

Mục lục

Chương 1. Lượng giác	2
Chương 2. Tổ hợp	3
Chương 3. Dãy số.....	10
Chương 4. Giới hạn.....	11
Chương 5. Đạo hàm	14
Chương 6. Phép biến hình.....	15
Chương 6. Quan hệ vuông góc.....	15
Chương 7. Ứng dụng đạo hàm	24
Chương 8. Mũ – logarit.....	56
Chương 9. Nguyên hàm – tích phân.....	70
Chương 10. Số phức.....	75
Chương 11. Thể tích khối đa diện.....	78
Chương 12. Nón – trụ - cầu.....	101
Chương 13. Oxyz	110

Chương 1. Lượng giác

Câu 1: Cho $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $\cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x+y) = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{\sin^4 x}{y} + \frac{\cos^4 y}{x}.$$

- A. $\min P = \frac{3}{\pi}$. B. $\min P = \frac{2}{\pi}$. C. $\min P = \frac{2}{3\pi}$. D. $\min P = \frac{5}{\pi}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x+y) = 2 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = \sin(x+y)$. Suy ra: $x+y = \frac{\pi}{2}$

Áp dụng bất: $\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} \geq \frac{(a+b)^2}{m+n}$

Suy ra $P \geq \frac{(\sin^2 x + \sin^2 y)^2}{x+y} = \frac{2}{\pi}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{\pi}{4}$.

Do đó $\min P = \frac{2}{\pi}$.

Câu 2: [TRƯỜNG THPT ĐỒNG HẠY-VĨNH PHÚC. LẦN 1] Với giá trị nào của m để phương trình $m\sin^2 x - 3\sin x \cos x - m - 1$ có đúng 3 nghiệm $x \in \left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$?

- A. $m > -1$. B. $m \geq -1$. C. $m < -1$. D. $m \leq -1$

Hướng dẫn giải

Đáp án C

PT đã cho $\hat{U} \quad m(\sin^2 x - 1) - 3\sin x \cos x - 1 = 0 \hat{U} \quad 3\sin x \cos x + \cos^2 x + 1 = 0$

Dễ thấy $\cos x \neq 0 \Rightarrow PT \Leftrightarrow \tan^2 x + 3\tan x + m + 1 = 0$

Để PT đã cho có ba nghiệm thuộc $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì PT $t^2 + 3t + m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Câu 3: Tìm m để phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$ có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

- A. $\begin{cases} m \leq \frac{47}{64} \\ m \geq \frac{3}{2} \end{cases}$. B. $\frac{49}{64} < m \leq \frac{3}{2}$. C. $\frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$. D. $\frac{47}{64} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình đã cho tương đương $\frac{3 + \cos 4x}{4} + \cos^2 4x = m \Leftrightarrow 4\cos^2 4x + \cos 4x = 4m - 3 \quad (1)$

Đặt $t = \cos 4x$. Phương trình trở thành: $4t^2 + t = 4m - 3, \quad (2)$

Với $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ thì $t \in [-1; 1]$. Vì một giá trị $t \in [-1; 1]$, sẽ tạo ra hai giá trị $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ nên phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $t \in [-1; 1]$ (3)

Xét hàm số $g(t) = 4t^2 + t$ với $t \in [-1; 1]$, $g'(t) = 8t + 1$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{8}$

Lập bảng biến thiên:

t	-1	$-\frac{1}{8}$	1
g'(t)	-	0	+
g(t)	3	$-\frac{1}{16}$	5

Dựa vào bảng biến thiên suy ra (3) xảy ra $\Leftrightarrow -\frac{1}{16} < 4m - 3 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$

Vậy giá trị của m phải tìm là: $\frac{47}{64} < m \leq \frac{3}{2}$.

Chương 2. Tổ hợp

Câu 4: (THPT Chuyên Đại Học Vinh - Nghệ An - 2018) Có bao nhiêu số có 4 chữ số được viết từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sao cho số đó chia hết cho 15 ?

A. 234

B. 243

C. 132

D. 432

Lời giải

Đáp án B

Gọi số cần lập có dạng: $\overline{abcd}$ ($1 \leq a, b, c, d \leq 9$).

• Để $\overline{abcd} \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow \overline{abcd} \equiv 0 \pmod{5}$ và $\overline{abcd} \equiv 0 \pmod{3}$.

+ $\overline{abcd} \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow d = 5$.

+ $\overline{abcd} \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a + b + c + 5d \equiv 0 \pmod{3}$.

• Chọn a có 9 cách, chọn b có 9 cách chọn thì:

+ Nếu $a + b + 5$ chia hết cho 3 thì $c \in \{3; 6; 9\} \Rightarrow c$ có 3 cách chọn.

+ Nếu $a + b + 5$ chia cho 3 dư 1 thì $c \in \{2; 5; 8\} \Rightarrow c$ có 3 cách chọn.

+ Nếu $a + b + 5$ chia cho 3 dư 2 thì $c \in \{1; 4; 7\} \Rightarrow c$ có 3 cách chọn.

Vậy, theo quy tắc nhân ta có: $9.9.3 = 243$ số.

Câu 5: (MEGABOOK-ĐỀ 3). Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 15.

A. 222

B. 240

C. 200

D. 120

Lời giải

Chọn A

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$. Số mà chia hết cho 15 thì phải chia hết cho 3 và 5.

Trường hợp 1. Số cần tìm có dạng $\overline{abcd0}$, để chia hết cho 3 thì a, b, c, d phải thuộc các tập sau $A_1 = \{1, 2, 3, 6\}, A_2 = \{1, 2, 4, 5\}, A_3 = \{1, 3, 5, 6\}, A_4 = \{2, 3, 4, 6\}, A_5 = \{3, 4, 5, 6\}$.

Do đó trong trường hợp này có $5.4! = 120$ số.

Trường hợp 2. Số cần tìm có dạng $\overline{abcd5}$, để chia hết cho 3 thì a, b, c, d, e phải thuộc các tập sau $B_1 = \{0, 1, 2, 4, 5\}, B_2 = \{0, 1, 3, 5, 6\}, B_3 = \{0, 3, 4, 5, 6\}, B_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B_5 = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

Nếu a, b, c, d thuộc B_1, B_2, B_3 , thì có $3.3.3.2 = 54$, số a, b, c, d thuộc B_4, B_5 thì có $2.4! = 48$.

Tổng lại có $120 + 54 + 48 = 222$ số.

Câu 6: Tổng $T = C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + C_{2018}^3 + \dots + C_{2018}^{2018}$ bằng bao nhiêu?

- A. 2^{2018} . B. $2^{2018} + 1$. C. 4^{2018} . D. $2^{2018} - 1$.

Lời giải

Chọn D

♦ Tự luận: Khai triển nhị thức Niu tơn

$$(1+x)^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + C_{2018}^3 x^3 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018}$$

$$\text{Cho } x=1 \text{ ta được } 2^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + C_{2018}^3 + \dots + C_{2018}^{2018} = 1 + T \Rightarrow T = 2^{2018} - 1.$$

Câu 7: (THPT VIỆT ĐỨC) Trong hệ tọa độ Oxy có 8 điểm nằm trên tia Ox và 5 điểm nằm trên tia Oy. Nối một điểm trên tia Ox và một điểm trên tia Oy ta được 40 đoạn thẳng. Hỏi 40 đoạn thẳng này cắt nhau tại bao nhiêu giao điểm nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ xOy (biết rằng không có bất kì 3 đoạn thẳng nào đồng quy tại 1 điểm).

- A. 260. B. 290. C. 280. D. 270.

Lời giải

Chọn C

Số tứ giác có 4 đỉnh là 4 điểm trong 13 điểm đã cho là $C_8^2 \cdot C_5^2 = 280$

Mỗi tứ giác đó có hai đường chéo cắt nhau tại 1 điểm thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy.

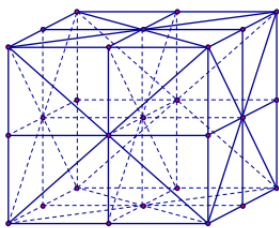
Vậy số giao điểm là 280.

Câu 8: [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Một khối lập phương có độ dài cạnh là $2cm$ được chia thành 8 khối lập phương cạnh $1cm$. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các đỉnh của khối lập phương cạnh $1cm$

- A. 2876. B. 2898. C. 2915. D. 2012

Lời giải

Chọn A



Có tất cả 27 điểm.

Chọn 3 điểm trong 27 có $C_{27}^3 = 2925$

Có tất cả $(8.2 + 6.2 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2) = 49$ bộ ba điểm thẳng hàng.

Vậy có $2925 - 49 = 2876$ tam giác.

Câu 9: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn

$$\frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$$

- A. $n=100$. B. $n=98$. C. $n=99$. D. $n=101$.

Câu 10: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho đa thức

$$p(x) = (1+x)^8 + (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} (1+x)^{12}. \text{ Khai triển và rút gọn ta được đa thức:}$$

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}. \text{ Tìm hệ số } a_8$$

- A. 720. B. 700. C. 715. D. 730.

Lời giải

Đáp án C

Phương pháp: Áp dụng công thức khai triển tổng quát: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Đối với bài toán này ta áp dụng công thức $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot x^k$. Sau đó dựa vào khai triển

bài toán cho $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$ ta tìm được hệ số a_8 (đi theo x^8)

Cách giải:

$$+) (1+x)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot 1^{8-k} \cdot x^k \Rightarrow a_8 = C_8^8$$

$$+) (1+x)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot 1^{9-k} \cdot x^k \Rightarrow a_8 = C_9^8$$

$$+) (1+x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 1^{10-k} \cdot x^k \Rightarrow a_8 = C_{10}^8$$

$$+) (1+x)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 1^{11-k} \cdot x^k \Rightarrow a_8 = C_{11}^8$$

$$+) (1+x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot 1^{12-k} \cdot x^k \Rightarrow a_8 = C_{12}^8$$

Vậy Hệ số cần tìm là: $a_8 = C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^8 + C_{11}^8 + C_{12}^8 = 1 + 9 + 45 + 165 + 495 = 715$.

Câu 11: (THPT Lê Văn Thịnh- Bắc Ninh-Lần 1) Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển

$$(1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} + 2017x^{2018})^{60}$$

- A. $-C_{60}^3$ B. C_{60}^3 C. $8.C_{60}^3$ D. $-8.C_{60}^3$

Lời giải

Đáp án D

$$\text{Ta có } (1 - 2x + 2015x^{2016} - 2016x^{2017} - 2017x^{2018})^{60} = \sum_{k=0}^{60} (1 - 2x)^k (\dots)^{60-k}$$

Số hạng chứa x^3 trong khai triển là hệ số x^3 trong khai triển $(1 - 2x)^{80} \cdot (\dots)^0$

Khi đó số hạng chứa x^3 trong khai triển là: $C_{60}^3 (1)^{60-3} \cdot (2x)^3 = -8.C_{60}^3 x^3$

Câu 12: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho đa thức

$$p(x) = (1+x)^8 + (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} (1+x)^{12}. \text{ Khai triển và rút gọn ta được đa thức:}$$

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}. \text{ Tính tổng các hệ số } a_i, i = 0, 1, 2, \dots, 12$$

- A. 5. B. 7936. C. 0. D. 7920.

Lời giải

Đáp án B

Phương pháp:

Sử dụng công thức tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

Áp dụng khai triển nhị thức Newton $(a + b)^2 = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

Sử dụng tổng $(1+1)^2 = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

Cách giải:

$$\begin{aligned} p(x) &= (1+x)^8 + (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12} \\ &= \frac{(1+x)^8 \left[(1+5)^5 - 1 \right]}{1+x-1} = \frac{(1+x)^{13} - (1+x)^8}{x} = \frac{(1+x)^{13}}{x} - \frac{(1+x)^8}{x} \\ &= \frac{\sum_{m=0}^{13} C_{13}^m x^m}{x} = \frac{\sum_{n=0}^8 C_8^n x^n}{x} = \sum_{m=0}^{13} C_{13}^m x^{m-1} - \sum_{n=0}^8 C_{13}^n x^{n-1} \\ \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{12} &= (C_{13}^1 - C_8^1) + (C_{13}^2 - C_8^2) + \dots + (C_{13}^8 - C_8^8) + C_{13}^9 + \dots + C_{13}^{13} = \sum_{a=1}^{13} C_{13}^a - \sum_{b=1}^8 C_8^b \\ \text{Xét tổng } (1+1)^2 &= \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \Rightarrow \sum_{a=1}^{13} C_{13}^a = 2^8 - C_8^0 = 2^8 - 1 \\ \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{12} &= 2^{13} - 1 - 2^8 + 1 = 7936 \end{aligned}$$

Câu 13: (THPT Chuyên Bắc Ninh - Bắc Ninh - Lần 1 - 2018) Tìm tất cả số tự nhiên n thỏa mãn

$$\frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$$

A. $n = 100$

B. $n = 98$

C. $n = 99$

D. $n = 101$

Lời giải

Đáp án B

$$\text{Ta có } \frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \left(\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)} \right) - \left(\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+2)} \right)$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_0^n + C_1^n x + \dots + C_n^n x^n) dx \Rightarrow \frac{C_0^n}{1} + \frac{C_1^n}{2} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$\int_0^1 x(1+x)^n dx = \int_0^1 x(C_0^n + C_1^n x + \dots + C_n^n x^n) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (1+x)^{n+1} dx - \int_0^1 (1+x)^{n+1} dx = \int_0^1 (C_0^n x + C_1^n x^2 + \dots + C_n^n x^{n+1}) dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2} - \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{C_0^n x^2}{2} + \frac{C_1^n x^3}{3} + \dots + \frac{C_n^n x^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{C_0^n}{2} + \frac{C_1^n}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+2} \right) = \frac{n2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$$

Như vậy

$$\begin{aligned} \frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} &= \left(\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)} \right) - \left(\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+2)} \right) \\ &= \frac{2^{n+1}-1}{n+1} - \frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow n=98 \end{aligned}$$

- Câu 14:** [THPT Phạm Công Bình - Vĩnh Phúc - Lần 1] Chiếc kim của bánh xe trong trò chơi “Chiếc nón kì diệu” có thể dừng lại ở một trong mười vị trí với khả năng như nhau. Xác suất để trong ba lần quay, chiếc kim của bánh xe đó lần lượt dừng lại ở ba vị trí khác nhau là
- A. 0,001 B. 0,72 C. 0,072 D. 0,9

Đáp án B

Quay 3 lần thì số kết quả thu được là 10^3 .

Kim của chiếc nón ở 3 vị trí khác nhau ở 3 lần quay có số kết quả là $10.9.8 = 720$

Xác suất để kim của chiếc nón ở 3 vị trí khác nhau ở 3 lần quay là: $\frac{720}{10^3} = \frac{18}{25} = 0,72$.

- Câu 15:** [THPT PHAN CHU TRINH ĐAKLAK LẦN 2 - 2018] Một nhóm học sinh gồm 6 nam trong đó có Quang và 4 nữ trong đó có Huyền được xếp ngẫu nhiên vào 10 ghế trên một hàng ngang để dự lễ sơ kết năm học. Xác suất để xếp được giữa 2 bạn nữ gần nhau có đúng 2 bạn nam, đồng thời Quang không ngồi cạnh Huyền là:

- A. $\frac{109}{30240}$ B. $\frac{1}{280}$ C. $\frac{1}{5040}$ D. $\frac{109}{60480}$

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu (xếp 10 bạn bất kì): $n(\Omega) = 10!$

Cách sắp xếp giữa 2 bạn nữ gần nhau có đúng 2 bạn nam là: $4!.6!$

Nữ Nam Nam Nữ Nam Nam Nữ Nam Nam Nữ

Có 6 trường hợp hai bạn Nam, Nữ ngồi cạnh nhau.

Giả sử Quang và Huyền ngồi cạnh nhau

Khi đó số cách chọn xếp được giữa 2 bạn nữ gần nhau có đúng 2 bạn nam, đồng thời Quang ngồi cạnh Huyền là $C_6^1.3!.5!$.

Vậy số cách chọn xếp được giữa 2 bạn nữ gần nhau có đúng 2 bạn nam, đồng thời Quang không ngồi cạnh Huyền là $n(A) = 4!.6! - C_6^1.3!.5! = 12960$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{280}$.

- Câu 16:** [THPT CHUYÊN LAM SƠN-THANH HÓA LẦN 2-2018] Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc A, tính xác suất để số tự nhiên được chọn chia hết cho 45.

- A. $\frac{2}{81}$ B. $\frac{53}{2268}$ C. $\frac{1}{36}$ D. $\frac{5}{162}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $n(\Omega) = A_0^8 - A_9^7$.

Gọi A là tập hợp các số a có 8 chữ số khác nhau chia hết cho 45.

Khi đó a chia hết cho 5 và 9 (tổng các chữ số chia hết cho 9 và số hàng đơn vị bằng 0 hoặc 5).

Trường hợp 1: a có hàng đơn vị bằng 0; 7 chữ số còn lại có chữ số 9 và 3 trong 4 bộ số $\{1;8\}$, $\{2;7\}$, $\{3;6\}$, $\{4;5\}$, có $4.7!$ số.

Trường hợp 2: a có hàng đơn vị bằng 5; 7 chữ số còn lại có chữ số 4 và 3 trong 4 bộ số $\{0;9\}$, $\{1;8\}$, $\{2;7\}$, $\{3;6\}$.

* Không có bộ $\{0;9\}$, có $7!$ số.

* Có bộ $\{0;9\}$, có $C_3^2(7!-6!)$ số

$\Rightarrow n(A) = 4.7! + C_3^2(7!-6!)$ số.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4.7! + C_3^2(7!-6!)}{A_{10}^8 - A_9^7} = \frac{53}{2268}.$$

Câu 17: [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Hai người ngang tài ngang sức tranh chức vô địch của một cuộc thi cờ tướng. Người giành chiến thắng là người đầu tiên thắng được năm ván cờ. Tại thời điểm người chơi thứ nhất đã thắng 4 ván và người chơi thứ hai mới thắng 2 ván, tính xác suất để người chơi thứ nhất giành chiến thắng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{7}{8}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết hai người ngang tài ngang sức nên xác suất thắng thua trong một ván đấu là $0,5; 0,5$. Xét tại thời điểm người chơi thứ nhất đã thắng 4 ván và người chơi thứ hai thắng 2 ván. Để người thứ nhất chiến thắng thì người thứ nhất cần thắng 1 ván và người thứ hai thắng không quá hai ván. Có ba khả năng:

TH1: Đánh 1 ván. Người thứ nhất thắng xác suất là $(0,5)$

TH2: Đánh 2 ván. Người thứ nhất thắng ở ván thứ hai xác suất là $(0,5)^2$

TH3: Đánh 3 ván. Người thứ nhất thắng ở ván thứ ba xác suất là $(0,5)^3$

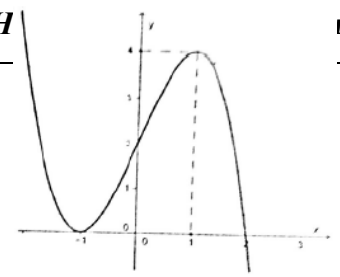
Vậy $P = 0,5 + (0,5)^2 + (0,5)^3 = \frac{7}{8}$.

Câu 18: (THPT Hàn Thuyên-Bắc Ninh-Lần 1) Kết quả $(b; c)$ của việc gieo con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần (trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai) được thay vào phương trình $\frac{x^2 + bx + c}{x+1} = 0(*)$. Xác suất để phương trình $(*)$ vô nghiệm là:

- A. $\frac{17}{36}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{19}{36}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án B



Phương pháp: Xác suất của biến cố A là $\frac{n_A}{n_\Omega}$ trong đó n_A là số

khả năng mà biến cố A có thể xảy ra, n_Ω là tất cả các khả năng có thể xảy ra.

Cách giải: $\frac{x^2 + bx + c}{x+1} = 0(*)$

Để phương trình $(*)$ vô nghiệm thì phương trình $x^2 + bx + c = 0(**)$ có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: PT $(**)$ có 1 nghiệm $x = -1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4c = 0 \\ 1 - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 4c \\ c = b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 = 4b - 4 \Leftrightarrow b^2 - 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow (b; c) = (2; 1)$$

TH2: PT $(**)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4c < 0 \Rightarrow b^2 < 4c \Leftrightarrow b < 2\sqrt{c}$

Vì c là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ 2 nên $c \leq 6 \Rightarrow b \leq 2\sqrt{6} \approx 4,9$.

Mà b là số chấm xuất hiện ở lần gieo đầu nên $b \in \{1; 2; 3; 4\}$

Với $b = 1$ ta có: $c > \frac{1}{4} \Rightarrow c \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow$ có 6 cách chọn c .

Với $b = 2$ ta có: $c > 1 \Rightarrow c \in \{2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow$ có 5 cách chọn c .

Với $b = 3$ ta có: $c > \frac{9}{4} \Rightarrow c \in \{3; 4; 5; 6\} \Rightarrow$ có 4 cách chọn c .

Với $b = 4$ ta có: $c > 4 \Rightarrow c \in \{5; 6\} \Rightarrow$ có 2 cách chọn c .

Do đó có $6 + 5 + 4 + 2 = 17$ cách chọn $(b; c)$ để phương trình $(**)$ vô nghiệm.

Gieo con súc sắc 2 lần nên số phần tử của không gian mẫu $n_\Omega = 6 \cdot 6 = 36$

Vậy xác suất để phương trình $(*)$ vô nghiệm là $\frac{1+17}{36} = \frac{1}{2}$.

Câu 19: (THPT Việt Trì) Kết quả (b, c) của việc gieo con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần, trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai, được thay vào phương trình bậc hai $x^2 + bx + c = 0$. Tính xác suất để phương trình có nghiệm.

A. $\frac{19}{36}$

B. $\frac{1}{18}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{17}{36}$

Lời giải

Chọn A

• Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 36$.

Gọi A là biến cố thỏa yêu cầu bài toán.

Phương trình $x^2 + bx + c = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4c$.

Xét bảng kết quả (L – loại, không thỏa ; N – nhận, thỏa yêu cầu đề bài)

$\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
1	L	N	N	N	N	N
2	L	L	N	N	N	N
3	L	L	L	N	N	N
4	L	L	L	N	N	N
5	L	L	L	L	N	N
6	L	L	L	L	N	N

Dựa vào bảng kết quả trên ta thấy số kết quả thuận lợi cho A là 19.

Vậy xác suất của biến cố A là : $P(A) = \frac{19}{36}$.

Chương 3. Dãy số

Câu 20: [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_{n+1} = q.a_n + 3$ với mọi $n \geq 1$, trong đó q là hằng số, $a \neq 0, q \neq 1$. Biết công thức số hạng tổng quát của dãy số viết được dưới dạng $a_n = \alpha.q^{n-1} + \beta \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$. Tính $\alpha + 2\beta$?

A. 13.

B. 9.

C. 11.

D. 16

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a_{n+1} - k = q(a_n - k) \Leftrightarrow k - kq = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{1-q}$

Đặt $v_n = a_n - k \Rightarrow v_{n+1} = q.v_n = q^2.v_{n-1} = \dots = q^n.v_1$

Khi đó $v_n = q^{n-1}.v_1 = q^{n-1}.(a_1 - k) = q^{n-1}. \left(5 - \frac{3}{1-q} \right)$

Vậy $a_n = v_n + k = q^{n-1}. \left(5 - \frac{3}{1-q} \right) + \frac{3}{1-q} = q^{n-1}. \left(5 - \frac{3}{1-q} \right) + \frac{3}{1-q} = 5q^{n-1} + 3 \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$

Do đó: $\alpha = 5; \beta = 3 \Rightarrow \alpha + 2\beta = 5 + 2.3 = 11$

Cách 2.

Theo giả thiết ta có $a_1 = 5, a_2 = 5q + 3$. Áp dụng công thức tổng quát, ta được

$$\begin{cases} a_1 = \alpha.q^{1-1} + \beta \frac{1-q^{1-1}}{1-q} = \alpha \\ a_2 = \alpha.q^{2-1} + \beta \frac{1-q^{2-1}}{1-q} = \alpha.q + \beta \end{cases}, \text{ suy ra } \begin{cases} 5 = \alpha \\ 5q + 3 = \alpha.q + \beta \end{cases}, \text{ hay } \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha + 2\beta = 5 + 2.3 = 11$.

Câu 21: [THPT Phạm Công Bình - Vĩnh Phúc - Lần 1] Gọi $S_n = \frac{4}{n} + \frac{7}{n} + \frac{10}{n} + \dots + \frac{1+3n}{n}$. Khi đó S_{20}

có giá trị là

A. 34

B. 30,5

C. 325

D. 32,5

Hướng dẫn giải

Đáp án D

$$\text{Có } \frac{4}{n} = \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n}$$

$$\frac{7}{n} = \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{2}{n}$$

$$\frac{10}{n} = \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{3}{n}$$

.....

$$\frac{1+3n}{n} = \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{n}{n}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{n} \cdot n + 3 \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) = 1 + \frac{3}{n} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n = 1 + \frac{3(1+n)}{2}$$

$$\Rightarrow S_{20} = \frac{65}{2} = 32,5$$

Chọn **D**

Câu 22: (THPT LÊ VĂN THỊNH) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_n}, "n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tính u_{2018} .

A. $u_{2018} = 7 + 5\sqrt{2}$

B. $u_{2018} = 2$

C. $u_{2018} = 7 - 5\sqrt{2}$

D. $u_{2018} = 7 + \sqrt{2}$

Câu 23: (MEGABOOK-ĐỀ 3). Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Biết $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{x}{y}$ ($x, y \in \mathbb{N}$), giá trị $x + y$ là:

A. 4

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$a + c = 2b \Leftrightarrow \sin A + \sin C = 2 \sin B \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 4 \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} = 4 \sin \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A-C}{2} = 2 \cos \frac{A+C}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \Leftrightarrow 3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$

Chương 4. Giới hạn

Câu 24: [ME GA BOOK] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{A_n^2} + \frac{1}{A_n^2} + \frac{1}{A_n^2} + \dots + \frac{1}{A_n^2} \right)$

A. 1

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{7}{8}$

D. $\frac{3}{2}$

Lời giải

Đáp án A

Ta có $\frac{1}{A_k^2} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, do đó

$$\frac{1}{A_n^2} + \frac{1}{A_n^2} + \frac{1}{A_n^2} + \dots + \frac{1}{A_n^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{A_n^2} + \frac{1}{A_n^2} + \frac{1}{A_n^2} + \dots + \frac{1}{A_n^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$$

Câu 25: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ 10/2017) Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Xét dãy số (u_n) sao cho

$$u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)}. \text{ Tính } \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n}.$$

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Đáp án D

$$\text{Xét } g(n) = \frac{f(2n-1)}{f(2n)} \Leftrightarrow g(n) = \frac{(4n^2 - 2n + 1)^2 + 1}{(4n^2 + 2n + 1)^2 + 1}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 4n^2 + 1 \\ b = 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \pm 2b = (2n \pm 1)^2 \\ a = b^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(n) = \frac{(a-b)^2 + 1}{(a+b)^2 + 1} = \frac{a^2 - 2ab + b^2 + 1}{a^2 + 2ab + b^2 + 1} = \frac{a^2 - 2ab + a}{a^2 + 2ab + a} = \frac{a - 2b + 1}{a + 2b + 1} = \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \prod_{i=1}^n g(i) = \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{26} \dots \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n^2}{4n^2 + 4n + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 26: (THPT Việt Trì) Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Xét dãy số (u_n) sao cho

$$u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)}. \text{ Tính } \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n}.$$

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$ B. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(n) = [(n^2 + 1) + n]^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 + 2n(n^2 + 1) + n^2 + 1 = (n^2 + 1)[n^2 + 1 + 2n + 1]$$

$$= (n^2 + 1)[(n+1)^2 + 1]$$

$$\text{Do đó: } \frac{f(2n-1)}{f(2n)} = \frac{[(2n-1)^2 + 1][(2n)^2 + 1]}{[(2n)^2 + 1][(2n+1)^2 + 1]} = \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1}$$

$$\text{Suy ra } u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)} = \frac{f(1)}{f(2)} \cdot \frac{f(3)}{f(4)} \cdot \frac{f(5)}{f(6)} \dots \frac{f(2n-1)}{f(2n)}$$

$$= \frac{1^2+1}{3^2+1} \cdot \frac{3^2+1}{5^2+1} \cdot \frac{5^2+1}{7^2+1} \cdots \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1} = \frac{2}{(2n+1)^2+1} = \frac{1}{2n^2+2n+1}$$

$$\Rightarrow n\sqrt{u_n} = n\sqrt{\frac{1}{2n^2+2n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 27: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt[3]{29-2x}}{x-1}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{2}{27}$.

C. $\frac{13}{54}$.

D. $\frac{12}{54}$.

Lời giải

Chọn C

♦ Tự luận:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt[3]{29-2x}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3 + 3 - \sqrt[3]{29-2x}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1} + \frac{3 - \sqrt[3]{29-2x}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} + \frac{27-29+2x}{(x-1)(9+3\sqrt[3]{29-2x}+(\sqrt[3]{29-2x})^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} + \frac{2}{9+3\sqrt[3]{29-2x}+(\sqrt[3]{29-2x})^2} = \frac{13}{54} \end{aligned}$$

Câu 28: (THPT Lam Sơn – Thanh Hóa – Lần 1 – 2018) Cho là đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-20}{x-2} = 10$

. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}$.

A. $T = \frac{12}{25}$.

B. $T = \frac{4}{25}$.

C. $T = \frac{4}{25}$.

D. $T = \frac{6}{25}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Phương pháp giải:

Sử dụng phương pháp tính giới hạn vô định $\frac{\infty}{\infty}$ với biểu thức chứa căn ta làm mất nhân tử của tử và mẫu bằng cách nhân liên hợp, tạo hằng đẳng thức.

Lời giải:

$$\text{Đặt } P = P(x) = \sqrt[3]{6f(x)+5} \Rightarrow P-5 = \frac{P^3-5^3}{P^2+5P+25} = \frac{6[f(x)-20]}{P^2+5P+25}$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-20}{x-2} = 10 \text{ nên } f(x)-20=0 \Rightarrow f(x)=20 \Rightarrow P=5$$

Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6[f(x)-20]}{(x-2)(x-3)(P^2+5P+25)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x)-20}{x-2} \cdot \frac{6}{(x-3)(P^2+5P+25)} \right]$$

$$\text{Suy ra } T = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-20}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{(x-3)(P^2+5P+25)} = 10 \cdot \frac{6}{5.75} = \frac{4}{25}$$

Câu 29: (THTT - Lần 2 - 2018) Xác định giá trị thực k để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x+1} - \sqrt{x+2018}}, & x \neq 1 \\ k, & x = 1 \end{cases} \text{ liên tục tại } x=1.$$

A. $k=1$ B. $k=2\sqrt{2019}$ C. $k=\frac{2017 \cdot \sqrt{2018}}{2}$ D. $k=\frac{20016}{2017} \sqrt{2019}$

Lời giải

Đáp án A

Để $f(x)$ liên tục tại $x=1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x+1} - \sqrt{x+2018}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2016x+1}{\frac{1009}{\sqrt{2018x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+2018}}} = 2\sqrt{2019}$$

Vậy $k=2\sqrt{2019}$.

Chương 5. Đạo hàm

Câu 30: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$ trong đó t tính bằng (s) và S tính bằng (m). Thời gian vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:

A. $t = 6s$. B. $t = 5s$. C. $t = 2s$. D. $t = 3s$.

Lời giải

Chọn D

♦ Tự luận: Theo tính chất vật lý ta có đạo hàm của quãng đường là vận tốc $\rightarrow$ vận tốc của chất điểm là $v = S' = -3t^2 + 18t + 1$

$$\text{Ta có: } -3t^2 + 18t + 1 = -3(t-3)^2 + 28 \leq 28, "t \in \mathbb{R} \Rightarrow v \leq 28, "t$$

Vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng 28 tại $t = 3s$.

♦ Trắc nghiệm:

Câu 31: (ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG ĐỊNH KỲ)

Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm trên trục tung từ đó có thể vẽ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C).

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Lời giải

Đáp án C

Ta có điểm $M(0; a) \in Oy$. Tiếp tuyến Δ qua M có dạng $y = kx + a$

$$\text{Điều kiện tiếp xúc } \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 3 = kx + a \\ 4x^3 - 8x = k \end{cases} \text{ có 3 nghiệm phân biệt}$$

$$\text{Suy ra } x^4 - 4x^2 + 3 = (4x^3 - 8x)x + a \text{ có 3 nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^2 + a - 3 = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt} \Rightarrow a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \text{ (nên có 1 giá trị thỏa)}$$

Chương 6. Phép biến hình

Câu 32: [THPT Phạm Công Bình - Vĩnh Phúc - Lần 1] Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1; -1)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45°

A. $y = 0$

B. $y = -x$

C. $y = x$

D. $x = 0$

Hướng dẫn giải

Đáp án D

$$\text{Ta có } V_{\left(I, \frac{1}{2}\right)} \text{ biến } M(0; 2) \in d \text{ thành } M'(x'; y') \text{ thì } \overline{IM'} = \frac{1}{2} \overline{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$V_{\left(I, \frac{1}{2}\right)}$ biến đường thẳng d thành đường thẳng đi qua $M'\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, có cùng vtpt $(1; 1)$ và có

$$\text{phương trình là } \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$$

Phép quay tâm O góc quay -45° biến điểm $N(x; y)$ thuộc đường thẳng $x + y = 0$ thành điểm

$$N'(x'; y') \in d' \Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ \\ y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases} \quad (*)$$

Thay $(*)$ vào $x + y = 0$ ta được $x' = 0 \Rightarrow (d'): x = 0$

Chương 6. Quan hệ vuông góc

Câu 33: (THPT CHUYÊN LAM SƠN-THANH HÓA LẦN 1 NĂM 2018) Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ). Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức

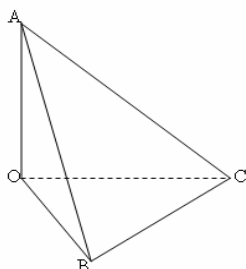
$$M = (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma) \text{ là:}$$

A. 48.

B. Số khác.

C. 125.

D. $48\sqrt{3}$.



Lời giải

Cách 1: Đặt hệ trục tọa độ Oxyz $\Rightarrow$ tọa độ các điểm A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c).

Dùng công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng ta có được kết quả:

$$\sin \alpha = \cos(\vec{n}_{ABC}; \vec{u}_{OA}) = \frac{bc}{\sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}}.$$

Viết kết quả tương tự $\Rightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.

Cách 2: Từ đẳng thức:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Leftrightarrow \frac{OH^2}{OA^2} + \frac{OH^2}{OB^2} + \frac{OH^2}{OC^2} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1.$$

$$\Rightarrow \text{Dạng } M = \left(2 + \frac{1}{X}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{Y}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{Z}\right) \text{ với } X + Y + Z = 1 \Rightarrow \frac{1}{XYZ} \geq 27.$$

$$\text{Biến đổi } M = 8 + 4\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}\right) + 2\left(\frac{1}{XY} + \frac{1}{YZ} + \frac{1}{ZX}\right) + \frac{1}{XYZ}$$

$$M \geq 8 + 4 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{XYZ}} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{(XYZ)^2}} + \frac{1}{XYZ} \geq 8 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 9 + 27 = 125.$$

Dấu "=" xảy ra được nên có $M_{\min} = 125$.

Đáp án C

Câu 34: (THPT Việt Trì) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B.

$AB = BC = a$, $AD = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin góc giữa MN và (SAC).

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

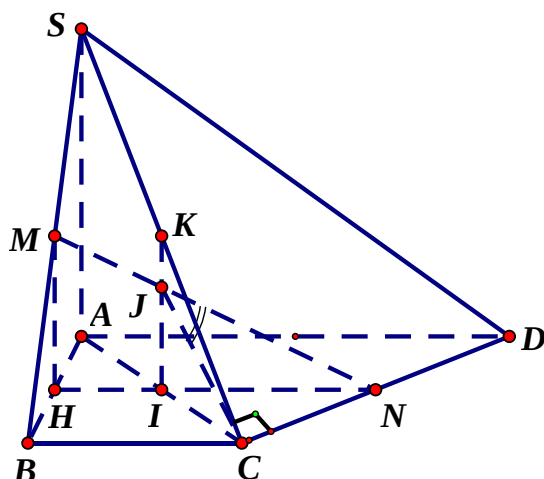
B. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

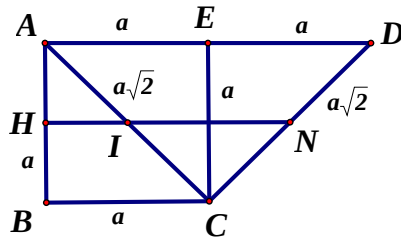
C. $\frac{\sqrt{55}}{10}$

D. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Lời giải

Chọn C





Ta dễ chứng minh được tam giác ACD vuông tại C , từ đó chứng minh được CN vuông góc với mặt phẳng (SAC) hay C là hình chiếu vuông góc của N trên (SAC) . Đường thẳng MN cắt mặt phẳng (SAC) tại J xác định như hình vẽ. Suy ra góc giữa MN và (SAC) là góc $\hat{NJC}$.

IN là đường trung bình trong tam giác ACD suy ra $IN=a$, IH là đường trung bình trong tam giác ABC suy ra $IH=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$. Dựa vào định lý Talet trong tam giác MHN ta được

$$IJ=\frac{2}{3}MH=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}SA=\frac{1}{3}SA=\frac{a}{3}. \text{ Dựa vào tam giác } JIC \text{ vuông tại } I \text{ tính được } JC=\frac{\sqrt{22}}{6}.$$

Ta dễ tính được $CN=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $JN=\frac{a\sqrt{10}}{3}$.

Tam giác NJC vuông tại C nên $\cos\hat{NJC}=\frac{JC}{JN}=\frac{\sqrt{55}}{10}$.

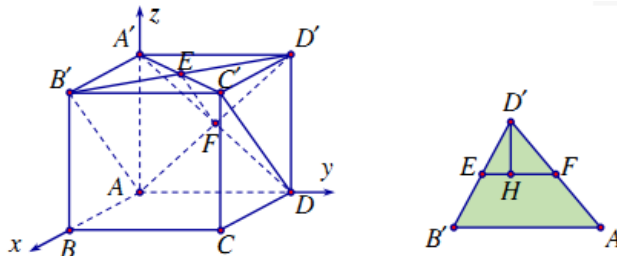
Câu 35: [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=2, AD=3, AA'=4$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α . Tính giá trị gần đúng của góc α ?

A. $42,5^\circ$. B. $38,1^\circ$. C. $53,4^\circ$. D. $61,6^\circ$

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ có giao tuyến là EF như hình vẽ. Từ A' và D' ta kẻ 2 đoạn vuông góc lên giao tuyến EF sẽ là chung một điểm H như hình vẽ. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng cần tìm chính là góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'H$



Tam giác $DE'F$ lần lượt có $D'E=\frac{D'B'}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$, $D'F=\frac{D'A}{2}=\frac{5}{2}$; $EF=\frac{B'A}{2}=\sqrt{5}$

Theo hê rông ta có: $S_{DEF}=\frac{\sqrt{61}}{4}$. Suy ra $D'F=\frac{2S_{DEF}}{EF}=\frac{\sqrt{305}}{10}$

Trong tam giác $D'A'H$ có $\cos\hat{A'HD'}=\frac{HA'^2+HD'^2-A'D'^2}{2HA'\cdot HD'}=-\frac{29}{61}$

Do đó $\hat{A'HD'}\approx 118,4^\circ$ hay $(\vec{A'H}, \vec{D'H})=180^\circ-118,4^\circ=61,6^\circ$

Cách 2: Gắn hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó $A(0;0;0), B(2;0;0), D(0;3;0), C(2;3;0), A'(0;0;4), B'(2;0;4), D'(0;3;4), C'(2;3;4)$

Gọi $\vec{n}_1$ là véc tơ pháp tuyến của $(AB'D')$. Có $\vec{n}_1 = [\overline{AB}; \overline{AD}] = (-12; -8; 6)$

Gọi $\vec{n}_2$ là véc tơ pháp tuyến của $(A'C'D)$. Có $\vec{n}_2 = [\overline{A'C'}; \overline{A'D}] = (-12; 8; 6)$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$

$$\cos \alpha = \frac{\left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right|}{1} = \frac{29}{61}. \text{ Vậy giá trị gần đúng của góc } \alpha \text{ là } 61,6^\circ.$$

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

A. 60° .

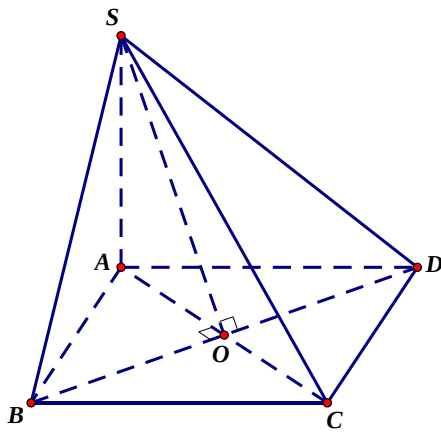
B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Ta có: $BD \perp AC$ (do $ABCD$ là hình vuông)

$BD \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$)

Suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$ (do $SO \subset (SAC)$)

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SO \subset (SBD), SO \perp BD \\ AC \subset (ABCD), AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = (SO, AC) = SOA.$$

Tam giác SAO vuông tại A nên $\tan SOA = \frac{SA}{AO} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3}$. $SOA = 60^\circ$. Chọn **A**.

Câu 37: [THPT Thuận Thành – Bắc Ninh – 2018] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BC, C'D'$ và DD' . Tính khoảng cách từ A đến $mp(MNP)$.

A. $\frac{15}{22}a$.

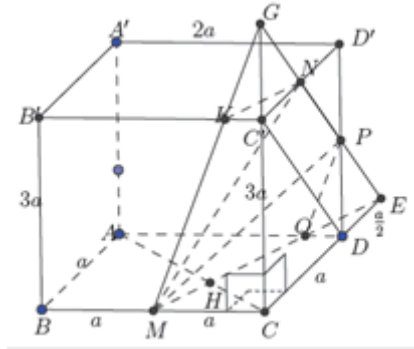
B. $\frac{9}{11}a$.

C. $\frac{3}{4}a$.

D. $\frac{15}{11}a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E là giao điểm của NP và CD . Gọi G là giao điểm của NP và CC' . Gọi K là giao điểm của MG và $B'C'$. Gọi Q là giao điểm của ME và AD . Khi đó mặt phẳng (MNP) chính là mặt phẳng (MEG) . Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ C, A đến mặt phẳng (MEG) . Do AC cắt (MEG)

tại điểm H (như hình vẽ) nên $\frac{d_1}{d_2} = \frac{HC}{HA}$. Do tứ diện $CMEG$ là tứ diện vuông tại C nên

$$\frac{1}{d_1^2} = \frac{1}{CM^2} + \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CG^2}$$

Ta có $\frac{GC'}{GC} = \frac{C'N}{CE} = \frac{1}{3}$

Suy ra $GC = \frac{3}{2}CC' = \frac{9a}{2}$

Như vậy: $\frac{1}{d_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{9a^2} + \frac{4}{81a^2}$

Từ đó $d_1^2 = \frac{81a^2}{12} \Rightarrow d_1 = \frac{9}{11}a$. Ta có $\frac{QD}{MC} = \frac{ED}{EC} = \frac{1}{3} \Rightarrow QD = \frac{a}{3}$

Câu 38: [TRƯỜNG THPT ĐỒNG HẬU-VĨNH PHÚC. LẦN 1] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh $AB = a$ đường cao SO vuông góc với mặt đáy và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB là:

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{7}$.

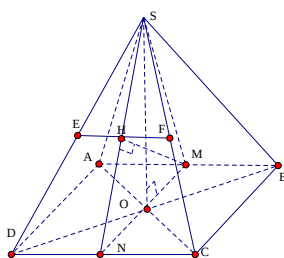
B. $\frac{a\sqrt{5}}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án D



Vì $AB \parallel (SCD)$ khoảng cách d giữa AB bằng khoảng cách giữa AB và (SCD)

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD khi đó $AB \perp (SMN)$

Kẻ đường cao MH của $\triangle SMN$ $\Rightarrow MH$ là khoảng cách giữa AB và SC

$$\text{Ta có: } SN = \sqrt{SO^2 + ON^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \quad \& \quad d = MH = \frac{SO \cdot MN}{SN} = \frac{a \cdot a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 39: (THPT Chuyên Đại Học Vinh - Nghệ An - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

A. $a\sqrt{3}$

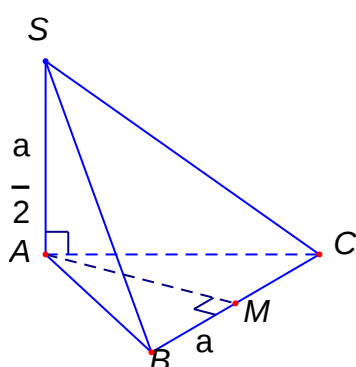
B. a

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Đáp án D



$$\bullet \quad d(SA; BC) = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 40: [THPT Phạm Công Bình - Vĩnh Phúc - Lần 1] Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết thể tích của khối lăng trụ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

A. $\frac{4a}{3}$

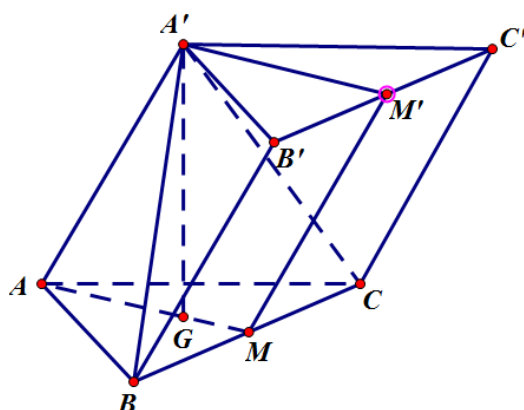
B. $\frac{2a}{3}$

C. $\frac{3a}{4}$

D. $\frac{3a}{2}$

Hướng dẫn giải

Đáp án D



Ta có $d(AA', BC) = d(AA', (BB'C'C)) = d(A', (BB'C'C))$

Gọi M và M' lần lượt là trung điểm BC và B'C', G là trọng tâm của tam giác ABC

Theo giả thiết ta có $\left. \begin{array}{l} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (AA'G) \Rightarrow BC \perp AA'$, nên tứ giác BB'C'C là hình

chữ nhật có cạnh BC = a

$$\text{Vì } V_{A'ABC} = \frac{1}{3} A'G \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} V_{LT} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12} \Rightarrow A'G = a \Rightarrow AA' = \sqrt{AG^2 + A'G^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{BB'C'C} = \frac{2a^2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Có } V_{A'BB'C'C} = \frac{2}{3} V_{LT} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3} d(A', (BB'C'C)) \cdot S_{BB'C'C} \Rightarrow d(A', (BB'C'C)) = \frac{3a}{2}$$

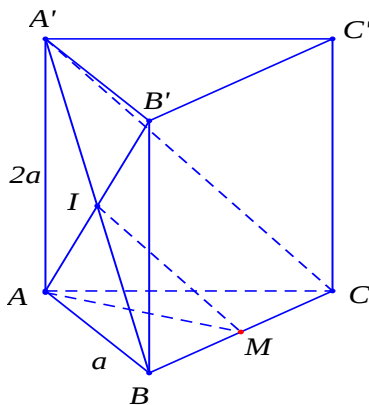
Chọn D

Câu 41: (THPT Chuyên Đại Học Vinh - Nghệ An - 2018) Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, AA' = 2a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và A'C.

- A. $a\sqrt{5}$ B. $\frac{2\sqrt{17}}{17}a$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$

Lời giải

Đáp án B



• Gọi I, M lần lượt là trung điểm của A'B, BC. $\Rightarrow IM \parallel A'C \Rightarrow A'C \parallel (AB'M)$

$$\Rightarrow d(AB', A'C) = d(A'C, (AB'M)) = d(C, (AB'M)) = \frac{3V_{B'AMC}}{S_{AB'M}}$$

$$\bullet V_{B'AMC} = \frac{1}{3} BB' \cdot S_{\triangle AMC} = \frac{1}{6} BB' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$$

$$\bullet B'M = \sqrt{BM^2 + BB'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 4a^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{array} \right. \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp B'M$$

$$\bullet S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot B'M = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{17}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{51}}{8}$$

$$\bullet d(AB', A'C) = \frac{3V_{B'AMC}}{S_{\triangle AB'M}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}}{\frac{a^2 \sqrt{51}}{8}} = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$$

Câu 42: [THPT Thuận Thành – Bắc Ninh – 2018] Cho tứ diện ABCD có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 2. Gọi S là diện tích tam giác ABC, h là khoảng cách từ D đến $mp(ABC)$. Với giá trị nào của x thì biểu thức $V = \frac{1}{3}S.h$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = 1$.

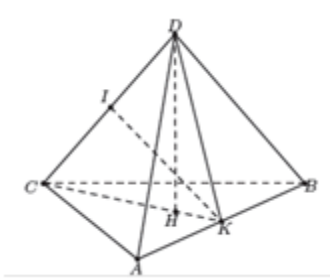
B. $x = \sqrt{6}$.

C. $x = 2\sqrt{6}$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi K là trung điểm của AB , do $\triangle CAB$ và $\triangle DAB$ là hai tam giác cân chung cạnh đáy AB nên

$$\begin{cases} CK \perp AB \\ DK \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDK)$$

Kẻ $DH \perp CK$ ta có $DH \perp (ABC)$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}CK.AB \right) DH = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}CK.DH \right) AB$$

$$\text{Suy ra } V = \frac{1}{3}AB.S_{\triangle KDC}$$

Để thấy $\triangle CAB = \triangle DAB \Rightarrow CK = DK$ hay $\triangle KDC$ cân tại K . Gọi I là trung điểm CD , suy ra

$$KI \perp CD \text{ và } KI = \sqrt{KC^2 - CI^2} = \sqrt{AC^2 - AK^2 - CI^2} = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{12 - x^2}$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle KDC} = \frac{1}{2}KI.CD = \frac{1}{2}\sqrt{12 - x^2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{6}x\sqrt{12 - x^2} \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{x^2 + 12 - x^2}{2} = 1. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$x = \sqrt{12 - x^2} \text{ hay } x = \sqrt{6}.$$

Câu 43: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình, lần 1 – 2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Gọi $M; N$ lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và DM là:

A. $a.\sqrt{\frac{15}{62}}$.

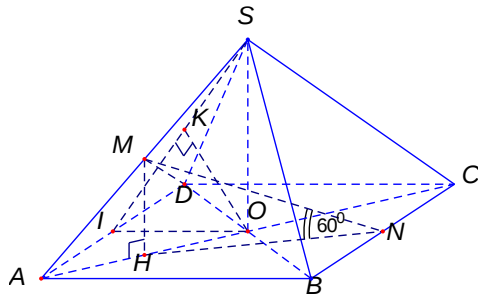
B. $a.\sqrt{\frac{30}{31}}$.

C. $a.\sqrt{\frac{15}{68}}$.

D. $a.\sqrt{\frac{15}{17}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$.

Gọi H là trung điểm $OA \Rightarrow MH \parallel SO$ mà $SO \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp (ABCD) \Rightarrow MH$ là hình chiếu vuông góc của MN lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó, $(\vec{MN}; (ABCD)) = \angle MNH = 60^\circ$.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} BC \parallel AD \\ AD \subset (ADM) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \parallel (ADM)$$

$$\Rightarrow d(BC; DM) = d(BC; (ADM)) = d(BC; (SAD)) = d(N \in BC; (SAD)) = 2d(O; (SAD)).$$

Gọi I là trung điểm AD , ta có $(SAD) \perp (SOI)$ theo giao tuyến SI . Kẻ

$$OK \perp SI \Rightarrow OK = d(O; (SAD))$$

$$\text{Tính được } NH = \frac{a\sqrt{10}}{4}; MH = \frac{a\sqrt{30}}{4} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{62a}{15} \Rightarrow OK = d(O; (SAD)) = \frac{\sqrt{930}}{62} \Rightarrow d(N; (SAD)) = 2OK = \sqrt{\frac{30}{31}}.$$

Câu 44: (THPT Việt Trì) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 4$ cm.

Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M thuộc SC sao cho

$CM = 2MS$. Khoảng cách giữa hai đường AC và BM là?

A. $\frac{4\sqrt{21}}{21}$ cm

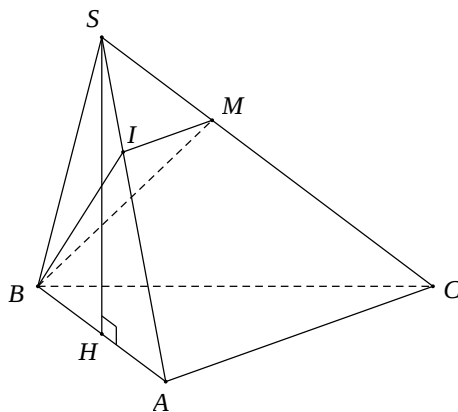
B. $\frac{8\sqrt{21}}{21}$ cm

C. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ cm

D. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$ cm

Lời giải

Chọn D



Gọi I là điểm thuộc SA sao cho $\frac{SI}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow IM \parallel AC$.

$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABC) \\ \text{Gọi } H \text{ là trung điểm của } AB. \text{ Ta có } (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp AB \\ AC \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow IM \perp (SAB) \Rightarrow IM \perp BI \Rightarrow \Delta BIM \text{ vuông tại } I.$$

$$\frac{V_{SBAM}}{V_{SBAC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{SBAM} = \frac{1}{3} V_{SBAC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} SH \cdot S_{VABC} = \frac{1}{9} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{4\sqrt{3}}{9} AC.$$

$$\frac{V_{ABIM}}{V_{ABSM}} = \frac{AI}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{ABIM} = \frac{2}{3} V_{ABSM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9} AC = \frac{8\sqrt{3}}{27} AC.$$

$$BI^2 = AB^2 + AI^2 - 2AB \cdot AI \cdot \cos 60^\circ = 4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{8}{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{112}{9} \Rightarrow BI = \frac{4\sqrt{7}}{3}.$$

$$S_{\Delta BIM} = \frac{1}{2} BI \cdot IM = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{1}{3} AC = \frac{2\sqrt{7}}{9} AC.$$

$$V_{ABIM} = \frac{1}{3} S_{V_{BIM}} \cdot d(A, (BIM)) \Rightarrow d(A, (BIM)) = \frac{3V_{ABIM}}{S_{V_{BIM}}} = \frac{3 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{27} AC}{\frac{2\sqrt{7}}{9} AC} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$

Chương 7. Ứng dụng đạo hàm

Câu 45: [Trường THPT Hải Hậu – Lần 1] Bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a; b]$. Hỏi tổng $a + b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 5

B. -2

C. 4

D. 3

Hướng dẫn giải

Đáp án là A

Tập xác định: $D = [-2, 4]$

Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6x^2 + 6x + 6}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập xác định.

Ta nhận thấy phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{3}$ có một nghiệm $x=1$.

Suy ra trong đoạn $[1, 4]$ thì bất phương trình đã cho luôn đúng (vì hàm số đồng biến).

Do đó tổng $a+b=5$.

⇒ Chọn đáp án **A**.

Câu 46: [THPT Phạm Công Bình - Vĩnh Phúc - Lần 1] Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương

trình $\frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 4\cos^2 x + 1} \leq m+1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

A. $m \geq \frac{3\sqrt{5}}{4}$ **B.** $m \geq \frac{3\sqrt{5}+9}{4}$ **C.** $m \geq \frac{\sqrt{65}-9}{2}$ **D.** $m \geq \frac{\sqrt{65}-9}{4}$

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Ta có :

$$y = \frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 4\cos^2 x + 1} = \frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 2\cos 2x + 3}.$$

Và $\sin 2x + 2\cos 2x + 3 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$. xét phương trình $y = \frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 2\cos 2x + 3} \Leftrightarrow$

$$(\sin 2x + 2\cos 2x + 3)y = 3\sin 2x + \cos 2x \Leftrightarrow (y-3)\sin 2x + (2y-1)\cos 2x = -3y$$

Phương trình trên có nghiệm nên $(y-3)^2 + (2y-1)^2 \geq (-3y)^2 \Leftrightarrow 5y^2 - 10y + 10 \geq 9y^2$

$$\Leftrightarrow -4y^2 - 10y + 10 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-5-\sqrt{65}}{4} \leq y \leq \frac{-5+\sqrt{65}}{4}$$

Suy ra giá trị lớn nhất của y là $\frac{-5+\sqrt{65}}{4}$

Phương trình $\frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 2\cos 2x + 3} \leq m+1$ nghiệm đúng với mọi số thực x khi

$$\frac{-5+\sqrt{65}}{4} \leq m+1 \Leftrightarrow m \geq \frac{-9+\sqrt{65}}{4}$$

Câu 47: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ Lần 05) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số

$$y = 8^{\cot x} + (m-3) \cdot 2^{\cot x} + 3m - 2 \text{ đồng biến trên } \left[\frac{\pi}{4}; \pi \right).$$

A. $-9 \leq m < 3$. **B.** $m \leq 3$. **C.** $m \leq -9$. **D.** $m < -9$.

Lời giải

Đáp án C

Đặt $t = 2^{\cot x}$

thì $t = t(x) = 2^{\cot x}$ nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{4}; \pi \right)$ và tập giá trị của t là $(0; 2]$.

Bài toán trở thành tìm m để hàm số $f(t) = t^3 + (m-3)t + 3m - 2, t \in (0; 2]$, nghịch biến trên nửa

$$\text{khoảng } (0; 2]. \text{ Ta có } f'(t) = 3t^2 + m - 3 \leq 0 \forall t \in (0; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{3-m}{3}} \leq 0 \\ \sqrt{\frac{3-m}{3}} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -9.$$

Vậy với $m \leq -9$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\left[\frac{\pi}{4}; \pi \right)$.

Câu 48: [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Hàm số

$y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$ (tham số m, n) đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(m^2 + n^2) - m - n$ bằng

- A. -16. B. 4. C. $-\frac{1}{16}$. D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3(x+m)^2 + 3(x+n)^2 - 3x^2 = 3[x^2 + 2(m+n)x + m^2 + n^2]$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow mn \leq 0$

TH1: $mn = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$

Do vai trò của m, n là như nhau nên ta chỉ cần xét trường hợp $m = 0$

$\Rightarrow P = 4n^2 - n = \left(2n - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16} \quad (1)$

TH2: $mn < 0 \Leftrightarrow m > 0; n < 0$ (Do vai trò của m, n như nhau).

Ta có $P = \left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + 4n^2 + (-n) \geq -\frac{1}{16} \quad (2)$

Từ (1), (2) ta có $P_{\min} = -\frac{1}{16}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{8}; n = 0$ hoặc $m = 0; n = \frac{1}{8}$.

Câu 49: Cho hàm số $y = \frac{mx-8}{x-2m}$, hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$ khi:

- A. $-2 \leq m \leq 2$. B. $-2 \leq m \leq \frac{3}{2}$. C. $-2 < m \leq \frac{3}{2}$. D. $-2 < m < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{-2m^2+8}{x-2m}$. Để hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ x \neq 2m \quad \forall x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2+8 > 0 \\ m \neq \frac{x}{2} \quad \forall x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 50: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ 10/2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

$y = \sin^3 x - 3\cos^2 x - m\sin x - 1$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- A. $m > -3$. B. $m \leq 0$. C. $m \leq -3$. D. $m > 0$

Lời giải

Đáp án B

Đặt $\sin x = t, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 6t - m$

Để hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$ cần: $f'(t) \geq 0, \forall t \in [0;1]$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 6t - m \geq 0 \quad \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow 3t^2 + 6t \geq m \quad \forall t \in [0;1]$$

Xét hàm số $g(t) = 3t^2 + 6t$; $g'(t) = 6t + 6$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(t)$	-	0 +			
$g(t)$	$+\infty$	-3	0	9	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy với $m \leq 0$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$, hàm số

$f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 51: (THPT C NGHĨA HÙNG-NAM ĐỊNH LẦN 1) Tìm tất cả các tham số m để hàm số $y = 3(m-1)x - (2m+1)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A. $\frac{2}{5} \leq m \leq 4$

B. $m \leq \frac{2}{5}$

C. $m \leq 4$

D. $\frac{2}{5} < m < 4$

Lời giải

Đáp án B

Ta có $y' = 3(m-1) + (2m+1)\sin x$ để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \leq 0$ với mọi x xét BPT

$$3(m-1) + (2m+1)\sin x \leq 0 \quad \text{Nếu } m = \frac{-1}{2} \text{ BPT luôn đúng. Với } m > \frac{-1}{2} \text{ BPT } \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{3(1-m)}{2m+1}$$

$$\text{để hàm số luôn nghịch biến với mọi } x \text{ thì } \frac{3(1-m)}{2m+1} \geq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < m \leq \frac{2}{5}. \text{ Với } m < \frac{-1}{2} \text{ BPT}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \geq \frac{3(1-m)}{2m+1} \text{ để hàm số luôn nghịch biến với mọi } x \text{ thì } \frac{3(1-m)}{2m+1} \leq -1 \Rightarrow m < -\frac{1}{2}$$

Kết hợp hai trường hợp ta có $m \leq \frac{2}{5}$

Câu 52: (THPT B Hải Hậu - Nam Định - Lần 1 - 2018) Bất phương trình

$\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a; b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 5.

B. -2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = [-2, 4]$

Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6x^2 + 6x + 6}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập xác định.

Ta nhận thấy phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x} = 2\sqrt{3}$ có một nghiệm $x=1$.

Suy ra trong đoạn $[1,4]$ thì bất phương trình đã cho luôn đúng (vì hàm số đồng biến).

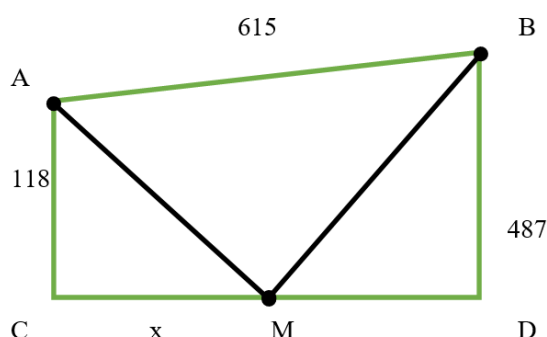
Do đó tổng $a+b=5$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án **A**.

Câu 53: (THPT-Đồng Đa-Hà Nội lần 1) Cho hai vị trí A, B cách nhau, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 478km. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là
A. 569,5m. **B.** 671, 4 m. **C.** 779,8m. **D.** 741, 2 m.

Hướng dẫn giải

Đáp án C



Cách 1: Giải bằng hàm số

Đặt $CM = x$ ($x > 0$)

Dễ tính ra $CD = \sqrt{615^2 - (478 - 118)^2} = 492$

Từ đề bài ta có: $f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 478^2}$

Quãng đường ngắn nhất người đó có thể đi

$\Leftrightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $(0; 492)$

Ta có: $f'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 118^2}} + \frac{2(492 - x)}{2\sqrt{(492 - x)^2 + 478^2}}$

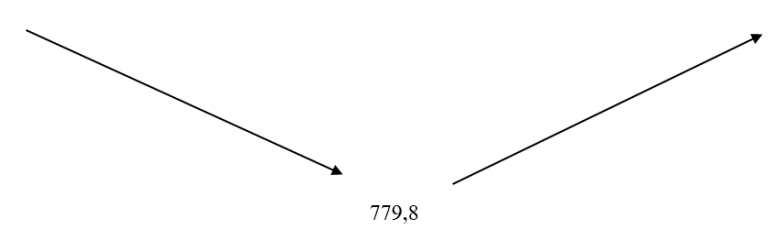
$\square f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2} - x\sqrt{(492 - x)^2 + 478^2} = 0$

$\Leftrightarrow (492 - x)^2(x^2 + 118^2) - x^2((492 - x)^2 + 478^2) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}$

Ta có bảng biến thiên

x	0	0	492
y'	+	0	-
y			

Vậy quãng đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là: 779,8

Cách 2: Giải bằng hình học

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua D

Dễ thấy $AM + MB = AM + MB'$

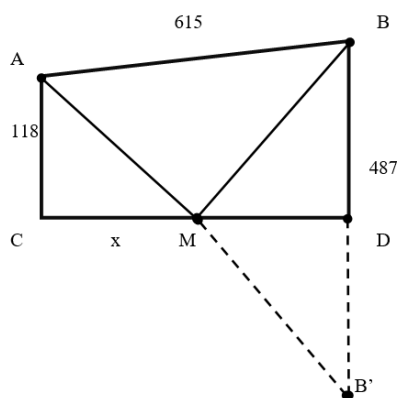
□ $AM + MB$ ngắn nhất

$\Leftrightarrow AM + MB'$ ngắn nhất

Dễ thấy theo bất đẳng thức tam giác: $AM + MB' \geq AB'$

□ $AM + MB'$ ngắn nhất $\Leftrightarrow AM + MB' = AB'$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi A, M, B' thẳng hàng



Câu 54: (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 1) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và ABDC là hình thoi, trong đó $D(0; -3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$.

B. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

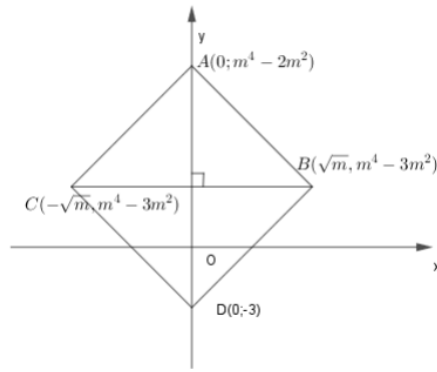
C. $m \in (2; 3)$.

D. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$ Để đồ thị có ba điểm cực trị thì phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0$ phải có 3 nghiệm phân biệt.



$$4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Khi đó điều kiện cần là $m > 0$. Ta có ba nghiệm là $x = 0, x = \sqrt{m}, x = -\sqrt{m}$

Với $x = 0$ thì $y = m^4 - 2m^2$

Với $x = \pm\sqrt{m}$ thì $y = m^4 - 3m^2$

Do A thuộc trục tung nên $A(0; m^4 - 2m^2)$ Giả sử điểm B nằm bên phải của hệ trục tọa độ, khi đó $B(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2), C(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$

Ta kiểm tra được $AD \perp BC$. Do đó để ABDC là hình thoi thì trước hết ta cần $\overline{AB} = \overline{CD}$. Ta có

$$\overline{AB} = (\sqrt{m}; (m^4 - 3m^2) - (m^4 - 2m^2)) = (\sqrt{m}; -m^2)$$

$$\overline{CD} = (\sqrt{m}; -3 - (m^4 - 3m^2)) = (\sqrt{m}; -m^4 + 3m^2 - 3)$$

Do đó

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow (\sqrt{m}; -m^2) = (\sqrt{m}; -m^4 + 3m^2 - 3) \Leftrightarrow -m^2 = -m^4 + 3m^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow -m^4 + 4m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Do điều kiện để có ba điểm cực trị là $m > 0$ nên ta chỉ có $m = 1$ hoặc $m = \sqrt{3}$

Với $m = 1$ thì $A(0; -1), B(1; -2), C(-1; -2)$. Ta có $\overline{AB} = (1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$. Tương tự ta có

$BD = CD = CA = \sqrt{2}$. Như vậy ABDC là hình thoi. Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m = 1 \notin \left(\frac{9}{5}; 2\right), \left(-1; \frac{1}{2}\right), (2; 3)$ nên các đáp án A, B, C đều sai.

Với $m = \sqrt{3}$ Trong trường hợp này $B(\sqrt[4]{3}; 0), C(-\sqrt[4]{3}; 0), A(0; 3)$. Ta kiểm tra được

$AB = BD = DC = CA = \sqrt{9 + \sqrt{3}}$. Do đó ABDC cũng là hình thoi và $m = \sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Nhận xét. Đối với bài toán thi trắc nghiệm đòi hỏi cần tiết kiệm thời gian thì chỉ cần xét trường hợp $m = 1$ thì chúng ta đã có thể kết luận được đáp án cần chọn là D mà không cần xét thêm trường hợp $m = \sqrt{3}$.

- Câu 55: (TRƯỜNG THPT C PHỦ LÝ - HÀ NAM)** Biết rằng đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân. Tính giá trị của biểu thức: $P = m^2 + 2m + 1$.
- A. $P = 1$ B. $P = 5$ C. $P = 0$ D. $P = 2$.

Lời giải

Đáp án B

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases} \text{ với } m > 0$$

Các điểm cực trị là $A(0; 2)$; $B(\sqrt{m}; 2 - m^2)$; $C(-\sqrt{m}; 2 - m^2)$

Tam giác ABC luôn cân tại A, tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $BC^2 = 2AB^2$

$$\Rightarrow 2(m + m^4) = 4m \Leftrightarrow m^4 = m \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vì $m > 0 \Rightarrow m = 1$

Vậy $P = 4 \Rightarrow$ **Đáp án C**

Câu 56: (ĐỀ THI CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH KSCL HK1 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

$f'(x) = x^2(x-1)(x-4)^2$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 2

Lời giải

Đáp án A

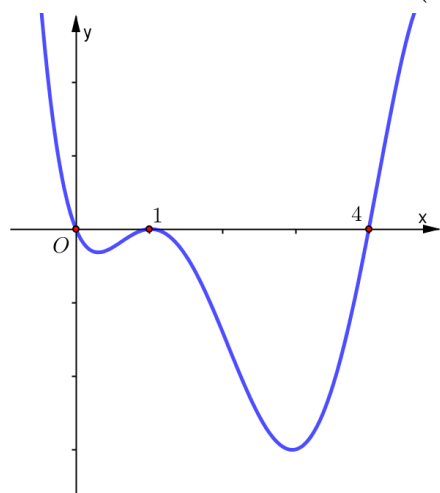
$$\text{Ta có: } g(x) = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = (x^2)' \cdot f'(x^2) = 2x \cdot f'(x^2) \quad (1)$$

$$\text{Mà } f'(x) = x^2(x-1)(x-4)^2 \Rightarrow f'(x^2) = x^4(x^2-1)(x^2-4)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $g'(x) = 2x^5(x^2-1)(x^2-4)^2 \rightarrow$ Bảng biến thiên (tự vẽ)

Dựa vào BBT, suy ra hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị $x = 0, x = \pm 1$.

Câu 57: (MEGABOOK-ĐỀ 3). Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm như hình vẽ. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x^3)$ là:



A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 f'(x^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \sqrt[3]{4} \end{cases}.$$

$$\text{Dựa vào đồ thị đạo hàm ta thấy } f'(x^3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > 4 \\ x^3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt[3]{4} \\ x < 0 \end{cases}.$$

Do đó khi vẽ bảng biến thiên của $y = f(x^3)$ chỉ có 2 điểm $(x=0, x=\sqrt[3]{4})$ làm đạo hàm của nó đổi dấu nên có 2 điểm cực trị.

Câu 58: [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Đồ thị hàm số

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $A(1; -7), B(2; -8)$. Tính $y(-1)$?

- A. $y(-1) = 7$. B. $y(-1) = 11$. C. $y(-1) = -11$. D. $y(-1) = -35$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\text{Theo bài cho ta có: } \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ a + b + c + d = -7 \\ 8a + 4b + 2c + d = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 7a + 3b + c = -1 \\ d = -7 - a - b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 12 \\ d = -12 \end{cases}$$

Suy ra $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 12$. Do đó $y(-1) = -35$.

Câu 59: [TRƯỜNG THPT ĐỒNG HẬU-VĨNH PHÚC. LẦN 1] Cho hàm số

$f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

- A. $\frac{5}{4} < m < 2$. B. $\frac{5}{4} \leq m \leq 2$. C. $-\frac{5}{4} < m < 2$. D. $-2 < m < \frac{5}{4}$

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Hàm số $f(|x|)$ có năm điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x)$ có hai cực trị có giá trị trái dấu

$$y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m$$

$$D' = (2m-1)^2 - 3(2-m) = 4m^2 - m - 5 > 0 \quad \begin{matrix} m < -1 \\ \text{hoặc} \\ m > \frac{5}{4} \end{matrix}$$

Dựa trên điều kiện của D' ta đã có thể chọn đáp án.

Câu 60: [THPT PHAN CHU TRINH ĐAKLAK LẦN 2 - 2018] Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

- A. 44 B. 27 C. 26 D. 16

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$m-5$	m	$m-32$	$+\infty$

Xét hàm số $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{neá } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{neá } f(x) < 0 \end{cases}$

Nên từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5

điểm cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} m-32 < 0 \\ m-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq m < 32$.

Do đó có 27 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 61: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

A. $m = 3$

B. $m = 1 \vee m = 3$

C. $m = -1$

D. $m = 1$

Lời giải

Chọn D

Phương pháp:

Điểm $x = x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số bậc ba $y = f(x)$ nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

Cách giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 4mx + m^2 \rightarrow y'' = 6x - 4m$

Để $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số bậc ba với hệ số x^3 dương thì:

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1; m = 3 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Chú ý khi giải:

Nhiều HS sẽ nhầm lẫn điều kiện để điểm x_0 là điểm cực tiểu là $f''(x_0) > 0$ dẫn đến chọn đáp án $m = 3$ là sai.

Câu 62: (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 1) Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 - 3ax + 4$. Để hàm số

đạt cực trị tại $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{x_2^2 + 2ax_1 + 9a}{a^2} = 2$ thì a thuộc khoảng nào?

A. $a \in \left(-3; -\frac{5}{2}\right)$.

B. $a \in \left(-5; -\frac{7}{2}\right)$.

C. $a \in (-2; -1)$.

D. $a \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2ax - 3a$. Để phương trình đã cho có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì ta cần phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2ax - 3a = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' = a^2 - (-3a) = a^2 + 3a > 0 \Leftrightarrow a(a+3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < -3 \end{cases}$

Khi đó áp dụng định lý Vi-et ta nhận được $x_1 + x_2 = 2a$ (2). Chú ý x_1 là nghiệm của (1) và sử dụng (2) nên

$$x_1^2 - 2ax_1 - 3a = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2ax_2 + 9a = (x_1^2 - 2ax_1 - 3a) + 2a(x_1 + x_2) + 12a = 2a(x_1 + x_2) + 12a = 4a^2 + 12a$$

Tương tự ta có $x_2^2 + 2ax_1 + 9a = 4a^2 + 12a$

Từ đó

$$\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{a^2}{x_2^2 + 2ax_1 + 9a} = 2 \Leftrightarrow \frac{4a^2 + 12a}{a^2} + \frac{a^2}{4a^2 + 12a} = 2 \Leftrightarrow \frac{4a + 12}{a} + \frac{a}{4a + 12} = 2$$

$$\Leftrightarrow (4a + 12)^2 + a^2 - 2a(4a + 12) = 0 \Leftrightarrow [(4a + 12) - a]^2 = 0 \Leftrightarrow a = -4 \in \left(-5; \frac{-7}{2}\right)$$

Câu 63: (THPT C NGHĨA HƯNG-NAM ĐỊNH LẦN 1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2 lần bán kính đường tròn nội tiếp?

- A. $m = 1$ B. $m = \sqrt[3]{3}$ C. $m = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ D. $m = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

Lời giải

Đáp án B

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$ để tồn tại ba điểm cực trị thì $m > 0$ khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; m^4 + 2m), B(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m), C(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{m^4 + m}, BC = 2\sqrt{m} \text{ gọi } M \text{ là trung điểm}$$

$$BC \Rightarrow MB = \sqrt{m} \Rightarrow AM = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \sqrt{m^4 + m - m} = m^2$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} m^2 \cdot 2\sqrt{m} = m^2 \sqrt{m}$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} r = \frac{S}{P} = \frac{m^2 \sqrt{m}}{\sqrt{m^4 + m} + \sqrt{m}} = \frac{m^2}{\sqrt{m^3 + 1} + 1} = \frac{\sqrt{m^3 + 1} - 1}{m} \\ R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S} = \frac{(m^4 + m)2\sqrt{m}}{4m^2 \sqrt{m}} = \frac{1}{2} \frac{m^3 + 1}{m} \end{cases} \text{ theo giả thiết } R = 2r$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{(m^3 + 1)}{m} = 2 \frac{(\sqrt{m^3 + 1} - 1)}{m} \Leftrightarrow (m^3 + 1) = 4\sqrt{m^3 + 1} - 4 \Leftrightarrow (\sqrt{m^3 + 1} - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{m^3 + 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow m^3 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$$

Câu 64: (ĐỀ THI CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH KSCL HK1 2018) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0, c > 2017$ và $a + b + c < 2017$. Số cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2017|$ là:

- A. 1. B. 5. C. 3. D. 7

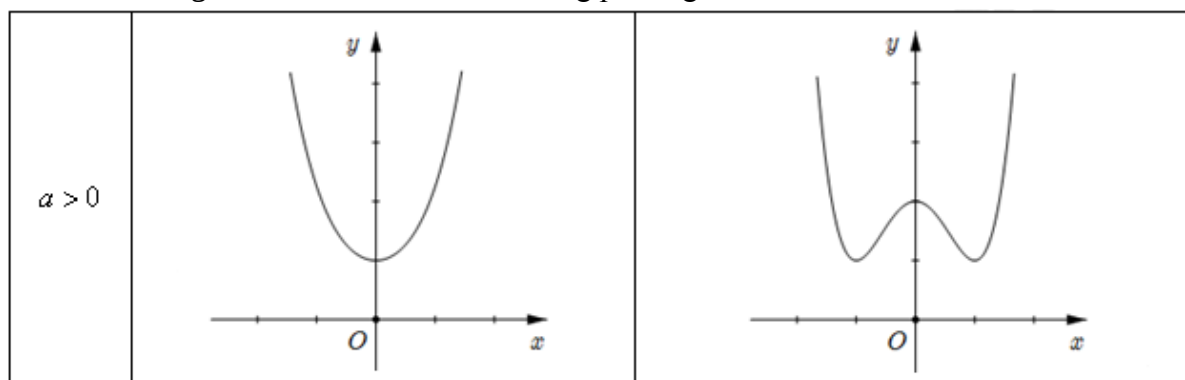
Lời giải

Đáp án D

Ta có: $y = |f(x) - 2017| = \sqrt{(f(x) - 2017)^2} \Rightarrow y' = \frac{2(f(x) - 2017) \cdot f'(x)}{2\sqrt{(f(x) - 2017)^2}}$

Xét $f(x) = ax^4 + bx^2 + c (a > 0)$ ta có: $\begin{cases} f(1) = a + b + c < 2017 \\ f(0) = c > 2017 \end{cases} \Rightarrow f(1) < f(0)$

Dựa vào 2 dạng của đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương khi $a > 0$

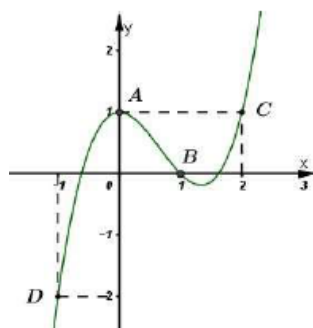


Suy ra hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị và PT: $f(x) - 2017$ có 4 nghiệm phân biệt

Như vậy PT $y' = \frac{2(f(x) - 2017) \cdot f'(x)}{2\sqrt{(f(x) - 2017)^2}} = 0$ có 7 nghiệm phân biệt do đó hàm số có 7 cực trị.

Câu 65: (THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho hàm số $y = f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình

vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$, có $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1; \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x-1)^2 (*)$

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy: $f'(0) = 1 = (0-1)^2$ nên $x = 0$ là một nghiệm của $g'(x)$.

$f'(1) = 0 = (1-1)^2 \Rightarrow x = 1$ là một nghiệm của $g'(x)$.

$f'(2) = 1 = (2-1)^2 \Rightarrow x = 2$ là một nghiệm của $g'(x)$.

Vậy phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = (x-1)^2$ trên cùng mặt phẳng tọa độ với $y = f'(x)$ ta thấy:

Trong khoảng $(0;1)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = (x-1)^2$ nên $g'(x) < 0, \forall x \in (0;1)$

Trong khoảng $(1;2)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = (x-1)^2$ nên $g'(x) < 0, \forall x \in (1;2)$.

Vậy $x=1$ là điểm cực đại của hàm số $y = g(x)$.

Câu 66: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình, lần 1 – 2018) Cho hàm số

$y = (m+1)x^4 - (m-1)x^2 + 1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu là:

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4(m+1)x^3 - 2(m-1)x = 2x[(m+1)x^2 - (m-1)]$

Để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì $\begin{cases} m+1 < 0 \\ \frac{m-1}{m+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$

Câu 67: (THPT Việt Trì) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3ax + 4$ với a là tham số. Biết a_0 là giá trị của tham số a để hàm số đã cho đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{a^2}{x_2^2 + 2ax_1 + 9a} = 2. \text{ Mệnh đề nào dưới đây đúng?}$$

- A. $a_0 \in (-10; -7)$ B. $a_0 \in (7; 10)$ C. $a_0 \in (-7; -3)$ D. $a_0 \in (1; 7)$

Lời giải

Chọn C

• Ta có $y' = x^2 - 2ax - 3a$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - 2ax - 3a = 0$ (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow a^2 + 3a > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$ (1).

Khi đó hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*).

Ta có $x_1^2 - 2ax_1 - 3a = 0 \Rightarrow x_1^2 = 2ax_1 + 3a$; tương tự $x_2^2 = 2ax_2 + 3a$.

$$\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{a^2}{x_2^2 + 2ax_1 + 9a} = 2 \Leftrightarrow \frac{2ax_1 + 3a + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{a^2}{2ax_2 + 3a + 2ax_1 + 9a} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a(x_1 + x_2) + 12a}{a^2} + \frac{a^2}{2a(x_1 + x_2) + 12a} = 2 \Leftrightarrow \frac{4a^2 + 12a}{a^2} + \frac{a^2}{4a^2 + 12a} = 2$$

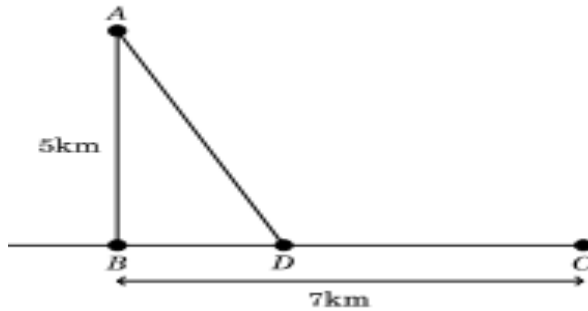
$$\Leftrightarrow \frac{4a + 12}{a} + \frac{a}{4a + 12} = 2 \Leftrightarrow (4a + 12)^2 + a^2 = 2a(4a + 12) \Leftrightarrow 9a^2 + 72a + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -4 \text{ (thỏa mãn điều kiện (1)).}$$

Vậy $a_0 = -4$

Câu 68: (THPT QUẾ VÕ SỐ 2) Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của một tỉnh miền trung muốn đến xã C để tiếp tế lương thực và thuốc men, phải đi theo con đường từ A đến B và từ B đến C (như hình vẽ)

Tuy nhiên, do nước ngập con đường từ A đến B nên đoàn cứu trợ không thể đến C bằng xe, nhưng đoàn cứu trợ có thể chèo thuyền từ A đến D với vận tốc 4km/h, rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h. Biết A cách B một khoảng 5km, B cách C một khoảng 7km. Hỏi vị trí D cách A bao xa để đoàn cứu trợ đi đến C nhanh nhất?



- A. $AD = 2\sqrt{5}\text{km}$. B. $AD = 3\sqrt{5}\text{km}$. C. $AD = 5\sqrt{2}\text{km}$. D. $AD = 5\sqrt{3}\text{km}$

Lời giải

Chọn B

Gọi $AD = x$ ($5 \leq x \leq \sqrt{74}$). Khi đó thì $BD = \sqrt{x^2 - 25} \Rightarrow CD = 7 - \sqrt{x^2 - 25}$.

Tổng thời gian đi từ A đến C là $f(x) = \frac{AD}{4} + \frac{CD}{6} = \frac{x}{4} + \frac{7 - \sqrt{x^2 - 25}}{6}$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x)$ này trên $[5; \sqrt{74}]$.

Có

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{x}{6\sqrt{x^2 - 25}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 25} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9(x^2 - 25) = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{5} \\ x = -3\sqrt{5} \end{cases}$$

Ta có $f(5) = \frac{29}{12}$; $f(3\sqrt{5}) = \frac{7}{6} + \frac{5}{12}\sqrt{5}$; $f(\sqrt{74}) = \frac{\sqrt{74}}{4}$

$\Rightarrow \min_{x \in [5; \sqrt{74}]} f(x) = \frac{7}{6} + \frac{5}{12}\sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 3\sqrt{5}$.

Câu 69: (THPT Chuyên Đại Học Vinh - Nghệ An - 2018) Cho x, y thỏa mãn $\sqrt{2x+3} + \sqrt{y+3} = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{x+2} + \sqrt{y+9}$

- A. $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{21}$ B. $\sqrt{6} + \sqrt{\frac{17}{2}}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

Lời giải

Đáp án D

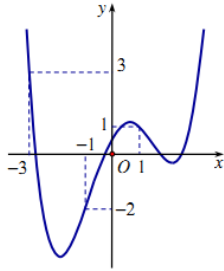
• Ta có: $P = \sqrt{x+2} + \sqrt{y+9} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2x+3})^2 + 1}{2}} + \sqrt{(\sqrt{y+3})^2 + 6}$

$$= \sqrt{\left(\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 + 1\right)\left(\frac{4}{10} + \frac{1}{10}\right)} + \sqrt{\left(\left(\sqrt{y+3}\right)^2 + 6\right)\left(\frac{4}{10} + \frac{6}{10}\right)}$$

• Áp dụng

$$\begin{aligned} \text{BCS: } P &\geq \frac{2}{\sqrt{10}}\sqrt{2x+3} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}}\sqrt{y+3} + \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} \\ &\geq \frac{2}{\sqrt{10}}(\sqrt{2x+3} + \sqrt{y+3}) + \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 70: [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$. B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.
C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$. D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

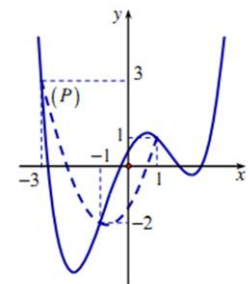
Căn cứ vào đồ thị $y = f'(x)$ ta có

$$\begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 1 \\ f'(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(-1) = 0 \\ g'(1) = 0 \\ g'(-3) = 0 \end{cases}$$

Ngoài ra, vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng

hệ trục tọa độ như hình vẽ bên (đường màu đỏ), ta thấy (P) đi

qua các điểm $(-3; 3), (-1; -2), (1; 1)$ với đỉnh $I\left(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16}\right)$



Rõ ràng

• Trên khoảng $(-1; 1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$

• Trên khoảng $(-3; -1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) < 0 \quad \forall x \in (-3; -1)$

Từ những nhận định trên, ta có bảng biến thiên của hàm $y = g(x)$ trên $[-3; 1]$ như sau:

x	-3	-1	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

Vậy $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 71: (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 1) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực)

thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2 < m \leq 4$.

B. $0 < m \leq 2$.

C. $m \leq 0$.

D. $m > 4$.

Lời giải

Chọn D

Với $m=1$ thì $y=1$ do đó $m=1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m > 1$ khi đó ta có $y = \frac{x+m}{x+1} = 1 + \frac{m-1}{x+1}$. Do

$$x \in [1;2] \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{1+2} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{m-1}{3} \leq \frac{m-1}{x+1} \leq \frac{m-1}{2}.$$

Vì vậy

$$[\max_{[1;2]} y = 1 + \frac{m-1}{2}, \min_{[1;2]} y = 1 + \frac{m-1}{3}].$$

Kéo theo

$$\max_{[1;2]} y + \min_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{m-1}{2}\right) + \left(1 + \frac{m-1}{3}\right) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{5(m-1)}{6} = \frac{16}{3} - 2 \Leftrightarrow m = 5 > 4$$

Nếu $m < 1$ lý luận tương tự ta cũng có $\max_{[1;2]} y = 1 + \frac{m-1}{3}, \min_{[1;2]} y = 1 + \frac{m-1}{2}$. Trong trường hợp này không tồn tại giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 72: (THPT CHUYÊN LAM SƠN-THANH HÓA LẦN 1 NĂM 2018) Xét hàm số

$f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a-b$.

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

$f(-1) = |1 - a + b|$; $f(3) = |9 + 3a + b|$; $f(1) = |1 + a + b|$. Xét 4 số $f(1); f(1); f(3); f(-1)$ có tổng $T = |-1 - a - b| + |-1 - a - b| + |9 + 3a + b| + |1 - a + b| \geq 8(*) \Rightarrow$ có một trong 4 số không bé hơn 2 $\Rightarrow M \geq 2$.

- Nếu $M = 2$ thì điều kiện cần là mỗi số $f(1); f(1); f(3); f(-1)$ không lớn hơn $M = 2 \Rightarrow$ tổng $T \leq 8$.

Kết hợp với $(*) \Rightarrow$ dấu "=" ở $(*)$ phải xảy ra, đồng thời cả 4 số $f(1); f(1); f(3); f(-1)$ đều bằng 2

$$\Rightarrow -1 - a - b = 9 + 3a + b = 1 - a + b = \pm 2 \Rightarrow a = -2; b = -1.$$

- Ngược lại khi $a = -2; b = -1$, kiểm tra cụ thể $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ thỏa mãn $M = 2 \Rightarrow a - b = -1$.

Đáp án C

Câu 73: [TRƯỜNG THPT YÊN DŨNG 3] Cho các số thực x, y thỏa mãn

$$x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}).$$

Giá trị lớn nhất của $x + y$

A. 7

B. 1

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Sử dụng BĐT buhinhacopski ta có $(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})^2 \leq (1+1)(x-2+y+3) = 2(x+y)+2$.

Tức là ta có $(x+y+1)^2 \leq 4(2(x+y)+2)$. Đặt $t = x+y$. Chú ý rằng $t \geq -1$.

Ta có $(t+1)^2 \leq 8t+8 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 7$. Vậy $\max t = 7$ xảy ra khi

$$\begin{cases} x-2=y+3 \\ x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}.$$

Câu 74: (THPT SƠN TÂY) Cho các số thực dương x, y . Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $P = \frac{4xy^2}{\left(x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right)^3}$

A. $\max P=1$.

B. $\max P=\frac{1}{10}$.

C. $\max P=\frac{1}{8}$.

D. $\max P=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$P = \frac{4xy^2}{\left(x + \sqrt{x^2 + 4y^2}\right)^3} = \frac{4\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)^3}. \text{ Đặt } \sqrt{1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2} = t, t \geq 1$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 = t^2 - 1$$

Ta được hàm:

$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{(1+t)^3} = \frac{t-1}{(1+t)^2}, t \geq 1, f'(t) = \frac{-t^2 + 2t + 3}{(1+t)^4}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(L) \\ t = 3 \end{cases}$$

t	1	3	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{1}{8}$	0

Vậy $\max P = \max_{[1; +\infty)} f(t) = \frac{1}{8}$.

Câu 75: (THPT C NGHĨA HƯNG-NAM ĐỊNH Lần 1) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$$2(x^2 + y^2) + xy = (x+y)(xy+2). \text{ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức}$$

$$P = 4\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

A. $-\frac{25}{4}$

B. 5

C. -13

D. $-\frac{23}{4}$

Lời giải

Đáp án D

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(2 + xy)$

$$\Leftrightarrow 2(x + y)^2 - (2 + xy)(x + y) - 3xy = 0 \quad (*)$$

Đặt $\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases} (u, v > 0)$ ta đc PT bậc II: $2u^2 - (v + 2)u - 3 = 0$ giải ra ta được

$$u = \frac{v + 2 + \sqrt{v^2 + 28v + 4}}{4}$$

$$\text{Ta có } P = 4\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) = 4\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^3 - 9\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 12\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 18,$$

Đặt $t = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right), (t \geq 2) \Rightarrow P = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18; P' = 6(2t^2 - 3t + 2) \geq 0$ với

$$\forall t \geq 2 \Rightarrow \min P = P_{(t_0)}$$

trong đó $t_0 = \min_t = \min\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$ với x, y thỏa mãn điều kiện (*).

Ta có:

$$t = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = \frac{(x + y)^2}{xy} - 2 = \frac{u^2}{v} - 2 = \frac{(v + 2 + \sqrt{v^2 + 28v + 4})^2}{16v} - 2 =$$

$$\frac{1}{16} \left(\sqrt{v} + \frac{2}{\sqrt{v}} + \sqrt{v + \frac{4}{v} + 28} \right)^2 - 2 \geq \frac{1}{16} (2\sqrt{2} + \sqrt{32})^2 - 2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } \min P = P_{\left(\frac{5}{2}\right)} = 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 9 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 12 \cdot \frac{5}{2} + 18 = -\frac{23}{4}$$

Câu 76: [TRƯỜNG THPT ĐỒNG HẬU-VĨNH PHÚC. LẦN 1] Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 33,61cm.

B. 26,43cm.

C. 40,62cm.

D. 30,54cm.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Gọi độ dài các sợi dây uốn thành hình vuông và hình tròn lần lượt là x, y & $x + y = 60$ và x, y chính là chu vi của các hình trên.

Diện tích hình vuông là $S_1 = \frac{x^2}{16}$; Diện tích hình tròn là $S_2 = \frac{y^2}{4p}$

$$\text{Tổng diện tích hai hình } S = S_1 + S_2 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4p}$$

$$\text{Đ } S.(16 + 4p) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4p} (16 + 4p)^3 (x + y)^2 = 3600 \text{ Đ } S^3 \frac{900}{4 + p}$$

$$\text{Đạt được khi } \frac{x}{16} = \frac{y}{4p} = \frac{x + y}{16 + 4p} = \frac{60}{16 + 4p} = \frac{15}{4 + p} \text{ Đ } x = \frac{15.16}{4 + p} = 33,61.$$

- Câu 77:** [TRƯỜNG THPT ĐỒNG HẠ-VĨNH PHÚC. LẦN 1] Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là $500,000 \text{ đồng}/m^2$. Hãy xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là?
- A. 65 triệu đồng. B. 75 triệu đồng. C. 85 triệu đồng. D. 45 triệu đồng

Hướng dẫn giải

Đáp án B

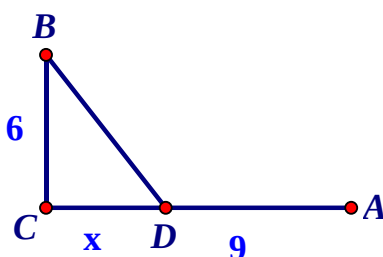
Chi phí thấp nhất khi diện tích xây dựng S là thấp nhất. Gọi độ dài hai kích thước đáy là $a, 2a$ độ dài cạnh bên là b thì diện tích xây dựng là

M
Vậy chi phí thấp nhất là: $150.0,5 = 75$ triệu đồng.

- Câu 78:** [THPT ĐỘI CÁN – VĨNH PHÚC 2018 - LẦN 1] Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km . Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km . Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB . Để số tiền chi phí thấp nhất mà công ty phải thì khoảng cách từ A đến D là bao nhiêu km , biết rằng chi phí để hoàn thành mỗi km đường ống trên bờ là 100 triệu đồng và dưới nước là 260 triệu đồng.
- A. 8 km . B. 5 km . C. $7,5 \text{ km}$. D. $6,5 \text{ km}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $CD = x, (0 \leq x \leq 9)$.

$$BD = \sqrt{x^2 + 36}, AC = 9 - x.$$

Chi phí xây dựng đường ống là: $T = 100(9 - x) + 260\sqrt{x^2 + 36}$ (triệu đồng)

$$T' = -100 + \frac{260x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$T(0) = 2460; T(9) = 780\sqrt{13}; T\left(\frac{5}{2}\right) = 2340. \text{ Suy ra khoảng cách từ } A \text{ đến } D \text{ là } 6,5 \text{ km}$$

- Câu 79:** (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 1) Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km . Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km . Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB . Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp mỗi km đường ống trên bờ là $100.000.000$ đồng và dưới nước là $260.000.000$ đồng.

A. 7 km .

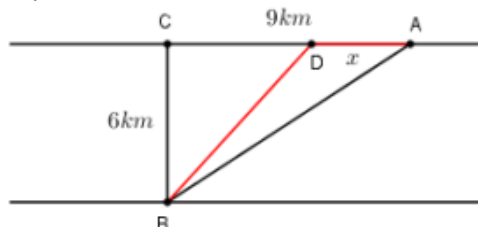
B. 6 km .

C. 7.5 km .

D. 6.5 km .

Lời giải

Chọn D



Ta đặt $x = AD$. Khi đó ta có $CD = 9 - x$ (km). Do $\triangle ABC$ vuông tại C nên áp dụng định lý Py-ta-go ta nhận được $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 6^2 + (9 - x)^2 = x^2 - 18x + 117 \Rightarrow BD = \sqrt{x^2 - 18x + 117}$

Chi phí lắp đặt là

$$100.000.000x + 260.000.000\sqrt{x^2 - 18x + 117} = 20.000.000(5x + 13\sqrt{x^2 - 18x + 117})$$

Để chi phí là thấp nhất thì ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm

$$f(x) = 5x + 13\sqrt{x^2 - 18x + 117}, 0 < x < 9$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 5 + \frac{13(x-9)}{\sqrt{x^2 - 18x + 117}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 + \frac{13(x-9)}{\sqrt{x^2 - 18x + 117}} = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2 - 18x + 117} = 13(x-9)$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } &\Leftrightarrow \begin{cases} 9-x > 0 \\ 5^2(x^2 - 18x + 117) = 13^2(x-9)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 9 \\ 144x^2 - 2592x + 10764 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6,5 < 9 \\ x = 11,5 > 9 \end{cases} \end{aligned}$$

Như vậy giá trị $x = 11,5$ bị loại. Ta kiểm tra được $f'(x) > 0$ trên $(6,5; 9)$ và $f'(x) < 0$ trên $(0; 6,5)$ do đó $f(x) \geq f(6,5), \forall x \in (0; 9)$. Như vậy hàm $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 6,5$. Khi đó chi phí lắp đặt sẽ nhỏ nhất. Do đó khoảng cách AD tìm được khi chi phí thấp nhất là 6,5km.

Câu 80: (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 1) Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$. Biết đáy hồ là một

hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100.000 đồng / m^2 . Tìm kích thước của hồ để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là

A. 15 triệu đồng. **B. 11 triệu đồng.** **C. 13 triệu đồng.** **D. 17 triệu đồng.**

Lời giải

Chọn A

Gọi h là chiều cao của bể chứa. Đáy hồ có chiều rộng là x và chiều dài là $2x$.

$$\text{Theo giả thiết ta có } V = \frac{500}{3} = h \cdot x \cdot (2x) = 2x^2 h \Rightarrow h = \frac{250}{3x^2} \quad (1)$$

Do bể chứa không nắp nên chi phí thuê nhân công chính là chi phí thuê nhân công để xây dựng mặt đáy với các mặt xung quanh.

$$\text{Diện tích mặt đáy là } x \cdot (2x) = 2x^2 (\text{m}^2)$$

$$\text{Có 4 mặt xung quanh với tổng diện tích là } h \cdot x + h(2x) + h \cdot x + h(2x) = 6xh$$

Do đó tổng diện tích mặt xung quanh với mặt đáy là $S = 2x^2 + 6xh(2)$. Để chi phí thuê nhân công là thấp nhất thì ta cần tìm cực trị của hàm $S(x)$ Thay (1) vào (2) ta nhận được

$$S = 2x^2 + 6x \frac{250}{3x^2} = 2x^2 + \frac{500}{x}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số $\left(2x^2; \frac{250}{x}; \frac{250}{x}\right)$ ta nhận được

$$S(x) = 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \geq 3\sqrt{2x^2 \cdot \frac{250}{x} \cdot \frac{250}{x}} = 3\sqrt{2 \cdot 150 \cdot 250} = 150$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2x^2 = \frac{250}{x} \Leftrightarrow x = 5$. Khi đó chi phí thuê nhân công là $150 \times 100.000 = 15.000.000$ (đồng).

Câu 81: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng $8 m^3$, thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là $100.000 / m^2$ và giá tôn làm thành xung quanh thùng là $50.000 / m^2$. Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

A. 3 m.

B. 1,5 m.

C. 2 m.

D. 1 m.

Lời giải

Đáp án C

Phương pháp: Lập hàm số chi phí theo một ẩn sau đó tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đó.

Cách giải: Gọi a là chiều dài cạnh đáy hình vuông của hình hộp chữ nhật và b là chiều cao

của hình hộp chữ nhật ta có $a^2b = 8 (a, b > 0) \Rightarrow ab = \frac{8}{a}$

Diện tích đáy hình hộp là a^2 và diện tích xung quanh là $4ab$ nên chi phí để làm thùng tôn là $100a^2 + 50 \cdot 4ab = 100a^2 + 200ab = 100a^2 = 100 \cdot \frac{8}{a} = 100a^2 + \frac{1600}{a} = 100\left(a^2 + \frac{16}{a}\right)$ (nghìn đồng)

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a^2 + \frac{16}{a} = a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a} \geq 3\sqrt{a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a}} = 3 \cdot 4 = 12$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a^2 + \frac{8}{a} \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy chi phí nhỏ nhất bằng 1200000 đồng khi và chỉ khi cạnh đáy hình hộp bằng 2m.

Câu 82: (THPT Lam Sơn – Thanh Hóa – Lần 1 – 2018) Cho hàm số $y = \frac{12 + \sqrt{4x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có đồ thị

(C_m) . Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $S = [8; 9)$

B. $S = \left[4; \frac{9}{2}\right)$

C. $S = \left(4; \frac{9}{2}\right)$

D. $S = (0; 9]$

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Phương pháp: Hàm số có hai tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $MS = 0$ có hai nghiệm phân biệt không trùng với nghiệm của tử số và thỏa mãn ĐKXD.

Cách giải:

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 6x + 2m > 0 \end{cases}$$

Ta có $12 + \sqrt{4x - x^2} \neq 0 \quad \forall x$ nên để (C_m) có hai tiệm cận đứng thì phương trình

$$\sqrt{x^2 - 6x + 2m} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2m = 0 (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt thuộc } [0; 4].$$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' = 9 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{2}$

Gọi 2 nghiệm phân biệt của $(*)$ là $x_1 < x_2$ ta có $0 \leq x_1 < x_2 \leq 4$. Theo định lý Vi-et ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases} x_1 x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ (x_1 - 4)(x_2 - 4) \geq 0 \\ (x_1 - 4) + (x_2 - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16 \geq 0 \\ (x_1 + x_2) - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 0 \\ 6 \geq 0 \\ 2m - 24 + 16 \geq 0 \\ 6 - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 2m - 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4$$

Kết hợp nghiệm ta có $4 \leq m \leq \frac{9}{2}$

Câu 83: Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang

A. $m < 0$.

B. $m \neq 0$.

C. $m > 0$.

D. Không có giá trị nào của m .

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow \infty} y = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}. \text{ Để } \lim_{x \rightarrow \infty} y \text{ xác định } \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{m}} \text{ xác định hay } m > 0.$$

Câu 84: [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Tiếp tuyến của đồ thị hàm

số $y = \frac{4x-3}{2x+1}$ cùng với 2 tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng:

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm nằm trên đồ thị hàm số, $x_0 \neq -\frac{1}{2}$

$$y' = \frac{10}{(2x+1)^2}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại M: } y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = \frac{10}{(2x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{4x_0-3}{2x_0+1}$$

Tiệm cận đứng: $x = -\frac{1}{2}$, Tiệm cận ngang: $y = 2$

Gọi A là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng

$$\Rightarrow x_A = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_A = \frac{10}{(2x_0+1)^2} \left(-\frac{1}{2} - x_0 \right) + \frac{4x_0-3}{2x_0+1}. \text{ Vậy } A \left(-\frac{1}{2}; \frac{4x_0-3}{2x_0+1} \right)$$

Gọi B là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận ngang

$$\Rightarrow y_B = 2 \Rightarrow 2 = \frac{10}{(2x_0+1)^2} (x_B - x_0) + \frac{4x_0-3}{2x_0+1} \Rightarrow x_B = 2x_0 + \frac{1}{2}. \text{ Vậy } B \left(\frac{4x_0+1}{2}; 2 \right)$$

Giao điểm 2 tiệm cận là $I \left(-\frac{1}{2}; 2 \right)$

$$\text{Ta có } \overline{IA} = \left(0; -\frac{10}{2x_0+1} \right) \Rightarrow IA = \left| \frac{10}{2x_0+1} \right|$$

$$\overline{IB} = (2x_0+1; 0) \Rightarrow IB = |2x_0+1|$$

$$\text{Tam giác IAB vuông tại I nên } S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} \left| \frac{10}{2x_0+1} \right| \cdot |2x_0+1| = 5.$$

Câu 85: (THPT HOA LƯ' A) Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) của hàm số

$y = \frac{x+2}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1; -3).$

B. $M(3; 5).$

C. $M(0; -1).$

D. $M(4; 3).$

Lời giải

Chọn D

$$y = \frac{x+2}{x-2}$$

Tiệm cận đứng: $x = 2$

Tiệm cận ngang $y = 1$

$$M(x_0; \frac{x_0+2}{x_0-2}) \text{ với } x_0 > 0, x_0 \neq 2$$

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là

$$d = |x_0 - 2| + \left| \frac{x_0+2}{x_0-2} - 1 \right| = |x_0 - 2| + \frac{4}{|x_0 - 2|} \geq 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra } \Leftrightarrow |x_0 - 2| = \frac{4}{|x_0 - 2|} \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 2 \\ x_0 - 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4(\text{TM}) \\ x_0 = 0(L) \end{cases}$$

Vậy $M(4; 3).$

Câu 86: [THPT Phạm Công Bình - Vĩnh Phúc - Lần 1] Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm

tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

A. $M(2;2)$

B. $M(4;3)$

C. $M(0;-1)$

D. $M(1;-3)$

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Gọi $M\left(a; \frac{a+2}{a-2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số

$$d(M;TCD) = |a-2|$$

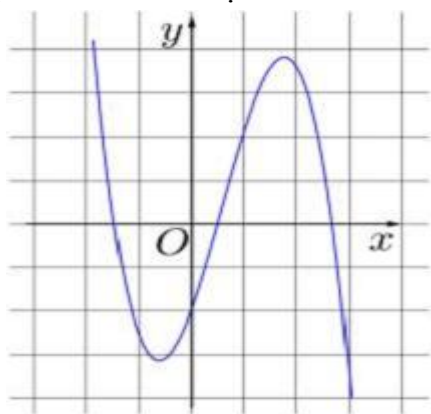
$$d(M;TCN) = \left| \frac{4}{a-2} \right|$$

$$\text{Tổng khoảng cách} = |a-2| + \left| \frac{4}{a-2} \right| \geq 2\sqrt{|a-2| \cdot \left| \frac{4}{a-2} \right|} = 4$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } |a-2| = \left| \frac{4}{a-2} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=0 \end{cases} \text{ do hoành độ dương nên } a=4$$

Vậy $M(4;3)$

Câu 87: [THPT ĐỘI CÁN – VĨNH PHÚC 2018 - LẦN 1] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?



A. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào hình dạng đồ thị ta suy ra đây là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số của x^3 âm $\Rightarrow a < 0$

Dựa vào hình vẽ đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $y = d < 0$

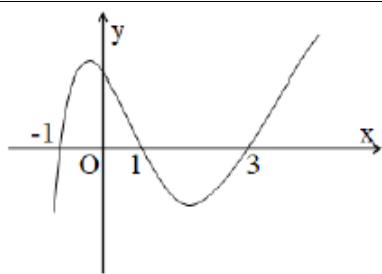
$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Hàm số có hai điểm cực trị thỏa

$$x_{cd} \cdot x_{ct} < 0 \Rightarrow \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c > 0$$

$$x_I = \frac{-b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$$

Câu 88: (THPT Lê Văn Thịnh- Bắc Ninh-Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) biết đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ. Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B phân biệt lần lượt có hoành độ a, b . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



A. $4 \geq a - b \geq -4$

B. $a - b \geq 0$

C. $a, b < 3$

D. $a^2 + b^2 > 10$

Lời giải

Đáp án D

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm $x = \pm 1; x = 3 \Rightarrow f'(1) = 0$

Suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) tại $x = 1$ là (d): $y = f(1)$

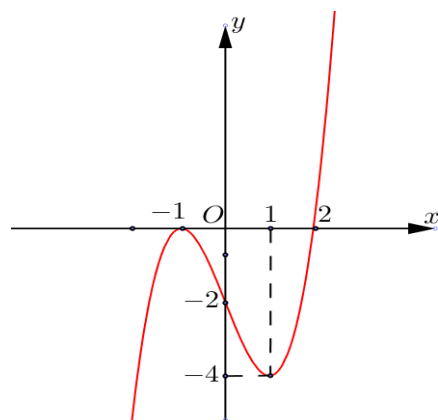
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$								

$f(-1) \nearrow f(1) \searrow f(3) \nearrow$

Dựa vào BBT, ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = f(1)$ tại 2 điểm A, B phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_A = a < -1$ và $x_B = b > 3$. Vậy $a^2 + b^2 > 10$

Câu 89: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình, lần 1 – 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên R . Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ($y = f'(x)$ liên tục trên R). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

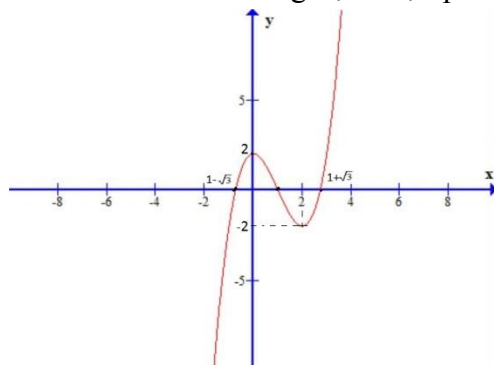
Từ đồ thị ta có $f'(x) = x^3 - 3x - 2$. Do đó $g'(x) = 2xf'(x^2 - 2) = 2x((x^2 - 2)^3 - 3(x^2 - 2) - 2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có $g'(x) > 0, \forall x \in (-1; 0)$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$

Câu 90: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình, lần 1 – 2018) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hỏi phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2)^2 + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 7.

B. 9.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u = x^3 - 3x^2 + 2$, phương trình trở thành $u^3 - 3u^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = 1 + \sqrt{3} \\ u = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$

+ Với $u=1$ thì $x^3 - 3x^2 + 2 = 1 \Leftrightarrow$ phương trình có 3 nghiệm.

+ Với $u = 1 - \sqrt{3}$ thì $x^3 - 3x^2 + 2 = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$ phương trình có 3 nghiệm.

KL: Phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 91: (THPT QUẾ VÕ 2) Cho phương trình $x^{12} + 1 = 4x^4 \sqrt{x^n - 1}$. Tìm số nguyên dương n bé nhất để phương trình có nghiệm.

A. $n = 6$.

B. $n = 3$.

C. $n = 5$.

D. $n = 1$.

Lời giải

Chọn C

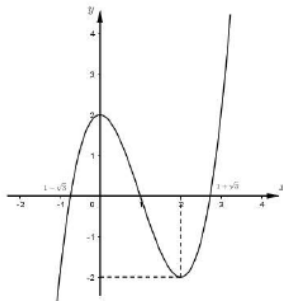
Với $n \leq 4$: thì ta có $VT - 2x^8 = x^{12} - 2x^8 + 1 = (x^4 - 1)(x^8 + x^4 - 1) \geq 0$ vì $x^4 > 1$ thế nên $VT \geq 2x^8$.

$$\text{Ta có } 2x^8 = 2x^4 \cdot x^4 = 2x^4 \cdot (x^4 - 1 + 1) \geq 2x^4 \cdot \sqrt{x^4 - 1} \geq VP \text{ (Ta chỉ cần xét với } x \geq 1)$$

Vậy $VT \geq VP$ nhưng dấu bằng ko thể xảy ra được vì điều kiện 2 dấu trên là khác nhau. Do đó $n \leq 4$ loại.

Với $n = 5$. Xét $f(x) = x^{12} + 1 - 4x^4 \sqrt{x^5 - 1} (x \geq 1)$ Ta có đây là hàm liên tục trên R và ta có $f(1) > 0; f(1,1) < 0$ nên phương trình có nghiệm trong $(1, 1,1)$. Tức là $n = 5$ thỏa mãn.

Câu 92: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hỏi phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2)^2 + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực dương phân biệt?

- A. 3. B. 5. C. 7. D. 1.

Lời giải

Đáp án C

Phương pháp:

Đặt $t = x^3 - 3x^2 + 2 = f(x)$, dựa vào đồ thị hàm số đã cho tìm ra các nghiệm t_i .

Xét các phương trình $f(x) = t_i$, số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = t_i$ song song với trục hoành.

Cách giải:

Đặt $t = x^3 - 3x^2 + 2 = f(x)$ khi đó phương trình trở thành $t^3 - 3t^2 + 2 = 0$ và hàm số

$$f(t) = t^3 - 3t^2 + 2 \text{ có hình dáng y như trên. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy } f(t) = \begin{cases} t = 1 - \sqrt{3} \\ t = 1 \\ t = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Với $t = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow f(x) = 1 + \sqrt{3}$ (1). Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1 + \sqrt{3}$ song song với trục hoành.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = 1 + \sqrt{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 1 điểm duy nhất nên phương trình (1) có 1 nghiệm duy nhất.

Với $t = 1 \Rightarrow f(t) = 1$ (2). Lập luận tương tự như trên ta thấy phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Với $t = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow f(t) = 1 - \sqrt{3}$ (3). Phương trình 3 có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình ban đầu có 7 nghiệm phân biệt.

Chú ý và sai lầm: Sau khi đặt ẩn phụ và tìm ra được 3 nghiệm t , nhiều học sinh kết luận sai lầm phương trình có 3 nghiệm phân biệt và chọn p án **A. Số nghiệm của phương trình là số nghiệm x chứ không phải số nghiệm t .**

Câu 93: [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m(x - 4)$ cắt đồ thị của hàm số $y = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$ tại bốn điểm phân biệt?

- A. 1. B. 5. C. 3. D. 7

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$(x^2 - 1)(x^2 - 9) = m(x - 4) \Rightarrow \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 9)}{(x - 4)} = m \quad (1), (x \neq 4)$$

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 9)}{(x - 4)}$ và

$$y = m$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 9)(x - 4) + 2x(x^2 - 1)(x - 4) - (x^2 - 9)(x^2 - 1)}{(x - 4)^2} = \frac{3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9}{(x - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9 = 0$$

Giải phương trình bằng MTBT ta được 4 nghiệm $\begin{cases} x_1 \approx -2,169 \\ x_2 \approx 0,114 \\ x_3 \approx 2,45 \\ x_4 \approx 4,94 \end{cases}$. Các nghiệm này đã được lưu

chính xác ở trong bộ nhớ của MTBT.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	4	x_4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2,58$	$\searrow -2,28$	$\nearrow 9,67$	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\nearrow 383,5$

Từ BBT và $m \in \mathbb{C} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Câu 94: [TRƯỜNG THPT ĐỒNG HẬU-VĨNH PHÚC. LẦN 1] Tìm m để đồ thị (C) của

$y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $y = mx + m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1; 0), B, C$ sao cho ΔOBC có diện tích bằng 8.

A. $m = 4$.

B. $m = 3$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Xét PT $x^3 - 3x^2 + 4 = mx + m$ $\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 4x + 4 - m) = 0$; ĐK để PT này có ba nghiệm là $m > 0$ và $m \neq 9$

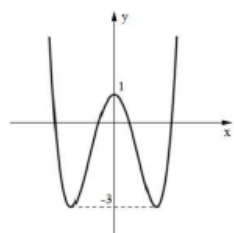
Khoảng cách từ O tới đường thẳng $y = mx + m$ là: $h = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$

Gọi tọa độ của $B(x_1; y_1), C(x_2; y_2)$.

$$\begin{aligned} \text{P } BC &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{(m^2 + 1)(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(m^2 + 1)(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{4m(m^2 + 1)} \end{aligned}$$

$$\text{P } S_{OBC} = \frac{1}{2} h \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \cdot \sqrt{4m(m^2 + 1)} = 8 \Rightarrow m = 4.$$

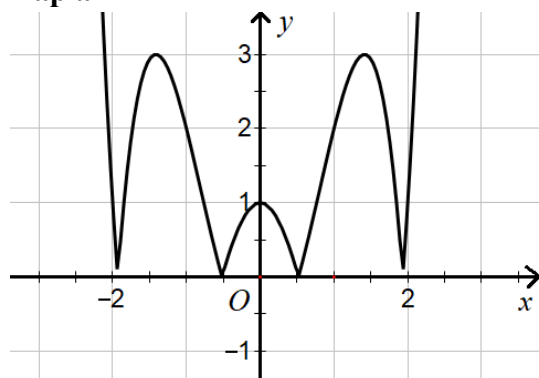
Câu 95: [THPT Phạm Công Bình - Vĩnh Phúc - Lần 1] Hình vẽ sau là đồ thị của một hàm trùng phương. Giá trị của m để phương trình $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm phân biệt là



- A. $m = 0; m = 3$. B. $1 < m < 3$. C. $-3 < m < 1$. D. $m < 0$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m = 0, m = 3$.

Câu 96: [THPT THUẬN THÀNH SỐ 3] Tìm m để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = m$ có 8 nghiệm phân biệt

- A. $-\frac{9}{4} < m < 4$ B. $-\frac{9}{4} < m < 0$ C. $\frac{9}{4} < m < 4$ D. $0 < m < \frac{9}{4}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét hàm } y = x^4 - 5x^2 + 4 \Rightarrow y' = 4x^3 - 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	$-\frac{9}{4}$	4	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$

Ta có bảng biến thiên hàm $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	-1	0	1	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-	0	+	0	-
y									

Vậy phương trình có 8 nghiệm $\Leftrightarrow$ đường $y = m$ giao đồ thị hàm số $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$ tại 8 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}$

Câu 97: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

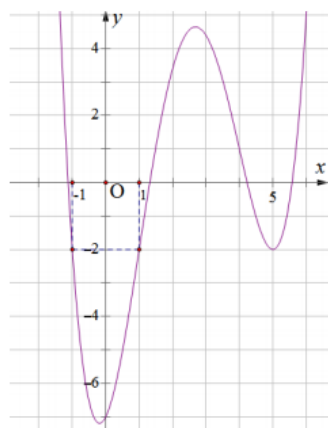
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y					

The graph shows a function $y = f(x)$ plotted against x . The x-axis has critical points at $-\infty$, 0, 1, and $+\infty$. The y-axis has values $-\infty$, 0, and $+\infty$. The function starts at $-\infty$ for $x = -\infty$, increases to a local maximum at $(0, 0)$, decreases to a local minimum at $(1, -1)$, and then increases towards $+\infty$ as x approaches $+\infty$. The curve is concave up for $x < 0$ and concave down for $x > 1$.

Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m + 2$ có bốn nghiệm phân biệt?

- A. $-3 \leq m \leq -2$. B. $-2 < m < -1$. C. $-2 \leq m \leq -1$. D. $-3 < m < -2$.

Câu 98: [THPT CHUYÊN LAM SƠN-THANH HÓA LẦN 2-2018] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$?



- A. 4 B. 7 C. 5 D. 6

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$, để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm $x \in [0; \pi]$ thì phương trình $f(t) = m$ có đúng một nghiệm $t \in [0; 1]$.

Dựa vào đồ thị ta có $m \in [-7; -2]$, do m nguyên nên $m \in \{-7; -6; -5; -4; -3\}$. Vậy có 5 giá trị.

Câu 99: (THPT CHUYÊN BẮC NINH) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để

đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$

A. $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

B. $m \in \mathbb{R}$.

C. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

D. $m \in (-2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = mx - m + 1$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ là nghiệm của PT

$$mx - m + 1 = x^3 - 3x^2 + x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - m(x - 1) - 2(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - m - 1) = 0$$

PT này có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - 2x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m + 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2 \text{ khi đó tọa độ ba giao điểm là}$$

$A(1, 1), B(1 - \sqrt{m + 2}, 1 + \sqrt{m + 2}), C(1 + \sqrt{m + 2}, 1 + \sqrt{m + 2})$ từ đây tính được

$$AB = AC = \sqrt{2(m + 2)}.$$

Câu 100: (THPT QUẾ VÕ SỐ 2) Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x+1}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của

tham số m để đường thẳng $d: y = mx + \frac{m+1}{2}$ cắt đồ thị (C) tại hai nghiệm phân biệt A, B sao

cho $OA^2 + OB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

A. $m = 1$.

B. $m > 0$.

C. $m \pm 1$.

D. $m = 2$

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+1}{2x+1} = mx + \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow 4mx^2 + 4mx + m - 1 = 0(1)$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm $x_A; x_B \Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 4m(m - 1) = 4m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó giao điểm của 2 đồ thị là $A\left(x_A; mx_A + \frac{m+1}{2}\right); B\left(x_B; mx_B + \frac{m+1}{2}\right)$

với $x_A + x_B = -1; x_A \cdot x_B = \frac{m-1}{4m}$

Ta có

$$OA^2 + OB^2 = x_A^2 + \left(mx_A + \frac{m+1}{2}\right)^2 + x_B^2 + \left(mx_B + \frac{m+1}{2}\right)^2 = \frac{m^2 + 2m + 1}{2m} = 1 + \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

(vì $m > 0$, theo Cauchy ta có $m + \frac{1}{m} \geq 2$. Dấu bằng xảy ra khi $m = 1$.)

Câu 101: (THPT Hàn Thuyên-Bắc Ninh-Lần 1) Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức $h = 2 \sin\left(3 \frac{\pi t}{14}\right) \left(1 - 4 \sin^2\left(\frac{\pi t}{14}\right)\right) + 12$. Hỏi trong một ngày có bao nhiêu lần mực nước trong kênh đạt độ sâu 13m.

A. 5 lần.

B. 7 lần.

C. 11 lần.

D. 9 lần.

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Cách giải:

Đặt $\frac{\pi t}{14} = u \Rightarrow u \in \left[0; \frac{12\pi}{7}\right)$ khi đó ta có $h = 2 \sin(3u) (1 - 4 \sin^2 u) + 12$

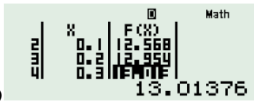
$$\Leftrightarrow h = 2(3 \sin u - 4 \sin^3 u)(1 - 4 \sin^2 u) + 12$$

Đặt $v = \sin u \Rightarrow h(v) = 2(3v - 4v^3)(1 - 4v^2) + 12$

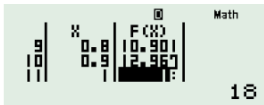
$$6t - 24t^3 - 8t^3 + 32t^5 + 12$$

$$32t^5 - 32t^3 + 6t - 12$$

Xét $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow v \in [0; 1]$

Dùng [MODE] [7] ta có  : trong khoảng $(0, 2; 0, 3)$ có 1 lần hàm số đạt giá trị bằng 13.

 12 trong khoảng $(0, 3; 0, 4)$ có 1 lần hàm số đạt giá trị bằng 13.

 18 trong khoảng $(0, 9; 1)$ có 1 lần hàm số đạt giá trị bằng 13.

Vậy $v \in [0; 1]$ thì có 3 lần $f(v) = 13$.

Xét $u \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow v \in [0; 1]$. Tương tự như trên ta có 3 lần $f(v) = 13$.

Xét $u \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow v \in [-1; 0]$ có 2 lần $f(v) = 13$.

Xét $u \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{12\pi}{7}\right] \Rightarrow v \in \left[-1; \sin \frac{12\pi}{7}\right) \Rightarrow$ có 1 lần $f(v) = 13$.

Vậy có tất cả 9 lần mực nước trong kênh đạt độ sâu 13m.

Câu 102: (THPT CHUYÊN BẮC NINH) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để

đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ tại hai điểm A, B phân biệt sao

cho $P = k_1^{2018} + k_2^{2018}$ đạt giá trị nhỏ nhất (với là hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B của đồ thị (H))

A. $m = -3$.

B. $m = -2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn B.

Hoành độ giao điểm x_1, x_2 của đt và đồ thị (H) là nghiệm PT

$$\frac{2x+3}{x+2} = -2x+m \Leftrightarrow 2x^2 - (m-6)x - (2m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{-2m+3}{2} \end{cases}$$

$$y' = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow k_1^{2008} + k_2^{2008} = \left(\frac{-1}{(x_1+2)^2} \right)^{2008} + \left(\frac{-1}{(x_2+2)^2} \right)^{2008} \geq 2 \left(\frac{1}{(x_1+2)(x_2+2)} \right)^{2008}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} \right)^{2008} = 2 \left(\frac{2}{(-2m+3) + 2(m-6) + 8} \right)^{2008} = 2^{2009}$$

Đạt được khi $(x_1 + 2) = -(x_2 + 2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4 \Rightarrow m - 6 = -8 \Rightarrow m = -2$.

Chương 8. Mũ – logarit

Câu 103: (THPT QUẾ VÕ 2) Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x+1}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của

tham số m để đường thẳng $d: y = mx + \frac{m+1}{2}$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao

cho $OA^2 + OB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

A. $m = 1$.

B. $m > 0$.

C. $m = \pm 1$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+1}{2x+1} = mx + \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow 4mx^2 + 4mx + m - 1 = 0 \quad (1)$$

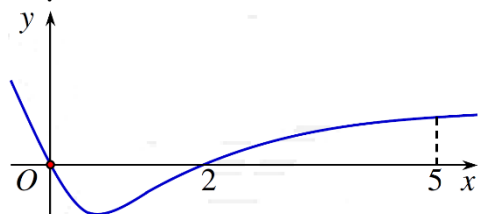
Phương trình (1) có 2 nghiệm $x_A; x_B \Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 4m(m-1) = 4m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó giao điểm của 2 đồ thị là $A\left(x_A; mx_A + \frac{m+1}{2}\right); B\left(x_B; mx_B + \frac{m+1}{2}\right)$

với $x_A + x_B = -1; x_A \cdot x_B = \frac{m-1}{4m}$

Ta có $OA^2 + OB^2 = x_A^2 + \left(mx_A + \frac{m+1}{2}\right)^2 + x_B^2 + \left(mx_B + \frac{m+1}{2}\right)^2 = \frac{m^2 + 2m + 1}{2m} =$
 $1 + \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$ (vì $m > 0$, theo Cauchy ta có $m + \frac{1}{m} \geq 2$. Dấu bằng xảy ra khi $m = 1$

Câu 104: (THPT QUẾ VÕ 2) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình sau.



Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là

- A. $f(2), f(5)$. B. $f(0), f(5)$. C. $f(2), f(0)$. D. $f(1), f(5)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	0	2	3	5
$f'(x)$	0	0		0
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(5)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ là $f(2)$.

Có $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(0) - f(5) = f(2) - f(3)$.

Ta có $f(2) < f(3) \Rightarrow f(2) - f(3) < 0 \Rightarrow f(0) - f(5) < 0 \Rightarrow f(0) < f(5)$.

Do đó giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ là $f(5)$.

Câu 105: (THPT VIỆT ĐỨC) Trong bài thi thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100 m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất? Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia 100 m.

- A. $\frac{200\sqrt{2}}{3}$ (m). B. $75\sqrt{2}$ (m). C. $75\sqrt{3}$ (m). D. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ (m).

Lời giải

Chọn B

Ta có sơ đồ:

- Đặt $HE = x (100 \leq x \leq 1000)$

$$HF = \sqrt{x^2 - 10000}; GF = \sqrt{1000000 - 10000} = 300\sqrt{11} \Rightarrow GH = 300\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 10000}$$

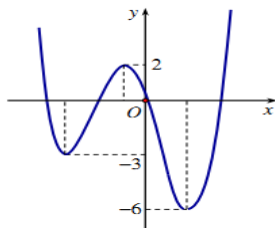
- Gọi vận tốc bơi là a (không đổi) $\Rightarrow$ vận tốc chạy bộ là $3a$

- Thời gian bơi từ E đến H là $\frac{x}{a}$

- Thời gian chạy từ H đến G là: $\frac{300\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 10000}}{3a}$

- Xét hàm số $f(x) = x - \frac{\sqrt{x^2 - 10000}}{3}$ với $100 \leq x \leq 1000$ ta được $f(x)$ đạt GTNN khi $75\sqrt{2}$.

Câu 106: [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1] Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 12.

B. 15.

C. 18.

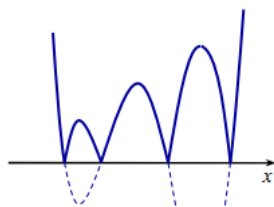
D. 9

Lời giải

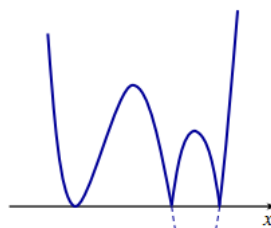
Chọn A

Nhận xét: Số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C'): y = f(x-1)$ với Ox

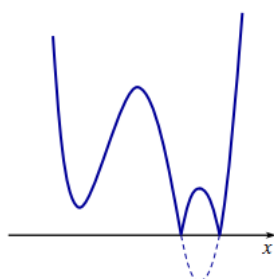
Vì $m > 0$ nên $(C''): y = f(x-1) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'): y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị.



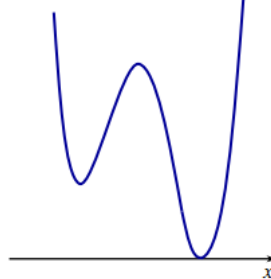
TH1: $0 < m < 3$



TH2: $m = 3$



TH3: $3 < m < 6$



TH4: $m \geq 6$

TH1: $0 < m < 3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m = 3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 107: (THPT LỤC NGẠN 1-BẮC GIANG) Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách 300km , vận tốc của dòng nước là $6(\text{km/h})$. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước yên lặng là $v(\text{km/h})$. Năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được tính theo công thức $E = cv^3t$; c là hằng số cho trước, đơn vị của E là Jun. Vận tốc v của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất là:

- A. $9(\text{km/h})$ B. $8(\text{km/h})$ C. $10(\text{km/h})$ D. $12(\text{km/h})$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Ta có: $(v-6)t = 300 \Rightarrow t = \frac{300}{v-6}$

Vậy $E = cv^3 \frac{300}{v-6}$ Bấm máy tính

Câu 108: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số

$y = \frac{2x+1}{x+2}$ mà có khoảng cách đến đường thẳng $d: y = 3x+6$ nhỏ nhất. Khi đó

- A. $a+2b=1$. B. $a+b=2$. C. $a+b=-2$. D. $a+2b=3$.

Lời giải

Đáp án C

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, đưa về khảo sát hàm số để tìm giá trị nhỏ nhất - giá trị lớn nhất.

Cách giải:

$$\text{Điểm } M(a;b) \in (H) \Rightarrow M\left(a; \frac{2a+1}{a+2}\right) \Rightarrow d(M; (d)) = \frac{\left|3a - \frac{2a+1}{a+2} + 6\right|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left|\frac{3a^2 + 10a + 11}{a+2}\right|$$

$$\text{Xét hàm số } f(a) = \frac{3a^2 + 10a + 11}{a+2} \text{ với } a \neq -2, \text{ có } f'(a) = \frac{3(a^2 + 4a + 3)}{(a+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -3 \end{cases}$$

Tính các giá trị $f(-1) = 4$; $f(-3) = -8$ và $\lim_{x \rightarrow -2} f(a) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(a) = \infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $|f(a)|$ bằng 4 $\Leftrightarrow a = -1$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b = -2$$

Câu 109: (THPT B Hải Hậu - Nam Định - Lần 1 - 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $3(\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}) - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$?

- A. $m \leq 6\sqrt{2} - 4$. B. $m \geq 6\sqrt{2} - 4$. C. $m \leq 6$. D. $m \geq 6$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = 3(\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}) - 2\sqrt{1+x}\sqrt{3-x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{1+x}} - \frac{3}{2\sqrt{3-x}} - \frac{4(-x+1)}{2\sqrt{1+x}\sqrt{3-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{12(1-x)}{\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}} + \frac{4(-x+1)}{2\sqrt{1+x}\sqrt{3-x}} = 0$$

Giải phương trình trên ta thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Lại có $f(1) = 6\sqrt{2} - 4$, $f(-1) = f(3) = 6$, do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$. Từ đây ta suy ra với $m \leq 6\sqrt{2} - 4$ thì bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1, 3]$.

Câu 110: [TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH]

Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y)$ và

$$\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}, \text{ với } a, b \text{ là hai số nguyên dương. Tính } ab.$$

A. $a.b = 5$.

B. $a.b = 1$.

C. $a.b = 8$.

D. $a.b = 4$

Lời giải

Chọn A

• Ta đặt $t = \log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y) \Rightarrow x = 9^t; y = 6^t; x+y = 4^t$

$$\text{Ta có: } 9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\text{Mà } \frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{6}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \text{ Do đó: } a=1; b=5 \text{ và } a.b=5.$$

Câu 111: (MEGABOOK-ĐỀ 3). Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2 (x-y)^2$ là:

A. $\max P = 3\log_2 2$

B. $\max P = \log_2 12$

C. $\max P = 12$

D. $\max P = 16$

Lời giải

Chọn B

Từ $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Suy ra:

Nếu $y = 0$ thì $x = \pm 2 \Rightarrow P = 2$

Nếu $y \neq 0$. Ta có:

$$P = \log_2 (x-y)^2 \Leftrightarrow 4.(x-y)^2 = 4.2^P \Rightarrow \frac{4.2^P}{4} = \frac{4(x-y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{4\left(\frac{x}{y} - 1\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} + 3}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y}, t \in \mathbb{I} \Rightarrow 2^P = \frac{4t^2 - 8t + 4}{t^2 + 2t + 3} \Leftrightarrow 2^P(t^2 + 2t + 3) = 4t^2 - 8t + 4$$

$$\Leftrightarrow (2^P - 4)t^2 + (2^P + 8)t + 3 \cdot 2^P - 4 = 0. \text{ (Xét } P \neq 4)$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm: } \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (2^P + 4)^2 - (2^P - 4)(3 \cdot 2^P - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \cdot (2^P)^2 + 24 \cdot 2^P \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 2^P \leq 12 \Rightarrow P \leq \log_2 12.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\log_2 12$.

Câu 112: [THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội] Cho $a, b, c > 1$. Biết rằng biểu thức

$P = \log_a(bc) + \log_b(ac) + 4\log_c(ab)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m khi $\log_b c = n$. Tính giá trị $m + n$.

A. $m + n = 12$. B. $m + n = \frac{25}{2}$. C. $m + n = 14$. D. $m + n = 10$.

Lời giải

Chọn A

$$P = \log_a(bc) + \log_b(ac) + 4\log_c(ab) = \log_a b + \log_a c + \log_b a + 4\log_b c + 4\log_c b$$

$$\text{Ta có: } \log_a b + \log_b a \geq 2; \log_a c + 4\log_c a \geq 4; \log_b c + 4\log_c b \geq 4$$

$$\text{Khi đó } P \geq 10 = m$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \log_a c = 4\log_c a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \log_a c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \log_b c = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m + n = 12.$$

Câu 113: (THPT Lê Văn Thịnh- Bắc Ninh-Lần 1) Cho a, b là các số thực và

$$f(x) = a \ln^{2017}(\sqrt{x^2 + 1} + x) + bx \sin^{2018} x + 2. \text{ Biết } f(5^{\log_c 6}) = 6, \text{ tính giá trị của biểu thức}$$

$$P = f(-6^{\log_c 5}) \text{ với } 0 < c \neq 1$$

A. $P = -2$ B. $P = 6$ C. $P = 4$ D. $P = 2$

Lời giải

Đáp án A

$$\text{Ta có } 5^{\log_c 6} = 6^{\log_c 5} = x \Rightarrow -6^{\log_c 5} = -x$$

$$\text{Khi đó } f(-x) = a \cdot \ln^{2017}(\sqrt{x^2 + 1} - x) - bx \sin^{2018} x + 2$$

$$= a \cdot \ln^{2017} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} - bx \sin^{2018} x + 2$$

$$= -\left[a \cdot \ln^{2017}(\sqrt{x^2 + 1}) + bx \sin^{2018} x + 2 \right] + 4$$

$$\text{Mặt khác } f(x) = 6 \rightarrow P = f(-x) = -f(x) + 4 = -6 + 4 = -2$$

Câu 114: [THPT THUẬN THÀNH SỐ 3] Giả sử ta có hệ thức $a^2 + b^2 = 11ab$ ($a \neq b, a, b > 0$). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $2\log_2 \frac{a-b}{3} = \log_2 a + \log_2 b$

B. $\log_2 \frac{|a-b|}{3} = 2(\log_2 a + \log_2 b)$

C. $2\log_2 \frac{|a-b|}{3} = \log_2 a + \log_2 b$

D. $2\log_2 |a-b| = \log_2 a + \log_2 b$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a^2 + b^2 = 11ab \Leftrightarrow (a-b)^2 = 9ab$

$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{a-b}{3} \right)^2 = \log_2 ab \Leftrightarrow 2\log_2 \frac{|a-b|}{3} = \log_2 a + \log_2 b$

Câu 115: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}$

A. $3 + \sqrt{3}$.

B. 4.

C. $3 + 2\sqrt{3}$.

D. 6.

Lời giải

Đáp án D

Phương pháp giải:

Sử dụng phương pháp hàm đặc trưng để từ giả thiết suy ra mối liên hệ giữa hai biến, sau đó sử dụng phương pháp thế và khảo sát hàm số tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải:

Ta có $\frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y \Leftrightarrow \log_3 2x+y+1 - \log_3 (x+y) = 3(x+y) - (2x+y+1) + 1$

$\log_3 (2x+y+1) + 2x+y+1 = \log_3 [3(x+y)] + 3(x+y) \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Mà $(*) \Leftrightarrow f(2x+y+1) = f(3x+3y) \Leftrightarrow 2x+y+1 = 3x+3y \Leftrightarrow x+2y=1$.

Đặt $a = \sqrt{y} > 0 \Leftrightarrow y = a^2 \Leftrightarrow x = 1-2y = 1-2a^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $T = g(a) = \frac{1}{1-2a^2} + \frac{2}{a}$.

Xét hàm số $g(a) = \frac{1}{1-2a^2} + \frac{2}{a}$ trên khoảng $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, có $g'(a) = -\frac{2(2a-1)(2a^3-2a-1)}{a^2(2a^2-1)^2}$

Xét $h(a) = 2a^3 - 2a - 1$ trên $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ có

$h'(a) = 6a^2 - 2 = 2(3a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow h'(a) < 0, \forall a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \supset \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Do đó $h(a)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow h(a) < h(0) = -1 < 0, \forall a \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nên phương trình

$h(a) = 0$ vô nghiệm trên $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Phương trình $g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Tính các giá trị $g\left(\frac{1}{2}\right) = 6; \lim_{x \rightarrow 0} g(a) = +\infty; \lim_{a \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} g(a) = +\infty$

Suy ra $\min_{\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} g(a) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $T_{\min} = 6$

Câu 116: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình, lần 1 – 2018) Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Khi biểu thức

$P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của tổng $a + b + c$ là

- A. 3. B. $3.2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$. C. 4. D. 6.

Lời giải

Chọn C

Trắc nghiệm: Biểu thức P đạt được giá trị lớn nhất tại các điểm biên của đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn

$\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$ và do a, b, c có vai trò bình đẳng nên ta được $a = b = 1, c = 2$

$\Rightarrow a + b + c = 4$

Tự luận:

+ Đặt $x = \log_2 a, y = \log_2 b, z = \log_2 c \Rightarrow x, y, z \in [0; 1]$ và $x^3 + y^3 + z^3 \leq 1$

Ta được $P = (2^x)^3 + (2^y)^3 + (2^z)^3 - 3x.2^x - 3y.2^y - 3z.2^z$

+ Ta chứng minh được $2^x \leq x + 1, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow 2^x - x - 1 \leq 0$

Và khi $A + B + C \geq 0$ thì $A^3 + B^3 + C^3 \leq 3ABC$

Khi đó $(2^x)^3 + (-x)^3 + (-1)^3 \leq 3x.2^x \Leftrightarrow (2^x)^3 - 3x.2^x \leq x^3 + 1$

Tương tự

$(2^y)^3 - 3y.2^y \leq y^3 + 1$ và $(2^z)^3 - 3z.2^z \leq z^3 + 1 \Rightarrow P \leq (x^3 + y^3 + z^3) + 3 = 4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x; y; z) = (0; 0; 1)$ và các hoán vị của nó

$\Rightarrow (a; b; c) = (1; 1; 2)$ và các hoán vị của nó $\Rightarrow a + b + c = 4$.

Câu 117: [THPT Chuyên Vĩnh Phúc lần 3] Số nghiệm của phương trình

$2x^2 + 2x - 9 = (x^2 - x - 3).8^{x^2+3x-6} + (x^2 + 3x - 6).8^{x^2-x-3}$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 + x^2 - x - 3 = (x^2 - x - 3).8^{x^2+3x-6} + (x^2 + 3x - 6).8^{x^2-x-3}$

$\Rightarrow u + v = u.8^v + v.8^u$ (với $u = x^2 + 3x - 6; v = x^2 - x - 3$) $\Leftrightarrow (8^u - 1)v + (8^v - 1)u = 0$ (*).

TH1. Nếu $u = 0$, khi đó (*) $\Leftrightarrow v = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 6 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases}$

TH2. Nếu $v = 0$, tương tự **TH1**.

TH3. Nếu $u > 0; v > 0$, khi đó $(8^u - 1)v + (8^v - 1)u > 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

TH4. Nếu $u < 0; v < 0$, tương tự **TH3**.

TH5. Nếu $u > 0; v < 0$, khi đó $(8^u - 1)v + (8^v - 1)u < 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

TH6. Nếu $u < 0; v > 0$, tương tự **TH5**.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Hoặc biến đổi (*) $\Leftrightarrow \frac{8^u - 1}{u} + \frac{8^v - 1}{v} = 0$, dễ thấy $\frac{8^u - 1}{u} > 0; \forall u \neq 0$ (Table = Mode 7).

Câu 118: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2m \cdot 2^x + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. $-2 < m < 2$.

B. $m > -2$.

C. $m > 2$.

D. $m < 2$.

Lời giải

Đáp án C

Phương pháp:

Đặt $2^x = t (t > 0)$, đưa về phương trình bậc 2 ẩn t , tìm điều kiện của phương trình bậc 2 ẩn t để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt.

Cách giải: Đặt $2^x = t (t > 0)$ khi đó phương trình trở thành $t^2 - 2mt + m + 2 = 0 (*)$

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \\ m > 0 \\ m > -2 \end{cases} \Rightarrow m > 2$$

Chú ý và sai lầm: Rất nhiều học sinh sau khi đặt ẩn phụ thì quên mất điều kiện $t > 0$, dẫn đến việc chỉ đi tìm điều kiện để phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 119: (THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – 2018) Tìm giá trị nguyên của m để phương trình $4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$ có nghiệm trên $[0; 1]$?

A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m \Leftrightarrow 4\left(4^x + \frac{1}{4^x}\right) = 4(m+1)\left(2^x - \frac{1}{2^x}\right) + 16 - 8m$$

$$\text{Đặt } t = 2^x - \frac{1}{2^x} \text{ với } x \in [0; 1] \Rightarrow 4^x + \frac{1}{4^x} = t^2 + 2$$

$$t' = \ln 2 \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) > 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{PT trở thành: } t^2 = (m+1)t + 2 - 2m \Leftrightarrow (t+1)(t-2) = m(t-2) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = m-1 \end{cases} (L)$$

$$\text{Yêu cầu đề } \Rightarrow 0 \leq m-1 \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{5}{2}.$$

Câu 120: (MEGABOOK-ĐỀ 3). Tổng các nghiệm của phương trình

$$1 + \log_2 \sqrt{(x+1)^3} = \log_2 (-x^3 + 3x^2 + 3x) \text{ có dạng } \frac{a + \sqrt{c}}{b} - b\sqrt{b} (a, b, c \in \mathbb{Z}). \text{ Giá trị } a + b + c$$

là:

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

Lời giải

Chọn D

Phương trình biến đổi thành:

$$2\sqrt{(x+1)^3} = -x^3 + 3x^2 + 3x \Rightarrow 4(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = x^6 + 9x^4 + 9x^2 - 6x^5 - 6x^4 + 18x^3$$

$$\Leftrightarrow x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 14x^3 - 3x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2-2\sqrt{2})(x-2+2\sqrt{2})\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\sqrt{2} \\ x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = 2 + 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (thử lại)} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\sqrt{2} \\ x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Câu 121: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ 10/2017) Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$$

và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

A. $a + b = 16$.

B. $a + b = 11$.

C. $a + b = 14$.

D. $a + b = 13$

Lời giải

Đáp án C

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7 \left(\frac{(2x-1)^2}{2x} \right) + 4x^2 - 4x + 1 = 2x$$

$$\Leftrightarrow \log_7 (2x-1)^2 + (2x-1)^2 = \log_7 2x + 2x \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_7 t + t \Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \text{ với } t > 0$$

Vậy hàm số đồng biến

$$\text{Phương trình (1) có dạng } f((2x-t)^2) = f(2x) \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x_1 + 2x_2 = \begin{cases} \frac{9-\sqrt{5}}{4} (l) \\ \frac{9+\sqrt{5}}{4} (tm) \end{cases} \Rightarrow a = 9, b = 5 \Rightarrow a + b = 9 + 5 = 14$$

Cách 2: Bấm Casio.

Câu 122: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình, lần 1 – 2018) Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là:

- A. 3. B. 4. C. 5. D. vô số.

Lời giải

Chọn A

$$pt \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ mx-8 > 0 \\ \log_2(x-1)^2 = \log_2(mx-8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ mx-8 > 0 \\ (x-1)^2 = mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x + 9 = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x - 2 + \frac{9}{x} = m \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x - 2 + \frac{9}{x}$ trên $(1; +\infty)$. Ta có $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Bảng biến thiên

x		1	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		8	4	$+\infty$

Để Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $(1; +\infty)$ tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow 4 < m < 8$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 123: (MEGABOOK-ĐỀ 3). Tính giá trị

$$S = 1 + 2^2 \log_{\sqrt{2}} 2 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + 4^2 \log_{\sqrt[4]{2}} 2 + \dots + 2017^2 \log_{\sqrt[2017]{2}} 2.$$

- A. $S = 1008^2 \cdot 2017^2$ B. $S = 1007^2 \cdot 2017^2$ C. $S = 1009^2 \cdot 2017^2$ D. $S = 1010^2 \cdot 2017^2$

Lời giải

Chọn C

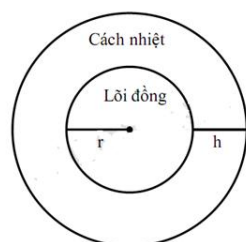
Ta có: $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

$$\text{Cho } n = 10 \text{ thấy } S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3025 = \frac{121}{4} \cdot 10^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$$

Với $n = 2007$ ta thấy p.án C đúng.

Câu 124: [THPT Kim Liên-Hà Nội-Lần 1] Cáp tròn truyền dưới nước bao gồm một lõi đồng và bao

quanh lõi đồng là một lõi cách nhiệt như hình vẽ. Nếu $x = \frac{r}{h}$ là tỉ lệ bán kính lõi và độ dày của vật liệu cách nhiệt thì bằng đo đạc thực nghiệm người ta thấy rằng vận tốc truyền tải tín hiệu được cho bởi phương trình $v = x^2 \ln \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$. Nếu bán kính lõi là 2 cm thì vật liệu cách nhiệt có bề dày h (cm) bằng bao nhiêu để tốc độ truyền tải tín hiệu lớn nhất?



A. $h = 2e(\text{cm})$. B. $h = \frac{2}{e}(\text{cm})$. C. $h = 2\sqrt{e}(\text{cm})$. D. $h = \frac{2}{\sqrt{e}}(\text{cm})$

Lời giải

Đáp án C

Ta có: $v = x^2 \ln \frac{1}{x} = -x^2 \ln x \Rightarrow v' = -\left(2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{loại}) \\ \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

Lại có: $\lim_{x \rightarrow 0} v = \lim_{x \rightarrow 1} v = 0$; $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{2e} \Rightarrow \text{Max}_{(0;1)} v = \frac{1}{2e}$ khi $x = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{r}{h} = \frac{2}{h} \Rightarrow h = 2\sqrt{e}..$

Câu 125: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ 10/2017) Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y)$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=6$. B. $a+b=11$. C. $a+b=4$. D. $a+b=8$

Lời giải

Đáp án A

Đặt $\log_9 x = t$

Theo đề ra ta có $\begin{cases} \log_9 x = \log_6 y = t \\ \log_9 x = \log_4 (x+y) = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t & (1) \\ y = 6^t & (2) \\ x+y = 4^t & (3) \\ \frac{x}{y} = \left(\frac{3}{2}\right)^t & (4) \end{cases}$

Từ (1), (2) và (3) ta có $9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow (3^t)^2 + (3 \cdot 2)^t - 4^t = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = -\frac{-1+\sqrt{5}}{2} (TM) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} (L) \end{cases}$

Thế vào (4) ta được $\frac{x}{y} = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2} \Rightarrow a=1; b=5$.

Câu 126: (THPT Lê Văn Thịnh- Bắc Ninh-Lần 1) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $3^x = 5^y = 15^{\frac{2017}{x+y}-z}$.

Gọi $S = xy + yz + zx$. Khẳng định nào đúng?

A. $S \in (1; 2016)$ B. $S \in (0; 2017)$ C. $S \in (0; 2018)$ D. $S \in (2016; 2017)$

Lời giải

Đáp án C

Ta có $3^x = 5^y = 15^{\frac{2017}{x+y}-z} = k$ và $\frac{2017}{x+y} - z = t$ suy ra $\begin{cases} 3 = k^{\frac{1}{x}} \\ 5 = k^{\frac{1}{y}} \end{cases}$ và $15 = k^t$

$$\text{Khi đó } 3.5 = k^{\frac{1}{t}} \Leftrightarrow k^{\frac{1}{x}} \cdot k^{\frac{1}{y}} = k^{\frac{1}{t}} \Leftrightarrow k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = k^{\frac{1}{t}} \Leftrightarrow t(x+y) = xy \Leftrightarrow 2017 - (x+y)z = (xy)$$

$$\text{Vậy } xy + yz + xz = 2017 \rightarrow S \in (0; 2018)$$

Câu 127: [THPT PHAN CHU TRINH ĐAKLAK LẦN 2 - 2018] Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng

$$f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}} \text{ với } m, n \text{ là các số tự nhiên và } \frac{m}{n} \text{ tối giản. Tính } m - n^2.$$

A. $m - n^2 = -1$

B. $m - n^2 = 1$

C. $m - n^2 = 2018$

D. $m - n^2 = -2018$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 + x^2 + (x+1)^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^2(x+1)^2} = \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2$$

$$\text{Suy ra } f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}} = e^{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}.$$

$$\text{Vậy } f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{1 + 1 - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + 1 + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}} = e^{2018 - \frac{1}{2018}} = e^{\frac{2018^2 - 1}{2018}}$$

$$\text{Suy ra } m = 2018^2 - 1; n = 2018.$$

$$\text{Vậy } m - n^2 = -1.$$

Câu 128: [Thử sức trước kì thi- Đề 07] Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$3^{x^2+y^2-2} \cdot \log_2(x-y) = \frac{1}{2} [1 + \log_2(1-xy)]. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức}$$

$$M = 2(x^3 + y^3) - 3xy.$$

A. 7

B. $\frac{13}{2}$

C. $\frac{17}{2}$

D. 3

Lời giải

Đáp án B

$$\text{Ta có } 3^{x^2+y^2-2} \cdot \log_2(x-y) = \frac{1}{2} [1 + \log_2(1-xy)] \Leftrightarrow 3^{x^2+y^2-2} \cdot \log_2(x-y)^2 = \log_2(2-2xy)$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2+2xy+y^2-2+2xy} \cdot \log_2(x-y)^2 = \log_2(2-2xy) \Leftrightarrow 3^{(x+y)^2} \cdot \log_2(x-y) = 3^{2-2xy} \cdot \log_2(2-2xy)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 3^t \cdot \log_2 t \text{ trên khoảng } (0; +\infty), \text{ có } f'(t) = 3^t \ln 3 \cdot \log_2 t + \frac{3^t}{t \ln 2} > 0; \forall t > 0$$

$$\text{Suy ra } f(t) \text{ là hàm số đồng biến trên } (0; +\infty) \text{ mà } f[(x-y)^2] = f(2-2xy) \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$\text{Khi đó } M = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 2(x+y) \left[(x+y)^2 - 3xy \right] - 3xy$$

$$\Leftrightarrow 2M = 2(x+y) \left[2(x+y)^2 - 3.2xy \right] - 3.2xy$$

$$2(x+y) \left[2(x+y)^2 - 3(x+y)^2 + 6 \right] - 3(x+y)^2 + 6$$

$$= 2(x+y) \left[6 - (x+y)^2 \right] - 3(x+y)^2 + 6 = -2a^3 - 3a^2 + 12a + 6, \text{ với } a = x+y \in (0; 4)$$

$$\text{Xét hàm số } f(a) = -2a^3 - 3a^2 + 12a + 6 \text{ trên } (0; 4), \text{ suy ra } \max_{(0;4)} f(a) = 13.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức M là $\frac{13}{2}$.

Câu 129: (THPT Lê Văn Thịnh- Bắc Ninh-Lần 1) Cho $0 \leq x, y \leq 1$ thỏa mãn

$2017^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$. Khi đó $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{136}{3}$

B. $\frac{391}{16}$

C. $\frac{383}{16}$

D. $\frac{25}{2}$

Lời giải

Đáp án B

Ta có $2017^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019} \Leftrightarrow \frac{2017^{1-y}}{2017^x} = \frac{x^2 + 2018}{(1-y)^2 + 2018}$

$2017^x (x^2 + 2018) = 2017^{1-y} [(1-y)^2 + 2018] \Leftrightarrow f(x) = f(1-y)$

Xét hàm số $f(t) = 2017^t (t^2 + 2018) = t^2 \cdot 2017^t + 2018 \cdot 2017^t$, có

$f'(t) = 2t \cdot 2017^t + t^2 \cdot 2017^t \cdot \ln 2017 + 2018 \cdot 2017^t \cdot \ln 2017 > 0; \forall t > 0$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ mà $f(x) = f(1-y) \Rightarrow x + y = 1$

Lại có $P = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy = 16x^2y^2 + 12x^3 + 12y^3 + 34xy$

$16x^2y^2 + 12[(x+y)^3 - 3xy(x+y)] + 34xy = 16x^2y^2 + 12(1-3xy) + 34xy = 16x^2y^2 - 2xy + 12$

Mà $1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4}$ nên đặt $t = xy \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$ khi đó $P = f(t) = 16t^2 - 2t + 12$

Xét hàm số $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$ trên $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ ta được $\begin{cases} \min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16} \\ \max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2} \end{cases}$

Câu 130: Cho $m = \log_a \sqrt{ab}$ với $a, b > 1$ và $P = \log_2 b + 54 \log_b a$. Khi đó giá trị của m để P đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $m = \log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b \Rightarrow \log_a b = 2m - 1$

Lại có $P = \log_2 b + 54 \log_b a = (2m - 1)^2 + 54 \cdot \frac{1}{2m - 1}$.

Đặt $t = 2m - 1 (t \neq 0)$ khảo sát hàm $P = t^2 + \frac{54}{t}$ thấy $P_{\min} = 27 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow m = 2$

Câu 131: (THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$$\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } T = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}$$

A. $3+\sqrt{3}$

B. 4

C. $3+2\sqrt{3}$

D. 6

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y \Leftrightarrow \log_3 2x+y+1 - \log_3 (x+y) = 3(x+y) - (2x+y+1) + 1$

$$\log_3 (2x+y+1) + 2x+y+1 = \log_3 [3(x+y)] + 3(x+y) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Mà $(*) \Leftrightarrow f(2x+y+1) = f(3x+3y) \Leftrightarrow 2x+y+1 = 3x+3y \Leftrightarrow x+2y=1$.

Đặt $a = \sqrt{y} > 0 \Leftrightarrow y = a^2 \Leftrightarrow x = 1-2y = 1-2a^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $T = g(a) = \frac{1}{1-2a^2} + \frac{2}{a}$.

Xét hàm số $g(a) = \frac{1}{1-2a^2} + \frac{2}{a}$ trên khoảng $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, có $g'(a) = -\frac{2(2a-1)(2a^3-2a-1)}{a^2(2a^2-1)^2}$

Xét $h(a) = 2a^3 - 2a - 1$ trên $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ có

$$h'(a) = 6a^2 - 2 = 2(3a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow h'(a) < 0, \forall a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \supset \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Do đó $h(a)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow h(a) < h(0) = -1 < 0, \forall a \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nên phương trình

$$h(a) = 0 \text{ vô nghiệm trên } \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Phương trình $g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Tính các giá trị $g\left(\frac{1}{2}\right) = 6; \lim_{x \rightarrow 0} g(a) = +\infty; \lim_{a \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} g(a) = +\infty$

Suy ra $\min_{\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} g(a) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $T_{\min} = 6$

Chương 9. Nguyên hàm – tích phân

Câu 132: (THPT CHUYÊN LAM SƠN-THANH HÓA LẦN 1 NĂM 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và

$$5 \int_0^1 \left[f'(x) [f(x)]^2 + \frac{1}{25} \right] dx \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx. \text{ Tích phân } \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

A. $\frac{25}{33}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{53}{50}$.

Lời giải

$$5 \int_0^1 \left[f'(x) [f(x)]^2 + \frac{1}{25} \right] dx \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \Leftrightarrow 5 \int_0^1 f'(x) [f(x)]^2 dx + \frac{1}{5} \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz: } \Rightarrow \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 f'(x) [f(x)]^2 dx$$

$$\Rightarrow 5 \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \right)^2 + \frac{1}{5} \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx \Leftrightarrow 5 \left(\int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx - \frac{1}{5} \right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx = \frac{1}{5}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi chỉ khi: } \begin{cases} \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx = \frac{1}{5} \Rightarrow k = \frac{1}{5} \\ \sqrt{f'(x)} f(x) = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f'(x) f^2(x) dx = \int \frac{1}{25} dx = \frac{1}{25} x + C \Rightarrow \frac{[f(x)]^3}{3} = \frac{1}{25} x + C \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{25} x + 3C}$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow 3C = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{25} x + 1} \Rightarrow \int_0^1 [f(x)]^3 dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{25} x + 1 \right) dx = \frac{53}{50}.$$

Đáp án D

Câu 133: [THPT CHUYÊN LAM SƠN-THANH HÓA LẦN 2-2018] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$, đồng biến trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x + 2x \cdot f(x)$

$$= [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4]. \text{ Biết rằng } f(1) = \frac{3}{2}, \text{ tính } I = \int_1^4 f(x) dx ?$$

A. $I = \frac{1186}{45}$

B. $I = \frac{1174}{45}$

C. $I = \frac{1222}{45}$

D. $I = \frac{1201}{45}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2 \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 2f(x)} = f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}, \forall x \in [1; 4].$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx + C \Leftrightarrow \int \frac{df(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx + C$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C. \text{ Mà } f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{4}{3}. \text{ Vậy } f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3} \right)^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Do đó } I = \int_1^4 f(x) dx = \frac{1186}{45}.$$

Câu 134: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ 10/2017) Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x) \cdot f(a-x) = 1 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; a] \end{cases} \text{ và } \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}, \text{ trong đó } b, c \text{ là hai số nguyên dương và } \frac{b}{c} \text{ là phân}$$

số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. (11; 22). B. (0; 9). C. (7; 21). D. (2017; 2020)

Lời giải

Đáp án B

$$\text{Đặt } t = a - x \Rightarrow dt = -dx$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$$

$$\text{Lúc đó } I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)} = \int_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$$

$$\text{Suy ra } 2I = I + I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^a 1dx = a$$

$$\text{Do đó } I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3$$

Cách 2: Chọn $f(x) = 1$ là một hàm thỏa các giả thiết. Dễ dàng tính được

$$I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3$$

Câu 135: [THPT PHAN CHU TRINH ĐAKLAK LẦN 2 - 2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên

tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4}$ và $f(1) = 0$. Tính

$$\int_0^1 f(x) dx$$

- A. $\frac{e-1}{2}$ B. $\frac{e^2}{4}$ C. $e-2$ D. $\frac{e}{2}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{- Tính : } I = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \int_0^1 xe^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f(x) dx = J + K.$$

$$\text{Tính } K = \int_0^1 e^x f(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = e^x f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = [e^x f(x) + e^x f'(x)] dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow K = (xe^x f(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 [xe^x f(x) + xe^x f'(x)] dx = - \int_0^1 xe^x f(x) dx - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \quad (\text{do } f(1) = 0)$$

$$\Rightarrow K = -J - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow I = J + K = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx.$$

- Kết hợp giả thiết ta được :

$$\begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2-1}{4} \\ -\int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{e^2-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2-1}{4} \\ 2\int_0^1 xe^x f'(x) dx = -\frac{e^2-1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

- Mặt khác, ta tính được : $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{e^2-1}{4} \quad (3).$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\int_0^1 ([f'(x)]^2 + 2xe^x f'(x) + x^2 e^{2x}) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \pi \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + xe^x$, trục Ox , các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh trục Ox bằng 0

$$\Rightarrow f'(x) + xe^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = -\int xe^x dx = (1-x)e^x + C.$$

- Lại do $f(1) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = ((1-x)e^x)|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + e^x|_0^1 = e - 2. \text{ Vậy } \int_0^1 f(x) dx = e - 2.$$

Câu 136: [THPT PHAN CHU TRINH ĐAKLAK LẦN 2 - 2018] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên

$\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn: $f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f(-3) + f(3) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Tính $T = f(-2) + f(0) + f(4)$.

A. $T = 1 + \ln \frac{9}{5}$.

B. $T = 1 + \ln \frac{6}{5}$.

C. $T = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$.

D. $T = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$

Với $x \in (-\infty; -1)$: $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1$.

Với $x \in (1; +\infty)$: $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3$.

Mà $f(-3) + f(3) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-3-1}{-3+1} \right| + C_1 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3-1}{3+1} \right| + C_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln 2 + C_1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + C_3 = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_3 = 0.$$

Do đó $f(-2) = \frac{1}{2} \ln 3 + C_1$; $f(4) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5} + C_3$.

Với $x \in (-1; 1)$: $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2$.

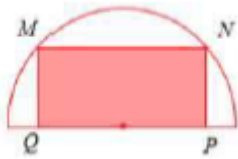
$$\text{Mà } f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1} \right| + C_2 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1} \right| + C_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln 3 + C_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 1.$$

$$\text{Do đó với } x \in (-1; 1): f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1 \Rightarrow f(0) = 1.$$

$$\text{Vậy } T = f(-2) + f(0) + f(4) = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}.$$

Câu 137: [THPT Phạm Công Bình - Vĩnh Phúc - Lần 1] Từ một miếng tôn có hình dạng là nửa hình tròn có bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (xem hình) có diện tích lớn nhất. Diện tích lớn nhất có thể của miếng tôn hình chữ nhật là



A. 7.

B. $6\sqrt{2}$.

C. 9.

D. $6\sqrt{3}$.

Đáp án B

Gọi O là tâm nửa đường tròn. Ta có: $PQ = 2OP = 2\sqrt{9-x^2}$

Đặt diện tích hình chữ nhật là: $f(x) = 2x\sqrt{9-x^2} \Rightarrow f^2(x) = 4x^2(9-x^2)$

Đặt $y = x^2$ ($0 < y \leq 3$). Xét hàm số $g(y) = 4y(9-y)$

Ta có $f(x)$ lớn nhất khi $g(y)$ lớn nhất. $g(y)$ lớn nhất khi $y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

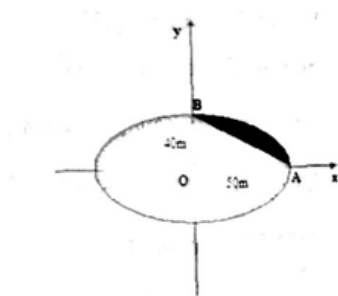
$$\max f(x) = f(\sqrt{3}) = 6\sqrt{2}$$

Câu 138: [ME GA BOOK] Anh Toàn có một cái ao hình elip với độ dài trục lớn và độ dài trục bé lần lượt là 100m và 80m. Anh chia ao ra hai phần theo một đường thẳng từ một đỉnh của trục lớn đến một đỉnh của trục bé (**Bề rộng không đáng kể**). Phần rộng hơn anh nuôi cá lấy thịt, phần nhỏ anh nuôi cá giống. Biết lãi nuôi cá lấy thịt và lãi nuôi cá giống trong 1 năm lần lượt là 20.000 đồng/m² và 40.000 đồng/m². Hỏi trong 1 năm anh Toàn có bao nhiêu tiền lãi từ nuôi cá trong ao đã nói trên (**Lấy làm tròn đến hàng nghìn**).

A. 176 350 000 đồng B. 105 664 000 đồng C. 137 080 000 đồng D. 139 043 000 đồng

Lời giải

Đáp án C



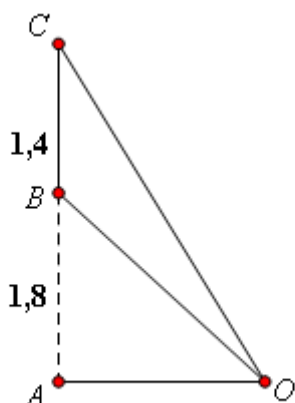
$$\text{Diện tích toàn bộ ao là } S = \pi \cdot 40 \cdot 50 = 2000\pi (\text{m}^2)$$

$$\text{Diện tích phần nuôi cá giống là } S_1 = \frac{S}{4} - S_{OAB} = 500\pi - 1000 (\text{m}^2)$$

Diện tích phần nuôi cá thịt là $S_2 = S - S_1 = 1500\pi + 1000(\text{m}^2)$

Tiền lãi từ nuôi cá là $40000.S_1 + 20000.S_2 = 137\ 080\ 000$

Câu 139: (THPT CHUYÊN BẮC NINH) Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn hình).



Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng cách màn ảnh bao nhiêu sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định khoảng cách đó.

A. 2,4m

B. 2,42m

C. 2,46m

D. 2,21m

Lời giải

Chọn A

Với bài toán này, ta cần xác định OA để góc BOC lớn nhất. Điều này xảy ra $\Leftrightarrow \tan BOC$ lớn nhất.

Đặt $OA = x(m)$ với $x > 0$. Ta có:

$$\tan BOC = \tan(AOC - AOB) = \frac{\tan AOC - \tan AOB}{1 + \tan AOC \cdot \tan AOB} = \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC \cdot AB}{OA^2}} = \frac{\frac{1,4}{x}}{1 + \frac{3,2 \cdot 1,8}{x^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$ trên $(0; +\infty)$, có:

$$f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 1,4 \cdot 5,76}{(x^2 + 5,76)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = 5,76 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2,4$$

Tính cách giá trị $f(0) = 0; f(2,4) = \frac{7}{24}; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ suy ra $\max_{(0; +\infty)} f(x) = \frac{7}{24}$.

Vậy khoảng cách OA cần tìm là 2,4 m.

Chương 10. Số phức

Câu 140: (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 1) Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2 - 6z + m = 1, m \in \mathbb{I}$ (1). Gọi m_0 là một giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $\overline{z_1 z_1} = \overline{z_2 z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0; 20)$ có bao nhiêu giá trị m?

A. 13.

B. 11.

C. 12.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Viết lại phương trình đã cho thành $(z - 3)^2 = 9 - m_0$

Nếu $m_0 = 9 \Rightarrow z = 3$ Hay phương trình chỉ có một nghiệm. (Loại)

Nếu $m_0 < 9$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thực $z_1 = 3 - \sqrt{9 - m_0}, z_2 = 3 + \sqrt{9 - m_0}$. Do

$$z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow (3 - \sqrt{9 - m_0})^2 = (3 + \sqrt{9 - m_0})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{9 - m_0} = 3 + \sqrt{9 - m_0} \\ 3 - \sqrt{9 - m_0} = -3 - \sqrt{9 - m_0} \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{9 - m_0} = 0 \Leftrightarrow m_0 = 9 \text{ (ktm)}$$

Nếu $m_0 > 9$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phức liên hợp là

$$z_1 = 3 - i\sqrt{m_0 - 9}, z_2 = 3 + i\sqrt{m_0 - 9}.$$

$$\text{Khi đó } z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2} = 3^2 + \sqrt{m_0 - 9}$$

Do đó $m_0 > 9$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do bài toán đòi hỏi $m_0 \in (0; 20)$ nên

$m_0 \in \{10; 11; 12; \dots; 19\}$. Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

Câu 141: (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ 10/2017) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Biết tập hợp các điểm

A biểu diễn hình học số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(4; 3)$ và bán kính $R = 3$. Đặt M

là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của $F = 4a + 3b - 1$. Tính giá trị $M + m$.

A. $M + m = 63$. **B.** $M + m = 48$. **C.** $M + m = 50$. **D.** $M + m = 41$

Lời giải

Đáp án B

Ta có phương trình đường tròn (C): $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$

Do điểm A nằm trên đường tròn (C) nên ta có $(a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 9$

$$\text{Mặt khác } F = 4a + 3b - 1 = 4(a - 4) + 3(b - 3) + 24$$

$$F - 24 = 4(a - 4) + 3(b - 3)$$

$$\text{Ta có } [4(a - 4) + 3(b - 3)]^2 \leq (4^2 + 3^2)[(a - 4)^2 + (b - 3)^2] = 25 \cdot 9 = 225$$

$$\Rightarrow -15 \leq 4(a - 4) + 3(b - 3) \leq 15 \Leftrightarrow -15 \leq F - 24 \leq 15 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39$$

Khi đó $M = 39, m = 9$

Vậy $M + m = 48$

Cách 2:

$$\text{Ta có } F = 4a + 3b - 1 \Rightarrow a = \frac{F + 1 - 3b}{4}$$

$$(a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 9 \Rightarrow \left(\frac{F + 1 - 3b}{4} - 4 \right)^2 + b^2 - 6b + 9 = 9$$

$$\Leftrightarrow 25b^2 - 2(3F + 3)b + F^2 + 225 = 0$$

$$\Delta' = (3F + 3)^2 - 25F^2 - 5625$$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -16F^2 + 18F - 5625 \geq 0 \Leftrightarrow 9 \leq F \leq 39.$$

Câu 142: Cho số phức z và số phức liên hợp của nó $\overline{z}$ có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $z(4 + 3i)$

và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng 4 điểm

M, N, M', N' tạo thành hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z + 4i - 5|$

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{5}{\sqrt{34}}$.

D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $x = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có $M(a; b)$ và $M'(a; -b)$

* Khi đó $z(4 + 3i) = (4a - 3b) + (3a + 4b)i$

Suy ra $N(4a - 3b; 3a + 4b)$ và $N'(4a - 3b; -3a - 3b)$

* Do 4 điểm M, N, M', N' tạo thành hình thang cân nhận Ox làm trục đối xứng nên 4 điểm

đó lập thành hình chữ nhật $\Leftrightarrow MM' = NN' \Leftrightarrow 4b^2 = 4(3a + 4b)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = -\frac{8}{3}b \end{cases}$

* Với $a = -b$, ta có $|z + 4i - 5| = \sqrt{(b + 5)^2 + (b + 4)^2} = \sqrt{2\left(b + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Dấu bằng xảy ra khi $a = \frac{9}{2}, b = -\frac{9}{2}$

* Với $a = -\frac{8}{3}$, ta có $|z + 4i - 5| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}b + 5\right)^2 + (b + 4)^2} = \sqrt{\frac{73}{9}b^2 + \frac{104}{3}b + 41} \geq \frac{289}{73} > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $\min|z + 4i - 5| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 143: (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 1) Trong tập các số phức, gọi z_1, z_2 là hai nghiệm

của phương trình $z^2 - z + \frac{2017}{4} = 0$ với z_2 có thành phần ảo dương. Cho số phức z thỏa mãn

$|z - z_1| = 1$ Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_2|$ là

A. $\sqrt{2016} - 1$.

B. $\frac{\sqrt{2017} - 1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2016} - 1}{2}$.

D. $\sqrt{2017} - 1$

Lời giải

Chọn A

Tính toán ta tìm được hai nghiệm $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{2016}}{2}, z_2 = \frac{1 + i\sqrt{2016}}{2}$

Giả sử $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ Từ $|z - z_1| = 1$ ta suy ra

$$\left| (a + bi) - \frac{1 - i\sqrt{2016}}{2} \right| = 1 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(b + \frac{\sqrt{2016}}{2} \right)^2 = 1 \Rightarrow \left(b + \frac{\sqrt{2016}}{2} \right)^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 - \frac{\sqrt{2016}}{2} \leq b \leq 1 - \frac{\sqrt{2016}}{2} \quad (1)$$

Áp dụng (1) ta nhận được

$$|z - z_2|^2 = \left| \left(a + bi \right) - \frac{1 + i\sqrt{2016}}{2} \right|^2 = \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(b - \frac{\sqrt{2016}}{2} \right)^2$$

$$= \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(b + \frac{\sqrt{2016}}{2} \right)^2 - 4b \frac{\sqrt{2016}}{2} = -1 - 2b\sqrt{2016} \geq -1 - 2 \left(1 - \frac{\sqrt{2016}}{2} \right) \sqrt{2016} = -1 - 2\sqrt{2016} + 2016 = (\sqrt{2016} - 1)^2$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_2|$ là $\sqrt{2016} - 1$

Đạt được khi và chỉ khi $b = 1 - \frac{\sqrt{2016}}{2}, a = \frac{1}{2}$.

Câu 144: (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 1) Cho số phức thỏa mãn

$|z - 2i| \leq |z - 4i|$ và $|z - 3 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $P = |z - 2|$ là

A. $\sqrt{13} + 1$.

B. $\sqrt{10} + 1$.

C. $\sqrt{13}$.

D. $\sqrt{10}$

Lời giải

Chọn C

Giả sử số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán có dạng $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ Khi đó ta có

$$\begin{cases} |z - 2i| = |(a + bi) - 2i| = \sqrt{a^2 + (b - 2)^2} \\ |z - 4i| = |(a + bi) - 4i| = \sqrt{a^2 + (b - 4)^2} \\ |z - 3 - 3i| = |(a + bi) - 3 - 3i| = \sqrt{(a - 3)^2 + (b - 3)^2} \\ |z - 2| = |(a + bi) - 2| = \sqrt{(a - 2)^2 + b^2} \end{cases}$$

Từ giả thiết ta suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + (b - 2)^2} \leq \sqrt{a^2 + (b - 4)^2} \\ (a - 3)^2 + (b - 3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b - 2)^2 \leq (b - 4)^2 \\ (a - 3)^2 + (b - 3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - 2 \leq b - 4 \text{ (VN)} \\ b - 2 \leq -b + 4 \\ (a - 3)^2 + (b - 3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq 3 \\ (a - 3)^2 + (b - 3)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Từ } (a - 3)^2 + (b - 3)^2 = 1 \Rightarrow (a - 3)^2 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq a \leq 4 \Rightarrow 0 \leq a - 2 \leq 2$$

Do đó $P = |z - 2| = \sqrt{(a - 2)^2 + b^2} \leq \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (a - 2)^2 = 2^2 \\ b = 3 \\ (a - 3)^2 + (b - 3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Chú ý. Đối với bài toán liên quan tới cực trị học sinh thường mắc phải sai lầm là quên tìm giá trị để cực trị xảy ra. Điều này có thể dẫn tới việc tìm sai giá trị lớn nhất nhỏ nhất.

Chương 11. Thể tích khối đa diện

Câu 145: [ME GA BOOK] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi M là trung điểm của SB . P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại N . Tính thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ theo V

A. $V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30}V$

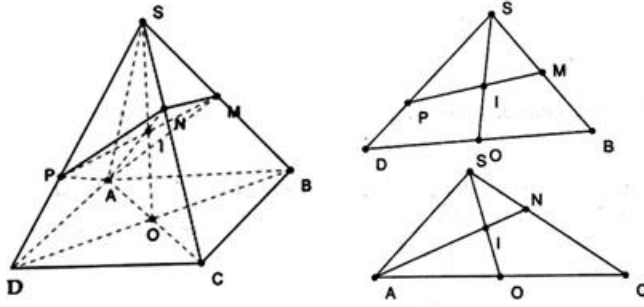
B. $V_{ABCDMNP} = \frac{19}{30}V$

C. $V_{ABCDMNP} = \frac{2}{5}V$

D. $V_{ABCDMNP} = \frac{7}{30}V$

Lời giải

Đáp án A



Gọi O là tâm hình bình hành

Gọi $I = MP \cap SO \Rightarrow N = AI \cap SC$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{SP}{SD} \cdot \frac{SM}{SB} = \frac{S_{\triangle SPM}}{S_{\triangle SDB}} = \frac{S_{\triangle SPI} + S_{\triangle SMI}}{S_{\triangle SDB}} = \frac{S_{\triangle SPI}}{2S_{\triangle SDO}} + \frac{S_{\triangle SMI}}{2S_{\triangle SBO}} \\ &= \frac{SI}{2SO} \left(\frac{SP}{SD} + \frac{SM}{SB} \right) = \frac{7}{12} \cdot \frac{SI}{SO} \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{SN}{SC} &= \frac{S_{\triangle SAN}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{S_{\triangle SAI} + S_{\triangle SNI}}{S_{\triangle SAC}} = \frac{S_{\triangle SAI}}{2S_{\triangle SAO}} + \frac{S_{\triangle SNI}}{2S_{\triangle SAO}} = \frac{SI}{2SO} + \frac{SI}{2SO} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{SN}{SC} \\ \Rightarrow \frac{SN}{SC} &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.AMNP}}{V} = \frac{V_{S.AMP} + V_{S.MNP}}{V} = \frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.BCPD}} = \frac{SA \cdot SM \cdot SP}{2SA \cdot SB \cdot SD} + \frac{SM \cdot SN \cdot SP}{2SB \cdot SC \cdot SD} = \frac{7}{30}$$

$$\Rightarrow V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30}V$$

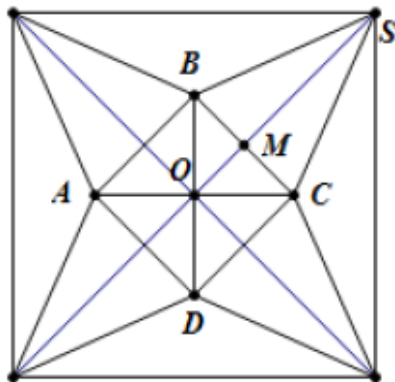
Câu 146: Người ta cắt một tờ giấy hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{2}$ để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp. Tính cạnh đáy của khối chóp để thể tích của nó lớn nhất.

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{2}{5}$.

C. 1.

D. $\frac{4}{5}$



Lời giải

Chọn B

Gọi độ dài đáy của hình chóp là x , với $0 < x < 1$. Đường cao hình chóp là

$$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{1-x}$$

$$\text{Thể tích khối chóp là } V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x} = \frac{1}{3}\sqrt{x^4 - x^5}$$

Xét hàm $f(x) = x^4 - x^5$, với $x \in (0;1)$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 4x^3 - 5x^4 = x^3(4-5x); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{4}{5}$$

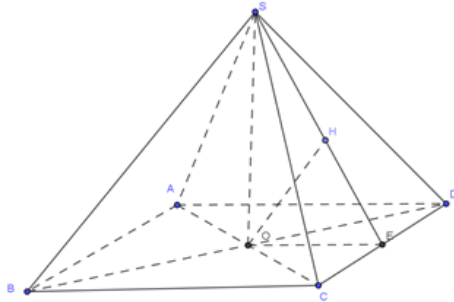
Như vậy để thể tích khối chóp lớn nhất thì $x = \frac{4}{5}$

Câu 147: (THPT QUẾ VÕ SỐ 2) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có khoảng cách từ A đến (SCD) bằng 4. Gọi V là thể tích khối chóp S.ABCD, tính giá trị nhỏ nhất của V.

- A. $32\sqrt{3}$. B. $8\sqrt{3}$. C. $16\sqrt{3}$. D. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Ta vẽ hình như hình vẽ. E là trung điểm của CD, $OH \perp SE$.
Dễ dàng cm được

$$OH = d(O; (SCD)) = \frac{1}{2}d(A; (SCD)) = 2$$

$$\text{Gọi } \angle SEO = \alpha (0 < \alpha < 90^\circ) \Rightarrow OE = \frac{OH}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$SO = \frac{OH}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{Cạnh của hình vuông } ABCD \text{ là: } \frac{4}{\sin \alpha}$$

$$\text{Từ đó } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

$$\text{Đặt } \cos \alpha = t (t \in (0;1)) \text{ thì } \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = t(1-t^2).$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = t - t^3; f'(t) = 1 - 3t^2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên trên $(0;1)$

t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	0

Vậy giá trị nhỏ nhất của V đạt được khi $f(t)$ lớn nhất tức là $\min V = 16\sqrt{3}$.

Câu 148: (THPT Tam Phước) Cho một tứ diện có đúng một cạnh có độ dài bằng x thay đổi được, các cạnh còn lại có độ dài bằng 2. Tính giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện này.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. 1

Lời giải

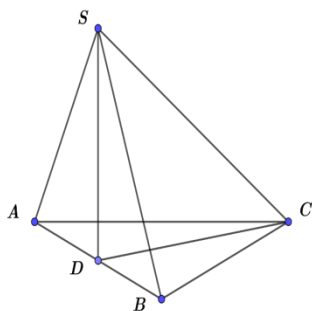
Chọn D

Gọi tứ diện đã cho là $S. ABC$. Ta có

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} SH = \frac{\sqrt{3}}{3} SH = \frac{\sqrt{3}}{3} SD \cdot \sin \phi$$

Suy ra, $V_{S.ABC}$ đạt GTLN khi và chỉ khi $\sin \phi = 1$. $\Rightarrow D \equiv H \Rightarrow SH = \sqrt{3}$, $V_{S.ABC} = 1$.

$\Rightarrow$ Chọn phương án **D**.



Câu 149: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình

hình hành. Điểm M di động trên cạnh SC , đặt $\frac{MC}{MS} = k$. Mặt phẳng qua A, M song song với

BD cắt SB, SD thứ tự tại N, P . Thể tích khối chóp $C.APMN$ lớn nhất khi

A. $k = \sqrt{3}..$

B. $k = 1..$

C. $k = 2..$

D. $k = \sqrt{2}..$

Lời giải

Đáp án D

Phương pháp giải:

Dùng định lý Thalet, định lý Menelaus và phương pháp tỉ số thể tích để tính thể tích khối chóp theo tham số k . Khảo sát hàm số chứa biến k để tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất

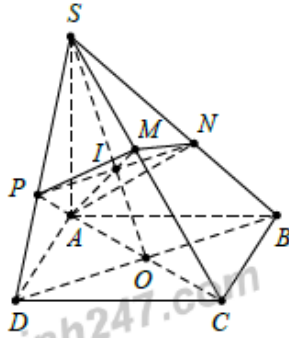
Cách giải:

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ và $I = SO \cap AM$.

Ba điểm M, A, I thẳng hàng nên áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SOC ta có:

$$\frac{SM}{MC} \cdot \frac{CA}{AO} \cdot \frac{OI}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{OI}{SI} = 1 = \frac{k}{2}.$$

$$\text{Vì } NP // BD \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{k+2} \text{ (định lý Thalet).}$$



$$\text{Và } d(P; (ABCD)) = d(N; (ABCD)) = \frac{DP}{SD} d(S; (ABCD))$$

$$= \frac{k}{k+2} \cdot d(S; (ANCD)) \Rightarrow V_{P.ACD} = V_{N.ABC} = \frac{k}{2k+4} \cdot V_{S.ABCD}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SP}{SD} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+2} \Rightarrow V_{S.ANMP} = \frac{2}{(k+1)(k+2)} \cdot V_{S.ABCD}$$

Vậy

$$V_{C.ANMP} = V_{S.ABCD} - V_{S.ANMP} - V_{P.ACD} - V_{N.ABC} = \left[1 - \frac{2}{(k+1)(k+2)} - \frac{k}{k+2} \right] \cdot V_{S.ABCD} = \frac{2k}{k^2 + 3k + 2} \cdot V_{S.ABCD}$$

$$\text{Để } \{V_{C.ANMP}\}_{\max} \Leftrightarrow f(k) = \frac{k}{k^2 + 3k + 2} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Xét hàm số $f(k) = \frac{k}{k^2 + 3k + 2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ có:

$$f'(k) = \frac{-k^2 + 2}{(k^2 + 3k + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow k = \sqrt{2} \text{ (vì } k > 0)$$

$$\Rightarrow \max_{(0; +\infty)} f(k) = f(\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $k = \sqrt{2}$. Vậy khi $k = \sqrt{2}$ thì thể tích khối chóp $C.ANMP$ lớn nhất.

Câu 150: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V . Gọi E là điểm trên cạnh SC sao cho $EC = 2ES$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng AE và song song với đường thẳng BD , (α) cắt hai cạnh SB, SD lần lượt tại hai điểm M, N . Tính theo V thể tích khối chóp $S.AMEN$.

A. $\frac{V}{6}$.

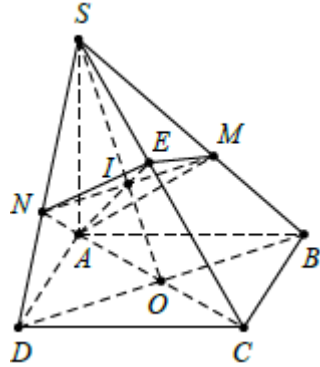
B. $\frac{V}{27}$.

C. $\frac{V}{9}$.

D. $\frac{V}{12}$.

Lời giải

Đáp án A



Phương pháp giải:

Dùng định lý Thalet và phương pháp tỉ số thể tích để tính thể tích khối chóp cần tìm

Cách giải:

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ và $I = SO \cap AE$.

Ba điểm E, A, I thẳng hàng nên áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SOC ta có:

$$\frac{SE}{EC} \cdot \frac{CA}{AO} \cdot \frac{OI}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{OI}{SI} = 1 \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vì } MN \parallel BD \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{1}{2} \text{ (định lý Thalet).}$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{S.AME}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.AME} = \frac{V}{12};$$

$$\text{Tương tự, ta có } V_{S.AME} = \frac{V}{12}. \text{ Vậy } V_{S.AMEN} = V_{S.AME} + V_{S.ANE} = \frac{V}{12} + \frac{V}{12} = \frac{V}{6}.$$

Câu 151: (THPT C NGHĨA HƯNG-NAM ĐỊNH LẦN 1) Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $AB = a$, $\hat{BAC} = 120^\circ$, $\hat{SBA} = \hat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc giữa SB và đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$

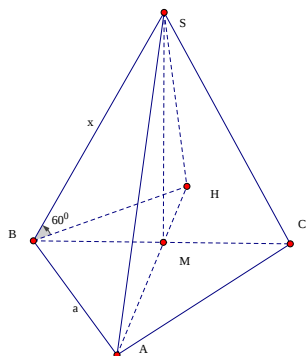
B. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

D. $V = \frac{3a^3}{4}$

Lời giải

Đáp án C



Gọi M là trung điểm BC khi đó $BC \perp (SAM)$ do $AB = AC$ và $SB = SC$

Trong (SAM) kẻ $SH \perp AM$ ta có $SH \perp ABC \Rightarrow$ góc $SBH = 60^\circ$, đặt $SB = SC = x$ ta có:

$$AM = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}a, \quad BM = AB \cdot \cos 60^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{3},$$

$$dt_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} \frac{a}{2} a\sqrt{3} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad SH = SB \cdot \sin 60^\circ = x \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad SA = \sqrt{SB^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + a^2},$$

$$SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \sqrt{x^2 - 3\frac{a^2}{4}}, \quad AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{x^2 + a^2 - \frac{3x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4a^2},$$

$$MH = \sqrt{SM^2 - SH^2} = \sqrt{x^2 - \frac{3a^2}{4} - \frac{3x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 3a^2}$$

$$\text{Ta có: } AH - MH = AM \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4a^2} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 3a^2} = \frac{1}{2}a \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4a^2} = \sqrt{x^2 - 3a^2} + a$$

$$\Leftrightarrow 3a = \sqrt{x^2 - 3a^2} \Leftrightarrow x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = 2a\sqrt{3} \Rightarrow SH = 3a$$

$$\text{Như vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot dt_{ABC} = \frac{1}{3} 3a \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = a^3 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

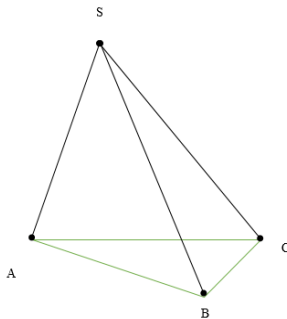
Câu 152: [THPT THUẬN THÀNH SỐ 3] Cho hình chóp $S.ABC$ có

$SA = 3, SB = 4, SC = 5, \angle ASB = \angle BSC = 45^\circ, \angle ASC = 60^\circ$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là:

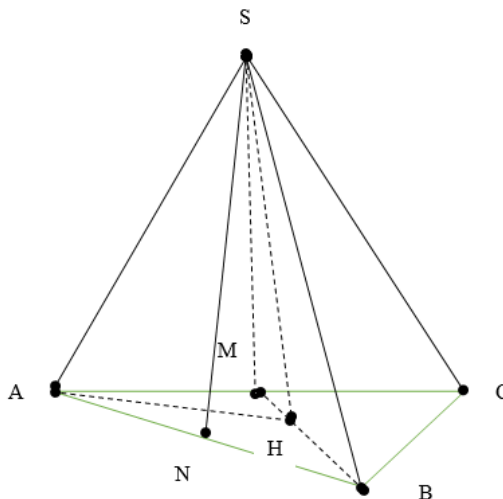
- A. 5 B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{2}$

Lời giải

Chọn A



Ta chuẩn hóa các cạnh SA, SB, SC của hình chóp về độ dài là 1



Lưu ý: việc chuẩn hóa phải đảm bảo các thông số về góc của bài toán không bị thay đổi

Gọi M là trung điểm AC, N là trung điểm AB, H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Vì hình chóp có $SA = SB = SC$

$\Rightarrow$ Hình chiếu của S trên **(ABC)** là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

$$\text{Xét } \Delta SAB, \text{ ta có: } AC = \sin \frac{45^\circ}{2} \Rightarrow AB = 2 \sin \frac{45^\circ}{2}$$

$$\text{Xét } \Delta ABC, \text{ ta có: } AM^2 + MB^2 = AB^2 \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot MB \Rightarrow R = \frac{abc}{2MB} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}$$

$$\text{Xét } \Delta ASH, \text{ ta có: } AH^2 + SH^2 = SA^2 \Rightarrow SH = \frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}$$

$$\text{Vậy } V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}{2} \cdot 1 = \frac{1}{12}$$

$$\text{Lại có: } V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot V_{S.ABC}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = 5$$

Câu 153: (MEGABOOK-ĐỀ 3). Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = 2a$ và $SC \perp (ABC)$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và có $AB = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua C và vuông góc với SA , (α) cắt SA, SB lần lượt tại D, E . Tính thể tích khối chóp $S.CDE$.

A. $\frac{4a^3}{9}$

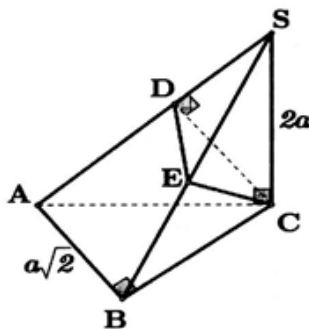
B. $\frac{2a^3}{3}$

C. $\frac{2a^3}{9}$

D. $\frac{a^3}{3}$

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.CDE}}{V_{S.CAB}} = \frac{SD}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} \Rightarrow V_{S.CDE} = \frac{SD}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} \cdot V_{S.CAB}$$

$$V_{S.CAB} = \frac{1}{3} \cdot SC \cdot \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a^2 = \frac{2a^3}{3}$$

Xét ΔSAC ta có:

$$SC^2 = SD \cdot SA \Rightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{SC^2}{SA^2} = \frac{4a^2}{4a^2 + 4a^2} = \frac{1}{2}$$

Ta có: $AB \perp (SBC) \Rightarrow AB \perp CE \Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SB$

Tương tự xét ΔSBC ta có:

$$SC^2 = SE \cdot SB \Leftrightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SC^2}{SB^2} = \frac{4a^2}{4a^2 + 2a^2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy suy ra } V_{S.CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{2a^3}{9}$$

Câu 154: Cho tứ diện $S.ABC$ trên cạnh SA và SB lấy điểm M và N sao cho thỏa

tỉ lệ $\frac{SM}{AM} = \frac{1}{2}$; $\frac{SN}{NB} = 2$, mặt phẳng đi qua MN và song song với SC chia tứ diện thành hai phần, biết tỉ số thể tích của hai phần ấy là K , vậy K là giá trị nào?

A. $K = \frac{2}{3}$.

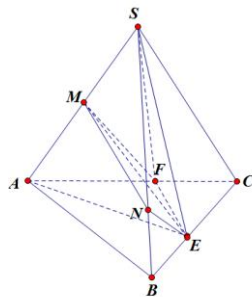
B. $K = \frac{4}{9}$.

C. $K = \frac{4}{5}$.

D. $K = \frac{5}{9}$

Lời giải

Chọn.C



Qua M kẻ MF song song với SC và qua N kẻ NE song song với SC với E và F thuộc CA và CB . Khi đó thiết diện cần tìm là hình thang $MNEF$.

Đặt $V_{S.ABC} = V$; $V_{MNEFCS} = V_1$; $V_{MNEFAB} = V_2$, $V_1 = V_{SCEF} + V_{SFME} + V_{SMNE}$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{SCEF}}{V} = \frac{CF}{CA} \cdot \frac{CE}{CB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \quad \frac{V_{SFME}}{V_{SFEA}} = \frac{CM}{SE} \cdot \frac{SE}{CA} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{V_{SFEA}}{V} = \frac{S_{EFA}}{S_{ABC}} = \frac{S_{EFA}}{S_{CEA}} \cdot \frac{S_{CEA}}{S_{ABC}} = \frac{FA}{CA} \cdot \frac{CE}{CB} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V_{SFME}}{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$$

$$\frac{V_{SMNE}}{V_{SABE}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{2}{9}, \quad \frac{V_{SMNE}}{V} = \frac{S_{ABEA}}{S_{ABC}} \cdot \frac{S_{AAEC}}{S_{ABC}} = \frac{EB}{CE} \cdot \frac{CE}{CB} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SABE} = \frac{2}{27} \Rightarrow V_1 = \frac{2}{9}V + \frac{4}{27}V = \frac{4}{9}V, \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5}$$

Câu 155: (THPT C NGHĨA HƯNG-NAM ĐỊNH LẦN 1) Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = 4$, $SA = SB = SC = 12$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm

AC , BC . Trên cạnh SA , SB lần lượt lấy điểm E , F sao cho $\frac{SE}{SA} = \frac{BF}{BS} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích khối

tứ diện $MNEF$

A. $\frac{16\sqrt{34}}{3}$

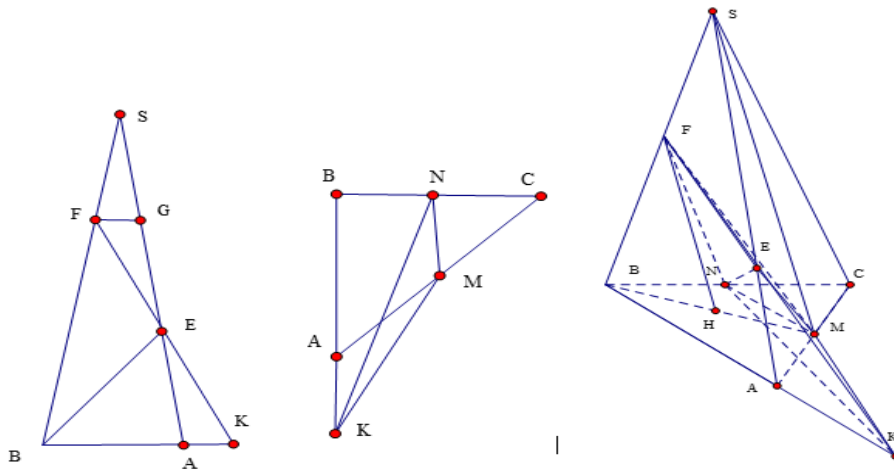
B. $\frac{4\sqrt{17}}{9}$

C. $\frac{4\sqrt{34}}{9}$

D. $\frac{4\sqrt{34}}{3}$

Lời giải

Đáp án C



Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại B nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp.

$$SM = SB = SC \Rightarrow SM \perp (ABC)$$

$FE \cap AB = K$, kẻ $FG \parallel BA$ $FH \parallel SM \Rightarrow FH \perp (ABC)$ ta có:

$$FH = \frac{2}{3} SM = \frac{2}{3} \sqrt{SA^2 - AM^2} = \frac{2}{3} \sqrt{12^2 - 8} = \frac{4}{3} \sqrt{34}$$

$$dt_{KMN} = dt_{BNMK} - dt_{BNK} = \frac{1}{2} (MN + BK) \cdot BN - \frac{1}{2} KB \cdot BN = \frac{1}{2} MN \cdot BN = \frac{1}{2} 2 \cdot 2 = 2$$

$$\triangle FGE = \triangle KAE (C.G.C) \Rightarrow FE = \frac{1}{2} FK$$

$$\frac{V_{FMNE}}{V_{FMNK}} = \frac{FE}{FK} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{FMNE} = \frac{1}{2} V_{FMNK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} FH \cdot dt_{KMN} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{34} \cdot 2 = \frac{4\sqrt{34}}{9}$$

Câu 156: (THPT Việt Trì) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với BC là đáy nhỏ. Biết rằng tam giác SAB đều có cạnh là $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{5}$ và khoảng cách từ D tới mặt phẳng (SHC) là $2a\sqrt{2}$ (H là trung điểm của AB). Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

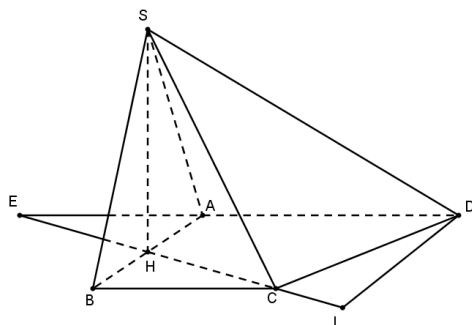
B. $\frac{a^3}{3}$

C. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{4a^3}{3}$

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp AB \end{cases}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} DI \perp CH \\ DI \perp SH \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SHC) \Rightarrow d(D, (SHC)) = DI = 2a\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \Delta BHC = \Delta AHE \Rightarrow S_{\Delta BHC} = S_{\Delta AHE} \text{ và } HE = HC.$$

$$\text{Mà } S_{ABCD} = S_{AHCD} + S_{\Delta BHC} = S_{AHCD} + S_{\Delta AHE} = S_{\Delta DCE}.$$

$$\text{Tam giác } SAB \text{ đều nên } SH = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Tam giác } SHC \text{ có } HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow EC = 2HC = 2a\sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó } S_{ABCD} = S_{\Delta DCE} = \frac{1}{2} DI \cdot EC = 4a^2.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot 4a^2 = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 157: (THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

Điểm M di động trên cạnh SC , đặt $\frac{MC}{MS} = k$. Mặt phẳng qua A, M song song với BD cắt

SB, SD thứ tự tại N, P . Thể tích khối chóp $C.APMN$ lớn nhất khi

A. $k = \sqrt{3}.$

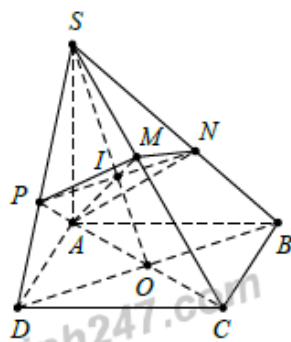
B. $k = 1.$

C. $k = 2.$

D. $k = \sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ và $I = SO \cap AM$.

Ba điểm M, A, I thẳng hàng nên áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SOC ta có:

$$\frac{SM}{MC} \cdot \frac{CA}{AO} \cdot \frac{OI}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{OI}{SI} = 1 = \frac{k}{2}.$$

$$\text{Vì } NP \parallel BD \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{k+2} \text{ (định lý Thalet).}$$

$$\text{Và } d(P; (ABCD)) = d(N; (ABCD)) = \frac{DP}{SD} d(S; (ABCD))$$

$$= \frac{k}{k+2} \cdot d(S; (ANCD)) \Rightarrow V_{P.ACD} = V_{N.ABC} = \frac{k}{2k+4} \cdot V_{S.ABCD}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SP}{SD} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+2} \Rightarrow V_{S.ANMP} = \frac{2}{(k+1)(k+2)} \cdot V_{S.ABCD}$$

Vậy

$$V_{C.ANMP} = V_{S.ABCD} - V_{S.ANMP} - V_{P.ACD} - V_{N.ABC} = \left[1 - \frac{2}{(k+1)(k+2)} - \frac{k}{k+2} \right] \cdot V_{S.ABCD} = \frac{2k}{k^2 + 3k + 2} \cdot V_{S.ABCD}$$

Đề $\{V_{C.ANMP}\}_{\max} \Leftrightarrow f(k) = \frac{k}{k^2 + 3k + 2}$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(k) = \frac{k}{k^2 + 3k + 2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ có:

$$f'(k) = \frac{-k^2 + 2}{(k^2 + 3k + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow k = \sqrt{2} \text{ (vì } k > 0)$$

$$\Rightarrow \max_{(0; +\infty)} f(k) = f(\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}.$$

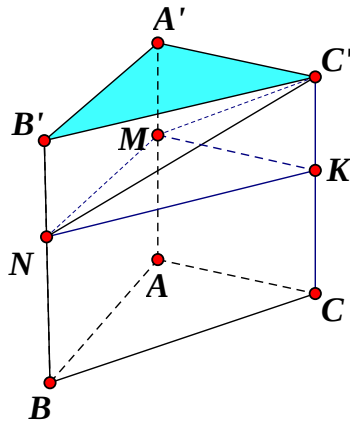
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $k = \sqrt{2}$. Vậy khi $k = \sqrt{2}$ thì thể tích khối chóp $C.ANMP$ lớn nhất.

Câu 158: (TRƯỜNG THPT C PHỦ LÝ - HÀ NAM) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên cạnh AA' ; BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA' = 3A'M$; $BB' = 3B'N$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích khối chóp $C'.A'B'NM$, V_2 là thể tích khối đa diện $ABC.MNC'$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{5}{7}$.

Lời giải

Đáp án C



$$V_{ABC.MNK} = S_{ABC} \cdot CK = \frac{2}{3} S_{ABC} \cdot A'A$$

$$V_{C'.MKN} = \frac{1}{3} C'K \cdot S_{MKN} = \frac{1}{9} C'C \cdot S_{ABC} = \frac{1}{9} A'A \cdot S_{ABC}$$

$$\Rightarrow V_2 = V_{ABC.MNK} + V_{C'.MKN} = \frac{2}{3} S_{ABC} \cdot A'A + \frac{1}{9} A'A \cdot S_{ABC} = \frac{7}{9} A'A \cdot S_{ABC}$$

$$V_{MKN.A'B'C'} = S_{MKN} \cdot C'K = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot A'A$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{MKN.A'B'C'} - V_{C'.MKN} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot A'A - \frac{1}{9} A'A \cdot S_{ABC} = \frac{2}{9} A'A \cdot S_{ABC}$$

$$\text{Vậy: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{2}{9} A'A.S_{ABC}}{\frac{7}{9} A'A.S_{ABC}} = \frac{2}{7}.$$

Câu 159: (THPT Chuyên Đại Học Vinh - Nghệ An - 2018) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, góc hợp bởi đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng 45° , hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{9}a^3$

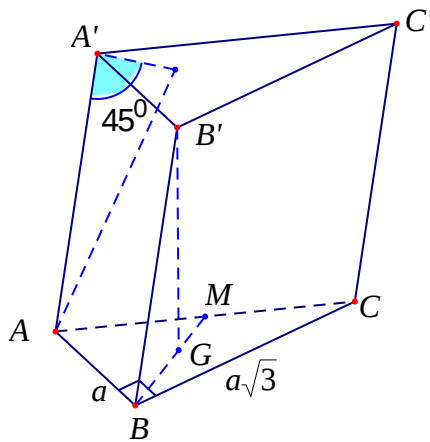
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$

C. a^3

D. $\frac{a^3}{3}$

Lời giải

Đáp án B



$$\bullet S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}; \quad AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = 2a.$$

• Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow B'G \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm của AC

$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC = \frac{2a}{3}.$$

$$\bullet \left(\overrightarrow{AA'}, (A'B'C') \right) = 45^\circ \Rightarrow \left(\overrightarrow{BB'}, (ABC) \right) = 45^\circ \Rightarrow \angle B'BG = 45^\circ \Rightarrow \triangle B'BG \text{ vuông cân tại } G$$

$$\Rightarrow B'G = GB = \frac{2a}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = B'G \cdot S_{ABC} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

Câu 160: (THPT Tam Phước) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Điểm M thuộc đoạn thẳng BC' , điểm N thuộc đoạn thẳng AB' , MN tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng MN .

A. $\frac{a}{2}$

B. $\frac{2a}{3}$

C. $\frac{2a}{\sqrt{5}-1}$

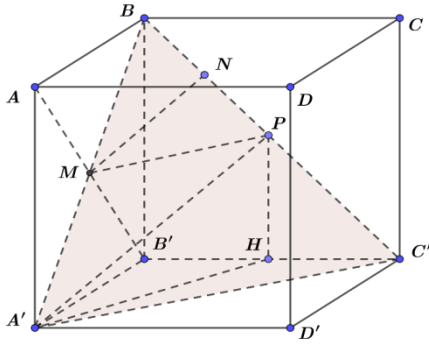
D. $\frac{2a}{\sqrt{5}+1}$

Lời giải

Chọn D

Ý tưởng: 1 - MN phải chăng sẽ là hai điểm đặc biệt nào đó

2 – Khi nhận ra M là trung điểm của BA' thì ta tiến hành tính toán MN qua điểm A' bằng cách lấy P thuộc BC' !



Để có mặt phẳng $(BA'C')$ vuông góc với AB' . Do đó để MN là nhỏ nhất thì M là giao của AB' và BA' , N là điểm thuộc BC' sao cho góc giữa MN và $(A'B'C'D')$ là 30° . Gọi P là điểm thuộc BC' sao cho $A'P$ cũng hợp với mặt phẳng đáy một góc 30° , khi đó MN là đường trung bình của tam giác $BA'P$ nên $MN = \frac{1}{2}A'P$.

Giả sử độ dài đoạn $B'H = x$, khi đó $PH = HC' = a - x$ (tam giác $PC'H$ vuông cân tại C'), và $A'H = \sqrt{A'B'^2 + B'H^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$. Theo điều ta đã giả sử ở trên thì góc giữa $A'P$ và $(A'B'C'D') = 30^\circ$, do đó

$$\tan(\angle PA'H) = \frac{PH}{A'H} = \frac{a-x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ hay } \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{3}(a-x) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } A'P = \sqrt{A'H^2 + HP^2} = \sqrt{a^2+x^2 + (a-x)^2} = \sqrt{4(a-x)^2} = 2(a-x) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta tính được } A'P = \frac{4a}{\sqrt{5}+1}. \text{ Từ đây ta rút ra được } MN = \frac{2a}{\sqrt{5}+1}.$$

$\Rightarrow$ Chọn phương án **D**.

Câu 161: Một người xây nhà xưởng hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là $1152 m^2$ và chiều cao cố định. Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà xưởng thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường).

- A.** $16m \times 24m$. **B.** $8m \times 48m$. **C.** $12m \times 32m$. **D.** $24m \times 32m$.

Lời giải

Chọn A

Đặt x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao mỗi phòng.

$$\text{Theo giả thiết, ta có } x.3y = 1152 \rightarrow y = \frac{384}{x}.$$

Để tiết kiệm chi phí nhất khi diện tích toàn phần nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } S_p = 4xh + 6yh + 3xy = 4xh + 6 \frac{384}{x} h + 1152 = 4h \left(x + \frac{576}{x} \right) + 1152.$$

Vì h không đổi nên S_p nhỏ nhất khi $f(x) = x + \frac{576}{x}$ (với $x > 0$) nhỏ nhất.

Khảo sát $f(x) = x + \frac{576}{x}$ với $x > 0$, ta được $f(x)$ nhỏ nhất khi $x = 24 \rightarrow y = 16$.

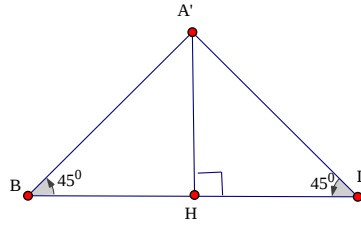
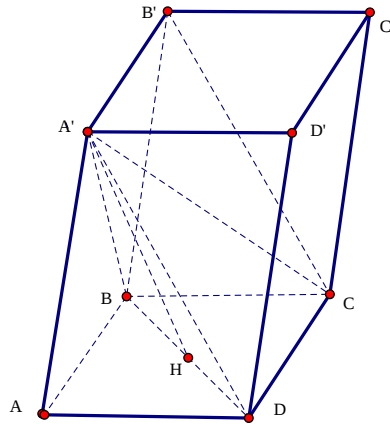
Câu 162: (THPT C NGHĨA HƯNG-NAM ĐỊNH Lần 1) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a; B'C' = a\sqrt{5}$, các đường thẳng $A'B$ và $B'C$ cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc

45° , tam giác $A'AB$ vuông tại B , tam giác $A'CD$ vuông tại D . Tính thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a .

- A. $2a^3$ B. $\frac{2a^3}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Lời giải

Đáp án A



Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} \Delta AA'B \perp \Rightarrow AB \perp A'B \\ \Delta A'CD \perp \Rightarrow CD \perp A'D \Rightarrow AB \perp A'D \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'BD) \Rightarrow AB \perp BD$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = AB \cdot AD = a \cdot 2a = 2a^2$$

Kẻ đường cao $A'H$ trong $\Delta A'BD \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$, góc giữa AB' và $(ABCD)$ là góc $A'BH = 45^\circ$

Do $B'C // A'D$ nên góc giữa $B'C$ và $(ABCD)$ là góc $A'DH = 45^\circ \Rightarrow \Delta A'BD$ vuông cân

$$\Rightarrow A'H = \frac{BD}{2} = \frac{2a}{2} = a \text{ từ đây tính được } V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H \cdot S_{ABCD} = a \cdot 2a^2 = 2a^3$$

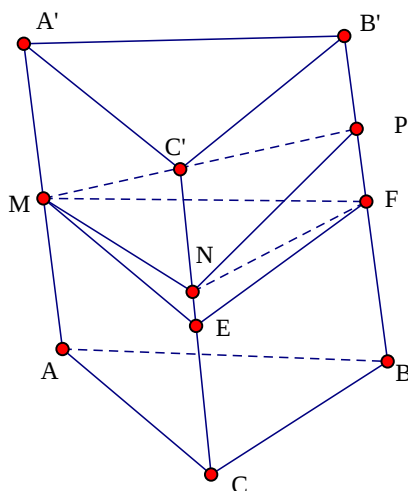
Câu 163: (THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng

2018. Gọi M là trung điểm AA' ; N, P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BB', CC' sao cho $BN = 2B'N, CP = 3C'P$. Tính thể tích khối đa diện $ABCMNP$

- A. $\frac{4036}{3}$. B. $\frac{32288}{27}$. C. $\frac{40360}{27}$. D. $\frac{23207}{18}$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi E, F là trung điểm BB', CC'

$$\text{Ta có } NE = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)BB' = \frac{1}{6}BB', PF = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)CC' = \frac{1}{4}CC'$$

$$S_{NEFP} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) S_{BCC'B'} = \frac{5}{24} \Rightarrow$$

$$V_{MNEFP} = \frac{5}{24} V_{A'BCC'B'} = \frac{5}{24} \cdot \frac{2}{3} V_{A'B'C'ABC} = \frac{5}{36} V_{A'B'C'ABC}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.MNP} = V_{ABC.MEF} + V_{MNEFP} = \frac{1}{2} V_{A'B'C'ABC} + \frac{5}{36} V_{A'B'C'ABC}$$

$$= \frac{23}{36} V_{A'B'C'ABC} = \frac{23}{36} \cdot 2018 = \frac{23207}{18}$$

Câu 164: (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 1) Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang vuông tại A và B, biết

$AB = BC = a, AD = 2a, SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB, SA. Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{66}}{22}$.

B. $2a\sqrt{66}$.

C. $\frac{a\sqrt{66}}{11}$.

D. $\frac{a\sqrt{66}}{44}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $E = AB \cap CD, G = NE \cap SB$.

Vì $BC \parallel AD, BC = \frac{1}{2}AD$ nên BC là đường trung bình của tam giác ADE. Do đó B, C lần lượt là trung điểm của AE, DE. Do đó G là trọng tâm của $\triangle SAE$.

Kéo theo $SG = \frac{2}{3}SB$. Mà $SM = \frac{1}{2}SB$, nên $SG = \frac{4}{3}SM = \frac{4}{3}(SG - MG) \Rightarrow SG = 4MG$.

Do đó $d(S, (NCD)) = d(S, (NED)) = 4d(M, (NED)) \Rightarrow d(M, (NCD)) = d(S, (NCD))$

Ta có $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}AD \cdot AE = \frac{1}{2}(2a)(2a) = 2a^2 \Rightarrow V_{NAED} = \frac{1}{3}NA \cdot S_{\triangle AED} = \frac{1}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) (2a^2) = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

$$V_{SAED} = \frac{1}{2}SA \cdot S_{\triangle AED} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_{SNED} = V_{SAED} - V_{NAED} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Mặt khác gọi P là trung điểm của AD, thì $CP \perp AD, CP = PD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C. Do đó $CD \perp AC$.

Mà $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp NC$

$$\text{Ta có } NC^2 = NA^2 + AC^2 = NA^2 + AB^2 + BC^2 = \frac{3a^2}{4} + 2a^2 = \frac{11a^2}{4}$$

$$ED^2 = AD^2 + AE^2 = 8a^2 \Rightarrow S_{\triangle NDE} = \frac{1}{2}NC \cdot ED = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{11}}{2}\right) (2\sqrt{2}a) = \frac{a^2\sqrt{22}}{2}$$

$$\text{Vì } V_{SNED} = \frac{1}{3}d(S, (NED))S_{\triangle NDE} \Rightarrow d(S, (NED)) = \frac{3V_{SNED}}{S_{\triangle NDE}} = \frac{\frac{3a^3\sqrt{3}}{3}}{\frac{a^2\sqrt{22}}{2}} = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

Câu 165: (ĐỀ 6_TOÁN 3K_HỨA LÂM PHONG) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, thể tích nhỏ nhất của khối chóp là bao nhiêu nếu như khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và DB là $2\sqrt{3}$ (cm)

A. $72(\text{cm}^3)$

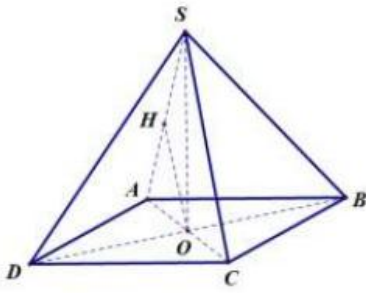
B. $9(\text{cm}^3)$

C. $8\sqrt{3}(\text{cm}^3)$

D. $\frac{16\sqrt{3}}{3}(\text{cm}^3)$

Lời giải

Gọi O là tâm của đáy. Gọi $a > 0$ là khoảng cách giữa SA và DB.



Đặt $AB = x > 0$. Về $OH \perp SA$ ta có $DB \perp SO, DB \perp AC \Rightarrow DB \perp (\text{SAC}) \Rightarrow DB \perp OH$

Suy ra $d(\text{SA}, \text{DB}) = OH = a$

Mặt khác, $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA^2} \Rightarrow SO^2 = \frac{x^2 a^2}{x^2 - 2a^2}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot AB^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{xa}{\sqrt{x^2 - 2a^2}} \cdot x^2 \Rightarrow \min V_{S.ABCD} = a^3 \sqrt{3}$ khi $x = a\sqrt{3}$

Áp dụng $a = 2\sqrt{3} \Rightarrow \min V_{S.ABCD} = 72(\text{cm}^3)$

Câu 166: (THPT QUẾ VÕ 2) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng SCD bằng 4. Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$, tìm giá trị lớn nhất của V :

A. $32\sqrt{3}$

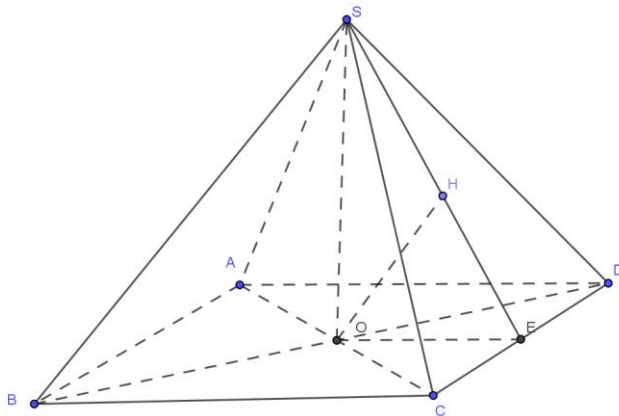
B. $8\sqrt{3}$

C. $16\sqrt{3}$

D. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta vẽ hình như hình vẽ. E là trung điểm của CD, $OH \perp SE$.

Dễ dàng cm được $OH = d(O; (\text{SCD})) = \frac{1}{2} d(A; (\text{SCD})) = 2$

Gọi $\angle SEO = \alpha (0 < \alpha < 90^\circ)$

$\Rightarrow OE = \frac{OH}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$

$SO = \frac{OH}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha} \Rightarrow$ Cạnh của hình vuông ABCD là: $\frac{4}{\sin \alpha}$

$$\text{Từ đó } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

$$\text{Đặt } \cos \alpha = t (t \in (0;1)) \text{ thì } \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = t(1-t^2).$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = t - t^3; f'(t) = 1 - 3t^2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của V đạt được khi $f(t)$ lớn nhất tức là $\min V = 16\sqrt{3}$.

Câu 167: (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 1) Xét khối tứ diện ABCD, AB = x, các cạnh còn lại bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện ABCD lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$.

B. $x = 2\sqrt{2}$.

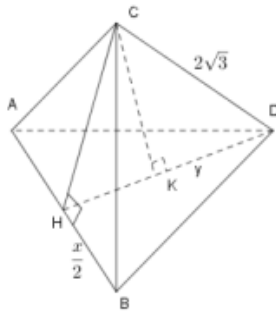
C. $x = \sqrt{14}$.

D. $x = 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm của cạnh AB, do $\triangle ABC$ cân tại C nên CH là đường cao. Tam giác ABD có $AD = DB = 2\sqrt{3}$ nên là tam giác cân tại D. Do đó HD là đường cao. Khi đó ta có



$$\begin{cases} CH \perp AB \\ HD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CHD)$$

Hạ đường cao CK xuống HD khi đó $CK \perp AB$. Do đó $CK \perp (ABD)$. Vậy CK là đường cao của tứ diện. Ta có $HB = \frac{x}{2}$. Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác HBC ta có

$$HC = \sqrt{BC^2 - HB^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{48 - x^2}}{2}$$

Tương tự ta có $HD = \frac{\sqrt{48 - x^2}}{2}$. Đặt $y = KD$. Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác CHK và CKD ta có

$$CK^2 = CH^2 - HK^2 = CD^2 - KD^2 \Leftrightarrow CH^2 - (HD - y)^2 = (2\sqrt{3})^2 - y^2$$

$$CH^2 - HD^2 + 2HD \cdot y - y^2 = 12 - y^2 \Leftrightarrow 2HD \cdot y = 12 \Leftrightarrow y = \frac{6}{HD} = \frac{12}{\sqrt{48 - x^2}}$$

Vì vậy

$$CK^2 = CD^2 - y^2 = 12 - \frac{12}{\sqrt{48 - x^2}} = \frac{12[(48 - x^2) - 12]}{48 - x^2} = \frac{12(36 - x^2)}{48 - x^2} \Rightarrow CK = \sqrt{\frac{12(36 - x^2)}{48 - x^2}}$$

$$\text{Diện tích tam giác ABD là } S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot HD = \frac{1}{2} x \cdot \frac{\sqrt{48-x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{48-x^2}}{4}$$

$$\text{Do đó thể tích tứ diện là } V = \frac{1}{3} CK \cdot S_1 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{12(36-x^2)}{48-x^2}} \cdot \frac{x\sqrt{48-x^2}}{4} = \frac{1}{6} \sqrt{3} \cdot x \cdot \sqrt{36-x^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho $(x, \sqrt{36-x^2})$ ta có

$$V = \frac{\sqrt{3}}{6} x \cdot \sqrt{36-x^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{x^2 + (36-x^2)}{2} = 3\sqrt{3}. \quad \square \text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi}$$

$$x = \sqrt{36-x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Nhận xét. Chúng ta có thể thay điều kiện các cạnh còn lại bằng $2\sqrt{3}$ bởi điều kiện các cạnh còn lại bởi một số $a > 0$ nào đó bất kì, để được một bài toán khác nhưng cách làm tương tự bài này.

Câu 168: (THPT Lê Văn Thịnh- Bắc Ninh-Lần 1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. I nằm trên cạnh SC sao cho $IS = 2IC$. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AI cắt cạnh SB, SD lần lượt tại M, N . Gọi V', V lần lượt là thể tích khối chóp $S.AMIN$ và $S.ABCD$. Tính giá trị nhỏ nhất của tỷ số thể tích $\frac{V}{V'}$

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{5}{54}$

C. $\frac{8}{15}$

D. $\frac{5}{24}$

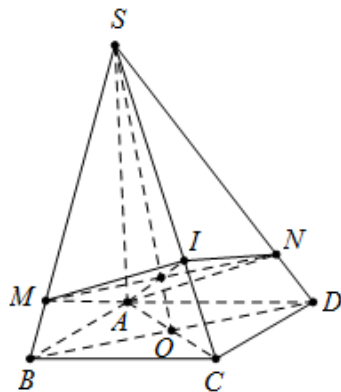
Lời giải

Đáp án C

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$

Gọi $H = SK \cap AI$ qua H kẻ $d // BD$ cắt SB, SD lần lượt tại M, N

Xét tam giác SAC có



$$\frac{IS}{IC} \cdot \frac{AC}{OC} \cdot \frac{OH}{SH} = 1 \Rightarrow \frac{OH}{SC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{SH}{SC} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Mà } MN // BD \rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{SH}{SO} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AMI}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SI}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{SM}{SB} \Rightarrow \frac{V_{S.AMI}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SM}{SB}$$

$$\text{Và } \frac{V_{S.ANI}}{V_{S.ACD}} = \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SI}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{SN}{SD} \Rightarrow \frac{V_{S.ANI}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SN}{SD}$$

$$\text{Suy ra } \frac{V'}{V} = \frac{1}{3} \left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{8}{15}$$

Câu 169: [THPT ĐỘI CÁN – VĨNH PHÚC 2018 - LẦN 1] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là

hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$, cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3}{8}$.

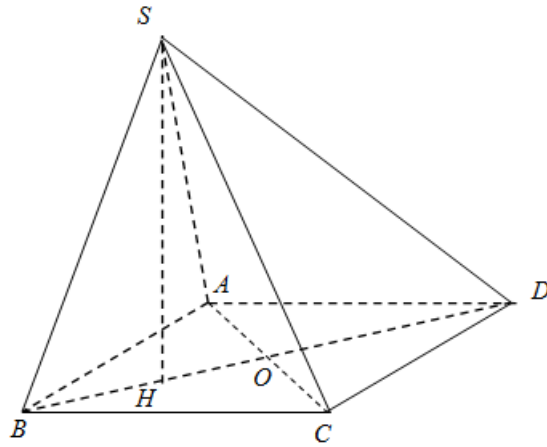
B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{3a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D



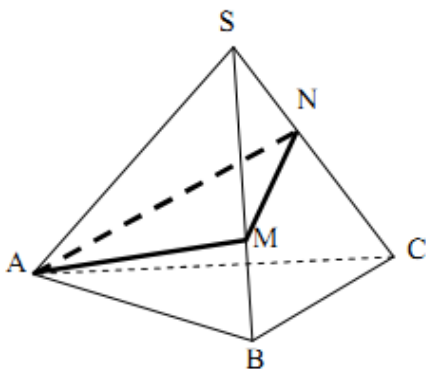
Đặt $V_{SABCD} = 2V_{SABC}$.

$$V_{SABC} = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{-\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2}}$$

V_{SABC} lớn nhất $\cos \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{4}$

$$\max V_{SABC} = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{a^3}{8} \Rightarrow \max V_{SABCD} = \frac{a^3}{4}$$

Câu 170: [THPT THUẬN THÀNH SỐ 3] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = a$, $\angle ASB = 30^\circ$. Người ta muốn trang trí cho hình chóp bằng một dây đèn nháy chạy theo các điểm A, M, N rồi quay lại A (đúng một vòng) như hình bên dưới. Độ dài ngắn nhất của dây đèn nháy là:



A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. $a\sqrt{2}$

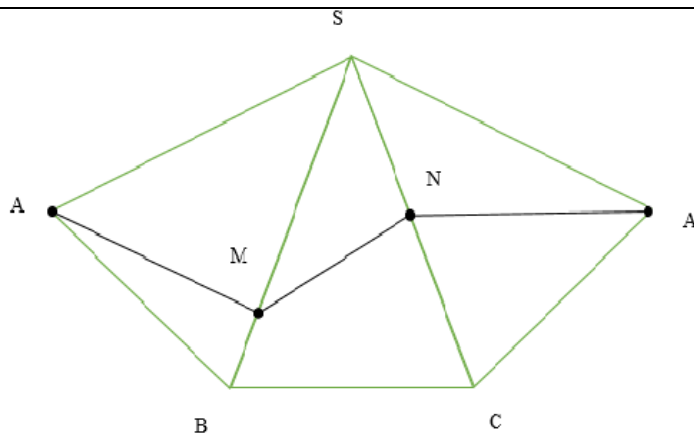
C. $a\sqrt{3}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Trái hình ra ta thu được:



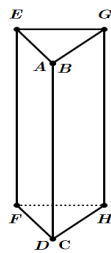
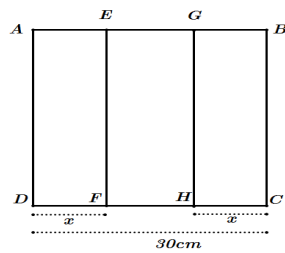
Để thấy $AM + MN + NA$ đạt giá trị nhỏ nhất khi A, M, N, A thẳng hàng

Lại có $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều $\Rightarrow \Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SAC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \angle ASB = \angle BSC = \angle CSA \Rightarrow \angle ASB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AM + MN + NA_{\min} = a\sqrt{2}$$

Câu 171: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình, lần 1 – 2018) Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:



A. $x = 5$ (cm).

B. $x = 9$ (cm).

C. $x = 8$ (cm).

D. $x = 10$ (cm).

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối trụ: $V = AD \cdot \frac{1}{2} CI \cdot FH$, I là trung điểm FH, có $FH = 30 - 2x$, với $\frac{30}{4} < x < 15$

$$V = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot (30 - 2x) \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{30 - 2x}{2}\right)^2} = 30(15 - x) \cdot \sqrt{30x - 225}$$

$$V' = 30 \cdot \left[-\sqrt{30x - 225} + (15 - x) \cdot \frac{15}{\sqrt{30x - 225}} \right] = 30 \frac{-45x + 450}{\sqrt{30x - 225}} = 0 \Leftrightarrow x = 10 [N]$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 15^-} V = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{30}{4}\right)^+} V = 0, V(10) = 30 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = 750\sqrt{3}.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ lớn nhất $V(10) = 30 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = 750\sqrt{3} (cm^3)$ khi $x = 10$ (cm).

Câu 172: [THPT-Chuyên-Bắc-Ninh-Bắc-Ninh-Lần-2] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M di động trên cạnh SC , đặt $\frac{MC}{MS} = k$. Mặt phẳng qua A, M song song với BD cắt SB, SD thứ tự tại N, P . Thể tích khối chóp

C. $APMN$ lớn nhất khi

A. $k = \sqrt{3}$.

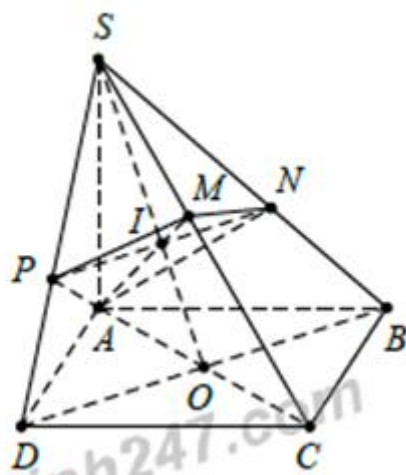
B. $k = 1$.

C. $k = 2$.

D. $k = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Phương pháp giải:

Dùng định lý Thalet, định lý Menelaus và phương pháp tỉ số thể tích để tính thể tích khối chóp theo tham số k .

Khảo sát hàm số chứa biến k để tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất

Lời giải:

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ và $I = SO \cap AM$.

Ba điểm M, A, I thẳng hàng nên áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SOC ta có:

$$\frac{SM}{MC} \cdot \frac{CA}{AO} \cdot \frac{OI}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{OI}{SI} = 1 = \frac{k}{2}.$$

$$\text{Vì } NP // BD \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{k+2} \text{ (định lý Thalet).}$$

$$\text{Và } d(P; (ABCD)) = d(N; (ABCD)) = \frac{DP}{SD} d(S; (ABCD))$$

$$= \frac{k}{k+2} \cdot d(S; (ANCD)) \Rightarrow V_{P.ACD} = V_{N.ABC} = \frac{k}{2k+4} \cdot V_{S.ABCD}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SP}{SD} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+2} \Rightarrow V_{S.ANMP} = \frac{2}{(k+1)(k+2)} \cdot V_{S.ABCD}$$

Vậy

$$V_{C.ANMP} = V_{S.ABCD} - V_{S.ANMP} - V_{P.ACD} - V_{N.ABC} = \left[1 - \frac{2}{(k+1)(k+2)} - \frac{k}{k+2} \right] \cdot V_{S.ABCD} = \frac{2k}{k^2 + 3k + 2} \cdot V_{S.ABCD}$$

$$\text{Để } \{V_{C.ANMP}\}_{\max} \Leftrightarrow f(k) = \frac{k}{k^2 + 3k + 2} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

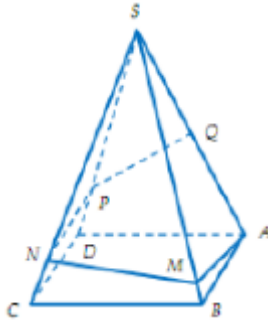
Xét hàm số $f(k) = \frac{k}{k^2 + 3k + 2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ có:

$$f'(k) = \frac{-k^2 + 2}{(k^2 + 3k + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow k = \sqrt{2} \text{ (vì } k > 0)$$

$$\Rightarrow \max_{(0; +\infty)} f(k) = f(\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Dầu bằng xảy ra khi và chỉ khi $k = \sqrt{2}$. Vậy khi $k = \sqrt{2}$ thì thể tích khối chóp $C.ANMP$ lớn nhất.

Câu 173: Bên cạnh con đường trước khi vào thành phố người ta xây một ngọn tháp đèn lồng lấy. Ngọn tháp hình tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên $SA = 600$ mét, $\angle ASB = 15^\circ$. Do sự cố đường dây điện tại điểm Q (là trung điểm của SA) bị hỏng, người ta tạo ra một con đường từ A đến Q gồm bốn đoạn thẳng: AM, MN, NP, PQ (hình vẽ). Để tiết kiệm kinh phí, kỹ sư đã nghiên cứu và nó được chiều dài con đường từ A đến Q ngắn nhất. Tính tỷ số $k = \frac{AM + MN}{NP + PQ}$



A. $k = 2$

B. $k = \frac{4}{3}$

C. $k = \frac{3}{2}$

D. $k = \frac{5}{3}$

Lời giải

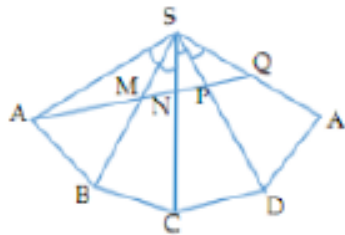
Chọn A

Phương pháp:

Trải 4 mặt của hình chóp ra mặt phẳng và tìm điều kiện để $AM + MN + NP + PQ$ là nhỏ nhất.

Cách giải:

Ta “xếp” 4 mặt của hình chóp lên một mặt phẳng, được như hình bên:



Như hình vẽ ta thấy, để tiết kiệm dây nhất thì các đoạn AM, MN, NP, PQ phải tạo thành một đoạn thẳng AQ .

Lúc này, xét $\triangle SAQ$ có:

$$\angle ASM = \angle MSN = \angle NSP = \angle PSQ = 15^\circ$$

$$SA = 600m, SQ = 300m$$

$$\Rightarrow k = \frac{AM + MN}{NP + PQ} = \frac{AN}{NQ} = \frac{SA}{SQ} = 2$$

(Vì $\frac{AN}{NQ} = \frac{SA}{SQ}$ do tính chất của đường phân giác SN).

Câu 174: (THPT Chuyên Đại Học Vinh - Nghệ An - 2018) Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288dm^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?

A. 1,08 triệu đồng.

B. 0,91 triệu đồng.

C. 1,68 triệu đồng.

D. 0,54 triệu đồng

Lời giải

Đáp án A • Gọi $x (x > 0)$ chiều rộng của đáy bể.

Ta có: + Chiều dài của đáy bể là: $2x$.

+ Chiều cao của bể là: $\frac{0,144}{x^2}$.

• Diện tích cần xây: $2x^2 + \frac{0,864}{x}$.

Xét $f(x) = 2x^2 + \frac{0,864}{x}$. Ta có: $f'(x) = 4x - \frac{0,864}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,6$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	0.6	$+\infty$	
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$		$+\infty$		2,16	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min f(x) = 2,16$.

Vậy: chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây bể là: $2,16 \cdot 500000 = 1080000$ đồng

Chương 12. Nón – trụ – cầu

Câu 175: [THPT Chuyên Vĩnh Phúc lần 3] Với một đĩa phẳng hình tròn bằng thép bán kính R , phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành một hình nón. Gọi độ dài cung tròn của hình quạt còn lại là x . Tìm x để thể tích khối nón tạo thành nhận giá trị lớn nhất.

A. $x = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$. B. $x = \frac{2\pi R\sqrt{2}}{3}$. C. $x = \frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$. D. $x = \frac{\pi R\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi r, l lần lượt là bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$, với h là chiều cao khối nón.

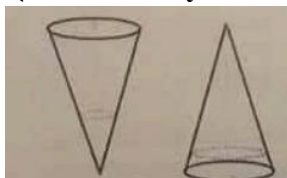
Ta có $r^4(l^2 - r^2) = 4 \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (l^2 - r^2) \leq \frac{4}{27} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + l^2 - r^2 \right) = \frac{4}{27} l^6$

Suy ra $r^2 \sqrt{l^2 - r^2} \leq \frac{2l^3}{3\sqrt{3}} \Rightarrow V_{(N)} \leq \frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{r^2}{2} = l^2 - r^2 \Leftrightarrow l^2 = \frac{3r^2}{2}$ (1)

Mà x là chu vi đường tròn đáy hình nón $\Rightarrow x = 2\pi r$ và đường sinh $l = R$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $R^2 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8\pi^2 R^2}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$.

Câu 176: (THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – 2018)

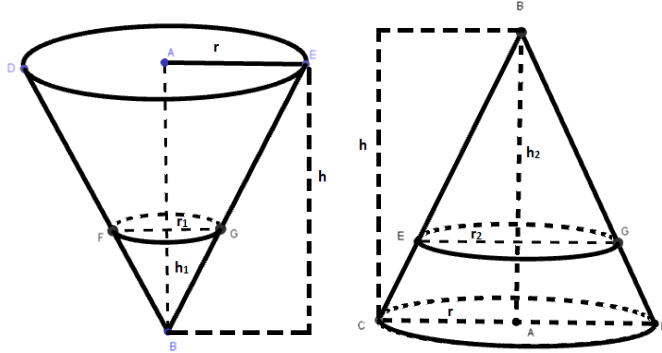


Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của mực nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15cm .

- A. $0,5(\text{cm})$. B. $0,3(\text{cm})$. C. $0,188(\text{cm})$. D. $0,216(\text{cm})$.

Lời giải

Chọn C



Gọi r, r_1, r_2, h, h_1, h_2 như hình vẽ.

Gọi V là thể tích khối nón ban đầu.

$$\frac{r_1}{r} = \frac{h_1}{h} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Thể tích nước đổ vào bằng } \frac{1}{27} V$$

Khi lộn ngược phễu thì thể tích phần không gian không chứa nước là $\frac{26}{27} V$

$$\text{Khi đó: } \frac{1}{3} \pi r_2^2 \cdot h_2 = \frac{26}{27} \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \Leftrightarrow \frac{r_2^2 \cdot h_2}{r^2 \cdot h} = \frac{26}{27} \text{ mà } \frac{r_2}{r} = \frac{h_2}{h} \text{ nên}$$

$$\left(\frac{h_2}{h} \right)^3 = \frac{26}{27} \Leftrightarrow \frac{h_2}{h} = \sqrt[3]{\frac{26}{27}} \Leftrightarrow h_2 = 15 \sqrt[3]{\frac{26}{27}}$$

Vậy chiều cao của nước khi lộn ngược phễu là $15 - 15 \sqrt[3]{\frac{26}{27}} \approx 0,188 \text{ (cm)}$.

Câu 177: (THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số giữa khối đa diện $A'B'C'BC$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn A

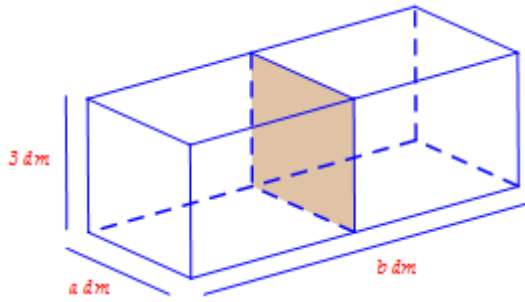
Để thấy mặt phẳng $(A'BC)$ chia khối lăng trụ thành 2 phần là khối đa diện $A'B'C'BC$ và chóp $A'.ABC$.

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = V_{A'B'C'BC} + V_{A'.ABC}$$

$$\text{Mà } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{A'B'C'BC} + \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'}$$

Câu 178: Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích 72dm^3 và chiều cao là 3dm . Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a, b (đơn vị dm) như hình vẽ. Tính a, b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.

A. $a = \sqrt{24}$, $b = \sqrt{24}$. B. $a = 3$, $b = 8$. C. $a = 3\sqrt{2}$, $b = 4\sqrt{2}$. D. $a = 4$, $b = 6$.



Lời giải

Chọn D

Tự luận:

Có: $V = 72 \Leftrightarrow 3.ab = 72 \Leftrightarrow a = \frac{24}{b}$ (1)

Bể cá tốn ít nguyên liệu nhất nghĩa là diện tích toàn phần nhỏ nhất.

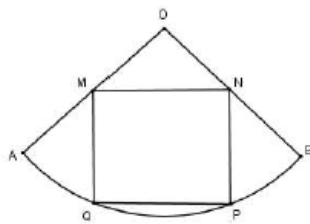
Ta có diện tích toàn phần của bể cá là: $S_{tp} = 3.3a + ab + 2.b3 = \frac{216}{b} + 6b + 24$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $S_{tp} = \frac{216}{b} + 6b + 24 \geq 2\sqrt{\frac{216}{b} \cdot 6b} + 24 = 96$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{216}{b} = 6b \Leftrightarrow b = 6 (b > 0)$. Từ (1), ta suy ra: $a = 4$.

Câu 179: (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho tấm tôn hình nón có bán kính đáy là $r = \frac{2}{3}$,

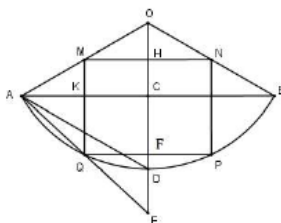
độ dài đường sinh $l = 2$. Người ta cắt theo một đường sinh và trải phẳng ra được một hình quạt. Gọi M , N thứ tự là trung điểm OA và OB . Hòì khi cắt hình quạt theo hình chữ nhật $MNPQ$ (hình vẽ) và tạo thành hình trụ đường sinh PN trùng MQ (2 đáy làm riêng) thì được khối trụ có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\frac{3\pi(\sqrt{13}-1)}{8}$. B. $\frac{3(\sqrt{13}-1)}{4\pi}$. C. $\frac{5(\sqrt{13}-1)}{12\pi}$. D. $\frac{\pi(\sqrt{13}-1)}{9}$.

Lời giải

Đáp án A



Phương pháp:

Tính độ dài các đoạn thẳng MN và MQ sau đó áp dụng công thức tính thể tích hình trụ

$$V = \pi r^2 h.$$

Cách giải:

Độ dài cung AB là chu vi đường tròn đáy nên $l_{AB} = 2\pi.r = 2\pi \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Ta có độ dài cung AB là $l_{AB} = \alpha OA \Rightarrow \alpha = \frac{l_{AB}}{OA} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} = \angle AOB$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác OAB có

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2.2^2 \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}$$

$$MN = \frac{1}{2} AB = \sqrt{3} = PQ \Rightarrow MH = \frac{1}{2} MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hạ $OD \perp MN$ ta có OD là tia phân giác của $AOB \Rightarrow \angle AOD = 60^\circ, OD$ cắt AQ tại E .

Xét tam giác vuông OMH có $OH = OM.\cos 60 = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Xét tam giác OPQ có $\cos \angle POQ = \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2.OP.OQ} = \frac{4+4-3}{2.2.2} = \frac{5}{8}$

Mà $\cos \angle POQ = \cos(2\angle DOQ) = 2\cos^2 \angle DOQ - 1 = \frac{5}{8} \Rightarrow \cos \angle DOQ = \frac{\sqrt{13}}{4}$

Xét tam giác DOQ có $QD^2 = OQ^2 + OD^2 - 2OQ.OD \cos \angle DOQ = 4+4-2.2.2.\frac{\sqrt{13}}{4} = 8-2\sqrt{13}$

Xét tam giác vuông DQF có:

$$DF^2 = QD^2 - QF^2 = 8-2\sqrt{13} + \frac{3}{4} = \frac{29}{4} - 2\sqrt{13} \Leftrightarrow DF = \frac{\sqrt{29-8\sqrt{13}}}{2} = \frac{\sqrt{16-2.4.\sqrt{13}+13}}{2} = \frac{4-\sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow HF = OD - OH - DF = 2 - \frac{1}{2} - \frac{4-\sqrt{13}}{2} = \frac{4-1-4+\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}-1}{2} = MQ$$

Khi đó thể tích khối trụ tạo ra bởi hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$$V = \pi.MH^2.MQ = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{13}-1}{2} = \frac{3\pi(\sqrt{13}-1)}{8}$$

Chú ý khi giải: Có thể tính độ dài MQ bằng cách như sau:

Xét tam giác OAE có:

$$EA^2 = OA^2 + OE^2 - 2OA.OE \cos \angle AOE = 4 + (2+DE)^2 - 2.2.(2+DE).\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow EA^2 = DE^2 + 2DE + 4$$

Gọi F là giao điểm của ED với đường tròn tâm O bán kính $OA = 2$.

Khi đó theo tính chất hai cát tuyến EQA, EDF ta có

$$EQ.EA = ED.EF \Rightarrow \frac{1}{2} EA^2 = ED(ED+4) \Leftrightarrow EA^2 = 2ED^2 + 8ED \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $DE^2 + 2DE + 4 = 2DE^2 + 8DE \Leftrightarrow DE^2 + 6DE - 4 = 0 \Leftrightarrow DE = \sqrt{13} - 3$

$$\text{Do đó } OE = OD + DE = 2 + \sqrt{13} - 3 = \sqrt{13} - 1 \Rightarrow MQ = \frac{1}{2} OE = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$$

$$\text{Vậy } MQ = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$$

Câu 180: (MEGABOOK-ĐỀ 3). Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để thu được khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết rằng $MN = 60\text{cm}$ và thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng 30dm^3 . Tìm thể tích của lượng đá bị cắt bỏ (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân).

A. $101,3\text{dm}^3$

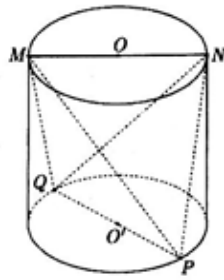
B. $141,3\text{dm}^3$

C. $121,3\text{dm}^3$

D. $111,4\text{dm}^3$

Lời giải

Chọn D



Ta dễ dàng chứng minh được $(O'MN)$ vuông góc với PQ .

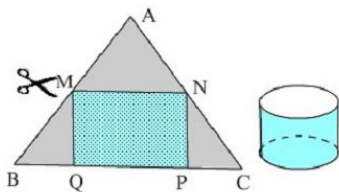
$$\text{Do đó thể tích khối tứ diện } MNPQ \text{ là: } V_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNO} \cdot PQ = \frac{1}{6} \cdot OO' \cdot MN \cdot PQ$$

$$\text{Trong đó } d(MN, PQ) = OO' = h \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 60^2 \cdot h \cdot 1 = 30 \cdot 10^3 \Leftrightarrow h = 50\text{cm}.$$

Vậy thể tích của lượng đá bị cắt bỏ bằng:

$$V = V_t - V_{MNPQ} = \pi R^2 \cdot h - 30 = \frac{\pi}{10^3} \cdot \left(\frac{60}{2}\right)^2 \cdot 50 - 30 \approx 111,4\text{dm}^3.$$

Câu 181: (THTT - Lần 2 - 2018) Có tấm bìa hình tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền bằng a . Người ta muốn cắt tấm bìa đó thành hình chữ nhật $MNPQ$ rồi cuộn lại thành một hình trụ không đáy như hình vẽ.



Diện tích hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu để diện tích chung quanh của hình trụ là lớn nhất?

A. $\frac{a^2}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

C. $\frac{a^2}{8}$

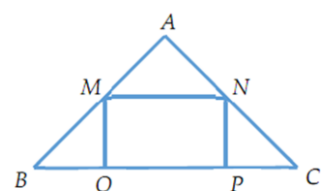
D. $\frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{8}$

Lời giải

Đáp án D

$$\text{Đặt } MN = PQ = x, \text{ có } \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow \frac{a-2x}{a} = \frac{AN}{a\sqrt{2}} \Rightarrow AN = \frac{a-2x}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow NC = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a-2x}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2}$$

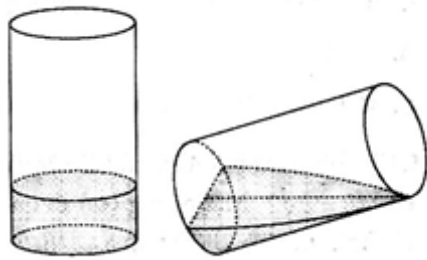


$$NC = \sqrt{PC^2 + PN^2} = \sqrt{2x^2 + x^2} = x\sqrt{3}$$

$$\text{Có } S_{xq} = S_{MNPQ} = x\sqrt{3}(a - 2x)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = f\left(\frac{a}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right) \text{ có } f_{\max} = f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

Câu 182: (MEGABOOK-ĐỀ 3). Bạn A có một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc là 6cm , chiều cao trong lòng cốc là 10cm đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Tính thể tích lượng nước trong cốc.



A. 60cm^3

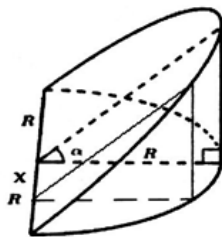
B. $15\pi\text{cm}^3$

C. 70cm^3

D. $60\pi\text{cm}^3$

Lời giải

Chọn A



Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kì có (tam giác màu đen):

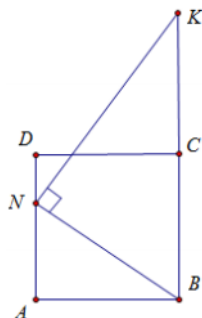
$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha$$

$$\text{Thể tích hình cái nôm là: } V = 2 \cdot \frac{1}{2} \tan \alpha \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$

Thể tích khối nước tạo thành khi nghiêng cốc có hình dạng cái nôm nên

$$V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha \Rightarrow V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = 60\text{cm}^3.$$

Câu 183: (Toan Luyen de THPTQG) Cho hình vuông ABCD cạnh a . Gọi N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2DN$. Đường thẳng qua N vuông góc với BN cắt BC tại K.



Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác ANKB quanh trục BK là

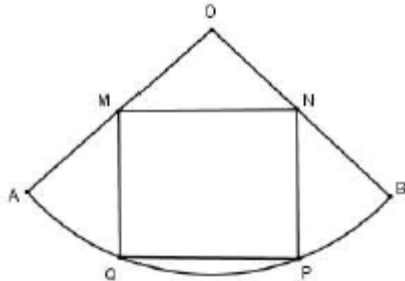
A. $V = \frac{6}{7}\pi a^3$

B. $V = \frac{3}{2}\pi a^3$

C. $V = \frac{4}{3}\pi a^3$

D. $V = \frac{7}{6}\pi a^3$

Câu 184: (THPT CHUYÊN BẮC NINH) Cho tấm tôn hình nón có bán kính đáy là $r = \frac{2}{3}$, độ dài đường sinh $l = 2$. Người ta cắt theo một đường sinh và trải phẳng ra được một hình quạt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm OA và OB . Hỏi khi cắt hình quạt theo hình chữ nhật $MNPQ$ (hình vẽ) và tạo thành hình trụ đường sinh PN trùng MQ (2 đáy làm riêng) thì được khối trụ có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\frac{3\pi(\sqrt{13}-1)}{8}$

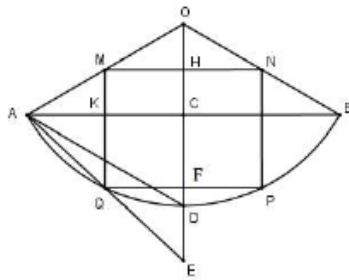
B. $\frac{3(\sqrt{13}-1)}{4\pi}$

C. $\frac{5(\sqrt{13}-1)}{12\pi}$

D. $\frac{\pi(\sqrt{13}-1)}{9}$

Lời giải

Chọn A



Độ dài cung AB là chu vi đường tròn đáy nên $l_{AB} = 2\pi.r = 2\pi.\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Ta có độ dài cung AB là $l_{AB} = \alpha OA \Rightarrow \alpha = \frac{l_{AB}}{OA} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} = \angle AOB$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác OAB có

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2.2^2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}$$

$$MN = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3} = PQ \Rightarrow MH = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hạ $OD \perp MN$ ta có OD là tia phân giác của $\angle AOB \Rightarrow \angle AOD = 60^\circ, OD$ cắt AQ tại E.

Xét tam giác vuông OMH có $OH = OM.\cos 60 = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Xét tam giác OPQ có $\cos \angle POQ = \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2.OP.OQ} = \frac{4+4-3}{2.2.2} = \frac{5}{8}$

Mà $\cos \angle POQ = \cos(2\angle DOQ) = 2\cos^2 \angle DOQ - 1 = \frac{5}{8} \Rightarrow \cos \angle DOQ = \frac{\sqrt{13}}{4}$

Xét tam giác DOQ có $QD^2 = OQ^2 + OD^2 - 2OQ.OD\cos \angle DOQ = 4+4-2.2.\frac{\sqrt{13}}{4} = 8-2\sqrt{13}$

Xét tam giác vuông DQF có:

$$DF^2 = QD^2 - QF^2 = 8 - 2\sqrt{13} + \frac{3}{4} = \frac{29}{4} - 2\sqrt{13} \Leftrightarrow DF = \frac{\sqrt{29-8\sqrt{13}}}{2} = \frac{\sqrt{16-2.4.\sqrt{13}+13}}{2} = \frac{4-\sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow HF = OD - OH - DF = 2 - \frac{1}{2} - \frac{4-\sqrt{13}}{2} = \frac{4-1-4+\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}-1}{2} = MQ$$

Khi đó thể tích khối trụ tạo ra bởi hình chữ nhật MNPQ là:

$$V = \pi.MH^2.MQ = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{13}-1}{2} = \frac{3\pi(\sqrt{13}-1)}{8}$$

Câu 185: (THPT Lê Văn Thịnh- Bắc Ninh-Lần 1) Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh bằng 2 và hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle HBA = 150^\circ$, $\angle HBC = 120^\circ$, $\angle HCA = 90^\circ$. Biết tổng diện tích mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB$, $S.HBC$, $S.HCA$ là $\frac{124}{3}\pi$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{9}{2}$

B. $V_{S.ABC} = \frac{4}{3}$

C. $V_{S.ABC} = 4a^3$

D. $V_{S.ABC} = 4$

Lời giải

Đáp án B

Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle HAB, \triangle HBC, \triangle HCA$

Theo định lí Sin, ta có $\frac{AB}{\sin \angle HBA} = 2r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{2}{2 \cdot \sin 150^\circ} = 2$; tương tự $\begin{cases} r_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ r_3 = 1 \end{cases}$

Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.HAB, S.HBC, S.HCA$

Đặt $SH = 2x \Rightarrow R_1 = \sqrt{r_1^2 + \frac{SH^2}{4}} = \sqrt{x^2 + 4}$; $R_2 = \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}}$ và $R_3 = \sqrt{x^2 + 1}$

Suy ra $\sum S = S_1 + S_2 + S_3 = 4\pi R_1^2 + 4\pi R_2^2 + 4\pi R_3^2 = 4\pi \left(3x^2 + \frac{19}{3} \right) = \frac{124\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

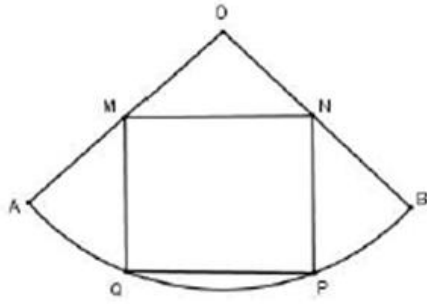
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{3}$

Chú ý: “Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy và $R_{\triangle ABC}$ là bán kính đường tròn

ngoại tiếp tam giác $ABC \rightarrow R = \sqrt{R_{\triangle ABC}^2 + \frac{SA^2}{4}}$ là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

$S.ABC$ ”

Câu 186: [THPT-Chuyên-Bắc-Ninh-Bắc-Ninh-Lần-2] Cho tấm tôn hình nón có bán kính đáy là $r = \frac{2}{3}$, độ dài đường sinh $l = 2$. Người ta cắt theo một đường sinh và trải phẳng ra được một hình quạt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm OA và OB . Hỏi khi cắt hình quạt theo hình chữ nhật $MNPQ$ (hình vẽ) và tạo thành hình trụ đường sinh PN trùng MQ (2 đáy làm riêng) thì được khối trụ có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\frac{3\pi(\sqrt{13}-1)}{8}$.

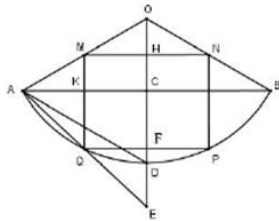
B. $\frac{3(\sqrt{13}-1)}{4\pi}$.

C. $\frac{5(\sqrt{13}-1)}{12\pi}$.

D. $\frac{\pi(\sqrt{13}-1)}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Phương pháp:

Tính độ dài các đoạn thẳng MN và MQ sau đó áp dụng công thức tính thể tích hình trụ $V = \pi r^2 h$.

Cách giải:

Độ dài cung AB là chu vi đường tròn đáy nên $l_{AB} = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Ta có độ dài cung AB là $l_{AB} = \alpha OA \Rightarrow \alpha = \frac{l_{AB}}{OA} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} = \angle AOB$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác OAB có

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}$$

$$MN = \frac{1}{2} AB = \sqrt{3} = PQ \Rightarrow MH = \frac{1}{2} MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hạ $OD \perp MN$ ta có OD là tia phân giác của $\angle AOB \Rightarrow \angle AOD = 60^\circ$, OD cắt AQ tại E.

Xét tam giác vuông OMH có $OH = OM \cdot \cos 60 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Xét tam giác OPQ có $\cos \angle POQ = \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2 \cdot OP \cdot OQ} = \frac{4 + 4 - 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{8}$

Mà $\cos \angle POQ = \cos(2\angle DOQ) = 2\cos^2 \angle DOQ - 1 = \frac{5}{8} \Rightarrow \cos \angle DOQ = \frac{\sqrt{13}}{4}$

Xét tam giác DOQ có $QD^2 = OQ^2 + OD^2 - 2OQ \cdot OD \cos \angle DOQ = 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} = 8 - 2\sqrt{13}$

Xét tam giác vuông DQF có:

$$DF^2 = QD^2 - QF^2 = 8 - 2\sqrt{13} + \frac{3}{4} = \frac{29}{4} - 2\sqrt{13} \Leftrightarrow DF = \frac{\sqrt{29 - 8\sqrt{13}}}{2} = \frac{\sqrt{16 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{13} + 13}}{2} = \frac{4 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow HF = OD - OH - DF = 2 - \frac{1}{2} - \frac{4 - \sqrt{13}}{2} = \frac{4 - 1 - 4 + \sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} = MQ$$

Khi đó thể tích khối trụ tạo ra bởi hình chữ nhật MNPQ là:

$$V = \pi \cdot MH^2 \cdot MQ = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{13} - 1}{2} = \frac{3\pi(\sqrt{13} - 1)}{8}$$

Chú ý khi giải: Có thể tính độ dài MQ bằng cách như sau:

Xét tam giác OAE có:

$$EA^2 = OA^2 + OE^2 - 2OA \cdot OE \cos AOE = 4 + (2 + DE)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (2 + DE) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow EA^2 = DE^2 + 2DE + 4$$

Gọi F là giao điểm của ED với đường tròn tâm O bán kính OA = 2.

Khi đó theo tính chất hai cát tuyến EQA, EDF ta có

$$EQ \cdot EA = ED \cdot EF \Rightarrow \frac{1}{2} EA^2 = ED(ED + 4) \Leftrightarrow EA^2 = 2ED^2 + 8ED \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } DE^2 + 2DE + 4 = 2DE^2 + 8DE \Leftrightarrow DE^2 + 6DE - 4 = 0 \Leftrightarrow DE = \sqrt{13} - 3$$

$$\text{Do đó } OE = OD + DE = 2 + \sqrt{13} - 3 = \sqrt{13} - 1 \Rightarrow MQ = \frac{1}{2} OE = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}$$

$$\text{Vậy } MQ = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}.$$

Chương 13. Oxyz

Câu 187: [THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội] Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(0;0;-1), B(-1;1;0), C(1;0;1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$. B. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2\right)$. C. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1\right)$. D. $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Gọi } I(x_I; y_I; z_I) \text{ thỏa mãn điều kiện } 3\overline{IA} + 2\overline{IB} - \overline{IC} = \vec{0} \Rightarrow I\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 3(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + 2(\overline{MI} + \overline{IB})^2 - (\overline{MI} + \overline{IC})^2 \\ &= 4MI^2 + 2\overline{MI} \left(\begin{matrix} 3\overline{IA} + 2\overline{IB} - \overline{IC} \\ 1 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \end{matrix} \right) + 3IA^2 + 2IB^2 - IC^2 = 4MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 - IC^2 \end{aligned}$$

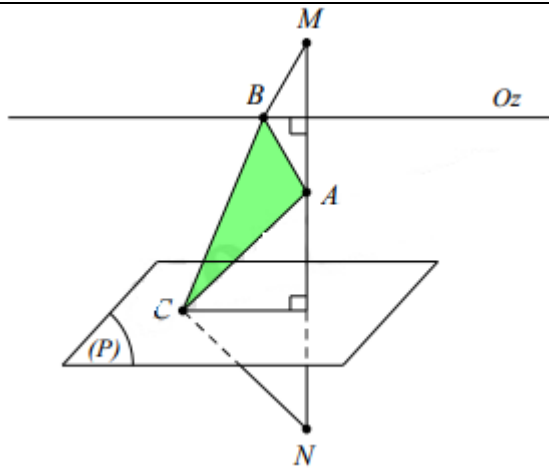
$$\text{Suy ra } P_{\min} \Leftrightarrow MI \min \Rightarrow M \text{ trùng với điểm } I. \text{ Vậy } M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$$

Câu 188: [THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội] Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;-6;1)$ và mặt phẳng (P): $x + y + 7 = 0$. Điểm B thay đổi thuộc Oz, điểm C thay đổi thuộc mặt phẳng (P). Biết rằng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất. Tọa độ điểm B là

A. $B(0;0;1)$. B. $B(0;0;-2)$. C. $B(0;0;-1)$. D. $B(0;0;2)$

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là hai điểm đối xứng với A qua Oz và mặt phẳng (P) (hình vẽ bên: Điểm A nằm giữa Oz , (P) vì O, A cùng phía với (P) và $d(Oz; (P)) > d(A; (P))$).

Khi đó $C_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = BM + BC + CN$

Suy ra $\{BM + BC + CN\}_{\min} \Rightarrow B, C, M, N$ thẳng hàng.

Hay B là hình chiếu của A trên Oz , Vậy $B(0;0;1)$

Câu 189: (THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định – 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

- A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. B. $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. D. $(-2; 11; 1)$

Lời giải

Chọn A

Gọi D là chân đường phân giác góc B của $\triangle ABC$. Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{DA}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{AB}{BC} \cdot \overrightarrow{DC} (*)$$

$$\text{Với } \overrightarrow{AB} = (1; -3; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{26} \text{ và } \overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow BC = \sqrt{104}$$

$$k = -\frac{AB}{BC} = -\frac{1}{2}$$

Từ (*) ta có, điểm D chia đoạn thẳng AC theo tỷ số k nên D có tọa độ

$$\begin{cases} x_D = \frac{x_A - kx_C}{1 - k} = -\frac{2}{3} \\ y_D = \frac{y_A - ky_C}{1 - k} = \frac{11}{3} \\ z_D = \frac{z_A - kz_C}{1 - k} = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right).$$

Câu 190: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$; cho $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a, b, c dương.

Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P)

A. 2017.

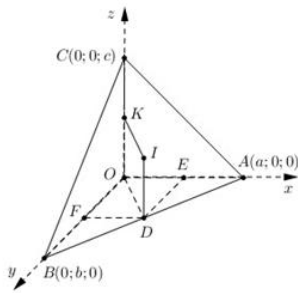
B. $\frac{2014}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{2016}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D, K lần lượt là trung điểm của AB, OC .

Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (OAB) và cắt mặt phẳng trung trực của OC

tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ suy ra $z_1 = \frac{c}{2}$

Tương tự $DF = \frac{a}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{a}{2}; y_1 = \frac{b}{2} \Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$

Suy ra $x_1 + y_1 + z_1 = \frac{a+b+c}{2} = 1 \Rightarrow I \in (P): x + y + z - 1 = 0$

Vậy khoảng cách từ điểm M đến (P) bằng $d = \frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Câu 191: (MEGABOOK-ĐỀ 3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $H(-2; -1; 3)$

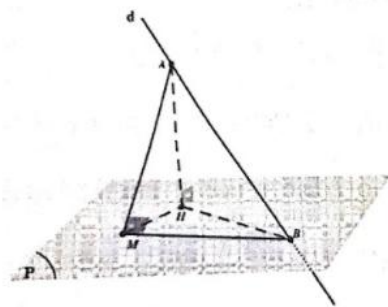
B. $I(-1; -2; 3)$

C. $K(3; 0; 15)$

D. $J(-3; 2; 7)$

Lời giải

Chọn B



Phương trình đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$B \in d \Rightarrow B(1 + 3t; 2 + 4t; -3 - 4t)$

Mà $B \in (P) \Leftrightarrow 18t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B(-2; -2; 1)$

Do $\triangle MAB$ vuông tại $M \Rightarrow MB = \sqrt{AB^2 - MA^2}$

Để MB lớn nhất $\Rightarrow MA$ nhỏ nhất

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P)

Xét $\triangle AHM$ vuông tại $H \Rightarrow AM \geq AH$

Để MA nhỏ nhất $\Rightarrow M \equiv H \Rightarrow MB$ là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (α) ((α) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P))

$$\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_P, \vec{u}_d] = (-4; 5; 2) \Rightarrow \vec{u}_{MB} = [\vec{n}_P, \vec{n}_\alpha] = 9(1; 0; 2)$$

Vậy phương trình đường thẳng MB :
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$
. Thấy ngay điểm $I(-1; -2; 3)$ thỏa mãn.

Câu 192: (THPT CHUYÊN LAM SƠN-THANH HÓA LẦN 1 NĂM 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(1; 1; 1)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D ?

A. 10. B. 6. C. 7. D. 5.

Lời giải

- O, A, B, C không đồng phẳng nên chúng là 4 đỉnh của một tứ diện.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \Rightarrow D \in (ABC)$. Dễ thấy D không nằm trên các mặt phẳng (OAB) , (OBC) , (OCA) (tự vẽ hình minh họa). Đếm trực tiếp ta có 7 mặt phẳng phân biệt.

Đáp án C

Câu 193: (MEGABOOK-SỐ 06) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm

$A(9; -3; 5)$, $B(a; b; c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oxz) và (Oyz) . Biết M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho

$AM = MN = NP = PB$. Giá trị của tổng $a + b + c$ là:

A. -21 B. -15 C. 15 D. 21

Lời giải

Đáp án B

$$\text{Đường thẳng } AB \begin{cases} x = 9 + (9 - a)t \\ y = -3 + (-3 - b)t \\ z = 5 + (5 - c)t \end{cases}$$

Từ điều kiện $M, N, P \in AB$ và $AM = MN = NP = PB$.

$\Rightarrow M, N, P$ là trung điểm của AB , AN và BN

$$\Rightarrow N\left(\frac{9+a}{2}; \frac{-3+b}{2}; \frac{5+c}{2}\right), M\left(\frac{9+\frac{9+a}{2}}{2}; \frac{-3+\frac{-3+b}{2}}{2}; \frac{5+\frac{5+c}{2}}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{a+\frac{9+a}{2}}{2}; \frac{b+\frac{-3+b}{2}}{2}; \frac{c+\frac{5+c}{2}}{2}\right)$$

$$\text{Mà } \begin{cases} M \in (Oxy) \\ N \in (Oxz) \\ P \in (Oyz) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5 + \frac{5+c}{2}}{2} = 0 \\ \frac{-3+b}{2} = 0 \\ a + \frac{9+a}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \\ c = -15 \end{cases} \text{ . Vậy } a+b+c = -15.$$

Câu 194: [THPT CHUYÊN LAM SƠN-THANH HÓA LẦN 2-2018] Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$

B. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$

C. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Chọn A

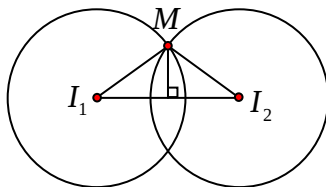
Gọi $M(x; y; z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$$\overline{AM} = (x; y+1; z-2), \overline{BM} = (x-2; y+3; z), \overline{CM} = (x+2; y-1; z-1), \overline{DM} = (x; y+1; z-3).$$

$$\text{Từ giả thiết: } \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 1 \\ \overline{MC} \cdot \overline{MD} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + (y+1)(y+3) + z(z-2) = 1 \\ x(x+2) + (y+1)(y-1) + (z-1)(z-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1;-2;1)$, $R_1 = 2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1;0;2)$, $R_2 = 2$.



Ta có: $I_1I_2 = \sqrt{5}$.

$$\text{Dễ thấy: } r = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{I_1I_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$