=9.$$

Trong mặt phẳng Oxy, xét đường tròn $(C): (x-4)^2+(y-3)^2=9$ và các đường thẳng

$$d_1: 4x+3y-m=0 \text{ và } d_2: 24x-7y-n=0.$$

Đường tròn (C) có tâm $I(4;3)$ và bán kính $R=3$.

a) Vì tồn tại a và b nên đường tròn (C) và đường thẳng d_1 có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I,d_1)\leq R\Leftrightarrow \frac{|25-m|}{5}\leq 3$$

$$\Leftrightarrow |25-m|\leq 15\Leftrightarrow 10\leq m\leq 40.$$

Lại do $4x+3y=m$ nên $10\leq 4x+3y\leq 40$ hay $10\leq 4a+3b\leq 40$.

b) Vì tồn tại a và b nên đường tròn (C) và đường thẳng d_2 có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I,d_2)\le R\Leftrightarrow \frac{|75-n|}{\sqrt{24^2+(-7)^2}}\le 3\Leftrightarrow 0\le n\le 150.$$

Do $n=24x-7y$ nên $0\le 24x-7y\le 150$ hay $0\le 24a-7b\le 150\Leftrightarrow 7b\le 24a\le 7b+150$.

Thí dụ 2. *Xét các số thực x và y thỏa mãn điều kiện* $x^2+y^2-2x-4y+4=0$. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $S=x^2+y^2+4x+2y$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $x^2+y^2=2x+4y-4$ nên $S=6x+6y-4$ hay $6x+6y-S-4=0$.

Trong mặt phẳng Oxy, xét đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=1$ và đường thẳng Δ: $6x+6y-S-4=0$.

Vì tồn tại x và y nên (C) và Δ có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I,\Delta)\le R\Leftrightarrow \frac{|14-S|}{\sqrt{6^2+6^2}}\le 1$$

$$\Leftrightarrow 14-6\sqrt{2}\le S\le 14+6\sqrt{2}.$$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất bằng $14+6\sqrt{2}$ và giá trị nhỏ nhất bằng $14-6\sqrt{2}$.

Thí dụ 3. (***Trích đề thi HSG lớp 12 tỉnh Đồng Tháp năm học 2019 – 2020***)

Cho x, y là hai số thực thay đổi sao cho $x^2+4y^2+1=2x+8y$. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $A=\dfrac{10y-2x-14}{2y+x+1}$.

Lời giải. Ta có:

$$x^2+4y^2+1=2x+8y\Leftrightarrow (x-1)^2+(2y-2)^2=4.$$

Đặt $X=x, Y=2y$. Khi đó ta có:

$$(X-1)^2+(Y-2)^2=4\,(*) \text{ và } A=\frac{5Y-2X-14}{Y+X+1}.$$

Vì $(X-1)^2+(Y-2)^2=4$ nên

$$(X+Y-3)^2=(X-1+Y-2)^2$$
$$\le 2\left[(X-1)^2+(Y-2)^2\right]=8.$$

Suy ra: $-2\sqrt{2}\le X+Y-3\le 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{2}\le X+Y+1\le 4+2\sqrt{2}.$$

Do đó biểu thức A xác định với mọi X,Y thỏa mãn điều kiện (*) và

$$A=\frac{5Y-2X-14}{Y+X+1}\Leftrightarrow (A+2)X+(A-5)Y+A+14=0.$$

Trong mặt phẳng (OXY), xét đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=2$ và đường thẳng Δ có phương trình:

$$(A+2)X+(A-5)Y+A+14=0.$$

Vì tồn tại x và y nên tồn tại X và Y. Do đó (C) và Δ có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I,\Delta)\le R\Leftrightarrow \frac{|4A+6|}{\sqrt{(A+2)^2+(A-5)^2}}\le 2$$

$$\Leftrightarrow A^2+9A-10\le 0\Leftrightarrow -10\le A\le 1.$$

Vậy biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -10 và giá trị lớn nhất bằng 1.

Chú ý. *Nếu cần chỉ ra giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất đạt được khi nào thì chúng ta có thể sử dụng phương trình tiếp tuyến nói trên để tìm. Cụ thể như sau:*

Mọi tiếp tuyến của đường tròn (C): $(X-1)^2+(Y-2)^2=4$ có dạng

$$(X_0-1)(X-1)(Y_0-2)(Y-2)=4.$$

- Khi $A=1$ thì Δ là tiếp tuyến của (C) và Δ có phương trình: $3X-4Y+15=0$

$$\Leftrightarrow 3(X-1)-4(Y-2)=-10\Leftrightarrow -\frac{6}{5}(X-1)+\frac{8}{5}(Y-2)=4$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{5}-1\right)(X-1)+\left(\frac{18}{5}-2\right)(Y-2)=4.$$

Suy ra tiếp điểm có tọa độ $\left(-\frac{1}{5};\frac{18}{5}\right)$ hay biểu thức A đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi $X=-\frac{1}{5};Y=\frac{18}{5}$ hay $x=-\frac{1}{5};y=\frac{9}{5}$.

- Khi $A=-10$ thì Δ là tiếp tuyến của (C) và Δ có phương trình: $8X+15Y=4$

$$\Leftrightarrow 8(X-1)+15(Y-2)=-34$$

$$\Leftrightarrow -\frac{16}{17}(X-1)-\frac{30}{17}(Y-2)=4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{17}-1\right)(X-1)+\left(\frac{4}{17}-2\right)(Y-2)=4.$$

Suy ra tiếp điểm có tọa độ $\left(\frac{1}{17};\frac{4}{17}\right)$ hay biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi $X=\frac{1}{17}; Y=\frac{4}{17}$ hay $x=\frac{1}{17}; y=\frac{2}{17}$.

Thí dụ 4. *Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn* $2x^2+2xy+y^2=\frac{4}{5}$. *Gọi S là tập giá trị của biểu thức* $T=\frac{7x-2y-3}{4x+y+3}$. *Tập hợp S có chứa bao nhiêu số nguyên?*

Lời giải. Ta có: $2x^2+2xy+y^2=\frac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4xy+2y^2=\frac{8}{5}\Leftrightarrow (2x+y)^2+y^2=\frac{8}{5}.$$

Đặt $X=2x+y$ và $Y=y$ thì $2x=X-Y, y=Y$ và $X^2+Y^2=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2$; $T=\frac{7X-11Y-6}{4X-2Y+6}$.

Ta có: $T=\frac{7X-11Y-6}{4X-2Y+6}$

$$\Leftrightarrow (4T-7)X+(11-2T)Y+6T+6=0.$$

Trong mặt phẳng OXY, xét đường tròn (C): $X^2+Y^2=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2$ có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=\frac{2\sqrt{10}}{5}$ và đường thẳng Δ:$(4T-7)X+(11-2T)Y+6T+6=0$.

Vì tồn tại x, y nên tồn tại X, Y. Do đó (C) và Δ có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(O,\Delta)\le R\Leftrightarrow \frac{6|T+1|}{\sqrt{(4T-7)^2+(11-2T)^2}}\le\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\Leftrightarrow T^2+58T-59\le 0\Leftrightarrow -59\le T\le 1.$$

Suy ra tập giá trị của biểu thức T là $S=[-59;1]$.

Vậy S chứa tất cả 61 số nguyên.

Thí dụ 5. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn* $x^2+y^2+z^2=4$. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $f(x,y,z)=\frac{x-3y-z-1}{x+y+2z-5}$.

Lời giải. Đặt $m=\frac{x-3y-z-1}{x+y+2z-5}$ thì ta có

$$(m-1)x+(m+3)y+(2m+1)z+1-5m=0.$$

Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2=4$ có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=2$ và mặt phẳng

$$(\alpha): (m-1)x+(m+3)y+(2m+1)z+1-5m=0.$$

Vì tồn tại x, y, z nên (S) và (α) có điểm chung $\Leftrightarrow d(O,(\alpha))\le R$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-5m|}{\sqrt{(m-1)^2+(m+3)^2+(2m+1)^2}}\le 2$$

$$\Leftrightarrow m^2-42m-43\le 0\Leftrightarrow -1\le m\le 43.$$

Vậy $\max f(x,y,z)=43$ và $\min f(x,y,z)=-1$.

Chú ý. *Nếu cần chỉ ra giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất đạt được khi nào thì chúng ta có thể sử dụng phương trình tiếp diện nói trên để tìm. Cụ thể như sau:*

Mọi tiếp diện của mặt cầu (S):$x^2+y^2+z^2=4$ có dạng $x_0x+y_0y+z_0z=4$.

- Khi $m=-1$ thì (α) có phương trình:

$$2x-2y+z=6 \text{ hay } \frac{4}{3}x-\frac{4}{3}y+\frac{2}{3}z=4.$$

Suy ra tiếp điểm có tọa độ $\left(\frac{4}{3};-\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$ hay giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x=\frac{4}{3}; y=-\frac{4}{3}; z=\frac{2}{3}$.

- Khi $m=43$ thì (α) có phương trình:

$$42x+46y+87z=214$$

hay $\frac{84}{107}x+\frac{92}{107}y+\frac{174}{107}z=4$.

Suy ra tiếp điểm có tọa độ $\left(\frac{84}{107};\frac{92}{107};\frac{174}{107}\right)$ hay giá trị lớn nhất đạt được khi $x=\frac{84}{107}$; $y=\frac{92}{107}$; $z=\frac{174}{107}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho các số thực a, b thỏa mãn

$$\frac{(a-2)^2}{9}+\frac{(2b+3)^2}{4}=1.$$

a) Chứng minh rằng $-6\le 4a+5b\le 7$.

b) Chứng minh rằng $4b-1\le a\le 4b+9$.

Bài 2. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+(y-2)^2=9$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\frac{x-2y+3}{2x+y+5}$.

Bài 3. Cho các số thực a, b thỏa mãn $4a^2+9b^2-12b-5=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{2a-6b+3}{4a+3b+5}$.

Bài 4. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x,y,z)=\frac{x+3y+z+1}{2x+y-z-5}$.

Bài 5. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $5x^2+10y^2+z^2+10xy-4=0$. Gọi S là tập giá trị của biểu thức $F=\frac{x-6y+z+1}{3x+2y+2z-5}$. Tập hợp S có chứa bao nhiêu số nguyên?

Bài 6. Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn

$$32^{2x^2+3xy-1}+20x^2+20xy+10y^2=2^{5xy-5y^2-1}+8.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{7x-2y-3}{4x+y+3}$.

Bài 7. Biết rằng hệ phương trình $\begin{cases} mx-y+1=0 \\ x^2+4y^2=1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x;y)$. Giá trị của m^2 bằng

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** $\frac{2}{3}$.

Bài 8. Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-3)^2+(y-3)^2=6$. Giá trị lớn nhất của $\frac{y}{x}$ bằng

A. $3+2\sqrt{2}$ **B.** $6+2\sqrt{3}$ **C.** $3\sqrt{3}$ **D.** 6.

Bài 9. Cho các số thực a, b thỏa mãn các điều kiện $a^2+b^2>1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a+4b-3$ là

A. $\sqrt{10}$ **B.** $2\sqrt{10}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$ **D.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Bài 10. (*Trích đề thi thử năm 2019, THPT chuyên Hà Tĩnh*)

Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2-xy+y^2=1$ và hàm số $f(t)=2t^3-3t^2+1$. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

A. $-4-3\sqrt{2}$ **B.** $-4-5\sqrt{2}$

C. $-4-4\sqrt{2}$ **D.** $-4-2\sqrt{2}$.

Bài 11. (*Trích đề thi thử năm 2020, Sở GDĐT Thái Nguyên*)

Cho các số thực x,y,z thỏa mãn

$$\log_4\left(\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+1}\right)=x(x-4)+y(y-4)+z(z-4).$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $K=\frac{x+2y}{x+y+z}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$ **B.** $(-2;-1)$ **C.** $(4;5)$ **D.** $(1;2)$

(*Xem tiếp trang 24*)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/519 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $x^y + y^x = 23 - xy$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T2/519 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Biết rằng $\frac{AH}{BC} = \frac{12}{25}$, tính tỷ số $\frac{AB}{AC}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/519. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $9a^2 + 9b^2 + 82ab + 10a + 10b \geq 1$. Chứng minh rằng $41a^2 + 41b^2 + 18ab \geq 3 - 2\sqrt{2}$.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T4/519. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 60^0$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng d bất kỳ đi qua điểm D cắt các tia đối của các tia AB, CB lần lượt tại E, F $(E \neq A, F \neq C)$. Gọi M là giao điểm của CE và AF, H là giao điểm của OM và EF. Chứng minh rằng bốn điểm A, C, D, H cùng nằm trên một đường tròn.

NGUYỄN VĂN NHIỆM
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T5/519. Giải phương trình

$$\frac{2020x^4 + x^4\sqrt{x^2 + 2020} + x^2}{2019} = 2020.$$

NGUYỄN THANH HẢI
(GV THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/519. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left|\sqrt{x^2+1} + x - 8y^2 + 8\sqrt{2y} - 8\right| = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2+1}} - 8y^2 + 8\sqrt{2y} - 4 \\ 2y^2 - 2\sqrt{2y} - \sqrt{x^2+1} + x + 2 = 0 \end{cases}$$

TRẦN HỒNG SƠN
(Sở GD&ĐT Thái Bình)

Bài T7/519. Cho hàm số $f(x) = x^2 - x + 1$. Đặt $f_1(x) = f(x)$ và $f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \forall n \geq 2$ và n là số nguyên dương. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển thành đa thức của $f_{2021}(x)$.

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T8/519. Tìm điểm M nằm trong tứ diện $ABCD$ sao cho tích các khoảng cách từ M đến bốn mặt của tứ diện $ABCD$ lớn nhất.

DƯƠNG QUỐC VIỆT
(Hà Nội)

Bài T9/519. Tồn tại hay không một tam giác thỏa mãn sin của góc thứ nhất bằng côsin của góc thứ hai và bằng tan của góc thứ ba?

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Nam Yên Thành, Yên Thành, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/519. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = \frac{1}{2}$ và $a_{n+1} = \frac{4n+5}{4n+6}a_n, \forall n \geq 0$. Đặt $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Tính giới hạn $\lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{n}$.

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/519. Cho các số thực $a, b, c \in [1; 5]$ thay đổi và thỏa mãn $a + b + c = 9$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức sau

1) $P = abc$.

2) $F = ab + bc + ca$.

3) $S_\lambda = a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda$, với $\lambda \in \{0\} \cup [1; +\infty)$ là hằng số.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong 2, Bắc Ninh)

Bài T12/519. Cho tam giác ABC không đều với G là trọng tâm tam giác. Các đường thẳng AG, BG, CG theo thứ tự cắt lại đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB tương ứng tại D, E, F. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác DBC, ECA, FAB đồng quy.

LÊ VIẾT ÂN
(*TP. Hồ Chí Minh*)

Bài L1/519. Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x = A\cos(5\pi t + \varphi)$. Tại thời điểm t, vật đang đi về phía vị trí cân bằng và tỉ số giữa thế năng và động năng của vật bằng 3 $\left(\frac{W_t}{W_đ} = 3\right)$. Sau đó $\frac{1}{60}$s thì tỉ số đó bằng bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/519. Có ba dụng cụ gồm điện trở thuần $R = 30\ \Omega$, cuộn cảm thuần L và tụ điện C. Đặt điện áp xoay chiều $u = U_0\cos(\omega t + \varphi)$ (V) lần lượt vào hai đầu đoạn mạch nối tiếp chứa R, L và chứa R, C. Khi đó cường độ dòng điện trong mạch $i_1 = 6\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{7}\right)$ (A) và $i_2 = 6\cos\left(\omega t + \frac{10\pi}{21}\right)$ (A). Đặt điện áp trên vào hai đầu đoạn mạch có R, L, C mắc nối tiếp thì công suất tiêu thụ điện trên đoạn mạch lúc đó bằng bao nhiêu?

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/519 (For 6th grade). Find positive integers x, y such that $x^y + y^x = 23 - xy$.

Problem T2/519 (For 7th grade). Given a triangle ABC with right angle at A. Let AH be the altitude. If $\frac{AH}{BC} = \frac{12}{25}$, find $\frac{AB}{AC}$.

Problem T3/519. Suppose that a, b are positive and $9a^2 + 9b^2 + 82ab + 10a + 10b \geq 1$. Show that $41a^2 + 41b^2 + 18ab \geq 3 - 2\sqrt{2}$.

Problem T4/519. Given a rhombus $ABCD$ with $\widehat{ABC} = 60^0$. The diagonals AC and BD intersect at O. A line d through D intersects the opposite rays of the rays AB, CB respectively at E, F $(E \neq A, F \neq C)$. Let M be the intersection between CE and AF, and then H the intersection between OM and EF. Show that A, C, D, H lie on some circle.

Problem T5/519. Solve the equation

$$\frac{2020x^4 + x^4\sqrt{x^2 + 2020} + x^2}{2019} = 2020.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/519. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \left|\sqrt{x^2+1} + x - 8y^2 + 8\sqrt{2y} - 8\right| = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2+1}} - 8y^2 + 8\sqrt{2y} - 4 \\ 2y^2 - 2\sqrt{2y} - \sqrt{x^2+1} + x + 2 = 0 \end{cases}$$

Problem T7/519. Given the function $f(x) = x^2 - x + 1$. Let $f_1(x) = f(x)$ and $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ Find the coefficient of x^2 in the polynomial expansion of $f_{2021}(x)$.

Problem T8/519. Find the point M inside a given tetrahedron $ABCD$ such that the product of the distances from M to the faces of $ABCD$ is maximal.

Problem T9/519. Does there exist a triangle ABC with $\sin A = \cos B = \tan C$?

☞

PROBLEMS IN THIS ISSUE

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/519. The sequence (a_n) determined as follows $a_0 = \frac{1}{2}$ and $a_{n+1} = \frac{4n+5}{4n+6}a_n, \forall n \geq 0$. Let $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, n \in \mathbb{N}$. Find $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n}$.

Problem T11/519. Given real numbers $a,b,c \in [1; 5]$ so that $a + b + c = 9$. Find the minimum and maximum values of the expressions

1) $P = abc$.

2) $F = ab + bc + ca$.

3) $S_\lambda = a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda$, where λ is a constant, $\lambda \in \{0\} \cup [1;+\infty)$.

Problem T12/519. Given a triangle ABC which is not equilateral and G is its centroid. The lines AG, BG, CG respectively intersect the circumcircles of GBC, GCA, GAB at D, E, F. So that the Euler lines of the triangles DBC, ECA, FAB are concurrent.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science Vietnam national university, Hanoi*)

ỨNG DỤNG ... (*Tiếp theo trang 21*)

Bài 12. (***Trích đề kiểm định chất lượng lớp 12 tỉnh Ninh Bình năm học 2019 – 2020***)

Các số thực x,y thay đổi và luôn thỏa mãn $\log_2\left(3+x^2+y^2\right)+\log_{\frac{1}{2}}(xy+4)=0$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\frac{5x-y}{x+y+4}$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. $\frac{100}{9}$. **B.** 50. **C.** $\frac{67}{9}$. **D.** $\frac{58}{9}$.

Bài 13. (***Trích đề thi HSG lớp 12 tỉnh Bắc Giang năm học 2019 – 2020***)

Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\log_{a^2+4b^2+1}(2a-8b)=1$. Gọi $M=\frac{x+\sqrt{y}}{2}$ (với x, y là các số nguyên) là giá trị lớn nhất của $P=\frac{4b+2}{a+2b+5}$. Khi đó $x+y$ có giá trị bằng

A. 26 **B.** 30 **C.** 18 **D.** 28.

Bài 14. (***Trích đề thi HSG lớp 12 tỉnh Ninh Bình năm học 2019 – 2020***)

Cho số phức $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn

$$|z-3+4i|=2\sqrt{2}.$$

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x,y)=\frac{x-2y-7}{2x+y+6}$.

Giá trị của biểu thức M^2+m^2 bằng

A. $\frac{80}{9}$ **B.** $\frac{64}{9}$ **C.** $\frac{82}{9}$ **D.** $\frac{28}{3}$.

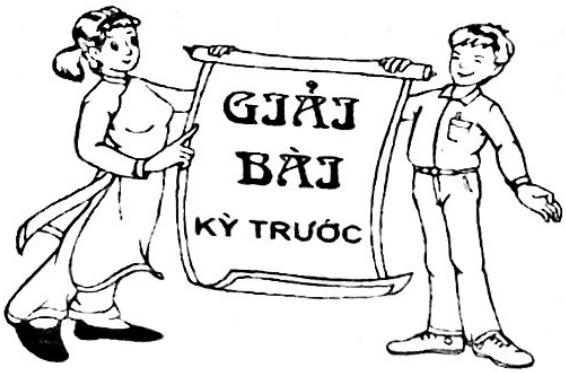
Bài 15. (***Trích đề cương ôn tập học kỳ II lớp 12 trường THPT Chu Văn An – Hà Nội***)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\log_{16}\left(\frac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right)=x(x-2)+y(y-2)+z(z-2).$$

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\frac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $-\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $-\frac{2}{3}$.



Bài T1/515. *Hai nhà ga A và B cách nhau* 999 km. *Những cột cây số dọc theo đường sắt nối liền A và B chỉ những khoảng cách từ các cột cây số đến A và đến B. Chúng ghi như sau:*

0/999; 1/998; 2/997;...; 999/0.

Hỏi trong các cột trên, có bao nhiêu cột chỉ có hai chữ số khác nhau ?

Lời giải. Giả sử hai số ghi trên một cột là a/b, trong đó a, b là các số tự nhiên từ 0 đến 999 với chú ý rằng $a + b = 999$.

• Xét a, b là các số tự nhiên có một hoặc hai chữ số thì với $a < b$ có 4 trường hợp thỏa mãn là 0/999; 9/990; 90/909; 99/900. Với $a > b$ cũng có 4 trường hợp khi đổi vị trí hai số cho nhau.

• Xét a, b là các số tự nhiên đều có ba chữ số mà chỉ có hai chữ số khác nhau lớn hơn 0 là x và y thì xảy ra hai trường hợp sau.

1) Nếu $a = \overline{xxx}$ và $b = \overline{yyy}$ thì $x + y = 9$ nên khi x lấy giá trị từ 1 đến 8 sẽ có 8 trường hợp.

2) Nếu a có cả hai chữ số x, y thì số a có các dạng $\overline{xxy}$, $\overline{xyx}$, $\overline{xyy}$ với $x + y = 9$ nên khi x lấy giá trị từ 1 đến 8 sẽ có $3.8 = 24$ trường hợp.

Như vậy có tất cả $4 + 4 + 8 + 24 = 40$ trường hợp thỏa mãn đề bài toán.

Nhận xét. Khi giải bài này cần xét riêng trường hợp a, b có một hoặc hai chữ số vì theo quy ước thì không viết chữ số 0 ở bên trái chữ số khác 0, sau đó mới xét a, b có ba chữ số. Chỉ có một bạn giải đúng bài này là *Nguyễn Thái Hoàng Anh*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/515. *Cho tam giác ABC cạnh BC cố định, đỉnh A di động. Kẻ phân giác AD của tam giác. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với phân giác AD tại N. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng khi đỉnh A di động thì MN luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Dễ dàng chứng minh hai kết quả sau:

1) *Đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh của tam giác thì song song với cạnh thứ ba.*

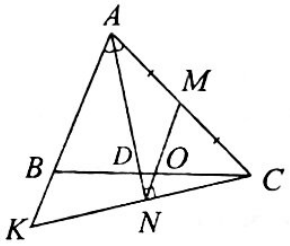
2) *Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.*

Gọi O là trung điểm của BC. Do BC cố định nên điểm O cố định.

• Xét trường hợp $AB = AC$ thì tam giác ABC cân, khi đó ba điểm N, D và O trùng nhau. MN đi qua trung điểm O cố định của BC.

• Xét trường hợp $AB < AC$ (trường hợp $AB > AC$ được chứng minh tương tự).

Cách 1. Gọi K là giao điểm của CN và AB. Tam giác ACK có AN là phân giác đồng thời là đường cao nên là tam giác cân tại A, suy ra AN cũng là đường trung tuyến, nên $NC = NK$.

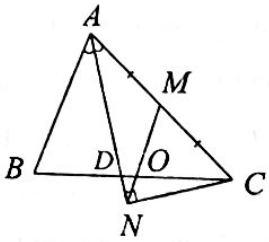


Xét tam giác CAK có $MC = MA$ (giả thiết), $NC = NK$ (chứng minh trên) nên theo (1) ta có $MN \parallel AK$ (*).

Xét tam giác ABC có $MC = MA$ (giả thiết), $OB = OC$ nên theo (1) ta có $MO \parallel AB$ hay $MO \parallel AK$ (**)

Từ (*), (**) và áp dụng tiên đề Euclid suy ra ba điểm M, O, N thẳng hàng. Vậy MN đi qua điểm O cố định khi A di chuyển.

Cách 2. Tam giác ANC vuông tại N có NM là đường trung tuyến nên theo (2) ta có $MN = MA = MC$. Khi đó, tam giác AMN cân tại M nên $\widehat{MAN} = \widehat{MNA}$, mà



$\widehat{BAN} = \widehat{MAN}$ (giả thiết) nên $\widehat{BAN} = \widehat{MNA}$. Vì hai góc này ở vị trí so le trong suy ra $AB \parallel MN$ (*).

Xét tam giác ABC có $MC = MA$ (giả thiết), $OB = OC$ nên theo (1) ta có $AB \parallel MO$ (**).

Từ (*), (**) và áp dụng tiên đề Euclid suy ra ba điểm *M, O, N* thẳng hàng. Vậy *MN* đi qua điểm *O* cố định khi *A* di chuyển.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều tìm ra kết quả và cách làm tương tự theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Hoàng Tuấn Anh,* 6T, THCS Lương Thế Vinh; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Huy Hoàng,* 6A2, THCS Yên Lạc; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư,* 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Phú Thọ**: *Đỗ Ngọc Tiến,*7A3, THCS Lâm Thao; **Hà Tĩnh**:*Trần Minh Hoàng,* 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Trị**: *Nguyễn Võ Quốc Hưng,* 7A, THCS Trưng Vương, Đông Hà; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa,* 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An**: *Vương Viết Lượng,* 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T3/515. *Cho a, b là các số nguyên dương sao cho* $(a,6)=1$ *và* $a+b\vdots 3$. *Giả sử p, q là các số nguyên tố sao cho* $pq+a$ *và* $bp+q$ *cũng là các số nguyên tố. Chứng minh rằng* $a+6$ *là số nguyên tố.*

Lời giải. Vì $pq+a$ là số nguyên tố lớn hơn 2 nên nó là một số lẻ. Mặt khác vì $(a,6)=1$ nên *a* là số lẻ, không chia hết cho 3, suy ra pq là một số chẵn.

Vì *a* không chia hết cho 3 và $a+b\vdots 3$ nên trong hai số *a, b* có một số chia 3 dư 1, số còn lại chia 3 dư 2, suy ra $ab\equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow ab+1\vdots 3$.

Nếu pq không chia hết cho 3 thì *p* và *q* cùng không chia hết cho 3, nên $p^2-1\vdots 3$ và $q^2-1\vdots 3$.

suy ra: $(pq+a)(bp+q)=bp^2q+pq^2+apb+aq$

$=bq(p^2-1)+p(q^2-1)+(a+b)q+p(ab+1)\vdots 3$,

điều này vô lý vì giả thiết $pq+a$ và $bp+q$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Do đó $pq\vdots 3$.

Vì *p, q* là các số nguyên tố và pq là một số chẵn, $pq\vdots 3$ nên trong hai số *p, q* có một số bằng 2, số còn lại bằng 3, suy ra $pq=6$. Vậy $a+6=a+pq$ là số nguyên tố. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Điều then chốt của bài toán là chứng minh pq là một số chẵn và $pq\vdots 3$ từ đó suy ra $pq=6$ (*p, q* là các số nguyên tố).

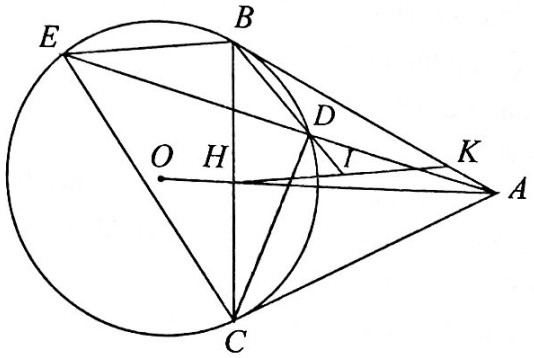
Khi có pq là một số chẵn có thể xét hai trường hợp $p=2$ hoặc $q=2$ từ đó chứng minh số còn lại bằng 3. Nếu *p* là số nguyên không chia hết cho 3 thì $p=3k\pm 1\Rightarrow p^2-1=(3k\pm 1)^2-1=9k^2\pm 6k$ là số chia hết cho 3.

Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Thanh Hóa: *Lê Đức Chính*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoàng Hóa; **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội Amsterdam ; *Trần Minh Tú*, 8C, THCS Lương Thế Vinh, TP. Hà Nội; *Lê Mạnh Hùng*, 7C2, PTLC Archimedes, Đông Anh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Phú Thọ:** *Lương Minh Hiếu*, 9C, THCS Văn Lang, Việt Trì; *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/515. *Cho đường tròn* (O,R). *Từ một điểm A ở ngoài đường tròn kẻ 2 tiếp tuyến* AB, AC (*B, C là tiếp điểm*) *và cát tuyến ADE* (*D nằm giữa A và E*). *BC cắt OA tại H. Từ H kẻ đường thẳng song song với BE cắt AB tại K. Chứng minh BD đi qua trung điểm của HK.*



Lời giải. *Cách 1.*

Gọi *I* là giao điểm của *HK* và *BD*. Ta có:

$\widehat{BHI}=\widehat{HBE}$ (so le trong)

$\widehat{HBE} = \widehat{CDE}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EC}$)

$\Rightarrow \widehat{BHI} = \widehat{EDC}$.

Lại có, $\widehat{HBI} = \widehat{CED}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CD}$), suy ra $\Delta BHI \sim \Delta EDC$ (g.g), dẫn tới

$$\frac{HI}{CD} = \frac{BI}{EC} \text{ hay } \frac{HI}{BI} = \frac{CD}{CE} \quad (1).$$

Tương tự, $\Delta BKI \sim \Delta EDB$ (g.g), dẫn tới

$$\frac{IK}{BD} = \frac{BI}{BE} \text{ hay } \frac{KI}{BI} = \frac{BD}{BE} \quad (2).$$

Mặt khác, $\widehat{DBA} = \widehat{DEB}$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung), suy ra:

$\Delta ABD \sim \Delta AEB$ (g.g), dẫn tới: $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{AB}{AE}$ (3).

Tương tự, $\widehat{ACD} = \widehat{CED}$, từ đó suy ra:

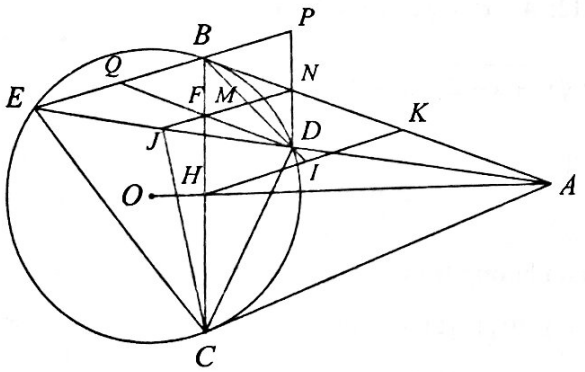
$\Delta ADC \sim \Delta ACE$ (g.g), dẫn tới $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{AC}{AE}$ (4).

Từ $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), kết hợp với (3), (4), suy ra: $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CD}{CE}$ (5).

Từ (1), (2), (5), suy ra $\dfrac{HI}{BI} = \dfrac{KI}{BI}$, dẫn tới $HI = KI$.

Vậy I là trung điểm của HK.

Cách 2 (Theo bạn *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**).



Gọi $I = HK \cap BD$, J là trung điểm của DE. Đường thẳng qua D, song song với AB cắt BC, BE thứ tự tại F, Q. Đường thẳng JF cắt BD, AB thứ tự tại M, N. DN cắt EB tại P.

• Dễ chứng minh các điểm A, B, J, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính OA. Suy ra:

$\widehat{JAB} = \widehat{JCB}$, mà $\widehat{JAB} = \widehat{JDQ}$ (đồng vị), nên $\widehat{JDF} = \widehat{JCF}$, do đó tứ giác $JFDC$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{JFC} = \widehat{JDC}$, mà $\widehat{JDC} = \widehat{EBC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EC}$), nên $\widehat{JFC} = \widehat{EBC} \Rightarrow JF \,//\, BE$.

Vì J là trung điểm của DE nên F, N lần lượt là trung điểm của DQ, $PD \Rightarrow PQ = 2NF$.

Lại có, $BN \,//\, DQ$ nên B là trung điểm của PQ.

Áp dụng hệ quả của định lí Thales cho ΔDPQ, với $FN \,//\, PQ$, suy ra M là trung điểm của FN.

Áp dụng hệ quả định lí Thales cho ΔBHK, với $FN \,//\, HK$, suy ra I là trung điểm của HK.

Nhận xét. Ngoài bạn *Tiến*, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Trần Minh Khôi*, 9C, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, H. Kế Sách; **Hà Nội:** *Trần Minh Tú*, 8C, THCS Lương Thế Vinh; **Thanh Hóa:** *Lê Đức Chính*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Ttr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/515. *Giải hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} x^3 + x(y+z)^2 = 26 \\ y^3 + y(z+x)^2 = 40 \\ z^3 + z(x+y)^2 == 54 \end{cases}.$$

Lời giải. Giả sử (x, y, z) là một nghiệm của hệ phương trình. Ta thấy ngay $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Ta viết HPT dưới dạng:

$$\begin{cases} x(x^2+y^2+z^2)+2xyz=26 & (1) \\ y(x^2+y^2+z^2)+2xyz=40 & (2). \\ z(x^2+y^2+z^2)+2xyz=54 & (3) \end{cases}$$

Tính theo vế (1) + (3) – (2) × 2 ta suy ra:

$$(x+z-2y).(x^2+y^2+z^2) = 0.$$

Như đã nhận xét, từ $x^2+y^2+z^2 > 0$ ta có:

$$x+z-2y=0 \Rightarrow y=\frac{x+z}{2}.$$

Thay vào PT thứ hai của hệ ta được:

$$40 = y^3 + y(z+x)^2 = \frac{x \quad z}{2}^{\,3} \quad \frac{x \quad z}{2}(x \quad z)^2$$

$$=\frac{5}{8}(x+z)^3 \Rightarrow (x+z)^3=64 \Rightarrow x+z=4$$

và $y=2$. Do đó $z=4-x$, từ PT thứ nhất của hệ ta có: $0=x^3+x(y+z)^2-26=x^3+x(2+4-x)^2-26$

$$=x^3+x(x-6)^2-26=2(x^3-6x^2+18x-13)$$

$$=2(x-1)(x^2-5x+13) \Rightarrow x-1=0$$

$\Rightarrow x=1, z=3$. Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y;z)$ là $(1;2;3)$.

Nhận xét. Đây là bài toán giải HPT cơ bản, không quá khó. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, *Phan Chí Công*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, *Trần Minh Khôi*, *Hán Vũ Long*, *Lương Minh Hiếu*, 9C,THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Vĩnh Phúc**: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 8A3, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội**: *Trần Minh Tú*, 8C, THCS Lương Thế Vinh, *Phạm Hoàng Gia Bảo*, *Lê Hạnh Hưng*, *Hoàng Phương Nga*, *Đinh Mai Phương*, *Nguyễn Minh Quang*, *Trần Hồng Linh*, 7C2, PTLC Archimedes, Đông Anh; **Thanh Hóa**: *Lê Đức Chính*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Nghệ An**: *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 7E, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Trị**: *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, Cam Lộ; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T6/515. *Giải phương trình :*

$$\sqrt{x^3+x+2}=x^4-x^3-7x^2-x+10.$$

Lời giải. ĐK: $x^3+x+2\ge 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+2)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1 \ (*).$$

Với ĐK(*), PT tương đương với:

$$x^3+x+2+\sqrt{x^3+x+2}=(3-x^2)^2+(3-x^2)$$

$$\Leftrightarrow (3-x^2)^2-(x^3+x+2)+(3-x^2)-\sqrt{x^3+x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (3-x^2-\sqrt{x^3+x+2})(3-x^2+\sqrt{x^3+x+2})$$
$$+(3-x^2)-\sqrt{x^3+x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (3-x^2-\sqrt{x^3+x+2})(4-x^2+\sqrt{x^3+x+2})=0$$

TH1: $3-x^2-\sqrt{x^3+x+2}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+x+2}=3-x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-1\le x\le\sqrt{3}\\ x^3+x+2=(3-x^2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le x\le\sqrt{3} & (**)\\ x^4-x^3-6x^2-x-7=0 & (1)\end{cases}.$$

Xét hàm số $f(x)=x^4-x^3-6x^2-x-7$ trên đoạn $[-1;\sqrt{3}]$ ta thấy $f(x)$ có nghiệm duy nhất $x=1$.

Thật vậy,

$$x^4-x^3-6x^2-x+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^3-6x-7=0 \ (2)\end{array}\right..$$

Xét hàm số $g(x)=x^3-6x-7$ có:

$$g'(x)=3x^2-6=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}.$$

Ta có: $g(\sqrt{3})=-3\sqrt{3}-7<0$;

$$g(-\sqrt{2})=4\sqrt{2}-7<0;\ g(\sqrt{2})=-4\sqrt{2}-7<0.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$4\sqrt{2}-7$	↘	$-4\sqrt{2}-7$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy PT(2) có nghiệm duy nhất $x_0>\sqrt{3}$ nên bị loại. Đối chiếu với ĐK(**), PT(1) có nghiệm duy nhất $x=1$.

TH2: $4-x^2+\sqrt{x^3+x+2}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+x+2}=x^2-4 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ x^3+x+2=(x^2-4)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2 & (**)\\ x^4-x^3-8x^2-x+14=0 & (3)\end{cases}.$$

Giải phương trình (3) ta được 2 nghiệm:

$x_1\approx 1,2911$ (không thỏa mãn (**)), $x_2\approx 3,1795$ (thỏa mãn (**)). Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x=1$ và $x\approx 3,1795$.

Nhận xét. Có ít bạn tham gia giải bài này. Ngoài nghiệm $x=1$, chỉ có bạn *Lê Đức Hạnh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** tìm được công thức nghiệm x_2 đúng (một công thức khá cồng kềnh), một số bạn chỉ tìm nghiệm gần đúng (như

cách giải trên) và một số bạn thiếu nghiệm x_2. Các bạn sau có lời giải đúng: **Quảng Bình:** *Lê Đức Hạnh*, 10 Toán 2, THPTchuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Bá Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Hà Tĩnh:** *Ngô Văn Thông*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/515. *Cho các số thực dương x, y thỏa mãn* $x+y\le 6$ (1). *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=x^2(6-x)+y^2(6-y)+(x+y)\left(\frac{1}{xy}-xy\right).$$

Lời giải. (Của tác giả đề toán và nhiều bạn)

Ta có:

$$P=6\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3+y^3+x^2y+yx^2\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$=6\left(x^2+y^2\right)-(x+y)\left(x^2+y^2\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$=\left(x^2+y^2\right)(6-x-y)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Do $x+y\le 6$ nên $6-x-y\ge 0$.

Vậy $P\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Theo (1) và BĐT Cauchy ta có:

$$6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge\left(2\sqrt{xy}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{xy}}\right)=4.$$

Suy ra: $P\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{2}{3}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=3$.

Nhận xét. Bài này dễ, nên có đến 54 bạn tham gia giải, trong đó có một số bạn THCS. Tất cả các bạn đều giải đúng, mặc dù trình bày có thể hơi khác đáp án trên. Dưới đây là danh sách các bạn tham gia giải bài.

Bà Rịa-Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Bến Tre:** *Ngô Quốc Bảo*, 10/9, THPT Nguyễn Đình Chiểu, TP. Bến Tre; **Đồng Tháp:** *Phạm Hữu Đăng, Huỳnh Hữu Hậu, Nguyễn Minh Khôi, Nguyễn Thiên Lý, Đặng Công Thìn, Lạc Xuân Thịnh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Phạm Hoàng Gia Bảo, Lê Mạnh Hùng, Nguyễn Gia Nam, Đỗ Viết Việt Nhân, Hoàng Phương Ngọc, Đinh Mai Phương*, 7C2, THCS Archimedes, Đông Anh; *Nguyễn Đức Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam; *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh:** *Lê Văn Danh, Trần Huy Đức, Lê Bảo Ngân, Nguyễn Phan Thủy Ngân, Nguyễn Duy Anh Quốc, Ngô Văn Thông, Phan Thành Tín*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** *Hồ Ngọc Hùng*, 11T2, *Nguyễn Quang Huy*, 10T1; *Phạm Bá Hoàng*, 12T1, *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 10 T2, *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Phạm Văn Thông*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, *Cao Trung Hiếu*, 11A1, *Cao Thị Tường Vy*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm; **Kon Tum:** *Nguyễn Minh Khoa*, 11 Toán, THPT Nguyễn Tất Thành; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Nam Định:** *Phạm Việt Hòa*, 10 Toán 2, THPT chuyên *Lê Hồng Phong*; **Phú Thọ:** *Lương Minh Hiếu, Hán Vũ Long*, 9C, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 10IE3, THPT Duy Tân; **Quảng Bình:** *Đặng Hoàng Duy, Trương Thị Thu Hà*, 10 T1, *Lê Hồng Anh, Lê Đức Hạnh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Nam:** *Trương Nguyễn Ngọc Minh, Trần Hoàng Quân, Nguyễn Phước Minh Trí, Huỳnh Thanh Tường, Nguyễn Lâm Bảo Uyên*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quân*, 8D, THCS Trần Hưng Đạo, huyện Cam Lộ, *Lê Văn Thoại*, 10B1, THPT Đakrông; *Nguyễn Ngọc Thọ, Nguyễn Xuân Tiến*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, *Nguyễn Anh Thư*, 7A1, THCS Kế An, huyện Kế Sách; **Thanh Hóa:** *Lê Đức Chính*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Vĩnh Long:** *Dương Nguyễn Gia Huy*, 10T2, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

TẠ DUY PHƯỢNG

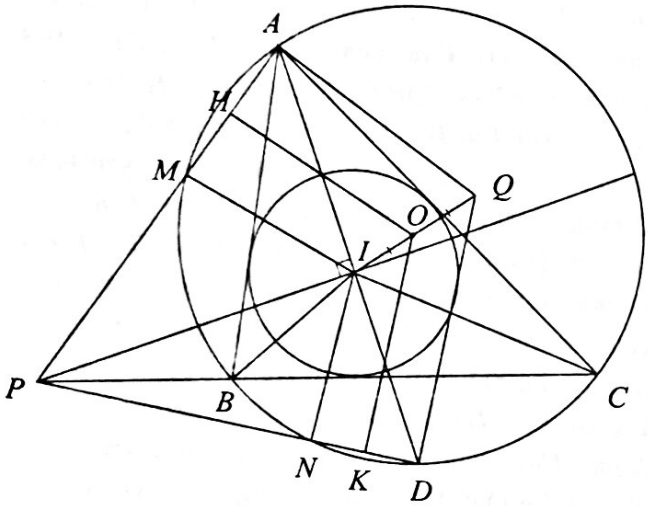
Bài T8/515. *Cho tam giác ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. D là giao điểm thứ hai của (O) và AI. P là giao điểm của BC và đường thẳng qua I vuông góc với AI. Q là điểm đối xứng của I qua O. Chứng minh rằng* $\widehat{PAQ}=\widehat{PDQ}=90^0$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của PA, PD với đường tròn (O); H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên PA, PD. Ta có $\widehat{PIB} = \widehat{AIB} - 90^0 = \widehat{PCI} \Rightarrow \Delta PIB \sim \Delta PCI$ (g.g).

Từ đó $PI^2 = PB.PC = PA.PM \Rightarrow \Delta PMI \sim \Delta PIA$ (c.g.c), dẫn đến $IM \perp PA$. Kết hợp với $OH \perp MA$ và $\dfrac{\overline{HM}}{\overline{HA}} = -1 = \dfrac{\overline{OI}}{\overline{OQ}}$ theo định lý Thales đảo, suy ra $QA \perp PA$ (1).

Mặt khác $PI^2 = \overline{PA}.\overline{PM} = \overline{PD}.\overline{PN}$, suy ra $\Delta PNI \sim \Delta PID$ (c.g.c), dẫn đến $IN \perp PD$. Kết hợp với $OK \perp ND$ và $\dfrac{\overline{KN}}{\overline{KD}} = -1 = \dfrac{\overline{OI}}{\overline{OQ}}$ theo định lý Thales đảo, suy ra $QD \perp PD$ (2).



Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PAQ} = \widehat{PDQ} = 90^0$.

Nhận xét. Nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Sau đây là danh sách các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Đức Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, *Nguyễn Xuân Tùng*, 10 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hưng Yên**: *Hà Vinh Quang*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên; **Thanh Hóa**: *Lê Đức Chính*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Hà Chi, Ngô Văn Thông, Lê Văn Danh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Trần Phương Linh*, 10 Toán 2, *Nguyễn Khánh Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Quảng Trị:** *Nguyễn Xuân Tiến*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Quang Huy*, 10 Toán 1, *Nguyễn Duy Phước, Lê Thị Minh Thùy*, 11 Toán 1, *Phạm Bá Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; TP. Huế; **Quảng Nam**: *Võ Hoàng Đức, Võ Văn Lĩnh, Trần Thị Cát Tường*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Kon Tum**: *Nguyễn Minh Khoa*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành,TP. Kon Tum; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đồng Tháp:** *Lê Văn Anh Khoa, Nguyễn Thiên Lý*, 10T1, *Nguyễn Trúc Như Bình*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Sóc Trăng:** *Lâm Khả Hân*, 10A2T, *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **TP. Hồ Chí Minh**: *Thái Quang Phát*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/515. *Tìm giới hạn*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \ldots + \left[\sqrt[3]{n^3+3n^2+3n}\right]}{n^4},$$

trong đó n là số nguyên dương và kí hiệu $[x]$ *là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.*

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Ta có : $k^3 < k^3 + 3k^2 + 3k < (k+1)^3$.

Suy ra $[\sqrt[3]{k^3+3k^2+3k}] = k$ và số các số nguyên m thỏa mãn điều kiện $k^3 < m < (k+1)^3 - 1$ là $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

Xét $S_n = [\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{n^3+3n^2+3n}]$

$= [\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{(n+1)^3-1}]$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} S_n &= [\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{2^3-1}] \\ &+ [\sqrt[3]{2^3}] + [\sqrt[3]{2^3+1}] + \ldots + [\sqrt[3]{3^3-1}] + \ldots \\ &+ [\sqrt[3]{n^3}] + [\sqrt[3]{n^3-1}] + \ldots + [\sqrt[3]{n^3+3n^2+3n}]. \end{aligned}$$

Suy ra: $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(3k^2+3k+1)$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k.$$

Sử dụng các hệ thức

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ta thu được:

$$S_n = \frac{3n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\ldots+[\sqrt[3]{n^3+3n^2+3n}]}{n^4}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{n^4}$$

$$= \frac{3}{4}.$$

Kết luận:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\ldots+[\sqrt[3]{n^3+3n^2+3n}]}{n^4} = \frac{3}{4}.$$

Nhận xét. Đa số các bạn giải theo cách giải trên. Một số bạn thiếu nhận xét rằng số các số nguyên m thỏa mãn điều kiện $k^3 < m < (k+1)^3 - 1$ là $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ nên đã suy ra giới hạn bằng 0. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bà Rịa - Vũng Tàu: *Phan Trung Kiên*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Ngô Quốc Bảo*, 10/9, THPT Nguyễn Đình Chiểu; **Bình Định:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Hữu Hậu*, *Lạc Xuân Thịnh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 10T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tĩnh:** *Lê Văn Danh*, *Ngô Văn Thông*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Cao Trung Hiếu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Lâm Đồng:** *Tô Gia Bảo*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Quảng Bình:** *Lê Đức Hạnh*, *Trương Thị Thu Hà*, 10T1, *Lê Hồng Anh*, *Bùi Nguyễn Thanh Ngân*, *Trần Phương Linh*, 10T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/515. *Cho số nguyên dương n sao cho $6n+1$ và $20n+1$ đều là các số chính phương. Chứng minh rằng $58n+11$ là hợp số.*

Lời giải (Của bạn *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định).**

Ta giải bài toán tổng quát hơn: *Cho số nguyên dương m sao cho $3m + 1$ và $10m + 1$ đều là số chính phương, Chứng minh $29m + 11$ là hợp số* (với $m = 2n$ ta có bài toán trên).

Ta có: $3m + 1 = a^2$; $10m + 1 = b^2$. Suy ra:

$$a^2b^2 = (3m+1)(10m+1) = 30m^2 + 13m + 1 \quad (1)$$
$$= 29m^2 + 11m + (m+1)^2$$

hay $m(29m + 11) = (ab - m - 1)(ab + m + 1)$.

Từ đó $(ab - m - 1)(ab + m + 1)$ chia hết cho $29m + 1$.

Giả sử trái lại $29m + 1$ là số nguyên tố. Khi đó $29m+1 \mid ab-m-1$ hoặc $29m+1 \mid ab+m+1$.

Trong mọi trường hợp ta đều có:

$$ab + m + 1 \geq 29m + 11$$

$\Rightarrow ab \geq 28m + 10 \Rightarrow a^2b^2 \geq (28m+10)^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$30m^2 + 13m + 1 \geq (28m+10)^2$$

$\Rightarrow 754m^2 + 547m + 99 \leq 0$. Vô lý.

Nhận xét. Có nhiều bạn lớp 10, THPT chuyên Hà Tĩnh tham gia giải đúng bài toán này. Ngoài bạn *Hoàng*, các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Tĩnh: *Nguyễn Thái Dương*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Bùi Nguyễn Thanh Ngân*, 10 Toán 2, *Lê Hồng Anh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thiên Lý*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/515. *Cho hàm g: $[a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục với $g(a) \leq g(b)$ và $f:[a,b] \to [g(a), g(b)]$ là hàm tăng. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm.*

Lời giải. Lời giải dựa trên chiến thuật chia đôi liên tiếp quen thuộc.

Từ giả thiết của bài toán, ta có:

$$g(a) \le f(a) \le f(b) \le g(b).$$

Nếu $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ thì đặt

$$a_1 = a, b_1 = \frac{a+b}{2}.$$

(Trường hợp ngược lại $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ thì đặt $a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = b$ và giải tương tự).

Như vậy ta thu được khoảng $I_1 = [a_1; b_1]$ với tính chất $f(a_1) \ge g(a_1)$ và $f(b_1) \le g(b_1)$. Bằng quy nạp, và xây dựng tương tự như trên ta được dãy đoạn $I_n = [a_n; b_n]$ với tính chất $f(a_n) \ge g(a_n)$ và $f(b_n) \le g(b_n)$. Do (a_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi b, còn (b_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi a, cho nên chúng đều có giới hạn. Lưu ý do $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ cho nên giới hạn của hai dãy này bằng nhau, giả sử là $c = \lim a_n = \lim b_n$.

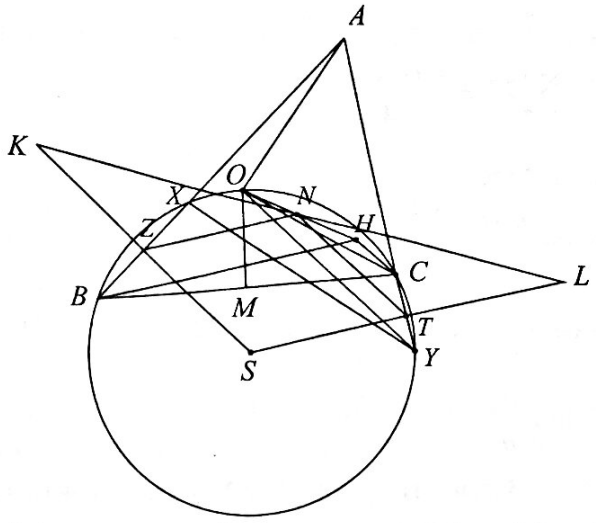
Do $g(a_n) \le f(a_n) \le f(b_n) \le g(b_n)$ (*) và do g là hàm số liên tục, cho nên $g(c) = \lim g(a_n) = \lim g(b_n)$. Hơn nữa, do luôn có $a_n \le c \le b_n$ và do f là hàm tăng, cho nên $f(a_n) \le f(c) \le f(b_n)$ và do (*) ta có $g(c) \le f(c) \le g(c)$, suy ra $g(c) = f(c)$ hay PT $f(x) = g(x)$ có nghiệm $x = c$.

Nhận xét. Bài này chỉ có bạn *Nguyễn Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định** gửi lời giải. Lời giải của bạn còn có chỗ sơ suất vì bạn quên mất là hàm số *f(x)* không bắt buộc phải liên tục nên không kết luận được $f(x) = g(x)$ có nghiệm.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T12/515. *Cho tam giác ABC, O, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác. S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. K, L theo tự là điểm đối xứng của S qua AB, AC. Chứng minh rằng KL đi qua trung điểm của OH.*

Lời giải. (theo bạn *Nguyễn Duy Phước*, 11T, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**).



Gọi N là trung điểm của OH; X, Y theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AB, AC và đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC; Z, T theo thứ tự là giao điểm của SK, SL và AB, AC; M là trung điểm của BC.

Dễ thấy

$$(XO, AC) \equiv (XO, XB) + (AB, AC)$$
$$\equiv (CO, CB) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \pmod{\pi}$$
$$\equiv (CO, CM) + (OM, OC)$$
$$\equiv (OM, CM) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Do đó $XO \perp AC$.

Kết hợp với $BH \perp AC$, suy ra $XO // BH$.

Từ đó, chú ý rằng Z, N theo thứ tự là trung điểm của XB, OH, suy ra $ZN // BH$.

Kết hợp với $ST // BH$, suy ra $ZN // ST \equiv SL$ (1).

Tương tự $TN // SZ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SZNT$ là hình bình hành (3).

Từ (1), (2) và (3), chú ý rằng Z, T theo thứ tự là trung điểm của SK, SL, suy ra:

$$\frac{\overline{ZN}}{\overline{SL}} = \frac{\overline{ZN}}{2\overline{ST}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{KZ}}{\overline{KS}}.$$

Vậy N thuộc KL và $\frac{\overline{KN}}{\overline{KL}} = \frac{1}{2}$. Nói cách khác N là trung điểm của KL (đpcm).

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó nhưng chỉ có 10 bạn tham gia giải và có nhiều cách giải khác cách giải trên.

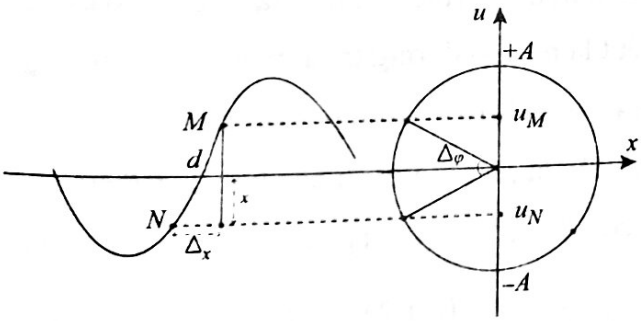
2) Trừ bạn *Ngô Văn Thông*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, 9 bạn còn lại đều mắc lỗi cách chứng minh phụ thuộc hình vẽ.

3) Xin nêu tên 8 bạn còn lại: **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Minh*, 8A, THCS chuyên Hà Nội – Amsterdam; **Hưng Yên:** *Hà Quang Vinh*, 10T, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Hồng Đăng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Xuân Tiến*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Phan Vĩnh Tiến*, 10IE3, THPT Duy Tân; **TP. Hồ Chí Minh:** *Thái Quang Phát*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Trúc Như Bình*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/515. *Một sóng ngang truyền trên sợi dây với tốc độ và biên độ không đổi, bước sóng 60 cm. Hai phần tử sóng tại M, N có vị trí cân bằng cách nhau 10 cm. Tại một thời điểm li độ của M, N đối nhau và chúng cách nhau 12,5cm. Xác định biên độ của sóng.*

Lời giải. Sự truyền sóng được mô tả như trên hình vẽ.



Từ hình vẽ ta có:

$$d^2 = \Delta x^2 + (2a)^2 \Leftrightarrow 12,5^2 + (2a)^2$$

Suy ra: $x = u_M = 3,75$ cm.

Độ lệch pha giữa hai phần tử sóng tại M, N:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi.10}{60} = \frac{\pi}{3}.$$

Kết hợp với hình vẽ ta xác định được:

Biên độ sóng : $A = 2u_M = 2.3,75 = 7,5$ cm.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Bạc Liêu:** *Đỗ Văn Dương*, 12CA, THPT Trần Văn Bảy, Phước Long; **Hưng Yên:** *Cao Trung Hiếu*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thiên Lý*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Thắng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Cần Thơ:** *Trần Kim Phụng*, 12A2, THPT Nguyễn Việt Hồng, quận Ninh Kiều.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/515. *Điện năng từ một trạm điện được truyền đi dưới điện áp 20kV, hiệu suất trong quá trình truyền tải là $H_1 = 80\%$. Biết rằng công suất truyền tải đến nơi tiêu thụ là không đổi, muốn hiệu suất truyền tải tăng lên $H_2 = 95\%$ thì phải tăng điện áp truyền đi đến giá trị bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Theo công thức hiệu suất ta có:

$$H_1 = 1 - \frac{P_{hp1}}{P} = 1 - \frac{P^2R}{U_1^2P} = 1 - P\frac{R}{U_1^2}$$

suy ra: $1 - H_1 = P\dfrac{R}{U_1^2}$ (1).

Tương tự khi tăng điện áp của trạm điện truyền đi trong khi công suất truyền đi được giữ không đổi, ta có:

$$1 - H_2 = P\frac{R}{U_2^2} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta thấy:

$$\frac{1 - H_1}{1 - H_2} = \frac{U_2^2}{U_1^2}.$$

Điện áp cần tìm:

$$U_2 = U_1\sqrt{\frac{1 - H_1}{1 - H_2}}.$$

Thay số ta được:

$$U_2 = 20\sqrt{\frac{1 - 0,8}{1 - 0,95}} = 40\,\text{kV}.$$

Nhận xét. Bạn *Phạm Hữu Đăng*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

BÀN VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN HAY TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

TRẦN TRUNG DŨNG
(B12, D48, T31, Bộ Công an)

Đối với các bạn học sinh giỏi toán và đam mê bất đẳng thức (BĐT), chắc hẳn những bài toán BĐT đối xứng ba biến với các giả thiết như $a+b+c+abc=4$ hay $a^2+b^2+c^2+abc=4,...$ là khá quen thuộc và hấp dẫn. Tuy nhiên chúng cũng là những thử thách không hề nhỏ, đặc biệt là đối với các bạn học sinh còn "non tay nghề". Lý do thứ nhất là vì các giả thiết trên tương đối ít phổ biến nên gây ra lúng túng cho nhiều học sinh trong việc khai thác và sử dụng. Ngoài ra, việc các biến ràng buộc với nhau quá chặt như vậy làm cho việc sử dụng các BĐT cổ điển để chứng minh trực tiếp hay dùng phương pháp tiếp tuyến, đạo hàm theo từng biến độc lập gặp nhiều khó khăn cũng là một nguyên nhân. Trong bài viết này, tôi muốn trình bày với bạn đọc một phương pháp rất hữu hiệu cho các dạng toán BĐT như vậy, đó là phương pháp dồn biến trong đó hai biến nào đó trong ba biến đã sắp xếp thứ tự được dồn về một biến phụ t mà t có thể biểu diễn qua biến còn lại. Xin mời các bạn theo dõi các thí dụ sau:

Thí dụ 1 (Việt Nam 1996). *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng:*

$$a+b+c\ge ab+bc+ca.$$

Phân tích. Bài toán này có nhiều cách giải chẳng hạn như dùng phản chứng hay thế biến rồi sử dụng BĐT Cauchy (BĐT AM - GM). Tuy nhiên các cách giải đó không phải là cách giải tối ưu cho các bài toán dạng này. Ý tưởng dồn biến ở đây là ta sẽ dồn a,b về cùng một biến t và biến t này biểu diễn được theo c để đưa BĐT cần chứng minh về một BĐT chỉ có t và c và sau đó do t biểu diễn được qua c nên ta chỉ cần chứng minh một BĐT đơn biến. Việc này là đơn giản, thông thường ta có thể dùng biến đổi tương đương để chứng minh, trong một số trường hợp cần thiết, có thể sử dụng phương pháp xét sự biến thiên của một biến. Để tìm t ta chỉ việc thay a và b trong đẳng thức đề bài cho bằng t và giải phương trình bậc hai ẩn t tham số c. Cụ thể hóa ý tưởng trên, ta có lời giải sau:

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min(a,b,c)$ thế thì ta có $0<c\le 1$. Xét t là một số dương thỏa mãn:

$$(c+1)t^2+2ct-4=0\,(1)$$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn t tham số c, ta có: $\Delta'=c^2+4(c+1)=(c+2)^2$.

Do đó $t=\dfrac{-c+(c+2)}{c+1}=\dfrac{2}{c+1}$.

Từ giả thiết và từ (1) suy ra:

$$(ab-t^2)(c+1)+c(a+b-2t)=0$$

hay $\quad t^2-ab=\dfrac{c}{c+1}(a+b-2t)\quad (2).$

Từ đây suy ra $a+b\ge 2t$ vì nếu $a+b<2t$ thì

$$2t>2\sqrt{ab}\Rightarrow t^2-ab>0.$$

Kết hợp với (2) suy ra $a+b>2t$, ta có điều mâu thuẫn.

Bây giờ ta chứng minh:

$$a+b+c-(ab+bc+ca)\geq 2t+c-(t^2+2ct)(3)$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2t)(1-c)-(ab-t^2)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2t)\left(1-c+\frac{c}{c+1}\right)\geq 0 \quad \text{(theo (2))}$$

Điều này là hiển nhiên do $0<c\leq 1$. Bây giờ ta chứng minh: $2t+c-(t^2+2ct)\geq 0$ (4).

Thay $t=\dfrac{2}{c+1}$ vào ta được:

$$(4)\Leftrightarrow c^3-2c^2+c\geq 0\Leftrightarrow c(c-1)^2\geq 0.$$

Điều này là hiển nhiên vì $c>0$. Từ (3) và (4) ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 2. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng:*

$$a^2+b^2+c^2+abc+8\geq 4(a+b+c).$$

Lời giải. Tương tự thí dụ 1, giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a,b,c thì $0<c\leq 1$. Ta vẫn xét số t như ở thí dụ 1, BĐT cần chứng minh trước hết là:

$$a^2+b^2+c^2+abc+8-4(a+b+c)$$
$$\geq 2t^2+c^2+ct^2+8-4(2t+c) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2t^2+c(ab-t^2)-4(a+b-2t)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2-4t^2+(2-c)(t^2-ab)-4(a+b-2t)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2t)(a+b+2t-4)+(2-c)\frac{c}{c+1}(a+b-2t)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2t)\left(a+b+2t-4+(2-c)\frac{c}{c+1}\right)\geq 0 \quad (2).$$

Do $c\leq 1$ nên $t=\dfrac{2}{c+1}\geq 1$, lại có $a+b\geq 2t$ suy ra $a+b+2t-4\geq 0$. Đồng thời $(2-c)\dfrac{c}{c+1}>0$. Do đó (2) đúng và vì thế (1) đúng. Bây giờ ta chứng minh:

$$2t^2+c^2+ct^2+8-4(2t+c)\geq 0 \quad (3).$$

Thay $t=\dfrac{2}{c+1}$ vào ta được:

$$(3)\Leftrightarrow c^2(c-1)^2\geq 0 \text{ (hiển nhiên).}$$

Từ (1) và (3) ta thu được điều phải chứng minh.

Thí dụ 3 (USA MO 2001). *Giả sử a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn đẳng thức $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng:*

$$abc+2\geq ab+bc+ca\geq abc.$$

Lời giải. Dễ thấy a,b,c đều nhỏ hơn hoặc bằng 2. Không mất tính tổng quát, giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a,b,c thì $0\leq c\leq 1$. Hiển nhiên:

$$ab+bc+ca-abc=ab(1-c)+bc+ca\geq 0$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\geq abc.$$

Xét $t=\sqrt{2-c}$ ta có $2t^2+c^2+t^2c=4$. Kết hợp với giả thiết suy ra:

$$a^2+b^2-2t^2+c(ab-t^2)=0$$

$$\Rightarrow (a+b)^2-4t^2+(c-2)(ab-t^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2t)(a+b+2t)=(c-2)(t^2-ab) \quad (1).$$

Đồng thời ta có: $a^2+b^2-2t^2=c(t^2-ab)$.

Từ đây suy ra $a^2+b^2-2t^2\geq 0$ vì nếu $2t^2>a^2+b^2$ thì $t^2>ab\Rightarrow c(t^2-ab)>0$, mâu thuẫn. Xét

$$(a+b)^2-4t^2=a^2+b^2-2t^2+2(ab-t^2)$$
$$=(a^2+b^2-2t^2)\left(1-\frac{2}{c}\right)$$

hay

$$(a+b-2t)(a+b+2t)=(a^2+b^2-2t^2)\left(1-\frac{2}{c}\right)\leq 0$$

(do $c<2$). Do đó $a+b-2t\leq 0$. Ta chứng minh:

$$abc+2-(ab+bc+ca)\geq t^2c+2-(t^2+2ct)(2)$$

$$\Leftrightarrow c(ab-t^2)-(ab-t^2)-c(a+b-2t)\geq 0$$

$\Leftrightarrow (t^2-ab)(1-c)-c(a+b-2t)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2t)\left(\dfrac{(a+b+2t)(1-c)}{(c-2)}-c\right)\ge 0$

(theo (1)).

BĐT trên đúng do $a+b-2t\le 0$ và

$$\frac{(a+b+2t)(1-c)}{(c-2)}-c\le 0, \forall c\in[0;1].$$

Ta chứng minh: $t^2c+2-(t^2+2ct)\ge 0$ (3).

Thay $t=\sqrt{2-c}$ vào ta được:

$$(3)\Leftrightarrow c\left(\sqrt{2-c}-1\right)^2\ge 0.$$

Điều này là hiển nhiên do c không âm. Từ (2) và (3) ta suy ra đpcm.

Thí dụ 4. *Giả sử a,b,c là các số dương thỏa mãn đẳng thức $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng: $a+b+c\le 3$.*

Lời giải. Theo thí dụ 3, ta đã chứng minh được $a+b\le 2t$. Bây giờ ta chứng minh $2t+c\le 3$ hay $2\sqrt{2-c}+c-3\le 0$.

Tuy nhiên BĐT này lại tương đương với $\left(\sqrt{2-c}-1\right)^2\ge 0$, hiển nhiên đúng.

Vậy BĐT đã cho được chứng minh.

Thí dụ 5. *Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+2abc=1$. Chứng minh rằng:*

$$a^2+b^2+c^2\ge 4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).$$

Lời giải. Dễ thấy a,b,c đều nhỏ hơn hoặc bằng 1. Không mất tính tổng quát, giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a,b,c thì khi đó $0\le c\le \dfrac{1}{2}$.

Xét $t=\sqrt{\dfrac{1-c}{2}}$, ta có: $2t^2+c^2+2t^2c=1$.

Kết hợp với giả thiết suy ra:

$$a^2+b^2-2t^2+2c\left(ab-t^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow t^2-ab=\frac{1}{2c}(a^2+b^2-2t^2)\quad (1).$$

Từ đây suy ra $a^2+b^2-2t^2\ge 0$ vì nếu $2t^2>a^2+b^2$ thì suy ra $t^2>ab$ hay $t^2-ab>0$, kết hợp với (1) thu được mâu thuẫn.

Ta chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2-4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$
$$\ge 2t^2+c^2-4\left(t^4+2c^2t^2\right)\quad (2)$$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2-2t^2)\left(1-4c^2\right)+4\left(t^4-a^2b^2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2-2t^2)\left(1-4c^2\right)+4\left(t^2+ab\right)\dfrac{1}{2c}(a^2+b^2-2t^2)\ge 0$

(theo (1))

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2-2t^2)\left(1-4c^2+\frac{4\left(t^2+ab\right)}{2c}\right)\ge 0.$$

Do $0\le c\le \dfrac{1}{2}$ nên $1-4c^2\ge 0$, lại có $\dfrac{4\left(t^2+ab\right)}{2c}\ge 0$ và $a^2+b^2-2t^2\ge 0$, suy ra (2) đúng.

Bây giờ ta chứng minh:

$$2t^2+c^2-4\left(t^4+2c^2t^2\right)\ge 0\quad (3).$$

Thay $t=\sqrt{\dfrac{1-c}{2}}$ vào ta được: $(3)\Leftrightarrow c(2c-1)^2\ge 0$.

Điều này là hiển nhiên do c không âm. Từ (2) và (3) ta suy ra đpcm.

Thí dụ 6. *Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P=a\left(1+c\sqrt{b}\right)+b\left(1+a\sqrt{c}\right)+c\left(1+b\sqrt{a}\right).$$

Lời giải. Ta có:

$$P=a+b+c+ac\sqrt{b}+ba\sqrt{c}+cb\sqrt{a}.$$

Theo thí dụ 4 ta đã có $a+b+c\le 3$ (1). Bây giờ ta chứng minh: $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\le 2t\sqrt{t}$, trong đó số t được định nghĩa như ở thí dụ 3.

Cũng giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a,b,c như đã làm ở thí dụ 3, ta có: $0<c\le 1$. Đồng thời thí dụ 3 cho ta $2t\ge a+b$ và $t^2\ge ab$. Từ đó ta có:

$$4t\ge 2(a+b)\ge\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\Rightarrow 2\sqrt{t}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

và $t\ge\sqrt{ab}$

$$\Rightarrow 2t\sqrt{t}\ge\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\sqrt{ab}=a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow 2ct\sqrt{t}\ge ac\sqrt{b}+cb\sqrt{a}.$$

Do đó: $ac\sqrt{b}+ba\sqrt{c}+cb\sqrt{a}\le 2ct\sqrt{t}+t^2\sqrt{c}$ (chú ý $t^2\ge ab$). Thay $t=\sqrt{2-c}$ ta được:

$$2ct\sqrt{t}+t^2\sqrt{c}=2c(2-c)^{\frac{3}{4}}+(2-c)\sqrt{c}.$$

Xét $f(c)=2c(2-c)^{\frac{3}{4}}+(2-c)\sqrt{c}$ trên $(0;1]$.

Ta có:

$$f'(c)=2(2-c)^{\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}c(2-c)^{-\frac{1}{4}}-\sqrt{c}+\frac{2-c}{2\sqrt{c}}.$$

Do $c\le 1;2-c\ge 1$ nên

$$2(2-c)^{\frac{3}{4}}\ge 2;\frac{3}{2}c(2-c)^{-\frac{1}{4}}\le\frac{3}{2};\sqrt{c}\le 1;\frac{2-c}{2\sqrt{c}}\ge\frac{1}{2}.$$

Từ đó dễ thấy $f'(c)\ge 0,\forall c\in(0;1]$. Tức là $f(c)$ đồng biến trên $(0;1]$. Suy ra

$$f(c)\le f(1)=3\ \forall\in(0;1].$$

Vì thế: $ac\sqrt{b}+ba\sqrt{c}+cb\sqrt{a}\le f(c)\le 3$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $P\le 6$. Mặt khác khi $a=b=c=1$ thì $P=6$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 6.

Nhận xét. Không giống các bài toán trước, để chứng minh BĐT đơn biến trong bài toán này, ta đã phải sử dụng công cụ xét hàm mà không dùng biến đổi tương đương vì việc biến đổi tương đương sẽ gây ra rất nhiều khó khăn trong việc xử lý các căn thức. Bạn đọc nên linh hoạt trong bước chứng minh này mặc dù trong hầu hết các trường hợp, việc chứng minh chỉ mang tính thủ tục mà thôi. Thực chất việc chứng (2) có thể suy ra từ (1) bằng cách dùng BĐT Cauchy, tuy nhiên tác giả muốn trình bày với bạn đọc cách sử dụng dồn biến kết hợp đạo hàm để chứng minh (2) nhằm nâng cao kỹ năng sử dụng các phương pháp này cho các bạn khi gặp các bài toán BĐT chặt hơn.

Thí dụ 7. *Cho ba số thực* $a,b,c\in\left(\frac{1}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ *thỏa mãn* $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3abc=9$. *Chứng minh rằng:* $a+b+c\ge abc+2$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a,b,c. Thế thì $\frac{1}{2}<c\le 1$.

Xét $t=\sqrt{\frac{9-2c^2}{3c+4}}$, ta có: $2\left(2t^2+c^2\right)+3ct^2=9$.

Kết hợp với giả thiết suy ra:

$$2\left(a^2+b^2-2t^2\right)+3c\left(ab-t^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[(a+b)^2-4t^2\right]=(3c-4)\left(t^2-ab\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b-2t)(a+b+2t)=(3c-4)\left(t^2-ab\right)$$

$$\Leftrightarrow t^2-ab=\frac{2(a+b+2t)}{3c-4}(a+b-2t)\ (1).$$

Ta cũng có: $2\left(a^2+b^2-2t^2\right)=3c\left(t^2-ab\right)$, từ đây suy ra: $a^2+b^2-2t^2\ge 0$ và $t^2-ab\ge 0$. Kết hợp với (1) với chú ý $3c-4<0$ ta thu được $a+b-2t\le 0$.

Ta chứng minh:

$$a+b+c-abc-2\ge 2t+c-t^2c-2\ (2)$$

$$\Leftrightarrow a+b-2t+c\left(t^2-ab\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2t)\frac{3c-4+2ac+2bc+4tc}{3c-4}\ge 0\ (3)$$

(do $t^2 - ab = \frac{2(a+b+2t)}{3c-4}(a+b-2t)$).

Dễ thấy từ định nghĩa của t và do $\frac{1}{2} < c \le 1$ suy ra $t \ge 1$; đồng thời trong hai số a,b phải có một số ≥ 1 vì nếu không thì cả ba số a,b,c đều nhỏ hơn 1, dẫn đến $2(a^2+b^2+c^2)+3abc<9$, mâu thuẫn với giả thiết.

Giả sử $a \ge 1$ (trường hợp $b \ge 1$ làm tương tự) ta có:

$2ac+4tc+3c-4 \ge 2c+4c+3c-4 = 9c-4 > 0$ (do $c > \frac{1}{2}$).

Lại có $2bc \ge 0, 3c-4<0$ và $a+b-2t \le 0$ nên suy ra (3) đúng. Tức là (2) đúng. Tiếp theo ta chứng minh: $2t+c-t^2c-2 \ge 0$ (4).

Coi $2t+c-t^2c-2$ là tham thức bậc hai ẩn t tham số c.

Dễ giải ra hai nghiệm của tam thức bậc hai này là 1 và $\frac{2-c}{c}$ (chú ý $\frac{2-c}{c} \ge 1$).

Nếu $c=1$ thì $t=1$, khi đó hiển nhiên (4) đúng.

Xét $\frac{1}{2} < c < 1$ thì $\frac{2-c}{c} > 1$.

Lúc này chỉ cần chứng minh $t \le \frac{2-c}{c}$ thì sẽ có t nằm giữa khoảng hai nghiệm của tam thức và theo tính chất của tam thức bậc hai suy ra (4) đúng. Thật vậy:

$$t \le \frac{2-c}{c} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9-2c^2}{3c+4}} \le \frac{2-c}{c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{9-2c^2}{3c+4} \le \frac{c^2-4c+4}{c^2}$$
$$\Leftrightarrow 2c^4+3c^3-17c^2-4c+16 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (c-1)(2c^3+5c^2-12c-16) \ge 0$$

(đúng do $c \le 1$).

Như vậy (4) được chứng minh. Từ (2) và (4) ta có đpcm.

Nhận xét. Đây là một bài toán rất hay và khó. Việc chứng minh BĐT thức (2) đã khá khó và đòi hỏi phải sử dụng, khai thác linh hoạt các giả thiết đề bài cho. Việc chứng minh BĐT (4) còn khó hơn nhiều, nếu đi theo lối mòn là thay t bằng một căn thức chứa c vào thì sẽ cho số mũ và hệ số rất to sau khi khai triển, làm cho việc chứng minh vô cùng phức tạp. Ở đây tác giả dùng tính chất của tam thức bậc hai và đưa bài toán về việc chứng minh một BĐT khá đơn giản mà khai triển của nó là một đa thức bậc 4, đến đây việc chứng minh trở nên dễ dàng. Bạn đọc nên chú ý cách tiếp cận này trong quá trình chứng minh BĐT.

Thí dụ 8. *Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c+abc=4$. Chứng minh rằng:*

$$a^2+b^2+c^2+12 \ge 5(ab+bc+ca).$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a,b,c. Thế thì $0 \le c \le 1$.

Nếu $c=0$ thì bài toán trở thành:

Cho $a,b \ge 0$ thỏa mãn $a+b=4$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+12 \ge 5ab$.

Ta có: $a^2+b^2+12 \ge 2ab+12$,

lại có: $4=a+b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \le 4$,

do đó: $a^2+b^2+12 \ge 2ab+12 \ge 2ab+3ab=5ab$.

Bài toán được chứng minh trong trường hợp này.

Nếu $c \ne 0$ thì xét $t = \frac{-1+\sqrt{1-c^2+4c}}{c}$.

Dễ chứng minh $t \ge 1$ và $2t+c+t^2c=4$ (1).

Kết hợp với giả thiết suy ra:

$$a+b-2t=c\left(t^2-ab\right).$$

Từ đây lại suy ra: $a+b-2t\ge 0;\ t^2-ab\ge 0$

và $t^2-ab=\dfrac{a+b-2t}{c}$.

Ta chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2+12-5\left(ab+bc+ca\right)$$
$$\ge 2t^2+c^2+12-5(t^2+2ct)\quad (2)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2t^2+5\left(t^2-ab\right)-5c\left(a+b-2t\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2-4t^2+7\left(t^2-ab\right)-5c\left(a+b-2t\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a+b-2t\right)\left(a+b+2t+\frac{7}{c}-5c\right)\ge 0\quad (3).$$

Do $c\le 1$ nên $\dfrac{7}{c}-5c>0$, lại có: $a+b-2t\ge 0$, suy ra (3) đúng. Tức là (2) được chứng minh. Tiếp theo ta chứng minh:

$$2t^2+c^2+12-5\left(t^2+2ct\right)\ge 0\ (4)$$

Từ (1) suy ra $c=\dfrac{4-2t}{1+t^2}$, thay vào và quy đồng, khai triển ta được (4) tương đương với:

$$-3t^6+26t^4-40t^3+45t^2-56t+28\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(2-t)\left(3t^3+12t^2+7t+14\right)\ge 0.$$

Do $c\ge 0$ nên $t\le 2$, lại có $t\ge 1$ suy ra BĐT trên hiển nhiên đúng.

Từ (2) và (4) ta thu được BĐT cần chứng minh.

Nhận xét. Để chứng minh BĐT (4), do biểu diễn của t qua c rất phức tạp nên ta đã không thế t bằng một biểu thức của c mà đã thế c bằng một biểu thức của t đơn giản hơn rất nhiều.

Như vậy, thông qua 8 thí dụ cụ thể, bài viết đã trình bày, giới thiệu và phân tích cho bạn đọc về một cách dồn biến rất hay và hiệu quả trong chứng minh BĐT. Nhiều thí dụ đã trình bày như thí dụ 1 và 4 có thể chứng minh bằng phản chứng hoặc đạo hàm theo từng biến nhưng rõ ràng các cách này không mang tính chất phổ quát và khó hoặc thậm chí là không thể áp dụng được với các thí dụ còn lại. Chắc hẳn nói đến đây bạn đọc đã thấy rõ được sức mạnh của công cụ dồn biến được trình bày ở trên. Mong rằng bài viết nãy sẽ giúp các bạn giải quyết thành công các bài toán BĐT tương tự với các thí dụ đã được phân tích. Để kết thúc bài viết, tôi đưa ra một vài bài tập để các bạn vận dụng.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho các số thực $a,b,c\ge 1$ thỏa mãn $a+b+c+2=abc$. Chứng minh rằng:

$$bc\sqrt{a^2-1}+ca\sqrt{b^2-1}+ab\sqrt{c^2-1}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}abc.$$

Bài 2. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$3(a^2+b^2+c^2)+13\left(ab+bc+ca\right)\ge 48.$$

Bài 3. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+abc$.

Bài 4. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge a+b+c.$$

Bài 5. Giả sử a,b,c là các số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge a^2+b^2+c^2.$$

BẠN CÓ BIẾT ?

VỀ BÀI TOÁN n ĐIỂM CỦA P. ERDOS

HOÀNG ĐỨC TÂN
(Hà Nội)

Năm 1983, *P. Erdos* đã đặt vấn đề: *Với những giá trị n nào thì tồn tại một tập hợp n điểm trong mặt phẳng có các thuộc tính sau:*

a) *Không có ba điểm nằm trên một đường thẳng.*

b) *Không có bốn điểm nằm trên một vòng tròn.*

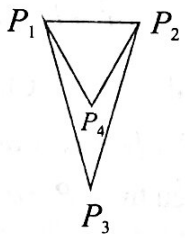
c) *Xác định đúng* $n-1$ *khoảng cách khác nhau.*

d) $n-1$ *khoảng cách khác nhau ấy có thể được đánh số theo chỉ số i sao cho* $1 \le i \le n-1$, *khoảng cách thứ i xảy ra i lần.*

Chúng ta sẽ gọi đó là một ***"Hệ n điểm được sắp hoàn chỉnh"***.

Ta xem xét bài toán với một số giá trị của *n*. Rõ ràng với $n = 1$ và $n = 2$ bài toán là tầm thường. Với $n = 3$ rõ ràng các đỉnh một tam giác cân (không phải tam giác đều) *ABC* mà $AB = AC \neq BC$ tạo nên một hệ 3 điểm được sắp hoàn chỉnh.

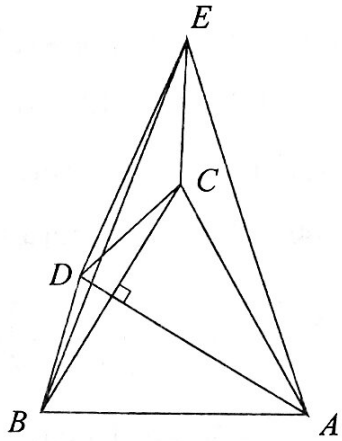
Hình 1 bên sẽ chỉ ra sự tồn tại của hệ 4 điểm được sắp hoàn chỉnh (tam giác $P_1P_2P_4$ bên trong là tam giác đều $P_1P_2 = P_1P_4 = P_2P_4$, tam giác bên ngoài $P_3P_1P_2$ là tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều $P_3P_1 = P_3P_2 \neq P_1P_2$).



Hình 1

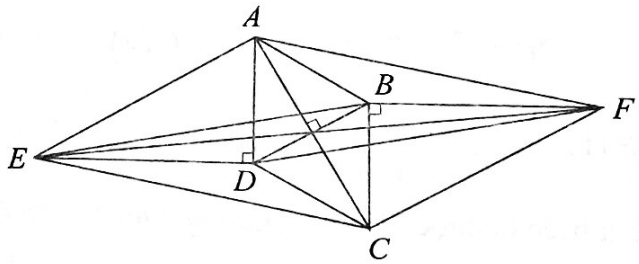
Với $n = 5$ thì hình 2 chỉ ra sự tồn tại của hệ 5 điểm được sắp hoàn chỉnh.

Trong hình 2, *ABC* là một tam giác đều, *AD* vuông góc với *BC* và *CE* vuông góc với *AB*, ở đây $AD = AB$ và $CE = CD$. Ta dễ dàng kiểm tra được rằng đây là một hệ 5 điểm được sắp hoàn chỉnh.



Hình 2

Với $n = 6$ thì hình 3 dưới đây chỉ ra sự tồn tại



Hình 3

của hệ 6 điểm được sắp hoàn chỉnh.

Trong hình 3, *ABD* và *BCD* là các tam giác đều. *DE* và *BF* vuông góc với *AD*, ở đây $AE = CF = AC$. Một lần nữa, ta dễ dàng xác minh rằng đây là một hệ 6 điểm được sắp hoàn chỉnh.

P. Erdos nói rằng ông không rõ liệu một hệ 7 điểm được sắp hoàn chỉnh có tồn tại hay không? Năm 1985 *Andy Liu* (người Hungary) đã chỉ ra sự tồn tại của hệ 7 điểm được sắp hoàn chỉnh. Xét hình 4 ở dưới.

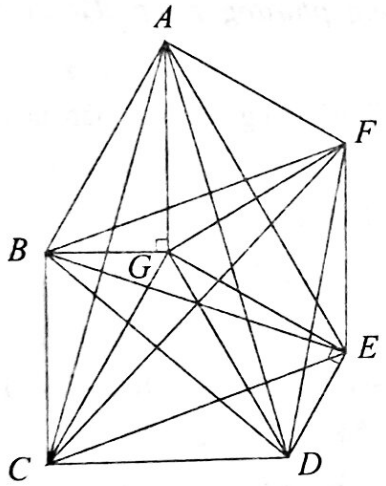
Trong hình 4, *AFG* và *EFG* là các tam giác đều. *BG* vuông góc với *AG* và *DE* vuông góc với

EG, với $AB = DG = 2BG$. Cuối cùng, CDG cũng là một tam giác đều.

Không khó khi kiểm tra tập hợp 7 điểm này có các thuộc tính a) và b). Từ đó sau này các góc đối diện của mỗi tứ giác lồi được xác định bởi những điểm này không phải là các góc bù nhau (có tổng bằng 180^0).

Chúng ta sẽ minh họa bằng việc chứng minh rằng $ACDF$ không phải là tứ giác nội tiếp. Lưu ý rằng $\widehat{AFD} = 120^0 - \widehat{DFE}$ trong khi $\widehat{ACD} = 60^0 + \widehat{ACG}$.

Nếu $\widehat{DFE} = \widehat{ACG}$ thì tam giác DFE và ACG là đồng dạng vì $\widehat{DEF} = 150^0 = \widehat{AGC}$. Tuy nhiên, $\frac{AG}{GC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trong khi $\frac{DE}{EF} = \frac{1}{2}$. Do đó $\widehat{AFD} + \widehat{ACD} \neq 180^0$.



Hình 4

Bây giờ chúng ta chứng minh rằng thí dụ của chúng ta cũng có các thuộc tính c) và d).

Đầu tiên chúng ta liệt kê các lớp khoảng cách:

(1) AE;

(2) $BG = DE$;

(3) $AC = AD = CF$;

(4) $AB = CD = CG = DG$;

(5) $BD = BE = BF = CE = DF$;

(6) $AF = AG = BC = EF = EG = FG$.

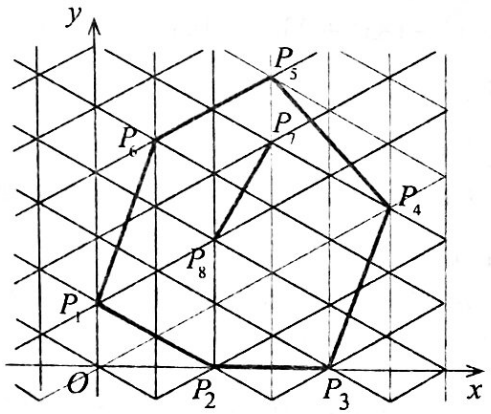
Đó là $BG = DE$ được suy ra từ phép xây dựng. Chúng ta có $AC = AD$ và $AC = CF$ vì AG chia đôi $\widehat{CGD}$ và CG chia đôi góc $\widehat{AGF}$. Nên $AB = CD = CG = DG$ được suy ra từ phép xây dựng. Vì $\widehat{ABG} = 60^0 = \widehat{CGB}$, nên AB và GC là song song với nhau và $ABCG$ là một hình bình hành. Do đó $BC = AG$. Nên $AG = AF = EF = EG = FG$ được suy ra từ phép xây dựng.

Chúng ta phải thiết lập các đẳng thức trong (5). Vì $\widehat{FGB} = 150^0 = \widehat{FED}$, các tam giác FGB và FED là bằng nhau (c.g.c). Do đó $FB = FD$ và $\widehat{BFG} = \widehat{DFE}$. Từ đó suy ra $\widehat{BFD} = \widehat{GFE} = 60^0$. Vì vậy BDF là một tam giác đều. Chúng ta có $BF = BE$ vì BG chia đôi $\widehat{EGF}$, và $BF = CE$ vì $BCEF$ cũng là một hình bình hành.

Chúng ta sẽ hoàn thành chứng minh bằng cách chỉ ra rằng sáu khoảng cách đó là khác nhau. Thật vậy, $DE < EG < DG < DF < AE < AD$. $DE < EG < DG$ có thể thấy trong tam giác DEG và $AE < AD$ trong tam giác ADE. Do đó thí dụ của *Andy Liu* là một hệ 7 điểm được sắp hoàn chỉnh.

Năm 1989 *I. Palásti* (người Hungary) đã chỉ ra sự tồn tại của hệ 8 điểm được sắp hoàn chỉnh.

Giả sử P_i là một điểm của lưới tam giác đều (các cạnh của tam giác là 1, 1, 1). Tám điểm được chọn trong các điểm đó với tọa độ Descartes:



Hình 5

$$P_1(0;1),\ P_2(\sqrt{3};1),\ P_3(2\sqrt{3};0),\ P_4\left(\frac{5\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2}\right),$$

$$P_5\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{9}{2}\right), P_6\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{7}{2}\right), P_7\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{7}{2}\right), P_8(\sqrt{3};2).$$

(*Xem tiếp trang 44*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 40. *Giải phương trình*

$$(2x+10)\sqrt{x+3}=x^2+11x+12 \quad (*).$$

Lời giải. Cách 1: Dùng phương pháp biến đổi tương đương

Phân tích: PT có dạng $\sqrt{a}=b$, nên ta có thể nâng lên lũy thừa. Dùng các phép biến đổi, đồng nhất kết hợp với việc tách, nhóm, ghép thích hợp, để đưa PT về dạng PT tích đã biết cách giải.

Nếu sau khi lũy thừa tìm được nghiệm hữu tỉ thì ta sẽ dùng lược đồ Horner để phân tích ra thừa số.

ĐK: $\begin{cases} x\ge -3 \\ \left[\begin{array}{l} x\le \dfrac{-11-\sqrt{73}}{2}\approx -9,772001873 \\ x\ge \dfrac{-11+\sqrt{73}}{2}\approx -1,227998127 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow x\ge -1,227998127$ (1). Khi đó:

$(*)\Leftrightarrow (2x+10)^2(x+3)=\left(x^2+11x+12\right)^2$

$\Leftrightarrow x^4+18x^3+93x^2+44x-156=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left(x^2+17x+78\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ thỏa mãn (1)} \\ x=-2 \text{ không thỏa mãn (1)} \end{array}\right.$

(vì PT $x^2+17x+78=0$ vô nghiệm).

Kết luận: Đối chiếu với ĐK ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Cách 2: Dùng phương pháp biến đổi đưa về dạng $A^n=B^n$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$

Phân tích. Hệ số trước căn thường là những số chẵn. Dùng các phép biến đổi hoặc tách ghép (chủ yếu là đưa về các hằng đẳng thức).

Ta thấy $-2(x+5)\sqrt{x+3}$ có dạng $-2ab$ sau khi chuyển vế, nên phân tích thành hằng đẳng thức,

ĐK: $x\ge -3$. Khi đó:

$(*)\Leftrightarrow 2(x+5)\sqrt{x+3}=x^2+11x+12$

$\Leftrightarrow \left[(x+5)^2-2(x+5)\sqrt{x+3}+(x+3)\right]=16$

$\Leftrightarrow \left[(x+5)-\sqrt{x+3}\right]^2=4^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+5-\sqrt{x+3}=4 \quad (1) \\ x+5-\sqrt{x+3}=-4 \quad (2) \end{array}\right.$.

• Giải (1), ta có: (1) $\Leftrightarrow x+1-\sqrt{x+3}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

• Giải (2), ta có:

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x+9 \Leftrightarrow (x+9)^2=x+3$

$\Leftrightarrow x^2+17x+78=0$: PT này vô nghiệm.

Cách 3: Dùng phương pháp đặt một ẩn phụ hoàn toàn

Phân tích: PT có dạng $\sqrt{a}=b$, nên ta có thể đặt một ẩn phụ.

ĐK: $x\ge -3$. Đặt $\sqrt{x+3}=a\ (a\ge 0)$ (1)

$\Rightarrow x=a^2-3$. Ta thu được:

$2(a^2-3+5)a=(a^2-3)^2+11(a^2-3)+12$

$\Leftrightarrow 2a^3+4a=a^4-6a^2+9+11a^2-33+12$

$\Leftrightarrow a^4-2a^3+5a^2-4a-12=0$

$\Leftrightarrow (a+1)\left(a^3-3a^2+8a-12\right)=0$

$\Leftrightarrow (a+1)(a-2)\left(a^2-a+6\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1=0 \\ a-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \text{ (loại)} \\ a=2 \text{ (thỏa mãn) (2)} \end{array}\right.$

Từ (1) và (2) ta có:

$\sqrt{x+3}=2 \Leftrightarrow x+3=4 \Leftrightarrow x=1.$

Cách 4: Dùng PP đặt hai ẩn phụ hoàn toàn

ĐK: $x\ge -3$.

Đặt $x+5=a \Rightarrow a^2=x^2+10x+25$;

$\sqrt{x+3}=b\ (b\ge 0) \Rightarrow b^2=x+3.$

Suy ra: $x^2+11x+12=a^2+b^2-16.$

Từ (*) ta thu được:

$2ab=a^2+b^2-16 \Leftrightarrow (a-b)^2=4^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=4 \\ a-b=-4 \end{array}\right..$$

• Với $a-b=4$, ta có: $x+5-\sqrt{x+3}=4$

$$\sqrt{x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn ĐK).

• Với $a-b=-4$, ta có: $x+5-\sqrt{x+3}=-4$

$\Leftrightarrow x+9-\sqrt{x+3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x+9$

$\Leftrightarrow (x+9)^2=x+3$

$\Leftrightarrow x^2+17x+78=0$: PT này vô nghiệm.

Cách 5: Dùng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Phân tích: PT có dạng

$$ax^2+bx+c=(dx+e)\sqrt{mx+n}.$$

Do đó ta có thể đặt ẩn phụ không hoàn toàn. Khi đặt ẩn phụ t thì biến x vẫn tồn tại và khi đó ta xem x là tham số. Thông thường thì đó là PT bậc hai theo ẩn t và lúc này ta sẽ giải bằng công thức nghiệm của PT bậc hai.

Ta có lời giải sau:

ĐK: $x\geq -3$. Từ (*) ta có:

$(\sqrt{x+3})^2-2(x+5)\sqrt{x+3}+x^2+10x+9=0$ (1)

Đặt $\sqrt{x+3}=t$ ($t\geq 0$). Từ (1) ta có:

$$t^2-2(x+5)t+x^2+10x+9=0 \quad (2).$$

Coi PT(2) là PT ẩn t còn x là tham số ta có:

$$\Delta'_t=(x+5)^2-(x^2+10x+9)=16$$

$t_1=x+5+4=x+9;$

$t_2=x+5-4=x+1.$

• Với $t=x+1$, ta có:

$\sqrt{x+3}=x+1$ (ĐK: $x\geq -1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

• Với $t=x+9$, ta có:

$\sqrt{x+3}=x+9 \Leftrightarrow (x+9)^2=x+3$

$\Leftrightarrow x^2+17x+78=0$: PT này vô nghiệm.

Cách 6: Dùng phương pháp đưa về phương trình tích

Phân tích: Biểu thức ngoài dấu căn thức là bậc hai, biểu thức trong dấu căn thức là bậc nhất và có dạng $ax^2+bx+c=(dx+e)\sqrt{mx+n}$, nên ta nghĩ đến việc phân tích biểu thức ngoài dấu căn theo biểu thức trong căn.

Cụ thể: $x^2+11x+12=(x+5)^2+\sqrt{x+3})^2-16$, rồi nhóm nhân tử chung phù hợp sẽ xuất hiện PT tích. Ta có lời giải sau:

ĐK: $x\geq -3$.

$$2(x+5)\sqrt{x+3}=x^2+11x+12$$

$$\Leftrightarrow 2(x+5)\sqrt{x+3}=(x+5)^2+(\sqrt{x+3})^2-16$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+5)^2-(x+5)\sqrt{x+3}\right]+$$

$$+\left[(\sqrt{x+3})^2-(x+5)\sqrt{x+3}\right]-16=0$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x+5-\sqrt{x+3})-$$

$$-\sqrt{x+3}(x+5-\sqrt{x+3})-16=0$$

$$\Leftrightarrow (x+5-\sqrt{x+3})(x+5-\sqrt{x+3})-16=0$$

$$\Leftrightarrow (x+5-\sqrt{x+3})^2-4^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+5-\sqrt{x+3}-4)(x+5-\sqrt{x+3}+4)=0$$

$\Leftrightarrow x+5-\sqrt{x+3}-4=0$ (1)

hoặc $x+5-\sqrt{x+3}+4=0$ (2).

• Giải (1): $x+1-\sqrt{x+3}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

• Giải (2): $x+9-\sqrt{x+3}=0$: PT này vô nghiệm.

Cách 7: Dùng phương pháp liên hợp

Phân tích: Sử dụng MTBT Casio để dự đoán nghiệm của PT bằng cách nhập

$(2X+10)\sqrt{X+3}-X^2-11X-12$ và bấm shift solve 1 = (1 số nguyên trong khoảng điều kiện) thì cho ta nghiệm X = 1. Để kiểm tra PT còn nghiệm nữa hay không ta sửa lại cấu trúc

$(2X+10)\sqrt{X+3}-X^2-11X-12):(X-1)$ và bấm shift solve 1 = thì cho ta kết quả Can't solve, Chứng tỏ PT đã hết nghiệm. Từ đó khẳng định PT có một nghiệm, nên ghép hằng số với căn để có liên hợp. Cụ thể:

$$2(x+5)\left[\sqrt{x+3}-m\right]-(x^2+11x+12)+2(x+5)m=0$$

Với m là giá trị của căn thức tại $x=1$, nghĩa là:

$$m=\sqrt{x+3}=\sqrt{1+3}=2.$$

Khi đó PT trở thành:

$$2(x+5)\left[\sqrt{x+3}-2\right]-\left(x^2+7x-8\right)=0.$$

Ta có lời giải sau: ĐK: $x \geq -3$.

$$(*) \Leftrightarrow 2(x+5)\sqrt{x+3}=x^2+11x+12$$

$$\Leftrightarrow 2(x+5)\left[\sqrt{x+3}-2\right]-\left(x^2+7x-8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+5)\frac{(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}-(x-1)(x+8)=0$$

(vì $\sqrt{x+3}+2>0$ với mọi $x \geq -3$)

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{2(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-(x+8)\right]=0$$

• $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, thỏa mãn ĐK.

• $\left[\frac{2(x+5)}{\sqrt{x+3}+2}-(x+8)\right]=0$: PT không có nghiệm với $x \geq -3$.

NGUYỄN DUY THÁI

(GV THCS Đậu Liêu, TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Nhận xét. Ngoài 7 cách giải của bạn *Nguyễn Duy Thái*, Tòa soạn còn nhận được một số cách giải đúng từ các bạn: *Nguyễn Văn Bản*, GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, **Điện Biên**; *Ngô Thị An Bình*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Lê Nguyễn Quỳnh Anh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Hùng Cường*, 85 Biên Cương, P. Ngô Mây, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**; *Nguyễn Minh Khôi*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 42 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.10.2020.

BÀI TOÁN 42. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy hình chóp. Cho AB = a, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (AHK).*

LÊ VĂN NAM

(GV THPT Ninh Hòa, Yên Lập, Phú Thọ)

****

VỀ BÀI TOÁN …… *(Tiếp theo trang 41)*

Bây giờ hãy xem xét tập hợp các điểm $P_1, P_2, ..., P_8$ được đưa ra trong hình 5.

Cách dễ nhất để chứng minh rằng đây là loại cấu hình mong muốn là ta sẽ tính toán khoảng cách từng cái một, và đánh số thứ tự các khoảng cách đó, chúng ta có (tính toán theo định lý Pythagore):

7) $P_1P_3=P_1P_7=P_2P_4=P_2P_6=P_2P_7=P_3P_7=P_4P_6=\sqrt{13}$

6) $P_1P_6=P_3P_4=P_3P_8=P_4P_5=P_4P_8=P_5P_8=\sqrt{7}$

5) $P_1P_2=P_1P_8=P_2P_8=P_4P_7=P_5P_6=2$

4) $P_2P_3=P_6P_7=P_6P_8=P_7P_3=\sqrt{3}$

3) $P_1P_4=P_2P_5=P_3P_5=\sqrt{21}$

2) $P_1P_5=P_3P_6=\sqrt{19}$

1) $P_5P_7=1$.

Rõ ràng hệ 8 điểm $P_1, P_2, ..., P_8$ được chỉ ra ở trên là hệ 8 điểm được sắp hoàn chỉnh.

Năm 2016 *Amir Jafari* và *Amin Najafi Amin* (người Iran) đã công bố tất cả các lời giải có thể có đối với $2 \leq n \leq 8$.

Với $n \geq 9$ bài toán về sự tồn tại của hệ n điểm được sắp hoàn chỉnh vẫn còn là *bài toán mở*. Và bài toán tương tự trong không gian sẽ có kết quả như thế nào cũng được nhiều người quan tâm.

Rất mong có sự tiếp sức của các bạn trẻ yêu toán nước ta về bài toán thú vị của *Paul Erdos*.

Chúc các bạn thành công!

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 60

Problem. *Calculate the number of integral points lies on or inside the tetrahedron determined by the coordinate planes and the plane* $x+y+z\le 30$.

Solution. We need to find the number of natural triples (x,y,z) satisfying the inequality $x+y+z\le 30$.

Like in the previous issue, we can easily see that this number is exactly the number of natural solutions of the corresponding equation $x+y+z+t=30$ which is C_{33}^{3}.

TỪ VỰNG

integral points : *điểm nguyên*

tetrahedron : *tứ diện*

triple : *bộ ba*

NGUYEN PHU HOANG LAN

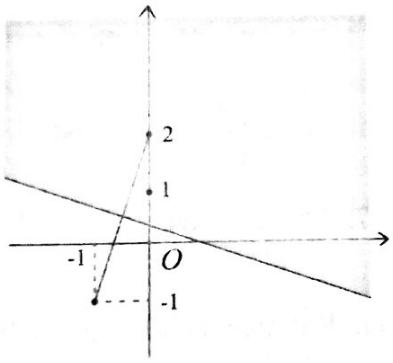
(*College of Science – Vietnam National university, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 57

Bài toán. *Tìm quỹ tích những điểmbiểu diễn số phức z thỏa mãn:* $|z+1+i|>|z-2i|$.

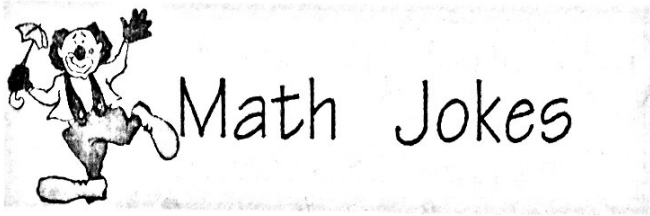
Lời giải.



Ta biết rằng $|z+1+i| = |z-(-1-i)|$ là khoảng cách từ điểm biểu diễn số phức z đến điểm biểu diễn số phức $-1-i$, điểm này có tọa độ là $(-1;-1)$. Tương tự $|z-2i|$ là khoảng cách từ điểm biểu diễn số phức z đến điểm biểu diễn số phức $2i$, điểm này có tọa độ là $(0;2)$. Vì vậy quỹ tích những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z+1+i|>|z-2i|$ là nửa mặt phẳng mở xác định bởi đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm $(-1;-1)$ và $(0;2)$, nửa mặt phẳng này chứa điểm $(0;2)$.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Đỗ Ngọc Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Hằng Nga*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Lê Mỹ Duyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**; *Đào Thị Khánh Nhi*, 10 Toán 1, *Nguyễn Thị Mỹ Lệ*, 10 Toán 2, *Nguyễn Thị Bảo Ngọc*, 11Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế;** *Trịnh Thị Thúy Nga*, 10A11, THPT Krông Bông, **Đăk Lăk**.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)



Why was the student confused when he went from English class to math class?

Because he was taught that a double negative in English is the bad, but in math, it's a positive.

BÀI 48. (Moscow Mathematical Olympiad) *Chứng minh rằng với mọi số nguyên* $n > 6$ *thì*

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n \quad (1).$$

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh kết quả:

$$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 3 \quad (*).$$

Để chứng minh (*), trước hết ta chứng minh bằng quy nạp rằng với số tự nhiên bất kỳ $k \le n$ thì $1+\frac{k}{n} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n}$ (**).

Hiển nhiên (**) đúng với $k = 1$. Giả sử (**) đúng với k nào đó, ta chứng minh (**) đúng với $k + 1$. Ta có:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right) \ge \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k}{n^2} > 1+\frac{k+1}{n}.$$

Sử dụng $k \le n$, ta cũng có:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+2k+1}{n^2}-\frac{k+1}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}$$
$$= 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{n(k+1)-k^2}{n^3}$$
$$< 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}.$$

Vậy (**) được chứng minh. Cho $k = n$ ta có (*).

Bây giờ ta chứng minh BĐT(1). Giả sử BĐT(1) đúng với số tự nhiên n nào đó, tức là $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$ (với $n \ge 6$). Để chứng minh (1) đúng với $n + 1$, đủ để ta chứng minh BĐT:

$$\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n} \ge n+1 \ge \frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)^n}{\left(\frac{n}{3}\right)^n}$$

hay

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1 \ge \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Nhưng BĐT cuối luôn đúng do BĐT(*). Vậy BĐT(1) được chứng minh nếu ta chỉ ra rằng với $n = 6$ thì (1) đúng.

Với $n = 6$ thì: $\left(\frac{6}{2}\right)^6 = 3^6 = 729;$

$$6! = 720;$$

$$\left(\frac{6}{3}\right)^6 = 2^6 = 64.$$

Rõ ràng $729 > 720 > 64$. Vậy (1) được chứng minh.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải được bài này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

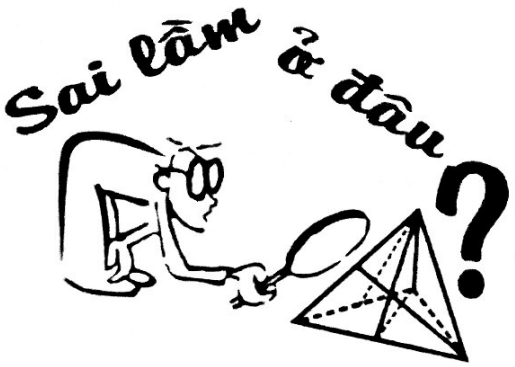
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn trước ngày 31.10.2020

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 50. *Tìm các số nguyên a, b, c phân biệt khác 0 sao cho đa thức bậc 4 dưới đây (với hệ số nguyên) có thể viết thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên*

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1.$$

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: SAI Ở ĐÂU?

(Đề đăng trên TH&TT số 515, tháng 5 năm 2020)

Phân tích sai lầm. Bạn *Nhật Khánh* đã sử dụng tính chất: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$

để từ $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x)d(2x) = -4 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = -4$ là

không đúng, vì tính chất $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$ áp dụng được khi biến x và u trong hai tích phân phải cùng đoạn $[a; b]$. Còn bạn *Khánh* áp dụng cho biến $2x$ và x trên hai tích phân không cùng một đoạn. Đối với tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x)d(2x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$, còn $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = -4$ không phải trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$, mà trên đoạn $[1;2]$.

Lời giải đúng: Làm như bạn *Khánh* ta có:

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \text{ và từ } \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x)d(2x) = -4$$

suy ra: $\int_1^2 f(x)dx = -4$. Khi đó:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 1 + -4 = -3.$$

Chọn D.

LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

Trong giờ ôn tập thi THPT ở lớp 12T, thầy giáo đưa ra bài tập trắc nghiệm sau: *Cho các số thực x, y thỏa mãn* $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ và $P = \dfrac{12x^2 - 16xy + 20x - 10y + 1}{(x^2+y^2)^2 - 4x + 2y + 1}$. Gọi M, m lần lượt là GTLN, GTNN của P. Tính $M + m$.

A. 4 **B.** $\frac{10}{3}$ **C.** $\frac{41}{39}$ **D.** $\frac{158}{39}$

Sau một lúc suy nghĩ, bạn *Diễm Quỳnh* liền xung phong lên bảng. Sau đây là lời giải của bạn *Diễm Quỳnh*:

Ta có: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x - 2y$.

Khi đó: $P = \dfrac{12x^2 - 16xy + 20x - 10y + 1}{(x^2+y^2)^2 - 4x + 2y + 1}$

$= \dfrac{16x^2 - 16xy + 4y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20x - 10y + 1}{(4x-2y)^2 - (4x-2y) + 1}$

$= \dfrac{(4x-2y)^2 + 4x - 2y + 1}{(4x-2y)^2 - (4x-2y) + 1}$.

Đặt $t = 4x - 2y$, khi đó $P = \dfrac{t^2+t+1}{t^2-t+1}$. Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+t+1}{t^2-t+1}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$f'(t) = \dfrac{-2t^2+2}{(t^2-t+1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$. BBT:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	↘	$\frac{1}{3}$	↗	3	↘	1

Suy ra $M = \max\limits_{R} f(t) = f(1) = 3$, $m = \min\limits_{R} f(t) = f(-1) = \frac{1}{3}$.

Vậy $M + m = \frac{10}{3}$. Chọn B.

Theo các bạn thì lời giải của bạn Diễm Quỳnh đúng chưa?

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 519 (9.2020)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, DƯƠNG THUẬN
Trị sự, phát hành: NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: DƯƠNG THUẬN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu tới bạn đọc

Bộ sách TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THCS

Bộ sách **"Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở"** có tất cả 8 cuốn, cho các lớp 6, 7, 8, 9, mỗi lớp gồm 2 tập: tập một là *Đại số* (ở lớp 6, tập một là *Số học*), tập hai là *Hình học*. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình Toán ở các lớp THCS.

Mỗi cuốn đều có hai phần: phần *Các chuyên đề cơ bản* (viết theo từng chương của SGK) và phần *Một số chuyên đề nâng cao*. Phần đầu trong mỗi chuyên đề là tóm tắt các kiến thức lí thuyết của chuyên đề mà HS cần nắm vững, tiếp theo giới thiệu một số ví dụ minh hoạ và sau đó là các bài tập đề nghị để HS luyện tập. Những chuyên đề nâng cao nhằm giúp HS hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình. Những ví dụ và các bài tập trình bày trong sách được các tác giả chọn lọc khá kĩ lưỡng, trong đó có nhiều ví dụ, bài tập là những bài thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Olympic Toán, ... Bằng việc đọc, giải những ví dụ và bài tập này, HS sẽ đ[illegible] hiểu sâu những kiến thức đã học, qua đó [illegible] khả năng tư duy Toán học. Cuối sách [illegible] *hướng dẫn giải* cho các bài tập được đ[illegible] mỗi chuyên đề.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã hoặc đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học và các trường Trung học phổ thông có uy tín, là những chuyên gia Toán ở Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, chẳng hạn như: NGND. *Vũ Hữu Bình* (chủ biên), NGUT *Nguyễn Tam Sơn*, nhà giáo *Đàm Hiếu Chiến*, PGS.TS. *Văn Như Cương*, PGS.TS *Đàm Văn Nhỉ*, TS. *Phạm Thị Bạch Ngọc*, PGS.TS. *Lê Quốc Hán*, TS. *Trần Hữu Nam*, ...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em học sinh hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, và góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.

Bạn đọc có thể đặt mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị Trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Địa chỉ liên hệ: - PHÒNG KINH DOANH CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI
Địa chỉ: Tầng 4, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
Tel: (024) 35121977, số máy lẻ: 120 - Fax: (024) 35123278
- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trên cả nước

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ
CHUẨN BỊ CHO KÌ THI VÀO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG MÔN TOÁN

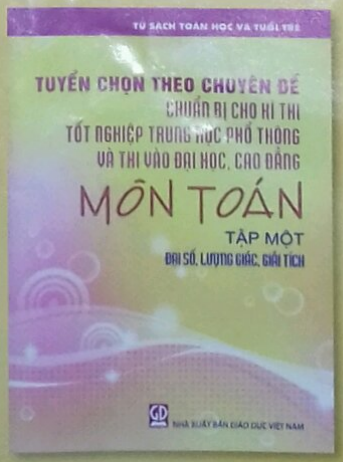
Bộ sách gồm hai tập tuyển chọn theo chuyên đề những bài viết hay trên Tạp chí TH&TT và một số bài viết thêm của các nhà giáo có kinh nghiệm nhằm giúp các bạn HS THCS ôn tập và thi có hiệu quả vào lớp 10 các trường THPT và THPT chuyên. Bộ sách cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh HS.

Khổ 17×24cm
Giá bìa: 35.000 đồng

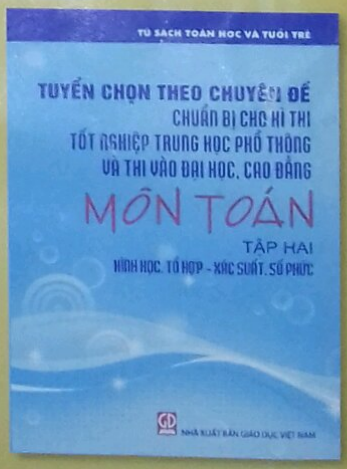
Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ
CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Bộ sách có hai tập gồm 10 chương với nhiều chuyên đề được tuyển chọn từ các bài viết của các thầy cô giáo giỏi chuyên môn và có kinh nghiệm giảng dạy trong cả nước, được sắp xếp theo đúng thứ tự trong Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Phần cuối mỗi cuốn giới thiệu một số đề tự luyện và có hướng dẫn giải.



260 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 46.000 đồng



240 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 44.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ: TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
187B, Giảng Võ, Hà Nội
• ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (024)35121606 • Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT9M0

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2020

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng