

Câu 1 (5 điểm).

1) Chứng minh rằng nếu một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c thỏa mãn:

$$(5a - 3b + 4c)(5a - 3b - 4c) = (3a - 5b)^2 \text{ thì tam giác đó là tam giác vuông.}$$

2) Tìm giá trị của tham số m để phương trình $6x - 5m = -10 + 3mx$ có nghiệm gấp 3 lần nghiệm của phương trình $x^3 - 7x^2 + 13x - 15 = 0$

Câu 2 (5 điểm).

1) Cho biểu thức P với $P = \frac{3x^2 + 9x - 3}{x^2 + x - 2} - \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{1-x}$ với $x \neq 1; x \neq -2$

✓a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P có giá trị là một số nguyên tố.

2) Cho x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 = z(3xy - z^2)$ và $x + y + z = 3$. Tính giá trị biểu thức
 $A = 673.(x^{2021} + y^{2021} + z^{2021}) + 2$

Câu 3 (4 điểm).

1) Cho 2 số tự nhiên a và b . Chứng minh rằng nếu tích $a.b$ là số chẵn thì luôn luôn tìm được số nguyên c sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ là số chính phương.

2) Cho số nguyên tố $p > 3$ và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$. Chứng minh rằng a chia hết cho 12.

Câu 4 (5 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi H là giao điểm của hai đường cao AD và BE . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC . Gọi O là giao điểm của các đường trung trực của BC và AC .

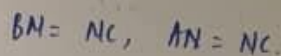
a) Chứng minh $OM.AB = AH.MN$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh $HO = 3GO$

Câu 5 (1 điểm).

Cho a, b, c, d là các số thực dương. Tìm GTNN của $A = \frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a}$

Hết


$$2, CM: OM \cdot AB = AH \cdot MN$$

1, Gọi G là trung tâm ΔABC

$$CM:HO = 3GO$$
$$G_1 \text{ CN: } OM \cdot AB = AH \cdot NN$$

+ Xét ΔCAB có: M, N là trung điểm của BC, AC . (gt)

$$\Rightarrow \begin{cases} MN = \frac{1}{2} AB \\ MN \parallel AB \end{cases}$$

PCM! $\Rightarrow OM \cdot AB = AH \cdot \frac{1}{2} AB$

→ Phải CM: $OM = \frac{1}{2} AH$.

→ Kẻ đường kính AK của (O).

$\Rightarrow \Delta ACK$ vuông tại C; ΔBKA vuông tại B;

$$\Rightarrow AC \perp KC ; AB \perp KB$$

+) Theo: $\left. \begin{array}{l} KC \perp AC \text{ (cm)} \\ BE \perp AC \text{ (gt)} \end{array} \right\} \Rightarrow KC \parallel BE \Rightarrow KC \parallel BH \text{ (1)}$

Đồng hồ, đã cũng chưa phải là: BK 11/11 (2)

Đồng tử, đa cũng chứng minh được: $BK \parallel CH$ (2)
 #) Từ (1) và (2), ta có: Từ góc BHCK có: $\left. \begin{array}{l} KC \parallel BH \\ BK \parallel CH \end{array} \right\} \Rightarrow$ Tứ giác BHCK là hình bình hành.

$\Rightarrow$ Hình bình hành có 2 đường chéo BE và KE cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường (t/c hình bình hành).

+) Xét AAK có: $\left. \begin{array}{l} \text{Olă trung điểm của AK (gt)} \\ \text{M là trung điểm của IK (cm)} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{OM là đường trung bình của } \Delta AKH.$

$$\Rightarrow \begin{cases} OM \parallel AH \\ OM = \frac{1}{2} AH \end{cases} \quad (3)$$

+) Mặt khác; M là trung điểm BC (gt)
 Xét $\triangle ABC$ có: N là trung điểm AC (gt) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Xét } \triangle ABC \text{ có:} \\ N \text{ là trung điểm } AC \text{ (gt)} \end{array}} \right\} \Rightarrow NN \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC.$
 $\Rightarrow NN \parallel AB$
 $NN = \frac{1}{2} AB \Rightarrow AB = 2NN$ (đpcm).

+) Từ (3) và (4) ta có: $OM \cdot AB = \frac{1}{2} AH \cdot MN = AH \cdot MN$ (đpcm).

Vậy: $OM \cdot AB = AH \cdot NN$.

2, Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Q/m: $HO = 3GO$.

+) Vì $OM \parallel AH$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{HAG} = \widehat{ONG}$ (so le trong) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Vì } OM \parallel AH \text{ (cmt)} \\ \widehat{HAG} = \widehat{ONG} \text{ (so le trong)} \end{array}} \right\} \Rightarrow \triangle HAG \text{ có } \triangle ONG \text{ (c.g.c)}$
 Mà $\frac{OM}{AH} = \frac{G}{GA} \cdot \left(= \frac{1}{2} \right)$ $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Mà } \frac{OM}{AH} = \frac{G}{GA} \cdot \left(= \frac{1}{2} \right) \\ \widehat{HAG} = \widehat{ONG} \text{ (so le trong)} \end{array}} \right\} \Rightarrow H, G, O \text{ thẳng hàng và } HG = 2GO$
 $\Rightarrow HO = 3GO$. (đpcm).

Vậy: $HO = 3GO$.