

Bài I (2,0 điểm).

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{x-2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x-2\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
- 2) Chứng minh $B = \frac{x}{\sqrt{x}-2}$.
- 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = AB$ có giá trị nguyên.

Bài II (2,5 điểm).

- 1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một đoàn xe vận tải dự định chở 15 tấn hàng hỗ trợ tỉnh Bắc Giang chống dịch Covid-19. Khi sắp khởi hành thì có 1 xe phải đi làm công việc khác. Vì vậy, để chở hết số hàng theo dự định thì mỗi xe còn lại phải chở thêm 500kg hàng. Hỏi thực tế có bao nhiêu xe tham gia vận chuyển? (Biết khối lượng hàng mỗi xe chở là như nhau).

2) Một cốc nước dạng hình trụ có chiều cao 12cm, bán kính đáy 2cm, lượng nước trong cốc cao 8cm. Người ta thả vào cốc nước 3 viên bi sắt làm lạnh hình cầu có cùng bán kính 1cm và ngập hoàn toàn trong nước, làm nước trong cốc dâng lên. Hỏi sau khi thả 3 viên bi vào thì mực nước trong cốc cách miệng cốc bao nhiêu xen-ti-mét? (Giả sử độ dày của thành cốc và đáy cốc là không đáng kể).



Bài III (2,0 điểm).

- 1) Giải phương trình: $x^4 + 9x^2 - 70 = 0$.
- 2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 8$.
 - a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 với mọi giá trị của m .
 - b) Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1 + \sqrt{x_2} = 0$.

Bài IV (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . Phân giác trong các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ cắt nhau tại I , phân giác ngoài các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ cắt nhau tại J .

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $BICJ$ nội tiếp.
- 2) Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy điểm D sao cho $AD = AB$ (D và I ở khác phía đối với AB). Chứng minh rằng $\widehat{ABD} = \widehat{BCJ}$.
- 3) Gọi E là điểm đối xứng với D qua A và giả sử DI cắt AC tại K . Chứng minh rằng ba điểm E, K, J thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm). Xét các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{x+3} + \sqrt{y-3})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + y^2 + 4xy$.

— HẾT —

HD Bài 1 ý 3

$$\textcircled{3} \text{ Ta có } P = A \cdot B = \frac{x}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{x}{\sqrt{x}+2}.$$

$$P = \frac{x}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{x-4+4}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + 4}{\sqrt{x}+2} + \frac{4}{\sqrt{x}+2}$$

$$P = \sqrt{x}-2 + \frac{4}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Với } x \neq 0 \quad P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-2} \in \mathbb{Z}; x = a^2; x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 > 2; \sqrt{x}+2 \in U\{4\}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = 4 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (loại)}.$$

Vậy không tồn tại x để $P = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

HD Bài 4 ý 3

c) + Vì BJ, CJ là hai đường phân giác ngoài của tam giác ABC nên AJ là là phân giác của góc BAC. Mà AI là phân giác góc BAC do đó A, I, J thẳng hàng.

+ Tứ giác BICJ nội tiếp (Câu a) nên $\widehat{BIJ} = \widehat{BCJ}$ (Cung chắn cung BJ) và $\widehat{ABJ} = \widehat{BCJ}$, kết hợp với $\widehat{ABJ} = \widehat{ADB}$ (tam giác ABD cân tại A) suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{BIJ}$. Do đó AIBD là tứ giác nội tiếp.

+ Tứ giác AIBD nội tiếp nên $\widehat{IAB} = \widehat{IDB}$ (cung chắn cung DB) và $\widehat{IAB} = \widehat{ACB}$ (cung bằng $\frac{1}{2}$ số đo cung AB) nên $\widehat{IDB} = \widehat{ACB}$. Do đó tứ giác BIKC nội tiếp.

+ Từ BIKC và BICJ nội tiếp suy ra 5 điểm BIKCJ cùng thuộc một đường tròn. Do đó $\widehat{IKJ} = \widehat{ICJ} = 90^\circ \Rightarrow DK \perp KJ$ (1)

+ $\widehat{ADP} = \widehat{ABP}$ (cung chắn cung AI), $\widehat{IBC} = \widehat{ABI}$ (do BI là phân giác góc ABC), $\widehat{IBC} = \widehat{AKI}$ (cung bù góc IKC) suy ra $\widehat{ADP} = \widehat{AKI}$. Vậy tam giác ADK cân tại A. Do đó AK = AD, kết hợp AD = $\frac{1}{2}$ DE ta được KA = $\frac{1}{2}$ DE.

Tam giác DKE có KA là đường trung tuyến và KA = $\frac{1}{2}$ DE nên Tam giác DKE vuông tại K. $\Rightarrow DK \perp KE$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra E, K, J thẳng hàng.

HD Bài 5

ĐKXD: $x \geq -3; y \geq 3 \Rightarrow x + y \geq 0$

Cách 1: Bình phương hai vế:

$$(x + y)^2 = 4(\sqrt{x+3} + \sqrt{y-3})^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 4(x + y + 2\sqrt{(x+3)(y-3)})$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 - 4(x + y) = 8\sqrt{(x+3)(y-3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x + y - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y \geq 4 \end{cases}$$

TH1: $x + y = 0 \Rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{y-3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$. Khi đó: $P = (-3)^2 + 3^2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 3 = -18$

TH2: $x + y \geq 4$

Ta có: $(x + 3)(y - 3) \geq 0 \Rightarrow xy \geq 3x - 3y + 9$

$$P = (x + y)^2 + 2xy \geq (x + y)^2 + 2(3x - 3y + 9)$$

$$P \geq [(x + y)^2 - 6(x + y) + 9] + 12x + 9 = (x + y - 3)^2 + 12x + 9$$

Do $x \geq -3$ & $x + y \geq 4$ nên $P \geq (4 - 3)^2 + 12 \cdot (-3) + 9 = -26$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases}$. Vậy min $P = -26$ tại $x = -3; y = 7$