

Câu 1 (4 điểm):

Cho biểu thức: $P = \left[\frac{2}{3a} - \frac{2}{a+1} \left(\frac{a+1}{3a} - a - 1 \right) \right] : \frac{a-1}{a}$

1. Rút gọn biểu thức P;
2. Tìm a để $P < 1$;
3. Tìm các giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên.

Câu 2 (5 điểm): Giải phương trình và bất phương trình sau:

1. $x(5 - 2x) + 2x(x - 1) = 15$;
2. $x^2 - 2x + 3|x - 1| < 3$
3. $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$

Câu 3 (3 điểm):

1. Cho x là số nguyên chứng minh rằng:
 $A = (x + 1)(x + 3)(x + 4)(x + 6) + 9$ là số chính phương.
2. Chứng minh rằng nếu $x \in \mathbb{N}$, $x > 1$ thì $B = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$ là hợp số.

Câu 4 (7 điểm):

1. (4 điểm): Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Đường thẳng đi qua O song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại M và N.

- a. Chứng minh $OM = ON$.
- b. Chứng minh $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$.
- c. Tính diện tích tứ giác ABCD, biết $S_{\triangle AOB} = 1010^2 \text{ (cm}^2\text{)}$, $S_{\triangle COD} = 1011^2 \text{ (cm}^2\text{)}$.

2. (3 điểm): Cho tam giác ABC vuông tại A, ($AC > AB$), đường cao AH. Trên tia HC lấy D sao cho $HD = HA$; đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E; M là trung điểm BE.

- a. Chứng minh $\triangle BEC$ đồng dạng với $\triangle ADC$.
- b. Tính số đo góc AHM.

Câu 5 (1 điểm):

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng $\frac{x+y}{xyz} \geq \frac{4}{9}$.

(Học sinh không được dùng máy tính cá nhân)

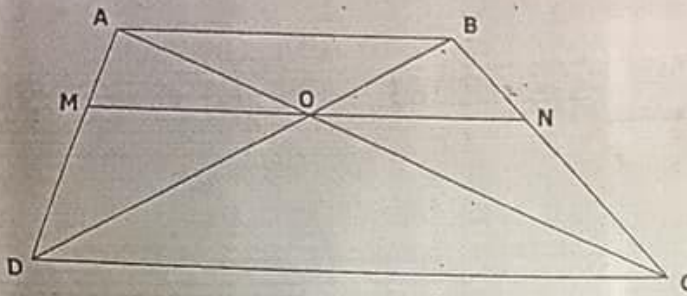
Họ và tên thí sinh: SBD:

HƯỚNG DẪN CHẤM TOÁN 8

HƯỚNG DẪN CHẤM TOÁN 8

Câu	Nội dung chính	Điểm										
	1) Với điều kiện $a - 1 \neq 0, a \neq 0, a + 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm 1$ và $a \neq 0$ ta có:	0,25đ										
	$P = \left[\frac{2}{3a} - \frac{2}{a+1} \left(\frac{a+1}{3a} - a - 1 \right) \right] : \frac{a-1}{a}$ $= \left[\frac{2}{3a} - \frac{2}{a+1} \left(\frac{a+1}{3a} - (a+1) \right) \right] : \frac{a}{a-1}$ $= \left[\frac{2}{3a} - \frac{2}{a+1} \cdot \frac{a+1}{3a} + \frac{2}{a+1} \cdot (a+1) \right] : \frac{a}{a-1}$ $= \left[\frac{2}{3a} - \frac{2}{3a} + 2 \right] : \frac{a}{a-1} = 2 : \frac{a}{a-1} = \frac{2a}{a-1}$	0,5đ 0,25đ 0,5đ										
	2) Với $a \neq \pm 1, a \neq 0$, thì $P < 1$ khi và chỉ khi:	0,25đ										
1 4đ	$P = \frac{2a}{a-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2a}{a-1} - 1 < 0$ $\Leftrightarrow \frac{2a - a + 1}{a-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{a+1}{a-1} < 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a+1 > 0 \\ a-1 < 0 \end{cases} \text{ (vì } a+1 > a-1) \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < a < 1$ Vì $a \neq \pm 1, a \neq 0 \Rightarrow -1 < a < 1$ và $a \neq 0$ (nếu $a = 0$ thì P không xác định) Vậy với $-1 < a < 1$ và $a \neq 0$ thì $P < 1$.	0,25đ 0,25đ (Phần này không tính điểm)										
	3) Với $a \neq \pm 1, a \neq 0$, ta có:											
	$P = \frac{2a}{a-1} = \frac{2a-2+2}{a-1} = \frac{2(a-1)+2}{a-1} = 2 + \frac{2}{a-1}$ $\Rightarrow P \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow a-1 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\}$ <table> <tr> <td>$a-1$</td><td>-2</td><td>-1</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr> <td>a</td><td>-1 (loại)</td><td>0 (loại)</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table> Vậy khi $a \in \{2; 3\}$ thì P có giá trị nguyên.	$a-1$	-2	-1	1	2	a	-1 (loại)	0 (loại)	2	3	0,5đ 0,5đ 0,25đ
$a-1$	-2	-1	1	2								
a	-1 (loại)	0 (loại)	2	3								
	1. $x(5-2x) + 2x(x-1) = 15 \Leftrightarrow 5x - 2x^2 + 2x^2 - 2x = 15$ $\Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5$	0,75đ										
2 4đ	Vậy phương trình có nghiệm là $x = 5$.	0,25đ										
	2) +) Với $x \geq 1$, ta có: $x^2 - 2x + 3 x-1 < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3(x-1) < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3x - 3 < 3$ $\Leftrightarrow x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) < 0$	0,75đ										

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 2$	
	Kết hợp với điều kiện $x \geq 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$	0,25d
	+) Với $x < 1$, ta có: $x^2 - 2x + 3 x-1 < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3(1-x) < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 - 3x < 3$ $\Leftrightarrow x^2 - 5x < 0 \Leftrightarrow x(x-5) < 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 5$	0,75d
	Kết hợp với điều kiện $x < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$	0,25d
	Vậy với $1 \leq x < 2$ hoặc $0 < x < 1$	
	3) Vì:	
	$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 > 0$, $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2 > 0$, $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 \geq 3 > 0$ với mọi x , nên phương trình xác định với mọi giá trị của x .	0,25d
	Đặt $x^2 - 2x + 2 = y > 0$, ta có:	0,25d
	$\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4} \Leftrightarrow \frac{1}{y} + \frac{2}{y+1} = \frac{6}{y+2}$ $\Leftrightarrow \frac{y+1}{y(y+1)} + \frac{2y}{y(y+1)} = \frac{6}{y+2} \Leftrightarrow \frac{3y+1}{y(y+1)} = \frac{6}{y+2}$ $\Rightarrow (3y+1)(y+2) = 6y(y+1) \Leftrightarrow 3y^2 + 6y + y + 2 = 6y^2 + 6y$ $\Leftrightarrow 3y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 3y + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (3y+2)(y-1) = 0$ $\Leftrightarrow y-1=0 \text{ (vì } 3y+2 > 0) \Leftrightarrow y=1 \text{ (tm)}$	1d
	$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1$	0,25d
	Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.	0,25d
3 3 d	1. Ta có:	
	$A = (x+1)(x+3)(x+4)(x+6) + 9 = (x^2+7x+6)(x^2+7x+12) + 9$ $= (x^4 + 14x^3 + 49x^2) + 18(x^2+7x) + 81 = (x^2+7x+9)^2$ là số chính phương khi x là số nguyên.	0,25d
	Vậy A là số chính phương khi x là số nguyên.	0,75d
	2. Đặt $x^2 + x + 1 = y$ (1), ta có:	0,25d
	$B = y(y+1) - 12 = y^2 + y - 12 = y^2 + 4y - 3y - 12 = y(y+4) - 3(y+4)$ $= (y-3)(y+4)$	0,5d
	Thay (1) vào biểu thức B , ta có:	
	$B = (x^2 + x + 1 - 3)(x^2 + x + 1 + 4) = (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 5)$ $= (x^2 + 2x - x - 2)(x^2 + x + 5) = [x(x+2) - (x+2)](x^2 + x + 5)$ $= (x-1)(x+2)(x^2 + x + 5)$	0,75d

	Vì $x \in \mathbb{N}$, $x > 1$ nên $x - 1$, $x + 2$, $x^2 + x + 5$ là các số tự nhiên khác nhau và khác 0 $\Rightarrow (x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 5)$ là hợp số. Vậy B là hợp số. I. (4 điểm)	0,5đ	
		0,25đ	0,25
	a) Chứng minh $OM = ON$. Ta có: $MN \parallel DC$ (vì MN và DC cùng song song với AB) $\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ (theo Talet) $\Rightarrow \frac{OA}{OC + OA} = \frac{OB}{OD + OB} \Rightarrow \frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$ (1) Xét $\triangle ADC$ có $OM \parallel DC$ (gt) $\Rightarrow \frac{OM}{DC} = \frac{OA}{AC}$ (theo Talet) (2) Xét $\triangle BDC$ có $ON \parallel DC$ (gt) $\Rightarrow \frac{ON}{DC} = \frac{OB}{BD}$ (theo Talet) (3) Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{OM}{DC} = \frac{ON}{DC} \Rightarrow OM = ON$ (dpcm)	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ	1,25
	b) Chứng minh $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$ Ta có: $MN \parallel AB \parallel DC \Rightarrow \frac{OM}{CD} = \frac{AM}{AD}$, $\frac{ON}{AB} = \frac{DM}{AD}$ $\Rightarrow \frac{OM}{CD} + \frac{ON}{AB} = \frac{AM + DM}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1$ (4)	0,25đ	0,25
4	Chứng minh tương tự ta có: $\frac{ON}{CD} + \frac{OM}{AB} = 1$ (5)	0,25đ	1,25
7 đ	Từ (4) và (5) $\Rightarrow \frac{OM}{CD} + \frac{OM}{AB} + \frac{ON}{CD} + \frac{ON}{AB} = 2 \Rightarrow \frac{MN}{CD} + \frac{MN}{AB} = 2$ $\Rightarrow \frac{MN}{CD} + \frac{MN}{AB} = 2 \Rightarrow \frac{1}{CD} + \frac{1}{AB} = \frac{2}{MN}$	0,25đ 0,25đ	
	c) Tính diện tích tứ giác ABCD Hai tam giác có cùng đường cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số giữa hai cạnh đáy tương ứng. Do vậy $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}} = \frac{OB}{OD}$ và $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}} = \frac{OA}{OC}$	0,25đ	1,25

	Nhưng $\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ODB}}{S_{\Delta OAD}} = \frac{S_{\Delta ODC}}{S_{\Delta OAC}} \Rightarrow S_{\Delta ODB} \cdot S_{\Delta OAC} = (S_{\Delta AOD})^2$ $\Rightarrow (S_{\Delta AOD})^2 = 1010^2 \cdot 1011^2 \Rightarrow S_{\Delta AOD} = 1010 \cdot 1011 (\text{cm}^2)$	0,5d	125
	Chứng minh $S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOD} = 1010 \cdot 1011 (\text{cm}^2)$	0,25d	
	Vậy $S_{ABCD} = 1010^2 + 2 \cdot 1010 \cdot 1011 + 1011^2 = (1010 + 1011)^2 = 2021^2 (\text{cm}^2)$	0,25d	
	2. (3 điểm)	0,25d	0,25
	a) Chứng minh $\Delta DEC \sim \Delta ABC$ (Hai tam giác vuông có $\widehat{C}$ chung) $\Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{EC}{BC} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{EC}{DC} (*)$ Xét ΔBEC và ΔADC Có $\widehat{C}$ chung kết hợp $(*) \Rightarrow \Delta BEC \sim \Delta ADC$ (c.g.c)	0,75d	125
	b) $\Delta BEC \sim \Delta ADC \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_1}$, ΔAHD vuông cân tại H nên $\widehat{A_2} = \widehat{B_1} = 45^\circ$ $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{A_2} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{B_2} = 45^\circ$ ($\widehat{B_1} + \widehat{A_2} + \widehat{B_2} = 90^\circ$) M trung điểm BE nên: $AM = MB = ME \Rightarrow \Delta BMA$ vuông cân tại M $\Rightarrow AB^2 = 2BM^2$ chứng minh $AB^2 = BH \cdot BC$; $\Rightarrow BH \cdot BC = BE \cdot BM \Rightarrow \frac{BH}{BE} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \Delta BHM \sim \Delta BEC \sim \Delta ADC$ $\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{B_2} = 45^\circ$ (vì $\widehat{B_2} = 90^\circ - \widehat{B_1} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$)	0,25d	
	$\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{B_2} = 45^\circ$ (vì $\widehat{B_2} = 90^\circ - \widehat{B_1} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$)	0,25d	125
5 1d	Ta có $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$ (1)	0,25d	
	$\Rightarrow [(x+y)+z]^2 \geq 4(x+y)z \Leftrightarrow 36 \geq 4(x+y)z$ (vì $x+y+z=6$)	0,25d	
	$\Leftrightarrow 36(x+y) \geq 4(x+y)^2z$ (vì x, y dương nên $x+y$ dương) (2)	0,25d	
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow 36(x+y) \geq 16xyz \Leftrightarrow x+y \geq \frac{4}{9}xyz \Leftrightarrow \frac{x+y}{xyz} \geq \frac{4}{9}$ (dpcm).	0,25d	