

Bài 1: (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $M = \frac{x^4 + 2}{x^6 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^4 + 4x^2 + 3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

2. Cho x, y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033$ cho $x^2 + 12x + 30$

2. Cho x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 7$; $x^2 + y^2 + z^2 = 23$; $xyz = 3$

Tính giá trị của biểu thức $H = \frac{1}{xy + z - 6} + \frac{1}{yz + x - 6} + \frac{1}{zx + y - 6}$

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y$

2. Giải phương trình: $(3x - 2)(x + 1)^2(3x + 8) = -16$

Bài 4. (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Trên cạnh AB lấy M ($0 < MB < MA$) và trên cạnh BC lấy N sao cho $\angle MON = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AN với DC , gọi K là giao điểm của ON với BE .

1) Chứng minh $\triangle MON$ vuông cân

2) Chứng minh MN song song với BE

3) Chứng minh CK vuông góc với BE

4) Qua K vẽ đường song song với OM cắt BC tại H . Chứng minh:

$$\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1$$

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1.

a)

$$\begin{aligned} M &= \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} \\ &= \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^4 + 2 + (x^2 - 1)(x^2 + 1) - (x^4 - x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^4 + 2 + x^4 - 1 - x^4 + x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} \\ &= \frac{x^4 + x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x

b) Ta có : $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x

- Nếu $x = 0$ ta có $M = 0$

- Nếu $x \neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}$

Ta có: $x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + 1 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1 \geq 1$

Nên ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Vậy M lớn nhất là $M = 1$ khi $x = 1$

2.

Ta có $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y) + (1-2y)(1-x) = (1-x)(1-y)$

$$\Leftrightarrow 1 - y - 2x + 2xy + 1 - x - 2y + 2xy = 1 - x - y + xy \Leftrightarrow x + y = \frac{3xy + 1}{2}$$

Ta có : $M = x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy = \left(\frac{3xy + 1}{2}\right)^2 - 3xy = \dots = \left(\frac{3xy - 1}{2}\right)^2$

Vì $x, y \in \mathbb{Q}$ nên $\frac{3xy-1}{2}$ là số hữu tỷ, Vậy M là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2.

1)

Ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=\dots=(x^2+12x+27)(x^2+12x+35)+2033$

Đặt $x^2+12x+30=t$, ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=(t-3)(t+5)+2033$
 $=t^2+2t-15+2033=t(t+2)+2018$

Vậy ta có $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=(x^2+12x+30)(x^2+12x+32)+2018$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$ là 2018.

2) Vì $x+y+z=7 \Rightarrow z=-x-y+7 \Rightarrow xy+z-6=\dots=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự ta có: $yz+x-6=(y-1)(z-1); zx+y-6=(z-1)(x-1)$

$$\text{Vậy } H = \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} = \frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$

$$= \frac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1} = \frac{7-3}{3-(xy+yz+xz)+7-1} = \frac{4}{9-(xy+yz+xz)}$$

Ta

có: $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz) \Rightarrow 7^2 = 23+2(xy+yz+xz)$

$\Rightarrow xy+yz+xz=13$

$$\text{Vậy } H = \frac{4}{9-13} = -1$$

Bài 3.

1) Ta có:

$3x^2+3xy-17=7x-2y \Leftrightarrow 3xy+2y=-3x^2+7x+17 \Leftrightarrow (3x+2)y=-3x^2+7x+17$ Vì x nguyên nên $2x+3 \neq 0$ nên ta có:

$$y = \frac{-3x^2+7x+17}{3x+2} = \frac{-3x^2-2x+9x+6+11}{2}$$

$$= \frac{-x(3x+2)+3(3x+2)+11}{3x+2} = -x+3+\frac{11}{3x+2}$$

Vì x, y nguyên nên ta có $\frac{11}{3x+2}$ nguyên $\Rightarrow 11:3x+2 \Rightarrow 3x+2=\pm 1; \pm 11$

- Xét các trường hợp ta tìm được $x=-1; y=-1; x=-3; y=5$ thỏa mãn và kết luận

2) Ta có: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8)=-16 \Leftrightarrow (3x-2)(3x+3)^2(3x+8)=-144$

Đặt $3x+3=t \Rightarrow 3x-2=t-5; 3x+8=t+5$

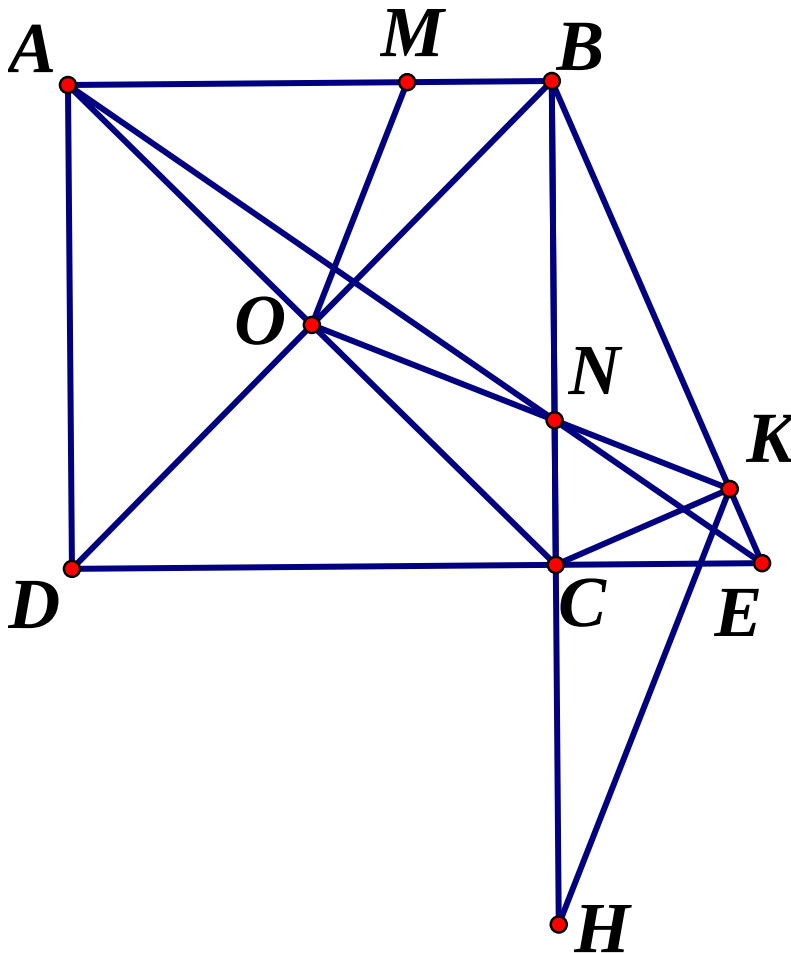
Ta có phương trình: $(t-5)t^2(t+5) = -144$

$$\Leftrightarrow t^4 - 25t^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 9)(t^2 - 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 9 \\ t^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 3 \\ t = \pm 5 \end{cases}$$

Xét các trường hợp ta tìm được $x = 0; x = -2; x = \frac{2}{3}; x = -\frac{8}{3}$

Bài 4.



1) Ta có : $\angle BOC = 90^\circ \Rightarrow \angle CON + \angle BON = 90^\circ$; vì

$$\angle MON = 90^\circ \Rightarrow \angle BOM + \angle BON = 90^\circ \Rightarrow \angle BOM = \angle CON$$

$$\text{Ta có BD là phân giác } \angle ABC \Rightarrow \angle MBO = \angle CBO = \frac{\angle BOC}{2} = 45^\circ$$

Tương tự ta có: $NCO = DCO = \frac{BOC}{2} = 45^\circ$. Vậy ta có: $MBO = NCO$

Xét $\triangle OBM$ và $\triangle OCN$ có $OB = OC$; $BOM = CON$; $MBO = NCO$

$\Rightarrow \triangle OBM = \triangle OCN \Rightarrow OM = ON$

Xét $\triangle MON$ có $MON = 90^\circ$; $OM = ON \Rightarrow \triangle MON$ vuông cân

2) $\triangle OBM = \triangle OCN \Rightarrow MB = NC$ mà $AB = BC \Rightarrow AB - MB = BC - NC$

$\Rightarrow AM = BM \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC}$

Ta có: $AB // CD \Rightarrow AM // CE \Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{BN}{NC}$

Vậy ta có: $\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NE} \Rightarrow MN // BE$ (Theo định lý Talet đảo)

3) Vì $MN // BE \Rightarrow BKN = MNO = 45^\circ$ (đồng vị và có tam giác MON vuông cân)

$\Rightarrow \triangle BNK \sim \triangle ONC$ (vì có $BNK = ONK$; $BKN = OCN = 45^\circ$) $\Rightarrow \frac{NB}{NK} = \frac{NO}{NC}$

- Xét $\triangle BNO$; $\triangle KNC$ có $BNO = CNK$; $\frac{NB}{NK} = \frac{NO}{NC} \Rightarrow \triangle BNO \sim \triangle KNC$

$\Rightarrow NKC = NBO = 45^\circ$

Vậy ta có: $BKC = BKN + CKN = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow CK \perp BE$

4) - Vì $KH // OM$ mà $MK \perp OK \Rightarrow MK \perp KH \Rightarrow NKH = 90^\circ$ mà

$NKC = 45^\circ \Rightarrow CKH = 45^\circ \Rightarrow BKN = NKC = CKH = 45^\circ$

Xét $\triangle BKC$ có $BKN = NKC \Rightarrow KN$ là phân giác trong của $\triangle BKC$, mà $KH \perp KN$

$\Rightarrow KH$ là phân giác ngoài của $\triangle BKC \Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{HC}{HB}$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{KN}{KH} = \frac{BN}{BH}$

Vậy ta có $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{NC}{BH} = \frac{HC}{HB} + \frac{BN}{BH} + \frac{CN}{BH} = \dots = \frac{BH}{BH} = 1$

Bài 5

Ta có: $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

$$= (x^2 - 2x + 1) + (2y^2 - 8y + 8) + \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) + \left(\frac{24}{y} + 6y - 24\right) + (x + 2y) + 17$$

$$= (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + \frac{(x-1)^2}{x} + \frac{6(y-2)^2}{y} + (x+2y) + 17$$

$$\geq 0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 17 = 22$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2(y-2)^2 = \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{6(y-2)^2}{y} = 0 \text{ và } x+2y=5$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ và } y=2. \text{ Vậy } H \text{ nhỏ nhất là } H=22 \Leftrightarrow x=1, y=2$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP TỈNH
BẮC GIANG NĂM HỌC 2012-2013

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN LỚP 8

Ngày thi: 30/3/2013

Câu 1. (4,5 điểm)

1) Phân tích biểu thức sau thành nhân tử: $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

2) Cho $x^2 + x = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Câu 2. (4,5 điểm)

1) Cho biểu thức $R = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x}$. Tìm x để biểu thức xác định, khi đó hãy rút gọn biểu thức

2) Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24

2) Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm)

1) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$

a) Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a

b) Gọi I là trung điểm của BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC .

Chứng minh $\widehat{HDI} = 45^\circ$

2) Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Độ dài các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là l_a, l_b, l_c . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

ĐÁP ÁN**Câu 1.****1)**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= 2(a^3 + b^3) + 7ab(a + b) \\ &= 2(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a + b) \\ &= (a + b)(2a^2 + 2b^2 + 5ab) \\ &= (a + b)(2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab) \\ &= (a + b)[2a(a + 2b) + b(a + 2b)] \\ &= (a + b)(2a + b)(a + 2b) \end{aligned}$$

$$\text{Kết luận } P = (a + b)(2a + b)(a + 2b)$$

2)

Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= x^2 \cdot (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^4 + 2x^3 + x^2) + x^2 + x + x + 1 \\ &= x^2(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)^2 + x + 2 \\ &= x^2 + x + 3 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } Q = 4$$

Câu 2.**1)**

$$\text{Ta có: } R = \left[\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x^2-4)} \right] \cdot \frac{x}{4026}$$

$$\text{ĐK: } x(x^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{4026} \cdot \left(\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right) \\ &= \frac{1}{4026} \cdot \frac{(x-1)(x+2) + (x+1)(x-2) - 4}{x^2-4} \\ &= \frac{1}{4026} \cdot \frac{2(x^2-4)}{x^2-4} = \frac{1}{2013} \end{aligned}$$

Vậy R xác định khi $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$ và $R = \frac{1}{2013}$

2) +Nếu $x \geq 2$, phương trình đã cho trở thành :

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(ktm) \\ x = \sqrt{5}(tm) \\ x = -\sqrt{5}(ktm) \end{cases}$$

+)Nếu $x < 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = -4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) = -4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \text{ vô nghiệm}$$

Phương trình có một nghiệm $x = \sqrt{5}$

Câu 3.

1) Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

Vì $n-1; n; n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

$$\text{Do đó } (n^3 - n) : 3 \quad (2)$$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1);(2) suy ra

$$(n^3 - n):24 \text{ (dpcm)}$$

2) Giả sử $n^2 + 4n + 2013 = m^2 \text{ (} m \in \mathbb{N} \text{)}$

Suy ra $(n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$

$$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2) = 2009$$

Mặt khác $2009 = 2009.1 = 287.7 = 49.41$ và $m+n+2 > m-n-2$ nên có các trường hợp sau:

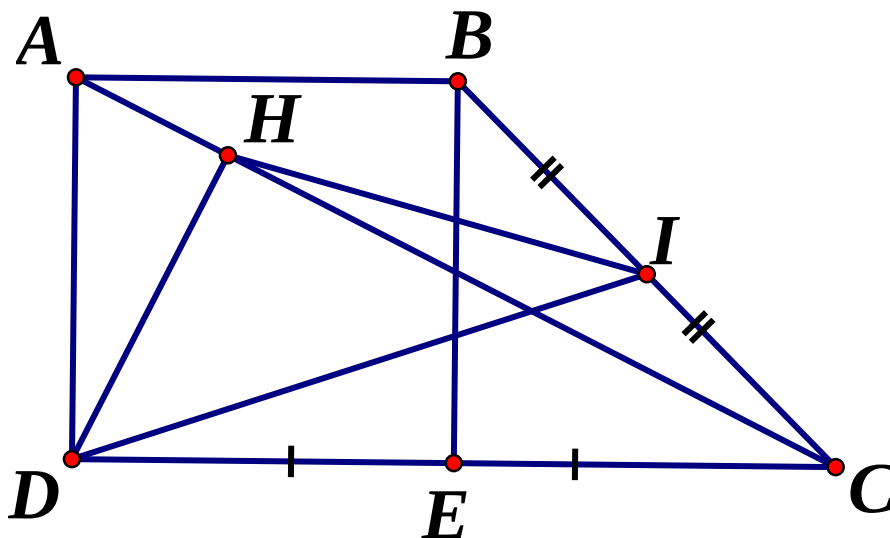
$$TH1: \begin{cases} m+n+2 = 2009 \\ m-n-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1005 \\ n = 1002 \end{cases}$$

$$TH2: \begin{cases} m+n+2 = 287 \\ m-n-2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 147 \\ n = 138 \end{cases}$$

$$TH3: \begin{cases} m+n+2 = 49 \\ m-n-2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 45 \\ n = 2 \end{cases}$$

Vậy các số cần tìm là 1002;138;2

Câu 4.



1)

a) Gọi E là trung điểm của CD, chỉ ra $ABED$ là hình vuông và BEC là tam giác vuông cân

Từ đó suy ra $AB = AD = a, BC = 2a$

Diện tích của hình thang $ABCD$ là $S = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}$

b) $\angle ADH = \angle ACD$ (1) (hai góc nhọn có cặp cạnh tương ứng vuông góc)

Xét hai tam giác ADC và IBD vuông tại D và B có:

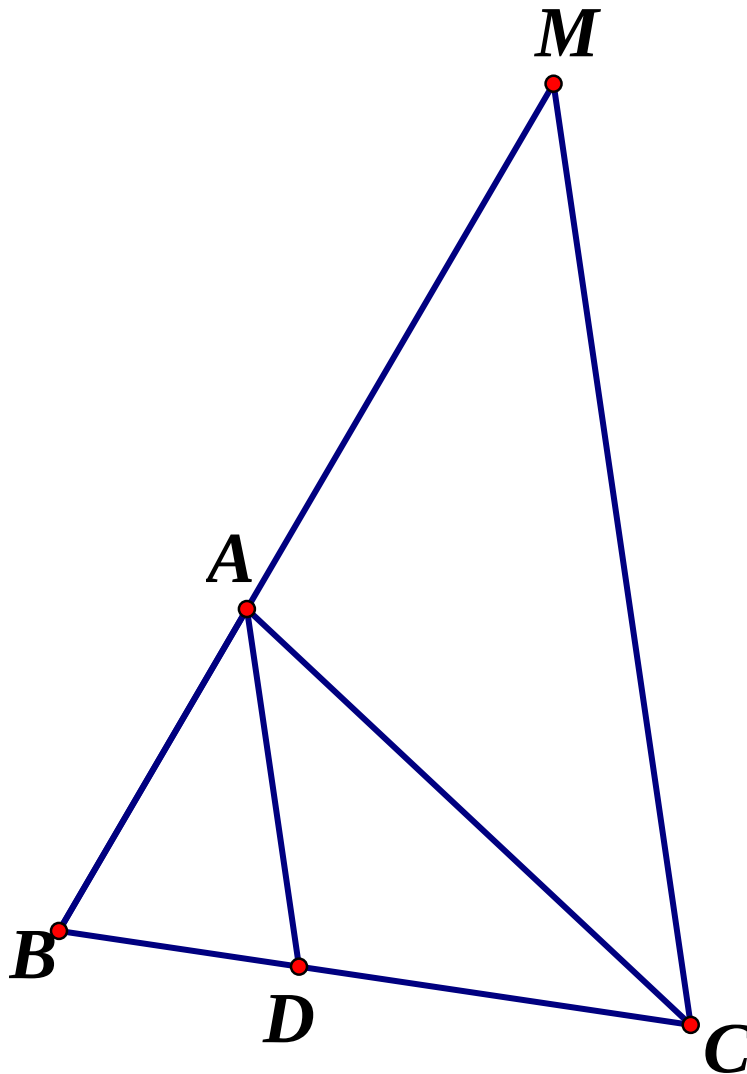
$$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ do đó hai tam giác } ADC \text{ và } IBD \text{ đồng dạng}$$

Suy ra $\angle ACD = \angle BDI$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \angle ADH = \angle BDI$

Mà $\angle ADH + \angle BDH = 45^\circ \Rightarrow \angle BDI + \angle BDH = 45^\circ$ hay $\angle HDI = 45^\circ$

2)



Gọi AD là đường phân giác trong góc A, qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AB tại M

Ta có: $\angle BAD = \angle AMC$ (hai góc ở vị trí đồng vị)

$\angle DAC = \angle ACM$ (hai góc ở vị trí so le trong)

Mà $\angle BAD = \angle DAC$ nên $\angle AMC = \angle ACM$ hay $\triangle ACM$ cân tại A, suy ra $AM = AC = b$

Do $AD \parallel CM$ nên $\frac{AD}{CM} = \frac{BA}{BM} = \frac{c}{b+c}$

$$\text{Mà } CM < AM + AC = 2b \Rightarrow \frac{c}{b+c} > \frac{AD}{2b} \Rightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{l_b} > \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) (2); \frac{1}{l_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (3)$$

Cộng (1);(2);(3) về theo về ta có điều phải chứng minh

Câu 5.

Ta có: $a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b \Rightarrow a + b \leq 2$

Chứng minh được với hai số dương x, y thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

$$\text{Do đó: } S = 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right) \leq 2 - \frac{4}{a+1+b+1} \leq 1$$

Vậy GTLN của S là 1, đạt được khi $a = b = 1$

UBND HUYỆN NHO QUAN

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Năm học 2018 – 2019

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN 8

(Thời gian làm bài 120 phút)

Đề thi gồm 05 câu, trong 01 trang

Câu 1 (5,0 điểm).

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a, $x^4 + 2x^2y + y^2 - 9$

b, $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

2. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$

a, Rút gọn biểu thức A.

b, Tính giá trị của biểu thức A khi $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

c, Tìm giá trị của x, để $A < 0$.

Câu 2 (4,0 điểm).

1. Giải phương trình sau: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

2. Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình:

$$5x^4 + 10x^2 + 2y^6 + 4y^3 - 6 = 0$$

Câu 3 (3,0 điểm).

1. Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9.

2. Cho phương trình $\frac{2x-m}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = 3$. Tìm m nguyên để phương trình có nghiệm dương.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho hình bình hành $ABCD$ (có $AC > BD$), O là giao điểm của AC và BD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD . Chứng minh:

a, Tứ giác $BEDF$ là hình bình hành ?

b, $CH.CD = CK.CB$

c, $AB.AH + AD.AK = AC^2$

Câu 5 (2,0 điểm).

1. Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Tính: $P = \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3}$

2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng $\frac{x + y}{xyz} \geq \frac{4}{9}$

-----Hết-----

UBND HUYỆN NHO QUAN

HƯỚNG DẪN CHẤM KSCL HỌC SINH GIỎI

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Môn: Toán 8

Năm học 2018 - 2019

(HDC gồm 05 trang)

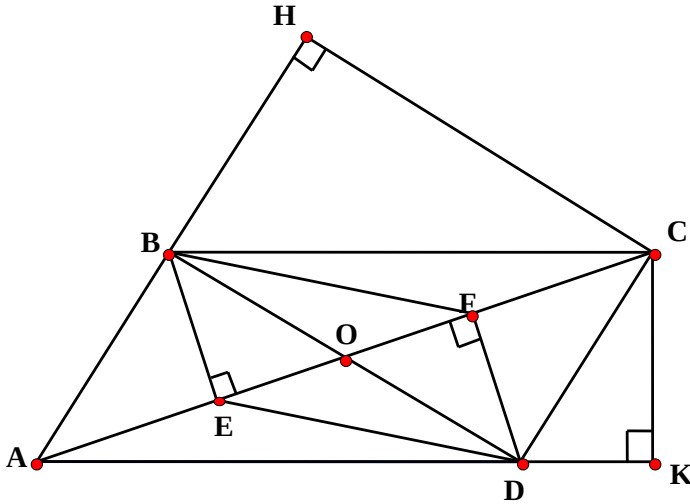
Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (5,0 điểm)	1. (2,0 điểm)	
	a, $x^4 + 2x^2y + y^2 - 9 = (x^4 + 2x^2y + y^2) - 9$	0,25
	$= (x^2 + y)^2 - 9$	0,5
	$= (x^2 + y - 3)(x^2 + y + 3)$	0,25
	b, $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$	0,25
	$= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24$	
	$= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24$	0,25
	$= [(x^2 + 7x + 11)^2 - 1] - 24$	
	$= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2$	0,25

$= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16)$	
$= (x + 1)(x + 6)(x^2 + 7x + 16)$	0,25
2. (3,0 điểm)	
a) (1,25 điểm)	
ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$	0,25
Với $x \neq \pm 1$, ta có:	
$A = \frac{1 - x^3 - x + x^2}{1 - x} : \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x)(1 - x + x^2) - x(1 + x)}$	0,25
$= \frac{(1 - x)(1 + x + x^2) - x(1 - x)}{1 - x} : \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x)(1 - 2x + x^2)}$	0,25
$= \frac{(1 - x)(1 + x^2)}{1 - x} : \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x)(1 - x)^2}$	0,25
$= (1 + x^2) : \frac{1}{1 - x}$ $= (1 + x^2)(1 - x)$	0,25
b) (1,0 điểm)	
Ta có: $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ hoặc $x - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$	0,25
$\Leftrightarrow x = 1$ (không TMĐK) $\text{hoặc } x = \frac{1}{3}$ (TMĐK)	0,25
Với $x = \frac{1}{3}$, ta có:	
$A = \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$	0,25

	Vậy khi $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ thì $A = \frac{20}{27}$	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Ta có: $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0$ (1) Mà $1+x^2 > 0$ với mọi $x \neq \pm 1$	0,25
	Nên (1) $\Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$	0,25
	Vậy với $x > 1$ thì $A < 0$	0,25
Câu 2 (4 điểm)	2.1) (2,0 điểm)	
	ĐKXD: $x \neq 0; x \neq 2$	0,25
	$\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$ $\Leftrightarrow \frac{x(x+2) - (x-2)}{x(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)}$	0,25
	$\Rightarrow x(x+2) - (x-2) = 2$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 + 2x - x + 2 = 2$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 + x = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x(x+1) = 0$	0,25
	$\Rightarrow x = 0 \text{ (loại) hoặc } x = -1 \text{ (nhận)}$	0,25
	Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$	0,25
	2.2) (2,0 điểm)	
	$5x^4 + 10x^2 + 2y^6 + 4y^3 - 6 = 0$	
	$\Leftrightarrow (5x^4 + 10x^2 + 5) + (2y^6 + 4y^3 + 2) = 13$	0,25

	$\Leftrightarrow 5(x^4 + 2x^2 + 1) + 2(y^6 + 2y^3 + 1) = 13$	
	$\Leftrightarrow 5(x^2 + 1)^2 + 2(y^3 + 1)^2 = 13$	0,25
	Vì: $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \in \mathbb{Z} \\ y^3 + 1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$	0,25
	Mà $5(x^2 + 1)^2 \leq 13 \Rightarrow x^2 + 1 \leq 1$	0,25
	Mặt khác $x^2 + 1 \geq 1$ với mọi x $\Rightarrow x^2 + 1 = 1$ $\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$	0,25
	Với $x = 0$, ta có: $5 + 2(y^3 + 1)^2 = 13$ $\Rightarrow 2(y^3 + 1)^2 = 8 \Rightarrow (y^3 + 1)^2 = 4$	0,25
	$\Rightarrow \begin{cases} y^3 + 1 = 2 \\ y^3 + 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3 = 1 \\ y^3 = -3 \end{cases}$	0,25
	Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y^3 = 1 \Rightarrow y = 1$ Vậy phương trình có một nghiệm nguyên $(x; y) = (0; 1)$	0,25
Câu 3 (3 điểm)	3.1. (1,5 điểm)	
	Gọi hai số thỏa mãn đầu bài là $x, y \Rightarrow x + y \vdots 3$	0,25
	Ta có: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ $= (x + y)[(x^2 + 2xy + y^2) - 3xy]$	0,25
	$= (x + y)[(x + y)^2 - 3xy]$	0,25
	Vì $x + y \vdots 3$ nên $(x + y)^2 - 3xy \vdots 3$	0,25

	$\Rightarrow (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] : 9$	0,25
	Vậy nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9.	0,25
	3.2. (1,5 điểm)	
	ĐKXD: $x \neq \pm 2$	0,25
	$\frac{2x-m}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = 3$ $\Rightarrow (2x-m)(x+2) + (x-1)(x-2) = 3(x^2-4)$ $\Leftrightarrow x(1-m) = 2m-14 (*)$	0,25
	Nếu $m = 1$ thì phương trình (*) có dạng $0 = -12$ vô nghiệm.	0,25
	Nếu $m \neq 1$ phương trình (*) trở thành $x = \frac{2m-14}{1-m}$	0,25
	Khi đó phương trình đã cho có nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-14}{1-m} \neq 2 \\ \frac{2m-14}{1-m} \neq -2 \\ \frac{2m-14}{1-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ 1 < m < 7 \end{cases}$	0,25
	Mà m nguyên. Vậy $m \in \{2; 3; 5; 6\}$ thì thỏa mãn đầu bài	0,25
Câu 4 (6,0 điểm)		

		0,25
a) (2,0 điểm).		
Ta có : $BE \perp AC$ (gt); $DF \perp AC$ (gt) $\Rightarrow BE \parallel DF$ (1)		0,75
Xét $\triangle BEO$ và $\triangle DFO$ Có: $BEO = DFO = 90^0$ $OB = OD$ (t/c hình bình hành) $EOB = FOB$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle BEO = \triangle DFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)		0,75
$\Rightarrow BE = DF$ (2)		0,25
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác BEDF là hình bình hành (đpcm)		0,25
b) (1,75 điểm).		
Ta có: ABCD là hình bình hành (gt) $\Rightarrow \angle ABC = \angle ADC$		0,25
Mà $\angle ABC + \angle HBC = \angle ADC + \angle KDC = 180^0$		0,25
$\Rightarrow \angle HBC = \angle KDC$		0,25
Xét $\triangle CBH$ và $\triangle CDK$ có:		0,5

	$BHC = DKC = 90^0$ $HBC = KDC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \Delta CBH \sim \Delta CDK(g - g)$	
	$\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CD}$	0,25
	$\Rightarrow CH.CD = CK.CB$ (đpcm)	0,25
	c) (2,0 điểm).	
	Xét ΔAFD và ΔAKC Có: $AFD = AKC = 90^0$ FAD chung $\Rightarrow \Delta AFD \sim \Delta AKC(g - g)$	0,5
	$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow AD.AK = AF.AC$ (3)	0,25
	Xét ΔCFD và ΔAHC Có: $CFD = AHC = 90^0$ $FCD = HAC$ (so le trong) $\Rightarrow \Delta CFD \sim \Delta AHC(g - g)$	0,5
	$\Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{AH}{AC}$	0,25
	Mà : $CD = AB \Rightarrow \frac{CF}{AB} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AH = CF.AC$ (4)	0,25
	Từ(3) và (4) $\Rightarrow AB.AH + AD.AK = CF.AC + AF.AC$ $= (CF + AF)AC = AC^2$ (đpcm).	0,25
Câu 5	5.1(1,0 điểm)	

(2,0điểm)	Ta có: $\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} = \frac{x^4-x-y^4+y}{(y^3-1)(x^3-1)}$ $= \frac{(x^4-y^4)-(x-y)}{xy(y^2+y+1)(x^2+x+1)}$	0,25
	$= \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(x^2y^2+y^2x+y^2+yx^2+xy+y+x^2+x+1)}$ $= \frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy[x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2]}$ $= \frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy[x^2y^2+(x+y)^2+2]}$	0,25
	$= \frac{(x-y)[x(x-1)+y(y-1)]}{xy(x^2y^2+3)}$ $= \frac{(x-y)[x(-y)+y(-x)]}{xy(x^2y^2+3)} \quad (\text{do } x+y=1 \Rightarrow y-1=-x \text{ và } x-1=-y)$ $= \frac{(x-y)(-2xy)}{xy(x^2y^2+3)}$ $= \frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3}$	0,25
	$\Rightarrow P = \frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0$	0,25
5.2(1,0 điểm)		
	Ta có: $(x+y)^2 \geq 4xy$ (1)	0,25
	$\Rightarrow [(x+y)+z]^2 \geq 4(x+y)z$	0,25

	$\Leftrightarrow 36 \geq 4(x+y)z$ (vì $x+y+z=6$)	
	$\Leftrightarrow 36(x+y) \geq 4(x+y)^2z$ (vì x, y dương nên $x+y$ dương) (2)	0,25
	Từ (1) và (2), ta có: $36(x+y) \geq 16xyz$ $\Leftrightarrow x+y \geq \frac{4}{9}xyz \Leftrightarrow \frac{x+y}{xyz} \geq \frac{4}{9} \text{ (đpcm)}$	0,25

Lưu ý khi chấm bài:

- Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì cho điểm các phần theo thang điểm tương ứng.
- Với bài 4, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không chấm.

**UBND HUYỆN YÊN LẠC
PHÒNG GD & ĐT**

**ĐỀ THI GIAO LƯU HSG LỚP 8 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2014-2015**

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN 8

Thời gian : 120 phút

Câu 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right)$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn P
- Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào ?
- Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Câu 2. (2 điểm)

Cho biểu thức $M = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

Chứng minh rằng:

- Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $M > 1$
- Nếu $M = 1$ thì hai trong ba phân thức đã cho của biểu thức M bằng 1, phân thức còn lại bằng -1

Câu 3. (2 điểm)

- Cho n là tổng của hai số chính phương. CMR: n^2 cũng là tổng của hai số chính phương
- Cho đa thức $A = ax^2 + bx + c$. Xác định hệ số b biết rằng khi chia A cho $x-1$, chia A cho $x+1$ đều có cùng một số dư

Câu 4. (2,5 điểm)

- Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD; I và J thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng DH và BC. Tính số đo của góc AIJ

b) Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H, trên đoạn BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\angle AMC = \angle ANB = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AM = AN$

Câu 5 (1 điểm)

a) Cho $a, b, c > 0$

CMR:
$$\frac{a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{c}{3c^2 + 2a^2 + b^2} \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

b) Cho đa giác đều gồm 1999 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân

ĐÁP ÁN

Câu 1

a) ĐKXD: $x \neq \pm 3$, $P = \frac{x+3}{x-3}$

b) Ta có: $P = \frac{x+3}{x-3} \Rightarrow x = \frac{3(P+1)}{P-1}$

Để $x > 0$ thì $\frac{3(P+1)}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{P+1}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P > 1 \\ P < -1 \end{cases}$

Vậy $x > 0$ thì P không nhận những giá trị từ -1 đến 1 , $P \notin [-1; 1]$

c) Ta có $P = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$

P có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x-3 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

Từ đó tính được $x \in \{0; 1; 2; 4; 5; 6; 9\}$ (Chú ý loại $x = -3$)

Câu 2

2a)

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $a, b, c > 0$ và

$$a+b-c > 0; a+c-b > 0; c+b-a > 0$$

Đặt $A = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$; $B = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $C = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

Ta cần chứng minh: $M = A+B+C > 1$ hay $(A-1) + (B-1) + (C+1) > 0$

Ta có:

$$A-1 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - 1 = \frac{a^2+b^2-c^2-2ab}{2ab} = \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}$$

$$B-1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - 1 = \frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{2bc} = \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}$$

$$C-1 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} - 1 = \frac{c^2+a^2-b^2+2ca}{2ca} = \frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
& (A-1) + (B-1) + (C+1) \\
&= \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab} + \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc} + \frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca} \\
&= \frac{c(a-b-c)(a-b+c) + a(b-c-a)(b-c+a) + b(c+a-b)(c+a+b)}{2abc} \\
&= \frac{c(a-b-c)(a-b+c) - a(a-b+c)(b-c+a) + b(a-b+c)(c+a+b)}{2abc} \\
&= \frac{(a-b+c)[c(a-b-c) - a(b-c+a) + b(c+a+b)]}{2abc} \\
&= \frac{(a-b+c)[c(a-b-c) - a(b-c+a) + b(c+a+b)]}{2abc} \\
&= \frac{(a-b+c)(ca - cb - c^2 - ab + ac - a^2 + bc + ba + b^2)}{2abc} \\
&= \frac{(a-b+c)(bc - ba + b^2 - c^2 + ca - cb + ac - a^2 + ab)}{2abc} \\
&= \frac{(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}{2abc} > 0 (\text{đúng})
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $M - 1 > 0$ đúng vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác hay $M > 1$

Câu 2b

$$M = 1 \Leftrightarrow M - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}{2abc} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)(b-c+a)(c-a+b) = 0$$

Ta xét ba trường hợp:

TH1: Nếu $a - b + c = 0$ thì

$$A - 1 = 0; B - 1 = \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc} = \frac{-(a-b+c)(b-c+a)}{2bc} = 0; C + 1 = 0$$

Suy ra $A = 1; B = 1; C = -1$

TH2: Nếu $b - c + a = 0$ thì

$$A+1=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1=\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{2ab}=\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab}=0;$$

$$C-1=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-1=\frac{c^2+a^2-b^2-2ca}{2ca}=\frac{(c-a-b)(c-a+b)}{2ca}=\frac{-(b-c+a)(c-a+b)}{2ca}=0$$

$$B-1=0 \Rightarrow A=-1; B=1; C=1$$

TH3: Nếu $c-a+b=0$ thì

$$A-1=\frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}=\frac{-(c-a+b)(a-b+c)}{2ab}=0;$$

$$C-1=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-1=\frac{c^2+a^2-b^2-2ca}{2ca}=\frac{(c-a-b)(c-a+b)}{2ca}=\frac{-(b-c+a)(c-a+b)}{2ca}=0$$

$$B+1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}=0$$

Suy ra $A=1; B=-1; C=1$

Như vậy trường hợp nào cũng có hai trong ba phân thức A, B, C bằng 1, phân thức còn lại bằng -1

Câu 3

3a) Đặt $N=a^2+b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}$

Khi đó $N^2=a^4-2a^2b^2+b^2+4a^2b^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$ là tổng của hai số chính phương.

3b)

$$\text{Giả sử } A=ax^2+bx+c=(x-1)P+R \quad (1)$$

$$A=ax^2+bx+c=(x+1)Q+R \quad (2)$$

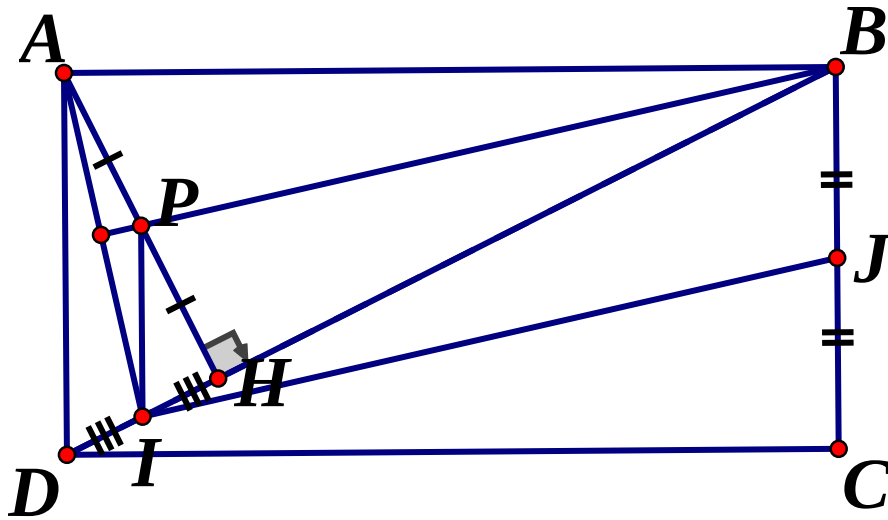
Cho $x=1$ thì từ (1) ta có: $a+b+c=R$

Cho $x=-1$ thì từ (2) ta có: $a-b+c=R$

$$\text{Do đó : } a+b+c=a-b+c \Leftrightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0$$

Câu 4

4a)



Gọi P là trung điểm của AH $\Rightarrow PI$ là đường trung bình của tam giác AHD

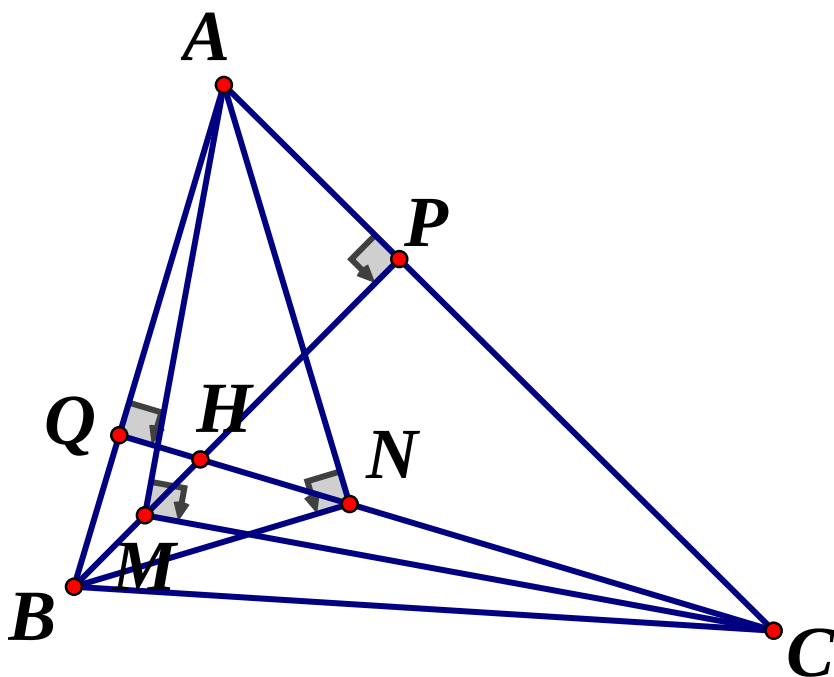
$\Rightarrow PI \parallel AD$

Mà $AD \perp AB$ nên $IP \perp AB$ và P là trực tâm $\triangle ABI$

Từ đó ta có tứ giác $BPIJ$ là hình bình hành $\Rightarrow BP \parallel IJ$

Mà $BP \perp AI$ nên $IJ \perp AI$

Câu 4b



Gọi P, Q lần lượt là chân các đường cao kẻ từ B và C .

Tam giác vuông AMC có đường cao $MP \Rightarrow AM^2 = AP.AC$

Tam giác vuông ANB có đường cao $NQ \Rightarrow AN^2 = AQ.AB$

Xét tam giác vuông APB và AQC có:

A chung; $APB = AQC = 90^\circ \Rightarrow \triangle APB \sim \triangle AQC (g.g)$

$\Rightarrow AP.AC = AQ.AB \Rightarrow AM^2 = AN^2 \Rightarrow AM = AN$

Câu 5

5a)

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM với $a, b, c > 0$ ta có

$$\frac{18a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} = \frac{18a}{2(a^2 + b^2) + a^2 + c^2} \leq \frac{18a}{2.2\sqrt{(ab)^2} + 2\sqrt{(ac)^2}} = \frac{18a}{4ab + 2ac}$$

$$\frac{18a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} \leq \frac{18a}{4ab + 2ac} = \frac{18a}{2a(2b + c)} = \frac{9}{2b + c}$$

Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$.

Ta có: $\frac{(2+1)^2}{2b+c} \leq \frac{2^2}{2b} + \frac{1^2}{c} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$

Suy ra: $\frac{18a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} \leq \frac{9}{(2b+c)} = \frac{(2+1)^2}{2b+c} \leq \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$

Tương tự:

$$\frac{18b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} \leq \frac{9}{(2c+a)} = \frac{(2+1)^2}{2c+a} \leq \frac{2}{c} + \frac{1}{a}$$

$$\frac{18c}{3c^2 + 2a^2 + b^2} \leq \frac{9}{2a+b} = \frac{(2+1)^2}{2a+b} \leq \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{18a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{18b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{18c}{3c^2 + 2a^2 + b^2} \leq \frac{2}{c} + \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{c}{3c^2 + 2a^2 + b^2} \leq \left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} \right) : 18 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Rightarrow DPCM$$

5b)

Ta có đa giác 1999 cạnh nên có 1999 đỉnh. Do đó phải tồn tại 2 đỉnh kề nhau là P và Q được sơn bởi cùng một màu – màu đỏ (Theo nguyên lý Dirichle)

Vì đa giác đã cho là đa giác đều có số đỉnh lẻ, nên phải tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PQ . Giả sử đỉnh đó là A .

Nếu A tô màu đỏ thì ta có tam giác APQ là tam giác cân có 3 đỉnh A, P, Q được tô cùng màu đỏ.

Nếu A tô màu xanh, lúc đó gọi B và C là các đỉnh khác của đa giác kề với P và Q .

Nếu cả hai đỉnh B và C được tô màu xanh thì tam giác ABC cân và có 3 đỉnh cùng tô màu xanh.

Nếu ngược lại, một trong hai đỉnh B và C mà tô màu đỏ thì tam giác BPQ hoặc tam giác CPQ là tam giác cân có 3 đỉnh được tô màu đỏ

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOÀNG HÓA**

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 21/04/2017**

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức $P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

- a) Rút gọn P
- b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên
- c) Tìm x để $P \leq 1$

Câu 2. (4,5 điểm)

- a) Giải phương trình: $x^3 - 6x - x + 30 = 0$
- b) Giải bất phương trình sau: $x - 1 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1$
- c) Cho biết $\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{3}$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $Q = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$

Câu 3. (5,0 điểm)

- a) Tìm x, y thỏa mãn đẳng thức: $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$
- b) Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$, thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh $a^5 + b^5 + c^5 : 30$
- c) Chứng minh rằng: $\left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right)$, trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.

Câu 4. (4,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Chứng minh rằng:

- a) Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC
- b) $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$
- c) $AD \cdot HD \leq \frac{BC^2}{4}$
- d) Gọi I, K, Q, R lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ E xuống AB, AD, CF, BC . Chứng minh bốn điểm I, K, Q, R cùng nằm trên một đường thẳng.

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC . Trên tia đối của các tia BA, CA lấy theo thứ tự các điểm D, E sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD . Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A , đường thẳng này cắt AC ở K . Chứng minh $AB = CK$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

- a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq \pm 1$

Ta có:

$$P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x} + \frac{2}{x+1} \cdot (x+1) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{3x} + 2 \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

Vậy $P = \frac{2x}{x-1}$

- b) Ta có: $P = 2 + \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Từ đó suy ra $x \in \{2; 0; 3; -1\}$

Kết hợp với ĐKXĐ được $x \in \{2; 3\}$

- c) $P \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \leq 0$

Mà $x-1 < x+1$ nên $x-1 < 0$ và $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x < 1$ và $x \geq -1$

Kết hợp với ĐKXĐ được $-1 < x < 1$ và $x \neq 0$

Câu 2.

- a) Ta có: $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x-5) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+2=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \\ x=5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad x-1-\frac{x-1}{3} &\leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1 \Leftrightarrow 6x-6-2x+2 \leq 6x+9+2x-6 \\ &\Leftrightarrow 4x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left\{ x / x \geq \frac{-7}{4} \right\}$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \text{Từ } \frac{x}{x^2-x+1} &= \frac{2}{3} \Rightarrow x \neq 0, \text{ do đó : } \frac{x^2-x+1}{x} = \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 1 &= \frac{3}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 1 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } \frac{x^4+x^2+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 1 = \frac{21}{4}$$

$$\text{Suy ra } Q = \frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{4}{21}$$

Câu 3.

a)

$$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 + 40xy + 10y - 10x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x+4y-1)^2 + 9(y+1)^2 = 0$$

Do $(5x+4y-1)^2 \geq 0$ và $9(y+1)^2 \geq 0$ với mọi x, y

$$\text{Nên } (5x+4y-1)^2 = 9(y+1)^2 = 0$$

$$\text{Suy ra } x=1; y=-1$$

b)

$$\text{Ta có: } a^5 - a = a(a^2-1)(a^2+1) = a(a^2-1)(a^2-4+5)$$

$$= (a-2)(a-1)a.(a+1)(a+2) + 5(a-1).a.(a+1)$$

Do $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ là tích 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho cả 2;3;5, do đó chia hết cho 30

Lại có $(a-1)a(a+1)$ chia hết cho 6 nên $5(a-1)a(a+1)$ chia hết cho 30

Từ đó suy ra $a^5 - a$ chia hết cho 30

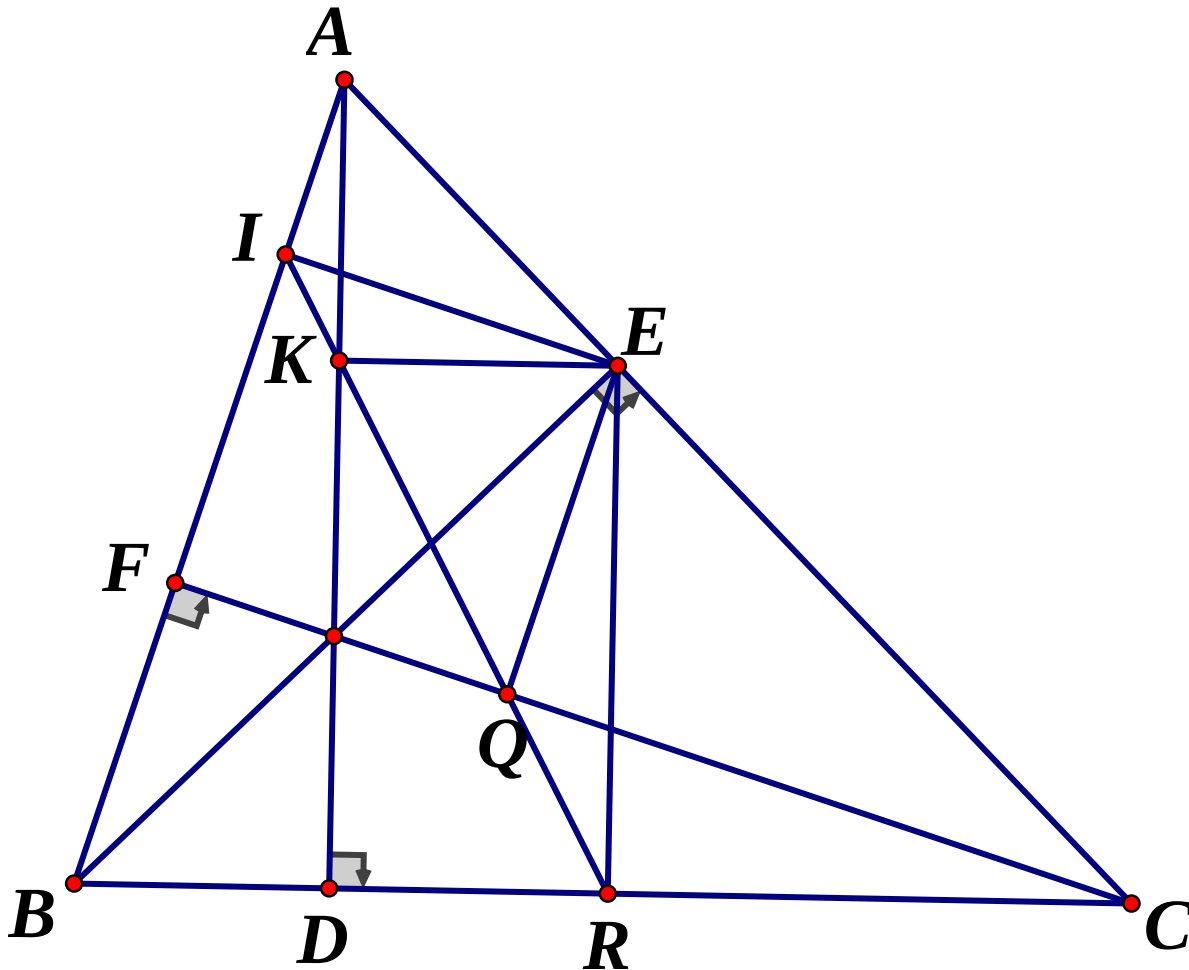
Tương tự $b^5 - b$ chia hết cho 30 và $c^5 - c$ chia hết cho 30.

Từ đó suy ra $(a^5 + b^5 + c^5) - (a + b + c) = (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c)$ chia hết cho 30

Mà $a + b + c = 0$ nên $a^5 + b^5 + c^5$ chia hết cho 30.

$$\begin{aligned}
c) & \left(a - \frac{1}{b}\right) \left(b - \frac{1}{c}\right) \left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(b - \frac{1}{b}\right) \left(c - \frac{1}{c}\right) \\
\Leftrightarrow & \frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc} \geq \frac{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}{abc} \\
\Leftrightarrow & (ab-1)(bc-1)(ca-1) \geq (a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) \\
\Leftrightarrow & a^2b^2c^2 - abc(a+b+c) + (ab+bc+ca) \geq a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\
\Leftrightarrow & 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 2abc(a+b+c) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab+bc+ca) \\
\Leftrightarrow & (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \\
\Leftrightarrow & (a-c)^2(b^2-1) + (b-a)^2(c^2-1) + (c-b)^2(a^2-1) \geq 0 \text{ (đúng với mọi } a, b, c \geq 1)
\end{aligned}$$

Câu 4.



a) Ta có: $\triangle AEB \sim \triangle AFC(g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

Từ đó suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ABC(c.g.c)$

b) $\triangle BDH \sim \triangle BEC(g.g) \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH.BE = BC.BD \quad (1)$

$\triangle CDH \sim \triangle CFB(g.g) \Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow CH.CF = BC.CD \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BH.BE + CH.CF = BC.BD + BC.CD = BC^2$

c) Chứng minh được $\triangle DBH \sim \triangle DAC(g.g) \Rightarrow \frac{DH}{DC} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow DH.DA = DC.DB$

Lại có: $DC.DB \leq \frac{(DC + DB)^2}{4} = \frac{BC^2}{4}$

Do đó: $AD.HD \leq \frac{BC^2}{4}$

d) Từ giả thiết suy ra $EI // CF, EK // BC, EQ // AB, ER // AD$

Áp dụng định lý Talet ta có:

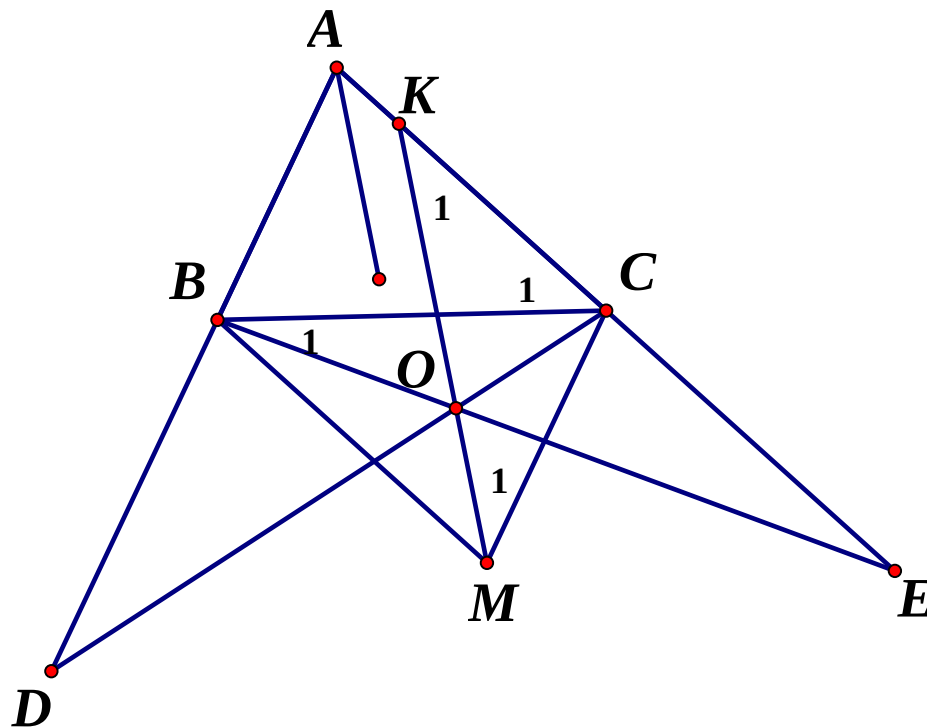
* $\frac{AI}{AF} = \frac{AE}{AC} = \frac{AK}{AD} \Rightarrow IK // DF \quad (3)$

* $\frac{BF}{BI} = \frac{BH}{BE} = \frac{BD}{BR} \Rightarrow IR // DF \quad (4)$

* $\frac{CR}{CD} = \frac{CE}{CA} = \frac{CQ}{CF} \Rightarrow RQ // DF \quad (5)$

Từ (3);(4);(5) suy ra bốn điểm I, K, Q, R thẳng hàng

Câu 5.



Vẽ hình bình hành $ABMC \Rightarrow AB = CM$ (1)

Ta có: $B_1 = \frac{1}{2}C_1 = \frac{1}{2}CMB$ nên BO là tia phân giác của CBM

Tương tự CO là tia phân giác của BCM

Do đó MO là tia phân giác của BMC

Suy ra OM song song với tia phân giác của A , suy ra K, O, M thẳng hàng

Ta có: $M_1 = \frac{1}{2}BMC = \frac{1}{2}BAC = K_1$

Nên tam giác KMC cân tại $C \Rightarrow CK = CM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CK = AB$

UBND HUYỆN VŨ THU'
PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
Môn: TOÁN – Lớp 8
Năm học: 2016-2017

Bài 1. (3 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 - x} + \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} - \frac{2 - x}{x} \right) : \frac{x + 1}{x}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2; x \neq -1$

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tính A biết x thỏa mãn $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$.

Bài 2. (4 điểm)

1. Tìm m sao cho phương trình ẩn x : $(m-1)x + 3m - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x \geq 1$
2. Giải phương trình $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 40$

Bài 3. (4 điểm)

- 1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 8y^2 + 4xy - 2x - 4y = 4$
- 2) Cho đa thức $h(x)$ bậc 4, hệ số của b cao nhất là 1, biết $h(1) = 2; h(2) = 5; h(4) = 17; h(-3) = 10$. Tìm đa thức $h(x)$

Bài 4. (2 điểm)

Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = 2$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \frac{a^3}{2016a + 2017b} + \frac{b^3}{2017a + 2016b}$

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ ($AC > BD$), hình chiếu vuông góc của C lên AB, AD lần lượt là E và F . Chứng minh:

- 1) $CE \cdot CD = CB \cdot CF$ và $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle FCE$
- 2) $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

Bài 6 (2 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Một đường thẳng kẻ qua A cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N . Gọi K là giao của OM và DN . Chứng minh CK vuông góc với BN .

Bài 7 (1 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có 13 đường thẳng bất kỳ có cùng tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích là $\frac{2}{5}$. Chứng minh rằng có ít nhất 4 đường thẳng trong 13 đường thẳng đó cùng đi qua một điểm.

ĐÁP ÁN**Câu 1.**

1.1

$$A = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} + \frac{x + 2}{x} - \frac{2 - x}{x} \right) \cdot \frac{x}{x + 1} = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$$

1.2

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(ktm) \\ x = 1(ktm) \\ x = 3(tm) \end{cases}$$

Thay $x = 3$ vào biểu thức có $A = \frac{3^2 + 3 \cdot 3 + 1}{3 + 1} = \frac{19}{4}$

Vậy $A = \frac{19}{4}$

Câu 2.

2.1

$m = 1$ phương trình đã cho trở thành $1 = 0$ (vô lý) nên phương trình vô nghiệm, loại

$m \neq 1$ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{-3m + 2}{m - 1}$

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-3m + 2}{m - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-4m + 3}{m - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq m \leq 1$$

Kết hợp điều kiện ta có $\frac{3}{4} \leq m < 1$ thì $(m - 1)x + 3m - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn

$$x \geq 1$$

2.2

ĐKXD: $x \neq -3$

$$x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 40 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x+3} = 40 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+3}\right) + \frac{6x^2}{x+3} - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+3} + 10\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x+3} - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x+3} = -10 \\ \frac{x^2}{x+3} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 10x + 30 = 0 \\ x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)^2 = -5(VN) \\ (x-2)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6(tm) \\ x = -2(tm) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm phương trình $S = \{-2; 6\}$

Câu 3.**3.1**

$$x^2 + 8y^2 + 4xy - 2x - 4y = 4 \Leftrightarrow (x + 2y - 1)^2 + 4y^2 = 5$$

$$\text{Do } 4y^2 \leq 4; (x + 2y - 1)^2 \geq 0; 4y^2 \geq 0 \quad \forall x, y \text{ nên } \begin{cases} 4y^2 = 4 \\ (x + 2y - 1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \\ (x + 2y - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ (x + 1)^2 = 1 \\ y = -1 \\ (x - 3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \\ y = -1 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases} \text{ thỏa mãn } x, y \text{ nguyên}$$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(0; 1); (-2; 1); (2; -1); (4; -1)\}$$

3.2

$$\text{Xét } g(x) = x^2 + 1 \text{ có } g(1) = 2; g(2) = 5; g(4) = 17; g(-3) = 10$$

Ta có $f(x) = h(x) - g(x)$ thì $f(x)$ bậc 4 hệ số của x^4 là 1 và

$$f(1) = f(2) = f(4) = f(-3) \Rightarrow f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)(x + 3)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - x - 12) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$$

$$\Rightarrow h(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 34x - 23$$

$$\text{Vậy } h(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 34x - 23$$

Câu 4.

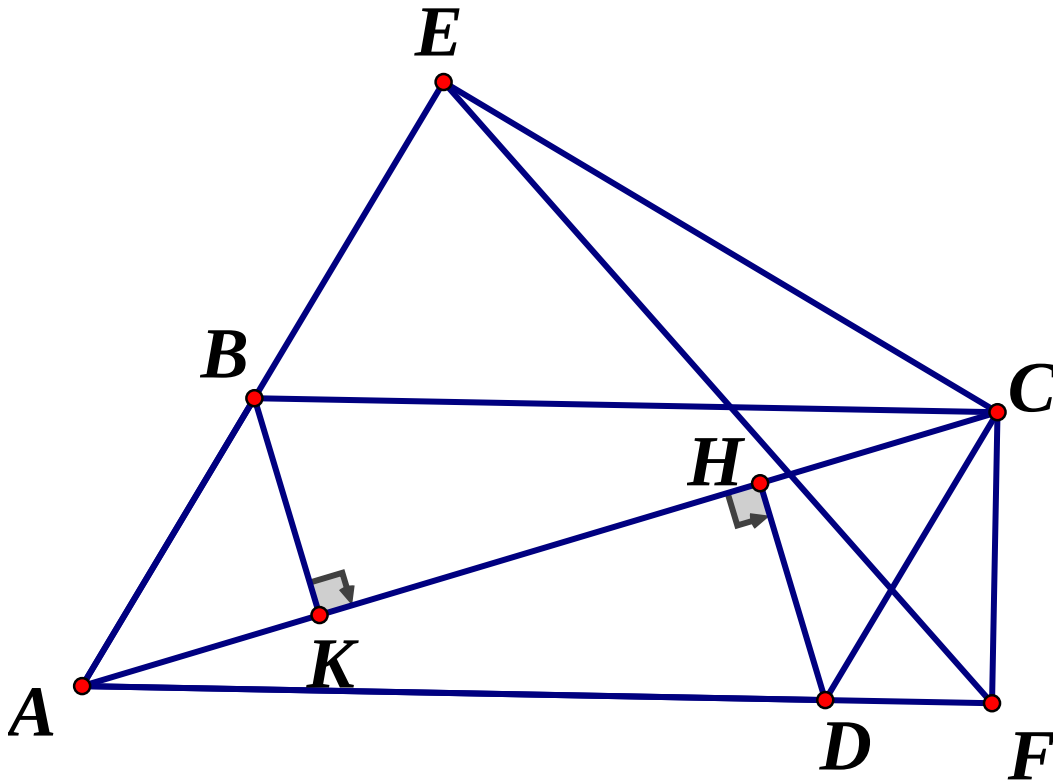
$$M = \left[\frac{a^3}{2016a + 2017b} + \frac{a(2016a + 2017b)}{4033^2} \right] + \left[\frac{b^3}{2017a + 2016b} + \frac{b(2017a + 2016b)}{4033^2} \right] - \frac{2016(a^2 + b^2) + 4034ab}{4033^2}$$

$$\geq \frac{2a^2}{4033} + \frac{2b^2}{4033} - \frac{2016(a^2 + b^2) + 4034 \cdot \frac{a^2 + b^2}{2}}{4033^2} = \frac{a^2 + b^2}{4033} = \frac{2}{4033}$$

$$M \geq \frac{2}{4033}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b = 1$$

$$\text{Vậy GTNN của } M = \frac{2}{4033} \Leftrightarrow a = b = 1$$

Câu 5.



5.1

Chứng minh $\triangle EBC \sim \triangle FDC (g.g) \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{BC}{DC}, DC = AB \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{BC}{BA}$

Chứng minh $\angle ABC = \angle FCE \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle FCE$

5.2

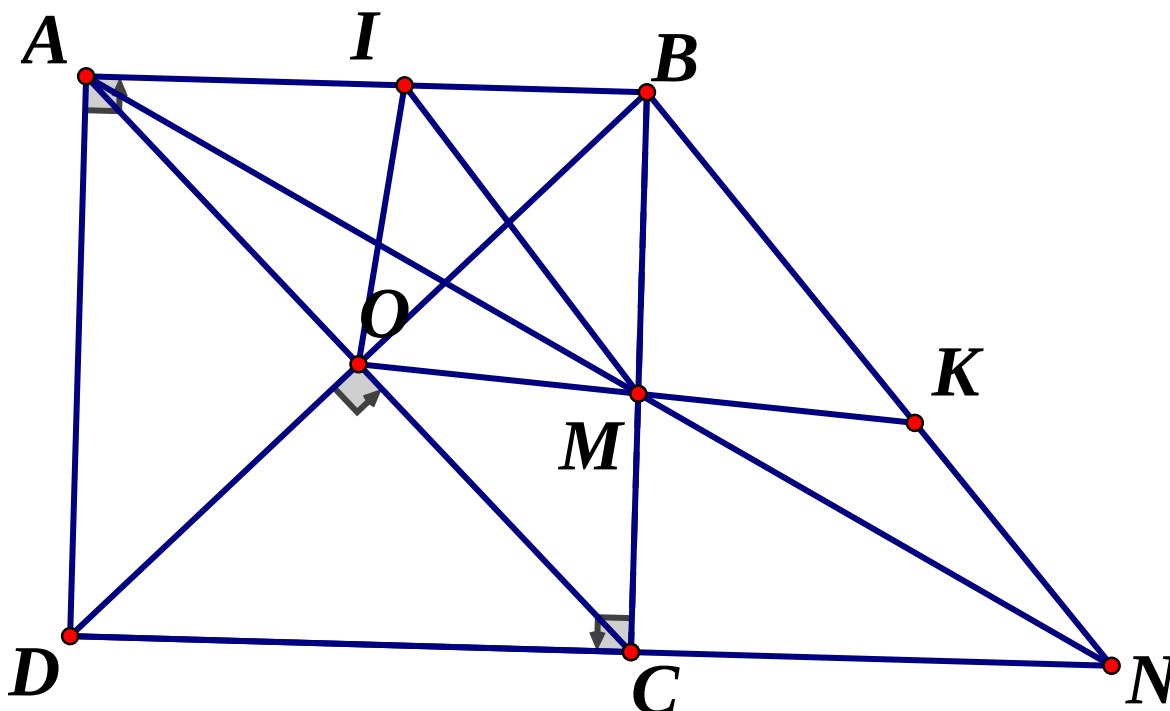
H, K là hình chiếu vuông góc của D, B lên AC

Chứng minh $AB.AE = AK.AC; AD.AF = AH.AC$

Chứng minh $KC = AH$

$\Rightarrow AB.AE = AD.AF = AC^2$

Câu 6.



Trên cạnh AB lấy I sao cho $IB = CM$.

Xét $\triangle IBO$ và $\triangle MCO$ có: $IB = CM$; $\angle IBO = \angle MCO = 45^\circ$; $BO = CO$

$\Rightarrow \triangle IBO = \triangle MCO (c.g.c) \Rightarrow OI = OM, \angle IOB = \angle MOC$

$\Rightarrow \angle BOI + \angle BOM = \angle BOM + \angle MOC = 90^\circ \Rightarrow \angle MOI = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle MOI$ vuông cân tại O nên $\angle OMI = \angle OIM = 45^\circ$

Vì $IB = CM, AB = CB$ nên $\frac{BI}{BA} = \frac{CM}{CB}$ (1) và $AB \parallel CN$ nên $\frac{CM}{CB} = \frac{NM}{NA}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{BI}{BA} = \frac{NM}{NA} \Rightarrow IM \parallel BN$ (Talet đảo) do đó $\angle OKB = \angle OMI = 45^\circ$ (đồng vị)

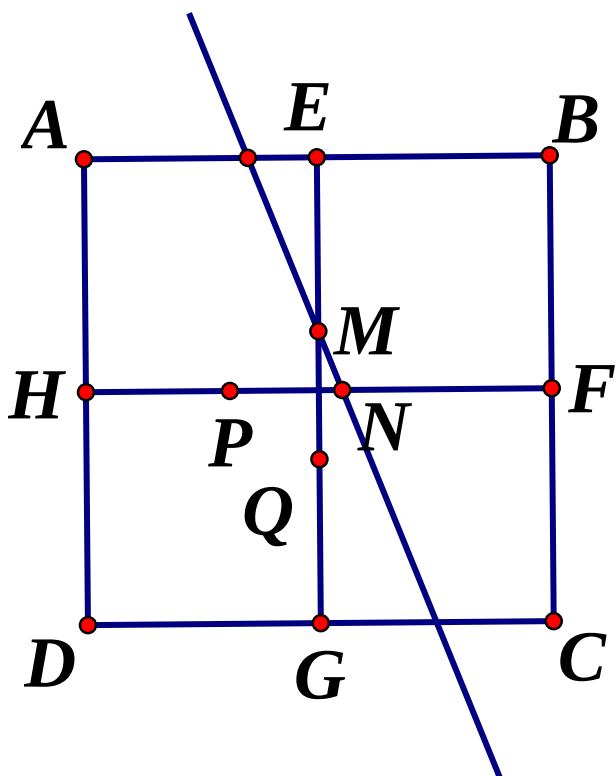
$\triangle OMC \sim \triangle BMK (g.g) \Rightarrow \frac{MC}{MK} = \frac{MO}{MB}$

Xét $\triangle CMK$ và $\triangle OMB$ có: $\frac{MC}{MK} = \frac{MO}{MB}$ (cmt) và $\angle CMK = \angle OMB$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle CMK \sim \triangle OMB (c.g.c) \Rightarrow \angle MKC = \angle MOB$ mà $\angle MBO = 45^\circ \Rightarrow \angle MKC = 45^\circ$
 $\Rightarrow \angle CKB = \angle MKB + \angle MKC = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

Vậy CK vuông góc với BN

Câu 7.



Đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác nên đường thẳng phải cắt hai cạnh đối của hình vuông và không đi qua đỉnh hình vuông. E, F, G, H là trung điểm AB, BC, CD, DA

Xét một đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác, cắt HF tại N

Nên tỉ số diện tích hai tứ giác tạo thành bằng $\frac{NF}{NH}$.

Nếu tỉ số diện tích hai tứ giác tạo thành là $\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{NH}{NF} = \frac{2}{5}$. Như vậy N cố định và có 4 điểm

vai trò như điểm N là M, N, P, Q như hình vẽ

Có 13 đường thẳng mỗi đường phải đi qua 1 trong 4 điểm phân biệt M, N, P, Q

$13 = 3 \cdot 4 + 1$ Theo nguyên tắc Dirichle sẽ tồn tại ít nhất 4 đường thẳng cùng đi qua một điểm trong 4 điểm M, N, P, Q .

ĐỀ THI OLYMPIC HUYỆN

MÔN TOÁN LỚP 8

Năm học 2015-2016

(Thời gian làm bài : 120 phút)

Bài 1. Phân tích thành nhân tử: $x^4 - 6x^2 - 7x - 6$

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$x^4 + y^4 + z^4 \text{ biết } x + y + z = 2$$

Bài 3. Cho x, y, a, b là những số thực thỏa mãn:

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a + b} \text{ và } x^2 + y^2 = 1$$

Chứng minh:
$$\frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{2}{(a + b)^{1003}}$$

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a+b}{bc+a^2} + \frac{b+c}{ac+b^2} + \frac{c+a}{ab+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Bài 5. Cho tam giác vuông cân ABC ($AB = AC$). Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 2MA$, trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ đường thẳng Bx vuông góc với AB , trên Bx lấy điểm N sao cho $BN = \frac{1}{2}AB$. Đường thẳng MC cắt NA tại E , đường thẳng BE cắt đường thẳng AC tại F .

a) Chứng minh $AF = AM$.

b) Gọi H là trung điểm của FC . Chứng minh $EH = BM$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$\begin{aligned}
& x^4 - 6x^2 - 7x - 6 \\
&= x^4 + 2x^3 - 2x^3 - 4x^2 - 2x^2 - 4x - 3x - 6 \\
&= x^3(x+2) - 2x^2(x+2) - 2x(x+2) - 3(x+2) \\
&= (x+2)(x^3 - 2x^2 - 2x - 3) \\
&= (x+2)(x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x + x - 3) \\
&= (x+2)[x^2(x-3) + x(x-3) + (x-3)] \\
&= (x+2)(x-3)(x^2 + x + 1)
\end{aligned}$$

Bài 2.

Áp dụng công thức Bunhiacopski ta có:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^4 &\leq \left[(x+y+z)^2 \right]^2 \leq \left[3(x+y+z)^2 \right]^2 \\
&\leq 9(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 27(x^4 + y^4 + z^4) \\
\Rightarrow 16 &\leq 27(x^4 + y^4 + z^4) \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{16}{27}
\end{aligned}$$

Vậy GTNN của $x^4 + y^4 + z^4$ là $\frac{16}{27} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$

Bài 3.

Từ giả thiết suy ra:

$$\begin{aligned}
\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} &= \frac{(x^2 + y^2)^2}{a+b} \Leftrightarrow (bx^4 + ay^4)(a+b) = ab(x^2 + y^2)^2 \\
\Leftrightarrow b^2x^4 + a^2y^4 - 2abx^2y^2 &= 0 \Leftrightarrow (bx^2 - ay^2)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow bx^2 - ay^2 = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b} \\
\Leftrightarrow \frac{x^{2006}}{a^{1003}} = \frac{y^{2006}}{b^{1003}} &= \frac{1}{(a+b)^{1003}} \Leftrightarrow \frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{2}{(a+b)^{1003}} \quad (dpcm)
\end{aligned}$$

Bài 4.

Ký hiệu vế trái là A , vế phải là B , xét hiệu $A - B$

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{bc+a^2} - \frac{1}{a} + \frac{b+c}{ac+b^2} - \frac{1}{b} + \frac{c+a}{ab+c^2} - \frac{1}{c} \\ &= \frac{a^2+ab-bc-a^2}{a(bc+a^2)} + \frac{b^2+bc-ac-b^2}{b(ac+b^2)} + \frac{c^2+ac-ab-c^2}{c(ab+c^2)} \\ &= \frac{b(a-c)}{a(bc+a^2)} + \frac{c(b-a)}{b(ac+b^2)} + \frac{a(c-b)}{c(ab+c^2)} \end{aligned}$$

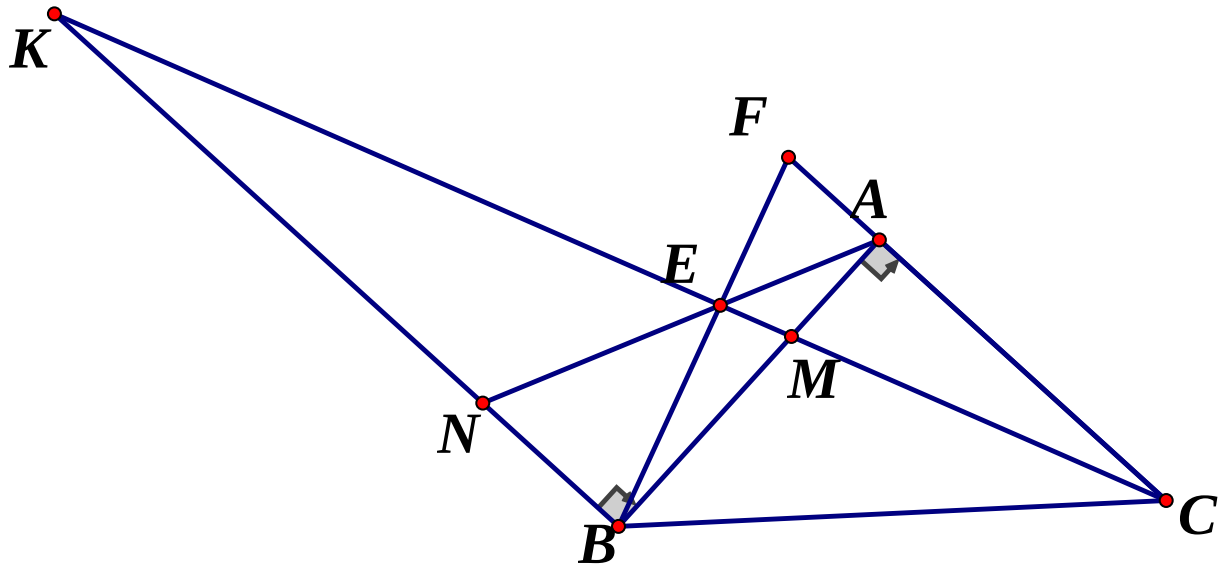
Do a, b, c bình đẳng nên giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $b(a-c) \geq 0, c(b-a) \leq 0, a(c-b) \leq 0$

$$a^3 \geq b^3 \geq c^3 \Rightarrow abc + a^3 \geq abc + b^3 \geq abc + c^3 \Rightarrow \frac{b(a-c)}{a(bc+a^2)} \leq \frac{b(a-c)}{b(ac+b^2)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A - B &\leq \frac{b(a-c)}{b(ac+b^2)} + \frac{c(b-a)}{b(ac+b^2)} + \frac{a(c-b)}{c(ab+c^2)} = \frac{ab-ac}{b(ac+b^2)} + \frac{ac-ab}{c(ab+c^2)} \\ &= \frac{a(b-c)}{b(ac+b^2)} - \frac{a(b-c)}{c(ab+c^2)} \end{aligned}$$

Mà $\frac{1}{b(ac+b^2)} \leq \frac{1}{c(ab+c^2)}$ nên $A - B \leq 0$ đpcm

Bài 5.



a) Đường thẳng EC cắt đường thẳng BN tại K .

Ta có: $AC \perp AB(gt), KB \perp AB(gt) \Rightarrow FC // KB$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AF}{NB} = \frac{AE}{EN} \\ \frac{AC}{NK} = \frac{AE}{EN} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AF}{NB} = \frac{AC}{NK} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AC}{NK} \Rightarrow AF = \frac{AB^2}{2NK} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{AC}{BK} &= \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AC}{KN + NB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{KN + \frac{AB}{2}} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{2AB}{2KN + AB} &= \frac{1}{2} \Rightarrow 4AB = 2KN + AB \Rightarrow KN = \frac{3}{2}AB \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AF = \frac{AB^2}{3AB} = \frac{AB}{3} \Rightarrow AF = AM \text{ (Đpcm)}$$

b) Từ chứng minh trên suy ra $\triangle AFB = \triangle AMC \Rightarrow ABF = ACM$

Mà $ABF + AFB = 90^\circ \Rightarrow ACM + AFB = 90^\circ$

$$\Rightarrow FEC = 90^\circ \Rightarrow EH = \frac{FC}{2} = FH$$

$$\text{Mà } FH = FA + AH = \frac{AC}{3} + \frac{AC}{3} = \frac{2AC}{3} = BM \Rightarrow EH = BM \text{ (dpcm)}$$

PHÒNG GD & ĐT HUYỆN KHOÁI CHÂU	ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN Năm học: 2016-2017 Môn: Toán – Lớp 8 (Thời gian làm bài: 120' – không kể giao đề)
---	---

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (5,0 điểm)

Chọn và chép lại đáp án đúng vào bài làm của mình với mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 1. Cho $3(a+b) = 2(3a-b)$. Tỉ số của hai số a và b bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 2. Giá trị của biểu thức

$A = x^{2017} - 2017x^{2016} + 2017x^{2015} - 2017x^{2014} + \dots - 2017x^2 + 2017x - 2017$ tại $x = 2016$ là

- A. 2016 B. 2017 C. -1 D. 1

Câu 3. Cho $m = UCLN(63; 72); n = BCNN(9; 15)$. Tìm hai số a, b sao cho

$$a+b=m; a^2-b^2=n.$$

- A. $a=5; b=4$ B. $a=9; b=5$ C. $a=7; b=2$ D. $a=7; b=5$

Câu 4. Tìm a , biết : a tỉ lệ thuận với b theo hệ số tỉ lệ 2; b tỉ lệ nghịch với c theo hệ số tỉ lệ 6 và $c^2 - 6c = -9$

- A. $a=2$ B. $a=4$ C. $a=6$ D. $a=12$

Câu 5. Cho $a+b+c=6$ và $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$. Giá trị của biểu thức:

$$A = (1-a)^{2017} + (b-1)^{2017} + (c-2)^{2017} \text{ bằng:}$$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 6

Câu 6. Cho $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 0$. Tính $(x+y)^{2016} + (x+y)^{2017}$ được kết quả là:

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

Câu 7. Tìm m để đa thức $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 7x + m$ chia hết cho đa thức $x-2$

- A. $m=-2$ B. $m=0$ C. $m=2$ D. $m=4$

Câu 8. Số nghiệm của phương trình: $x^3 - 3x + 2 = 0$ là mấy ?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 9. Cho số nguyên x thỏa mãn phương trình $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Chữ số tận cùng của $(4-x)^{2017}$ là chữ số:

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

Câu 10. Tìm ĐKXĐ của phương trình : $\frac{x^2+1}{2x^2-3x+1} = \frac{x}{x+1}$

- A. $x \neq -1$ B. $x \neq -1; x \neq \frac{1}{2}$ C. $x \neq \pm 1$ D. $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

Câu 11. Giải phương trình : $\frac{2x^2+10x+12}{x^3-4x} = 0$

- A. $x \in \{-2; -3\}$ B. $x \in \{0; \pm 2\}$ C. $x \in \{-3\}$ D. $x \in \{0; 2\}$

Câu 12. Giải phương trình : $|x+5| = 3x-7$

- A. $x \in \{6\}$ B. $x \in \left\{6; \frac{1}{2}\right\}$ C. $x \in \left\{6; -\frac{1}{2}\right\}$ D. $x \in \{-6\}$

Câu 13. Cho $a = (-2)^{2018}; b = -3 \cdot (-2)^{2017}$. Kết luận nào sau đây là đúng ?

- A. $a > b$ B. $a < b$ C. $a < -b$ D. $-a > b$

Câu 14. Tìm x , biết $\frac{2x+1}{x-1} < 1$

- A. $x < -2$ B. $x > -2$ C. $-2 < x < 1$ D. $-2 < x < -1$

Câu 15. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$, biết $AB = 3cm, NP = 5cm$. Chu vi tam giác ABC có thể bằng

- A. 9 cm B. 9,5 cm C. 10 cm D. 13 cm

Câu 16. Cho tam giác ABC có: $AB = 8cm, AC = 18cm, BC = 13cm$, trung tuyến AM, phân giác AD. Độ dài đoạn thẳng DM là :

- A. 2,5 cm B. 4 cm C. 4,5 cm D. 6,5 cm

Câu 17. Cho tam giác ABC, phân giác AD biết $AC = 9, BC = 10, AB = 3a, BD = 2a$. Tìm a

- A. $a = 2$ B. $a = 3$ C. $a = 4,5$ D. $a = 5$

Câu 18. Cho tam giác ABC có $A = 120^\circ, AB = 6cm, AC = 12cm$. Độ dài đường phân giác AD bằng:

- A. 2cm B. 3cm C. 4cm D. 6 cm

Câu 19. Cho tam giác ABC với đường phân giác AD thỏa mãn $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$. Số đo góc BAC bằng:

- A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

Câu 20. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), O là giao điểm của AC và BD . Qua O kẻ đường thẳng song song với hai đáy, cắt AD và BC lần lượt tại M và N . Biết $AB = 4cm$, $CD = 12cm$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng:

A. $4cm$

B. $6cm$

C. $8cm$

D. $10cm$

II. PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức : $A = \left(\frac{2017}{x-1} - \frac{2016}{x+1} - \frac{2014+2016}{x^2-1} \right) : \frac{x^2-4}{x^2-1}$

- Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định
- Rút gọn biểu thức A
- Tìm x để $A \geq 0$ và biểu diễn tập các giá trị tìm được của x trên trục số
- Tìm tất cả các số nguyên x để A có giá trị là số nguyên.

Bài 2. (1,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{101-x^2}{2015} - 1 = \frac{100-x^2}{2016} - \frac{x^2-99}{2017}$$

$$b) (4x-7)^2 (2x-5)(x-1) = -1$$

Bài 3. (0,5 điểm)

Cho $x \neq \pm y$ và $\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 2016$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

Bài 4. (1,5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng: $\triangle HED \sim \triangle HBC$
- Chứng minh rằng: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$
- Gọi M là trung điểm của BC , qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM , cắt AB tại I , cắt AC tại K . Chứng minh tam giác IMK là tam giác cân

ĐÁP ÁN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

1C 2C 3C 4B 5B 6B 7A 8C 9A 10D
11C 12A 13B 14C 15D 16A 17A 18C 19D 20B

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq \pm 2$

b) Rút gọn được: $A = \frac{x+3}{x^2-4}$

c) Để $A \geq 0$ thì

$$A = \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x < -2 \text{ hoặc } x > 2$$

Học sinh tự biểu diễn trên trục số

$$\begin{aligned} & x+3 : (x^2-4) \Rightarrow (x^2+3x) : (x^2-4) \Leftrightarrow (x^2-4) + (3x+4) : (x^2-4) \\ \text{d)} & \Rightarrow (3x+4) : (x^2-4); (3x+9) : (x^2-4) \Rightarrow 5 : (x^2-4) \end{aligned}$$

x^2-4	-5	-1	1	5
x^2	-1	3	5	9
x	Loại	Loại	Loại	± 3

Thử lại, chỉ có $x = -3$ là thỏa mãn. Vậy $x = -3$

Bài 2.

a)

$$\begin{aligned} \frac{101-x^2}{2015} - 1 &= \frac{100-x^2}{2016} - \frac{x^2-99}{2017} \\ \Leftrightarrow \frac{101-x^2}{2015} + 1 &= \frac{100-x^2}{2016} + 1 - \frac{x^2-99}{2017} + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2116-x^2}{2015} &= \frac{2116-x^2}{2016} + \frac{2116-x^2}{2017} \\ \Leftrightarrow (2116-x^2) \left(\frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2116-x^2 = 0 &\Leftrightarrow x = \pm 46 \end{aligned}$$

$$2b) (4x-7)^2(2x-5)(x-1) = -1 \Leftrightarrow (16x^2 - 56x + 49)(2x^2 - 7x + 5) = -1$$

$$\text{Đặt } 2x^2 - 7x + 5 = a \text{ thì } 16x^2 - 56x + 49 = 8a + 9$$

$$\text{Ta có phương trình: } a(8a+9) = -1 \Leftrightarrow 8a^2 + 9a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(8a+1) = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = -\frac{1}{8}$$

$$+) 2x^2 - 7x + 5 = -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$+) 2x^2 - 7x + 5 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 16x^2 - 56x + 41 = 0 \Leftrightarrow (4x-7)^2 = 8 \Leftrightarrow s = \frac{\pm\sqrt{8}+7}{4}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 2; \frac{3}{2}; \frac{\pm\sqrt{8}+7}{4} \right\}$$

Bài 3.

$$\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4(x^4-y^4)+8y^8}{x^8-y^8} = 2016$$

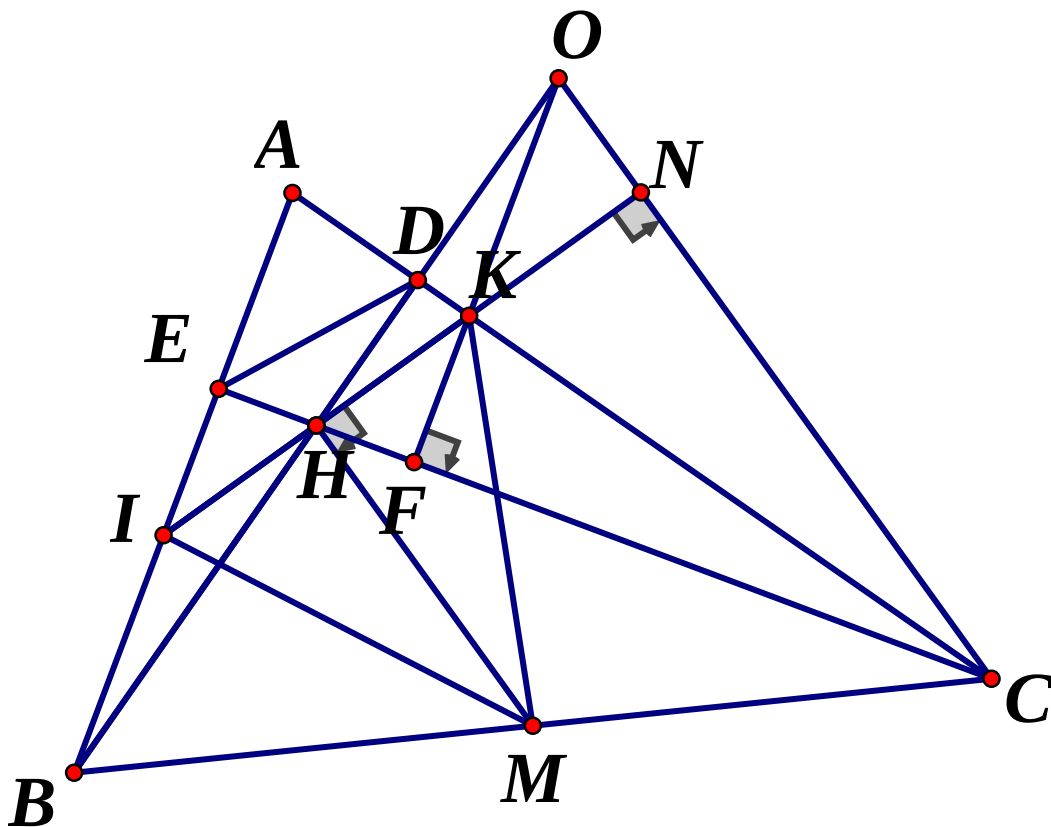
$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4-y^4} = 2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2-y^2} = 2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x-y} = 2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{2017}{2016}$$

Bài 4.



a) $\triangle BHE \sim \triangle CHD (g.g) \Rightarrow \frac{HE}{HB} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \triangle HED \sim \triangle HBC (c.g.c)$

b) $\triangle ABD \sim \triangle ACE (g.g) \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC (c.g.c)$

- c) Kẻ $KF \perp CE$. Gọi O là giao điểm của KF và HD $\Rightarrow O$ là trực tâm tam giác CHO
 $\Rightarrow HK \perp CO \Rightarrow MH$ là đường trung bình của tam giác BCO
 $\Rightarrow HB = HO \Rightarrow \triangle BEH = \triangle OFH$ (cạnh huyền – góc nhọn)
 $\Rightarrow HE = HF \Rightarrow \triangle HEI = \triangle HFK (g.c.g)$
 $\Rightarrow HI = HK \Rightarrow \triangle MIK$ cân tại M (vì có đường cao đồng thời là đường trung tuyến)

PHÒNG GD & ĐT BỈM SƠN

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2014-2015

Môn: TOÁN 8

Thời gian: 120 phút (không kể chép đề)

Bài 1. (3đ) Cho a, b, c là các số hữu tỷ khác 0 thỏa mãn $a + b + c = 0$

Chứng minh rằng: $M = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ là bình phương của một số hữu tỷ

Bài 2. (5 điểm)

Rút gọn biểu thức sau và tìm giá trị nguyên của x để biểu thức có giá trị nguyên:

$$M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

Bài 3. (3 điểm)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3^x + 4^x = 5^x$

Bài 4. (6 điểm)

a) Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 120^\circ$. Các phân giác AD, BE và CF

Chứng minh rằng $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$

b) Tính FDE

Bài 5. (3 điểm)

Cho a, b, c là các số không âm và không lớn hơn 2 thỏa mãn $a + b + c = 3$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

Ta có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 - 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2$$

Vậy M là bình phương của một số hữu tỉ

Bài 2.

$$M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4 \cdot (2-x) + x^2 \cdot (2-x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$$

$$M = \left[\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} + \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(x - 2)} \right] \cdot \frac{(x^2 - 2) \cdot (x + 1)}{x^2}$$

$$M = \frac{x^2 \cdot (x - 2)^2 + 4x^2}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x - 2)(x + 1)}{x^2} = \frac{x(x^2 - 4x + 4 + 4x)}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x - 2)(x + 1)}{x^2}$$

$$M = \frac{x(x^2 + 4)}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x - 2)(x + 1)}{x^2} = \frac{x + 1}{2x}$$

$$\text{Để } M \text{ xác định thì } \begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ (x^2 + 4)(x - 2) \neq 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Khi đó M nguyên thì $2M$ nguyên hay $\frac{x+1}{x}$ nguyên. Mà

$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(1) = \{\pm 1\}$$

Với $x = -1$ thỏa mãn (*) và $M = 0 \in \mathbb{Z}$

Với $x = 1$ thỏa mãn (*) và $M = 1 \in \mathbb{Z}$

Vậy $x = 1; x = -1$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Bài 3.

Phương trình đã cho có thể viết lại là : $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

Ta thấy $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x \neq 2$ ta xét:

Nếu $x > 2$ thì $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$

Với $x < 2$ dễ thấy $x = 0; x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình

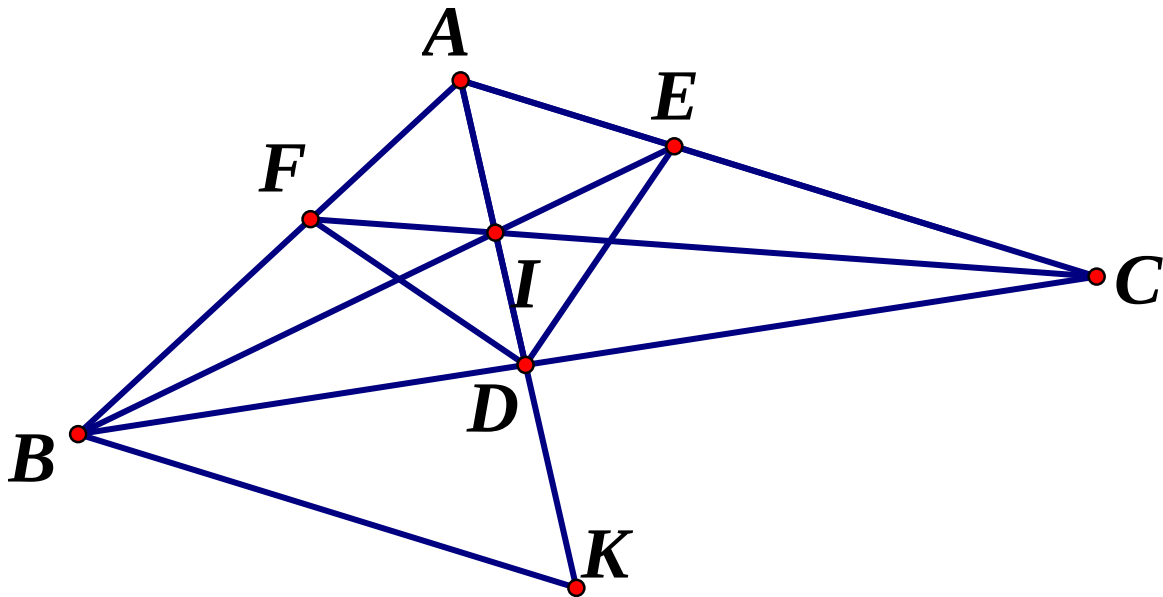
Với $x < 0$ ta đặt $x = -y$ thì $y > 0$ nên $y \geq 1$. Ta có:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{-y} + \left(\frac{4}{5}\right)^{-y} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^y + \left(\frac{5}{4}\right)^y = 1$$

Phương trình này vô nghiệm vì $\left(\frac{5}{3}\right)^y + \left(\frac{5}{4}\right)^y \geq \frac{5}{3} + \frac{5}{4} > 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$

Bài 4.



a) Từ B kẻ $BK \parallel AC$ cắt AD tại K, ta có tam giác ABK đều

Do đó:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{DK}{DA} = \frac{AB - AD}{AD} = AC \cdot (AB - AD) \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

b) Áp dụng tính chất đường phân giác tính được $BD = \frac{BC \cdot AB}{AB + AC}$

Từ (a) suy ra $AD = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}$

Suy ra $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} = \frac{EA}{EB}$ nên DE là phân giác của BDA

Chứng minh tương tự được DF là phân giác ADC

Từ đó suy ra $\angle EDF = 90^\circ$

Bài 5.

Từ giả thiết ta có:

$$(2-a)(2-b)(2-c) \geq 0 \Leftrightarrow 8 + 2(ab+bc+ca) - 4(a+b+c) - abc \geq 0$$

Cộng hai vế với $a^2 + b^2 + c^2$, sau đó thu gọn ta được:

$$(a+b+c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + abc + 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + abc \leq 5$$

Mà $abc \geq 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

Dấu bằng xảy ra khi trong ba số a, b, c có một số bằng 0, một số bằng 2, một số bằng 1.

**UBND THÀNH PHỐ MÓNG CÁI
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 8 THCS NĂM HỌC 2011-2012**

Bài 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức $M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- Rút gọn M
- Tìm x nguyên để M có giá trị là số nguyên dương
- Tìm x để $M \geq -3$

Bài 2. (6,0 điểm)

- Cho x, y là hai số dương và $x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012}$. Tính giá trị của biểu thức $S = x^{2020} + y^{2020}$
- Giải phương trình: $\frac{x-2015}{2010} + \frac{x+2007}{2012} = \frac{x+2006}{2011} + \frac{x-2018}{2013}$
- Tìm x và y thỏa mãn: $y^2 + 2(x^2 + 1) = 2y(x + 1)$

Bài 3. (4,0 điểm)

- Chứng minh $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$ với mọi số dương a, b, c .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $L = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 20$

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$). Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $KH = HA$. Qua K kẻ đường thẳng song song với AH , cắt đường thẳng AC tại P .

a) Chứng minh : Tam giác AKC đồng dạng với tam giác BPC

b) Gọi Q là trung điểm của BP . Chứng minh tam giác BHQ đồng dạng với tam giác BPC .

c) Tia AQ cắt BC tại I . Chứng minh $\frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\text{a)} \quad 2x^2 + 8 = 2(x^2 + 4) \neq 0; 8 - 4x + 2x^2 - x^3 = (2 - x)(x^2 + 4) \neq 0 \text{ và } x \neq 0$$

$$M \text{ xác định} \Leftrightarrow x \neq 2; x \neq 0$$

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(2 - x)(x^2 + 4)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \frac{(x^2 - 2x)(2 - x) - 4x^2}{2(2 - x)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \\ &= \frac{-x(x^2 + 4)}{2(2 - x)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} = \frac{x + 1}{2x} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \text{Với } x \neq 2; x \neq 0, M \text{ có giá trị nguyên dương} \Leftrightarrow M = \frac{x + 1}{2x} \text{ có giá trị nguyên dương}$$

$$\Rightarrow 2M = \frac{2x + 2}{2x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ nguyên dương}$$

$$x \in \mathbb{Z}; 2M \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ là ước của } 1 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Thử lại: Với } x = 1 \text{ ta có: } M = \frac{x + 1}{2x} \text{ có giá trị bằng } 1 \text{ (Thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } x = -1 \text{ ta có: } M = \frac{x + 1}{2x} \text{ có giá trị bằng } 0 \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x = 1$$

c)

$$M \geq -3 \Leftrightarrow x \neq 2; x \neq 0; \frac{x + 1}{2x} \geq -3$$

$$\frac{x + 1}{2x} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{x + 1}{2x} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7x + 1}{2x} \geq 0$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 7x + 1 \geq 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 7x + 1 \leq 0 \\ 2x < 0 \end{cases}. \text{Giải được } x > 0 \text{ hoặc } x \leq \frac{-1}{7}$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $M \geq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ hoặc $x \leq \frac{-1}{7}$

Câu 2.

2a) Có $x^{2012} + y^{2012} = (x^{2011} + y^{2011})(x + y) - (x^{2010} + y^{2010}).xy$

Do x, y là hai số dương và $x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012}$

Nên $x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012} = m > 0$

$$m = m(x + y) - mxy \Leftrightarrow 1 = x + y - xy \Leftrightarrow (x - 1)(1 - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Với $x = 1 \Rightarrow y^{2010} = y^{2011} \Leftrightarrow y = 0$ (loại) hoặc $y = 1$

Với $y = 1 \Rightarrow x^{2010} = x^{2011} \Leftrightarrow x = 0$ (ktm) hoặc $x = 1$

2b.

$$\begin{aligned} \frac{x - 2015}{2010} + \frac{x + 2007}{2012} &= \frac{x + 2006}{2011} + \frac{x - 2018}{2013} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x - 2015}{2010} + 1 \right) + \left(\frac{x + 2007}{2012} - 1 \right) &= \left(\frac{x + 2006}{2011} - 1 \right) + \left(\frac{x - 2018}{2013} + 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{x - 5}{2010} + \frac{x - 5}{2012} - \frac{x - 5}{2011} - \frac{x - 5}{2013} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 5) \left(\frac{1}{2010} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 5 \left(\text{Do } \frac{1}{2010} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} \neq 0 \right) \end{aligned}$$

2c.

$$y^2 + 2(x^2 + 1) = 2y(x + 1) \Leftrightarrow y^2 - 2y(x + 1) + 2(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow [y^2 - 2y(x + 1) + (x + 1)^2] + (x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - x - 1)^2 + (x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - x - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Câu 3.

3a. Với mọi số dương a, b, c ta có:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c \Leftrightarrow \frac{(bc)^2}{abc} + \frac{(ac)^2}{abc} + \frac{(ab)^2}{abc} \geq a + b + c$$

$$\Leftrightarrow (bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$$

$$\Leftrightarrow 2(bc)^2 + 2(ac)^2 + 2(ab)^2 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [(ac)^2 - 2a^2bc + (ab)^2] + [(bc)^2 - 2b^2ac + (ab)^2] + [(ac)^2 - 2c^2ab + (bc)^2] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ac - ab)^2 + (bc - ab)^2 + (ac - bc)^2 \geq 0$$

BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

3b.

$$L = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 20 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3x^2 - 12x + 12 + 8$$

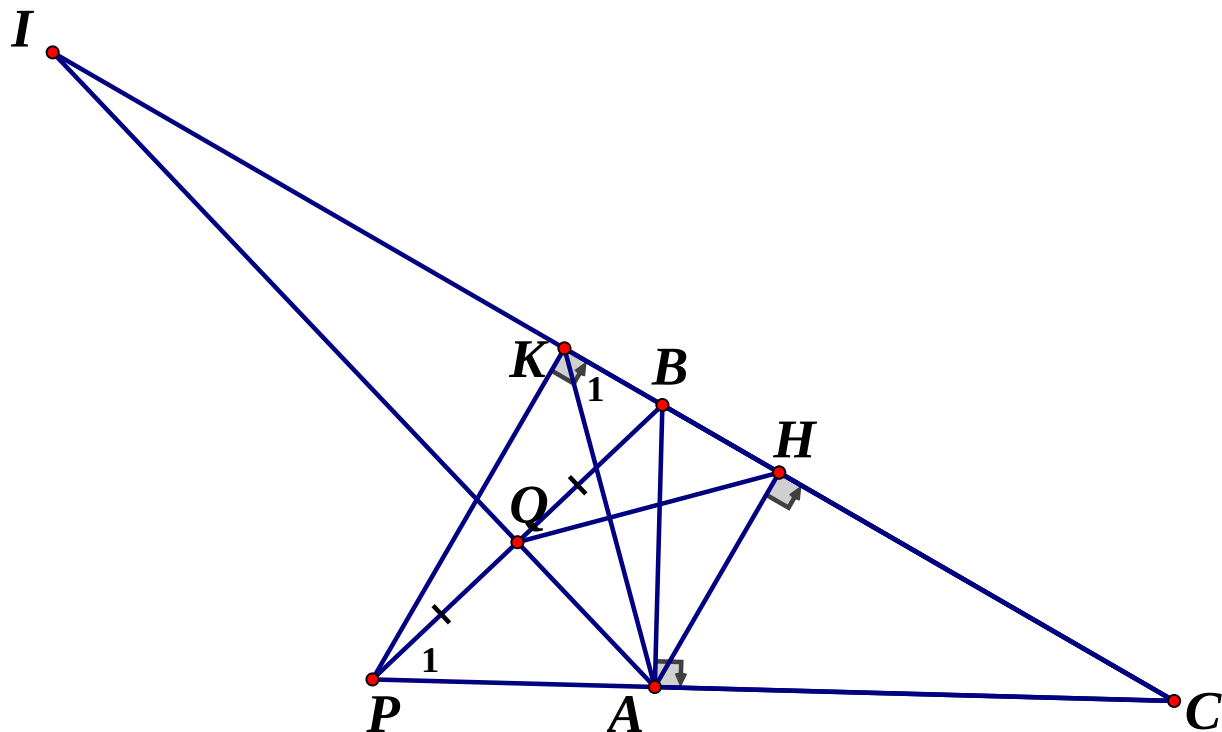
$$= x^2(x^2 - 4x + 4) + 3(x^2 - 4x + 4) + 8 = (x - 2)^2(x^2 + 3) + 8$$

$$\text{Do } (x - 2)^2 \geq 0 (\forall x); (x^2 + 3) > 0 (\forall x) \Rightarrow L \geq 8 \quad \forall x$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy với $x = 2$ thì L có giá trị nhỏ nhất.

Giá trị nhỏ nhất của L là 8

Câu 4.



$$\text{a) } PK \parallel AH \Rightarrow \triangle CKP \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{CK}{CP} = \frac{CA}{CB}$$

Suy ra $\triangle AKC \sim \triangle BPC$ (c.g.c) (1)

$$\text{b) } \triangle AKH \text{ vuông cân tại H} \Rightarrow K_1 = 45^\circ. \text{ Từ (1)} \Rightarrow K_1 = P_1 = 45^\circ \Rightarrow \triangle BAP \text{ vuông cân tại A} \Rightarrow BP = AB\sqrt{2}$$

$$\text{Chứng minh } \triangle BHA \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{2}AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \frac{BH}{\sqrt{2}AB} = \frac{AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \frac{BH}{\sqrt{2}AB} = \frac{\sqrt{2}AB}{2BC}$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{BP} = \frac{BP}{2BC} \Rightarrow \frac{BH}{BP} = \frac{BQ}{BC} \quad (BP = 2BQ)$$

$$\triangle BHQ \text{ và } \triangle BPC \text{ có: } \frac{BH}{BP} = \frac{BQ}{BC}; \angle B \text{ chung} \Rightarrow \triangle BHQ \sim \triangle BPC \text{ (c.g.c)}$$

c) $\triangle BAP$ vuông cân tại A, AQ là trung tuyến nên cũng là phân giác $\Rightarrow AI$ là phân giác

$$\text{ngoài của } \triangle ABC \Rightarrow \frac{IC}{IB} = \frac{AC}{AB} \quad (2)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{HB} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{IC}{IB} = \frac{AH}{HB} &\Rightarrow \frac{IB + BC}{IB} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow 1 + \frac{BC}{IB} = \frac{AH}{HB} \\ &\Rightarrow \frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH HƯNG YÊN

Năm học: 2013-2014

Môn: TOÁN 8

Bài 1 (2,0 đ) Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$b) \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

Bài 2 (2,0 đ).

a) Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác

$$\text{Chứng minh rằng : } A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

b) Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Bài 3. (1,0 đ) Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.

Bài 4 (3,0 đ)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HA = HD$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

1. Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$
2. Gọi M là trung điểm của đoạn BE . Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo góc AHM
3. Tia AM cắt BC tại G . Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

Bài 5. (1,0 đ)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Bài 6 (1,0 đ)

Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$a) \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-214}{86} - 1 + \frac{x-132}{84} - 2 + \frac{x-54}{82} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 300$$

b) Ta có:

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

$$\text{ĐKXD: } x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

Từ đó tìm được $x = -13; x = 2$

Câu 2.

a.

Đặt $b+c-a=x>0; c+a-b=y>0; a+b-c=z>0$

Từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được: $A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3$

b.

Từ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$

Ta có:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{cxy + bxz + ayz}{abc} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (dpcm)$$

Câu 3.

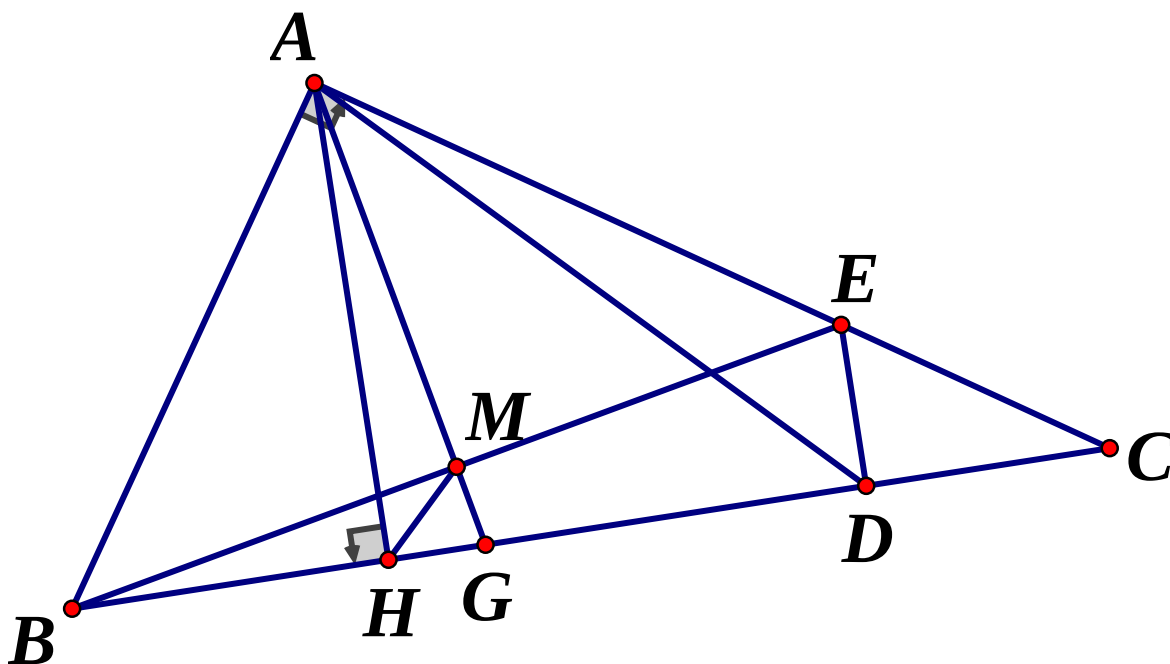
Gọi tử số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần tìm là $x+11$. Phân số cần tìm là $\frac{x}{x+11}$ ($x \neq -11$)

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị ta được phân số: $\frac{x-7}{x+15}$ ($x \neq -15$)

Theo bài ta có phương trình: $\frac{x}{x+11} = \frac{x-7}{x+15} \Rightarrow x = -5$ (thỏa mãn)

Từ đó ta tìm được phân số $\frac{-5}{6}$

Câu 4.



1) Hai tam giác ADC và BEC có:

C chung; $\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$ (hai tam giác vuông CDE và CAB đồng dạng)

Do đó: $\triangle BEC \sim \triangle ADC$

Suy ra: $\angle BEC = \angle ADC = 135^\circ$ (vì $\triangle AHD$ vuông cân tại H theo giả thiết)

Nên $\angle AEB = 45^\circ$ do đó $\triangle ABE$ vuông cân tại A . suy ra $BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$

2) Ta có: $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC}$ (Do $\triangle BEC \sim \triangle ADC$)

Mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

Nên $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{BH}{AB\sqrt{2}} = \frac{BH}{BE}$ ($\triangle ABH \sim \triangle CBA$)

Do đó $\triangle BHM \sim \triangle BEC$ (c.g.c), suy ra $\angle BHM = \angle BEC = 135^\circ \Rightarrow \angle AHM = 45^\circ$

3) $\triangle ABE$ vuông cân tại A , nên tia AM còn là tia phân giác $\angle BAC$

Suy ra: $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$, mà $\frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC}$ ($\triangle ABC \sim \triangle DEC$) = $\frac{AH}{HC}$ ($ED \parallel AH$) = $\frac{HD}{HC}$

$$\text{Do đó: } \frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$$

Câu 5.

$$A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335$$

Vậy GTNN của A là -335 khi $x = -3$

Câu 6.

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z ; trong đó cạnh huyền là z
(x, y, z là các số nguyên dương)

Ta có: $xy = 2(x + y + z)$ (1) và $x^2 + y^2 = z^2$ (2)

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$$

$$z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 + 4$$

$$(z + 2)^2 = (x + y + 2)^2, \text{ suy ra } z + 2 = x + y + 2$$

$z = x + y - 4$, thay vào (1) ta được:

$$xy = 2(x + y + x + y - 4)$$

$$xy - 4x - 4y = -8$$

$$(x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là:

$$(x; y; z) = \{(5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)\}$$

TRƯỜNG THCS BẠCH SAM

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI 8

Môn: TOÁN

Năm học: 2016-2017

Bài 1. (2 điểm)

Cho biểu thức : $C = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

- a) Rút gọn biểu thức C
- b) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên.

Bài 2. (2 điểm)

- a) Tìm các số nguyên a và b để đa thức $A(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $B(x) = x^2 - 3x + 4$

- b) Cho $x, y, z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$$

Câu 3. (2 điểm)

- a) Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình sau:

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$$

- b) Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH . Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C , vẽ hình vuông $AHKE$. Gọi P là giao điểm của AC và KE

- a) Chứng minh $\triangle ABP$ vuông cân
- b) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành $APQB$, gọi I là giao điểm của BP và AQ . Chứng minh H, I, E thẳng hàng.
- c) Tứ giác $HEKQ$ là hình gì ?

Câu 5. (1 điểm)

Tính diện tích hình thang $ABCD$ ($AB // CD$), biết $AB = 42cm, A = 45^\circ; B = 60^\circ$, chiều cao của hình thang bằng $18cm$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$C = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

$$= \frac{1+x+2(1-x)-5+x}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{2x-1}$$

b) B có giá trị nguyên khi x là số nguyên thì $\frac{-2}{2x-1}$ có giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 2x-1 \text{ là U}(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(ktm) \\ x=0(tm) \\ x=\frac{3}{2}(tm) \\ x=-\frac{1}{2}(tm) \end{cases}$$

Đối chiếu ĐK thì có $\begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$ thỏa mãn

Câu 2.

a) Ta có:

$$A(x) = B(x) \cdot (x^2 - 1) + (a-3)x + b + 4$$

$$\text{Để } A(x) : B(x) \text{ thì } \begin{cases} a-3=0 \\ b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$

b) Đặt $y+z=a; z+x=b; x+y=c \Rightarrow x+y+z = \frac{a+b+c}{2}$

$$\Rightarrow x = \frac{-a+b+c}{2}; y = \frac{a-b+c}{2}; z = \frac{a+b-c}{2}$$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{-a+b+c}{2a} + \frac{a-b+c}{2b} + \frac{a+b-c}{2c} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(-1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} - 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[-3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \right] \geq \frac{3}{2} \\
\text{Min}P &= \frac{3}{2} \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow x=y=z
\end{aligned}$$

Câu 3.

a)

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 - 18x + 9) + (y^2 - 6y + 9) + 2(z^2 + 2z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(x-1)^2 + (y-3)^2 + 2(z+1)^2 = 0(*)$$

$$\text{Do: } (x-1)^2 \geq 0; (y-3)^2 \geq 0; (z+1)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên: } (*) \Leftrightarrow x=1; y=3; z=-1$$

$$\text{Vậy } (x, y, z) = (1; 3; -1)$$

b) Từ:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$$

Ta có:

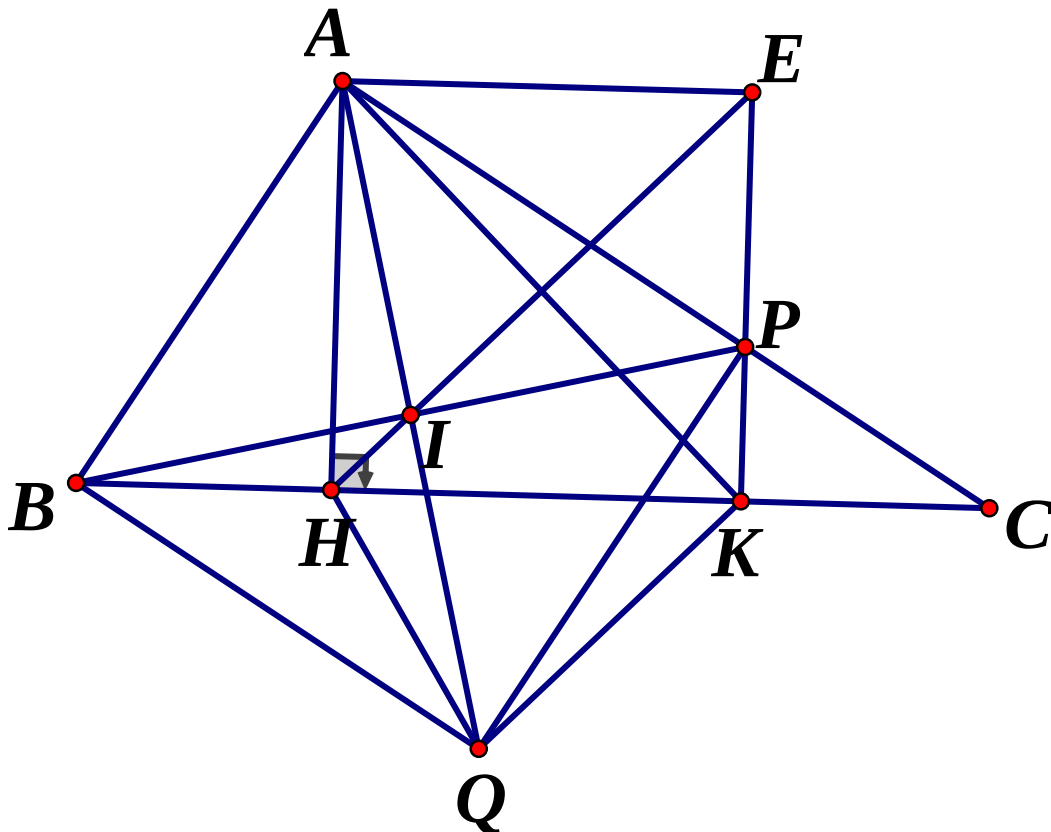
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{cxy + bxz + ayz}{abc} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1(\text{dfcm})$$

Câu 4.



a) Chứng minh được: $\Delta BHA = \Delta PEA (g.c.g)$

$\Rightarrow AB = AP$ mà $BAP = 90^\circ (gt)$ vậy ΔBPA vuông cân

b) Ta có: $HA = HK \Rightarrow H$ nằm trên đường trung trực của AK

Ta có: $AE = KE \Rightarrow E$ nằm trên đường trung trực của KA

ΔPBK vuông có $IB = IP$ (tính chất đường chéo hình bình hành $ABQP$)

$\Rightarrow IK = IP = IB (*)$

Ta có $ABQP$ là hình bình hành (giả thiết), có $BA = AP$ (ΔBPA vuông cân tại A)

$\Rightarrow APQB$ là hình thoi, mà $BAP = 90^\circ (gt)$

$\Rightarrow APQB$ là hình vuông nên $PI = IA (**)$

Từ $(*)(**)$ suy ra $IK = IA$ nên I nằm trên đường trung trực của AK

Vậy H, I, E thẳng hàng

c) Ta có: $APQB$ là hình vuông (cmt) nên $AP = BQ$ mà $IK = \frac{PB}{2} \Rightarrow IK = \frac{AQ}{2}$

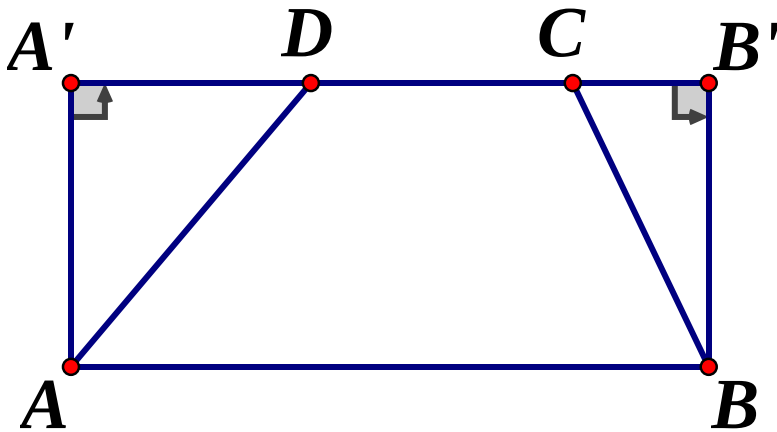
$\triangle AKQ$ có $AI = IQ$ (tính chất đường chéo hình vuông)

Mà $IK = \frac{AQ}{2}$ (cmt) $\Rightarrow \triangle AKQ$ vuông ở K

$\Rightarrow AK \perp KQ$ mà $AK \perp HE$ (EAHK là hình vuông) $\Rightarrow QK \parallel HE$

Vậy $HEKQ$ là hình thang

Câu 5.



Qua A và B kẻ AA' và BB' vuông góc với CD .

Tứ giác $ABB'A'$ là hình chữ nhật và $AA' = BB' = 18\text{cm}$, $A'AB = 90^\circ$

$DAB = 45^\circ \Rightarrow A'AD = 45^\circ$. Do đó $\triangle A'AD$ vuông cân $\Rightarrow A'D = A'A = 18\text{cm}$

$B'BA = 90^\circ$, $CBA = 60^\circ \Rightarrow B'BC = 30^\circ$

vì thế trong tam giác vuông $B'BC$ ta có $B'C = \frac{BC}{2}$.

Theo định lý Pytago ta có:

$$B'C^2 = BC^2 - B'B^2$$

$$\Rightarrow B'C^2 = 4B'C^2 - B'B^2$$

$$\Rightarrow 3B'C^2 = B'B^2$$

$$\Rightarrow B'C = \frac{B'B}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} (\text{cm})$$

Suy ra :

$$CD = A'B' - A'D - B'C = 42 - 18 - \frac{18}{\sqrt{3}} = 24 - \frac{18}{\sqrt{3}} (cm)$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).A'A = \frac{1}{2} \cdot \left(42 + 24 - \frac{18}{\sqrt{3}}\right) \cdot 18 \approx 498,6 (cm^2)$$

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2013-2014

MÔN THI: TOÁN 8

Ngày thi: 12/04/2014

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức : $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $A = \left[n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \right] : 7 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

b) Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 4. (6 điểm)

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C ($C \neq A$). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC , đường thẳng này cắt By tại D . Từ O hạ đường vuông góc OM xuống CD (M thuộc CD).

a) Chứng minh $OA^2 = AC \cdot BD$

b) Chứng minh tam giác AMB vuông.

c) Gọi N là giao điểm của BC và AD . Chứng minh $MN \parallel AC$.

Câu 5. (2 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\text{a) } A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$$

$$A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1) - 3x(x+1)}{3x} \right] : \frac{x-1}{x}$$

$$A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1}$$

$$A = 2 \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

$$\text{b) Với } x \neq 0; x \neq \pm 1. \text{ Ta có: } A = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $(x-1)$ phải là ước của 2 $\Rightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Xét từng trường hợp tìm x , đối chiếu điều kiện $\Rightarrow x \in \{2; 3\}$

Câu 2.

a) Ta có:

$$A = \left[n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \right]$$

$$= n \left[n(n^2 - 7) - 6 \right] \left[n(n^2 - 7) + 6 \right] = n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6)$$

$$= n(n^3 - n - 6n - 6)(n^3 - n - 6n + 6) = n \left[n(n^2 - 1) - 6(n+1) \right] \left[n(n^2 - 1) - 6(n-1) \right]$$

$$= n(n+1)(n^2 - n - 6)(n-1)(n^2 + n - 6) = n(n+1)(n+2)(n-3)(n-1)(n-2)(n+3)$$

đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên $A:7 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$P = n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$$

$$\text{b) } = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = \left[(n-1)^2 + 1 \right] \cdot \left[(n+1)^2 + 1 \right]$$

Vì n là số tự nhiên nên $(n+1)^2 + 1 \geq 2$. Như vậy muốn P là số nguyên tố thì phải có

$$(n-1)^2 + 1 = 1 \text{ hay } (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$$

Khi đó $P = 5$ là số nguyên tố.

Câu 3.

$$a) \quad x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

$$\text{TXĐ: } x \neq \{-4; -5; -6; -7\}$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$S = \{-13; 2\}$$

b) Đặt $b+c-a=x>0; c+a-b=y>0; a+b-c=z>0$. Ta có $x, y, z > 0$

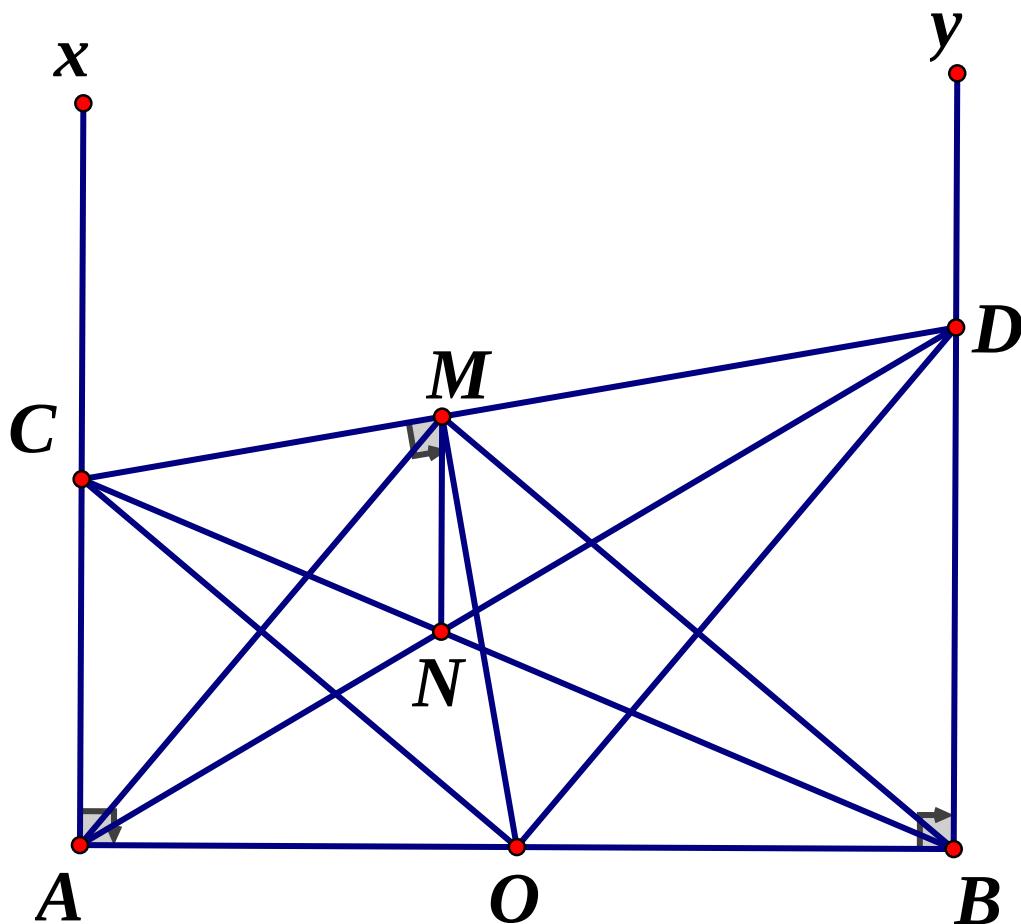
$$\text{Từ đó suy ra } a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2};$$

$$\text{Thay vào ta được } A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

$$\text{Từ đó suy ra } A \geq \frac{1}{2}(2+2+2) = 3 \quad \text{hay} \quad A \geq 3$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Câu 4.



a) Xét $\triangle ACO$ và $\triangle BOD$ có: $A = B = 90^\circ$; $\angle COA = \angle ODB$ (cùng phụ với $\angle DOB$)

$$\text{Nên } \triangle ACO \sim \triangle BOD (g.g) \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{BD}{BO} \Rightarrow AO \cdot BO = AC \cdot BD$$

$$\text{Mà } AO = BO \text{ nên } AO^2 = AC \cdot BD$$

b) Xét $\triangle CMO$ và $\triangle OMD$ có: $\angle CMO = \angle OMD = 90^\circ$; $\angle OCM = \angle DOM$ (cùng phụ với $\angle COM$)

$$\Rightarrow \triangle CMO \sim \triangle OMD (g.g) \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{OM}{MD} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \triangle ACO \sim \triangle BOD \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{AO}{BD} \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{OB}{BD} \quad (2) \text{ (Do } AO = OB)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{OM}{MD} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \triangle OMD \sim \triangle OBD$$

$$\Rightarrow \angle MOD = \angle BOD \Rightarrow \triangle OMD = \triangle OBD \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

$\Rightarrow OM = OB = OA$ suy ra $\triangle AMB$ vuông tại M

c) Ta có: $AC \parallel BD$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \frac{CN}{NB} = \frac{AC}{BD}$

Mà $BD = MD$ (hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau)

Tương tự ta chứng minh : $AC = CM$

Nên $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM} \Rightarrow MN \parallel BD \parallel AC$

Câu 5.

Nhận xét có: $a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(c + a)$

Tương tự có: $b + ca = (b + a)(b + c)$; $c + ab = (c + a)(c + b)$

Do đó $VT = \frac{(a + b)(a + c)}{b + c} + \frac{(b + a)(b + c)}{c + a} + \frac{(c + a)(c + b)}{a + b}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$\frac{(a + b)(a + c)}{b + c} + \frac{(b + a)(b + c)}{c + a} \geq 2(a + b)$$

$$\frac{(a + b)(a + c)}{b + c} + \frac{(c + a)(c + b)}{a + b} \geq 2(a + c)$$

$$\frac{(b + a)(b + c)}{a + c} + \frac{(c + a)(c + b)}{a + b} \geq 2(b + c)$$

Vậy $2.VT \geq 4(a + b + c) = 4$ hay $VT \geq 2$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

**UBND HUYỆN GIA VIỄN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ THI KHẢO SÁT
CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LỚP 8**

Môn: TOÁN

Năm học: 2014-2015

Thời gian: 150 phút (không kể giao đề)

Câu 1. (5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$

b) $y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$

c) $\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+16x+72}{x+8}=\frac{x^2+8x+20}{x+4}+\frac{x^2+12x+42}{x+6}$

Câu 3. (3 điểm)

1) Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p=n^3-n^2+n-1$

2) Tìm a, b sao cho $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2+x-2$

3) Cho $4a^2+b^2=5ab$ và $2a>b>0$. Tính $P=\frac{ab}{4a^2-b^2}$

Câu 4. (6,5 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, trên tia đối của tia CD lấy điểm M bất kỳ ($CM < CD$), vẽ hình vuông $CMNP$ (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H , MP cắt BD tại K .

a) Chứng minh: DH vuông góc với BM .

b) Tính $Q=\frac{PC}{BC}+\frac{PH}{DH}+\frac{KP}{MK}$

c) Chứng minh: $MP.MK+DK.BD=DM^2$

Câu 5. (1,5 điểm)

1) Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4 \geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B=xy(x-2)(y+6)+12x^2-24x+3y^2+18y+2045$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$\text{Giá trị của } A \text{ được xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+8 \neq 0 \\ 8-4x+2x^2-x^3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 \neq -8 \\ 4(2-x) + x^2(2-x) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq -4 \\ (2-x)(4+x^2) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left[\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2-x) + x^2(2-x)} \right] \cdot \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2} \right) \\ &= \frac{(x^2 - 2x)(2-x) - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x^2 + x - 2x - 2}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^3 - 4x + 2x^2 - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x(x+1) - 2(x+1)}{x^2} \\ &= \frac{-x(x^2 + 4)}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

b)

$$* \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 : 2x \Rightarrow 2x + 2 : 2x \text{ mà } 2x : 2x$$

$$\Rightarrow 2 : 2x \Rightarrow 1 : x \Rightarrow \begin{cases} x = 1(tm) \\ x = -1(tm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -1$$

Câu 2.**a)**

$$x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^4=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$

b)

$$y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$$

$$\Leftrightarrow y^2+2y+1+(2^x)^2-2.2^x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2+(2^x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ 2^x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $(x,y)=(0;-1)$

c)

$$\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6} \quad (1)$$

ĐKXD: $x \neq -2; x \neq -4; x \neq -6; x \neq -8$

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2+2}{x+2} + \frac{(x+8)^2+8}{x+8} = \frac{(x+4)^2+4}{x+4} + \frac{(x+6)^2+6}{x+6} \\
&\Leftrightarrow x+2 + \frac{2}{x+2} + x+8 + \frac{8}{x+8} = x+4 + \frac{4}{x+4} + x+6 + \frac{6}{x+6} \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x+4} = \frac{6}{x+6} - \frac{8}{x+8} \\
&\Leftrightarrow \frac{2x+8-4x-8}{(x+2)(x+4)} = \frac{6x+48-8x-48}{(x+6)(x+8)} \\
&\Leftrightarrow \frac{-2x}{(x+2)(x+4)} = \frac{-2x}{(x+6)(x+8)} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x+2)(x+4)=(x+6)(x+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 8x=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases} (tm)
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=0; x=-5$

Câu 3.

1) Biến đổi được $p=(n^2+1)(n-1)$

Nếu $n=0;1$ không thỏa mãn đề bài

Nếu $n=2$ thỏa mãn đề bài vì $p=(2^2+1)(2-1)=5$

Nếu $n>3$ không thỏa mãn đề bài vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là $1; n-1>1$ và $n^2+1>n-1>1$

Vậy $n=2$ thì $p=n^3-n^2+n-1$ là số nguyên tố.

2) $*g(x)=x^2+x-2=(x-1)(x-2)$

$*f(x)=ax^3+bx^2+10x-4; g(x)$

$$\Leftrightarrow f(x)=ax^3+bx^2+10x-4=(x-1)(x-2)Q(x) \quad (1) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

- Thay $x_1=1; x_2=2$ vào (1) ta có:

$$a+b+6=0 \text{ và } 8a+4b+16=0 \Rightarrow a=2 \text{ và } b=-8$$

$$\text{Vậy } f(x)=ax^3+bx^2+10x-4; g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-8 \end{cases}$$

3)

Biến đổi được:

$$4a^2+b^2=5ab \Leftrightarrow (4a-b)(a-b) \Leftrightarrow \begin{cases} b=4a \\ b=a \end{cases}$$

Mà $2a>b>0 \Rightarrow 4a>2b>b$ nên $a=b$

Ta có: $P = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$

Vậy $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$ thì $P = \frac{1}{3}$

Chúng minh được: $CD = BC; PC = CM; DCB = BCM = 90^0$

b) Chứng minh được: $MP \perp BD \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}DM.PC}{\frac{1}{2}DM.BC} = \frac{S_{\Delta PDM}}{S_{\Delta BDM}}$

$$\Rightarrow Q = \frac{S_{PDM} + S_{PBM} + S_{PBD}}{S_{BDM}} = 1.$$

Chúng minh: $\triangle DBC \sim \triangle DKM(g.g) \Rightarrow DK.BD = DC.DM$ (2)

$$\Rightarrow MP.MK + DK.BD = DM.(MC + DC)$$

$$\Rightarrow MP.MK + DK.BD = DM^2$$

Câu 5.**1)**

Học sinh chứng minh $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ với mọi $x, y > 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \geq 0; \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - 2 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y > 0$

2)

$$B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

$$*) x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$y^2 + 6y + 9 = (y+3)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 12 \geq 3 \text{ với mọi } y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$+B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

$$= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 12(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 6y) + 36 + 2009$$

$$= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y + 12) + 3(y^2 + 6y + 12) + 2009$$

$$= (x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) + 2009 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow B \geq 2 \cdot 3 + 2009 \Rightarrow B \geq 2015$$

$$*) B = 2015 \Leftrightarrow x = 1 \& y = -3$$

$$*) \text{Min} B = 2015 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Thời gian: 150 phút

Bài 1: (1 điểm) Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^4 + 1 - 2x^2$

b) $-x^2 - 28x - 27$

Bài 2: (2 điểm) Giải phương trình

a) $-2|-3x + 4| - 2 = 0$

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$

Bài 3 (1 điểm)

Với giá trị nào của x thì $\frac{x-1}{x+1} > 0$

Bài 4 (2 điểm)

Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong. Năng suất làm việc trong một ngày của người thứ hai chỉ bằng $\frac{2}{3}$ người thứ nhất. Hỏi nếu làm riêng, mỗi người làm trong bao lâu sẽ xong công việc

Bài 5 (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . M là giao điểm của CE và DF .

a) Chứng minh CE vuông góc với DF

b) Chứng minh $\frac{CM \cdot CE}{CF} = a$

c) Tính diện tích $\triangle MDC$ theo a

Bài 6. (0,5 điểm)

Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$a) x^4 - 1 + 2x^2 = (x^2 + 1)^2$$

$$b) -x^2 - 28x - 27 = -(x+1)(x+27)$$

Bài 2.

$$a) -2|-3x+4|-2=0$$

$$\Leftrightarrow |-3x+4| = -1 \text{ (khẳng định sai vì } |-3x+4| \geq 0 \forall x)$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

$$b) \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1} \quad \text{ĐKXD: } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^3-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4(x-1)}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1+2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4(x-1)}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (tm) \\ x=1 & (ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0\}$$

Bài 3.

$$+\frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x > 1 \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

Vậy $x > 1$ hoặc $x < -1$

Bài 4.

Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ($x > 0$).

Một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Một ngày người thứ hai làm được $\frac{2}{3x}$ (công việc)

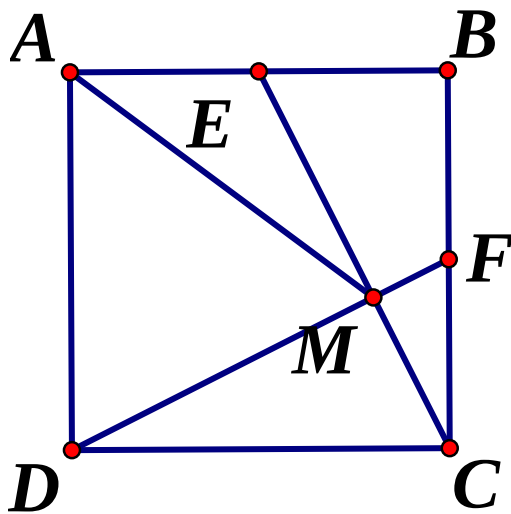
Một ngày hai người làm chung được $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}$ (công việc)

Theo bài ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = 20$

Vậy người thứ nhất làm xong trong 20 ngày

Người thứ hai làm xong trong 30 ngày.

Bài 5.



a) $\triangle BEC = \triangle CFD (c.g.c) \Rightarrow ECB = FDC$

$\triangle CDF$ vuông tại C $\Rightarrow DFC + FDC = 90^\circ \Rightarrow DFC + ECB = 90^\circ \Rightarrow \triangle CMF$ vuông tại M
Hay $CE \perp DF$

b) Xét $\triangle CMF$ và $\triangle CBE$ có: $CMF = CBE = 90^\circ$; $\angle C$ chung
 $\Rightarrow \triangle CMF \sim \triangle CBE (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{CF}{CE} \Rightarrow \frac{CM \cdot CE}{CF} = BC$$

Mà $BC = a$ do đó: $\frac{CM \cdot CE}{CF} = a$

c) $\triangle CMD \sim \triangle FCD (g.g) \Rightarrow \frac{CD}{FD} = \frac{CM}{FC}$

$$\text{Do đó: } \frac{S_{\Delta CMD}}{S_{\Delta FCD}} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \Rightarrow S_{\Delta CMD} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \cdot S_{\Delta FCD}$$

$$\text{Mà: } S_{\Delta FCD} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot CD = \frac{1}{4} CD^2$$

$$\text{Vậy: } S_{\Delta CMD} = \frac{CD^2}{FD^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot CD^2.$$

Trong ΔDCF theo Pitago ta có:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + \left(\frac{1}{2} BC^2\right) = CD^2 + \frac{1}{4} CD^2 = \frac{5}{4} \cdot CD^2$$

$$\text{Do đó: } S_{\Delta CMD} = \frac{CD^2}{\frac{5}{4} CD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2 = \frac{1}{5} CD^2 = \frac{1}{5} a^2$$

Bài 6.

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN

Năm học : 2012-2013

Bài 1. (4 điểm)

$$\text{Cho biểu thức : } A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x\right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} \quad (x \neq \pm 1)$$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$.

Bài 2 (3 điểm)

$$\text{Cho } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 4 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Chứng minh rằng $a = b = c$

Bài 3 (3 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

Bài 4 (2 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5$

Bài 5 (3 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có góc ABC bằng 60° , phân giác BD . Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của BD, BC, CD

- Tứ giác $AMNI$ là hình gì ? Chứng minh.
- Cho $AB = 4cm$. Tính các cạnh của tứ giác $AMNI$

Bài 6. (5 điểm)

Hình thang $ABCD$ ($AB // CD$) có hai đường chéo cắt nhau tại O . Đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N

- Chứng minh rằng $OM = ON$
- Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$
- Biết $S_{AOB} = 2008^2 (dvd)$; $S_{COD} = 2009^2 (dvd)$. Tính S_{ABCD}

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Với $x \neq \pm 1$ thì:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2) \cdot (1-x) \end{aligned}$$

b) Tại $x = -1\frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$ thì

$$A = \left[1 + \left(-\frac{5}{3} \right)^2 \right] - \left[1 - \left(-\frac{5}{3} \right) \right] = \left(1 + \frac{25}{9} \right) \cdot \left(1 + \frac{5}{3} \right) = 10\frac{2}{27}$$

c) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0$ khi và chỉ khi $(1+x^2)(1-x) < 0$ (1)

Vì $1+x^2 > 0$ với mọi x nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Bài 2.

Biến đổi đẳng thức để được

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 + 2ac = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4ac - 4bc$$

Biến đổi để có: $(a^2 + b^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (a^2 + c^2 - 2ac) = 0$

Biến đổi để có: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0(*)$

Vì $(a-b)^2 \geq 0; (b-c)^2 \geq 0; (a-c)^2 \geq 0$ với mọi a, b, c

Nên $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi $(a-b)^2 = 0; (b-c)^2 = 0; (a-c)^2 = 0$

Từ đó suy ra $a = b = c$

Bài 3.

Gọi tử số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần tìm là $x + 11$

Phân số cần tìm là $\frac{x}{x+11} (x \neq -11)$

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì ta được phân số $\frac{x-7}{x+15}$

Theo bài ta có phương trình : $\frac{x}{x+11} = \frac{x+15}{x-7}$

Giải phương trình và tìm được $x = -5(tm)$

Từ đó phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$

Bài 4.

Biến đổi để có:

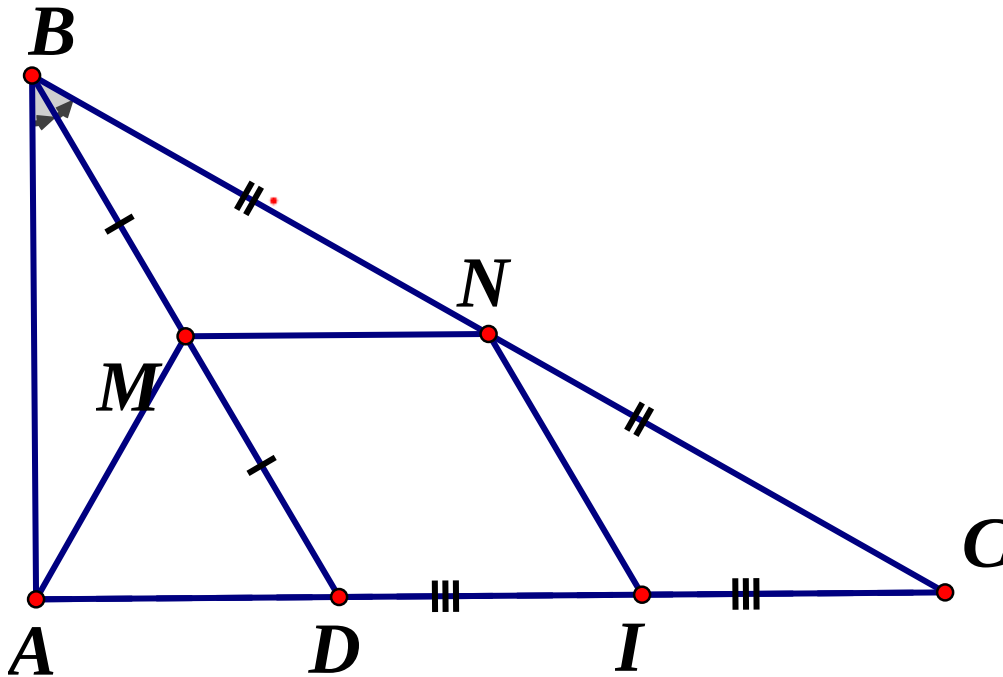
$$\begin{aligned} A &= a^2(a^2 + 2) - 2a(a^2 + 2) + (a^2 + 2) + 3 \\ &= (a^2 + 2)(a^2 - 2a + 1) + 3 = (a^2 + 2)(a - 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

Vì $a^2 + 2 > 0 \forall a$ và $(a - 1)^2 \geq 0 \forall a$ nên $(a^2 + 2)(a - 1)^2 \geq 0 \forall a$

Do đó: $(a^2 + 2)(a - 1)^2 + 3 \geq 3 \quad \forall a$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Bài 5.



- a) Chứng minh được AMNI là hình thang
 Chứng minh $AN = MI$ từ đó suy ra tứ giác AMNI là hình thang cân

b) Tính được $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}; BD = 2AD = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

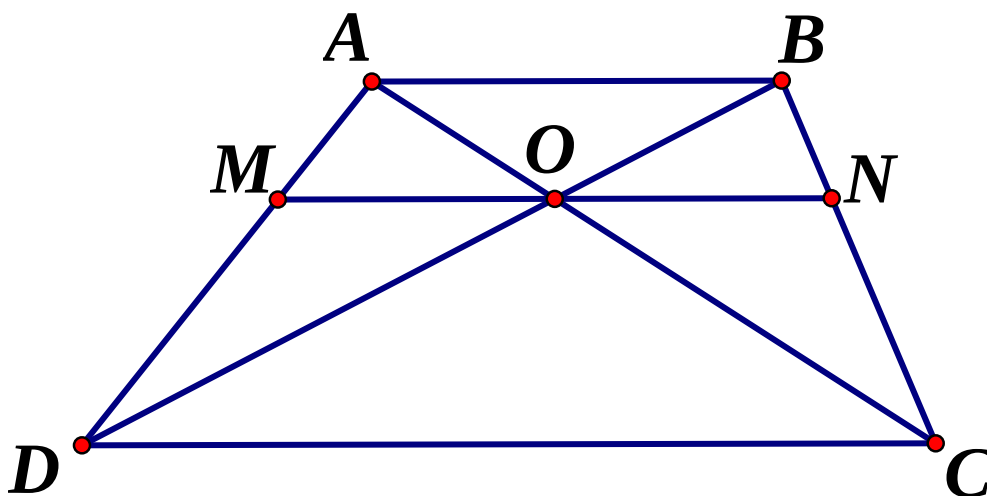
$$AM = \frac{1}{2}BD = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Tính được $NI = AM = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

$$DC = BC = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}, MN = \frac{1}{2}DC = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Tính được $AI = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

Bài 6.



a) Lập luận để có: $\frac{OM}{AB} = \frac{OD}{BD}$; $\frac{ON}{AB} = \frac{OC}{AC}$; $\frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC}$ (Định lý Ta let)

$$\Rightarrow \frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow OM = ON$$

b) Xét $\triangle ABD$ có: $\frac{OM}{AB} = \frac{DM}{AD}$ (1), Xét $\triangle ADC$ có: $\frac{OM}{DC} = \frac{AM}{AD}$ (2)

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow OM \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = \frac{AM + DM}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } ON \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = 2 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$$

c)

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{OB}{OD}, \frac{S_{BOC}}{S_{DOC}} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow S_{AOB} \cdot S_{DOC} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$$

$$\text{Chứng minh được: } S_{AOD} = S_{BOC} \Rightarrow S_{AOB} \cdot S_{DOC} = (S_{AOD})^2$$

$$\text{Thay số để có } 2008^2 \cdot 2009^2 = (S_{AOD})^2 \Rightarrow S_{AOD} = 2008 \cdot 2009$$

$$\text{Do đó: } S_{ABCD} = 2008^2 + 2 \cdot 2008 \cdot 2009 + 2009^2 = (2008 + 2009)^2 = 4017^2 \text{ (dvd)}t$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

HUYỆN NAM SƠN-Năm học 2017-2018

Câu 1. (4,0 điểm)

Chứng minh rằng:

a) $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 40

b) $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng : $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$

Câu 4. (3,0 điểm)

Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N .

a) Chứng minh tứ giác $AMIN$ là hình chữ nhật

b) Gọi D là điểm đối xứng của I qua N . Chứng minh tứ giác $ADCI$ là hình thoi.

c) Đường thẳng BN cắt DC tại K . Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3}DC$.

Câu 6. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned}A &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \\&= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}) \\&= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) \\&= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40 \\&= 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8) : 40\end{aligned}$$

Vậy $A : 40$

b)

$$\begin{aligned}B &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} \\&= \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 100} \\&< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1\end{aligned}$$

Vậy $B < 1$

Câu 2.

a)

Ta có: $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$

Mặt khác

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\Rightarrow (-c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ (đpcm)}$$

b)

$$C = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$(2 - 1)C = (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$C = (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$C = (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$C = (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$C = (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1$$

Vì $2^{32} - 1 < 2^{32}$ nên $C < D$

Câu 3.

a)

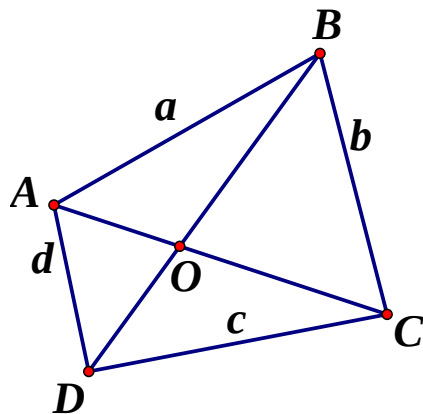
$$\begin{aligned} & x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019 \\ &= x^4 + (x^2 + 2018x^2) + 2018x + (2018 + 1) + x^3 - x^3 \\ &= (x^4 + x^3 + x^2) + (2018x^2 + 2018x + 2018) - (x^3 - 1) \\ &= x^2(x^2 + x + 1) + 2018(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2018 - x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} E &= 2x^2 - 8x + 1 \\ &= 2x^2 - 8x + 8 - 7 \\ &= 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7 \quad (\forall x) \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $E = -7 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 4.



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác $ABCD$.

Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$

Xét $\triangle AOB$, ta có: $OA + OB > AB$ (quan hệ giữa ba cạnh của tam giác)

Xét $\triangle COD$, ta có: $OC + OD > CD$ (quan hệ giữa ba cạnh của tam giác)

Suy ra :

$$OA + OB + OC + OD > AB + CD$$

$$\Rightarrow AC + BD > AB + CD$$

$$\Rightarrow AC + BD > a + c \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự : } AC + BD > AD + BC \Rightarrow AC + BD > d + b \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2(AC + BD) > a + b + c + d \Rightarrow AC + BD > \frac{a + b + c + d}{2} (*)$$

Xét $\triangle ABC$, ta có: $AC < a + b$

Xét $\triangle ADC$, ta có: $AC < d + c$

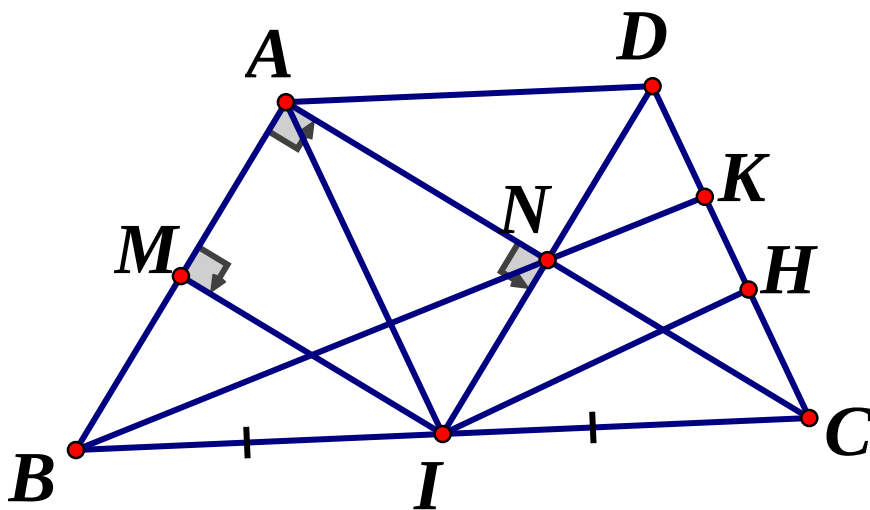
$$\text{Suy ra : } 2AC < a + b + c + d \Rightarrow AC < \frac{a + c + d + b}{2} \quad (3)$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } BD < \frac{a + c + d + b}{2} (**)$$

Từ (3); (4) suy ra $AC + BD < a + b + c + d$

$$\text{Từ (*) và (**)} \text{ suy ra } \frac{a + c + d + b}{2} < AC + BD < a + b + c + d \quad (dfcm)$$

Câu 5.



a) Xét tứ giác $AMNI$ có:

$$\angle MAN = 90^\circ \text{ (vì } \triangle ABC \text{ vuông ở A)}$$

$$\angle AMI = 90^\circ \text{ (Vì } IM \text{ vuông góc với } AB)$$

$$\angle ANI = 90^\circ \text{ (Vì } IN \text{ vuông góc với } AC)$$

Vậy tứ giác $AMIN$ là hình chữ nhật (vì có 3 góc vuông)

$$\text{b) } \triangle ABC \text{ vuông tại A, có } AI \text{ là trung tuyến nên } AI = IC = \frac{1}{2}BC$$

Do đó $\triangle AIC$ cân tại I, có đường cao IN đồng thời là trung tuyến

$$\Rightarrow NA = NC$$

Mặt khác : $NI = ND$ (tính chất đối xứng) nên $ADCI$ là hình bình hành (1)

$$\text{Mà } AC \perp ID \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ADCI$ là hình thoi.

c) Kẻ qua I đường thẳng IH song song với BK cắt CD tại H

$$\Rightarrow IH \text{ là đường trung bình } \triangle BKC$$

$$\Rightarrow H \text{ là trung điểm của } CK \text{ hay } KH = HC \quad (3)$$

Xét $\triangle DIH$ có N là trung điểm của DI , $NK \parallel IH$ ($IH \parallel BK$)

$$\text{Do đó } K \text{ là trung điểm của } DH \text{ hay } DK = KH \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4)} \Rightarrow DK = KH = HC \Rightarrow DK = \frac{1}{3}DC$$

Câu 6.

Ta có:

$$\left(\frac{1}{2}a - b\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + b^2 \geq ab \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - c\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + c^2 \geq ac \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - d\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + d^2 \geq ad \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - e\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + e^2 \geq ae \quad (4)$$

Ta cộng (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta được:

$$4. \frac{1}{4}a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC : 2011-2012

Môn : Toán 8

Thời gian: 150 phút

Bài 1. (2 điểm) Giải các phương trình sau:

1) $2x^2 - x = 3 - 6x$

2) $(x + 2).(x^2 - 3x + 5) = (x + 2).x^2$

Bài 2. (3 điểm) Cho biểu thức: $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$

1) Rút gọn A

2) Tính giá trị của A biết $2x - x^2 = 1$

3) Có giá trị nào của x để A=1 không ?

4) Tìm x nguyên để A nhận giá trị là số nguyên.

Bài 3. (2 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một xe đạp, một xe máy và một ô tô cùng đi từ A đến B. Khởi hành lần lượt lúc 5 giờ, 6 giờ, 7 giờ và vận tốc theo thứ tự là 15km/h ; 45km/h và 60km/h .

Hỏi lúc mấy giờ ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Bài 4. (2,5 điểm)

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD, AB < CD$). Gọi N và M theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo AC, BD. Chứng minh rằng:

1) $MN \parallel AB$

2) $MN = \frac{CD - AB}{2}$

Bài 5. (0,5 điểm)

Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$1) 2x^2 - x = 3 - 6x \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ hoặc } x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -3$$

$$2) (x + 2) \cdot (x^2 - 3x + 5) = (x + 2) \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(5 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ 5 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{-2; \frac{5}{3}\right\}$$

Bài 2.

$$1) \text{ Rút gọn được } A = \frac{x + 4}{x - 3}$$

$$2) \text{ ĐKXD: } x \neq 2 \text{ và } x \neq 3$$

$$2x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Thay } x = 1 \text{ vào, tính được } A = \frac{-5}{2}$$

$$3) A = 1 \Leftrightarrow \frac{x + 4}{x - 3} = 1 \Leftrightarrow x + 4 = x - 3 \Leftrightarrow 0x = -7 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị nào của x để $A = 1$

$$4) A = \frac{x + 4}{x - 3} = 1 + \frac{7}{x - 3}$$

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z} \text{ thì } x - 3 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\} \Rightarrow x \in \{-4; 2; 4; 10\}$$

$$\text{Thử lại và kết hợp với ĐKXD ta được } x \in \{-4; 4; 10\}$$

Bài 3.

- Gọi thời gian để ô tô cách đều xe đạp và xe máy kể từ lúc xe đạp chạy là x (giờ).
Điều kiện $x > 2$

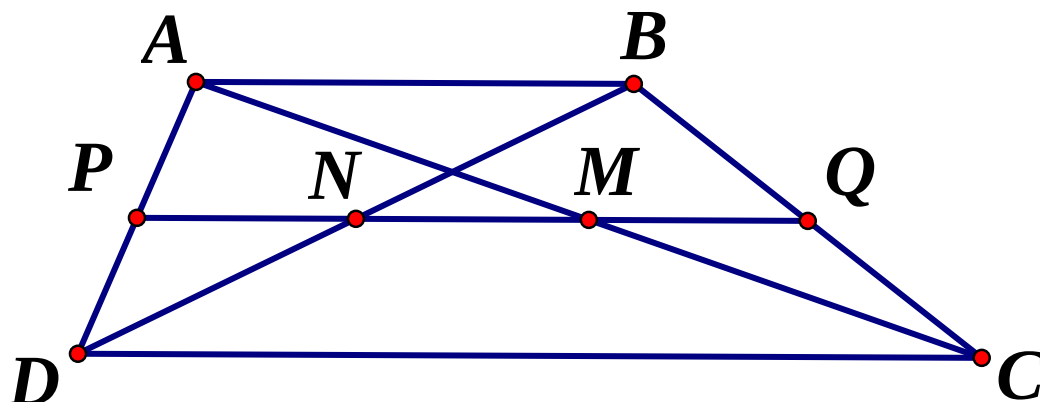
Khi đó: Xe đạp đi được : $15x(km)$

Xe máy đi được : $45(x - 1)(km)$

Ô tô đi được: $60(x - 2)(km)$

Khi ô tô bắt đầu chạy thì xe đạp đã bị xe máy vượt qua
 Hiệu quãng đường đi được của xe máy và ô tô là: $45(x-1) - 60(x-2)$
 Hiệu quãng đường đi được của ô tô và xe đạp: $60.(x-2) - 15x$
 Theo đề bài ta có phương trình: $45(x-1) - 60(x-2) = 60(x-2) - 15x$
 Giải phương trình tìm được $x = 3,25$ giờ = 3 giờ 15 phút
 Vậy lúc 8 giờ 15 phút thì ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Bài 4



- 1) Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD và BC

Chúng minh được $\frac{AP}{AD} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow PN \parallel AB$ (định lý Talet đảo)

Mà $PM \parallel AB$ (đường trung bình)
 $\Rightarrow P, M, N$ thẳng hàng (Tiên đề Ô clit)

Vậy $MN \parallel AB$

- 2) Tương tự $\Rightarrow P, M, N, Q$ thẳng hàng

$$\text{Rút ra ta được: } PQ = \frac{AB+CD}{2} \quad (1); PM = \frac{AB}{2} \quad (2); NQ = \frac{AB}{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1),(2),(3) suy ra } MN = PQ - (PM + NQ) = \frac{CD-AB}{2}$$

Bài 5.

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$$

PHÒNG GD & ĐT
YÊN PHONG

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2013-2014
MÔN THI: TOÁN 8

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Bài 1. (5 điểm)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

- a) Rút gọn biểu thức A
- b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
- c) Tìm x để $|A| = A$

Bài 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 12x = 0$

b) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

Bài 3 (5 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của CD .

- a) Tứ giác $ABED$ là hình gì ? Tại sao ?
- b) Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a
- c) Gọi I là trung điểm của BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC . Tính góc HDI

Bài 4. (4 điểm)

- a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$
- b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Bài 5. (2 điểm)

- a) Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

$$\text{CMR: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

- b) Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} > \frac{a-d}{a+b}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$A = \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

b) A nguyên, mà x nguyên nên $2 \vdots (1-2x)$

Từ đó tìm được $x=1$ và $x=0$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x=0$

$$|A| = A \Leftrightarrow A > 0$$

c) Ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện : $-1 \neq x < \frac{1}{2}$

Câu 2

a) $x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=-3 \end{cases}$

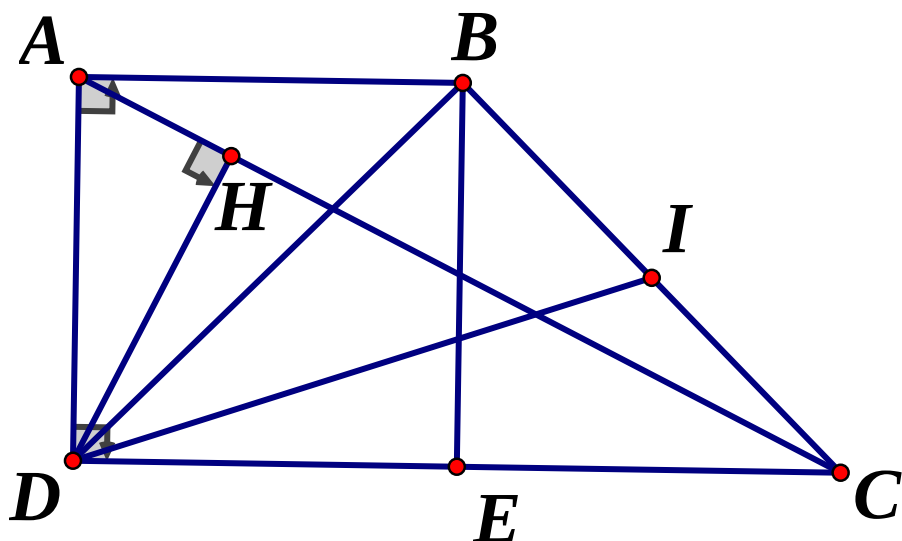
b) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1 \right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2 \right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) \Leftrightarrow x-300 = 0 \Leftrightarrow x = 300$$

Câu 3.



a) Chỉ ra $ABED$ là hình bình hành ($AB \parallel DE, AB = DE$)

Chỉ ra $ABED$ là hình thoi ($AB = AD$)

Chỉ ra $ABED$ là hình vuông ($\angle BAD = 90^\circ$)

b) Chỉ ra $\triangle BEC$ vuông cân

Từ đó suy ra $AB = AD = a, DC = 2a$

Diện tích của hình thang $ABCD$ là : $S = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}$

c) $\angle ACH = \angle ACD$ (1) (cùng phụ với góc HDC)

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BDC$ vuông tại D và B có:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BDC$$

Suy ra $\angle ACD = \angle BDC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle ADH = \angle BDI$

Mà $\angle ADH + \angle BDI = 45^\circ \Rightarrow \angle BDI + \angle BDH = 45^\circ$ hay $\angle HDI = 45^\circ$

Câu 4.

a)

Ta có:

$$A = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1$$

$$= (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1$$

$$\text{Do } (x - y)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên } A = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = 2$$

$$\text{Vậy GTNN của } A \text{ là } 1 \Leftrightarrow x = y = 2$$

$$\text{b) } B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + x + 1} = \frac{3(x+1)}{(x^2 + 1)(x+1)} = \frac{3}{x^2 + 1}$$

$$\text{Do } x^2 + 1 \geq 1 \text{ nên } B = \frac{3}{x^2 + 1} \leq 3. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Vậy GTLN của } B \text{ là } 3 \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 5

a)

Ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{p-a+p-c} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{p-c+p-a} = \frac{2}{b}$$

Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

b)

Ta có:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq 4$$

Xét

$$\begin{aligned} & \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} - 4 \\ &= (a+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) + (b+d) \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b} \right) - 4 \\ &\geq (a+c) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} + (b+d) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} - 4 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ đpcm

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d$

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2014-2015

Môn: TOÁN

Bài 1. Chứng minh rằng $11^{10} - 1$ chia hết cho 100

Bài 2. Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$P = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$$

Bài 3. Cho biểu thức $Q = 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$

a) Rút gọn Q

b) Tính giá trị của Q biết $\left| x - \frac{3}{4} \right| = \frac{5}{4}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên

Bài 4. Tìm giá trị của m để cho phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm số gấp ba

nghiệm số của phương trình: $(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3$

Bài 5. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình:

$$x^2 - 25 = y(y+6)$$

Bài 6. Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB , d cắt AH ở E , cắt DC ở F

a) Chứng minh rằng $BM = ND$

- b) Chứng minh rằng $N; D; C$ thẳng hàng
- c) $EMFN$ là hình gì
- d) Chứng minh $DF + BM = FM$ và chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi vị trí trên BC .

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1) = 10 \cdot (11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$$

Vì $10 \vdots 10$

Và $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ có chữ số tận cùng bằng 0

Nên $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ chia hết cho 10

Vậy $11^{10} - 1$ chia hết cho 100

Bài 2.

$$\begin{aligned} & x^2 \cdot (y - z) + y^2 \cdot (z - x) + z^2 \cdot (x - y) \\ &= x^2(y - z) + y^2z - y^2x + z^2x - z^2y \\ &= x^2(y - z) + yz(y - z) + x(y^2 - z^2) \\ &= (y - z)(x^2 + yz - xy - xz) \\ &= (y - z)[x(x - y) - z(x - y)] \\ &= (y - z)(x - y)(x - z) \end{aligned}$$

Bài 3.

a) ĐKXD: $x \neq 0; -1; 2$

$$\begin{aligned} Q &= 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x} \\ &= 1 + \frac{x+1+x+1-2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)} \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{-2x^2 + 4x}{(x-1)(x^2 - x + 1)} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x(x-2)}$$

$$= 1 + \frac{-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\text{b) } \left| x - \frac{3}{4} \right| = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & (ktm) \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow Q = -3$$

$$\text{c) } Q \in \mathbb{Z} \text{ với } x \in \{-3; -2; 1\}$$

Bài 4

$$(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 - x^2 - 4x - 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow -4x = 8 \Leftrightarrow x = -2$$

Để phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm gấp ba lần nghiệm của phương trình

$$(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3 \text{ hay } x = -6$$

Ta có

$$6 \cdot (-6) - 5m = 3 + 3m \cdot (-6)$$

$$\Leftrightarrow -5m + 18m = 39$$

$$\Leftrightarrow 13m = 39 \Leftrightarrow m = 3$$

Vậy với $m = 3$ thì phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm số gấp ba nghiệm số của phương trình $(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3$

Bài 5.

$$x^2 - 25 = y(y+6)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (y+3)^2 = 16$$

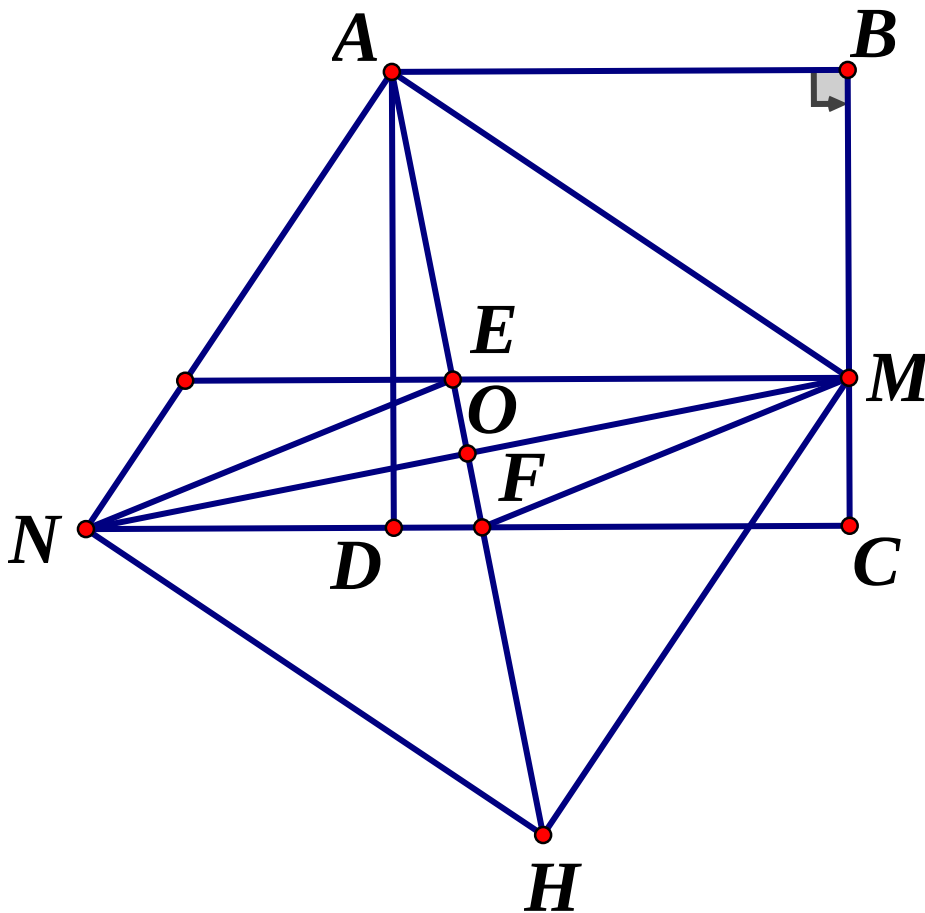
$$\Leftrightarrow (x+y+3)(x-y-3) = \begin{cases} (\pm 4) \cdot (\pm 4) \\ (\pm 2) \cdot (\pm 8) \\ (\pm 1) \cdot (\pm 16) \end{cases}$$

$x-y$	7	-1	5	1	11	-5	4	2	19	-13
$x+y$	1	-7	5	-11	-1	5	13	-19	-2	-4

Vậy các cặp số nguyên phải tìm là:

$(4; -3); (-4; -3); (5; 0); (-5; -6); (5; -6); (-5; 0)$

Bài 6.



a) $ABCD$ là hình vuông (gt) $\Rightarrow \angle BAM + \angle MAD = 90^\circ$ (1)

Vì $AMHN$ là hình vuông (gt) $\Rightarrow \angle DAN + \angle MAD = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle BAM = \angle DAN$

Ta có: $\triangle AND = \triangle AMB$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle B = \angle NDA$ và $BM = ND$

b) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \angle FDA = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle NDA + \angle FDA = \angle NDC$

$\Rightarrow 90^\circ + 90^\circ = \angle NDC$

$\Rightarrow \angle NDC = 180^\circ$

Suy ra $N; D; C$ thẳng hàng

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AH và MN của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow AH$ là đường trung trực của đoạn MN , mà $E, F \in AH$

$$\Rightarrow EN = EM \text{ và } FM = FN \quad (3)$$

Tam giác vuông EOM = tam giác vuông FON ($OM = ON; N_1 = M_3$)

$$\Rightarrow AOM = NOH \Rightarrow EM = NF \quad (4)$$

Từ (3), (4) $\Rightarrow EM = NE = NF = FM \Rightarrow MENF$ là hình thoi (5)

d) Từ (5) suy ra $FM = FN = FD + DN$ mà $DN = MB$ (cmt)

$$\Rightarrow MF = DF + BM$$

Gọi chu vi tam giác MCF là p và cạnh hình vuông $ABCD$ là a

$$p = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF \text{ (Do } MF = DF + MB)$$

$$= (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a$$

Hình vuông $ABCD$ cho trước $\Rightarrow a$ không đổi $\Rightarrow p$ không đổi

**PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
HUYỆN NGA SƠN**

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 6,7,8 THCS CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2016-2017**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN 8

Thời gian làm bài: 150 phút

Ngày thi: 04/04/2017

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a + (a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$

a) Rút gọn M

b) Tìm a để $M > 0$

c) Tìm giá trị của a để biểu thức M đạt giá trị lớn nhất.

Câu 2. (5 điểm)

1) Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} = \frac{x+6}{94} + \frac{x+8}{92}$

b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

2) Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

$$\frac{1-x}{x-m} + \frac{x-2}{x+m} = \frac{2(x-m)-2}{m^2-x^2}$$

3) Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Câu 3. (4 điểm)

1) Cho $x + y + z = 1$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Tính $A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$

2) Một người dự định đi xe máy từ A đến B với vận tốc 30 km/h , nhưng sau khi đi được 1 giờ người ấy nghỉ hết 15 phút, do đó phải tăng vận tốc thêm 10 km/h để đến B đúng giờ đã định. Tính quãng đường AB ?

Câu 4. (5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O , M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N . Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$

- Chứng minh $\triangle OEM$ vuông cân
- Chứng minh : $ME \parallel BN$
- Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Câu 5. (2 điểm)

Cho số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2016$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2a + 3b + 3c + 1}{2015 + a} + \frac{3a + 2b + 3c}{2016 + b} + \frac{3a + 3b + 2c - 1}{2017 + c}$$

ĐÁP ÁN**Câu 1. (2 điểm)**

- Điều kiện: $a \neq 0; a \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \left[\frac{(a-1)^2}{3a + (a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2} \\ &= \left[\frac{(a-1)^2}{a^2+a+1} - \frac{1-2a^2+4a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{4a^2}{a(a^2+4)} \\ &= \frac{(a-1)^3 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4} \\ &= \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4} \\ &= \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{4a}{a^2+4} = \frac{4a}{a^2+4} \end{aligned}$$

- $M > 0 \Leftrightarrow 4a > 0 \Leftrightarrow a > 0$

Kết hợp với điều kiện suy ra $M > 0$ khi $a > 0$ và $a \neq 1$

$$\text{c) Ta có: } M = \frac{4a}{a^2+4} = \frac{(a^2+4) - (a^2-4a+4)}{a^2+4} = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$$\text{Vì } \frac{(a-2)^2}{a^2+4} \geq 0 \text{ với mọi } a \text{ nên } 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4} \leq 1 \text{ với mọi } a$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{(a-2)^2}{a^2+4} = 0 \Leftrightarrow a = 2$

Vậy $Max_M = 1$ khi $a = 2$.

Câu 2.

1)

a) Ta có:

$$\frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} = \frac{x+6}{94} + \frac{x+8}{92}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{98} + 1 \right) + \left(\frac{x+4}{96} + 1 \right) = \left(\frac{x+6}{94} + 1 \right) + \left(\frac{x+8}{92} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow (x+100) \cdot \left(\frac{1}{98} + \frac{1}{96} - \frac{1}{94} - \frac{1}{92} \right) = 0$$

$$\forall \frac{1}{98} + \frac{1}{96} - \frac{1}{94} - \frac{1}{92} \neq 0$$

$$\text{Do đó: } x+100=0 \Leftrightarrow x=-100$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = -100$

b)

Ta có:

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 1)(x^3 - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1)(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0 (*)$$

Do $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ và $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0$ với mọi x

$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$$

$$2) \quad \frac{1-x}{x-m} + \frac{x-2}{x+m} = \frac{2(x-m)-2}{m^2-x^2} \quad (1)$$

ĐKXĐ: $x+m \neq 0$ và $x-m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm m$

$$\Rightarrow (1-x)(x+m) + (x-2)(x-m) = 2 - 2(x-m)$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)x = m-2 (*)$$

+Nếu $2m-1=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ ta có: $(*) \Leftrightarrow 0x = \frac{-3}{2}$ (vô nghiệm)

+Nếu $m \neq \frac{1}{2}$ ta có $(*) \Leftrightarrow x = \frac{m-2}{2m-1}$

- Xét $x = m$

$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{2m-1} = m \Leftrightarrow m-2 = 2m^2 - m$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

(Không xảy ra vì vế trái luôn dương)

Xét $x = -m$

$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{2m-1} = -m \Leftrightarrow m-2 = -2m^2 + m$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy phương trình vô nghiệm khi $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = \pm 1$

3)

Ta có: $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x)$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2).(x-1)q(x)$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6 \quad (1)$$

$$\text{Với } x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có: $a = -4$ và $b = -2$

Câu 3.

1)

$$\text{Từ } x+y+z=1 \Leftrightarrow (x+y+z)^3 = 1$$

$$\text{Mà } x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 - z^3 - (x^3 + y^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z-z) \left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)z + z^2 \right] - (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz + xz + yz + z^2 + z^2 - x^2 + xy - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(3z^2 + 3xy + 3yz + 3xz) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)3(y+z)(x+z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=-z \\ x=-z \end{cases}$$

$$\text{* Nếu } x=-y \Rightarrow z=1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$$

$$\text{* Nếu } y=-z \Rightarrow x=1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$$

$$\text{* Nếu } x=-z \Rightarrow y=1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$$

2)

Gọi $x(km)$ là độ dài quãng đường AB. ĐK: $x > 0$

Thời gian dự kiến đi hết quãng đường AB: $\frac{x}{30}$ (giờ)

Quãng đường đi được sau 1 giờ: $30(km)$

Quãng đường còn lại : $x - 30(km)$

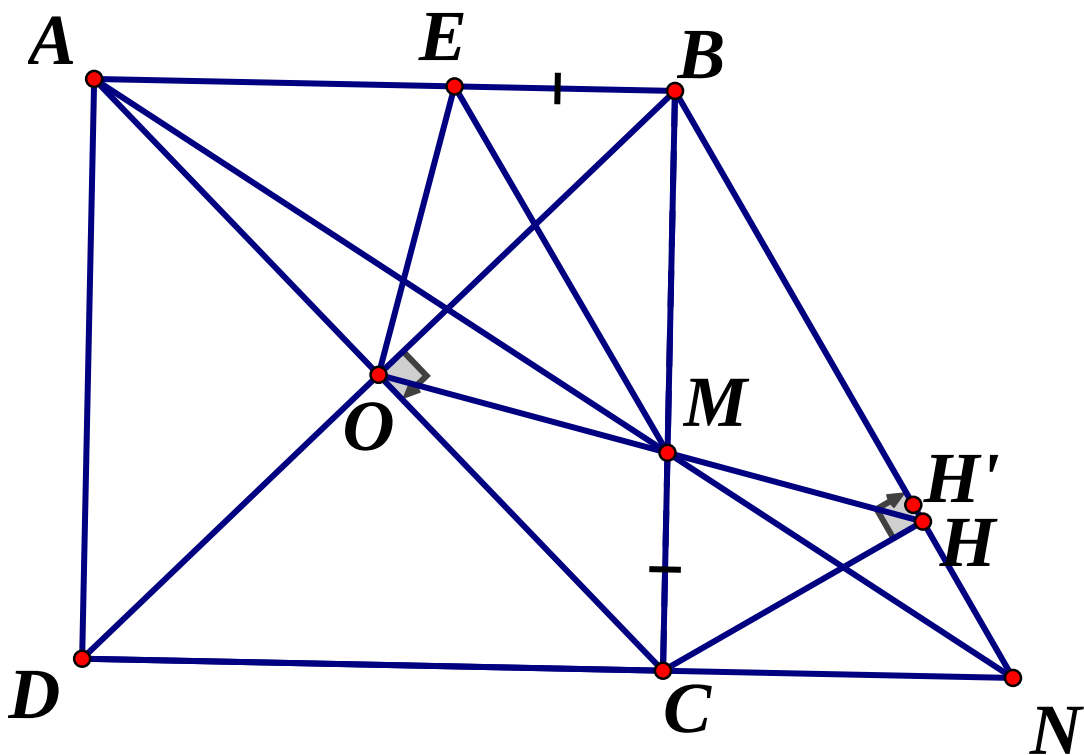
Thời gian đi quãng đường còn lại: $\frac{x-30}{40}$ (giờ)

Theo bài ta có phương trình: $\frac{x}{30} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{x-30}{40}$

$$\Leftrightarrow 4x = 30.5 + 3.(x-30) \Leftrightarrow x = 60 (\text{thỏa mãn})$$

Vậy quãng đường AB là $60km$.

Câu 4.



a)

Xét $\triangle OEB$ và $\triangle OMC$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có : $OB = OC$

Và $B_1 = C_1 = 45^\circ$

$BE = CM$ (gt)

Suy ra $\triangle OEM = \triangle OMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow OE = OM$ và $O_1 = O_3$

Lại có: $O_2 + O_3 = \angle BOC = 90^\circ$ vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$\Rightarrow O_2 + O_1 = \angle EOM = 90^\circ$ kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O

b) Từ giả thiết $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB = CD$ và $AB \parallel CD$

+ $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (định lý Ta-let) (*)

Mà $BE = CM$ (gt) và $AB = CD \Rightarrow AE = BM$ thay vào (*)

Ta có: $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME \parallel BN$ (theo Định lý Talet đảo)

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN

Từ $ME \parallel BN \Rightarrow \angle OME = \angle MH'B$

Mà $OME = 45^\circ$ vì $\triangle OEM$ vuông cân tại $O \Rightarrow MH'B = 45^\circ = C_1$

$\Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle BMH' (g.g)$

$\Rightarrow \frac{OM}{BM} = \frac{MC}{MH'}$, kết hợp $OMB = CMH'$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle CMH' (c.g.c) \Rightarrow OBM = MH'C = 45^\circ$

Vậy $BH'C = BH'M + MH'C = 90^\circ \Rightarrow CH' \perp BN$

Mà $CH \perp BN (H \in BN) \Rightarrow H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm)

Câu 5.

Ta có:

$$P = \frac{2a + 3b + 3c + 1}{2015 + a} + \frac{3a + 2b + 3c}{2016 + b} + \frac{3a + 3b + 2c - 1}{2017 + c}$$

$$= \frac{b + c + 4033}{2015 + a} + \frac{c + a + 4032}{2016 + b} + \frac{a + b + 4031}{2017 + c}$$

Đặt

$$2015 + a = x$$

$$2016 + b = y$$

$$2017 + c = z$$

$$P = \frac{b + c + 4033}{2015 + a} + \frac{c + a + 4032}{2016 + b} + \frac{a + b + 4031}{2017 + c}$$

$$= \frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} + \frac{x + y}{z} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z}} + 2\sqrt{\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y}} = 6 \quad (Co - si)$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$ suy ra $a = 673, b = 672, c = 671$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 6 khi $a = 673, b = 672, c = 671$

PHÒNG GD & ĐT THANH CHUÔNG

ĐỀ THI KĐCL MŨI NHƠN. NĂM HỌC 2012-2013

Môn thi: TOÁN 8

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1.

- a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5$
- b) Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số
- c) Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ

Câu 2.

- a) Giải phương trình : $\frac{x-1}{2012} + \frac{x-2}{2011} + \frac{x-3}{2010} + \dots + \frac{x-2012}{1} = 2012$
- b) Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^{2012} + c^{2013}$

Câu 3.

- a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$
- b) Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác.

Chứng minh: $\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} \geq a+b+c$

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . M là giao điểm của CE và DF

- a) Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình vuông
- b) Chứng minh $DF \perp CE$ và $\triangle MAD$ cân
- c) Tính diện tích $\triangle MDC$ theo a

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned} &= (x-y)^2 + 4(x-y) - 5 = (x-y)^2 + 4(x-y)^2 + 4 - 9 \\ &= (x-y+2)^2 - 3^2 = (x-y+5)(x-y-1) \end{aligned}$$

b)

$$\text{Ta có: } n^3 + n + 2 = n^3 + 1 + n + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) + (n+1) = (n+1)(n^2 - n + 2)$$

Do $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $n+1 > 1$ và $n^2 - n + 2 > 1$. Vậy $n^3 + n + 2$ là hợp số

c)

Gọi hai số lần lượt là a^2 và $(a+1)^2$

Theo đề bài ra ta có:

$$\begin{aligned} &a^2 + (a+1)^2 + a^2(a+1)^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \\ &= (a^4 + 2a^3 + a^2) + 2(a^2 + a) + 1 = (a^2 + a)^2 + 2(a^2 + a) + 1 \\ &= (a^2 + a + 1)^2 \text{ là một số chính phương lẻ vì } a^2 + a = a(a+1) \text{ là số chẵn} \\ &\Rightarrow a^2 + a + 1 \text{ là số lẻ} \end{aligned}$$

Câu 2.

a) Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} &\frac{x-1}{2012} - 1 + \frac{x-2}{2011} - 1 + \frac{x-3}{2010} - 1 + \dots + \frac{x-2012}{1} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-2013}{2012} + \frac{x-2013}{2011} + \frac{x-2013}{2010} + \dots + \frac{x-2013}{1} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2013) \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} + \dots + \frac{1}{1} \right) \Leftrightarrow x = 2013 \end{aligned}$$

b)

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow a, b, c \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 + b^2 + c^2) = a^2(a-1) + b^2(b-1) + c^2(c-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \leq 1 \Rightarrow a, b, c \text{ nhận hai giá trị là } 0 \text{ hoặc } 1$$

$$\Rightarrow b^{2012} = b^2; c^{2013} = c^2; \Rightarrow S = a^2 + b^{2012} + c^{2013} = 1$$

Câu 3.

a) Ta có: $A = 2(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 - 8x - 2y + 18$

$$A = 2[(x+y)^2 - 4(x+y) + 4] + (y^2 + 6y + 9) + 1$$

$$A = 2(x+y-2)^2 + (y+3)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Vậy } \min A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

b) Vì a, b, c là 3 cạnh của tam giác nên $a+b-c > 0; -a+b+c > 0; a-b+c > 0$

Đặt $x = -a+b+c > 0; y = a-b+c > 0; z = a+b-c > 0$

Ta có: $x+y+z = a+b+c; a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

$$\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} = \frac{(y+z)(x+z)}{4z} + \frac{(x+z)(x+y)}{4x} + \frac{(x+y)(y+z)}{4y}$$

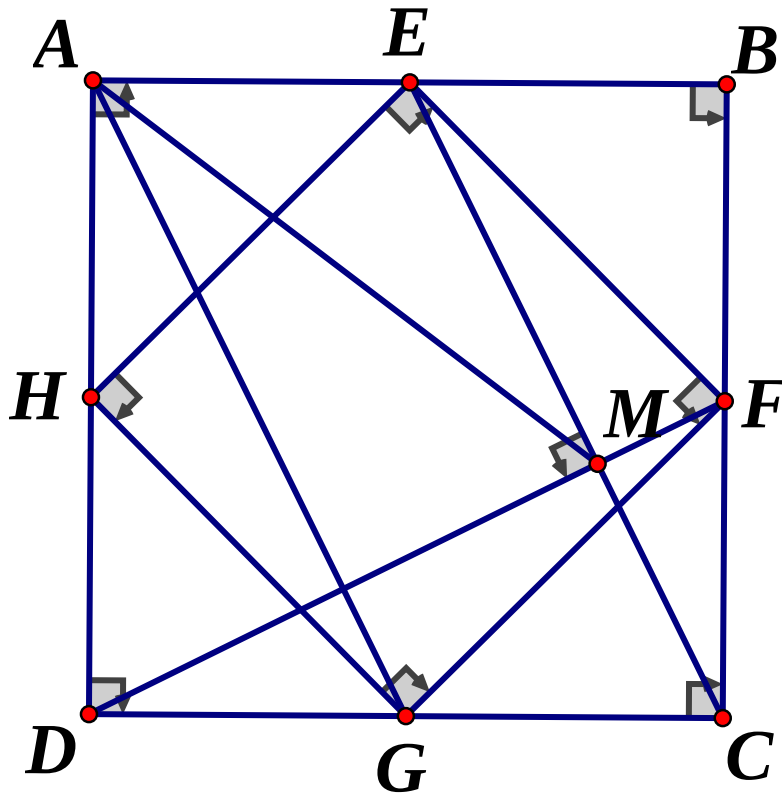
$$\frac{1}{4} \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + 3x + 3y + 3z \right) = \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + \frac{1}{2} \left(2\frac{xy}{z} + 2\frac{yz}{x} + 2\frac{xz}{y} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + \frac{y}{2} \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{x}{2} \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{z}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right]$$

$$\geq \frac{1}{4} \cdot [3(x+y+z) + x+y+z] = x+y+z$$

Mà $x+y+z = a+b+c$ nên suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4.



a) Chứng minh $EFGH$ là hình thoi và có 1 góc vuông nên $EFGH$ là hình vuông

b) $\triangle BEC = \triangle CFD (c.g.c) \Rightarrow ECB = FDC$ mà $\triangle CDF$ vuông tại C nên

$$\Rightarrow CDF + DFC = 90^\circ \Rightarrow DFC + ECB = 90^\circ \Rightarrow \triangle CMF \text{ vuông tại M}$$

Hay $CE \perp DF$

Gọi N là giao điểm của AG và DF. Chứng minh tương tự : $AG \perp DF$

$\Rightarrow GN \parallel CM$ mà G là trung điểm của DC nên N là trung điểm DM.

Trong $\triangle MAD$ có AN vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên $\triangle MAD$ cân tại A

c) $\triangle CMD \sim \triangle FCD (g.g) \Rightarrow \frac{CD}{FD} = \frac{CM}{FC}$

$$\text{Do đó: } \frac{S_{CMD}}{S_{FCD}} = \left(\frac{CD}{FD} \right)^2 \Rightarrow S_{CMD} = \left(\frac{CD}{FD} \right)^2 \cdot S_{FCD}$$

$$\text{Mà } S_{FCD} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot CD = \frac{1}{4} CD^2$$

$$\text{Vậy } S_{CMD} = \frac{CD^2}{FD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2$$

Trong $\triangle DCF$ theo Pytago ta có:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = CD^2 + \frac{1}{4}CD^2 = \frac{5}{4}CD^2$$

$$\text{Do đó: } S_{MCD} = \frac{CD^2}{\frac{5}{4}CD^2} \cdot \frac{1}{4}CD^2 = \frac{1}{5}CD^2 = \frac{1}{5}a^2$$

ĐỀ BÀI

Câu 1. (5 điểm) Tìm số tự nhiên n để:

a) $A = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố

b) $B = \frac{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 6n - 2}{n^2 + 2}$ có giá trị là một số nguyên

c) $D = n^5 - n + 2$ là số chính phương.

Câu 2. (5 điểm) Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = 1$ biết $abc = 1$

b) Với $a+b+c=0$ thì $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab+bc+ca)^2$

c) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$

Câu 3. (5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

b) $2x(8x-1)^2 \cdot (4x-1) = 9$

c) $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$ với x, y nguyên dương.

Câu 4. (5 điểm) Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), O là giao điểm hai đường chéo. Qua

O kẻ đường thẳng song song với AB cắt AD tại E , cắt BC tại F

a) Chứng minh : Diện tích tam giác AOD bằng diện tích tam giác BOC

b) Chứng minh: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$

c) Gọi K là điểm bất kỳ thuộc OE . Nêu cách dựng đường thẳng đi qua K và chia đôi diện tích tam giác DEF

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) $A = n^3 - n^2 + n - 1 = (n^2 + 1)(n - 1)$

Để A là nguyên tố thì $n - 1 = 1 \Leftrightarrow n = 2$. Khi đó $A = 5$

b) $B = n^2 + 3n - \frac{2}{n^2 + 2}$

B có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2 \vdots n^2 + 2$

$$n^2 + 2 \text{ là ước tự nhiên của } 2 \Rightarrow \begin{cases} n^2 + 2 = 1 \\ n^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 = -1 (ktm) \\ n = 0 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy với $n = 0$ thì B có giá trị nguyên.

c)

$$D = n^5 - n + 2 = n(n^4 - 1) + 2 = n(n + 1)(n - 1)(n^2 + 1) + 2$$

$$= n(n - 1)(n + 1)[(n^2 - 4) + 5] + 2 = n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) + 5n(n - 1)(n + 1) + 2$$

Mà $n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) : 5$ (tích 5 số tự nhiên liên tiếp)

Và $5n(n - 1)(n + 1) : 5$. Vậy D chia 5 dư 2

Do đó D có tận cùng là 2 hoặc 7 nên D không phải là số chính phương.

Vậy không có giá trị nào của n để D là số chính phương.

Câu 2.

a)

$$\begin{aligned} \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ac + c + 1} &= \frac{ac}{abc + ac + c} + \frac{abc}{abc^2 + abc + ac} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= \frac{ac}{1 + ac + c} + \frac{abc}{c + 1 + ac} + \frac{c}{ac + c + 1} = \frac{abc + ac + 1}{abc + ac + 1} = 1 \end{aligned}$$

b)

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc) \quad (1)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 8abc(a + b + c)$$

(Vì $a + b + c = 0$)

$$\Rightarrow 2(ab + ac + bc) = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + ac + bc)^2$$

c) Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{a}{c}$$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = 2 \cdot \frac{c}{b}$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{b}{a}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

Câu 3.

a)

$$\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1\right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2\right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300)\left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82}\right) = 0 \Leftrightarrow x-300 = 0 \Leftrightarrow x = 300$$

Vậy $S = \{300\}$

b)

$$2x(8x-1)^2 \cdot (4x-1) = 9$$

$$\Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(8x^2 - 2x) = 9 \Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(64x^2 - 16x) = 72$$

$$\text{Đặt } 64x^2 - 16x + \frac{1}{2} = k$$

Ta có:

$$(k+0,5)(k-0,5) = 72 \Leftrightarrow k^2 = 72,25 \Rightarrow k = \pm 8,5$$

Với $k = 8,5$ ta có phương trình :

$$64x^2 - 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(4x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Với $k = -8,5$ ta có phương trình:

$$64x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow (8x - 1)^2 + 8 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right\}$$

$$\text{c) } x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 7 = 0$$

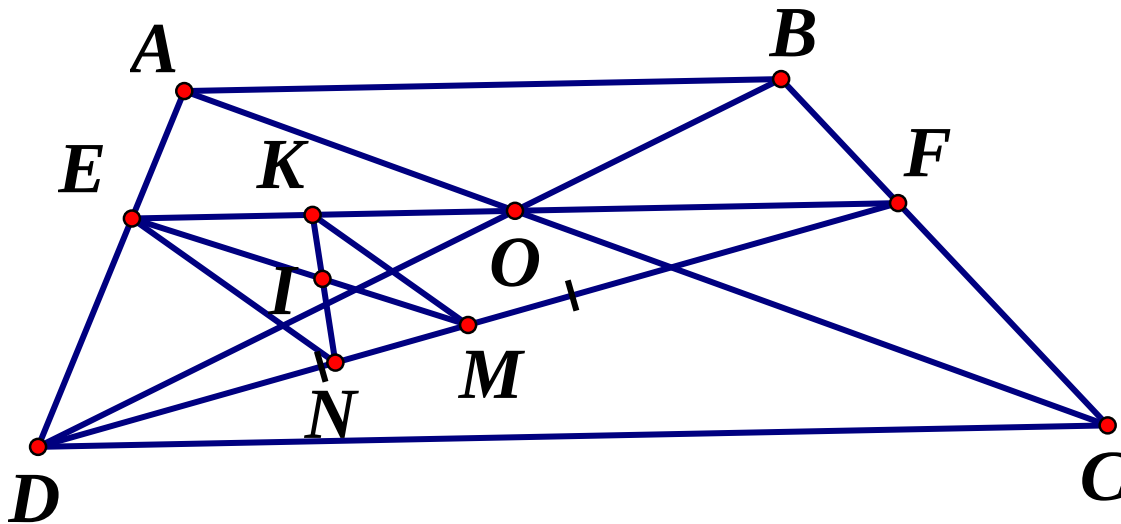
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - (y+2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y+3) = 7$$

Vì x, y nguyên dương nên $x+y+3 > x-y-1$

$$\Rightarrow x+y+3=7 \text{ và } x-y-1=1 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm dương duy nhất $(x; y) = (3; 1)$

Câu 4.



$$\text{a) Vì } AB \parallel DC \Rightarrow S_{DAB} = S_{CBA} \text{ (cùng đáy và cùng đường cao)}$$

$$\Rightarrow S_{DAB} - S_{AOB} = S_{CBA} - S_{AOB} \text{ hay } S_{AOD} = S_{BOC}$$

$$\text{b) Vì } EO \parallel DC \Rightarrow \frac{EO}{DC} = \frac{AO}{AC}. \text{ Mặt khác } AB \parallel DC$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC} \Rightarrow \frac{AB}{AB+BC} = \frac{AO}{AO+OC} \Rightarrow \frac{AB}{AB+BC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{EO}{DC} = \frac{AB}{AB+DC}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{2DC} = \frac{AB}{AB+DC} \Rightarrow \frac{AB+DC}{AB \cdot DC} = \frac{2}{EF} \Rightarrow \frac{1}{DC} + \frac{1}{AB} = \frac{2}{EF}$$

c) Dựng trung tuyến EM , dựng $EN \parallel MK$ ($N \in DF$)

Kẻ đường thẳng KN là đường phải dựng.

Chứng minh: $S_{EDM} = S_{EFM}$ (1)

Gọi giao điểm của EM và KN là I thì $S_{IKE} = S_{IMN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{DEKN} = S_{KFN}$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN TOÁN LỚP 8

Bài 1 (3đ)

a) Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

b) Tìm giá trị nguyên của x để $A:B$ biết

$$A = 10x^2 - 7x - 5 \text{ và } B = 2x - 3$$

c) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$$

Bài 2 (3đ) Giải các phương trình sau:

$$a) (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$$

$$b) \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

Bài 3. (2đ) Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia BA lấy E , trên tia đối của tia CB lấy F sao cho $AE = CF$

a) Chứng minh $\triangle EDF$ vuông cân

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi I là trung điểm của EF .

Chứng minh O, C, I thẳng hàng

Bài 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí điểm D, E sao cho:

- DE có độ dài nhỏ nhất
- Tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a)

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 &= x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4 \\ &= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

b)

$$\text{Xét } \frac{A}{B} = \frac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 3} = 5x + 4 + \frac{7}{2x - 3}$$

$$\text{Với } x \in \mathbb{Z} \text{ thì } A:B \text{ khi } \frac{7}{2x-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7:(2x-3)$$

$$\text{Mà } U(7) = \{-1; 1; -7; 7\} \Rightarrow x = 5; -2; 2; 1 \text{ thì } A:B$$

$$\begin{aligned} \text{c) Biến đổi } \frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} &= \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3-1)(x^3-1)} \\ &= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} \quad (\text{do } x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x \text{ \& } x - 1 = -y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(x^2y^2+y^2x+y^2+yx^2+xy+y+x^2+x+1)} \\
&= \frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy[x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2]} \\
&= \frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy[x^2y^2+(x+y)^2+2]} = \frac{(x-y)[x(x-1)+y(y-1)]}{xy(x^2y^2+3)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(x-y)[x(-y)+y(-x)]}{xy(x^2y^2+3)} = \frac{(x-y)(-2xy)}{xy(x^2y^2+3)}$$

$$= \frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3} \text{ Suy ra điều phải chứng minh}$$

Bài 2.

a) $(x^2+x)^2+4(x^2+x)=12$

Đặt $y = x^2 + x$

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 6y - 2y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+6)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

* $x^2 + x = -6$ vô nghiệm vì $x^2 + x + 6 > 0$ với mọi x

$$*x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) - (x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1$$

b)

$$\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

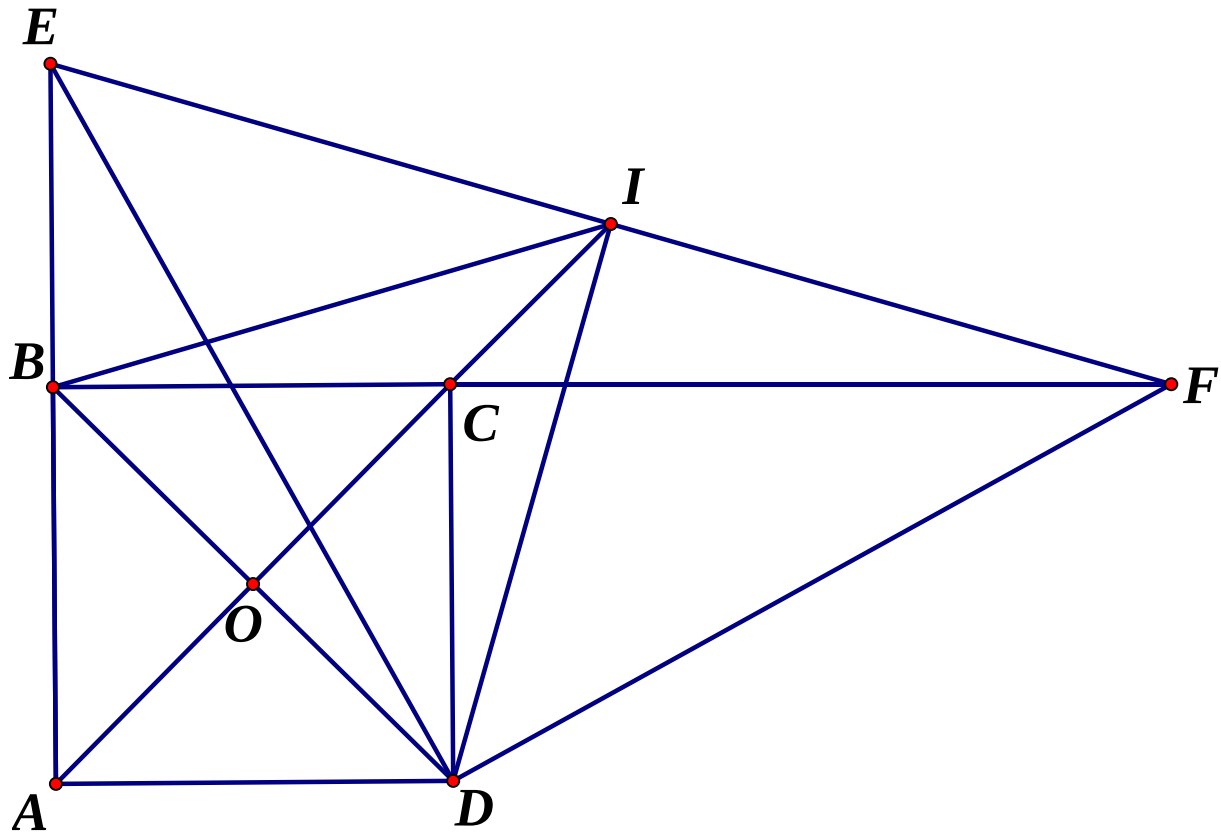
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008} + 1\right) + \left(\frac{x+2}{2007} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{2006} + 1\right) = \left(\frac{x+4}{2005} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1\right) + \left(\frac{x+6}{2003} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} = \frac{x+2009}{2005} + \frac{x+2009}{2004} + \frac{x+2009}{2003}$$

$$\Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0$$

$$\forall x \quad \frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \neq 0 \Rightarrow x = -2009$$

Bài 3



a)

Ta có : $\triangle ADE = \triangle CDF (c.g.c) \Rightarrow \triangle EDF$ cân tại D

Mặt khác $\triangle ADE = \triangle CDF (c.g.c) \Rightarrow \angle BED = \angle CFD$

Mà $\angle BED + \angle DEF + \angle EFB = 90^\circ \Rightarrow \angle BFD + \angle DEF + \angle EFB = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle EDF = 90^\circ$. Vậy $\triangle EDF$ vuông cân.

b)

Theo tính chất đường chéo hình vuông $\Rightarrow CO$ là trung trực BD

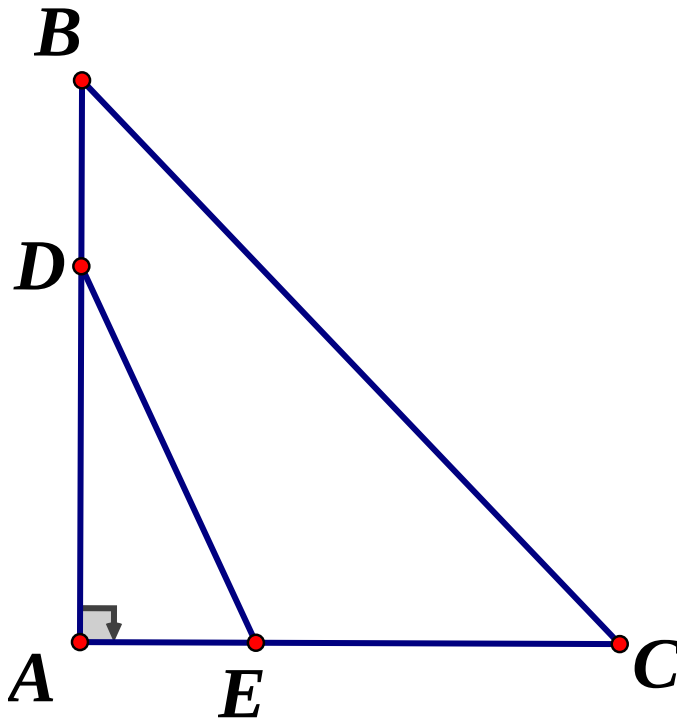
Mà $\triangle EDF$ vuông cân $\Rightarrow DI = \frac{1}{2}EF$

Tương tự $BI = \frac{1}{2}EF \Rightarrow DI = BI$

$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của $DB \Rightarrow I$ thuộc đường thẳng CO

Nên O, C, I thẳng hàng

Bài 4



a)

Đặt $AB = AC = a$ không đổi; $AE = BD = x$ ($0 < x < a$)

Áp dụng định lý Pytago với $\triangle ADE$ vuông tại A có:

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 = (a - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2(x^2 - ax) - a^2 \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Ta có DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow DE^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow BD = AE = \frac{a}{2} \Leftrightarrow D, E$ là trung điểm của AB, AC

b)

Tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{ADE} &= \frac{1}{2} AD \cdot AE = \frac{1}{2} AD \cdot (AB - AD) = -\frac{1}{2} (AD^2 - AB \cdot AD) \\ &= -\frac{1}{2} \left(AD^2 - 2 \cdot \frac{AB}{2} \cdot AD + \frac{AB^2}{4} \right) + \frac{AB^2}{8} = -\frac{1}{2} \left(AD - \frac{AB}{2} \right)^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8} \end{aligned}$$

Vậy $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8}AB^2$ không đổi

Do đó $\min S_{BDEC} = \frac{3}{8}AB^2$ khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN: TOÁN 8

NĂM HỌC 2014-2015

Bài 1. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^2 - y^2 - 5x + 5y$

b) $2x^2 - 5x - 7$

Bài 2. Tìm đa thức A, biết rằng $\frac{4x^2 - 16}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x}$

Bài 3. Cho phân thức $\frac{5x + 5}{2x^2 + 2x}$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định

b) Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1

Bài 4. a) Giải phương trình: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

b) Giải bất phương trình: $(x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3$

Bài 5. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:

Một tổ sản xuất lập kế hoạch sản xuất, mỗi ngày sản xuất được 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đó sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch một ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và thực hiện trong bao nhiêu ngày.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, có $AB = 15cm, AC = 20cm$. Kẻ đường cao AH và trung tuyến AM

a) Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle HBA$

b) Tính $BC; AH; BH; CH$

c) Tính diện tích $\triangle AHM$

ĐÁP ÁN

Bài 1

$$a) x^2 - y^2 - 5x + 5y = (x^2 - y^2) - (5x - 5y) = (x + y)(x - y) - 5(x - y) = (x - y)(x + y - 5)$$

$$\begin{aligned} b) 2x^2 - 5x - 7 &= 2x^2 + 2x - 7x - 7 \\ &= 2x(x + 1) - 7(x + 1) = (x + 1)(2x - 7) \end{aligned}$$

Bài 2.

$$A = \frac{x(4x^2 - 16)}{x^2 + 2x} = \frac{x(2x - 4)(2x + 4)}{x(x + 2)} = \frac{4x(x - 2)(x + 2)}{x(x + 2)} = 4(x - 2) = 4x - 8$$

Bài 3.

$$a) 2x^2 + 2x = 2x(x + 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \neq 0 \quad \& \quad x + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

b) Rút gọn :

$$\frac{5x + 5}{2x^2 + 2x} = \frac{5(x + 1)}{2x(x + 1)} = \frac{5}{2x}$$

$$\frac{5}{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} (tm)$$

Bài 4.

a). ĐKXD: $x \neq 0; x \neq 2$

$$\frac{x(x + 2) - (x - 2)}{x(x - 2)} = \frac{2}{x(x - 2)} \Rightarrow x^2 + 2x - x + 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (ktm) \\ x = -1 \quad (tm) \end{cases}$$

Vậy $S = \{-1\}$

$$b) (x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 < x^2 + 4x + 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 - 4x < 7 + 9 \Leftrightarrow x > -4$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x > -4$

Bài 5.

Gọi số ngày tổ dự định sản xuất là : x (ngày)

Điều kiện x nguyên dương và $x > 1$

Vậy số ngày tổ đã thực hiện là : $x-1$ (ngày)

Số sản phẩm làm theo kế hoạch là : $50x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm thực hiện là : $57(x-1)$ (sản phẩm)

Theo đề bài ta có phương trình:

$$57(x-1) - 50x = 13$$

$$\Leftrightarrow 57x - 57 - 50x = 13$$

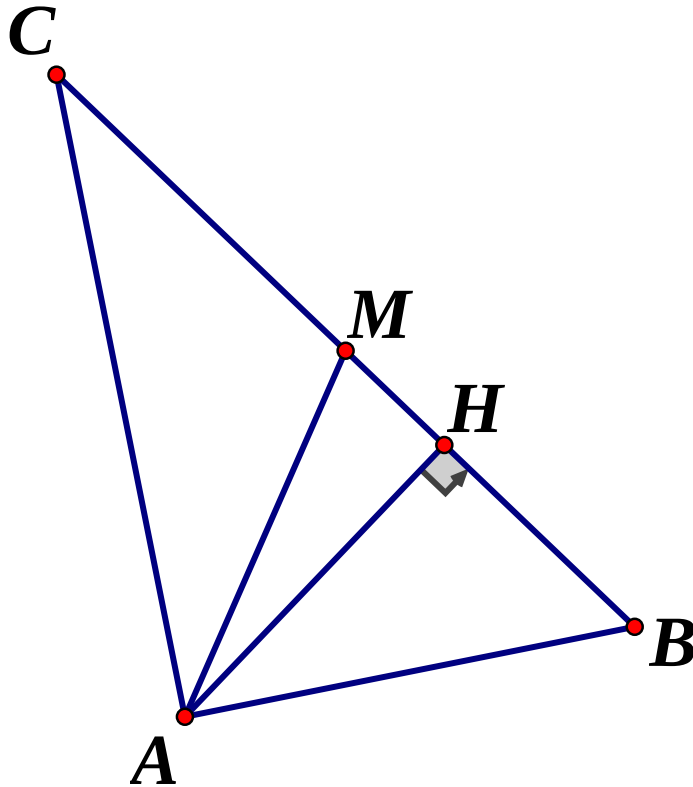
$$\Leftrightarrow 7x = 70$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \quad (tm)$$

Vậy số ngày dự định sản xuất là : 10 ngày

Số sản phẩm phải sản xuất theo kế hoạch: $50.10 = 500$ (sản phẩm)

Bài 6.



a) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle HBA$ có: $A = H = 90^\circ$; B chung
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HBA (g.g)$

b) Áp dụng định lý Pytago vào $\triangle ABC$ vuông

$$\text{Ta có: } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25(\text{cm})$$

Vì $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ nên $\frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{BA}$ hay

$$\frac{15}{HB} = \frac{20}{HA} = \frac{25}{15} \Rightarrow AH = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12(\text{cm}); BH = \frac{15 \cdot 15}{25} = 9(\text{cm})$$

$$HC = BC - BH = 25 - 9 = 16(\text{cm})$$

$$\text{c) } HM = BM - BH = \frac{BC}{2} - BH = \frac{25}{2} - 9 = 3,5(\text{cm})$$

$$S_{AHM} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot HM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3,5 = 21(\text{cm}^2)$$

Bài 1. (2 điểm)

Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

1. $x^2 + 7x + 6$

2. $x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$

Bài 2. (2 điểm) Giải phương trình:

1) $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

2) $8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$

Bài 3. (2 điểm)

1. CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

2. Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2008$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

Bài 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E .

1) Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$

2) Gọi M là trung điểm của đoạn BE . Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo của $\angle AHM$

3) Tia AM cắt BC tại G . Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1)

$$\begin{aligned}x^2 + 7x + 6 &= x^2 + x + 6x + 6 \\&= x(x+1) + 6(x+1) = (x+6)(x+1)\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008 &= x^4 + x^2 + 2007x^2 + 2007x + 2007 + 1 \\&= x^4 + x^2 + 1 + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + 1) - x^2 + 2007(x^2 + x + 1) \\&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2008)\end{aligned}$$

Bài 2.

2.1 $x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0 \quad (1)$

Nếu $x \geq 1$: $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$)

$x < 1$: $(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0$

Nếu $\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & (ktm) \\ x=3 & (ktm) \end{cases}$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x=1$

2.2

$$8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (ktm) \\ x=-8 & (tm) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=-8$

Bài 3.

3.1 Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \\ &= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \end{aligned}$$

Mà $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (BĐT Cô si)

Do đó: $A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Vậy $A \geq 9$

3.2 Ta có:

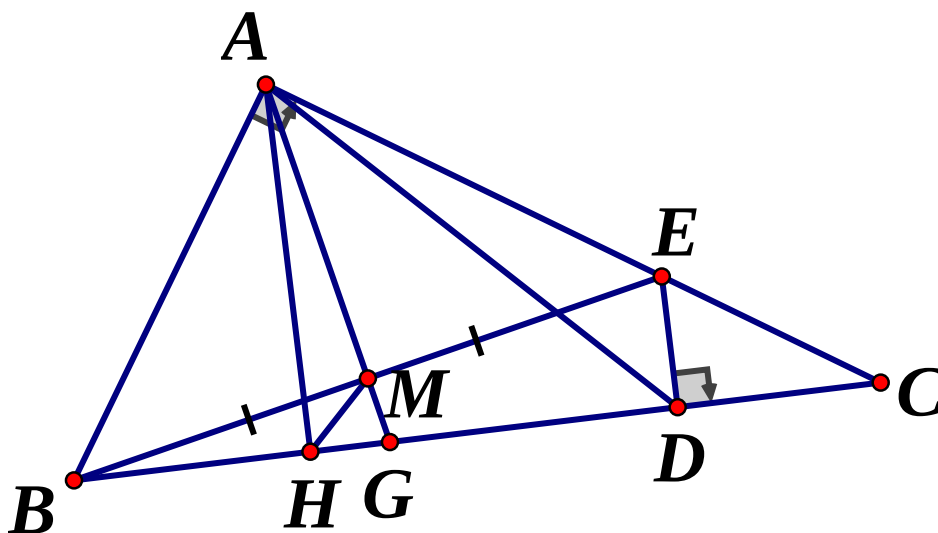
$$\begin{aligned} P(x) &= (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2008 \\ &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2008 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3; t \neq -7$), Biểu thức $P(x)$ được viết lại

$$P(x) = (t-5)(t+3) + 2008 = t^2 - 2t + 1993$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 1993$ cho t ta có số dư là 1993

Bài 4.



1) Hai tam giác ADC và BEC có: C chung;

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} \text{ (hai tam giác vuông CDE và CAB đồng dạng)}$$

Do đó $\triangle ADC \sim \triangle BEC$

Suy ra $\angle BEC = \angle ADC = 135^\circ$ (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo giả thiết)

Nên $\angle AEB = 45^\circ$, do đó $\triangle ABE$ vuông cân tại A

Suy ra : $BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$

2) Ta có $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC}$ (do $\triangle BEC \sim \triangle ADC$)

Mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

Nên $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{BH}{AB\sqrt{2}} = \frac{BH}{BE}$ (do $\triangle ABH \sim \triangle CBA$)

Do đó: $\triangle BHM \sim \triangle BEC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BHM = \angle BEC = 135^\circ \Rightarrow \angle AHM = 45^\circ$

3) Tam giác ABE vuông cân tại A, nên tia AM còn là tia phân giác $\angle BAC$

Suy ra : $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$, mà $\frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC}$ ($\triangle ABC \sim \triangle DEC$) $= \frac{AH}{HC}$ ($ED \parallel AH$) $= \frac{HD}{HC}$

Do đó: $\frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$

PHÒNG GD & ĐT
HUYỆN THƯỜNG TÍN

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
Môn: TOÁN 8
Năm học: 2014-2015

Bài 1. (6 điểm) Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

d) Tìm x để $P > 0$

Bài 2. (3 điểm) Giải phương trình

a) $\frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$

b) $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

c) $||x-2|+3| = 5$

Bài 3. (2 điểm) Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5 km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó

Bài 4. (7 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy điểm P , gọi M là điểm đối xứng của C qua P .

- Tứ giác $AMDB$ là hình gì ?
- Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AD . Chứng minh $EF \parallel AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng
- Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật $MEAF$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm P
- Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4\text{cm}$, $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$

Bài 5. (2 điểm)

- Chứng minh rằng : $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010
- Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1 . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

ĐÁP ÁN**Bài 1.**

$$4x^2 - 12x + 5 = (2x - 1)(2x - 5)$$

$$13x - 2x^2 - 20 = (x - 4)(5 - 2x)$$

$$21 + 2x - 8x^2 = (3 + 2x)(7 - 4x)$$

$$4x^2 + 4x - 3 = (2x - 1)(2x + 3)$$

$$\text{Điều kiện } x \neq \left\{ \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{-3}{2}; \frac{7}{4}; 4 \right\}$$

$$\text{a) Rút gọn } P = \frac{2x - 3}{2x - 5}$$

$$\text{b) } |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+) x = \frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{1}{2}$$

$$+) x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{2}{3}$$

$$\text{c) Ta có: } 1 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vậy } P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{x-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(2) = \{-1; -2; 1; 2\}$$

$$x-5 = -2 \Rightarrow x = 3 \quad (tm)$$

$$x-5 = -1 \Leftrightarrow x = 4 \quad (ktm)$$

$$x-5 = 1 \Rightarrow x = 6 \quad (tm)$$

$$x-5 = 2 \Rightarrow x = 7 \quad (tm)$$

$$d) \quad P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5}$$

Ta có: $1 > 0$

Để $P > 0$ thì $\frac{2}{x-5} > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

Với $x > 5$ thì $P > 0$

Bài 2.**a)**

$$\frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)} - 1 = 12 \cdot \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3(x-1)} \right). \text{ DK : } x \neq -4; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 15x - 3(x+4)(x-1) = 3 \cdot 12(x-1) + 12(x+4)$$

.....

$$\Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (tm)} \\ x = -4 \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0\}$$

b)

$$\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25} - 1 \right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2 \right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3 \right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} \right) = 0$$

$$\text{Do } \frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} > 0 \text{ nên } 123-x=0 \Leftrightarrow x=123$$

$$\text{Vậy } S = \{123\}$$

$$\text{c) } ||x-2|+3|=5$$

$$\text{Ta có: } |x-2| \geq 0 \forall x \Rightarrow |x-2|+3 > 0 \text{ nên } ||x-2|+3| = |x-2|+3$$

Phương trình được viết dưới dạng:

$$|x-2|+3=5$$

$$\Leftrightarrow |x-2|=2$$

$$+) x-2=2 \Leftrightarrow x=4$$

$$+) x-2=-2 \Rightarrow x=0$$

$$S = \{0; 4\}$$

Bài 3.

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(km)$ ($x > 0$)

Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là: $\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10}(km/h)$ $\left(3^h20' = 3\frac{1}{3}h\right)$

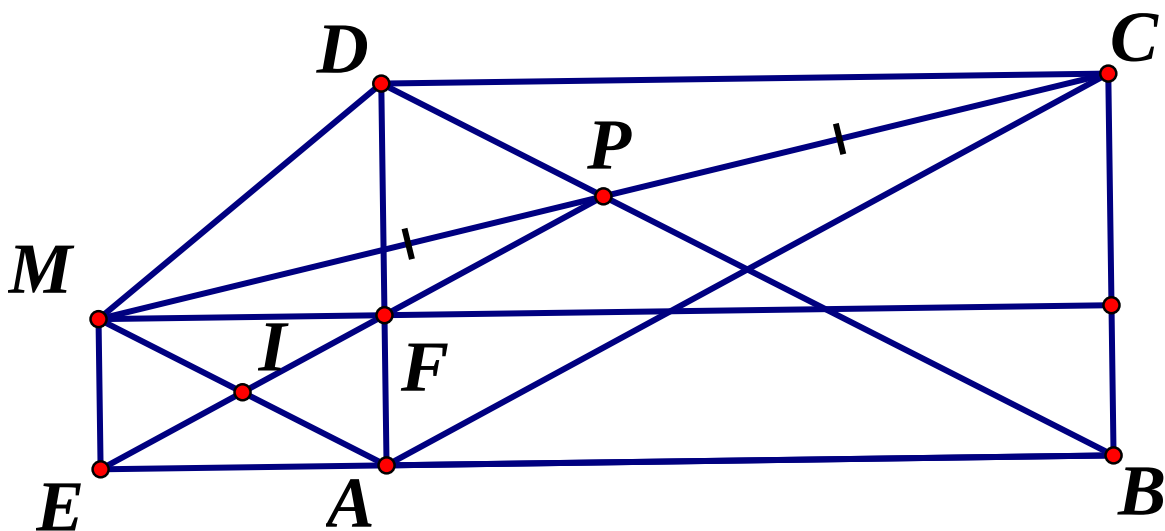
Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên $5km/h$ là: $\frac{3x}{10} + 5(km/h)$

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\left(\frac{3x}{10} + 5\right) \cdot 3 = x \Leftrightarrow x = 150 (km)$$

Vậy khoảng cách giữa A và B là $150(km)$

Vận tốc dự định là $\frac{3 \cdot 150}{10} = 45(km/h)$

Bài 4.

a) Gọi O là giao điểm 2 đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$

$\Rightarrow PO$ là đường trung bình của tam giác CAM

$\Rightarrow AM \parallel PO \Rightarrow$ tứ giác $AMDB$ là hình thang

b) Do $AM \parallel BD$ nên $OBA = MAE$ (đồng vị)

Tam giác AOB cân ở O nên $OBA = OAB$

Gọi I là giao điểm 2 đường chéo của hình chữ nhật $AEMF$ thì tam giác AIE cân ở I
nên $IAE = IEA$

Từ chứng minh trên : $FEA = OAB$, do đó $EF \parallel AC$ (1)

Mặt khác IP là đường trung bình của tam giác MAC nên $IP \parallel AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) $\triangle MAF \sim \triangle DBA$ (g - g) nên $\frac{MF}{FA} = \frac{AD}{AB}$ không đổi

d) Nếu $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$ thì $\frac{PD}{9} = \frac{PB}{16} = k \Rightarrow PD = 9k, PB = 16k$

Nếu $CP \perp BD$ thì $\triangle CBD \sim \triangle DCP$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CP}{PD} = \frac{PB}{CP}$

Do đó: $CP^2 = PB \cdot PD$ hay $(2,4)^2 = 9 \cdot 16k^2 \Rightarrow k = 0,2$

$PD = 9k = 1,8cm$

$PB = 16k = 3,2cm$

$BD = 5cm$

Chứng minh $BC^2 = BP \cdot BD = 16$

Do đó $BC = 4cm$; $CD = 3cm$.

Bài 5.

a) Ta có: $2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$

Vì $2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots)$

$= 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (1)

Vì $2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots)$

$= 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

b)

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)} \geq 0 \quad (2)$$

Vì $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$ (2)

$\Rightarrow$ BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN

MÔN TOÁN 8

Bài 1 (3 điểm) Chứng minh rằng:

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Bài 2. (3 điểm)

a) Rút gọn biểu thức : $\frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 4x^2 - 18x + 9}$

b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ ($x, y, z \neq 0$). Tính $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 3. (3 điểm)

Cho tam giác ABC . Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc tia đối của các tia BA, CA sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD . Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A, đường thẳng này cắt AC ở K. Chứng minh rằng $AB = CK$

Bài 4. (1 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có):

$$M = 4x^2 + 4x + 5$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$

Rõ ràng kết quả trên chia hết cho 17

b) Áp dụng hằng đẳng thức

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \text{ với mọi } n \text{ lẻ}$$

$$\text{Ta có: } 19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$$

$$= 88 \cdot (19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18}) \text{ chia hết cho 44}$$

Bài 2.

a) Ta có:

$$*) x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6 = x(x + 3) - 2(x + 3) = (x - 2)(x + 3)$$

$$*) x^3 - 4x^2 - 18x + 9 = x^3 + 3x^2 - 7x^2 - 21x + 3x + 9$$

$$= x^2(x + 3) - 7x(x + 3) + 3(x + 3)$$

$$= (x + 3)(x^2 - 7x + 3)$$

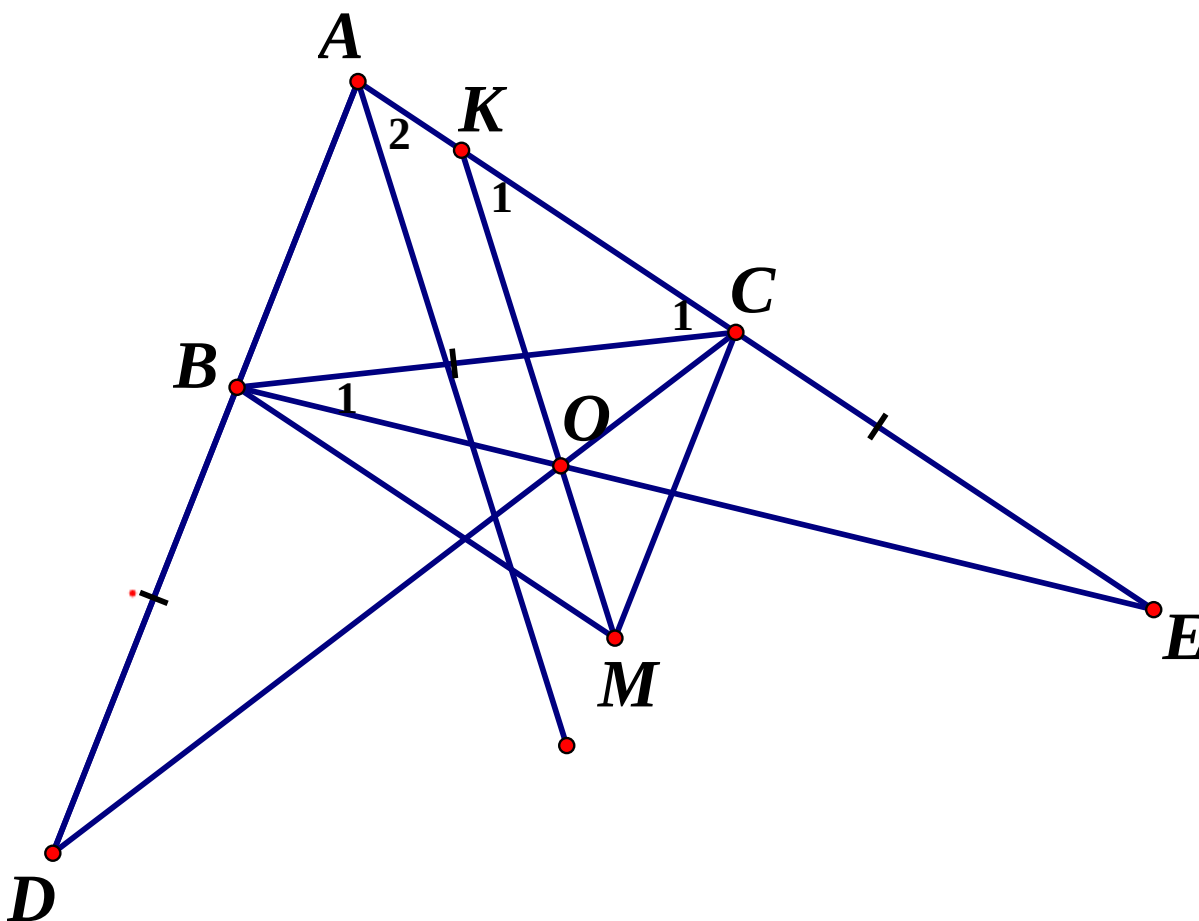
$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 4x^2 - 18x + 9} = \frac{(x + 3)(x - 2)}{(x + 3)(x^2 - 7x + 3)} = \frac{x - 2}{x^2 - 7x + 3} \quad (x \neq -1; x^2 - 7x + 3 \neq 0)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{b) Vi} \Rightarrow \frac{1}{z^3} &= -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{z^3} = -\left(\frac{1}{x^3} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y} + 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3}\right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = -3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = 3 \cdot \frac{1}{xyz} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = 3 \Leftrightarrow \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = 3 \Leftrightarrow \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$$

Bài 3.



Vẽ hình bình hành $ABMC$ ta có: $AB = CM$

Để chứng minh $AB = KC$ ta cần chứng minh $KC = CM$.

Thật vậy, xét tam giác BCE có $BC = CE$ (*gt*) $\Rightarrow \triangle CBE$ cân tại $C \Rightarrow B_1 = E$

Vì góc C_1 là góc ngoài của tam giác BCE

$\Rightarrow C_1 = B_1 + E \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}C_1$ mà $AC \parallel BM$ (ta vẽ) $\Rightarrow C_1 = CBM \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}CBM$ nên BO là

tia phân giác của CBM . Hoàn toàn tương tự ta có CD là tia phân giác của BCM . Trong tam giác BCM , OB , CO , MO đồng quy tại O

$\Rightarrow MO$ là tia phân giác của CMB

Mà BAC, BMC là hai góc đối của hình bình hành $BMCA \Rightarrow MO \parallel$ với tia phân giác của góc A theo giả thiết tia phân giác của góc A còn song song với OK

$\Rightarrow K, O, M$ thẳng hàng

Ta lại có: $M_1 = \frac{1}{2}BMC$ (*cmt*); $A = M \Rightarrow M_1 = A_2$ mà $A_2 = K_1$ (2 góc đồng vị)

$$\Rightarrow K_1 = M_1 \Rightarrow \Delta CKM \text{ cân tại } C \Rightarrow CK = CM.$$

$$\text{Kết hợp } AB = CM \Rightarrow AB = CK \quad (dfcm)$$

Bài 4.

$$\text{Ta có } M = 4x^2 + 4x + 5 = (4x^2 + 4x + 1) + 4 = (2x + 1)^2 + 4$$

$$\text{Vì } (2x + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x + 1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow M \geq 4$$

$$\text{Vậy } \min_M = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

PHÒNG GD&ĐT TP PLEIKU
TRƯỜNG THCS BÙI THỊ XUÂN
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8
NĂM HỌC 2015-2016
Thời gian làm bài: 90 phút (không kể giao đề)

Bài 1. (2 điểm) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) x^2 - 6xy + 9y^2 - 49$$

$$b) x^2 - 6x + 5$$

$$\text{Bài 2. (1,5 điểm)} \text{ Thực hiện phép tính: } A = \frac{1}{x-2} + \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 10} - \frac{2x - 4}{x - 5}$$

$$\text{Bài 3. (1,5 điểm)} \text{ Giải phương trình: } \frac{x + 2005}{4} + \frac{x + 2004}{5} = \frac{x + 4}{2005} + \frac{x + 5}{2004}$$

Bài 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của cạnh AB, AC. Vẽ

$BE \perp MN, CF \perp MN$ (E, F thuộc đường thẳng MN)

a) Chứng minh rằng: Tứ giác BEFC là hình chữ nhật

b) Chứng minh rằng : $S_{BEFC} = S_{ABC}$

Bài 5. (2 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$), đường phân giác AD . Qua trung điểm M của BC , kẻ đường thẳng song song với AD , cắt AC và AB theo thứ tự ở E và K . Chứng minh rằng:

a) $AE = AK$ b) $BK = CE$

Bài 6. (1 điểm) Chứng minh rằng: $n^3 + 3n^2 + 2n : 6$ với mọi số nguyên n

ĐÁP ÁN

Bài 1a)

$$\begin{aligned} x^2 - 6xy + 9y^2 - 49 &= (x^2 - 6xy + 9y^2) - 7^2 \\ &= (x - 3y)^2 - 7^2 = (x - 3y - 7)(x - 3y + 7) \end{aligned}$$

Bài 1b)

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= x^2 - x - 5x + 5 \\ &= x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(x - 5) \end{aligned}$$

Bài 2.

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 10 &= (x - 5)(x - 2) \\ A &= \frac{1}{x - 2} + \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 10} - \frac{2x - 4}{x - 5} = \frac{1}{x - 2} + \frac{x^2 - x - 2}{(x - 5)(x - 2)} - \frac{2x - 4}{x - 5} \\ &= \frac{x - 5 + x^2 - x - 2 - (2x - 4)(x - 2)}{(x - 5)(x - 2)} = \frac{-x^2 + 8x - 15}{(x - 5)(x - 2)} = \frac{-(x - 5)(x - 3)}{(x - 5)(x - 2)} = \frac{-x + 3}{x - 2} \end{aligned}$$

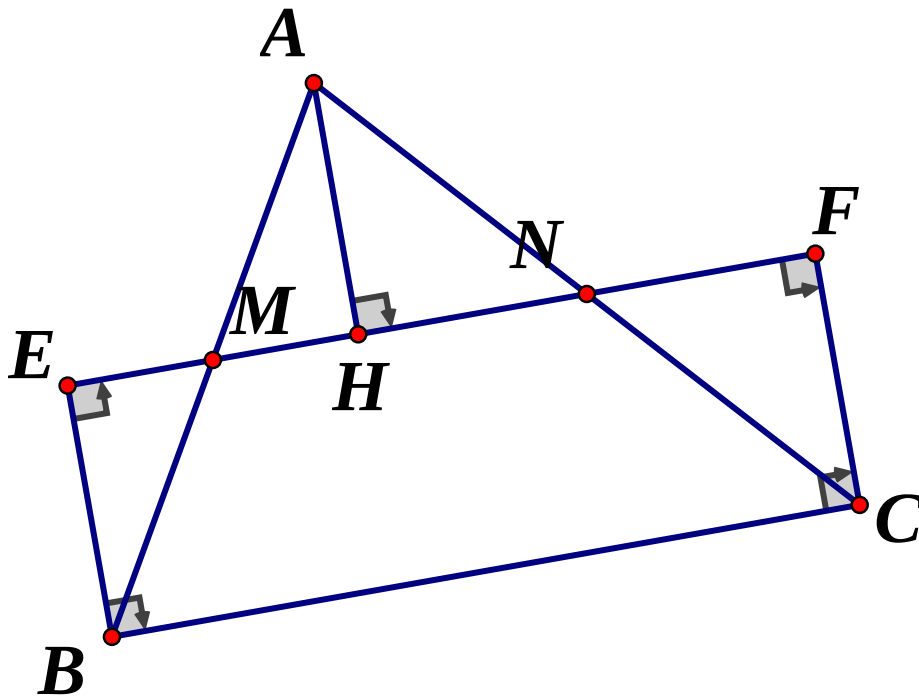
Bài 3.

$$\begin{aligned}
 a) & \frac{x+2005}{4} + \frac{x+2004}{5} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{x+2005}{4} + 1 \right) + \left(\frac{x+2004}{5} + 1 \right) = \left(\frac{x+4}{2005} + 1 \right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1 \right) \\
 \Leftrightarrow & \frac{x+2009}{4} + \frac{x+2009}{5} - \frac{x+2009}{2005} - \frac{x+2009}{2004} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x+2009) \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\forall i \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} \neq 0 \Rightarrow x+2009=0 \Leftrightarrow x=-2009$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2009$

Bài 4.



a) Ta có MN là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel BC$

Mặt khác : $BE \perp EF; CF \perp EF \Rightarrow BE \parallel CF$ & $\angle BEF = 90^\circ$

Vậy $BEFC$ là hình chữ nhật

b) Kẻ $AH \perp MN$

Xét $\triangle AHM$ vuông tại H và $\triangle BEM$ vuông tại E có:

$$AMH = BME; AM = BM$$

$$\Rightarrow \triangle AHM = \triangle BEM \text{ (Cạnh huyền – góc vuông)}$$

$$\Rightarrow S_{AHM} = S_{BEM} \text{ (1)}$$

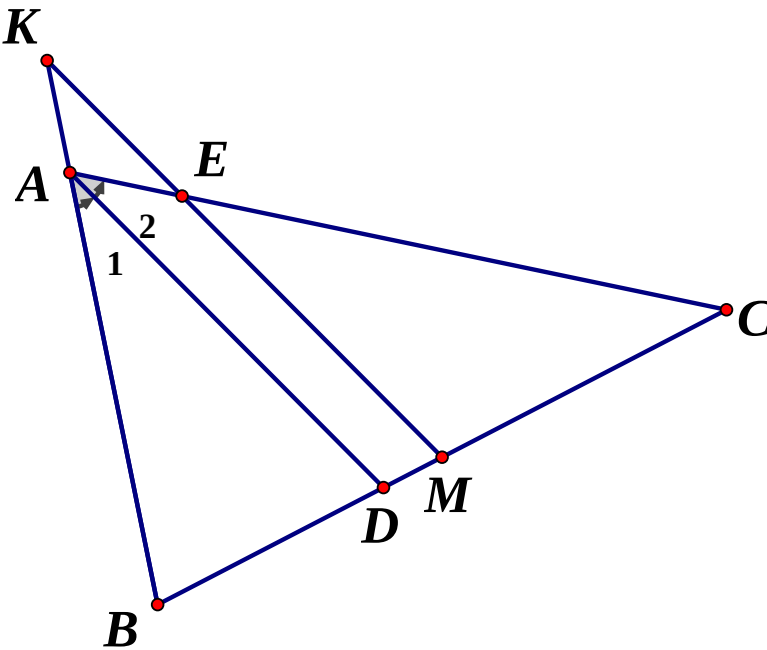
$$\text{Chứng minh tương tự, ta có: } \triangle AHN = \triangle CFN \Rightarrow S_{AHN} = S_{CFN} \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } S_{AHM} + S_{AHN} = S_{BEM} + S_{CFN}$$

$$\text{Mà } S_{BEFC} = S_{BEM} + S_{BMNC} + S_{CFN}; S_{ABC} = S_{BMNC} + S_{AHM} + S_{AHN}$$

$$\Rightarrow S_{BEFC} = S_{ABC}$$

Bài 5.



a) $K = A_1$ (đồng vị); $AEK = A_2$ (so le trong)

Mà $A_1 = A_2$ (AD là tia phân giác) $\Rightarrow AEK = K \Rightarrow \triangle AEK$ cân tại A

$$\Rightarrow AE = AK$$

b)

$$\text{Vì } MK \parallel AD \text{ nên: } \frac{AK}{BK} = \frac{DM}{BM} \Rightarrow \frac{AK}{DM} = \frac{BK}{BM} \text{ (1)}$$

$$\text{Vì } AD // EM \text{ nên: } \frac{CE}{AE} = \frac{CM}{DM} \Rightarrow \frac{CE}{CM} = \frac{AE}{DM} \quad (2)$$

$$\text{Vì } AK = AE \text{ (c/m a) nên } \frac{AK}{DM} = \frac{AE}{DM} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) } \Rightarrow \frac{BK}{BM} = \frac{CE}{CM}$$

Mà $BM = CM$ (M là trung điểm của BC)

$$\Rightarrow BK = CE$$

Bài 6.

Ta có:

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 + 2n &= n(n^2 + 3n + 2) = n(n^2 + n + 2n + 2) \\ &= n[(n^2 + n) + (2n + 2)] = n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Vì n là số nguyên nên: $n; n+1; n+2$ là ba số nguyên liên tiếp

Do đó có ít nhất một số chia hết cho 2, 1 số chia hết cho 3

$\Rightarrow n(n+1)(n+2):6$ hay $n^3 + 3n^2 + 2n:6$ với mọi số nguyên n

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI**MÔN: TOÁN LỚP 8**

Năm học: 2010-2011

Bài 1. (3 điểm)

Tìm x biết:

a) $x^2 - 4x + 4 = 25$

b) $\frac{x-17}{1990} + \frac{x-21}{1986} + \frac{x+1}{1004} = 4$

c) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

Bài 2. (1,5 điểm)

Cho x, y, z đôi một khác nhau và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{xz}{y^2 + 2xz} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$

Bài 3. (1,5 điểm)

Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

Bài 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC', H là trực tâm.

- a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$
- b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC ; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB . Chứng minh rằng: $AN.BI.CM = BN.IC.AM$
- c) Chứng minh rằng: $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2} \geq 4$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

- a) Tính đúng $x=7; x=-3$
- b) Tính đúng $x=2007$
- c)

$$\begin{aligned}
 4^x - 12 \cdot 2^x + 32 &= 0 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x + 4 \cdot 8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2^x \cdot (2^x - 4) - 8 \cdot (2^x - 4) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 8)(2^x - 4) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 8 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bài 2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{xy + yz + xz}{xyz} = 0 \Leftrightarrow xy + yz + xz = 0 \Rightarrow yz = -xy - xz$$

$$x^2 + 2yz = x^2 + yz - xy - xz = x(x - y) - z(x - y) = (x - y)(x - z)$$

$$\text{Tương tự: } y^2 + 2xz = (y - x)(y - z); z^2 + 2xy = (z - x)(z - y)$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{yz}{(x - y)(x - z)} + \frac{xz}{(y - x)(y - z)} + \frac{xy}{(z - x)(z - y)}$$

$$\text{Tính đúng } A = 1$$

Bài 3.

Gọi $\overline{abcd}$ là số phải tìm, $a, b, c, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a, b, c, d \leq 9; a \neq 0$

Ta có:
$$\begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} = m^2 \end{cases} (k, m \in \mathbb{N}; 31 < k < m < 100)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 1353 = m^2 \end{cases}$$

Do đó: $m^2 - k^2 = 1353$

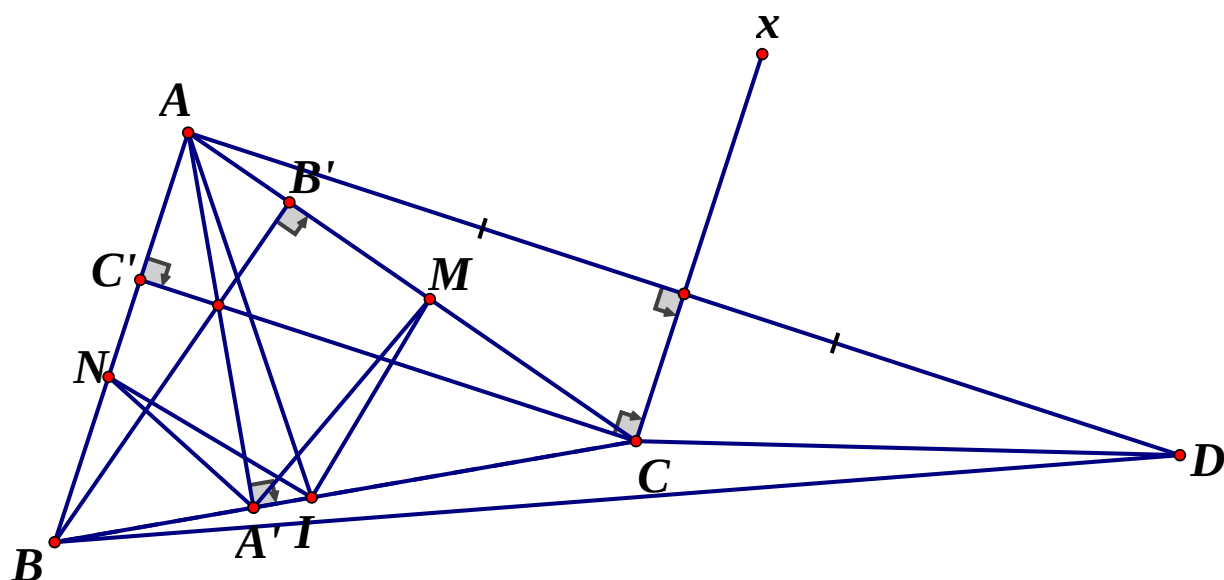
$$\Rightarrow (m+k)(m-k) = 123 \cdot 11 = 41 \cdot 33 (k+m < 200)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+k=123 \\ m-k=11 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m+k=41 \\ m-k=33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=67 \\ k=56 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m=37 \\ k=4 \end{cases}$$

Kết luận đúng: $\overline{abcd} = 3136$

Bài 4.



$$a) \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} HA'.BC}{\frac{1}{2} AA'.BC} = \frac{HA'}{AA'}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}; \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}$$

$$\Rightarrow \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$$

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC :

$$\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$$

$$\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$$

c) Vẽ $Cx \perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

Chứng minh được góc BAD vuông, $CD = AC, AD = 2.CC'$

Xét 3 điểm B, C, D ta có: $BD \leq BC + CD$

$$\Delta BAD \text{ vuông tại } A \text{ nên: } AB^2 + AD^2 = BD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2$$

$$AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2$$

$$4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$$

Tương tự:

$$4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$$

$$4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$$

$$\text{Chứng minh được: } 4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB + BC + AC)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + AC)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow BC = AC, AC = AB, AB = BC \Leftrightarrow AB = AC = BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC: 2018-2019

Môn thi: Toán – Lớp 8

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho ba số a, b, c khác nhau đôi một và khác 0, đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}. \text{ Tính giá trị của biểu thức: } A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2$

2) Cho hai đa thức $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + 1$, $Q(x) = 2x^2 + x - 1$. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các nghiệm của $P(x)$. Tính giá trị của $Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 2$ là ước số của $n^6 + 206$.

2) Cho a, b, c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Câu 4. (7,0 điểm)

1) Cho hình vuông $ABCD$, gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C , dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB , d cắt AH tại E . Đường thẳng AH cắt DC tại F .

a) Chứng minh rằng $BM = ND$.

b) Tứ giác $EMFN$ là hình gì

c) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC

2) Cho tam giác ABC có $BAC = 90^\circ$, $ABC = 20^\circ$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC , AB sao cho $ABE = 10^\circ$ và $ACF = 30^\circ$. Tính CFE

Câu 5. (3,0 điểm)

1) Cho các số thực $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

2) Cho hình vuông $ABCD$ và 9 đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông $ABCD$ thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 3 đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

Nếu $a + b + c = 0$ thì $a + b = -c, b + c = -a, c + a = -b$

$$\text{Do đó, } \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = -1 \Rightarrow A = \frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} = -1$$

$$\text{Nếu } a + b + c \neq 0 \text{ thì } \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b+b+c+c+a}{c+a+b} = 2$$

Do đó, $a + b = 2c, b + c = 2a, c + a = 2b \Rightarrow a = b = c$, trái giả thiết

Vậy $A = -1$

Câu 2.

2.1 Điều kiện $x \neq 0; x \neq -1$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} + \frac{(x+1)^2 - 3(x+1) + 2}{(x+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} + \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{x+1}{x^2} + \frac{x}{(x+1)^2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[(x+1)^3 + x^3 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1}{2} (tm) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 1; \frac{-1}{2} \right\}$

2.2

Ta có : $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$

$$Q(x) = 2 \left(\frac{1}{2} - x \right) (-1 - x)$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 & Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5) \\
 &= 2^5 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - x_1 \right) \left(\frac{1}{2} - x_2 \right) \left(\frac{1}{2} - x_3 \right) \left(\frac{1}{2} - x_4 \right) \left(\frac{1}{2} - x_5 \right) \right] \\
 & \quad \times \left[(-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3)(-1 - x_4)(-1 - x_5) \right] \\
 &= 32.P\left(\frac{1}{2}\right).P(-1) = 32.\left(\frac{1}{32} - \frac{5}{8} + 2 + 1\right)(-1 + 5 - 4 + 1) = 77
 \end{aligned}$$

Câu 3.

3.1

$$n^2 + 2 \text{ là ước số của } n^6 + 206 \Leftrightarrow \frac{n^6 + 206}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{n^6 + 8 + 198}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n^4 + 2n^2 + 4 + \frac{198}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z}$$

Điều này xảy ra khi $n^2 + 2$ là ước nguyên dương của $198 = 2.3^2.11$ gồm:

2;3;6;9;11;18;22;33;66;99;198

Từ đó ta tìm được $n \in \{1; 2; 3; 4; 8; 14\}$

3.2

$$\text{Ta có: } \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (a - c)(b^2 - ac) = 0 \Rightarrow b^2 = ac$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c + b)(a + c - b)$$

Ta thấy $a^2 + b^2 + c^2 > 3$ do đó nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là các số nguyên tố thì xảy ra các trường hợp sau:

$$1) a + c - b = 1; a + c + b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a - 1)^2 + (c - 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \quad (k\text{tm})$$

$$2) a + c + b = 1, a + c - b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (c-1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \quad (ktm)$$

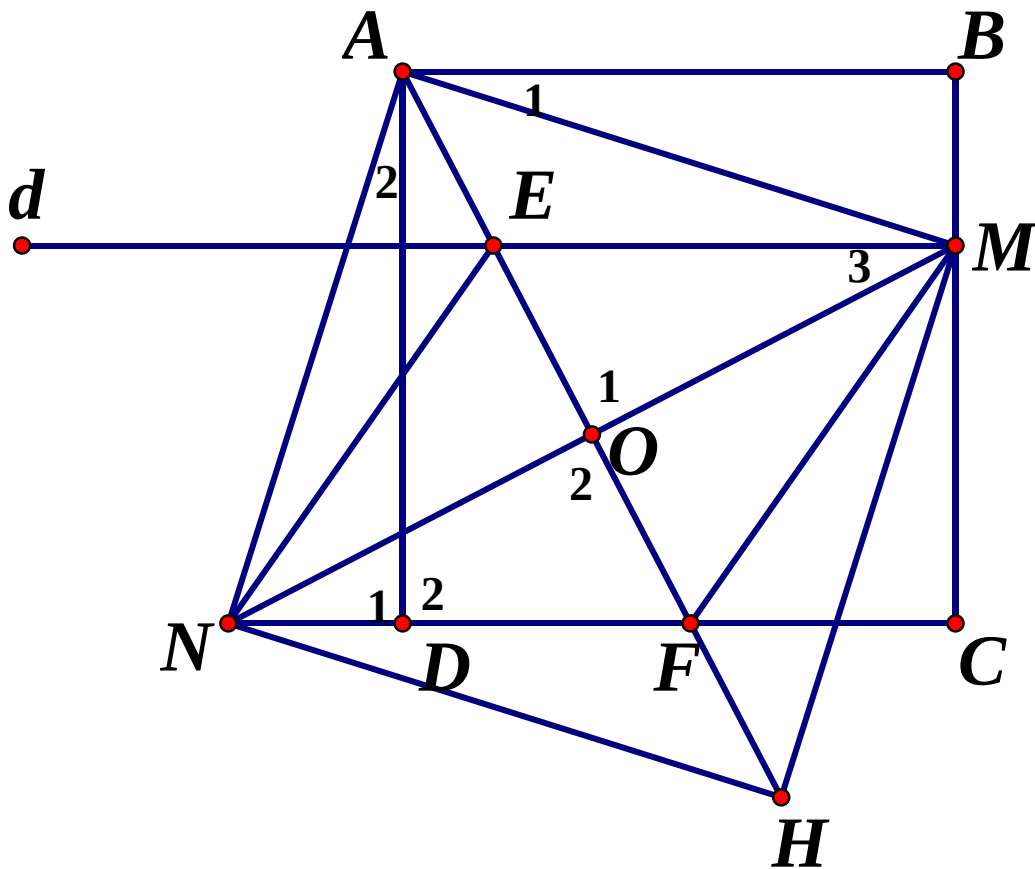
$$3) a + c + b = -1, a + c - b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \quad (ktm)$$

$$4) a + c - b = -1, a + c + b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \quad (ktm)$$

Câu 4.



4.1

a) Do ABCD là hình vuông nên $\Rightarrow \angle A_1 + \angle MAD = 90^\circ (1)$

mà AMHN là hình vuông $\Rightarrow \angle A_2 + \angle MAD = 90^\circ (2)$

Từ (1);(2) suy ra $A_1 = A_2$

Do đó, $\triangle AND = \triangle AMB (c.g.c) \Rightarrow B = D_1 = 90^0$ và $BM = ND$

b) Do $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow D_2 = 90^0$

$\Rightarrow NDC = D_1 + D_2 = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow N, D, C$ thẳng hàng

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AH, MN của hình vuông $AMHN$.

$\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow AH$ là đường trung trực đoạn MN , mà $E, F \in AH$

$\Rightarrow EN = EM$ và $FM = FN$ (3)

$\triangle EOM = \triangle FON (OM = ON; N_1 = M_3) \Rightarrow O_1 = O_2 \Rightarrow EM = FN$ (4)

Từ (3);(4) $\Rightarrow EM = NE = NF = FM \Rightarrow MEMF$ là hình thoi (5)

c) Từ (5) suy ra $FM = FN = FD + DN$

Mà $DN = MB \Rightarrow MF = DF + BM$

Gọi chu vi tam giác MCF là p và cạnh hình vuông là a

Ta có:

$$P = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF \text{ (Vì } MF = DF + MB)$$

$$= (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a$$

Do đó, chu vi tam giác MCF không đổi khi M thay đổi trên BC

4.2

Xét $\triangle ABC$ có $BAC = 90^0, ABC = 20^0 \Rightarrow ACB = 70^0$

$\triangle ACF$ có $CAF = 90^0, ACF = 30^0 \Rightarrow FC = 2.AF$

Gọi D là trung điểm của BC và G là điểm trên AB sao cho $GD \perp BC$.

$$\text{Khi đó, } \triangle ABC \sim \triangle DBG \Rightarrow \frac{BD}{BG} = \frac{BA}{BC}$$

$$GCB = GBC = 20^\circ \Rightarrow GCF = 20^\circ$$

Do đó CG và BE lần lượt là tia phân giác của BCF và ABC nên:

$$\frac{FC}{FG} = \frac{BC}{BG}; \frac{BA}{BC} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{Do đó, } \frac{AF}{FG} = \frac{\frac{1}{2}FC}{FG} = \frac{\frac{1}{2}BC}{BG} = \frac{BD}{BG} = \frac{BA}{BC} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AF}{FG} = \frac{AE}{EC}$$

Từ đó suy ra $CG \parallel EF$ (Định lý Talet đảo) $\Rightarrow CFE = GCF = 20^\circ$

Câu 5.

5.1

$$\text{Ta có: } (a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 2a-1 \Rightarrow \frac{1}{2a-1} \geq \frac{1}{a^2}$$

$$\text{Nên VT} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} \geq \frac{8}{(a+b)^2}; \frac{8}{(a+b)^2} + 2 \geq \frac{8}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \geq \frac{8}{a+b}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \geq \frac{8}{b+c}; \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + 2 \geq \frac{8}{c+a}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

$$\text{Do vậy, } \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

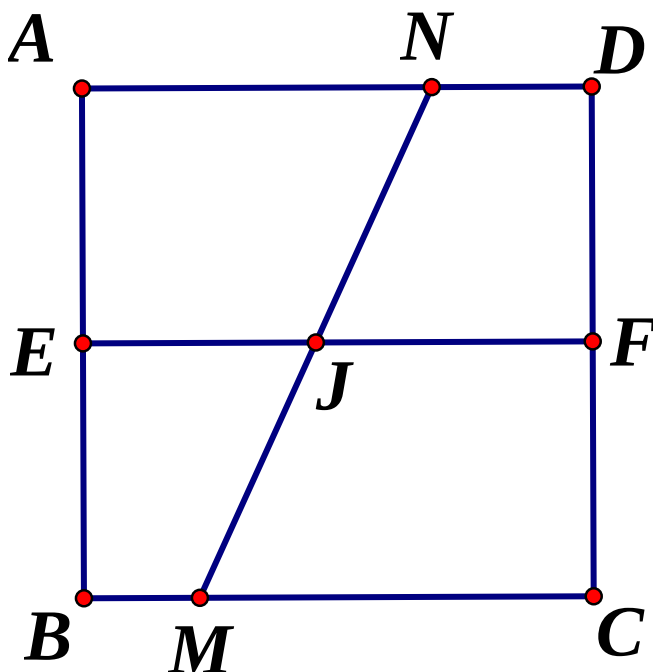
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

5.2

Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi vì nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và ngũ giác (chứ không phải chia hình vuông thành hai tứ giác)

Do đó, mỗi đường thẳng (trong số chín đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và không đi qua một đỉnh nào của hình vuông cả.

Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối BC và AD tại các điểm M và N

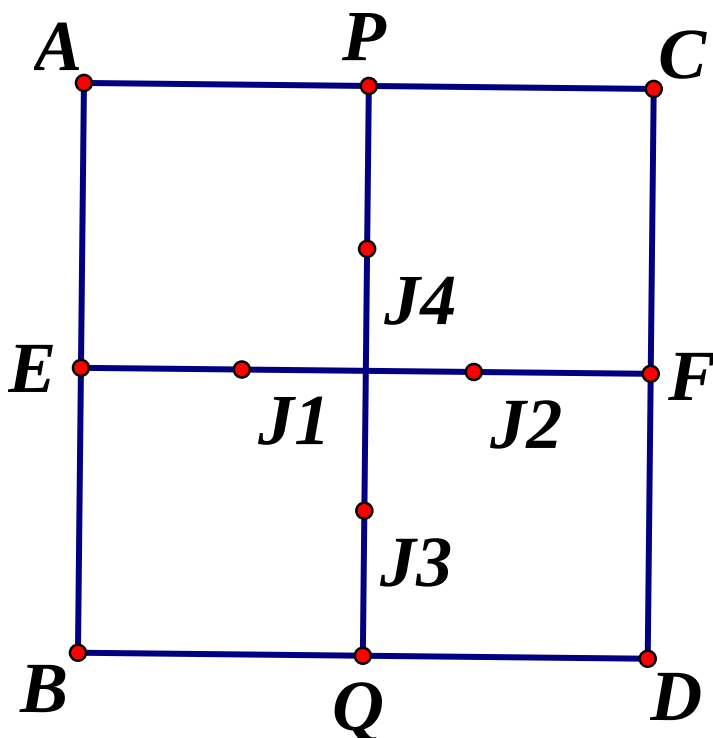


$$\text{Ta có: } \frac{S_{ABMN}}{S_{MCND}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot (BM + AN)}{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot (MC + ND)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EJ}{JF} = \frac{2}{3}$$

(ở đây E và F là các trung điểm của AB và CD tương ứng)

Gọi E, F, P, Q tương ứng là các trung điểm của AB, CD, BC, AD . Gọi J_1, J_2, J_3, J_4 là các điểm sao cho J_1, J_2 nằm trên EF , J_3, J_4 nằm trên PQ và thỏa mãn:

$$\frac{EJ_1}{J_1F} = \frac{FJ_2}{J_2F} = \frac{PJ_3}{J_3Q} = \frac{QJ_4}{J_4P} = \frac{2}{3}$$



Khi đó từ đó lập luận trên ta suy ra mỗi đường thẳng có tính chất thỏa mãn yêu cầu của đề bài phải đi qua một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 nói trên. Vì có 9 đường thẳng, nên theo nguyên lý Dirichle phải tồn tại ít nhất một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 sao cho nó có ít nhất ba trong 9 đường thẳng đã cho đi qua

Vậy có ít nhất 3 đường thẳng trong 9 đường thẳng đã cho đi qua một điểm.

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TRỰC NINH**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC : 2017-2018**

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN TOÁN LỚP 8

Thi ngày 04 tháng 4 năm 2018

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

b) $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$

2) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$$

Bài 2. (3,0 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

- b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$ sao cho tích $x.y$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3. (3,0 điểm)

- a) Tìm đa thức $f(x)$, biết $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, chia cho $x - 2$ dư 24, chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư
- b) Cho p và $2p + 1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p + 1$ là hợp số

Bài 4. (8,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AD là tia phân giác của BAC . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC , E là giao điểm của BN và DM , F là giao điểm của CM và DN .

- 1) Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF \parallel BC$.
- 2) Gọi H là giao điểm của BN và CM . Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle NFA$ và H là trực tâm $\triangle AEF$
- 3) Gọi giao điểm của AH và DM là K , giao điểm của AH và BC là O , giao điểm của BK và AD là I . Chứng minh: $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} > 9$

Bài 5. (2,0 điểm)

- a) Cho $x > 0, y > 0$ và m, n là hai số thực. Chứng minh rằng $\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y}$

- b) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1)

$$\begin{aligned} a) & x^3 - x^2 - 14x + 24 \\ &= x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 12x + 24 \\ &= x^2(x-2) + x(x-2) - 12(x-2) \\ &= (x^2 + x - 12)(x-2) \\ &= (x-2)(x-3)(x+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b) x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018 \\
& = x^4 + 2017x^2 + x^2 + 2017x + 2017 + 1 \\
& = (x^4 + x^2 + 1) + 2017(x^2 + x + 1) \\
& = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2017(x^2 + x + 1) \\
& = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2018)
\end{aligned}$$

2) Với $x + y = 1$ và $xy \neq 0$ ta có:

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} = \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)} \\
& = \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1)} \\
& = \frac{(x - y)[(x + y)(x^2 + y^2) - 1]}{xy(x^2y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + 2)} \\
& = \frac{(x - y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy(x^2y^2 + (x + y)^2 + 2)} \\
& = \frac{(x - y)[x(x - 1) + y(y - 1)]}{xy(x^2 + y^2 + 3)} = \frac{-2(x - y)}{x^2y^2 + 3}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2y^2 + 3} = 0$$

Bài 2.

a)

$$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x + y) = (x + 1)(x + 2) (*)$$

VT (*) là số chính phương, VP (*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = 2$$

b)

Điều kiện $x \neq 0$

$$2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy = 2$$

$$\forall \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0; \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \neq 0; \text{ mọi } y$$

Do đó $xy \leq 2$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x=1; y=2 \\ x=2; y=1 \\ x=-1; y=-2 \\ x=-2; y=-1 \end{cases}$$

Bài 3.

a)

Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và dư $ax + b$

$$\text{Khi đó } f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + xa + b$$

$$\text{Theo đề ta có: } \begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + \frac{7}{2}x + 17$$

$$\text{Vậy } f(x) = -5x^2 + \frac{47}{2}x + 17$$

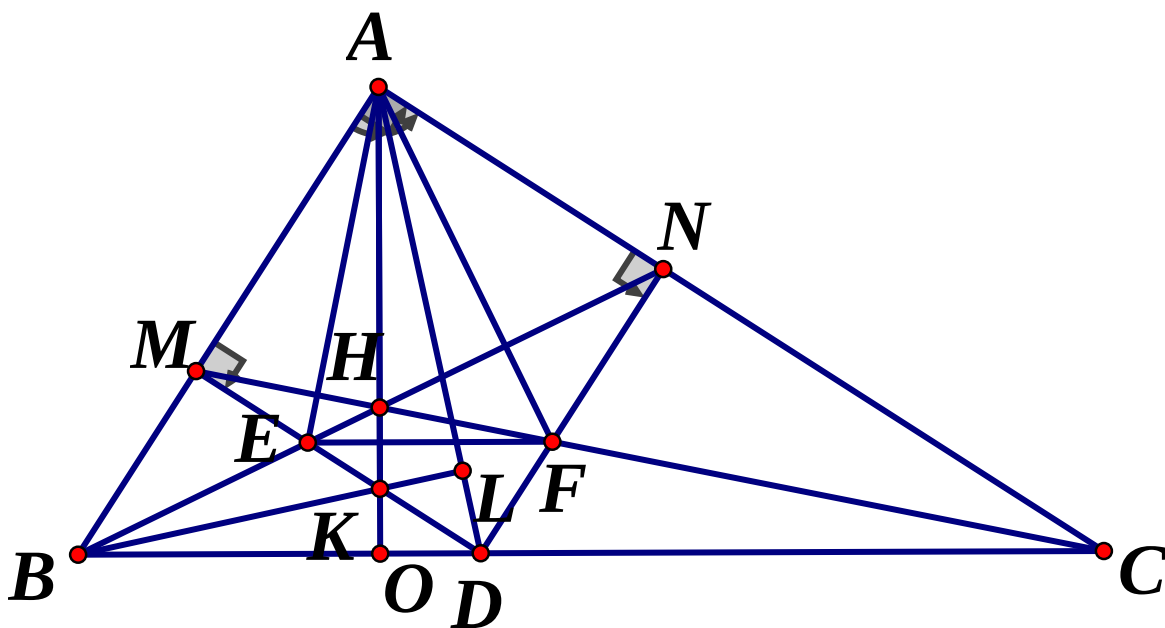
b) Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p = 3k + 1$; $p = 3k - 1$ với $k > 1$
+ Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$

Suy ra $2p + 1$ là hợp số (vô lý)

+ Nếu $p = 3k - 1, k > 1$ thì $4p + 1 = 12k - 3 = 3(4k - 1)$

Do $k > 1$ nên $4k - 1 > 3$. Do đó $4p + 1$ là hợp số.

Bài 4.



1) *Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông

+) Chứng minh $AMD = 90^\circ$; $AND = 90^\circ$; $MAN = 90^\circ$

Suy ra tứ giác AMDN là hình chữ nhật

+) Hình chữ nhật AMDN có AD là phân giác của $\angle MAN$ nên tứ giác AMDN là hình vuông.

***Chứng minh $EF \parallel BC$**

+) Chứng minh : $\frac{FM}{FC} = \frac{DB}{DC}$ (1)

Chứng minh: $\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MA}$ (2)

Chứng minh $AM = DN \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DN}$ (3)

Chứng minh $\frac{MB}{DN} = \frac{EM}{ED}$ (4)

Từ (1),(2),(3),(4) suy ra $\frac{EM}{ED} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow EF \parallel BC$

2) Chứng minh $\triangle ANB \sim \triangle NFA$

Chứng minh $AN = DN$.suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB}$ (5)

Chứng minh $\frac{DN}{AB} = \frac{CN}{CA}$ (6)

Chúng minh $\frac{CN}{CA} = \frac{FN}{AM}$ (7)

Chúng minh $AM = AN$. Suy ra $\frac{FN}{AM} = \frac{FN}{AN}$ (8)

Từ (5) (6) (7) (8) suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{FN}{AN} \Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle NFA (c.g.c)$

***chứng minh H là trực tâm tam giác AEF**

Vì $\triangle ANB \sim \triangle NFA$ nên $NBA = FAN$

Mà $BAF + FAN = 90^\circ \Rightarrow NBA + BAF = 90^\circ$

Suy ra $EH \perp AF$, Tương tự: $FH \perp AE$, suy ra H là trực tâm $\triangle AEF$

3) Đặt $S_{AKD} = a, S_{BKD} = b, S_{AKB} = c$. Khi đó:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{AKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{BKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{AKB}} = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$$

$$= 3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$$

Theo định lý AM-GM ta có: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

Tương tự: $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$

Suy ra $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} \geq 9$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABD$ là tam giác đều, suy ra trái với giả thiết.

Bài 5.

5a) Với $x > 0, y > 0$ và $m, n \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (m^2y + n^2x)(x+y) \geq xy(m+n)^2$$

$$\Leftrightarrow (nx - my)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

5b) Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n+p)^2}{x+y+z} \quad (2)$$

Ta có:
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{do } abc=1)$$

Hay
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{3}{2}$$

Do đó:
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

**PHÒNG GD&ĐT
HUYỆN THỌ XUÂN**

**KỲ THI CHỌN HSG CẤP HUYỆN
NĂM HỌC : 2017 – 2018**

Môn: Toán – Lớp 8

Ngày thi: 08 tháng 4 năm 2018

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho biểu thức :
$$P = \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{x^2 - 4y^2}{x + 2y} \right) : \left(\frac{2}{y^2x} - \frac{3}{x^2y} \right)$$

- Rút gọn biểu thức P
- Tính giá trị biểu thức P khi x, y thỏa mãn ; $|x| + |y| = 6; x^2 + y^2 = 26$
- Nếu x, y là các số thực dương làm cho P xác định và thỏa mãn: $x + y = 2$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P

Câu 2. (4,0 điểm)

- Lúc 7 giờ sáng một xe buýt đi từ vị trí A đến vị trí B với độ dài là 60 km. Khi đi tới vị trí C cách vị trí A 39km thì xe bị hỏng. Xe phải dừng lại và sửa chữa mất 15 phút, sau đó xe tiếp tục đi từ C đến B với vận tốc giảm hơn so với vận tốc đi từ A tới C là 3km/h . Tổng thời gian xe đi từ A đến B hết $\frac{11}{6}$ giờ (tính cả thời gian dừng lại sửa xe). Hỏi xe buýt bị hỏng lúc mấy giờ ?
- Giải phương trình

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

- a) Tìm tất cả các số nguyên n sao cho: $4n^3 + n + 3$ chia hết cho $2n^2 + n + 1$
 b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ sao cho: $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 40 = 0$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên cạnh AC lấy điểm M bất kỳ, sao cho M khác A và C . Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE = CM$

- a) Gọi O là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh $\triangle OEM$ vuông cân
 b) Đường thẳng qua A và song song với ME , cắt tia BM tại N . Chứng minh :
 $CN \perp AC$
 c) Gọi H là giao điểm của OM và AN . Chứng minh rằng tích $AH \cdot AN$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên cạnh AC .

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1a)

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{x^2 - (2y)^2}{x + 2y} \right) : \left(\frac{2x - 3y}{x^2 y^2} \right) \\ &= \left[\frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} + \frac{(x - 2y)(x + 2y)}{x + 2y} \right] : \frac{2x - 3y}{x^2 y^2} \\ &= (x - y + x - 2y) \cdot \frac{x^2 y^2}{2x - 3y} \\ &= (2x - 3y) \cdot \frac{x^2 y^2}{2x - 3y} = x^2 y^2 \end{aligned}$$

1b)

Điều kiện : $x \neq 0; y \neq 0; x \neq \frac{3}{2}y; x \neq -2y$

Ta có:

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2 \Leftrightarrow 6^2 = 26 + 2|x||y| \Leftrightarrow |x||y| = 5$$

Vậy $P = 5^2 = 25$

1c)

Với x, y dương và thỏa mãn điều kiện $x \neq 0; y \neq 0; x \neq \frac{3}{2}; x \neq -2y$ ta có:

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = 1 \text{ (vì } x+y=2\text{)}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x=y=1$$

Vậy GTLN của P bằng 1 $\Leftrightarrow x=y=1$

Câu 2.

a) Gọi vận tốc của xe buýt khi đi từ A đến C là $x(km/h; x > 3)$ thì vận tốc của xe buýt khi đi từ C đến B là $(x-3)(km/h)$

Thời gian để xe buýt đi hết quãng đường AC là $\frac{39}{x}(h)$, thời gian để xe buýt đi hết quãng

đường CB là $\frac{21}{x-3}(h)$. Thời gian dừng lại sửa xe là 15 phút $= \frac{1}{4}(h)$

Theo bài ta có phương trình: $\frac{39}{x} + \frac{21}{x-3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{6}$

$$\text{Giải ra được } \begin{cases} x = 39(tm) \\ x = \frac{36}{19}(ktm) \end{cases}$$

Vậy khi đi từ A tới C xe buýt đi với vận tốc $39km/h$, suy ra thời gian để xe buýt đi hết quãng đường AC là : $39:39=1(\text{giờ})$

Do đó đúng 8 giờ sáng thì xe buýt bị hỏng.

b) Giải phương trình

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3} \quad (x \neq -1; -2; -3; -4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2+1}{x+1} + \frac{(x+4)^2+4}{x+4} = \frac{(x+2)^2+2}{x+2} + \frac{(x+3)^2+3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow x+1 + \frac{1}{x+1} + x+4 + \frac{4}{x+4} = x+2 + \frac{2}{x+2} + x+3 + \frac{3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+4} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4+4x+4}{x^2+5x+4} = \frac{2x+6+3x+6}{x^2+5x+6}$$

$$\Rightarrow (5x+8)(x^2+5x+6) = (5x+12)(x^2+5x+4)$$

$$\Leftrightarrow 5x^3+33x^2+70x+48 = 5x^3+37x^2+80x+48$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+10x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0(tm) \\ x=-\frac{5}{2}(tm) \end{cases}$$

Câu 3.

3a)

Ta có: $\frac{4n^3+n+3}{2n^2+n+1} = 2n-1 + \frac{4}{2n^2+n+1}$

Vì n là số nguyên nên $2n-1$ là số nguyên. Do đó để $4n^3+n+3$ chia hết cho $2n^2+n+1$ thì $2n^2+n+1$ phải là ước số của 4

Mặt khác: $2n^2+n+1 = 2\left[n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(n + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] > 0$

Do đó: $2n^2+n+1=1$ hoặc $2n^2+n+1=2$ hoặc $2n^2+n+1=4$

Giải từng trường hợp suy ra: $\begin{cases} n=0 \\ n=-1 \\ n=1 \end{cases}$

3b) Ta có:

$$3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - (x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1) = -41$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 - (2x)^2 = 41$$

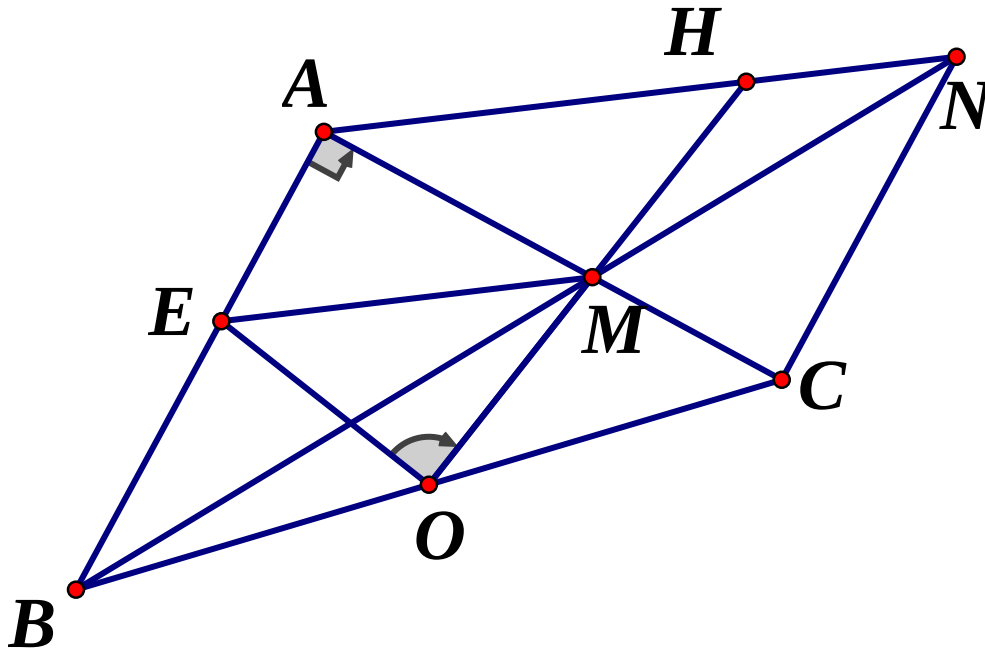
$$\Leftrightarrow (3x + y + 1)(y - x + 1) = 41$$

Đặt : $3x + y + 1 = a$ và $y - x + 1 = b$. Suy ra a và b là các ước của 41, có tích bằng 41. Nhận thấy 41 là số nguyên tố, từ đó ta có các trường hợp như bảng sau:

a	-41	-1	1	41
b	-1	-41	41	1
$x = \frac{a - b}{4}$	-10	10	-10	10
$y = \frac{a + 3b - 4}{4}$	-12	-32	30	10

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(-10; -12); (10; -32); (-10; 30); (10; 10)$

Câu 4



4a. Vì tam giác ABC vuông cân tại A và O là trung điểm của cạnh BC nên AO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC. Suy ra $OA = OC = OB$ và $OAB = ACO = 45^\circ$
 Xét $\triangle OEA$ và $\triangle OMC$ có: $OA = OC$; $OAB = ACO = 45^\circ$; $AE = CM$ (gt)

$$\Rightarrow \triangle OEA = \triangle OMC (c.g.c) \Rightarrow OE = OM \text{ \& } \angle EOA = \angle MOC \quad (1)$$

Vì AO là đường trung tuyến của tam giác cân ABC nên AO cũng là đường cao

$$\Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow \angle AOM + \angle MOC = \angle AOC = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\angle AOM + \angle AOE = \angle EOM = 90^\circ$

Vì $OE = OM$ & $\angle EOM = 90^\circ$ nên $\triangle OEM$ vuông cân tại O

4b.

Vì $ME \parallel AN$ nên theo định lý Ta – let ta có: $\frac{BM}{MN} = \frac{BE}{EA} \quad (3)$

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$, mà $AE = CM$ nên $BE = AM$

Do đó, ở (3) ta thay BE bởi AM, thay EA bởi MC ta được:

$$\frac{BM}{MN} = \frac{AM}{MC} \quad (4) \Rightarrow AB \parallel CN \text{ (Theo định lý Ta let đảo)}$$

Mà $AB \perp AC \Rightarrow CN \perp AC$

4c.

Từ $ME \parallel AN \Rightarrow \angle OME = \angle OHA$ (cặp góc đồng vị)

Mà $\angle OME = 45^\circ$ (vì $\triangle OEM$ vuông cân tại O) suy ra $\angle OHA = 45^\circ = \angle ACB$

Hay $MHA = ACB$. Kết hợp với $OMC = AHM$ (đối đỉnh) (1)

$\Rightarrow \frac{OM}{AM} = \frac{MC}{MH}$, kết hợp $OMA = CMH$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle OMA \sim \triangle CMH$ (c.g.c) $\Rightarrow OAM = MHC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AHC = MHA + MHC = 90^\circ$, suy ra $CH \perp AN$

Xét tam giác AHC và tam giác CAN sẽ đồng dạng theo trường hợp góc góc

$\Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow AH \cdot AN = AC \cdot HC$ không đổi

Câu 5

Chúng minh $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (1)

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) - 3 \\ &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+a}{c+a} + \frac{c+a+b}{a+b} - 3 = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 \end{aligned}$$

Đặt : $x = b+c; y = c+a; z = a+b$. Suy ra $x, y, z > 0$ và ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{1}{2} (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 3 \\ &= \frac{1}{2} \left[9 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) \right] - 3 \\ &= \frac{1}{2} \left[9 + \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(x-z)^2}{xz} + \frac{(y-z)^2}{yz} \right] - 3 \geq \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$(\text{Vì } \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(x-z)^2}{xz} + \frac{(y-z)^2}{yz} \geq 0)$$

Vậy $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

$$\text{Chúng minh : } \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \quad (2)$$

Thật vậy, do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử : $a \geq b \geq c$

Xét hiệu :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \right) - \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \\
 &= \left(\frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c} \right) + \left(\frac{b^2}{c^2+a^2} - \frac{b}{c+a} \right) + \left(\frac{c^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a+b} \right) \\
 &= \frac{(a^2b - ab^2) + (a^2c - ac^2)}{(b^2+c^2)(b+c)} + \frac{(b^2a - ba^2) + (b^2c - bc^2)}{(c^2+a^2)(c+a)} + \frac{(c^2a - ca^2) + (c^2b - cb^2)}{(a^2+b^2)(a+b)} \\
 &= \frac{ab(a-b) + ac(a-c)}{(b^2+c^2)(b+c)} + \frac{-ab(a-b) + bc(b-c)}{(c^2+a^2)(c+a)} + \frac{-ac(a-c) - bc(b-c)}{(a^2+b^2)(a+b)} \\
 &= ab(a-b) \left(\frac{1}{(b^2+c^2)(b+c)} - \frac{1}{(c^2+a^2)(c+a)} \right) \\
 &+ bc(b-c) \left(\frac{1}{(c^2+a^2)(c+a)} - \frac{1}{(a^2+b^2)(a+b)} \right)
 \end{aligned}$$

Vì giá trị của các biểu thức trong ngoặc đều không âm

Vậy $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm . Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

**PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
THANH OAI**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ THI OLYMPIC LỚP 8
Năm học : 2014-2015
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 120 phút**

Câu 1. (6,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} \quad (x \neq \pm 1)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị của x để $A < 0$

2) Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Câu 2. (4,0 điểm)

- 1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$
- 2) Chứng minh rằng nếu $m \neq 5$ thì $m = a^4 + 4$ không là số nguyên tố

Câu 3. (3,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A , biết:

$$A = (x-1)^4 + (x-3)^4 + 6(x-1)^2 \cdot (x-3)^2$$

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

- a) Tính tổng $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$
- b) Chứng minh : $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$
- c) Chứng minh: H cách đều ba cạnh tam giác DEF
- d) Trên các đoạn HB, HC lấy các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$. Chứng minh đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (1,0 điểm)

Tìm số nguyên n sao cho: $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots (2n - 1)$

ĐÁP ÁN**Câu 1.**

1)

a) Với $x \neq -1; 1$ thì

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2) \cdot (1-x) \end{aligned}$$

b) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0 \quad (1)$

Vì $1+x^2 > 0$ với mọi x nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

2)

$$x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x+5)(x+6) = 0 \quad (*)$$

$$\text{Vì } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow (x-5)(x+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-6 \end{cases}$$

Câu 2.

1. $x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x-5) \quad (2)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x-5} \quad (\text{vì } x=5 \text{ không là nghiệm của (2)})$$

$$\Leftrightarrow y = (x+1) + \frac{3}{x+5}$$

Vì x, y nguyên nên $x-5$ là ước của 3 $\Leftrightarrow x-5 \in \{-1; 1; 3; -3\}$ hay $x \in \{4; 6; 8; 2\}$

x	2	6	4	8
y	0	8	0	8

Vậy nghiệm của phương trình $(x; y) = \{(2; 0); (4; 0); (6; 8); (8; 8)\}$

2)

$$\begin{aligned} m &= a^4 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a) \\ &= [(a^2 + 2a + 1) + 1][(a^2 - 2a + 1) + 1] = [(a+1)^2 + 1][(a-1)^2 + 1] \end{aligned}$$

Vì $(a+1)^2 \geq 1 \forall a, (a-1)^2 \geq 0 \forall a$ nên giá trị nhỏ nhất của thừa số thứ nhất là 1 khi $a = -1$

Giá trị nhỏ nhất của thừa số thứ hai là 1 nếu $a = 1$

Còn các trường hợp khác là tích > 1

Vậy ngoài $\begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$ khi đó $m = 5$ thì có thể phân tích thành tích của hai thừa số lớn hơn 1

nên m không thể là số nguyên tố.

Câu 3.

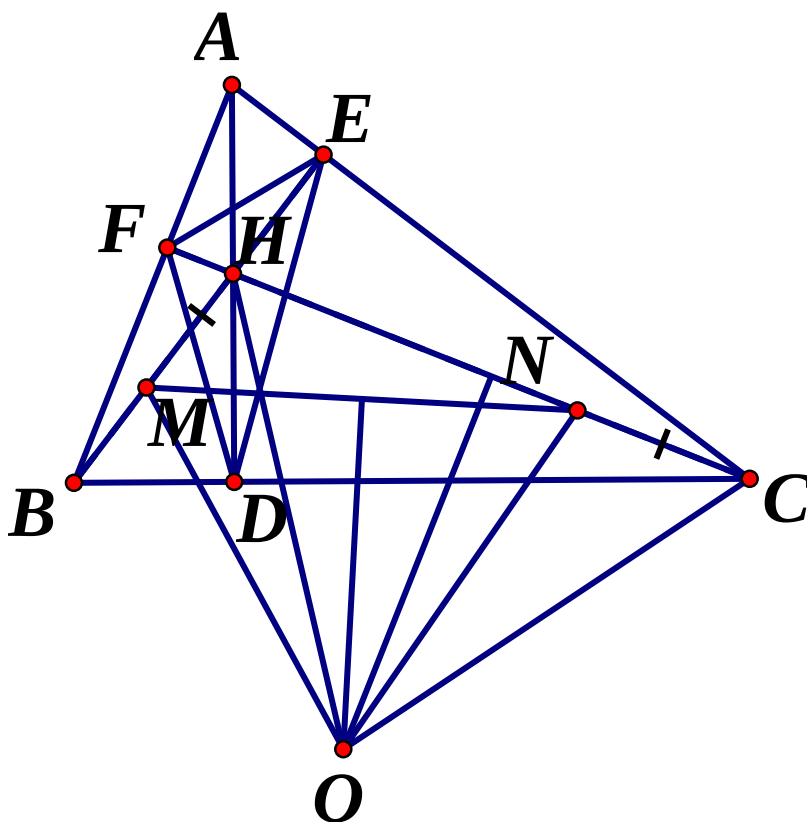
Đặt $a = x - 1, b = 3 - x$ ta có: $a + b = 2$

$$\begin{aligned} A &= a^4 + b^4 + 6(ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2 \\ &= \left[(a + b)^2 - 2ab \right]^2 + 4a^2b^2 = (4 - 2ab)^2 + 4a^2b^2 \\ &= 8a^2b^2 - 16ab + 16 = 8(ab - 1)^2 + 8 \geq 8 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a + b = 2$ và $ab = 1 \Leftrightarrow a = b = 1 \Rightarrow x = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 8 tại $x = 2$

Câu 4.



a) Trước hết chứng minh $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự ta có: $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

$$\text{Nên } \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 1 \Rightarrow \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$$

b) Trước hết chứng minh $\triangle BDH \sim \triangle BEC \Rightarrow BH.BE = BD.BC$

Và $\Delta CDH \sim \Delta CFB \Rightarrow CH.CF = CD.CB$

$$\Rightarrow BH.BE + CH.CF = BC.(BD + CD) = BC^2(dfcm)$$

c) Chứng minh $\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow AEF = ABC$

$$\text{Và } \triangle CDE \sim \triangle CAB \Rightarrow \angle CED = \angle CBA \Rightarrow \angle AEF = \angle CED$$

Mà $EB \perp AC$ nên EB là phân giác của góc DEF

Tương tự : DA, FC là phân giác của các góc EDF và DFE

Vậy H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

Nên H cách đều ba cạnh của tam giác DEF (đpcm)

d) Gọi O là giao điểm của các đường trung trực của hai đoạn MN và HC, ta có

$$\triangle OMH = \triangle ONC \text{ (c.c.c)} \Rightarrow OHM = OCN \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác ta cũng có } \triangle OCH \text{ cân tại O nên } OHC = OCH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $OHC = OCH \Rightarrow HO$ là phân giác của góc BHC

Vậy O là giao điểm của trung trực đoạn HC và phân giác của BHC nên O là điểm cố định

Hay trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định là O

Câu 5. $2n^3 + n^2 + 7n + 1 = (n^2 + n + 4)(2n - 1) + 5$

Để $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1$ thì $5 : 2n - 1$ hay $2n - 1$ là Ư(5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n - 1 = -5 \\ 2n - 1 = -1 \\ 2n - 1 = 1 \\ 2n - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Vậy $n \in \{-2; 0; 1; 3\}$ thì $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n - 1$

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$
2. Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư
2. Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật
- 2) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh rằng $AC = 2EF$

$$3) \text{ Chứng minh rằng : } \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1.1 Ta có:

$$\begin{aligned} & x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 \\ &= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013 \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013 \cdot (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013) \end{aligned}$$

1.2

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\ &= \frac{x \cdot (x-2)^2 + 4x^2}{2(x-2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x+1) \cdot (x+2)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x+1}{x^2} \\ &= \frac{x(x^2 + 4)(x+1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x+1}{2x} \text{ với } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Câu 2.

$$2.1 \text{ Đặt } \begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2011}{11}$

$$2.2 \text{ Ta có: } y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y \quad (1)$$

$$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x+1$

Thay $y = x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

Câu 3.

3.1 Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư $ax + b$

$$\text{Khi đó: } f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + \frac{7}{2}x + 17$$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$

3.2

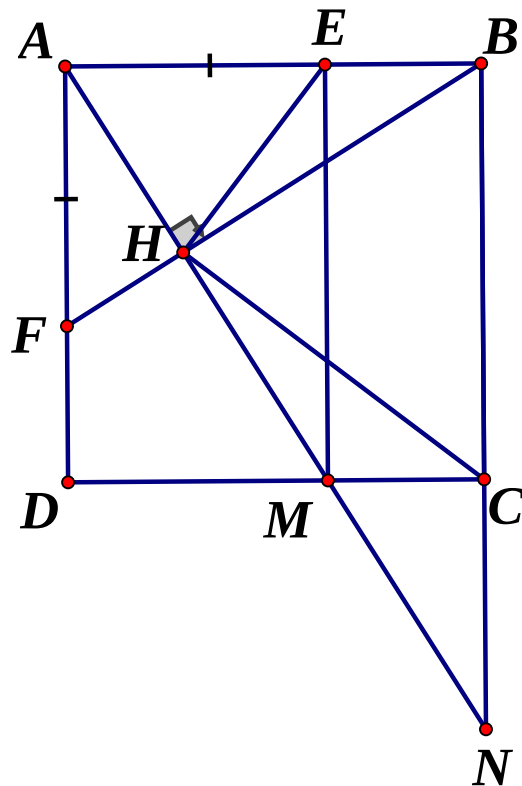
$$\text{Ta có: } a(b-c)(b+c-a^2) + c(a-b)(a+b-c^2) - b(a-c)(a+c-b^2) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{x+z}{2} \\ b=\frac{x+y}{2} \\ c=\frac{y+z}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) x^2 - \frac{1}{4} (x+y)(x-y)z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - z^2) y^2 + \frac{1}{4} (z^2 - y^2) x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2) z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - y^2) z^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2) z^2 = 0 = VP \quad (dpcm) \end{aligned}$$

Câu 4.



1) Ta có: $DAM = ABF$ (cùng phụ với BAH)

$$AB = AD \quad (gt); BAF = ADM = 90^\circ \text{ (ABCD là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow DM = AF, \text{ mà } AF = AE(gt) \text{ nên } AE = DM$$

Lại có: $AE \parallel DM$ (vì $AB \parallel DC$)

Suy ra tứ giác $AEMD$ là hình bình hành. Mặt khác $DAE = 90^\circ(gt)$

Vậy tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật

2) Ta có $\triangle ABH \sim \triangle FAH(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH} \text{ hay } \frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH} \text{ (} AB = BC; AE = AF \text{)}$$

Lại có: $HAB = HBC$ (cùng phụ với ABH)

$$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle AEH(c.g.c)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2, \text{ mà } \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4(gt) \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$$

$$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AB, F \text{ là trung điểm của } AD$$

$$\text{Do đó: } BD = 2EF \text{ hay } AC = 2EF(dfcm)$$

3) Do $AD \parallel CN(gt)$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Lại có: $MC \parallel AB(gt)$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

(Pytago)

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (dfcm)$$

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. (\text{đpcm})$$

**UBND HUYỆN KINH MÔN
PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO**

ĐỀ THI OLYMPIC NĂM HỌC 2017-2018

MÔN: TOÁN – LỚP 8

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1$

2) Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$. Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Câu 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

1) $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

2) $\frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$

2) Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Với giá trị nguyên nào của x thì giá trị của đa thức $f(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức $x^2 + 2$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho O là trung điểm của đoạn AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D .

1) Chứng minh $AB^2 = 4.AC.BD$

2) Kẻ OM vuông góc CD tại M . Chứng minh $AC = CM$

3) Từ M kẻ MH vuông góc AB tại I . Chứng minh BC đi qua trung điểm MH .

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1.1

$$\begin{aligned} & x^2(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1 \\ &= x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 2) + 1 \\ &= (x^4 + x^2)(x^4 + x^2 - 2) + 1 \\ &= (x^4 + x^2)^2 - 2(x^4 + x^2) + 1 \\ &= (x^4 + x^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

1.2

$$4a^2 + b^2 = 5ab$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(4a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 4a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 4a = b \end{cases}$$

Do $2a > b > 0$ nên $4a = b$ loại

$$\text{Với } a = b \text{ thì } C = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$$

Câu 2.

2.1

* Với $x \geq 1$ (*) ta có phương trình

$$x^2 - 3x + 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (Thỏa *)}$$

* Với $x < 1$ (**) ta có phương trình

$$x^2 - 3x + 2 + 1 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$+ x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện **)}$$

$$+ x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (không thỏa mãn điều kiện **)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$

2.2

Xét $x = 0$ không phải là nghiệm

Xét $x \neq 0$

$$\frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2x+1+\frac{3}{x}} - \frac{1}{2x-1+\frac{3}{x}} = 8$$

Đặt $2x + \frac{3}{x} = t$, ta có phương trình:

$$\frac{9}{t+1} - \frac{1}{t-1} = 8$$

$$PT \Leftrightarrow 8t^2 - 8t + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{3}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{95}{16} = 0$$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Câu 3.

3.1

Ta có:

$$x^2 + 2xy + 7(x+y) + 2y^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8xy + 28x + 28y + 8y^2 + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 2y + 7)^2 + 4y^2 = 9(*)$$

Ta thấy $(2x + 2y + 7)^2 \geq 0$ nên $4y^2 \leq 9 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{9}{4}$ do y nguyên nên $y^2 \in \{0; 1\}$

$$\Rightarrow y = \{0; -1\}$$

Với $y = 0$ thay vào $(*)$ ta được: $(2x + 7)^2 = 9$ tìm được $x \in \{-2; -5\}$

Với $y = 1$ thay vào $(*)$ ta có: $(2x + 9)^2 = 5$, không tìm được x nguyên

Với $y = -1$ thay vào $(*)$ ta có $(2x + 5)^2 = 5$ không tìm được x nguyên

$$\text{Vậy } (x; y) = \{(-2; 0); (-5; 0)\}$$

3.2

Chia $f(x)$ cho $x^2 + 2$ được thương là $x - 3$ dư $x + 2$

Để $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$ thì $x + 2$ chia hết cho $x^2 + 2$

$\Rightarrow (x + 2)(x - 2)$ chia hết cho $x^2 + 2$

$\Rightarrow x^2 - 4$ chia hết cho $x^2 + 2$

$\Rightarrow x^2 + 2 - 6$ chia hết cho $x^2 + 2$

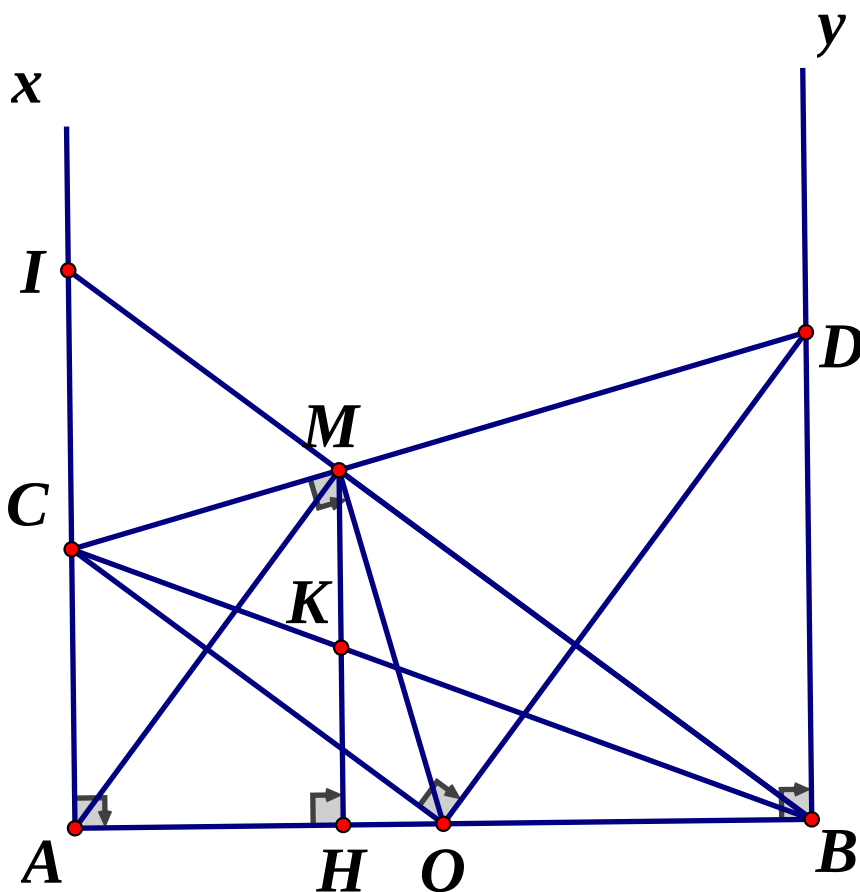
$\Rightarrow 6 : (x^2 + 2) \Rightarrow x^2 + 2$ là ước của 6

Mà $x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x^2 + 2 \in \{3; 6\} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Thử lại ta thấy $x = 1; x = -2$ thỏa mãn

Vậy với $x = 1; x = -2$ thì $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$

Câu 4.



1) Chứng minh $\triangle OAC \sim \triangle DBO (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{OA}{DB} = \frac{AC}{OB} \Rightarrow OA.OB = AC.BD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = AC.BD \Rightarrow AB^2 = 4.AC.BD(dfcm)$$

2) Theo câu a ta có $\Delta OAC \sim \Delta DBO(g.g) \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OB}$

Mà $OA = OB \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{OA}$

Chứng minh $\Delta OCD \sim \Delta ACO(c.g.c) \Rightarrow \angle OCD = \angle ACO$

Chứng minh $\Delta OAC = \Delta OMC(ch - gn) \Rightarrow AC = MC(dfcm)$

3) Ta có: $\Delta OAC = \Delta OMC \Rightarrow OA = OM; CA = CM \Rightarrow OC$ là trung trực của AM
 $\Rightarrow OC \perp AM$

Mặt khác: $OA = OM = OB \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M

$\Rightarrow OC \parallel BM$ (Vì cùng vuông góc với AM) hay $OC \parallel BI$

Chứng minh được C là trung điểm của AI

Do $MH \parallel AI$ theo hệ quả Ta let ta có: $\frac{MK}{IC} = \frac{BK}{BC} = \frac{KH}{AC}$

Mà $IC = AC \Rightarrow MK = HK \Rightarrow BC$ đi qua trung điểm của MH (đpcm)

Câu 5.

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = (x + y + z) \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left(\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16}$$

Theo BĐT Cô si ta có: $\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 2x$

Tương tự: $\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z = 4x$

$\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z = 2y$

$\Rightarrow P \geq \frac{49}{16}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$

Vậy $\min P = \frac{49}{16}$ khi với $x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN HOÀNG HÓA**

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8
Năm học: 2014-2015
Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 16/03/2015

Bài 1. (4,5 điểm)

Cho biểu thức : $Q = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{6x+3}{x^3+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \right) : (x+2)$

a) Tìm điều kiện xác định của Q , rút gọn Q

b) Tìm x khi $Q = \frac{1}{3}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q .

Bài 2. (4,5 điểm)

a) Giải phương trình : $\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$

b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 - 2x^2 - x + 2$

c) Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho : $x^2 = y^2 + 2y + 13$

Bài 3. (4,0 điểm)

a) Cho $abc \neq \pm 1$ và $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$. Chứng minh rằng $a = b = c$

b) Cho số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}, 0 < b < 10$) thì tích ab chia hết cho 6

Bài 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng: $BD \cdot DC = DH \cdot DA$

b) Chứng minh rằng: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

c) Chứng minh rằng: H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

d) Gọi M, N, P, Q, I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB ,

EF, FD, DE . Chứng minh rằng ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = b; BC = a$. Đường phân giác BD của tam giác ABC có độ dài bằng cạnh bên của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}.$$

Bài 6. (1,0 điểm)

Cho $a, b, c > 0; a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$

ĐÁP ÁN**Câu 1.**

a) ĐK: $x \neq -1; x \neq -2$

$$Q = \frac{x^2 - x + 1 + 6x + 3 - 2x - 2}{x^3 + 1} \cdot \frac{1}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

$$b) \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 3 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện suy ra $x = 2$ thì $Q = \frac{1}{3}$

$$c) Q = \frac{1}{x^2 - x + 1}; \text{ Vì } 1 > 0; x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

$$Q \text{ đạt GTLN} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \text{ đạt GTLN} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} (tm). \text{ Lúc đó } Q = \frac{4}{3}$$

Vậy GTLN của Q là $Q = \frac{4}{3}$ khi $x = \frac{1}{2}$

Câu 2. a) ĐK: $x \neq \frac{-1}{2}; x \neq \frac{-7}{2}$

$$\begin{aligned} & \frac{(2x + 3)(2x + 7)}{(2x + 1)(2x + 7)} - \frac{(2x + 5)(2x + 1)}{(2x + 7)(2x + 1)} = \frac{(2x + 7)(2x + 1)}{(2x + 7)(2x + 1)} - \frac{6x^2 + 9x - 9}{(2x + 7)(2x + 1)} \\ & \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 20x + 21 - 4x^2 - 12x - 5}{(2x + 7)(2x + 1)} = \frac{4x^2 + 16x + 7 - 6x^2 - 9x + 9}{(2x + 7)(2x + 1)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x + 16}{(2x + 7)(2x + 1)} = \frac{-2x^2 + 7x + 16}{(2x + 7)}$$

$$\Rightarrow 8x + 16 = -2x^2 + 7x + 16 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (tm) \\ x = -\frac{1}{2} & (ktm) \end{cases}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 0$

b) Ta có

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^3 - 2x^2) - (x - 2) = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$$

c) Ta có:

$$x^2 = y^2 + 2y + 13 \Leftrightarrow x^2 = (y + 1)^2 + 12$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)(x - y - 1) = 12$$

Do $x + y + 1 - (x - y - 1) = 2y + 2$ là số chẵn và $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $x + y + 1 > x - y - 1$. Do đó $x + y + 1$ và $x - y - 1$ là hai số nguyên dương chẵn

Từ đó suy ra chỉ có một trường hợp : $x + y + 1 = 6$ và $x - y - 1 = 2$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ và } y = 1. \text{ Vậy } (x; y) = (4; 1)$$

Câu 3.

$$\text{a) Từ } \frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a} \Rightarrow a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$$

Do đó:

$$a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b-c}{bc}; b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c-a}{ac}; c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$$

$$\text{Suy ra : } (a-b)(b-c)(c-a) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(a^2b^2c^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 0 \text{ (do } abc \neq \pm 1)$$

Suy ra $a = b = c$

$$\text{b) Ta có: } 2^n = 10a + b \Rightarrow b : 2 \Rightarrow ab : 2 \quad (1)$$

$$\text{Ta chứng minh } ab : 3 \quad (2)$$

Thật vậy, từ đẳng thức $2^n = 10a + b \Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b

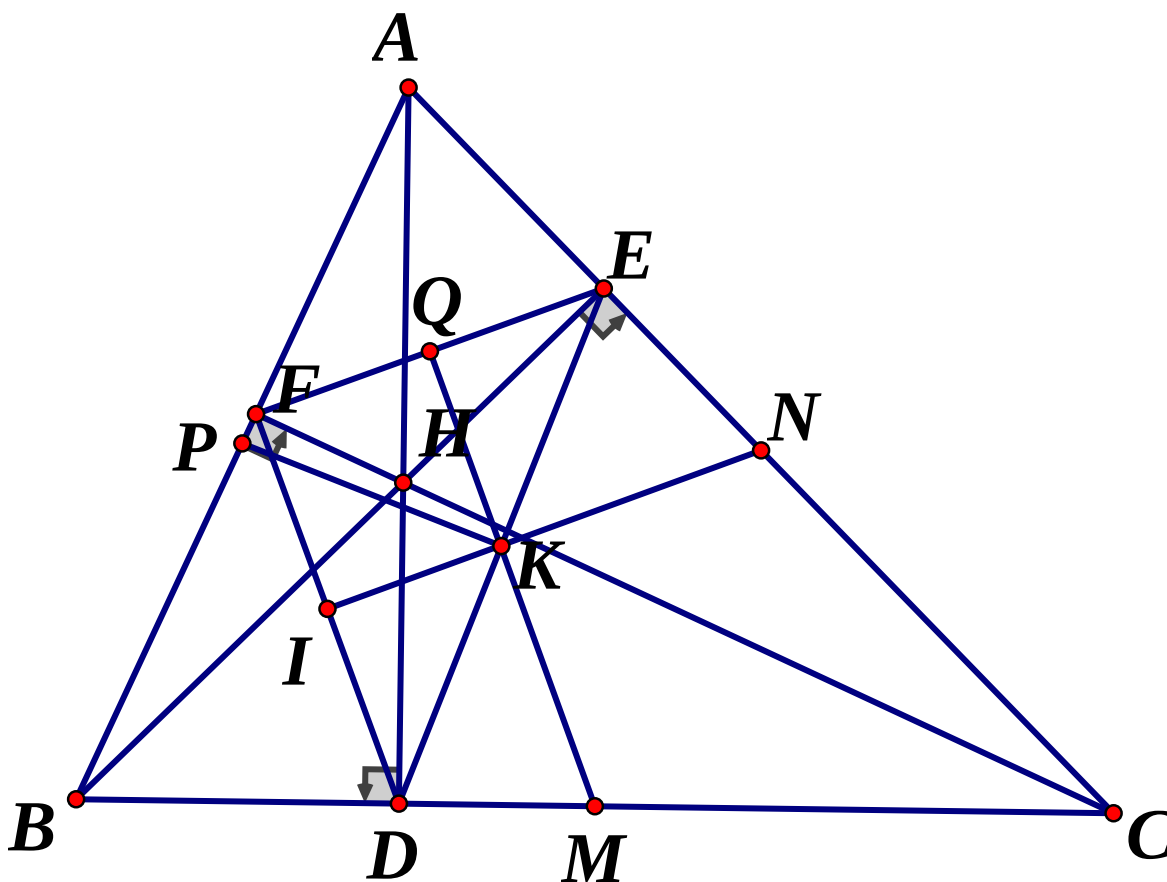
Đặt $n = 4k + r$ ($k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3$) ta có: $2^n = 16^k \cdot 2^r$

Nếu $r = 0$ thì $2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 10 \Rightarrow 2^n$ tận cùng là 2^r

$$\text{Suy ra } b = 2^r \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 3 \Rightarrow a : 3 \Rightarrow ab : 3$$

Từ (1) và (2) suy ra $ab : 6$

Câu 4.



a) Chỉ ra được $\triangle BDH \sim \triangle ADC (g.g) \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow BD \cdot DC = DH \cdot DA$

b) Ta có: $\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}HD \cdot BC}{\frac{1}{2}AD \cdot BC} = \frac{HD}{AD}$

Tương tự $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

Do đó: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

c) Chứng minh được $\triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$

Tương tự: $\angle DEC = \angle ABC$. Do đó: $\angle AEF = \angle DEC$

Mà $\angle AEF + \angle HEF = \angle DEC + \angle HED = 90^\circ$ nên $\angle HEF = \angle HED$

$\Rightarrow EH$ là phân giác ngoài của góc EFD

Do đó H là giao các đường phân giác của tam giác DEF

d) Do $\triangle BEC$ vuông tại E , M là trung điểm BC nên $EM = \frac{1}{2}BC$ (trung tuyến ứng với

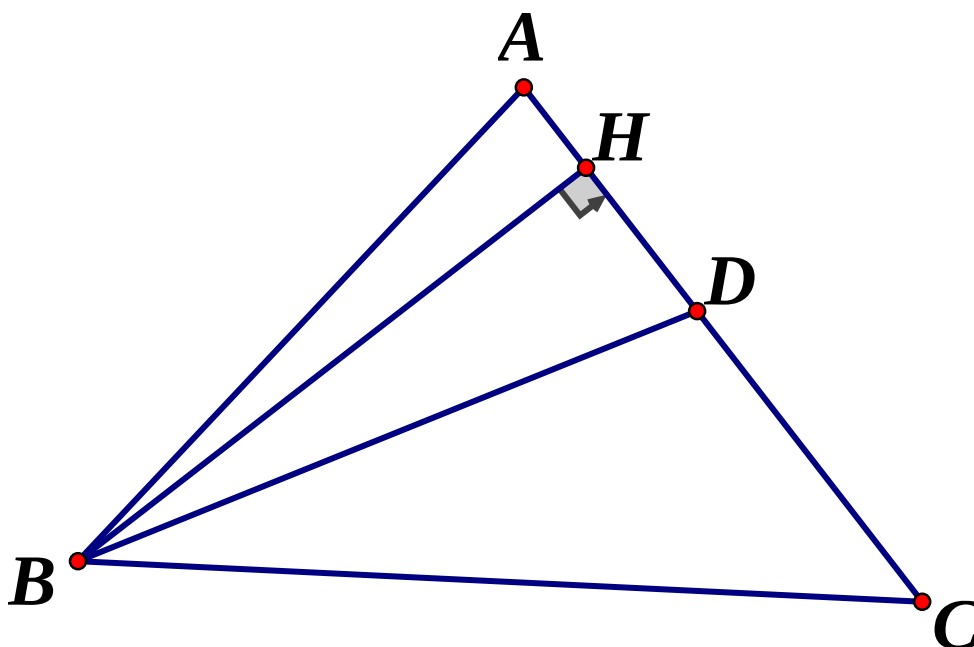
cạnh huyền), Tương tự: $FM = \frac{1}{2}BC$

Do đó: $\triangle EMF$ cân tại M , mà Q là trung điểm EF nên $MQ \perp EF$

$\Rightarrow MQ$ là đường trung trực của EF hay MQ là đường trung trực của tam giác DEF .

Hoàn toàn tương tự, chứng minh được NI và PK cũng là đường trung trực của tam giác DEF nên ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm

Câu 5.



Vẽ BH là đường cao của tam giác ABC

Tam giác BAD cân tại B ($BA = BD$) có BH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

$$\Rightarrow AH = \frac{AD}{2}$$

Tam giác ABC có BD là đường phân giác, ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{DA}{b} = \frac{DC}{a} = \frac{DA+DC}{a+b} = \frac{AC}{a+b} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow DA = \frac{b^2}{a+b}$$

Tam giác HAB vuông tại H, theo định lý Pytago ta có:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow BH^2 = b^2 - \frac{AD^2}{4} \quad (1)$$

Tam giác HBC vuông tại H, theo định lý Pytago, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow BH^2 = BC^2 - (AC - AH)^2 = a^2 - \left(b - \frac{AD}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow BH^2 = a^2 - b^2 + b.AD - \frac{AD^2}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$b^2 - \frac{AD^2}{4} = a^2 - b^2 + b.AD - \frac{AD^2}{4} \Rightarrow b^2 - a^2 = b.AD - b^2$$

$$\Rightarrow (b+a)(b-a) = \frac{-ab^2}{a+b} \Rightarrow \frac{a-b}{ab} = \frac{b}{(a+b)^2} \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}$$

Vậy bài toán được chứng minh

Câu 6.

Do $a, b > 0$ và $1+b^2 \geq 2b$ với mọi b nên:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$$

$$\text{Mà } a+b+c=3 \text{ nên } \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \quad (1)$$

$$\text{Cũng từ } a+b+c=3 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 9$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 \geq 2ab; b^2 + c^2 \geq 2bc; c^2 + a^2 \geq 2ac \text{ nên } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$\text{Suy ra } 3(ab+bc+ca) \leq 9 \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq 3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad dpcm$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c=1$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

Câu 1. Tìm một số có 8 chữ số: $\overline{a_1 a_2 \dots a_8}$ thỏa mãn 2 điều kiện a và b sau:

$$\text{a) } \overline{a_1 a_2 a_3} = (\overline{a_7 a_8})^2$$

$$\text{b) } \overline{a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = (\overline{a_7 a_8})^3$$

Câu 2. Chứng minh rằng: $(x^m + x^n + 1)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $(mn - 2) \vdots 3$

Áp dụng phân tích đa thức thành nhân tử: $x^7 + x^2 + 1$

Câu 3. Giải phương trình:

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2005.2006.2007} \right) x = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2006.2007$$

Câu 4. Cho hình thang $ABCD$ (đáy lớn CD). Gọi O là giao điểm của AC và BD ; các đường kẻ từ A và B lần lượt song song với BC và AD cắt các đường chéo BD và AC tương ứng ở F và E . Chứng minh:

$$\text{a) } EF \parallel AB$$

$$\text{b) } AB^2 = EF \cdot CD$$

c) Gọi S_1, S_2, S_3 và S_4 theo thứ tự là diện tích của tam giác OAB, OCD, OAD và OBC .

$$\text{Chứng minh } S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$$

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất : $A = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\text{Ta có: } \overline{a_1 a_2 a_3} = (\overline{a_7 a_8})^2 \quad (1) \quad \overline{a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = (\overline{a_7 a_8})^3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow 22 \leq \overline{a_7 a_8} \leq 31$$

$$\Rightarrow (\overline{a_7 a_8})^3 = \overline{a_4 a_5 a_6 00} + \overline{a_7 a_8} \Leftrightarrow (\overline{a_7 a_8})^3 - \overline{a_7 a_8} = \overline{a_4 a_5 a_6 00}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{a_7 a_8} - 1) \overline{a_7 a_8} (\overline{a_7 a_8} + 1) = 4.25. \overline{a_4 a_5 a_6}$$

Do $(\overline{a_7 a_8} - 1); \overline{a_7 a_8}; (\overline{a_7 a_8} + 1)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 3 khả năng:

a) $\overline{a_7 a_8} = 24 \Rightarrow \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_8}$ là số 57613824

b) $\overline{a_7 a_8} - 1 = 24 \Rightarrow \overline{a_7 a_8} = 25 \Rightarrow$ số đó là 62515625

c) $\overline{a_7 a_8} = 26 \Rightarrow$ không thỏa mãn

Câu 2. Đặt $m = 3k + r$ với $0 \leq r \leq 2$; $n = 3t + s$ với $0 \leq s \leq 2$

$$\Rightarrow x^m + x^n + 1 = x^{3k+r} + x^{3t+s} + 1 = x^{3k} x^r - x^r + x^{3t} x^s - x^s + x^r + x^s + 1$$

$$= x^r (x^{3k} - 1) + x^s (x^{3t} - 1) + x^r + x^s + 1$$

Ta thấy: $(x^{3k} - 1) : (x^2 + x + 1)$ và $(x^{3t} - 1) : (x^2 + x + 1)$

Vậy $(x^m + x^n + 1) : (x^2 + x + 1)$

$$\Leftrightarrow (x^r + x^s + 1) : (x^2 + x + 1) \text{ với } 0 \leq r, s \leq 2$$

$$\Leftrightarrow r = 2 \text{ và } s = 1 \Rightarrow m = 3k + 2 \text{ và } n = 3t + 1$$

$$r = 1 \text{ và } s = 2 \Rightarrow m = 3k + 1 \text{ và } n = 3t + 2$$

$$\Leftrightarrow mn - 2 = (3k + 2)(3t + 1) - 2 = 9kt + 3k + 6t = 3(3kt + k + 2t)$$

$$mn - 2 = (3k + 1)(3t + 2) - 2 = 9kt + 6k + 3t = 3(3kt + 2k + t)$$

$$\Rightarrow (mn - 2) : 3, \text{ Điều phải chứng minh.}$$

Áp dụng: $m = 7, n = 2 \Rightarrow mn - 2 = 12 : 3$

$$\Rightarrow (x^7 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1)$$

$$\Rightarrow (x^7 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$$

Câu 3.

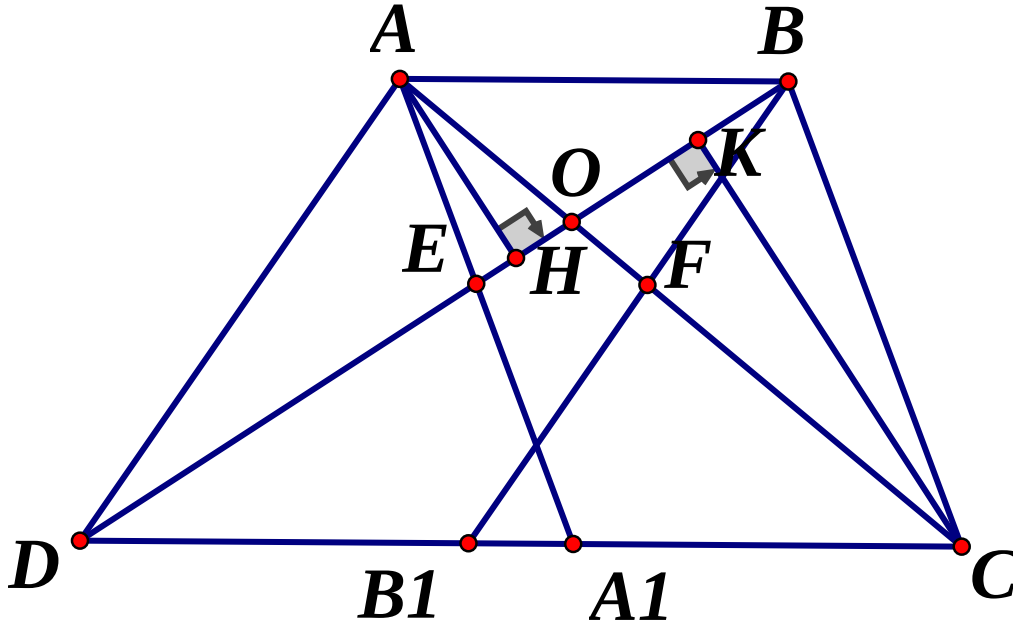
$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2005.2006.2007} \right) x = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2006.2007$$

Nhân cả 2 vế với 6 ta được:

$$3. \left(\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{2005.2006.2007} \right) x = 2 [1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + \dots + 2006.2007.(2008-2005)]$$

$$\begin{aligned}
& 3 \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots - \frac{1}{2006.2007} \right) x \\
&= 2 \cdot (1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + \dots + 2006.2007.2008 - 2005.2006.2007) \\
&\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2006.2007} \right) x = 2 \cdot 2006.2007.2008 \Leftrightarrow x = \frac{1003.1004.669}{5.100.651}
\end{aligned}$$

Câu 4.



a) Do $AE \parallel BC$ và $BF \parallel AD \Rightarrow \begin{cases} \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC} \\ \frac{OF}{OA} = \frac{OB}{OD} \end{cases}$

Mặt khác $AB \parallel CD$ ta lại có: $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ nên $\frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OA} \Rightarrow EF \parallel AB$

b) $ABCA_1$ và ABB_1D là hình bình hành $\Rightarrow A_1C = DB_1 = AB$

Vì $EF \parallel AB \parallel CD$ nên $\frac{EF}{AB} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow AB^2 = EF \cdot CD$

c) Ta có: $S_1 = \frac{1}{2} AH \cdot OB$; $S_2 = \frac{1}{2} CK \cdot OD$; $S_3 = \frac{1}{2} AH \cdot OD$; $S_4 = \frac{1}{2} OK \cdot OD$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_4} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot OB}{\frac{1}{2} \cdot CK \cdot OB} = \frac{AH}{CK}, \frac{S_3}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot OD}{\frac{1}{2} \cdot CK \cdot OD} = \frac{AH}{CK}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_4} = \frac{S_3}{S_2} \Rightarrow S_1.S_2 = S_3.S_4$$

Câu 5.

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45 \\ &= x^2 + y^2 + 36 - 2xy - 12x + 12y + 5y^2 - 10y + 5 + 4 \\ &= (x - y - 6)^2 + 5(y - 1)^2 + 4 \geq 4 \end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất $A = 4$ khi $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN TOÁN 8 NĂM HỌC 2013-2014

(Thời gian: 150 phút)

Bài 1. (3 điểm)

Rút gọn biểu thức :

$$A = \frac{1}{a^2 + a} + \frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6} + \frac{1}{a^2 + 7a + 12} + \frac{1}{a^2 + 9a + 20}$$

Bài 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(x - 2008)^4 + (x - 2010)^4 = 2$

b) $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$

Bài 3. (3 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$B = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$$

Bài 4. (3 điểm) Giải bất phương trình:

$$(a + 1)x + \frac{ax - 1}{a} > \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$$

Bài 5. (7 điểm)

Cho tam giác ABC (cân tại A) vẽ đường cao AH, đường cao BK

- a) Tìm các cặp tam giác vuông đồng dạng ? Giải thích tại sao ?
- b) Cho $AH = 10cm, BK = 12cm$. Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác ABC
- c) Gọi I là giao điểm của AH và BK, hãy tìm điều kiện của tam giác ABC để tam giác BCI là tam giác đều ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

Điều kiện: $a \neq 0; a \neq -1; a \neq -2; a \neq -3; a \neq -4; a \neq -5$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^2 + a} + \frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6} + \frac{1}{a^2 + 7a + 12} + \frac{1}{a^2 + 9a + 20} \\ &= \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+5)} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a+4} - \frac{1}{a+5} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+5} = \frac{a+4}{a(a+5)} \end{aligned}$$

Bài 2.

$$\text{a) } (x-2008)^4 + (x-2010)^4 = 2 \text{ (I)}$$

Đặt $y = x - 2009$ ta có:

$$(I) \Leftrightarrow (y+1)^4 + (y-1)^4 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2(y^2 + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x - 2009 = 0 \Leftrightarrow x = 2009$$

$$\text{b) } |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4 \text{ (II)}$$

$$+\text{Nếu } x < 1 \text{ ta có (II)} \Leftrightarrow -2x + 6 = 4 \Leftrightarrow x = 1 \quad (ktm)$$

$$+\text{Nếu } 1 \leq x < 2 \text{ ta có: (II)} \Leftrightarrow 0.x + 4 = 4, \text{ Phương trình nghiệm đúng với } 1 \leq x < 2$$

$$+\text{Nếu } 2 \leq x < 3 \text{ ta có: (II)} \Leftrightarrow -4x = -8 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+\text{Nếu } 3 \leq x \text{ ta có: (II)} \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm của phương trình (II) là $x = 5$ hoặc $1 \leq x \leq 2$

Bài 3.

$$\text{Ta có: } B = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$$

$$\text{Mà } 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } B \text{ là } \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$$

Bài 4. $(a+1)x + \frac{ax-1}{a} > \frac{1}{a} \quad (a \neq 0) \quad (III)$

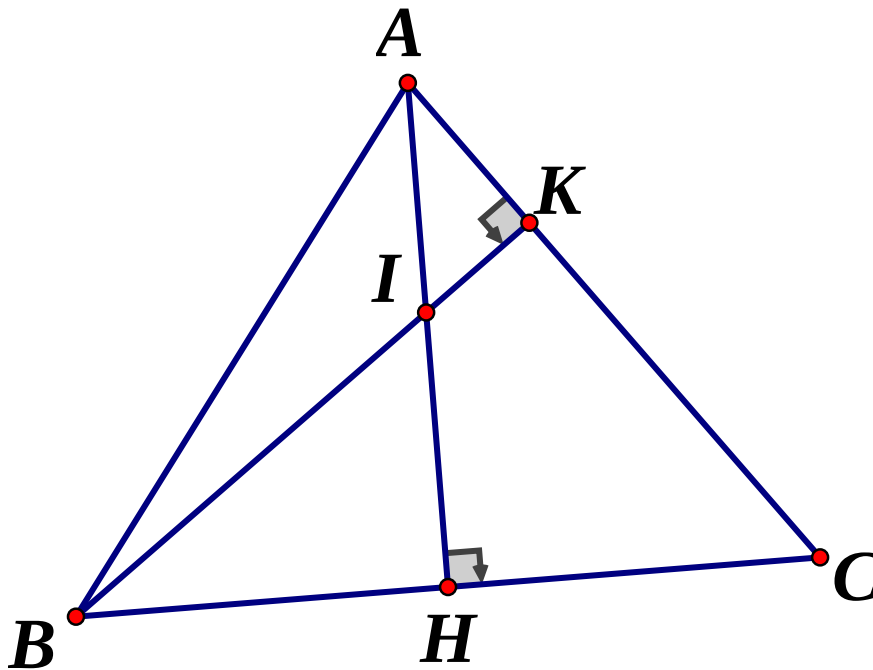
Với $a \neq 0$ ta có $(III) \Leftrightarrow (a+2)x > \frac{2}{a} (*)$

$(*) \Leftrightarrow x > \frac{2}{a(a+2)}$ nếu $a > -2$ và $a \neq 0$

$(*) \Leftrightarrow 0x > \frac{2}{-2}$ đúng với mọi x nếu $a = -2$

$(*) \Leftrightarrow x < \frac{2}{a(a+2)}$ nếu $a < -2$

Bài 5.



a) Các cặp tam giác vuông đồng dạng là :

$\triangle ABH \sim \triangle ACH$ (Vì có $\angle BAH = \angle CAH$)

$\triangle ABH \sim \triangle BCK$ (vì có $\angle ABH = \angle BCK$)

$\triangle ACH \sim \triangle BCK$ (vì cùng đồng dạng với $\triangle ABH$)

b) Từ $\triangle ABH \sim \triangle BCK \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{BK} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \frac{AB}{2BH} = \frac{5}{6} \Rightarrow BH = \frac{3}{5}AB$ (H là chân đường cao, trung tuyến)

Ta lại có: $AB^2 - BH^2 = AH^2$ (Định lý Pytago)

$$\Rightarrow AB^2 - \left(\frac{3}{5}AB\right)^2 = 10^2 \Rightarrow AB = 12,5cm$$

$$\Rightarrow AC = AB = 12,5cm \quad ; BC = 15cm$$

c) Chỉ ra được $\triangle BIC$ cân tại I

$\triangle BIC$ cân tại I trở thành tam giác đều khi $IBC = 60^\circ$

$$\text{Mà } IBC = HAB \Rightarrow HAB = 60^\circ \Rightarrow BAC = 120^\circ.$$

Vậy để $\triangle BIC$ là tam giác đều thì $\triangle ABC$ phải cân tại A và $A = 120^\circ$

PHÒNG GD&ĐT

KÌ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN LỚP 8

ĐỀ THI CHÍNH

Môn: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1.(5 điểm)

Cho x, y là hai số thay đổi thỏa mãn điều kiện $x > 0, y < 0$ và $x + y = 1$.

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{y-x}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right]$.

b) Chứng minh rằng: $A < -4$.

Bài 2. (2 điểm)

Cho ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0,$$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } T = (x-4)^{2014} + (y-4)^{2014} + (z-4)^{2014}.$$

Bài 3.(2 điểm)

Cho số nguyên tố $p > 3$. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số p^n có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 4.(8 điểm)

Cho hình vuông ABCD cạnh a và điểm N trên cạnh AB. Cho biết tia CN cắt tia DA tại E, tia Cx vuông góc với tia CE cắt tia AB tại F. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF.

- Chứng minh $CE = CF$;
- Chứng minh B, D, M thẳng hàng;
- Chứng minh $\triangle EAC$ đồng dạng với $\triangle MBC$;
- Xác định vị trí điểm N trên cạnh AB sao cho tứ giác ACFE có diện tích gấp 3 lần diện tích hình vuông ABCD.

Bài 5. (3 điểm)

- Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $3^x - y^3 = 1$
- Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

----- Hết -----

(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)

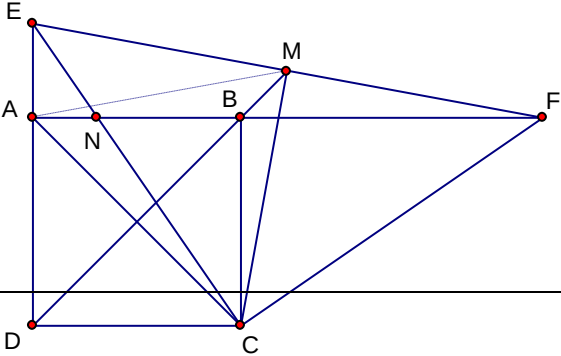
Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Bài	Nội dung	Biểu điểm

Bài 1	a) Với $x + y = 1$, biến đổi và thu gọn A. $A = \frac{y-x}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right]$ $= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2(x+y)^2 - 2x^2y - x^2(x^2-y^2)}{(x-y)^2(x+y)^2}$ $= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 \cdot 1 - 2x^2y - x^2(x-y)}{(x-y)^2 \cdot 1}$ $= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 - x^2(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 - x^2}{(x-y)^2} = \frac{(y-x)(x-y)^2}{xy(y^2-x^2)} = \frac{(x-y)^2}{xy}$	3(điểm)
	b) $A + 4 = \frac{(x-y)^2}{xy} + 4 = \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{1}{xy} < 0$ (vì $x > 0$; $y < 0$ và $x + y = 1$) Suy ra $A < -4$.	2(điểm)
Bài 2	$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0$ $\Leftrightarrow [4x^2 - 4x(y+z) + (y+z)^2] + (y^2 + z^2 - 6y - 10z + 34) = 0$ $\Leftrightarrow (2x - y - z)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 0$... $\Leftrightarrow y = 3; z = 5; x = 4$ Khi đó $T = (4 - 4)^{2014} + (3 - 4)^{2014} + (5 - 4)^{2014} = 2$.	2(điểm)
Bài 3	Do p là số nguyên tố và $p > 3$ nên p không chia hết cho 3. (*) p^n có 20 chữ số. Các chữ số chỉ có thể là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gồm 10 chữ số đôi một khác nhau. Nếu không có quá nhiều hơn 2 chữ số giống nhau thì mỗi chữ số phải có mặt đúng 2 lần trong cách viết số p^n. Như vậy tổng các chữ số của số p^n là: $2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 90 : 3$ nên $p^n : 3$ Điều này mâu thuẫn (*).	2(điểm)

	Vậy trong số p^n phải có ít nhất 3 chữ số giống nhau. 	
Bài 4	a) Chứng minh được $\triangle CDE = \triangle CBF$ (g.c.g) $\Rightarrow CE = CF$.	2(điểm)
	b) Chỉ ra $AM = MC = \frac{1}{2}EF \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực BD của đoạn AC. Vậy B, D, M thẳng hàng.	2(điểm)
	c) Chỉ ra $\angle ACE = \angle BCM$ } $\Rightarrow \triangle EAC \sim \triangle MBC$ (g.g). Chỉ ra $\angle CAE = \angle CBM$	2(điểm)
	d) Đặt $BN = x \Rightarrow AN = a - x$. *) Tính $S_{AEFC} = S_{ACE} + S_{ECF} = \frac{1}{2}DC \cdot AE + \frac{1}{2}CE^2$ - Tính AE: Lý luận để có $\frac{AE}{ED} = \frac{AN}{DC} \Leftrightarrow \frac{AE}{AE + AD} = \frac{AN}{DC} \Leftrightarrow \frac{AE}{AE + a} = \frac{a - x}{a} \Leftrightarrow AE \cdot a = AE(a - x) + a(a - x)$	2(điểm)

	$\Leftrightarrow AE = \frac{a(a-x)}{x}$ - Tính CE^2: Lý luận để có $CE^2 = CD^2 + DE^2 = a^2 + (a + AE)^2$ $\Rightarrow CE^2 = a^2 + \left(a + \frac{a(a-x)}{x}\right)^2 = a^2 + \frac{a^4}{x^2}$ Do đó $S_{AEFC} = \frac{a^3(a+x)}{2x^2}$ *) Tính $S_{ABCD} = a^2$. Lý luận với $S_{AEFC} = 3S_{ABCD}$ để có $6x^2 - ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - a)(3x + a) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \text{ (vì } a, x > 0 \text{)}.$ KL: N là trung điểm của AB thì $S_{AEFC} = 3S_{ABCD}$.	
Bài 5	a) $3^x - y^3 = 1 \Leftrightarrow 3^x = y^3 + 1 \quad (1)$ - Dễ thấy $x = y = 0$ là một nghiệm của (1). - Nếu $x < 0$ thì $3^x = \frac{1}{3^n}$ (n nguyên dương, $n = -x$) suy ra $0 < 3^x < 1$. Mà $y^3 + 1$ là số nguyên, suy ra (1) không có nghiệm nguyên. - Nếu $x > 0$ thì $3^x : 3$ $(1) \Leftrightarrow 3^x = (y + 1)^3 - 3y(y + 1) \Rightarrow (y + 1)^3 : 3 \text{ nên } y + 1 : 3$ Đặt $y + 1 = 3k$ (k nguyên), suy ra $y = 3k - 1$. Thay vào (1) ta được: $3^x = (3k - 1)^3 + 1 = 9k(3k^2 - 3k + 1)$ nên $3k^2 - 3k + 1$ là ước của 3^x mà $3k^2 - 3k + 1 \not\vdots 3$ và $3k^2 - 3k + 1 = 3\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$ nên $3k^2 - 3k + 1 = 1 \Leftrightarrow 3k(3k - 1) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $k = 1$. Với $k = 0$ thì $y = -1$ suy ra $3^x = 0$ phương trình vô nghiệm.	1.5(điểm)

	Với $k = 1$ thì $y = 2$ suy ra $3^x = 9$ nên $x = 2$. Vậy các cặp số nguyên $(x, y) \in \{(0; 0), (2; 2)\}$.	
	b) Từ giả thiết $0 \leq a, b, c \leq 2$ suy ra $(2 - a)(2 - b)(2 - c) + abc \geq 0$ $\Leftrightarrow 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) \geq 0$ $\Leftrightarrow 8 - 12 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 0$ (vì $a + b + c = 3$) $\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ac \geq 4$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 4 + a^2 + b^2 + c^2$ $\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 4 + a^2 + b^2 + c^2$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$ (vì $a + b + c = 3$) Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 1; 2)$ và các hoán vị của bộ số này. Vậy P có GTLN nhất là 5 $\Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 1; 2)$ và các hoán vị của bộ số này.	1.5(điểm)

Chú ý: - Điểm được lấy đến 0.25.

- Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

ĐỀ THI CHỌN HSG ĐỘI TUYỂN TOÁN 8

TRƯỜNG THCS NGUYỄN ĐĂNG ĐẠO

Bài 1. Cho $Q = \frac{a^4 + a^3 - a^2 - 2a - 2}{a^4 + 2a^3 - a^2 - 4a - 2}$

- a) Rút gọn M
- b) Xác định a để $Q_{\min}$

Bài 2.

- a) Phân tích đa thức thành nhân tử

$$A = x^4 + 2007x^2 + 2006x + 2007$$

- b) Cho $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{a+c}, z = \frac{c}{a+b}$. Tính $A = yz + zx + xy + 2xyz$

Bài 3. Cho $x, y, z > 0$. CMR: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$

Bài 4. Tìm k để phương trình sau có nghiệm dương: $\frac{k(x+1)}{2x-1} = k+1$

Bài 5. Hình vuông $ABCD$ có E và F thuộc tia đối CB và DC sao cho $DF = BE$. Từ E kẻ đường song song với AF và từ F kẻ đường song song với AE. Hai đường này giao tại I. Tứ giác $AFIE$ là hình gì ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$\text{a) } Q = \frac{a^4 + a^3 - a^2 - 2a - 2}{a^4 + 2a^3 - a^2 - 4a - 2} = \frac{a^4 + a^3 + a^2 - 2a^2 - 2a - 2}{a^4 + 2a^3 + a^2 - 2a^2 - 4a - 2} = \frac{(a^2 - 2)(a^2 - a - 1)}{(a^2 - 2)(a + 1)^2} \text{ Khi}$$

$$DKXD: a \neq \pm\sqrt{2}, a \neq -1$$

$$\text{đó: } Q = \frac{a^2 + a + 1}{(a + 1)^2}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a^2 + a + 1}{(a + 1)^2} = \frac{a^2 + 2a + 1 - (a + 1) + 1}{a^2 + 2a + 1} = 1 - \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{(a + 1)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{(a + 1)^2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

$$\text{Vậy GTNN của } Q = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = 1$$

Bài 2.

a)

$$\begin{aligned} A &= x^4 + 2007x^2 + 2006x + 2007 = x^4 - x + 2007x^2 + 2007x + 2007 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2007) \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$= \frac{ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2}{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

$$\text{Nên } A = \frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \dots = 1$$

Bài 3. Ta có:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq x; \frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq x; \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z$$

Cộng lại ta có điều phải chứng minh

Bài 4.

Ta có phương trình tương đương:

$$k(x+1) = (k+1)(2x-1) \Leftrightarrow kx+k = 2xk-k+2x-1 \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{k+2}$$

Vậy $x > 0$ thì k phải thỏa mãn 2 điều kiện sau:

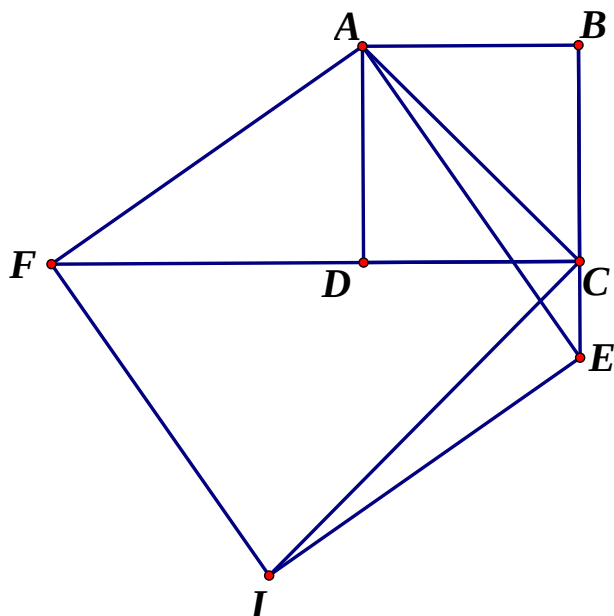
$$*) k(x+1) = (k+1)(2x-1) \Leftrightarrow kx+k = 2xk-k+2x-1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{k+2} \text{ và } k+2 > 0 \text{ hoặc } 2k+1 < 0 \text{ và } k+2 < 0$$

$$*) k \neq 0 \text{ (vì } x \neq \frac{1}{2})$$

$$\text{Vậy } x > 0 \Leftrightarrow k < -2 \text{ hoặc } k > -\frac{1}{2} \text{ và } k \neq 0$$

Bài 5.



Ta có AE song song với FI (gt); AF song song với EI (gt)
 $\Rightarrow AFEI$ là hình bình hành (các cặp cạnh đối song song) (1)

Chứng minh $\triangle ADF = \triangle ABE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle FAD = \angle BAE$

Mà $\angle BAE + \angle DAE = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow \angle FAD + \angle DAE = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AFIE$ là hình chữ nhật

Ta lại có : $AF = AE$ (vì hai tam giác bằng nhau theo cmt) nên $AFIE$ là hình vuông.

UBND TỈNH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2018 - 2019

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x^4 + x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} \right) \cdot \frac{x(x+1) - (1+x)}{x^3 - 1}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên ?

Câu 2 (6,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$.

b) Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.

c) Đa thức f(x) chia cho $x+1$ dư 4, chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần dư khi chia f(x) cho $(x+1)(x^2+1)$.

d) Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 3 (5,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x; y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$.

c) Cho ba số x, y, z đôi một khác nhau, thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ và $xyz \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{16(x+y)}{z} + \frac{3(y+z)}{x} - \frac{2038(z+x)}{y}$.

Câu 4 (7,0 điểm)

4.1: Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm trên cạnh BC. Qua A kẻ tia Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K. Đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G. Chứng minh:

a) Tứ giác EGFK là hình thoi.

b) $AF^2 = FK \cdot FC$

c) Chu vi tam giác EKC không đổi khi E thay đổi trên BC.

4.2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$ và đường phân giác của góc A là AD = d. Chứng minh rằng: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d}$.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$$

--- Hết ---

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x^4 + x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} \right) \cdot \frac{x(x+1) - (1+x)}{x^3 - 1}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên ?

Giải:

$$P = \left(\frac{x^4 + x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} \right) \cdot \frac{x(x+1) - (1+x)}{x^3 - 1}$$

* ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$

$$a) P = \left(\frac{(x^4 + x^2 - 4x + 1) - (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1)}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{(x^4 - x) + (x^2 + x + 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{x(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

$$b) P = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{x(x-1) + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$$

$$\text{Đề } P \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{1}{x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-1 \in U(1) = \{1; -1\}$$

+) Với $x-1 = 1$ thì $x = 2$ (TMĐKXĐ)

+) Với $x-1 = -1$ thì $x = 0$ (TMĐKXĐ)

Vậy P nguyên khi $x \in \{2; 0\}$.

Câu 2 (6,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$.

b) Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.

c) Đa thức $f(x)$ chia cho $x+1$ dư 4, chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.

d) Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } & x(x+4)(x+6)(x+10) + 128 \\ &= [x(x+10)].[(x+4)(x+6)] + 128 \\ &= (x^2 + 10x).(x^2 + 10x + 24) + 128 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 10x = a$, ta có:

$$\begin{aligned} & a(a+24) + 128 \\ &= a^2 + 24a + 128 \\ &= (a+8)(a+16) \\ &= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) \\ &= (x+2)(x+8)(x+5+\sqrt{17})(x+5-\sqrt{17}) \end{aligned}$$

b) Với $n = 1$ ta có: $16 - 15 - 1 = 0 \div 225$

Giả sử bài toán đúng với $n = k$ tức là ta có:

$$16^k - 15k - 1 \div 225$$

Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy: } 16^{k+1} - 15(k+1) - 1 &= 16.16^k - 15k - 15 - 1 \\ &= 16^k (15 + 1) - 15k - 15 - 1 \\ &= (16^k - 15k - 1) + 15(15^k - 1) \\ &= (16^k - 15k - 1) + 225. A(k) \div 225 \end{aligned}$$

Vậy $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi n là số nguyên dương.

c) Theo định lí Bê-du ta có: $f(x)$ chia $x+1$ dư 4 $\Rightarrow f(-1)=4$

Do bậc đa thức chia $(x+1)(x^2+1)$ là 3 nên đa thức dư có dạng $ax^2 + bx + c$

Gọi thương là Q, ta có:

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+1)(x^2+1)Q + ax^2 + bx + c \\&= (x+1)(x^2+1)Q + ax^2 + a - a + bx + c \\&= (x+1)(x^2+1)Q + a(x^2+1) - a + bx + c \\&= [(x+1)Q + a](x^2+1) + bx + c - a\end{aligned}$$

$$\text{Vì } f(x) \text{ chia } x^2+1 \text{ dư } 2x+3 \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } f(-1)=4 \Rightarrow a - b + c = 4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 2 \\ c = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy đa thức dư là: } \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}.$$

d) Gọi hai số chính phương liên tiếp đó là k^2 và $(k+1)^2$.

Ta có: $k^2 + (k+1)^2 + k^2 \cdot (k+1)^2 = k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 = (k^2 + k + 1)^2 = [k(k+1) + 1]^2$ là số chính phương. (1)

Vì $k(k+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên $k(k+1)$ chẵn $\Rightarrow k(k+1) + 1$ lẻ $\Rightarrow [k(k+1) + 1]^2$ lẻ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 3 (5,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$.

c) Cho ba số x, y, z đôi một khác nhau, thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ và $xyz \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{16(x+y)}{z} + \frac{3(y+z)}{x} - \frac{2038(z+x)}{y}$.

Giải:

$$a) x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 35xy - 5x^2y^2 - 60$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 = 5(3-xy)(xy-4) \quad (1)$$

$$\text{Vì } (x-y)^2 \geq 0 \text{ nên } 5(3-xy)(xy-4) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq xy \leq 4 \Leftrightarrow xy \in \{3; 4\}$$

$$\text{Đẳng thức (1) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ x, y \in \mathbb{Z} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = -2 \\ y = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } (x, y) \in \{(2; 2); (-2; -2)\}$$

$$b) C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) + (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1} = 2 + \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \geq 2$$

$$\text{Vậy } \min C = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{4(x^2 + 1) - (x^2 + 2x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \leq 4$$

$$\text{Vậy } \max C = 4 \Leftrightarrow x = -1$$

$$c) x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \quad (x \neq y \neq z; xyz \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 - 3z(x+y)(x+y+z) - 3xy(x+y+z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z \\ y+z=-x \\ z+x=-y \\ x=y=z \text{ (loại, vì } x \neq y \neq z) \end{cases}$$

Vậy $B = \frac{16(x+y)}{z} + \frac{3(y+z)}{x} - \frac{2038(z+x)}{y} = \frac{16(-z)}{z} + \frac{3(-x)}{x} - \frac{2038(-y)}{y} = (-16) + (-3) + 2038 = 2019$.

Câu 4 (7,0 điểm)

4.1: Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm trên cạnh BC. Qua A kẻ tia Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K. Đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G. Chứng minh:

a) Tứ giác EGFK là hình thoi.

b) $AF^2 = FK \cdot FC$

c) Chu vi tam giác EKC không đổi khi E thay đổi trên BC.

4.2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$ và đường phân giác của góc A là AD = d. Chứng minh rằng: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d}$.

Giải:

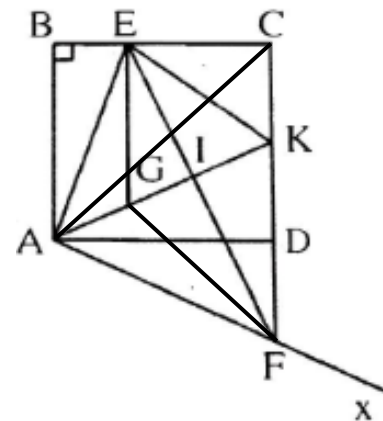
4.1:

a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADF$ có:

$$\angle BAE = \angle DAF (=90^\circ)$$

$$AB = AD \text{ (ABCD là hình vuông)}$$

$$\angle BAE = \angle DAF \text{ (cùng phụ } \angle DAE)$$



Do đó $\triangle ABE = \triangle ADF$ (g-c-g)

$$\Rightarrow AE = AF$$

$\Rightarrow \triangle AEF$ vuông cân tại A

Mà AI là trung tuyến của $\triangle AEF$

$\Rightarrow$ AI cũng là đường cao của $\triangle AEF$

$\Rightarrow AI \perp EF$ hay $GK \perp EF$

Xét $\triangle IEG$ và $\triangle IFK$ có:

$$\angle IEI = \angle KIF \text{ (đối đỉnh)}$$

$$IE = IF \text{ (gt)}$$

$$\angle IEG = \angle IFK \text{ (so le trong)}$$

Do đó $\triangle IEG = \triangle IFK$ (g-c-g)

$$\Rightarrow IG = IK$$

Tứ giác EGFK có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường ($IE=IF$ (gt); $IG=IK$ (cmt)) đồng thời vuông góc với nhau ($GK \perp EF$) nên là hình thoi.

b) Xét $\triangle AFK$ và $\triangle CAF$ có:

$$\angle KAF = \angle FCA (=45^\circ)$$

F: góc chung

Do đó $\triangle AFK \sim \triangle CAF$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{KF}{AF} \Rightarrow AF^2 = KF \cdot CF.$$

c) Đặt a là độ dài cạnh hình vuông ABCD $\Rightarrow$ a không đổi

$$\triangle ABE = \triangle ADF \text{ (theo a)} \Rightarrow BE = DF$$

Ta có: EGFK là hình thoi (theo a) nên $KE = KF = KD + DF = KD + BE$

Chu vi $\triangle EKC$ là: $C_{EKC} = KC + EK + EC = KC + KD + BE + CE = CD + BE = 2a$ không đổi.

4.2:

Kẻ $DE \perp AB$ ($E \in AB$); $DF \perp AC$ ($F \in AC$)

Dễ thấy $AEDF$ là hình chữ nhật

Mà AD là tia phân giác $\angle EAF$

Nên $AEDF$ là hình vuông

Biến đổi qua Pi-ta-go ta được:

$$DE = DF = \frac{AD}{\sqrt{2}}$$

Vì $AB \parallel DF$ (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow \triangle DFC \sim \triangle BAC$ (tính chất đồng dạng)

$$\Rightarrow \frac{DF}{AB} = \frac{CD}{BC} \quad (1)$$

Tương tự chứng minh $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$

Cộng hai vế tương ứng của (1) và (2) ta được: $\frac{DF}{AB} + \frac{DE}{AC} = \frac{CD+BD}{BC}$

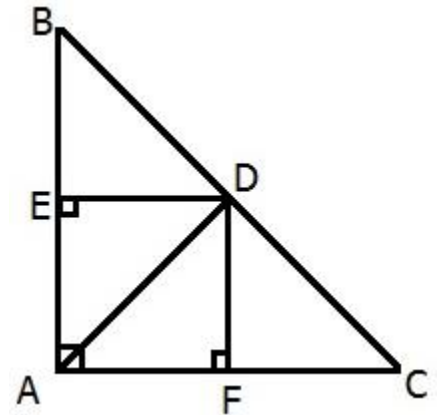
$$\Rightarrow \frac{\frac{AD}{\sqrt{2}}}{AB} + \frac{\frac{AD}{\sqrt{2}}}{AC} = \frac{BC}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$$

Giải:



Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Bu-nhi-a Cốp-xki, ta có:

$$\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} = \frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} = \frac{a^2}{2ab+ac} + \frac{b^2}{2bc+ab} + \frac{c^2}{2ac+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ac)}$$

Ta chứng minh

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3ab + 3bc + 3ca$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy $\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \\ a,b,c>0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẬN NGŨ HÀNH SƠN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS
NĂM HỌC : 2013-2014

MÔN THI: TOÁN – LỚP 8

Thời gian: 150 phút (không tính giao đề)

Bài 1. (1,5 điểm)

- Chứng minh rằng $2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010}$ chia hết cho 7
- Chứng minh rằng không có giá trị tự nhiên n nào để giá trị của biểu thức $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ chia hết cho giá trị của biểu thức $n^2 - n$

Bài 2. (1,5 điểm)

Hưởng ứng ngày chủ nhật xanh – sạch – đẹp. Học sinh khối lớp 8 nhận làm vệ sinh một đoạn đường em chăm. Lớp 8/1 nhận 10 mét và 1/10 của phần còn lại, lớp 8/2 nhận 20 mét và 1/10 của phần còn lại, lớp 8/3 nhận 30 mét và 1/10 của phần còn lại ... cứ chia như

vậy cho đến lớp cuối cùng thì vừa đủ và phần đường của mỗi lớp dài bằng nhau. Hỏi khối 8 có bao nhiêu lớp và đoạn đường mỗi lớp nhận dài bao nhiêu mét ?

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $M = \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$

- Tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa
- Rút gọn biểu thức M
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức M có giá trị nguyên.

Bài 4. (2,0 điểm)

- Cho $a + b = 3$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a^2 + b^2$
- Cho $\frac{1}{x^2} + x^2 = 14 (x \neq 0)$. Hãy tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x^3} + x^3$

Bài 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác AHB và AHC . MN cắt AB, AH, AC lần lượt tại I, E, K

- Chứng minh : BM vuông góc với AN
- Chứng minh : $ME.NK = MI.NE$
- Biết diện tích của tam giác ABC là S . Tính diện tích lớn nhất của tam giác AIK theo S .

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a. $2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010} = 2^{2008} \cdot (1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^{2008} : 7$

b. Chia $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ cho $n^2 - n$ dư 3

Vì $n^2 - n = n(n-1)$ là số chẵn nên $n(n-1) \notin U(3)$.

Bài 2.

Gọi $x(m)$ là chiều dài đoạn đường cả khối 8 là vệ sinh ($x > 0$)

Lớp 8/1 nhận đoạn đường dài : $10 + 0,1(x-10) = 0,1x + 9$

Sau khi lớp 8/1 nhận, đoạn đường còn lại: $x - (0,1x + 9) = 0,9x - 9$

Lớp 8/2 nhận đoạn đường dài : $20 + 0,1 \cdot (0,9x - 9 - 20) = 0,09x + 17,1$

Ta có phương trình : $0,1x + 9 = 0,09x + 17,1$

Giải ra : $x = 810$ (thích hợp)

Khối 8 có 9 lớp

Mỗi lớp chăm đoạn đường dài 90m

Bài 3.

a.

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

$$2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + x - 1 = (x + 1)(2x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1; x \neq \frac{1}{2}$$

b.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} - \frac{x(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} \right) \cdot \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(2x - 1)} + \frac{x}{2x - 1} \\ &= \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} - \frac{x(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \right) \frac{x - 1}{2x - 1} + \frac{x}{2x - 1} \\ &= \left(\frac{2x^3 + x^2 - x - x^3 - x^2 - x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x - 1} + \frac{x}{2x - 1} \\ &= \left(\frac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 1} \right) \cdot \frac{1}{2x - 1} + \frac{x}{2x - 1} = \frac{x^3 - 2x + x(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)(2x - 1)} \\ &= \frac{2x^3 + x^2 - x}{(x^2 + x + 1)(2x - 1)} = \frac{(2x - 1)(x^2 + x)}{(x^2 + x + 1)(2x - 1)} = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

c)

$$M = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} = \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

M có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x^2 + x + 1 \in U(1)$

$$x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(tm) \\ x = -1(ktm) \end{cases}$$

$$x^2 + x + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0(VN)$$

Vậy $x = 0$

Bài 4.**4a.**

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ (với mọi } a, b)$$

$$a+b=3 \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 9$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 4,5$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2 = 4,5$

4b.

$$\frac{1}{x^2} + x^2 = \left(\frac{1}{x} + x \right)^2 - 2$$

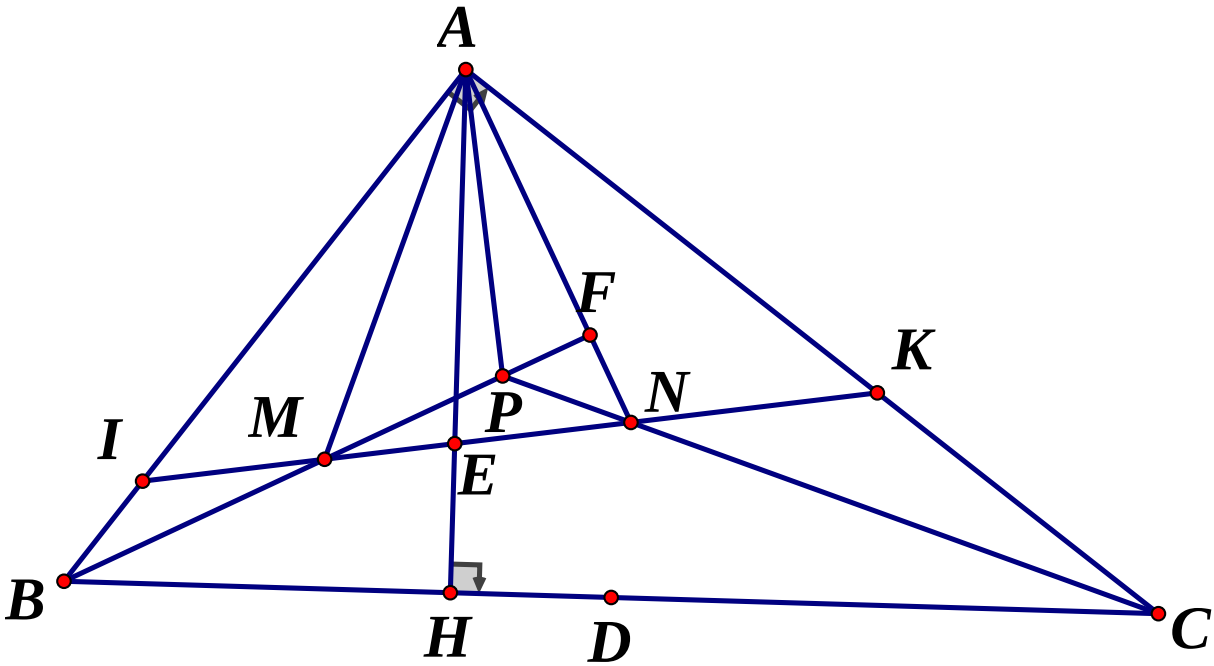
$$\left(\frac{1}{x} + x \right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = \pm 4$$

$$\frac{1}{x^3} + x^3 = \left(\frac{1}{x} + x \right) \left(\frac{1}{x^2} + x^2 - 1 \right)$$

$$\text{Với } x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = -4; \text{ thì } \frac{1}{x^3} + x^3 = -4 \cdot (14 - 1) = -52$$

$$\text{Với } x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = 4; \text{ thì } \frac{1}{x^3} + x^3 = 4 \cdot (14 - 1) = 52$$

Bài 5.



a) Gọi F là giao điểm của BM và AN

$ABH = HAC$ (cùng phụ với BAH)

$$ABF = CAN \left(ABF = \frac{1}{2} ABH; CAN = \frac{1}{2} BAH \right)$$

$$ABF + BAF = 90^\circ \text{ (vì } CAN + BAF = 90^\circ)$$

$\triangle ABF$ vuông tại F $\Rightarrow BM \perp AN$

b) Gọi P là giao điểm của BM và CN $\Rightarrow AP$ là phân giác BAC nên AP là phân giác $\triangle AIK$

Chứng minh tương tự câu a ta có: $CN \perp AM$

P là trực tâm $\triangle AMN \Rightarrow AP \perp IK$; AP là đường cao $\triangle AIK$

$\triangle AIK$ vuông cân tại A $\Rightarrow AI = AK$.

Áp dụng tính chất đường phân giác vào $\triangle AIE$ và $\triangle AEK$ ta có:

$$\frac{MI}{ME} = \frac{AI}{AE}; \frac{NK}{NE} = \frac{AK}{AE} \Rightarrow \frac{MI}{ME} = \frac{NK}{NE} \text{ (Do } AI = AK)$$

$$\Rightarrow ME \cdot NK = MI \cdot NE$$

c) Gọi D là trung điểm BC; $AD = \frac{1}{2} BC$

$$\triangle AMI = \triangle AMH (g.c.g) \Rightarrow AI = AH$$

$$S_{AIK} = \frac{1}{2} AI \cdot AK = \frac{1}{2} AH^2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AH \cdot 2AD = AH \cdot AD$$

$$\text{Vì } AH \leq AD \Rightarrow S_{AIK} \leq \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow S_{AIK} \leq \frac{1}{2} S$$

Vậy diện tích lớn nhất của $\triangle AIK$ là $\frac{1}{2} S$

PHÒNG GD & ĐT HẢI LĂNG

ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 8

ĐỀ CHÍNH THỨC

NĂM HỌC 2008-2009

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. (3 điểm)

Làm thế nào để đem được 6 lít nước từ sông về nếu trong tay chỉ có 2 cái can, một can có dung tích 4 lít, một can có dung tích 9 lít và không can nào có vạch chia dung tích ?

Bài 2. (3 điểm) Một số gồm 4 chữ số giống nhau chia cho một số gồm 3 chữ số giống nhau thì được thương là 16 và số dư là một số r nào đó

Nếu số bị chia và số chia đều bớt đi một chữ số thì thương không đổi và số dư giảm bớt 200. Tìm các số đó

Bài 3. (3 điểm)

Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n

Bài 4. (3 điểm) Tính tổng $S = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$

Bài 5. (4 điểm) Nhân ngày 1 – 6 một phân đội thiếu niên được tặng một số kẹo. Số kẹo này được chia hết và chia đều cho mọi người trong phân đội. Để đảm bảo nguyên tắc ấy phân đội trưởng đề xuất cách nhận phần kẹo của mỗi người như sau:

Bạn thứ nhất 1 cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Sau khi bạn thứ nhất đã lấy phần mình, bạn thứ hai nhận 2 cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Cứ tiếp tục như thế đến bạn cuối cùng thứ n nhận n cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.

Hỏi phân đội thiếu niên nói trên có bao nhiêu đội viên và mỗi đội viên nhận bao nhiêu kẹo.

Bài 6. (4 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A, có $A = 20^\circ$. Trên AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính số đo BDC ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

Ký hiệu $(a;b)$ là trạng thái can 4 lít có a lít với $0 \leq a \leq 4$ và can 9 lít có b lít với $0 \leq b \leq 9$. Khi đó việc lấy được 6 lít nước từ sông được diễn tả qua các trạng thái sau:

$$(0;0) \Rightarrow (0;9) \Rightarrow (4;5) \Rightarrow (0;5) \Rightarrow (4;1) \Rightarrow (0;1) \Rightarrow (1;9) \Rightarrow (4;6)$$

Bài 2. Ta có: $\overline{aaaa} = 16\overline{bbb} + r$ $\overline{aaa} = 16\overline{bb} + (r - 200)$

Với $200 \leq r < \overline{bbb}$

Trừ các đẳng thức ta có:

$$1000a = 1600b + 200 \Leftrightarrow 5a = 8b + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ta có các số 5555 và 333 thỏa mãn.

Bài 3.

Ta có: $n^3 - n = (n-1).n.(n+1)$ chia hết cho 3 vì tích của 3 số nguyên liên tiếp

Ta cũng có $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 2 vì trong 3 số liên tiếp có 1 số chẵn

Mà $(2,3)=1$. Vậy $n^3 - n$ chia hết cho 6

Bài 4.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{16}{1-x^{16}} \end{aligned}$$

Bài 5.

Gọi số kẹo phân đội được tặng là x (cái); $x \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Số kẹo bạn thứ nhất nhận: } 1 + \frac{1}{11}(x-1) = \frac{x}{11} + \frac{10}{11} \text{ (cái)}$$

$$\text{Số kẹo còn lại sau khi bạn thứ nhất nhận } x - \left(\frac{x}{11} + \frac{10}{11} \right) = \frac{10x}{11} - \frac{10}{11} \text{ (cái)}$$

$$\text{Số kẹo bạn thứ hai nhận: } 2 + \frac{1}{11} \left(\frac{10x}{11} - \frac{10}{11} - 2 \right) = \frac{10x}{121} + \frac{210}{121} \text{ (cái)}$$

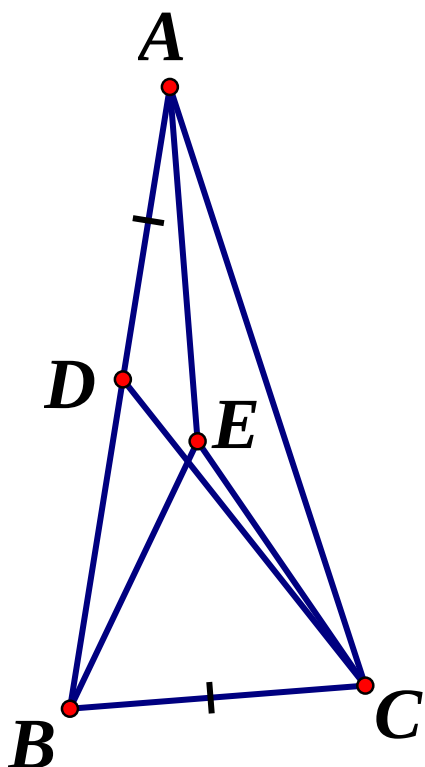
Vì số kẹo của mỗi bạn bằng nhau nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{11} + \frac{10}{11} = \frac{10x}{121} + \frac{210}{121} \Leftrightarrow \frac{11x}{121} - \frac{10x}{121} = \frac{210}{121} - \frac{110}{121} \Leftrightarrow x = 100$$

$$\text{Số kẹo mỗi đội viên nhận là: } \frac{100}{11} + \frac{10}{11} = 10$$

$$\text{Số đội viên là: } 100:10 = 10 \text{ (bạn)}$$

Bài 6.



Ở miền trong tam giác ABC ta dựng tam giác đều BCE khi đó:

$$\triangle ABE = \triangle ACE (c.c.c) \Rightarrow \angle BAE = \angle CAE = 10^\circ$$

$$\angle ABE = 20^\circ \text{ và } \angle AEB = 150^\circ \text{ suy ra}$$

$$\triangle ADC = \triangle BEA (c.g.c) \Rightarrow \angle ADC = \angle BEA = 150^\circ \Rightarrow \angle BDC = 30^\circ$$

PHÒNG GD & ĐT BÌNH XUYỀN
TRƯỜNG THCS HƯƠNG CANH

ĐỀ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI
MÔN: TOÁN 8
Năm học : 2017-2018

Câu 1.

Giải các phương trình sau:

$$a) 2x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 36 = 0$$

$$b) \frac{x-2}{2009} + \frac{x-42}{1969} + \frac{x-121}{1890} = 3$$

Câu 2.

Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x > y > 0$ và $x^3 + 7y = y^3 + 7x$

Câu 3.

- a) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$
- b) Cho $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$

Câu 4.

Cho tam giác ABC cân tại A, có $BC = a$ không đổi. Gọi I là trung điểm của BC. Lấy $P \in AB$ và $Q \in AC$ sao cho $PIQ = \angle BAC$. Vẽ $IK \perp AC$ ($K \in AC$)

- a) Chứng minh rằng tích $BP \cdot CQ$ không đổi.
- b) Chứng minh rằng PI là tia phân giác của góc BPQ , QI là tia phân giác của PQC
- c) Gọi chu vi tam giác APQ là b , chứng minh rằng $b = 2 \cdot AK$. Tính b theo a khi

$$\angle BAC = 60^\circ$$

Câu 5.

- a) Chứng minh rằng $3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1$ chia hết cho 1930
- b) Cho a, b, c là 3 số thỏa mãn $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$. Chứng minh rằng:
- $$a^{2009} + b^{2009} + c^{2009} = (a + b + c)^{2009}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned} PT &\Leftrightarrow (x-3)(2x^3+7x^2-x+12)=0 \\ \text{a)} \quad &\Leftrightarrow (x-3)(x+4)(2x^2-x+3)=0 \end{aligned}$$

Do $2x^2-x+3 > 0$ với mọi x nên phương trình có tập nghiệm $S = \{3; -4\}$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad PT &\Leftrightarrow \frac{x-2}{2009} - 1 + \frac{x-42}{1969} - 1 + \frac{x-121}{1890} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-2011}{2009} + \frac{x-2011}{1969} + \frac{x-2011}{1890} = 0 \\ &\Leftrightarrow x-2011=0 \Leftrightarrow x=2011 \end{aligned}$$

Câu 2.

$$\begin{aligned} PT &\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=7(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-7)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+xy+y^2-7=0 \text{ (Vi } x > y) \Leftrightarrow (x-y)^2=7-3xy \geq 0 \Rightarrow xy \leq 2 \end{aligned}$$

Vì $x > y > 0$ nên $xy = 2$, do đó $x = 2; y = 1$

Câu 3.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P &= \frac{x^2-8x+7}{x^2+1} = \frac{2x^2-8x+8-x^2-1}{x^2+1} = \frac{2(x-2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1 \Rightarrow P_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = 2 \\ P &= \frac{x^2-8x+7}{x^2+1} = \frac{9x^2+9-8x^2-8x-2}{x^2+1} = 9 - \frac{2(2x+1)^2}{x^2+1} \leq 9 \Rightarrow P_{\max} = 9 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ b)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (a-1)^2(a^2+a+1) \geq 0 \Leftrightarrow a^4-a^3-a+1 \geq 0 \quad (1)$$

Tương tự cũng có:

$$b^4-b^3-b+1 \geq 0 \quad (2)$$

$$c^4-c^3-c+1 \geq 0 \quad (3)$$

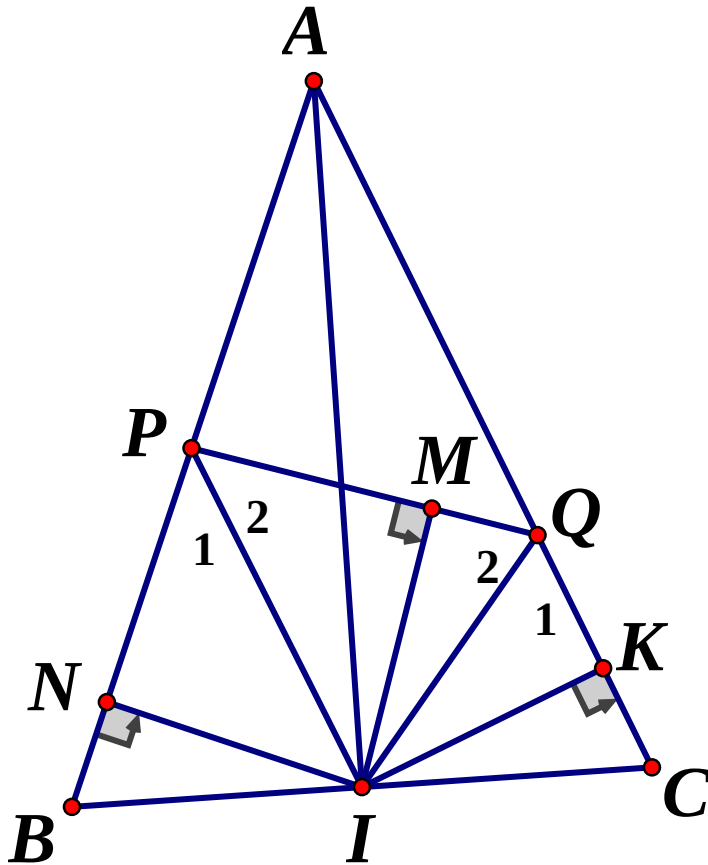
Cộng (1);(2);(3) ta được:

$$a^4-a^3-a+1+b^4-b^3-b+1+c^4-c^3-c+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 - (a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 - (a^3 + b^3 + c^3) \geq 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3 (Dfcm)$$

Câu 4.



a) Theo tính chất góc ngoài tam giác thì $\angle PIC = B + P_1$

Mặt khác, $\angle PIC = \angle PIQ + \angle QIC = B + \angle QIC$.

Suy ra $P_1 = \angle QIC \Rightarrow \triangle BPI \sim \triangle CIQ$

$$\Rightarrow \frac{BP}{BI} = \frac{CI}{CQ} \Rightarrow BP \cdot CQ = BI \cdot CI = \frac{a^2}{4} \text{ không đổi}$$

$$\text{b) Từ } \triangle BPI \sim \triangle CIQ \Rightarrow \frac{PI}{QI} = \frac{BP}{CI} \Rightarrow \frac{PI}{QI} = \frac{BP}{BI} \Rightarrow \triangle BPI \sim \triangle IPQ \Rightarrow P_1 = P_2$$

Do đó PI là tia phân giác của $\angle BPQ$

Chứng minh tương tự, cũng có QI là tia phân giác PQC

c) Kẻ $IM \perp PQ (M \in PQ), IN \perp AB (N \in AB)$. Vì PI, QI, AI là các tia phân giác và $\triangle ABC$ cân tại A nên suy ra $IM = IN = IK, AN = AK, PM = PN, QK = QM$

Có

$$\begin{aligned} b &= AP + PQ + AQ = AP + (PM + QM) + AQ \\ &= AP + PN + AQ + QK = AN + AK = 2.AK \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } \angle BAC = 60^\circ \text{ thì } AB = BC = CA = a \text{ và } CK = \frac{CI}{2} = \frac{a}{4}$$

$$\text{Suy ra } b = 2.AK = 2.(AC - CK) = 2.\left(a - \frac{a}{4}\right) = \frac{3a}{2} \text{ (đơn vị dài)}$$

Câu 5.

a) Đặt $a = 3^7, b = -2^8, c = (-1)^3$. Ta có:

$$\begin{aligned} 3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1 &= (3^7)^3 + (-2^8)^3 + (-1)^3 - 3.3^7.(-2^8).(-1) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

Mà $a + b + c = 3^7 + (-2^8) + (-1)^3 = 1930$ nên suy ra đpcm.

b) Ta có: $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = (a + b)(b + c)(c + a)$ nên từ đề bài suy ra $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b = 0$ thì $a = -b$, suy ra $a^{2009} = -b^{2009}$, do đó:
 $a^{2009} + b^{2009} + c^{2009} = c^{2009} = (a + b + c)^{2009}$

**PHÒNG GD & ĐT TAM ĐƯƠNG
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC 2013-2014
Môn thi: Toán
Thời gian làm bài: 120 phút**

Bài 1.

Đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất là 1 và thỏa mãn $f(1) = 5; f(2) = 11; f(3) = 21$

Tính $f(-1) + f(5)$

Bài 2.

a) Tìm tất cả các số nguyên n sao cho: $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Bài 3. Chứng minh rằng : $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10 > 0$ với mọi x

Bài 4.

a) Cho tam giác ABC , gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC . Gọi O, G, H lần lượt là giao điểm ba đường trung trực, ba đường cao, ba đường trung tuyến của tam giác ABC . Tính tỉ số $GH : GO$

b) Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = 2a, CD = a$. Hãy dựng điểm M trên đường thẳng CD sao cho đường thẳng AM cắt hình thang làm hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 5.

Cho $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

ĐÁP ÁN**Câu 1.**

Nhận xét: $g(x) = 2x^2 + 3$ thỏa mãn $g(1) = 5; g(2) = 11; g(3) = 21$

$Q(x) = f(x) - g(x)$ là đa thức bậc 4 có 3 nghiệm $x = 1; x = 2; x = 3$

Vậy $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$ ta có:

$$f(-1) = Q(-1) + 2 \cdot (-1)^2 + 3 = 29 + 24a$$

$$f(5) = Q(5) + 2 \cdot 5^2 + 3 = 173 + 24a$$

$$\Rightarrow f(-1) + f(5) = 202$$

Câu 2.

a)

$$\text{Giả sử } n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7 = y^2 \quad (y \in \mathbb{N})$$

$$\text{Ta có: } y^2 = (n^2 + n)^2 + n^2 + n + 7$$

$$\Rightarrow y^2 > (n^2 + n)^2$$

$$\Rightarrow y > |n^2 + n|$$

$$\Rightarrow y \geq |n^2 + n| + 1 \quad (\forall y \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow y^2 \geq (n^2 + n + 1)^2$$

$$\Rightarrow y^2 \geq (n^2 + n + 1)^2$$

$$\text{Thay } y^2 = (n^2 + n)^2 + n^2 + n + 7$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (n - 2)(n + 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq n \leq 2$$

Thử trực tiếp $n = 2; n = -3$ thỏa mãn

Vậy số nguyên n cần tìm là $n \in \{2; -3\}$

b)

Thêm xy vào hai vế của phương trình ta có:

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = xy(xy + 1)$$

Ta thấy xy & $xy + 1$ là hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0

$$\text{TH1: } xy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \Rightarrow x = y = 0$$

$$\text{TH2: } xy + 1 = 0 \text{ ta có } xy = -1 \text{ nên } (x; y) \in \{(1; -1); (-1; 1)\}$$

Thử lại ba cặp số $(0; 0); (-1; 1); (1; -1)$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 3.

$$\text{Ta có: } (x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 10 = (x - 1)(x - 6)(x - 3)(x - 4) + 10$$

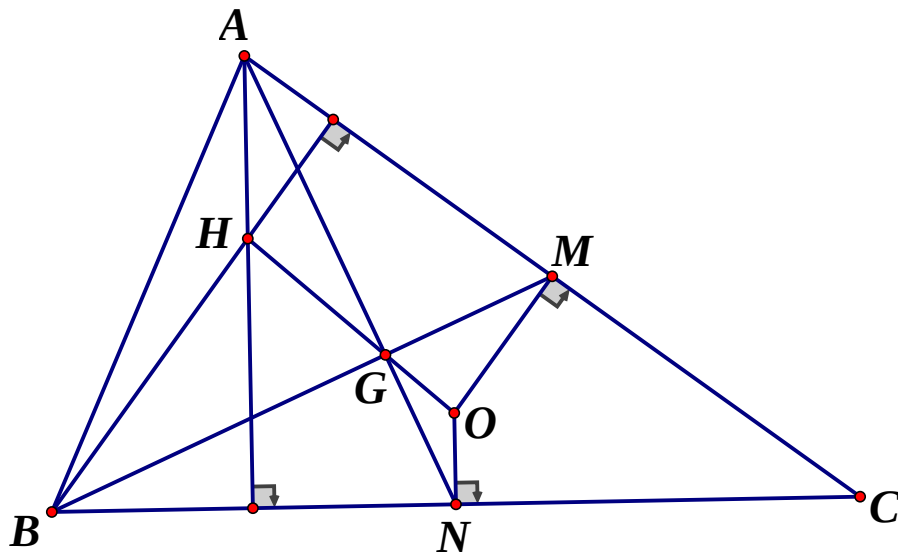
$$\begin{aligned}
&= (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10 \\
&= (x^2 - 7x + 9 - 3)(x^2 - 7x + 9 + 3) + 10 \\
&= (x^2 - 7x + 9)^2 - 9 + 10 = (x^2 - 7x + 9)^2 + 1 > 0 \quad (\forall x)
\end{aligned}$$

Vì $(x^2 - 7x + 9)^2 \geq 0$ với mọi x

Do đó : $(x^2 - 7x + 9)^2 + 1 > 0$ với mọi x (bài toán được chứng minh).

Câu 4.

a)



Ta có: $OM \parallel AH$ (vì cùng vuông góc với BC)

$ON \parallel BH$ (vì cùng vuông góc với AC)

$NM \parallel AB$ (đường trung bình của tam giác)

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle MNO$

Có: $BAH = NMO$ (góc có cạnh tương ứng song song)

$ABH = MNO$ (góc có cạnh tương ứng song song)

$$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle MNO (g.g) \Rightarrow \frac{NM}{BA} = \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2}$$

Xét $\triangle AGH$ và $\triangle MOG$ có:

$GAH = GMO$ (so le trong) (1)

$$\frac{GM}{GA} = \frac{1}{2} \text{ (tính chất trọng tâm) } (2)$$

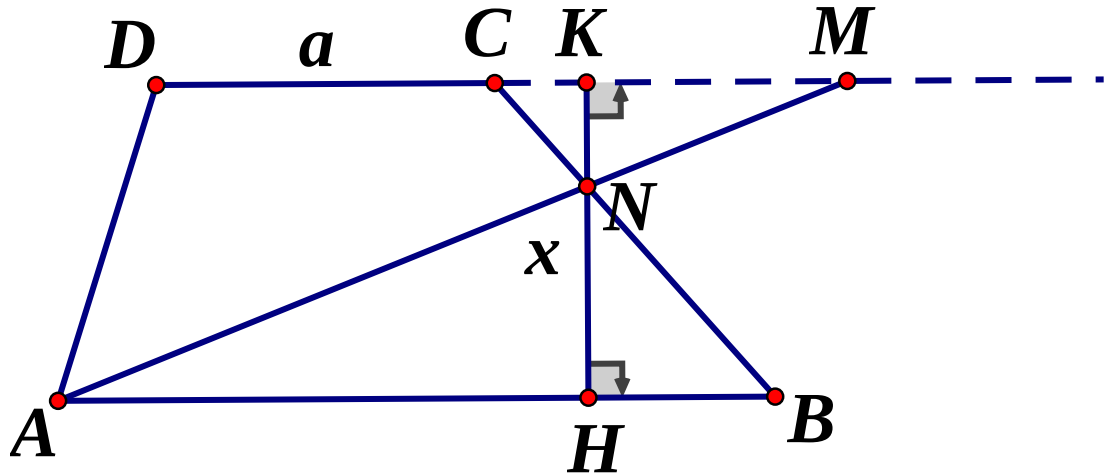
$$\frac{OM}{AH} = \frac{1}{2} \quad (cmt)$$

Từ (1);(2);(3) $\Rightarrow \Delta AHG \sim \Delta MOG(c.g.c) \Rightarrow AGH = MGO(4)$

Mặt khác : A, G, M thẳng hàng (5)

Từ (4),(5) $\Rightarrow H, G, O$ thẳng hàng và $\frac{GH}{GO} = \frac{AH}{OM} = 2$

b)



Gọi h là đường cao của hình thang $ABCD$

Giả sử đã dựng được điểm M thuộc CD sao cho đường thẳng AM cắt hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Gọi N là giao điểm của AM và BC

Đặt $S_1 = S_{ADCN}; S_2 = S_{ANB}; S = S_{ABCD}$.

Ta có: $\begin{cases} s_1 + s_2 = s \\ s_1 = s_2 \end{cases} \Rightarrow S_2 = S : 2 \quad (1)$

Kẻ đường cao NH của tam giác ANB và đặt $NH = x$ ta có:

$$s = \frac{1}{2}(2a + a)h = \frac{3ah}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{2}.2a.x = ax$$

$$\text{Thay vào (1): } ax = \frac{1}{2} \cdot \frac{3ah}{2} \Rightarrow x = \frac{3h}{4}$$

Áp dụng định lý Talet $\Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{1}{3}$ suy ra cách dựng:

Chia đoạn BC làm 4 phần bằng nhau, lấy điểm N trên BC sao cho $NC = \frac{1}{4}BC$

Đường thẳng AN cắt đường thẳng CD tại điểm M cần dựng

Câu 5. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow xyz &\geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \\ \Leftrightarrow xyz &\geq (1-2z)(1-2x)(1-2y) \\ \Leftrightarrow xyz &\geq 1-2(x+y+z)+4(xy+yz+zx)-8xyz \\ \Leftrightarrow xyz &\geq 1-2+4(xy+yz+zx)-8xyz \\ \Leftrightarrow 1+xyz &\geq 4(xy+yz+zx)-8xyz \\ \Leftrightarrow 1+\frac{1}{27} &\geq 4(xy+yz+zx)-8xyz \\ \Leftrightarrow \frac{7}{27} &\geq xy+yz+zx-2xyz(dfcm) \end{aligned}$$

**PHÒNG GD – ĐT
HUYỆN LẬP THẠCH**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
Năm học: 2011-2012**

Bài 1. (4 điểm)

1. Cho x, y thỏa mãn $y(x+y) \neq 0$ và $x^2 - xy = 2y^2$. Tính $A = \frac{3x-y}{x+y}$
2. Tính $B = \frac{2.1+1}{[1.(1+1)]^2} + \frac{2.2+1}{[2.(2+1)]^2} + \frac{2.3+1}{[3.(3+1)]^2} + \dots + \frac{2.99+1}{[99.(99+1)]^2}$

Bài 2. (4 điểm)

- 1) Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$
- 2) Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Bài 3. (3 điểm)

Giải phương trình: $\frac{x}{x^2+4x+4} + \frac{5x}{x^2+4} = -2$

Bài 4. (4 điểm)

Cho hình thoi ABCD có góc $ABC = 60^\circ$. Hai đường chéo cắt nhau tại O, E thuộc tia BC sao cho BE bằng ba phần tư BC, AE cắt CD tại F. Trên đoạn thẳng AB và CD lần lượt lấy hai điểm G và H sao cho CG song song với FH

1) Chứng minh rằng : $BG.DH = \frac{3}{4}BC^2$

2) Tính số đo góc GOH

Bài 5. (3 điểm)

Cho tam giác ABC , ba điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho

$\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB}$ & $\frac{BM}{BC} < \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Bài 6. (2 điểm)

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{y+2z} + \frac{y^3}{z+2x} + \frac{z^3}{x+2y} \geq \frac{1}{3}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1) Từ $y(x+y) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

$$x^2 - xy = 2y^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x+y)(x-2y) = 0$$

Vì $x+y \neq 0$ nên $x-2y=0 \Leftrightarrow x=2y$

Ta có: $A = \frac{3.2y - y}{2y + y} = \frac{5y}{3y} = \frac{5}{3}$

2) Với $n \geq 1$, ta có: $\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2 \cdot n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{99^2} - \frac{1}{100^2} = 1 - \frac{1}{100^2} = \frac{9999}{10000}$$

Bài 2.

1) Ta có: $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$. Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x)$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2)(x-1)q(x)$$

Với $x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6$ (1)

Với $x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có: $a=2$ & $b=4$

2) Ta có: $a^4+4=(a^2-2a+2)(a^2+2a+2)$

Vì $a \in \mathbb{C} \Rightarrow a^2-2a+2 \in \mathbb{C}; a^2+2a+2 \in \mathbb{C}$

Có $a^2+2a+2=(a+1)^2+1 \geq 1 \quad \forall a$

Và $a^2-2a+2=(a-1)^2+1 \geq 1 \quad \forall a$

Vậy a^4+4 là số nguyên tố thì $a^2+2a+2=1$ hoặc $a^2-2a+2=1$

Nếu $a^2-2a+2=1 \Rightarrow a=1$ thử lại thấy thỏa mãn

Nếu $a^2+2a+2=1 \Rightarrow a=-1$ thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 3.

Điều kiện $x \neq -2$

Với $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình: $\frac{x}{x^2+4x+4} + \frac{5x}{x^2+4} = -2$

Với $x \neq 0$ phương trình $\frac{x}{x^2+4x+4} + \frac{5x}{x^2+4} = -2$ trở thành:

$\frac{1}{x+\frac{4}{x}+4} + \frac{5}{x+\frac{4}{x}} = -2$ (*). Đặt $y = x + \frac{4}{x} + 2$ phương trình (*) trở thành:

$\frac{1}{y+2} + \frac{5}{y-2} = -2$

Điều kiện: $y \neq \pm 2$

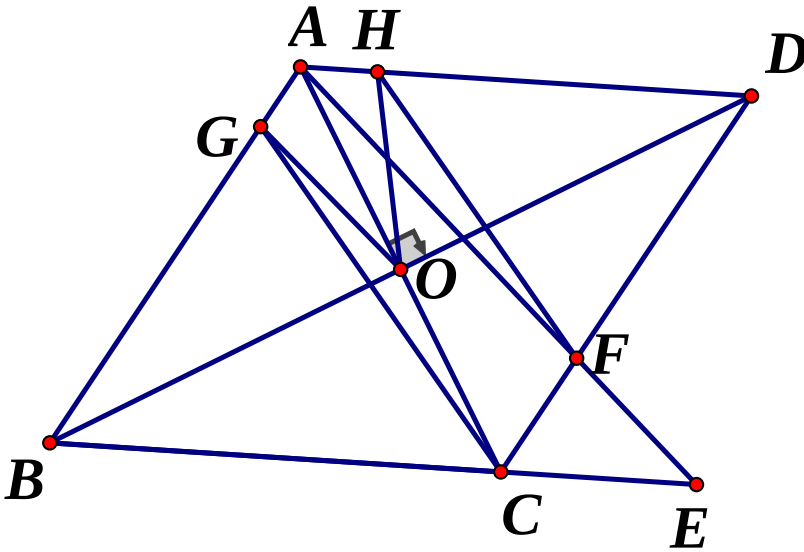
Phương trình trở thành: $y^2+3y=0 \Leftrightarrow y(y+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-3 \end{cases}$

Với $y=0$ thì $x+\frac{4}{x}+2=0 \Rightarrow x^2+2x+4=0 \Rightarrow (x+1)^2+3=0$ (VN)

Với $y=-3$ thì $x+\frac{4}{x}+2=-3 \Rightarrow x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-4 \end{cases}$ (TMDK)

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{-1; -4\}$

Bài 4.



1) Chứng minh $\triangle BCG \sim \triangle DHF \Rightarrow \frac{BC}{DH} = \frac{BG}{DF} \Rightarrow BC.DF = DH.BG$

Theo định lý Ta let tính được:

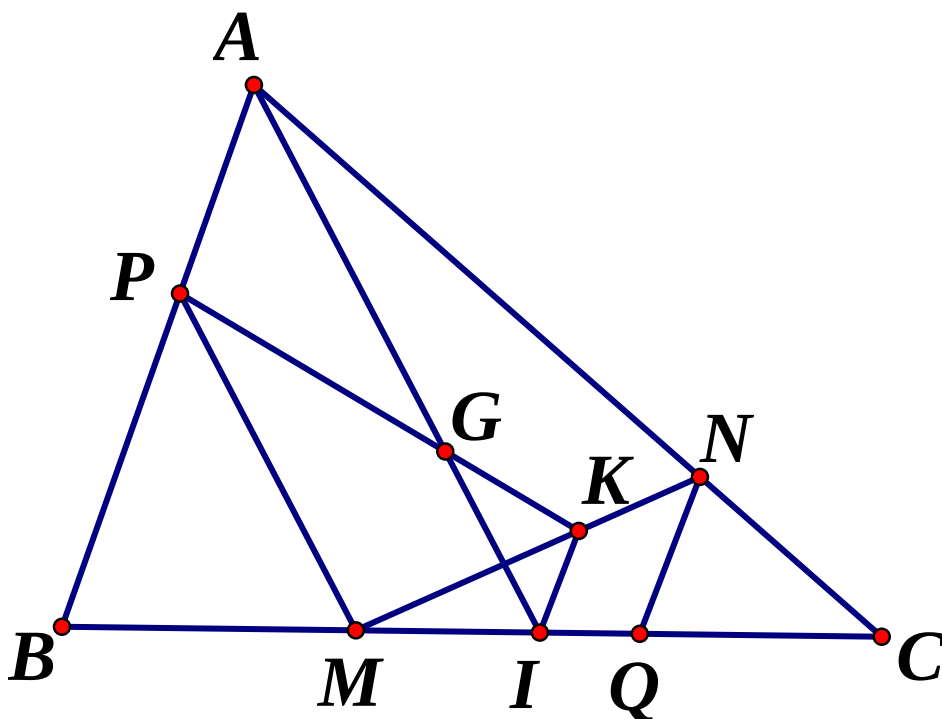
$$DF = \frac{3}{4} DC = \frac{3}{4} BC \Rightarrow BG.DH = \frac{3}{4} BC^2$$

2) Theo định lý Pytago tính được:

$$BO^2 = BC^2 - CO^2 = \frac{3}{4} BC^2 \Rightarrow BG.DH = BO^2 = BO^2 = BO.DO \Rightarrow \frac{BG}{DO} = \frac{BO}{DH}$$

Ta có $\angle GBO = \angle HDO = 30^\circ$. Nên $\triangle BGO \sim \triangle DOH \Rightarrow \angle GHO = 30^\circ$

Bài 5.



Qua N kẻ $NQ \parallel AB (Q \in BC)$, theo định lý Talet ta có:

$$\frac{QC}{BC} = \frac{CN}{CA} (gt) \Rightarrow \frac{QC}{BC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow QC = BM$$

$$\frac{QN}{AB} = \frac{CQ}{CB} (gt) \Rightarrow \frac{QN}{AB} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow AB = QN$$

Gọi I, K là trung điểm của BC và MN . Suy ra IK là đường trung bình của tam giác MNQ

$$, \text{ vậy } IK \parallel QN, IK = \frac{QN}{2} \Rightarrow IK \parallel AP; IK = \frac{AP}{2}$$

Gọi G là giao điểm của AI và PK , theo Talet ta có: $\frac{GI}{GA} = \frac{GK}{GP} = \frac{KI}{PA} = \frac{1}{2}$

Suy ra G là trọng tâm của tam giác MNP và G là trọng tâm của tam giác ABC

Bài 6.

$$\text{Ta có: } \frac{9x^3}{y+2z} + x(y+2z) \geq 6x^2; \frac{9y^3}{z+2x} + y(z+2x) \geq 6y^2; \frac{9z^3}{x+2y} + z(x+2y) \geq 6z^2$$

$$\text{Lại có: } (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

Nên ta có:

$$\frac{9x^3}{y+2z} + \frac{9y^3}{z+2x} + \frac{9z^3}{x+2y} + 3(xy + yz + xz) \geq 6(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y+2z} + \frac{y^3}{z+2x} + \frac{z^3}{x+2y} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$

**PHÒNG GD & ĐT TÂY HÒA
TRƯỜNG THCS TÂY SƠN**

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2014-2015
MÔN: TOÁN – LỚP 8
Thời gian: 150 phút**

Bài 1. (4 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ tại $x = 16$

b) Cho $x + y = a$ và $xy = b$. Tính giá trị của biểu thức sau theo a và b : $B = x^2 + y^2$

Bài 2. (4 điểm)

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = 4 - x^2 + 2x$

b) Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng tổng của ba tích của hai trong ba số ấy bằng 242

Bài 3. (4 điểm)

a) Tìm x , biết: $4(x+1)^2 + (2x-1)^2 - 8(x-1)(x+1) = 11$

b) Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 195$

Bài 4. (4 điểm)

Tứ giác $ABCD$ có $B + D = 180^\circ$ và $CB = CD$. Chứng minh AC là tia phân giác của góc A .

Bài 5. (4 điểm)

Một tam giác có đường cao và đường trung tuyến chia góc ở đỉnh thành ba phần bằng nhau. Tính các góc của tam giác đó.

ĐÁP ÁN**Câu 1.**

a) Thay $x=16$ vào biểu thức ta được:

$$\begin{aligned}A &= 16^4 - 17.16^3 + 17.16^2 - 17.16 + 20 \\&= 16^4 - (16+1).16^3 + (16+1).16^2 - (16+1).16 + (16+4) \\&= 16^4 - 16^4 - 16^3 + 16^3 + 16^2 - 16^2 - 16 + 16 + 4 = 4\end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A tại $x=16$ là 4.

b)

$$B = x^2 + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - 2xy = (x+y)^2 - 2xy$$

Thay $x+y=a$ và $xy=b$ vào biểu thức ta được: $B = a^2 - 2b$

Vậy giá trị của biểu thức B tại $x+y=a$ và $xy=b$ là $a^2 - 2b$

Câu 2.

$$\text{a) } C = 4 - x^2 + 2x = 5 - (x^2 - 2x + 1) = 5 - (x-1)^2 \leq 5$$

$$\text{Vậy } C_{\max} = 5 \Leftrightarrow x = 1$$

b) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $x, x+1, x+2$. Ta có:

$$x(x+1) + x(x+2) + (x+1)(x+2) = 242$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + x^2 + 2x + x^2 + 3x + 2 = 242$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 2 = 242 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 240$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 80 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 81$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 9^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=9 \\ x+1=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \text{ (TM)} \\ x=-10 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy ba số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 8;9;10

Câu 3.

a)

$$\begin{aligned}
&4(x+1)^2 + (2x-1)^2 - 8(x-1)(x+1) = 11 \\
&\Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1) + (4x^2 - 4x + 1) - 8(x^2 - 1) = 11 \\
&\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 - 8x^2 + 8 = 11 \\
&\Leftrightarrow 4x + 13 = 11 \\
&\Leftrightarrow 4x = -2 \Leftrightarrow x = -0,5
\end{aligned}$$

b)

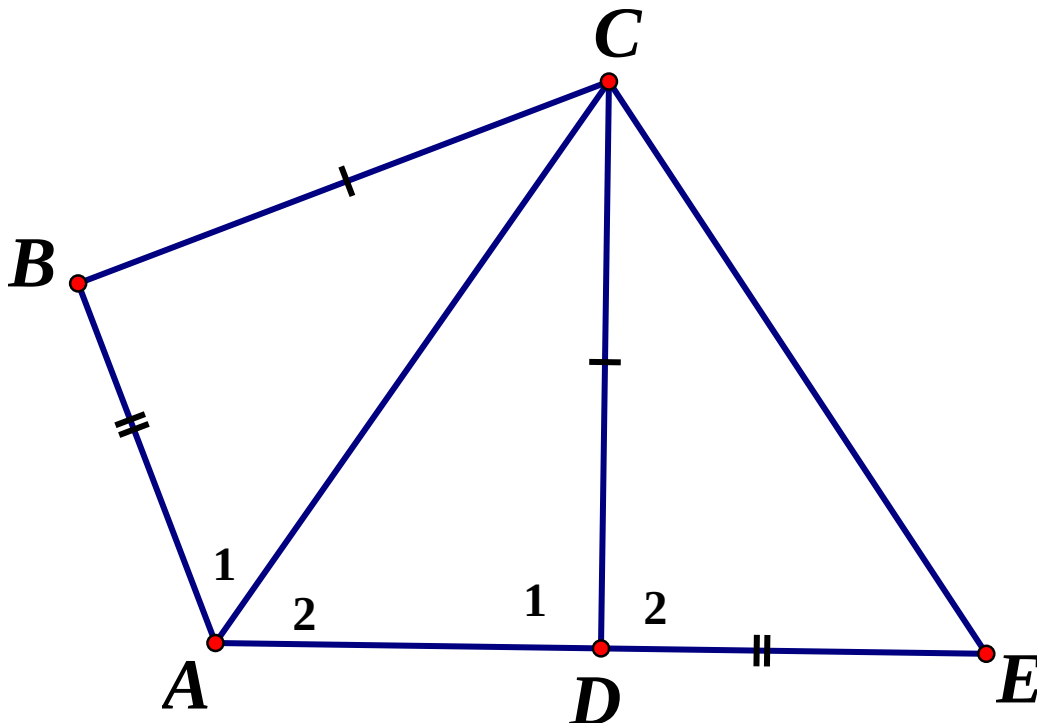
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{14}$$

$$\text{Do đó: } \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{14} \text{ và } x + y + z = 195$$

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{14} = \frac{x+y+z}{15+10+14} = \frac{195}{39} = 5$$

$$\text{Vậy } x = 5.15 = 75; y = 5.10 = 50; z = 5.14 = 70$$

Câu 4.



Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = DA$

Ta có: $\angle BAC = \angle DEC$ và $\angle ABC = \angle EDC \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle EDC$

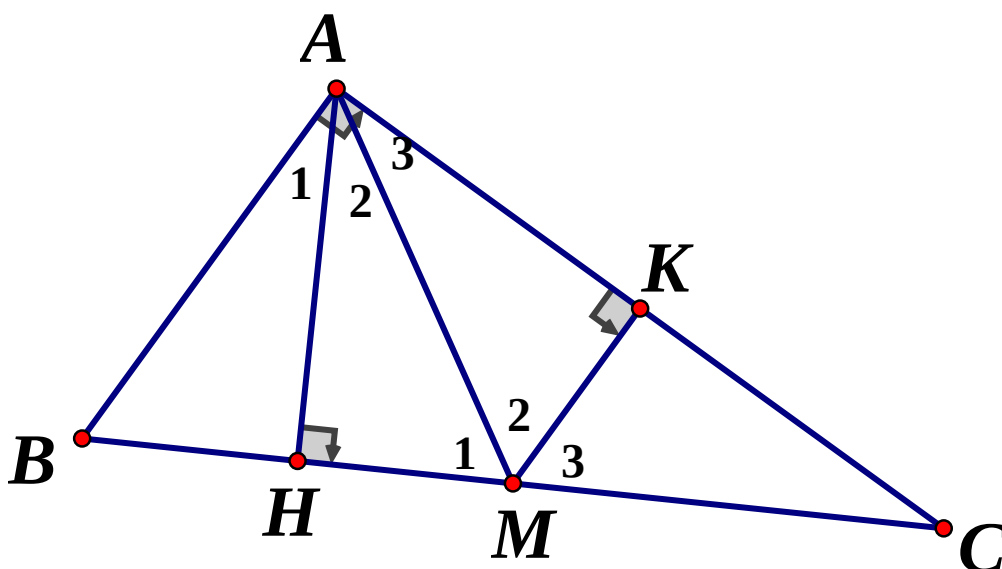
Xét $\triangle CBA$ và $\triangle CDE$ có: $CB = CD(gt)$; $B = D_2$; $BA = DE$

$\Rightarrow \triangle CBA = \triangle CDE(c.g.c) \Rightarrow A_1 = E \quad (1); CA = CE$

Xét $\triangle CAE$ có $CA = CE$ nên là tam giác cân $\Rightarrow A_2 = E \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A_1 = A_2 \Rightarrow AC$ là tia phân giác của góc A

Câu 5.



Kẻ $MH \perp BC$. Khi đó $\triangle AMH = \triangle AKM$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow MK = MH \quad (1)$

Xét $\triangle ABM$ có AH vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên nó cân tại A

$\Rightarrow AH$ cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow MH = BH = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}MC \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MK = \frac{1}{2}MC \Rightarrow \triangle MKC$ là nửa tam giác đều

Do đó: $C = 30^\circ \Rightarrow M_3 = 60^\circ \Rightarrow HMK = 120^\circ$

Vì $\triangle AHM = \triangle AKM$ nên $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}MHK = \frac{1}{2}.120^\circ = 60^\circ$

Suy ra $A_3 = 30^\circ \Rightarrow A = 3.A_3 = 3.30^\circ = 90^\circ$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A, $B = 60^\circ; C = 30^\circ$

Thời gian: 120 phút (không kể giao đề)

Bài 1. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3.(x^2 - 7)^2 - 36x$

b) Dựa vào kết quả trên hãy chứng minh:

$A = n^3.(n^2 - 7) - 36n$ chia hết cho 210 với mọi số tự nhiên n

Bài 2. (2 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} (x \neq -1; 1)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức tại $x = -1\frac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Bài 3. (1,0 điểm) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2004$

Tính: $M = \frac{2004a}{ab + 2004a + 2004} + \frac{b}{bc + b + 2004} + \frac{c}{ac + c + 1}$.

Bài 4. (4 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi P là giao điểm của AN với DM

a) Chứng minh : tam giác APM là tam giác vuông.

b) Tính diện tích của tam giác APM

c) Chứng minh tam giác CPD là tam giác cân.

Bài 5. (1 điểm) Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho: $x^2 = y^2 + 2y + 13$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned}
a) x^3(x^2 - 7)^2 - 36x &= x \left[(x^3 - 7x)^2 - 36 \right] \\
&= x(x^3 - 7x - 6)(x^3 - 7x + 6) = x(x^3 - x - 6x - 6)(x^3 - x - 6x + 6) \\
&= x \left[x(x-1)(x+1) - 6(x+1) \right] \left[x(x-1)(x+1) - 6(x-1) \right] \\
&= x(x+1)(x^2 - x - 6)(x-1)(x^2 + x - 6) \\
&= x(x+1)(x^2 - 3x + 2x - 6)(x-1)(x^2 + 3x - 2x - 6) \\
&= x(x+1)(x-1)[x(x-3) + 2(x-3)][x(x+3) - 2(x+3)] \\
&= x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x-2)(x+3)
\end{aligned}$$

b) Theo phần a ta có:

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = n(n+1)(n-1)(n-3)(n+2)(n-2)(n+3)$$

Đây là tích của 7 số nguyên liên tiếp. Trong 7 số nguyên liên tiếp có:

- Một bội của 2 nên A chia hết cho 2
- Một bội của 3 nên A chia hết cho 3
- Một bội của 5 nên A chia hết cho 5
- Một bội của 7 nên A chia hết cho 7.

Mà 2;3;5;7 đôi một nguyên tố cùng nhau nên $A:(2.3.5.7)$ hay $A:210$

Câu 2.

a) Với $x \neq 1; -1$ thì:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1 - x^3 - x + x^2}{1 - x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2) - x(1+x)} \\
&= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\
&= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2) \cdot (1-x)
\end{aligned}$$

b) Tại $x = -1\frac{2}{3} = \frac{-5}{3}$ thì A có giá trị là

$$\left[1 + \left(-\frac{5}{3} \right)^2 \right] \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{3} \right) \right) = \left(1 + \frac{25}{9} \right) \cdot \left(1 + \frac{5}{3} \right) = 10 \frac{2}{27}$$

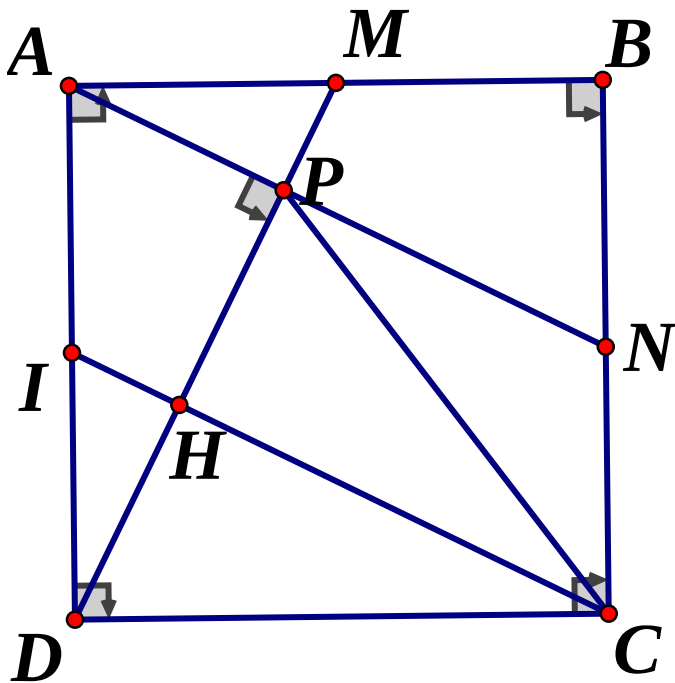
c) Với $x \neq -1; 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0$ (1)

Vì $1+x^2 > 0$ nên (1) $\Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Câu 3. Thay $2004 = abc$ vào M ta có:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{a^2bc}{ab+a^2bc+abc} + \frac{b}{bc+b+abc} + \frac{c}{ac+c+1} \\
 &= \frac{a^2bc}{ab(1+ac+c)} + \frac{b}{b(c+1+ac)} + \frac{c}{ac+c+1} \\
 &= \frac{ac}{1+ac+c} + \frac{1}{c+1+ac} + \frac{c}{ac+c+1} \\
 &= \frac{ac+1+c}{1+ac+c} = 1
 \end{aligned}$$

Câu 4.



a) Chứng minh $\triangle ADM = \triangle BAN (c.g.c) \Rightarrow A_1 = D_1$

Mà $D_1 + M_1 = 90^\circ (\triangle ADM \text{ vuông tại } A)$

Do đó: $A_1 + M_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle APM = 90^\circ$. Hay $\triangle APM$ vuông tại A

b) Tính được: $AP = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ cm}, AM = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm} \Rightarrow S_{APM} = \frac{4}{5} (\text{cm}^2)$

c) Gọi I là trung điểm của AD. Nối C với I; CI cắt DM tại H

Chứng minh tứ giác AICN là hình bình hành

$\Rightarrow AN \parallel CI$ mà $AN \perp DM$ nên $CI \perp DM$

Hay CH là đường cao trong tam giác CPD(1)

Vận dụng định lý về đường trung bình trong $\triangle ADP$ chứng minh được H là trung điểm của $DP \Rightarrow CH$ là trung tuyến trong $\triangle CPD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CPD$ cân tại C .

Câu 5.

Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $(x+y+1)(x-y-1)=12$

Lập luận để có $x+y+1 > x-y-1$ và $x+y+1; x-y-1$ là các ước dương của 12. Từ đó ta có các trường hợp:

$x+y+1$	12	6	4
$x-y-1$	1	2	3
x	$\frac{13}{2}$	4	$\frac{7}{2}$
y	$\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

Mà x, y nguyên dương nên $(x; y) = (4; 1)$

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2013-2014

MÔN THI: TOÁN 8

Ngày thi: 12/04/2014

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

Câu 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $A = \left[n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \right] : 7$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

b) Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 4. (6 điểm)

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C (C khác A). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC, đường thẳng này cắt By tại D. Từ O hạ đường vuông góc OM xuống CD (M thuộc CD)

- a) Chứng minh $OA^2 = AC \cdot BD$
- b) Chứng minh tam giác AMB vuông
- c) Gọi N là giao điểm của BC và AD. Chứng minh $MN \parallel AC$

Câu 5. (2 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$a) A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$$

$$A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1) - 3x(x+1)}{3x} \right] : \frac{x-1}{x}$$

$$A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1}$$

$$A = 2 \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

$$b) \text{ Với } x \neq 0; x \neq \pm 1, \text{ Ta có: } A = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1} \quad A = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $(x-1)$ phải là ước của 2 $\Rightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Đối chiếu điều kiện tìm được $x = 2$ hoặc $x = 3$ thỏa mãn

Câu 2.

$$\begin{aligned}
\text{a) Ta có: } A &= \left[n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \right] \\
&= n \left[n(n^2 - 7) - 6 \right] \left[n(n^2 - 7) + 6 \right] = n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6) \\
&= n(n^3 - n - 6n - 6)(n^3 - n - 6n + 6) = n \left[(n^2 - 1) - 6(n + 1) \right] \left[n(n^2 - 1) - 6(n - 1) \right] \quad \text{Do} \\
&= n(n + 1)(n^2 - n - 6)(n - 1)(n^2 + n - 6) = n(n + 1)(n + 2)(n - 3)(n - 1)(n - 2)(n + 3) \\
\text{đó } A &\text{ là tích của 7 số nguyên liên tiếp } \Rightarrow A : 7 \quad \forall n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } P &= n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\
&= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = \left[(n - 1)^2 + 1 \right] \left[(n + 1)^2 + 1 \right] \\
\text{Vì } n &\text{ là số tự nhiên nên } (n + 1)^2 + 1 \geq 2. \text{ Như vậy muốn } P \text{ là số nguyên tố thì ta phải có} \\
(n - 1)^2 + 1 &= 0 \Leftrightarrow (n - 1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1 \\
\text{Khi đó } P &= 5 \text{ là số nguyên tố}
\end{aligned}$$

Câu 3.

a) Ta có:

$$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x + 5)(x + 6)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x + 6)(x + 7)$$

$$\text{TXĐ: } x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 & (tm) \\ x = 2 & (tm) \end{cases}$$

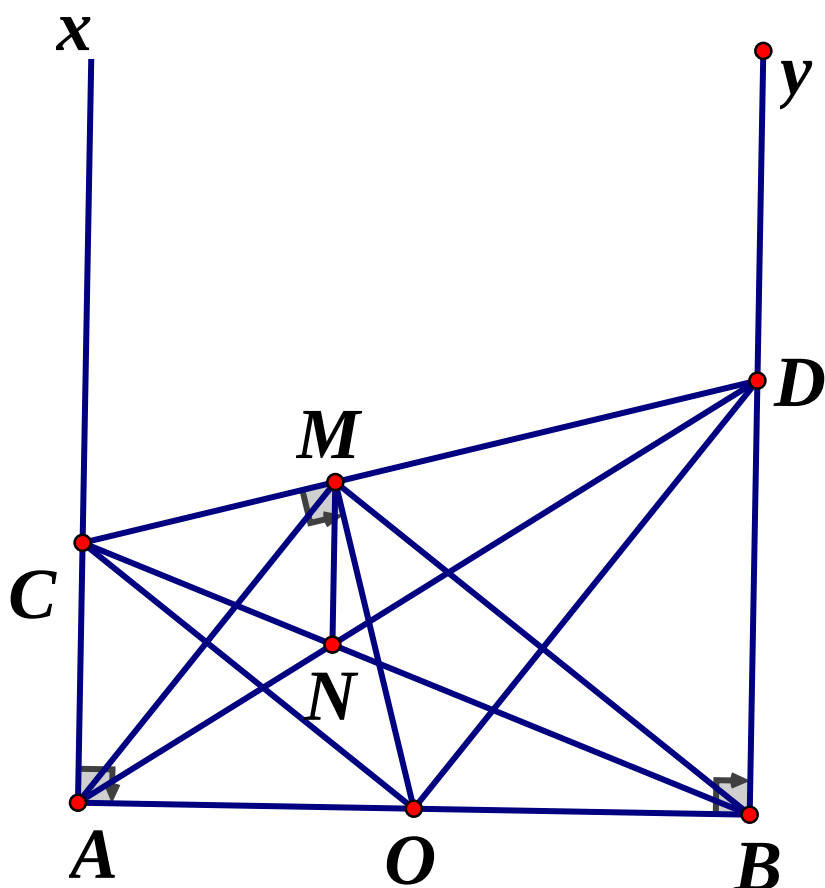
b) Đặt $b+c-a=x>0$; $c+a-b=y>0$; $a+b-c=z>0$. Ta có: $x, y, z > 0$

$$\text{Từ đó suy ra : } a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

$$\text{Thay vào ta được: } A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

$$\text{Từ đó suy ra } A \geq \frac{1}{2}(2+2+2) \Rightarrow A \geq 3. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c$$

Câu 4.



a) Xét $\triangle ACO$ và $\triangle BOD$ có:

$$A = B = 90^\circ; \angle COA = \angle ODB \text{ (cùng phụ với } \angle DOB)$$

$$\text{Nên } \triangle ACO \sim \triangle BOD (g.g) \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{BD}{BO} \Rightarrow AO \cdot BO = AC \cdot BD$$

$$\text{Mà } AO = BO \text{ nên } AO^2 = AC \cdot BD$$

b) Xét $\triangle CMO$ và $\triangle OMD$ có:

$$\angle CMO = \angle OMD = 90^\circ; \angle OCM = \angle DOM \text{ (cùng phụ với } \angle COM)$$

$$\Rightarrow \triangle CMO \sim \triangle OMD \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{OM}{MD} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \triangle ACO \sim \triangle BOD \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{AO}{OD} \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{OB}{BD} \text{ (Do } AO = OB) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{OM}{MD} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \triangle OMD \sim \triangle OBD$

$\Rightarrow \angle MOD = \angle BOD \Rightarrow \triangle OMD = \triangle OBD$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow OM = OB = OA \Rightarrow \triangle AMB$ vuông tại M

c) Ta có: $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \frac{CN}{NB} = \frac{AC}{BD}$

Mà $BD = MD$ ($\triangle OMD = \triangle OBD$)

Tương tự ta chứng minh $AC = CM$

Nên $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM} \Rightarrow MN \parallel BD \parallel AC$

Câu 5.

- Nhận xét : có $a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(c + a)$

Tương tự: $b + ca = (b + a)(b + c)$; $c + ab = (c + a)(c + b)$

Do đó: $VT = \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} \geq 2(a+b)$$

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(a+c)$$

$$\frac{(b+a)(b+c)}{a+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(b+c)$$

Vậy $2.VT \geq 4(a+b+c) = 4 \Leftrightarrow VT \geq 2$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

ĐỀ KIỂM TRA HỌC SINH GIỎI

Năm học 2015-2016

Bài 1. (6 điểm) Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

d) Tìm x để $P > 0$

Bài 2. (3 điểm) Giải phương trình:

a) $\frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$

b) $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

c) $||x-2|+3|=5$

Bài 3. (2 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó.

Bài 4. (7 điểm)

Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của C qua P.

a) Tứ giác AMDB là hình gì ?

b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AD. Chứng minh $EF \parallel AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật MEAF không phụ thuộc vào vị trí điểm P

d) Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4\text{cm}$, $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

Bài 5. (2 điểm) a) Chứng minh rằng: $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

b) Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

ĐKXD: $x \neq \frac{1}{2}; x \neq \frac{5}{2}; x \neq \frac{-3}{2}; x \neq \frac{7}{4}; x \neq 4$

a) Rút gọn $P = \frac{2x-3}{2x-5}$

$$b) |x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+) x = \frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{1}{2} \quad ; +) x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{2}{3}$$

$$c) P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\}$$

$$x-5 = -2 \Rightarrow x = 3(tm)$$

$$x-5 = -1 \Rightarrow x = 4(ktm)$$

$$x-5 = 1 \Rightarrow x = 6(tm)$$

$$x-5 = 2 \Rightarrow x = 7(tm)$$

Kết luận: $x \in \{3; 6; 7\}$ thì P nhận giá trị nguyên

$$d) P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5}$$

Ta có: $1 > 0$

$$\text{Để } P > 0 \text{ thì } \frac{2}{x-5} > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$$

Với $x > 5$ thì $P > 0$

Bài 2.

a)

$$\frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)} - 1 = 12 \cdot \left[\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3(x-1)} \right] \quad DK : x \neq -4; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3.15x - 3(x+4)(x-1) = 3.12(x-1) + 12(x+4)$$

.....

$$\Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (TM)} \\ x = -4 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

$$S = \{0\}$$

b)

$$\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25} - 1 \right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2 \right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3 \right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} \right) = 0 \Leftrightarrow 123-x=0 \Leftrightarrow x=123$$

$$S = \{123\}$$

c) $\|x-2\|+3=5$

Ta có: $|x-2| \geq 0 \forall x \Rightarrow |x-2|+3 > 0$ nên $\|x-2\|+3 = |x-2|+3$

Phương trình được viết dưới dạng:

$$|x-2|+3=5 \Leftrightarrow |x-2|=5-3 \Leftrightarrow |x-2|=2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 4\}$

Bài 3.

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(km)$ ($x > 0$)

Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là: $\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10} (km/h)$ $3h20' = 3\frac{1}{3}(h)$

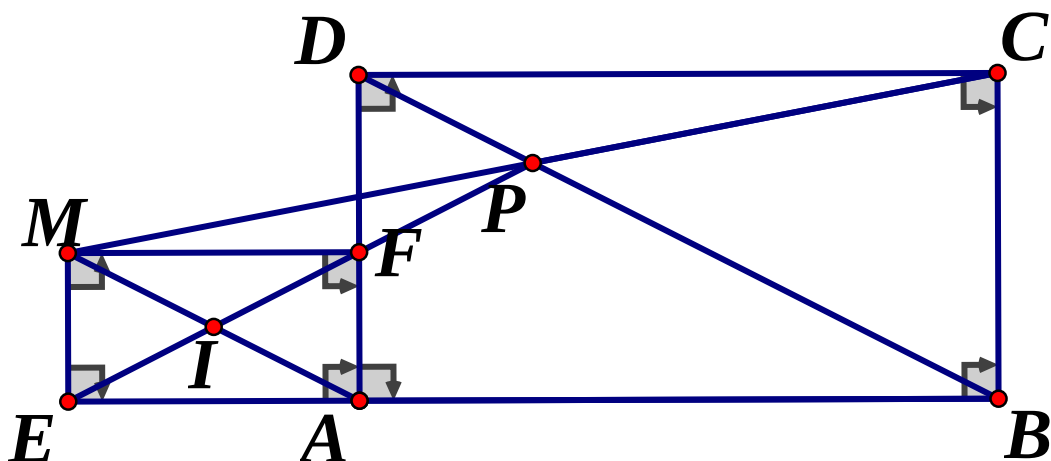
Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên $5km/h$ là: $\frac{3x}{10} + 5 (km/h)$

Theo đề bài ta có phương trình: $\left(\frac{3x}{10} + 5 \right) \cdot 3 = x \Leftrightarrow x = 150(tm)$

Vậy khoảng cách giữa A và B là $150km$

Vận tốc dự định là: $\frac{3 \cdot 150}{10} = 45 (km/h)$

Bài 4.



a) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật ABCD

$\Rightarrow PO$ là đường trung bình tam giác CAM

$\Rightarrow AM \parallel PO \Rightarrow AMDB$ là hình thang

b) Do $AM \parallel BD$ nên $OBA = MAE$ (đồng vị)

Tam giác AOB cân ở O nên $OBA = OAB$

Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật AEMF thì $\triangle AIE$ cân ở I nên $IAE = IEA$

Từ chứng minh trên : có $FEA = OAB$, do đó: $EF \parallel AC$ (1)

Mặt khác IP là đường trung bình của $\triangle MAC$ nên $IP \parallel AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) $\triangle MAF \sim \triangle DBA (g.g) \Rightarrow \frac{MF}{FA} = \frac{AD}{AB}$ Không đổi

d) Nếu $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{PD}{9} = \frac{PB}{16} = k \Rightarrow PD = 9k, PB = 16k$

Nếu $CP \perp BD$ thì $\triangle CBD \sim \triangle DCP (g.g) \Rightarrow \frac{CP}{PD} = \frac{PB}{CP}$

Do đó: $CP^2 = PB \cdot PD$ hay $(2,4)^2 = 9 \cdot 16k^2 \Rightarrow k = 0,2$

$PD = 9k = 1,8(cm)$; $PB = 16k = 3,2(cm)$ $BD = 5(cm)$

Chứng minh $BC^2 = BP \cdot BD = 16$, do đó: $BC = 4cm$, $CD = 3cm$.

Bài 5.

a) Ta có: $2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$

Vì $2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots) = 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (1)

Vì $2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots) = 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

$$b) \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2 \cdot (xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

Vì $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$

$\Rightarrow$ BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu “=” xảy ra khi $x = y$

Trường THCS Hồng Dương

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 8

Năm học: 2013-2014

Thời gian : 120 phút

Bài 1. (6 điểm)

a) Giải phương trình: $y^2 - 2y + 3 = \frac{6}{x^2 + 2x + 4}$

b) Giải bất phương trình: $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \geq 0$

Bài 2. (5 điểm)

2.1) Cho đa thức $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + m$

a) Tìm m để $P(x)$ chia hết cho $2x + 3$

b) Với m vừa tìm được ở câu a, hãy tìm số dư khi chia $P(x)$ cho $3x - 2$ và phân tích ra các thừa số bậc nhất

2.2) Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Biết $P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 16; P(5) = 25$. Tính $P(6); P(7)$?

Bài 3. (2 điểm)

Cho $a, b, c \in [0; 1]$ và $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$

Bài 4. (7 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ ($AC > BD$). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, D lên AC;

H, K lần lượt là hình chiếu của C trên AB và AC

- a) Tứ giác $DFBE$ là hình gì ? Vì sao ?
- b) Chứng minh: $\triangle CHK \sim \triangle BCA$
- c) Chứng minh: $AC^2 = AB.AH + AD.AK$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a)

$$y^2 - 2y + 3 = \frac{6}{x^2 + 2x + 4} \Leftrightarrow (y^2 - 2y + 3)(x^2 + 2x + 4) = 6$$

$$\Leftrightarrow [(y-1)^2 + 2] \cdot [(x+1)^2 + 3] = 6$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot (y-1)^2 + 3(y-1)^2 + 2(x+1)^2 + 6 = 6$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot (y-1)^2 + 3(y-1)^2 + 2(x+1)^2 = 0$$

$$\forall (x+1)^2 \geq 0; (y-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$b) \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} \geq 0 \quad (x \neq 1; 2; 3; 4; 5; 6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x-2)(x-6)} \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 6 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

Kết

hợp với điều kiện ta có $2 < x < 6$ và $x \neq 3; 4; 5$

Bài 2.

2.1)

$$a) P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 6x^3 + 9x^2 - 16x^2 - 24x + 8x + 12 + m - 12$$

$$\begin{aligned}
&= 3x^2(2x+3) - 8x(2x+3) + 4(2x+3) + m - 12 \\
&= (2x+3)(3x^2 - 8x + 4) + m - 12
\end{aligned}$$

$$\text{Để } P(x):(2x+3) \text{ thì } m-12=0 \Leftrightarrow m=12$$

$$\text{b) Với } m=12; P(x)=6x^3-7x^2-16x+12=6x^3-4x^2-3x^2+2x-18x+12$$

$$= 2x^2(3x-2) - x(3x-2) - 6(3x-2) = (3x-2)(2x^2-x-6)$$

Phân tích $P(x)$ ra tích các thừa số bậc nhất:

$$P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = (2x+3)(3x-2)(x-2)$$

$$2.2) \text{ Vì } P(1)=1; P(2)=4; P(3)=9; P(4)=16; P(5)=25$$

$$\text{Mà } P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + x^2$$

$$\Rightarrow P(6) = 5.4.3.2.1 + 6^2 = 156$$

$$\Rightarrow P(7) = 6.5.4.3.2 + 7^2 = 769$$

Bài 3.

$$\text{Vì } a, b, c \in [0;1] \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$$

$$\text{Ta có: } (1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ac) - abc \quad (\text{Vi } a+b+c=2)$$

$$= -1 + (ab+bc+ac) - abc \geq 0$$

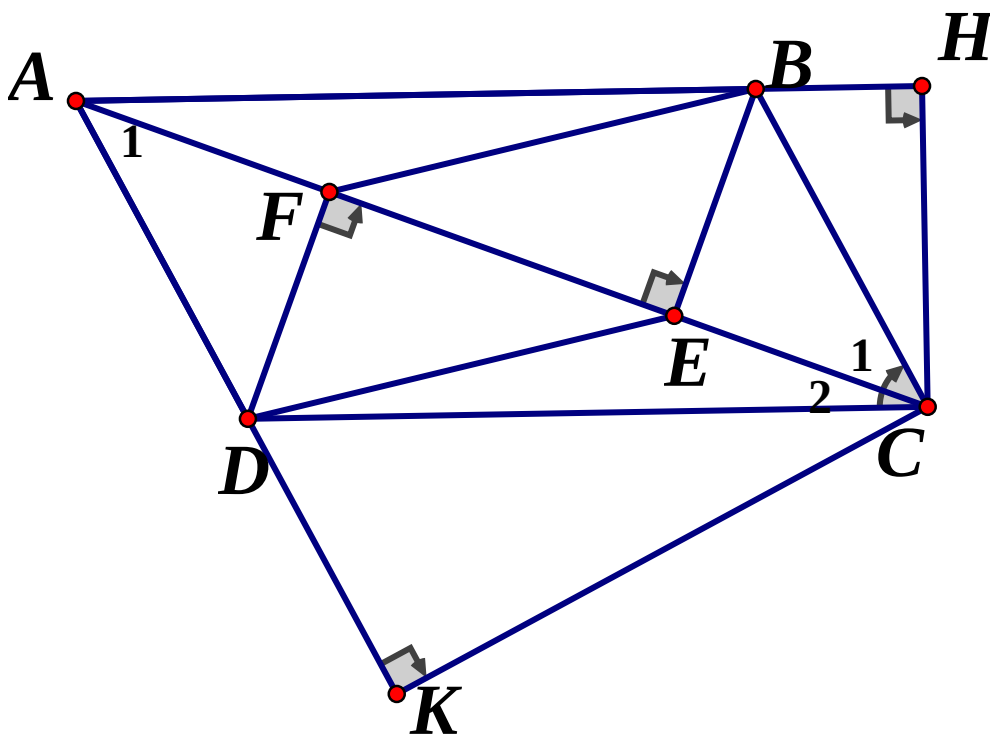
$$\Leftrightarrow ab+bc+ac \geq abc+1 \geq 1 \quad (\text{Vi } abc \geq 0) \Rightarrow -2(ab+bc+ac) \leq -2$$

$$\text{Lại có: } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 4 - 2(ab+bc+ac) \leq 4 - 2 = 2$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 2 \Leftrightarrow (a, b, c) \text{ là hoán vị của } (0;1;1)$$

Bài 4.



a) $DF \parallel BE$ (vì cùng vuông góc với AC)

$$\triangle AFD = \triangle CEB \text{ (Cạnh huyền – góc nhọn)} \Rightarrow DF = BE$$

$\Rightarrow DFBE$ là hình bình hành

b) $BC \parallel AK \Rightarrow \angle BCK = 90^\circ$

$$\angle ABC = 90^\circ + \angle BCH \text{ (góc ngoài của } \triangle CHB)$$

$$\angle HCK = 90^\circ + \angle BCH \Rightarrow \angle ABC = \angle HCK$$

Có: $\angle CKD = \angle ACD + \angle DAC$ (góc ngoài của $\triangle DKC$)

$$\angle HBC = \angle BAC + \angle BCA \text{ mà } \angle BCA = \angle DAC; \angle BAC = \angle DCA$$

$$\Rightarrow \triangle CKD \sim \triangle CBH \Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow \triangle CHK \sim \triangle BCA (c.g.c)$$

$$\text{c) } \triangle AEB \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AH} \Rightarrow AE \cdot AC = AB \cdot AH \quad (1)$$

$$\triangle AFD \sim \triangle AKC \Rightarrow \frac{AF}{AK} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AF \cdot AC = AD \cdot AK \quad (2)$$

$$\text{Cộng (1) và (2) về theo về ta có: } AE \cdot AC + AF \cdot AC = AB \cdot AH + AD \cdot AK \quad (3)$$

$$\text{Mà } \triangle AFD = \triangle CEB (cmt) \Rightarrow AF = CE$$

$$(3) \Leftrightarrow AC.(AE + EC) = AB.AH + AD.AK \Leftrightarrow AC^2 = AB.AH + AD.AK$$

TRƯỜNG THCS
CỦ CHI

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN LỚP 8
NĂM HỌC 2018-2019

Câu 1. (6 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 2. (5 điểm)

a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 3. (3 điểm)

a) Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

b) Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính $a^{2011} + b^{2011}$

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M là một điểm di động trên AC . Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với tia BM cắt tia BM tại H , cắt tia BA tại O . Chứng minh rằng:

a) $OA.OB = OC.OH$

b) OHA có số đo không đổi

c) Tổng $BM.BH + CM.CA$ không đổi

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXD: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

b) Đặt $b+c-a=x>0$; $c+a-b=y>0$; $a+b-c=z>0$

$$\text{Từ đó suy ra } a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

Thay vào ta được:

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

$$\text{Từ đó suy ra } A \geq \frac{1}{2}(2+2+2) \text{ hay } A \geq 3 \Leftrightarrow a=b=c$$

Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a+b$ chia hết cho 3

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

b)

$$n^5 + 1 : (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n+1) : (n+1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n-1 : n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow n(n-1) : n^2 - n + 1$$

Hay $n^2 - n : n^2 - n + 1 \Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : (n^2 - n + 1)$

$$\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1$$

Xét hai trường hợp:

$$+) n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$+) n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 3.

$$\text{a. Từ } a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

$$\text{b) } (a^{2001} + b^{2001})(a + b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a+b) - ab = 1$$

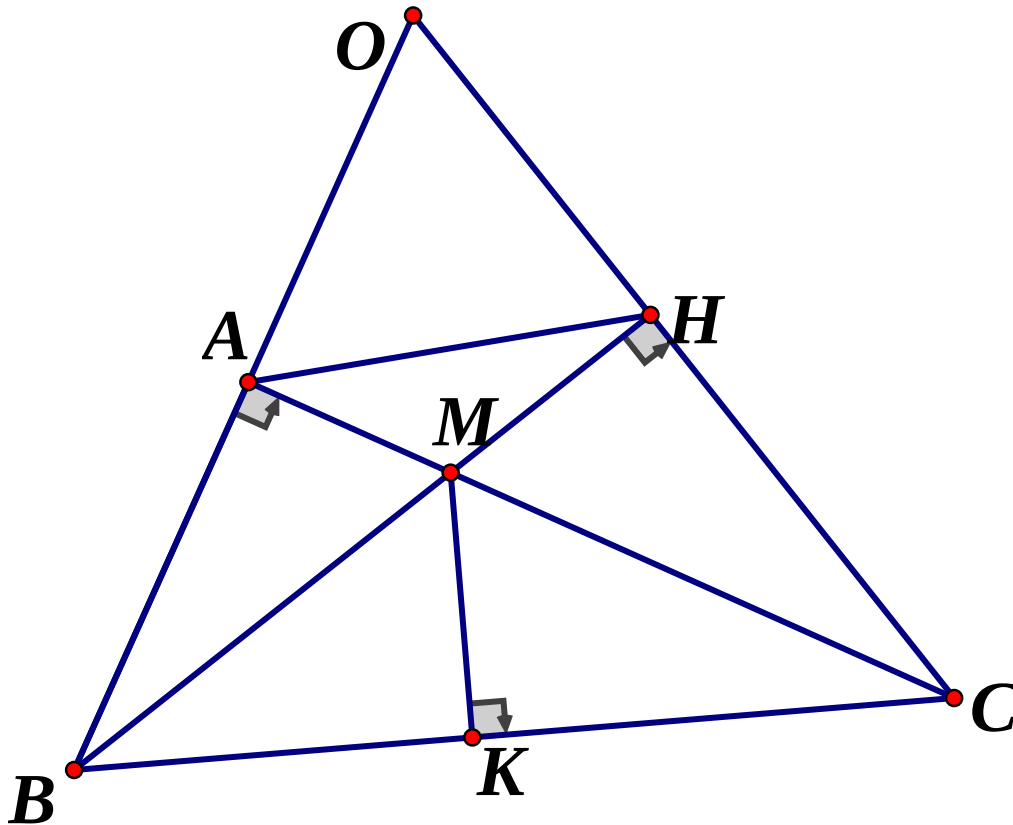
$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{Với } a=1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b=1(tm) \\ b=0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Với } b=1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a=1(tm) \\ a=0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

Câu 4.



$$\text{a) } \triangle BOH \sim \triangle COA (g.g) \Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OA \cdot OB = OH \cdot OC$$

$$\text{b) } \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OH}{OB} \text{ và } O \text{ chung} \Rightarrow \triangle OHA \sim \triangle OBC$$

$$\Rightarrow OHA = OBC \text{ (không đổi)}$$

c) Vẽ $MK \perp BC$; $\triangle BKM \sim \triangle BHC(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BK}{BH} \Rightarrow BM.BH = BK.BC \quad (3)$$

$$\triangle CKM \sim \triangle CAB(g.g) \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CK}{CA} \Rightarrow CM.CA = BC.CK \quad (4)$$

Cộng từng vế của (3) và (4) ta có:

$$BM.BH + CM.CA = BK.BC + BC.CK = BC.(BK + KC) = BC^2 \text{ (Không đổi)}$$

PHÒNG GD & ĐT
Ninh Hòa

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2014-2015

MÔN THI: TOÁN 8

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1. (5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

d) Rút gọn biểu thức A

e) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

f) Tìm x để $|A| = A$

Bài 2. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 12x = 0$

b) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

Bài 3 (5 điểm)

Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của CD.

d) Tứ giác ABED là hình gì? Tại sao?

e) Tính diện tích hình thang ABCD theo a

f) Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Tính góc HDI

Bài 4. (4 điểm)

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$

d) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Bài 5. (2 điểm)

c) Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

$$\text{CMR: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

d) Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-d}{a+b}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

d) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} \\ &= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x} \end{aligned}$$

e) A nguyên, mà x nguyên nên $2 \mid (1-2x)$

Từ đó tìm được $x=1$ và $x=0$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x=0$

$$|A| = A \Leftrightarrow A > 0$$

f) Ta có: $\Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

Kết hợp với điều kiện: $-1 \neq x < \frac{1}{2}$

Câu 2

$$\text{c) } x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=-3 \end{cases}$$

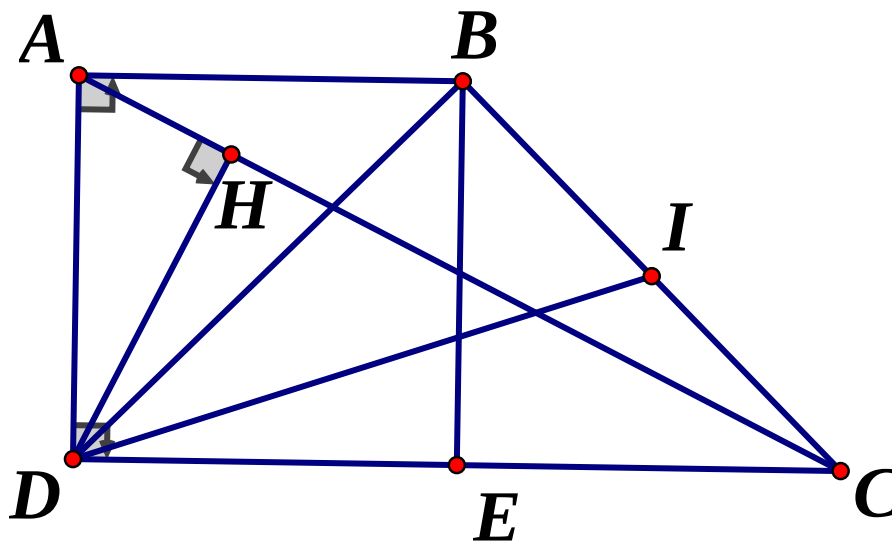
$$d) \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1 \right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2 \right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) \Leftrightarrow x-300 = 0 \Leftrightarrow x = 300$$

Câu 3.



d) Chỉ ra $ABED$ là hình bình hành ($AB \parallel DE, AB = DE$)

Chỉ ra $ABED$ là hình thoi ($AB = AD$)

Chỉ ra $ABED$ là hình vuông ($\angle BAD = 90^\circ$)

e) Chỉ ra $\triangle BEC$ vuông cân

Từ đó suy ra $AB = AD = a, DC = 2a$

Diện tích của hình thang $ABCD$ là : $S = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}$

f) $\widehat{ACH} = \widehat{ACD}$ (1) (cùng phụ với góc $\widehat{HDC}$)

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle IBD$ vuông tại D và B có:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle IBC$$

Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDI}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{BDI}$

Mà $\widehat{ADH} + \widehat{BDI} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BDI} + \widehat{BDH} = 45^\circ$ hay $\widehat{HDI} = 45^\circ$

Câu 4.

c)

Ta có:

$$A = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1$$

$$= (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1$$

$$\text{Do } (x - y)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên } A = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = 2$$

Vậy GTNN của A là $1 \Leftrightarrow x = y = 2$

$$\text{d) } B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + x + 1} = \frac{3(x+1)}{(x^2 + 1)(x+1)} = \frac{3}{x^2 + 1}$$

$$\text{Do } x^2 + 1 \geq 1 \text{ nên } B = \frac{3}{x^2 + 1} \leq 3. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy GTLN của B là $3 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 5

c)

Ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{p-a+p-c} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{p-c+p-a} = \frac{2}{b}$$

Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

d)

Ta có:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq 4$$

Xét

$$\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} - 4$$

$$= (a+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) + (b+d) \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b} \right) - 4$$

$$\geq (a+c) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} + (b+d) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} - 4 = 0$$

$\Rightarrow$ đpcm

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN TOÁN 8

Bài 1. (4 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

b) $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

Bài 2. (2 điểm) Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Bài 3. (3 điểm)

Tìm x biết:
$$\frac{(2009-x^2) + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Bài 4. (3 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$$

Bài 5. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A , D là điểm di động trên cạnh BC . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC

- Xác định vị trí của điểm D để tứ giác $AEDF$ là hình vuông
- Xác định vị trí của điểm D sao cho $3AD + 4EF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6. (4 điểm)

Trong tam giác ABC , các điểm A, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $AFE = BFD; BDF = CDE; CED = AEF$

- Chứng minh rằng: $BDF = BAC$
- Cho $AB = 5, BC = 8, CA = 7$. Tính độ dài đoạn BD .

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a)

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= \left[(x+y+z)^3 - x^3 \right] - (y^3 + z^3) \\&= (y+z) \left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)x + x^2 \right] - (y+z)(y^2 - yz + z^2) \\&= (y+z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx) = 3(y+z) \left[x(x+y) + z(x+y) \right] \\&= 3(x+y)(x+z)(y+z)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 &= (x^4 - x) + (2010x^2 + 2010x + 2010) \\&= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010)\end{aligned}$$

Bài 2

$$\begin{aligned}\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} &= 10 \\ \Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 258\end{aligned}$$

Bài 3

$$\frac{(2009 - x^2) + (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2}{(2009 - x)^2 - (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2} = \frac{19}{49}$$

ĐKXD: $x \neq 2009; x \neq 2010$.

Đặt $a = x - 2010 (a \neq 0)$, ta có hệ thức:

$$\frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a} = \frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19$$

$$\Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \text{ (tm)} \\ a = -\frac{5}{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4023}{2} \\ x = \frac{4015}{2} \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

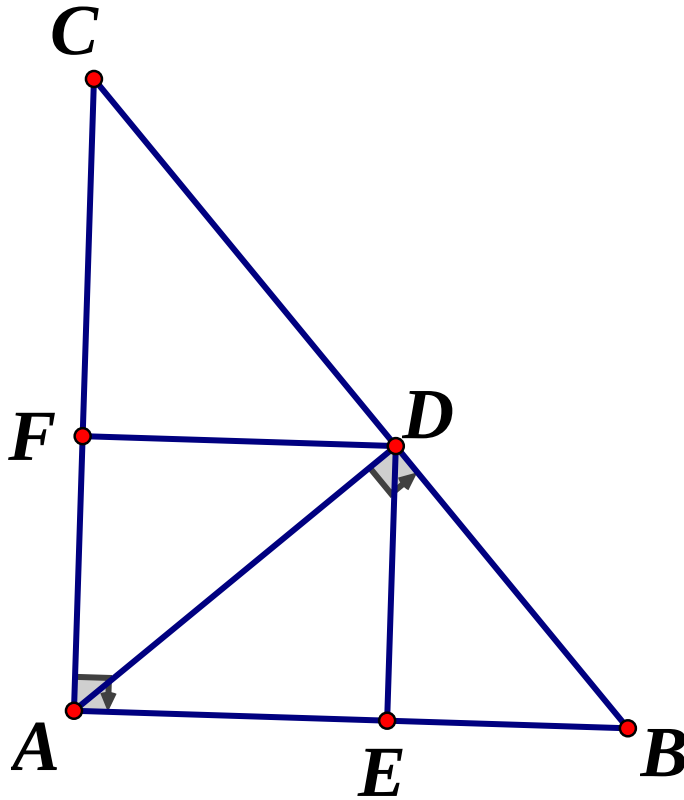
Bài 4

$$A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -335 khi $x = -3$

Bài 5



a) Tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật (vì $E = A = F = 90^\circ$)

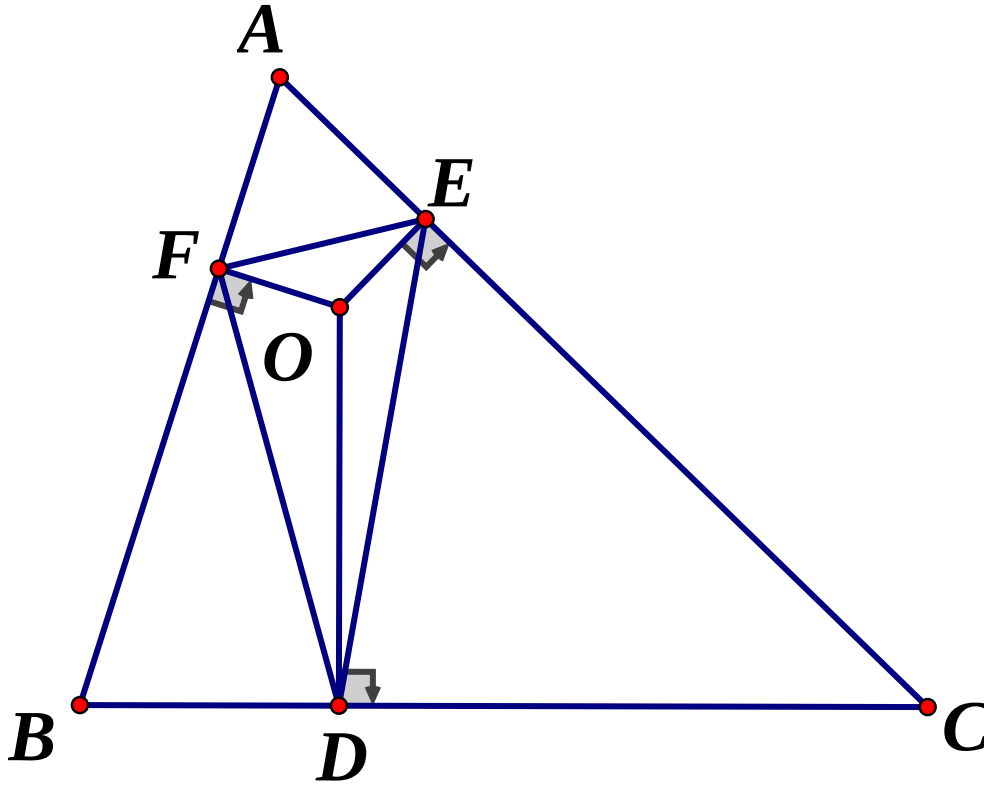
Đề tứ giác $AEDF$ là hình vuông thì AD là tia phân giác của BAC

b) Do tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật nên $AD = EF$

$$\Rightarrow 3AD + 4EF = 7AD$$

$3AD + 4EF$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của A lên BC

Bài 6.



a) Đặt $\angle AFE = \angle BFD = \omega$, $\angle BDF = \angle CDE = \alpha$; $\angle CED = \angle AEF = \beta$

Ta có: $\angle BAC + \beta + \omega = 180^\circ (*)$

Qua D, E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, AC, AB cắt nhau tại O .

Suy ra O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF

$$\Rightarrow \angle OFD + \angle OED + \angle ODF = 90^\circ (1)$$

Ta có:

$$\angle OFD + \omega + \angle OED + \beta + \angle ODF + \alpha = 270^\circ (2)$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow \alpha + \beta + \omega = 180^\circ (**)$$

$$\text{Từ } (*) \& (**) \Rightarrow \angle BAC = \alpha = \angle BDF$$

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có:

$$B = \beta, C = \omega \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle DBF \sim \triangle DEC \sim \triangle ABC$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{8} \\ \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} = \frac{7}{8} \\ \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7AE = 5AF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7(7 - CE) = 5(5 - BF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7CE - 5BF = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow CD - BD = 3 \quad (3)$$

$$\text{Ta lại có: } CD + BD = 8 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) } \Rightarrow BD = 2,5$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2015-2016

Câu 1. (2 điểm)

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (a+1)(a+3)(a+5)(a+7) + 15$

Câu 2. (2 điểm)

Với giá trị nào của a và b thì đa thức $(x-a)(x-10)+1$ phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên

Câu 3. (1 điểm)

Tìm các số nguyên a và b để đa thức $A(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức

$$B(x) = x^2 - 3x + 4$$

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC , đường cao AH , vẽ phân giác Hx của góc AHB và phân giác Hy của AHC . Kẻ AD vuông góc với Hx , AE vuông góc với Hy

Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ là hình vuông.

Câu 5. (2 điểm)

Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned}A &= (a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15 \\&= (a+1)(a+7)(a+3)(a+5)+15 \\&= (a^2+8a+7)(a^2+8a+15)+15 \\&= (a^2+8a)^2+22(a^2+8a)+120 \\&= (a^2+8a+11)^2-1^2 \\&= (a^2+8a+12)(a^2+8a+10) \\&= (a+2)(a+6)(a^2+8a+10)\end{aligned}$$

Câu 2.

Giả sử :

$$\begin{aligned}(x-a)(x-10)+1 &= (x-m)(x-n) \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow x^2 - (a+10)x + 10a + 1 &= x^2 - (m+n)x + mn \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m+n = a+10 \\ mn = 10a+1 \end{cases}\end{aligned}$$

Khử a ta có:

$$\begin{aligned}mn &= 10(m+n-10)+1 \\ \Leftrightarrow mn - 10m - 10n + 100 &= 1 \\ \Leftrightarrow m(n-10) - 10(n-10) &= 1\end{aligned}$$

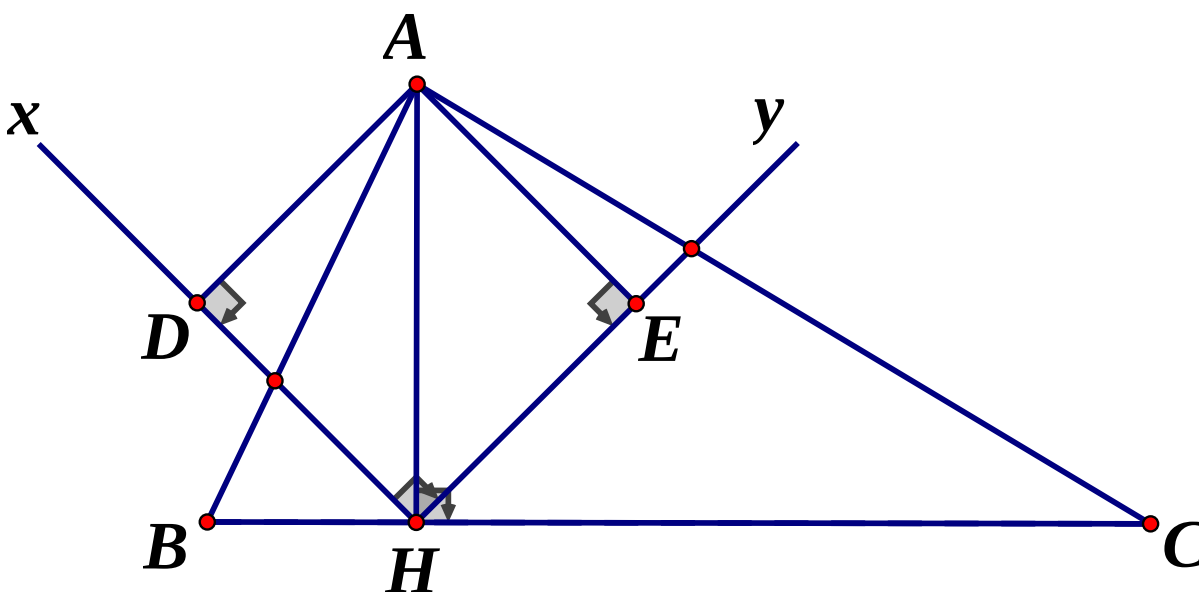
$$\text{Vì } m, n \text{ nguyên ta có: } \begin{cases} m-10=1 \\ n-10=1 \end{cases} \& \begin{cases} m-10=-1 \\ n-10=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ a=8 \end{cases}$$

Câu 3. Ta có:

$$A(x) = B(x) \cdot (x^2 - 1) + (a - 3)x + b + 4$$

$$\text{Để } A(x) : B(x) \text{ thì } \begin{cases} a - 3 = 0 \\ b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$$

Câu 4.



Tứ giác $ADHE$ là hình vuông

Hx là phân giác của AHB ; Hy là phân giác của AHC mà AHB và AHC là hai góc kề bù nên $Hx \perp Hy$

Hay $DHE = 90^\circ$, mặt khác: $AHD = AEH = 90^\circ$ nên tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật (1)

$$AHD = \frac{AHB}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ, \text{ Do } AHE = \frac{AHC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Hay HA là phân giác DHE (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $ADHE$ là hình vuông.

Câu 5.

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} \\&= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{100.100} \\&< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \\&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1\end{aligned}$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1. (2 điểm)

Cho $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

- a) Rút gọn P
- b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2 điểm)

- a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9
- b) Tìm các giá trị của x để biểu thức:
 $P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 3. (2 điểm)

- a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$
- b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác đều ABC , gọi M là trung điểm của BC . Một góc xMy bằng 60° quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh:

a) $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

b) DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc BDE và CED

c) Chu vi tam giác ADE không đổi

Câu 5. (1 điểm)

Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$a^3 - 4a^2 - a + 4 = (a-1)(a+1)(a-4)$$

$$a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = (a-2)(a-1)(a-4)$$

Nêu ĐKXD: $a \neq 1; a \neq 2; a \neq 4$

Rút gọn $P = \frac{a+1}{a-2}$

b)

$$P = \frac{a-2+3}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2}; \text{ ta thấy } P \text{ nguyên khi } a-2 \text{ là ước của } 3, \text{ mà } U(3) = \{-1; 1; -3; 3\},$$

từ đó tìm được $a \in \{-1; 3; 5\}$

Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a+b$ chia hết cho 3.

Ta có:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab] = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$$

Vì $a + b$ chia hết cho 3 nên $(a + b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3

Do vậy $(a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

$$\text{b) } P = (x - 1)(x + 6)(x + 2)(x + 3) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36$$

Ta thấy $(x^2 + 5x)^2 \geq 0$ nên $P = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

$$\text{Do đó } \min P = -36 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Câu 3. a)

$$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x + 6)(x + 5)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x + 6)(x + 7)$$

$$\text{ĐKXD: } x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

b) Đặt $b + c - a = x > 0; c + a - b = y > 0; a + b - c = z > 0$

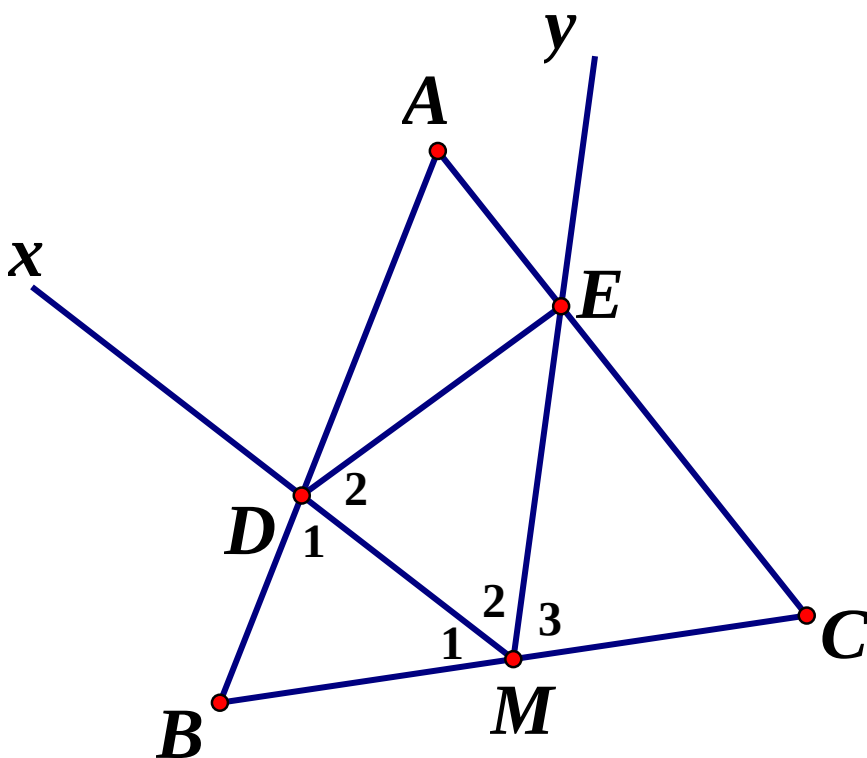
từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2};$

Thay vào ta được

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3$

Câu 4.



a) Trong tam giác BDM ta có: $D_1 = 120^\circ - M_1$

Vì $M_2 = 60^\circ$ nên ta có: $M_3 = 120^\circ - M_1$

Suy ra $D_1 = M_3$. Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle CEM$ (1)

Suy ra $\frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE}$, Từ đó $BD.CE = BM.CM$

Vì $BM = CM = \frac{BC}{2}$, nên ta có: $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$

b) Từ (1) suy ra $\frac{BD}{CM} = \frac{MD}{EM}$

Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle MED \Rightarrow D_1 = D_2$, do đó DM là tia phân giác BDE

Chứng minh tương tự ta có: EM là tia phân giác CED

c) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC .

Chứng minh $DH = DI, EI = EK$

Tính chu vi tam giác bằng $2AH$ - không đổi

Câu 5.

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z

(x, y, z là các số nguyên dương)

Ta có: $xy = 2(x + y + z)$ (1) và $x^2 + y^2 = z^2$ (2)

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$$

$$z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$(z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

Suy ra $z + 2 = x + y - 2 \Rightarrow z = x + y - 4$; thay vào (1) ta được:

$$xy = 2(x + y + x + y - 4)$$

$$xy - 4x - 4y = -8$$

$$(x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là:

$$(x; y; z) \in \{(5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)\}$$

ĐỀ HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN : TOÁN 8

NĂM HỌC 2012-2013

Câu 1.

a) Phân tích các đa thức ra thừa số:

$$x^4 + 4$$

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$$

b) Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

c) Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Câu 2. Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A, biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu 3. Cho hình vuông ABCD, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$.

a) Chứng minh: $DE = CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng : DE, BF, CM đồng quy

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Câu 4.

a) Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

b) Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$

Tính $a^{2011} + b^{2011}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned}x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \\&= (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24 \\&= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\&= \left[(x^2 + 7x + 11)^2 - 1 \right] - 24 \\&= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\&= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\&= (x + 1)(x + 2)(x^2 + 7x + 16)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x^4 - 30x^2 + 31x - 30 &= 0 \\&\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x - 5)(x + 6) = 0 (*) \\x^2 - x + 1 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \\V\hat{1} &\Rightarrow (*) \Leftrightarrow (x - 5)(x + 6) = 0 \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -6 \end{cases}\end{aligned}$$

c) Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a + b + c$; rút gọn $\Rightarrow dpcm$

Câu 2.

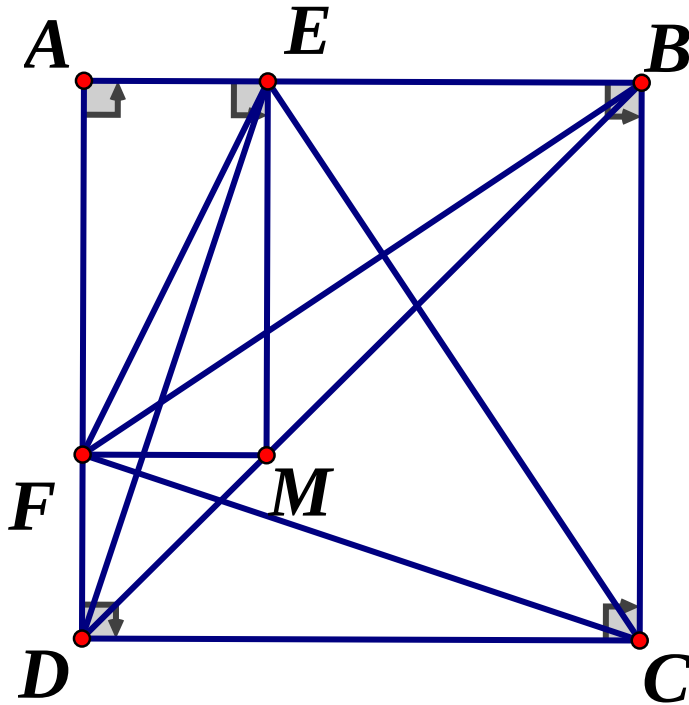
a) Rút gọn được kết quả $A = \frac{-1}{x-2}$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ A = \frac{4}{5} \end{cases}$

c) $A < 0 \Leftrightarrow x > 2$

d) $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \dots \Rightarrow x \in \{1; 3\}$

Câu 3.



- a) Chứng minh: $AE = FM = DF \Rightarrow \triangle AED = \triangle DFC \Rightarrow dfcm$
 b) DE, BF, CM là ba đường cao của $\triangle EFC \Rightarrow dfcm$
 c) Có chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi
 $\Rightarrow ME + MF = a$ không đổi
 $\Rightarrow S_{AEMF} = ME \cdot MF$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME = MF$ ($AEMF$ là hình vuông)
 $\Rightarrow M$ là trung điểm của BD .

Câu 4.

a) Từ $a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\text{Điều " = " xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

$$(a^{2001} + b^{2001}) \cdot (a + b) - (a^{2000} + b^{2000}) \cdot ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$b) \Rightarrow (a + b) - ab = 1 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1(tm) \\ b = 0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Với } b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = 0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

**PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
HUYỆN HOÀNG HÓA**

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8

Năm học : 2010-2011

MÔN THI: TOÁN

Ngày thi : 18/4/2011

Thời gian: 120 phút

Bài 1. (3 điểm)

$$\text{Cho biểu thức: } A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ với $a + b \geq 1$

b) Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a . Tìm x

$$\text{biết rằng: } \left[\frac{34x + 19}{11} \right] = 2x + 1$$

Bài 3. (3 điểm)

Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau 36km, rồi ngay lập tức quay trở về A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là 6km/h

Bài 4. (5 điểm)

- a) Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:
 $\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên
 (những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)
- b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 5. (5 điểm)

Cho đoạn thẳng $AB = a$. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B . Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMNP, BMLK$ có tâm theo thứ tự là C, D . Gọi I là trung điểm của CD .

- a) Tính khoảng cách từ I đến AB
- b) Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì điểm I di chuyển trên đường nào ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq 0$

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1-3x^2-3x}{3x} \right) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1-2x-3x^2}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2-2+6x}{3x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad A = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

Để A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{x-1}$ có giá trị nguyên $\Rightarrow x \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

$\Rightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$ vì $x \neq -1; x \neq 0 \Rightarrow \{x\} = \{2; 3\}$

Bài 2.

a) Theo bài ra ta có: $a+b \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 1 \quad (1)$

Mặt khác: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $2(a^2 + b^2) \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

$$\text{b)} \quad \left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{34x+19}{11} - (2x+1) < 1 \text{ và } 2x+1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 12x+8 < 11 \Leftrightarrow -8 \leq 12x < 3 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq 2x+1 < \frac{3}{2}$$

$$\text{Do } 2x+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=0 \end{cases}$$

Bài 3.

Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc ca nô xuôi dòng ($x > 12$)

Vận tốc ca nô khi nước lặng: $x-6(\text{km/h})$

Vận tốc ca nô khi ngược dòng: $x - 12(km/h)$

Thời gian cả đi và về của ca nô là 4,5 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{36}{x} + \frac{36}{x-12} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x-4)(x-24) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(km) \\ x = 24(tm) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $24km/h$

Bài 4.

a) $\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$

Vì $q \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} q = 4 \\ q = 9 \end{cases} \Rightarrow a, d$ phải là những số thuộc $\{1; 4; 5; 6; 9\}, a, d \neq 0$

Do $\overline{abcd} = \overline{dcba} \times q$ nên $d < 3 \Rightarrow d = 1$

Giả sử $q = 4$ khi đó $\overline{1cba} \cdot 4 = \overline{abc1}$ (vô lý) vì $\overline{1cba} \cdot 4$ phải là một số chẵn nên $q = 9$

Với $q = 9$ ta có: $\overline{1cba} \times 9 = \overline{abc1}$ suy ra $a = 9, c < 2$ vì tích $\overline{1cba} \times 9$ là số có 4 chữ số nên ta lại có $c \neq d$ tức là $c \neq 1 \Rightarrow c = 0$

Ta thấy $\overline{abcd} = \overline{9b01} = \overline{10b9} \times 9$ vậy $\overline{9b01}$ là số chia hết cho 9 nên $b = 8$

Tóm lại ta có: $9801 : 1089 = 9$

b) Đặt $x = b + c - a; y = a + c - b; z = a + b - c \Rightarrow x, y, z > 0$

$$\Rightarrow x + y + z = a + b + c$$

$$2a = a + b + c - (b + c - a) = x + y + z - x = y + z \Rightarrow a = \frac{y + z}{2}$$

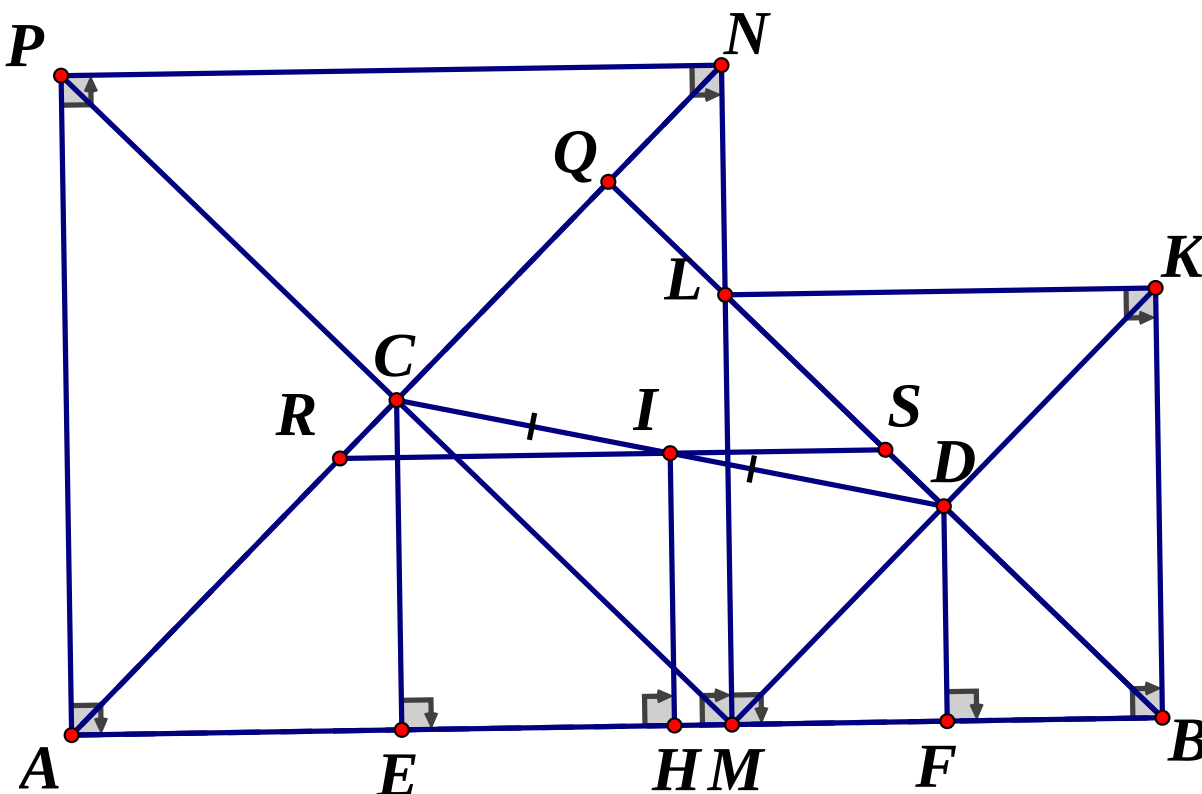
Tương tự: $b = \frac{x + z}{2}; c = \frac{x + y}{2}$

BĐT chứng minh tương đương với: $\frac{y + z}{x} + \frac{x + z}{y} + \frac{x + y}{z} \geq 6$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \geq 6 \text{ do } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Bài 5.



a) Kẻ CE, IH, DF cùng vuông góc với AB suy ra tứ giác $CDFE$ là hình thang vuông.

Chứng minh được: $CE = \frac{AM}{2}, DF = \frac{BM}{2} \Rightarrow CE + DF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow IH = \frac{a}{4}$

b) Khi M di chuyển trên AB thì I di chuyển trên đoạn RS song song với AB và cách

AB một khoảng bằng $\frac{a}{4}$ (R là trung điểm của AQ)

S là trung điểm của BQ , Q là giao điểm của BL và AN)

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHƯỚC HIỆP**

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC : 2015-2016
Môn: TOÁN – LỚP 8
Thời gian làm bài: 120 phút**

Bài 1. (3,5 điểm)

a) Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

b) Rút gọn biểu thức:
$$\frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$$

Bài 2. (4,5 điểm).

a) Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m /$ giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

b) Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Bài 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$

Bài 4. (4,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BD, BC, DC

a) Chứng minh $APQR$ là hình thang cân

b) Biết $AB = 6cm, AC = 8cm$. Tính độ dài của AR

Bài 5. (2,5 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng qua B cắt cạnh CD tại M, cắt đường chéo AC tại N và cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh:

$$\frac{1}{BN} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{BK}$$

Bài 6. (1,0 điểm)

Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3) = 1$ nên chia hết cho 6

$18n : 6$, suy ra điều phải chứng minh

b)

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1} &= \frac{x^2 + x^2a + a + a^2 + a^2x^2 + 1}{x^2 - x^2a - a + a^2 + a^2x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2 + x^2a + a^2x^2 + 1 + a + a^2}{x^2 - x^2a + a^2x^2 + 1 - a + a^2} = \frac{x^2(1 + a + a^2) + (1 + a + a^2)}{x^2(1 - a + a^2) + (1 - a + a^2)} \\ &= \frac{(x^2 + 1)(1 + a + a^2)}{(x^2 + 1)(1 - a + a^2)} = \frac{1 + a + a^2}{1 - a + a^2} \end{aligned}$$

Bài 2.

a) Gọi x là số lần đi ($x \in \mathbb{N}, x > 0$), số lần dừng là $x - 1$

Thời gian đi

$$\begin{aligned} \frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} + \dots + \frac{4x}{2} &= 2 + 4 + 6 + \dots + 2x \\ &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + x) = x(x + 1) \end{aligned}$$

Thời gian dừng:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (x - 1) = \frac{(x - 1 + 1)(x - 1)}{2} = \frac{x(x - 1)}{2}$$

Lập được phương trình

$$\frac{x(x - 1)}{2} + x(x + 1) = 155 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 310 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = \frac{-31}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Khoảng cách AB là $10 \cdot (10 + 1) \cdot 2 = 220(m)$

b)

$$a^3 - 3ab^2 = 5 \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25$$

$$b^3 - 3a^2b = 10 \Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100$$

$$\Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 125$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5^3 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2018} = \frac{5}{2018}$$

Bài 3.

a) $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

Đặt $x^2 - x + 1 = X$ có

$$X^2 + X - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 4X - 3X - 12 = 0 \Leftrightarrow X(X + 4) - 3(X + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 3)(X + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -4 \end{cases}$$

$$X = -4 \Rightarrow x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

$$X = 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

b)

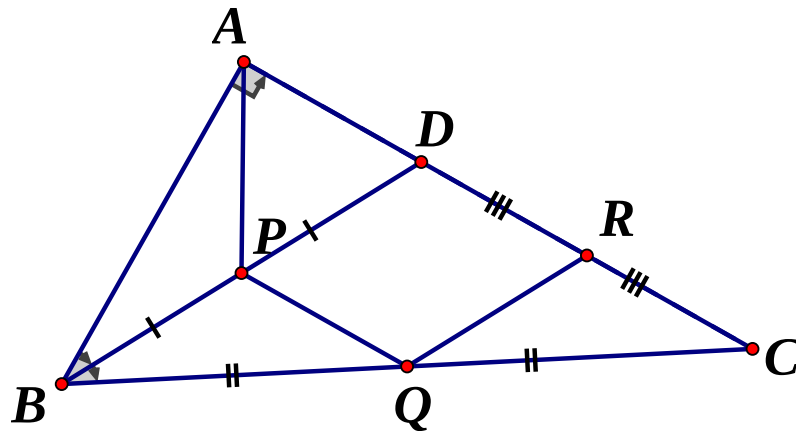
$$P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$$

$$= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 2018$$

$$= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 2018 \geq -2018$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -2018 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Bài 4.



a) PQ là đường trung bình tam giác BDC , suy ra $PQ \parallel AR$ nên $APQR$ là hình thang.

$$AQ = \frac{1}{2} BC \text{ (trung tuyến tam giác vuông } \triangle ABC \text{)}$$

$$PR = \frac{1}{2} BC \text{ (đường trung bình tam giác } \triangle BDC \text{)}$$

Suy ra $AQ = PR \Rightarrow APQR$ là hình thang cân

b) Tính được $BC = 10\text{cm}$

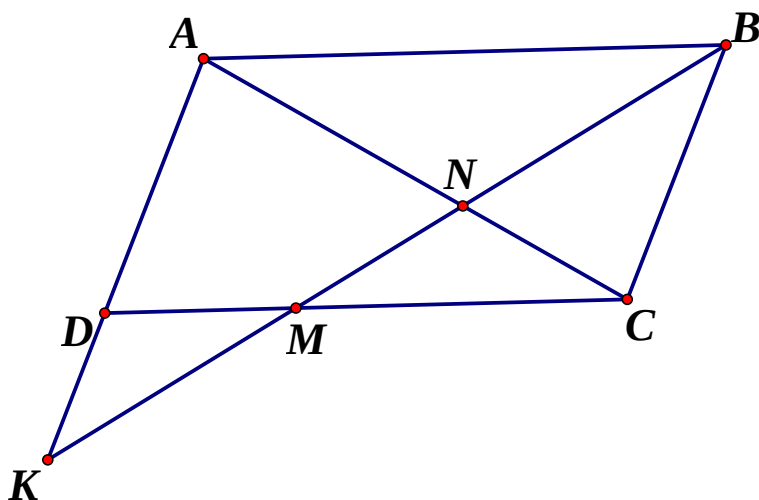
Tính chất đường phân giác trong của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{BA}{BC + BC}$$

Thay số tính đúng $AD = 3\text{cm}, DC = 5\text{cm}, DR = 2,5\text{cm}$

Kết quả $AR = 5,5\text{cm}$

Bài 5.



$AB \parallel DC$ (hai cạnh đối diện hình bình hành). Theo định lý Talet có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AN} = \frac{MN}{NB} \Rightarrow \frac{MC + AB}{AB} = \frac{MN + NB}{BN} = \frac{BM}{BN} \quad (1)$$

$$\frac{KM}{BK} = \frac{KD}{KA} = \frac{MD}{AB} \Rightarrow \frac{BK - KM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \Rightarrow \frac{BM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = \frac{AB + MC}{AB} - \frac{AB - MD}{AB} = \frac{MC + MD}{AB}$$

Mà $MC + MD = CD = AB$ nên $\frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = 1$ (Điều phải chứng minh)

Bài 6.

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) \\ &= [(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2] \\ &= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \end{aligned}$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8. Năm học: 2017-2018

Câu 1: (4,0 điểm) Chứng minh rằng:

a) $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 40.

b) $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$.

Câu 4: (3,0 điểm) Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

Câu 5: (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N.

- a) Chứng minh tứ giác AMIN là hình chữ nhật.
- b) Gọi D là điểm đối xứng của I qua N. Chứng minh tứ giác ADCI là hình thoi.
- c) Đường thẳng BN cắt DC tại K. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3}DC$

Câu 6: (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

“HẾT”

C. ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu 1: (4,0 điểm) Chứng minh rằng:

- a) $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 40.
- b) $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$.

CÂU 1	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a	$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ $= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11})$ $= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2 + 3^3)$ $= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40$ $= 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8) : 40$ Vậy $A : 40$	0,5 0,5 0,5 0,5
b	$B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$ $= \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 100}$ $< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ $= 1 - \frac{1}{100} < 1$ Vậy $B < 1$	0,5 0,5 0,5 0,5

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$, Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$

CÂU 2	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a	Ta có: $a + b + c = 0 \text{ suy ra } a + b = -c$ Mặt khác: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ Suy ra $(-c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ (đpcm)}$	0,5 0,5 0,5 0,5
b	$C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ $(2-1)C = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ $C = (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ $C = (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$	0,25 0,25 0,25

	$C = (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$	0,25
	$C = (2^{16} - 1)(2^{16} + 1)$	0,25
	$C = 2^{32} - 1$	0,25
	Vì $2^{32} - 1 < 2^{32}$ nên $C < D$.	0,5

Câu 3: (4,0 điểm)

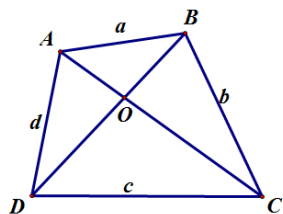
- a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$.
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$.

CÂU 3	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a	$x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$ $= x^4 + (x^2 + 2018x^2) + 2018x + (2018 + 1) + x^3 - x^3$ $= (x^4 + x^3 + x^2) + (2018x^2 + 2018x + 2018) - (x^3 - 1)$ $= x^2(x^2 + x + 1) + 2018(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$ $= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2018 - x + 1)$ $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019)$	0,5 0,5 0,5 0,25 0,25
b	$E = 2x^2 - 8x + 1$ $= 2x^2 - 8x + 8 - 7$ $= 2(x^2 - 4x + 4) - 7$ $= 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7$ Vậy giá trị nhỏ nhất của $E = -7$ khi $x = 2$	0,5 0,5 0,5 0,5

Câu 4: (3,0 điểm)

Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác ấy.

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
--------	------



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD.

Đặt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

Xét $\triangle AOB$, ta có: $OA + OB > AB$ (Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).

Xét $\triangle COD$, ta có: $OC + OD > CD$ (Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác).

Suy ra: $OA + OB + OC + OD > AB + CD$

$$\Rightarrow AC + BD > AB + CD$$

$$\Rightarrow AC + BD > a + c \quad (1)$$

Chứng minh tương tự:

$$AC + BD > AD + BC$$

$$\Rightarrow AC + BD > d + b \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2(AC + BD) > a + c + d + b$

$$\Rightarrow AC + BD > \frac{a + c + d + b}{2} \quad (*)$$

Xét $\triangle ABC$, ta có: $AC < a + b$

Xét $\triangle ADC$, ta có: $AC < d + c$

Suy ra: $2AC < a + b + c + d$

$\Rightarrow AC < \frac{a + c + d + b}{2}$ (3)	0,25
Chứng minh tương tự: $BD < \frac{a + c + d + b}{2}$ (**) (4)	0,25
Từ (3) và (4) suy ra: $AC + BD < a + b + c + d$.	
Từ (*) và (**) suy ra $\frac{a + c + d + b}{2} < AC + BD < a + b + c + d$ (đpcm)	0,25
	0,25
	0,25

Câu 5: (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Qua I vẽ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N.

- Chứng minh tứ giác AMIN là hình chữ nhật.
- Gọi D là điểm đối xứng của I qua N. Chứng minh tứ giác ADCI là hình thoi.
- Đường thẳng BN cắt DC tại K. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{3}DC$.

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
-----	--------	------

a	Xét tứ giác AMIN có: $\widehat{MAN} = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông ở A) $\widehat{AMI} = 90^0$ (vì IM vuông góc với AB) $\widehat{ANI} = 90^0$ (vì IN vuông góc với AC) Vậy tứ giác AMIN là hình chữ nhật (Vì có 3 góc vuông)	0,25 0,25 0,25 0,25
b	ΔABC vuông tại A, có AI là trung tuyến nên $AI = IC = \frac{1}{2}BC$ Do đó ΔAIC cân tại I, có đường cao IN đồng thời là trung tuyến $\Rightarrow NA = NC$ Mặt khác: $NI = ND$ (tính chất đối xứng) nên ADCI là hình bình hành (1) Mà $AC \perp ID$ (2) Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ADCI là hình thoi.	0,5 0,5 0,5 0,5
c	Kẻ qua I đường thẳng IH song song với BK cắt CD tại H $\Rightarrow IH$ là đường trung bình ΔBKC $\Rightarrow H$ là trung điểm của CK hay $KH = HC$ (3) Xét ΔDIH có N là trung điểm của DI, $NK \parallel IH$ ($IH \parallel BK$) Do đó K là trung điểm của DH hay $DK = KH$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $DK = KH = HC \Rightarrow DK = \frac{1}{3}DC$	0,25 0,25 0,25 0,25

Câu 6: (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Ta có : $\left(\frac{1}{2}a - b\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + b^2 \geq ab \quad (1)$ $\left(\frac{1}{2}a - c\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + c^2 \geq ac \quad (2)$ $\left(\frac{1}{2}a - d\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + d^2 \geq ad \quad (3)$ $\left(\frac{1}{2}a - e\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + e^2 \geq ae \quad (4)$ Ta cộng (1), (2), (3), (4) về theo về ta được : $4 \cdot \frac{1}{4}a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$	0,25 0,25 0,25 0,25

• **Lưu ý :**

- Mọi cách giải khác của học sinh có kết quả đúng đều ghi điểm tối đa.
- Riêng câu 4 và câu 5 nếu học sinh không vẽ hình mà làm đúng thì cho $\frac{1}{2}$ tổng số điểm của câu đó.

(Đề thi gồm có 08 trang)

UBND HUYỆN GIỒNG RIỀNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG HUYỆN
NĂM HỌC 2011-2012

ĐỀ THI MÔN TOÁN LỚP 8

Bài 1. (4 điểm)

- Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9
- Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì : $A = 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Bài 2. (4 điểm)

Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

b) $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$

Bài 3. (4 điểm)

a) Cho $a + b = 2$ và $a^2 + b^2 = 20$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^3 + b^3$

b) Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tính giá trị của biểu thức $N = a^4 + b^4 + c^4$

Bài 4. (4 điểm)

Cho hình thang cân $ABCD$ có $\angle ACD = 60^\circ$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OA, OD, BC . Tam giác EFG là tam giác gì? Vì sao?

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ có E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD .

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy

b) Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N . Chứng minh rằng $EMFN$ là hình bình hành

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Ta phải chứng minh : $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với $n \in \mathbb{Z}$

$$A = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

$$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$$

$$= 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9$$

$$= 3n(n-1)(n+1) + 9(n^2 + 2n + 1)$$

Nhận thấy $n(n-1)(n+1) : 3 \Rightarrow 3n(n-1)(n+1) : 9$ và $9(n^2 + 2n + 1) : 9$

Vậy $A : 9$

$$b) 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} = 25 \cdot 5^n + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 8^{2n}$$

$$= 5^n(59 - 8) + 8 \cdot 64^n = 59 \cdot 5^n + 8(64^n - 5^n)$$

$$59 \cdot 5^n : 59 \text{ và } 8(64^n - 5^n) : (64 - 5) = 59$$

Vậy $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Bài 2.

$$a / x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz$$

$$= (x+y+z)^3 - 3z(x+y)(x+y+z) - 3xy(x+y+z)$$

$$= (x+y+z) \left[(x+y+z)^2 - 3z(x+y) - 3xy \right]$$

$$= (x+y+z) \left[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 3zx - 3zy - 3xy \right]$$

$$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$b / x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$$

$$= x^4 + x^3 + x^2 + 2010x^2 + 2010x + 2010 - x^3 + 1$$

$$= x^2(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2010 - x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2011)$$

Bài 3.

a) Từ $a^2 + b^2 = 20 \Rightarrow (a+b)^2 - 2ab = 20 \Rightarrow ab = -8$

$$M = a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2^3 - 3 \cdot (-8) \cdot 2 = 56$$

b) Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 14 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 196$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Ta lại có: $a + b + c = 0 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = -7$$

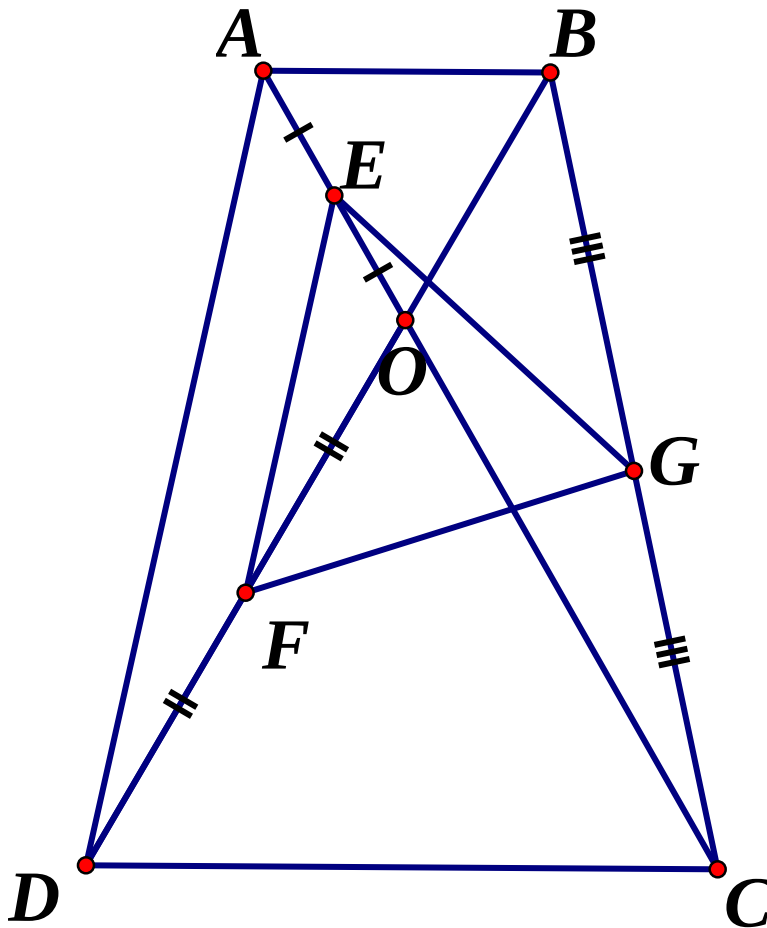
$$\Rightarrow (ab + bc + ca)^2 = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 49$$

Do đó: $N = a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 196 - 2 \cdot 49 = 98$

Bài 4.



Do $ABCD$ là hình thang cân và $\angle ACD = 60^\circ$ suy ra $\triangle OAB$ và $\triangle OCD$ là các tam giác đều
 Chứng minh $\triangle BFC$ vuông tại F

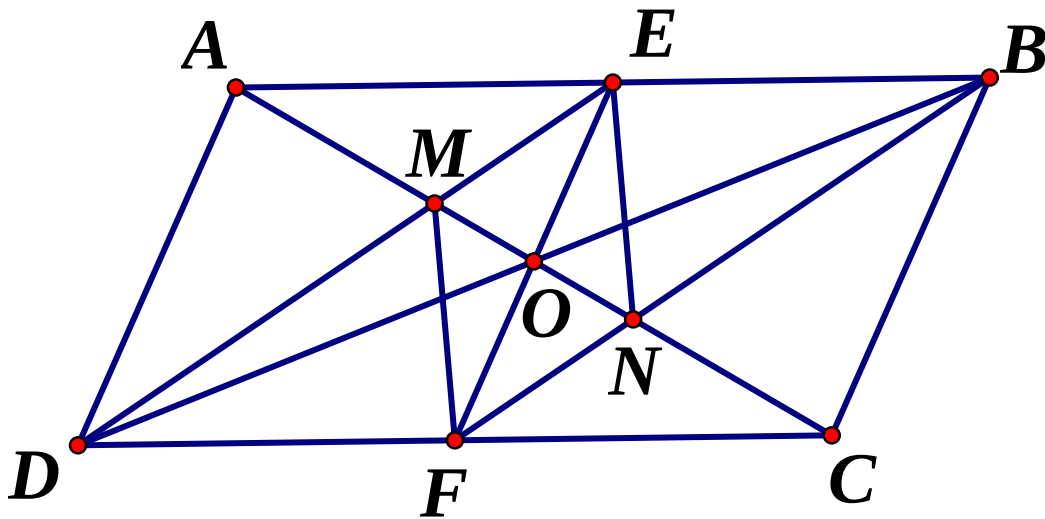
Xét $\triangle BFC$ vuông tại F có: $FG = \frac{1}{2}BC$

Chứng minh $\triangle BEC$ vuông tại E có $EG = \frac{1}{2}BC$

Xét EF là đường trung bình $\triangle AOD \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AD \Rightarrow EF = \frac{1}{2}BC$ ($ABCD$ hthang cân)

Suy ra $EF = EG = FG \Rightarrow \triangle EFG$ đều

Bài 5.



a)

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$, ta có O là trung điểm của BD .

Chứng minh $BEDF$ là hình bình hành

Có O là trung điểm của BD nên O cũng là trung điểm của EF

Vậy EF, BD, AC đồng quy tại O

b) Xét $\triangle ABD$ có M là trọng tâm, nên $OM = \frac{1}{3}OA$

Xét $\triangle BCD$ có N là trọng tâm, nên $ON = \frac{1}{3}OC$

Mà $OA = OC$ nên $OM = ON$

Tứ giác $EMFN$ có $OM = ON, OE = OF$ nên là hình bình hành

ĐỀ CHÍNH THỨC
VĨNH BÌNH BẮC

Môn TOÁN 8
Năm học 2018-2019

Bài 1. (2,0 điểm). Chứng minh rằng

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Bài 2. (6,0 điểm). Tìm x , biết:

a) $x^2 - 2005x - 2006 = 0$

b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

c) $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

Bài 3. (4,0 điểm) Cho biểu thức : $A = \frac{3x^3 - 14x^2 + 3x + 36}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

a) Tìm giá trị của biểu thức A xác định

b) Tìm giá trị của biểu thức A có giá trị bằng 0

c) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Bài 4. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CA . Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD, AF, EF, ED

a) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì ? Tại sao ?

b) Tam giác ABC có điều kiện gì thì $MNPQ$ là hình chữ nhật ?

c) Tam giác ABC có điều kiện gì thì $MNPQ$ là hình thoi ?

Bài 5. (3 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có $\angle ABC = 60^\circ$, phân giác BD . Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của BD, BC, CD

a) Tứ giác $AMNI$ là hình gì ? Chứng minh

b) Cho $AB = 4cm$, Tính các cạnh của tứ giác $AMNI$

Bài 6. (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của $M = 4x^2 + 4x + 5$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$ chia hết cho 17

b) Ta có:

$19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17}, 69 + \dots + 69^{18}) = 88.(19^{18} - 19^{17}, 69 + \dots + 69^{18})$ chia hết cho 44

Bài 2.

a) Ta có:

$$x^2 - 2005x - 2006 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 - 2005x - 2005 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) - 2005(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1-2005) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2006 \end{cases}$$

b)

$$\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008} + 1 \right) + \left(\frac{x+2}{2007} + 1 \right) + \left(\frac{x+3}{2006} + 1 \right) = \left(\frac{x+4}{2005} + 1 \right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1 \right) + \left(\frac{x+6}{2003} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} - \frac{x+2009}{2005} - \frac{x+2009}{2004} - \frac{x+2009}{2003} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2009$$

$$c) \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

$$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x + 5)(x + 6)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x + 6)(x + 7)$$

ĐKXD: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$. Phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 3.

a) Ta có $A = \frac{(x-3)^2 \cdot (3x+4)}{(x-3)^2 \cdot (3x-1)}$. Vậy biểu thức A xác định khi $x \neq 3; x \neq \frac{1}{3}$

b) Ta có: $A = \frac{3x+4}{3x-1}$, do đó $A = 0 \Leftrightarrow 3x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$

Vậy với $x = -\frac{4}{3}$ thì biểu thức A có giá trị bằng 0

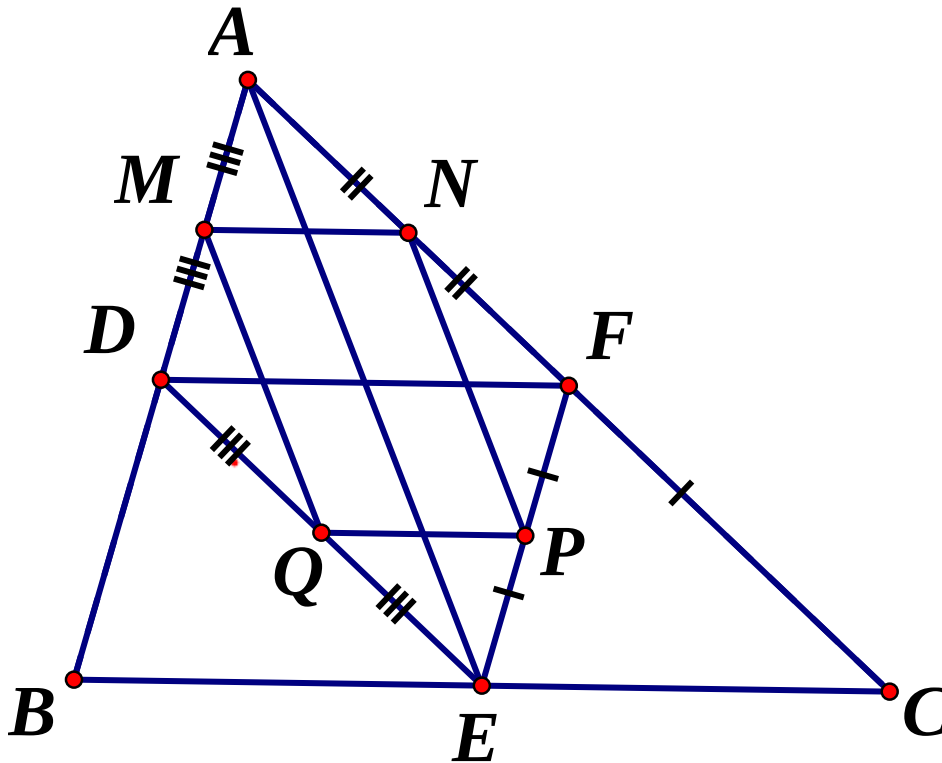
c) Ta có: $A = \frac{3x+4}{3x-1} = 1 + \frac{5}{3x-1}$

Để A có giá trị nguyên thì $\frac{5}{3x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (3x-1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

$$\Rightarrow x \in \left\{ -\frac{4}{3}; 0; \frac{2}{3}; 2 \right\}$$

Vậy với giá trị nguyên của x là 0 và 2 thì A có giá trị nguyên

Bài 4.



$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} MN \parallel DF; MN = \frac{1}{2} DF \\ PQ \parallel DF; PQ = \frac{1}{2} DF \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel PQ; MN = PQ. \text{ Vậy } MNPQ \text{ là hình bình hành}$$

b) Giả sử $MNPQ$ là hình chữ nhật thì $MP = NQ$

$$\text{Mà } \left. \begin{array}{l} MP = AF = \frac{AC}{2} \\ NQ = AD = \frac{AB}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow AC = AB$$

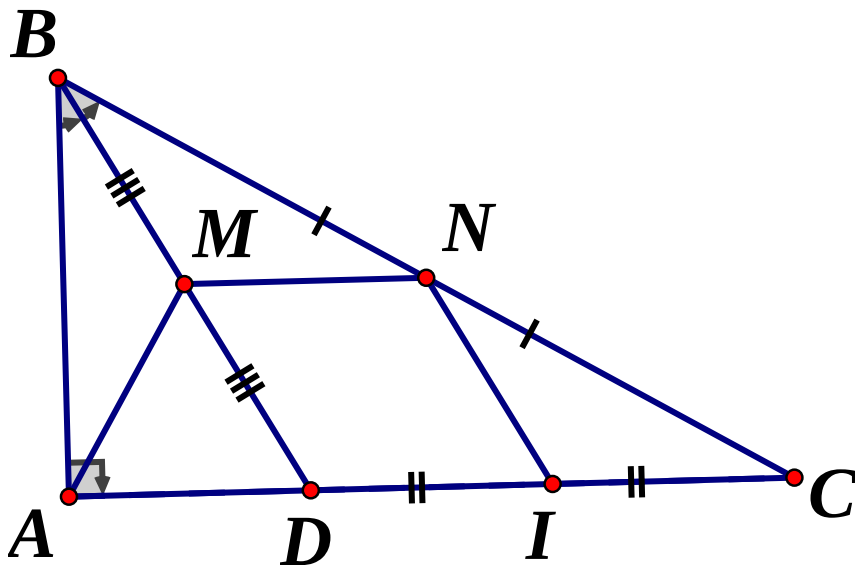
Vậy $\triangle ABC$ cân tại A thì $MNPQ$ là hình chữ nhật

c) Giả sử $MNPQ$ là hình thoi thì $MN = MQ$

$$MN = MQ \Leftrightarrow \frac{BC}{4} = \frac{AE}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{1}{2} BC$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A thì $MNPQ$ là hình thoi

Bài 5.



- a) Chứng minh được tứ giác $AMNI$ là hình thang
 Chứng minh được $AN = MI$, từ đó suy ra tứ giác $AMNI$ là hình thang cân
- b) Tính được: $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm$; $BD = 2AD = \frac{8\sqrt{3}}{3}cm$; $AM = \frac{1}{2}BD = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm$

$$NI = AM = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm, DC = BC = \frac{8\sqrt{3}}{3}cm, MN = \frac{1}{2}DC = \frac{4\sqrt{3}}{3}cm$$

$$AI = \frac{8\sqrt{3}}{3}cm$$

Bài 6.

Ta có : $M = 4x^2 + 4x + 5 = \left[(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1 \right] + 4 = (2x+1)^2 + 4$

Vì $(2x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x+1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow M \geq 4$

Vậy GTNN của $M = 4 \Leftrightarrow x = -0,5$

UBND HUYỆN THỦY NGUYÊN
 PHÒNG GD & ĐT

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
 NĂM HỌC: 2017-2018
 MÔN: TOÁN 8

Câu 1. (3 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

2. Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Câu 2. (2 điểm)

1. Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$
2. Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD . Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$

- a) Chứng minh $DE = CF$
- b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy
- c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất.

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính : $a^{2011} + b^{2011}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned}1a. \quad x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\&= (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\&= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1b. \quad (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24 \\&= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\&= \left[(x^2 + 7x + 11)^2 - 1 \right] - 24 \\&= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\&= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\&= (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16)\end{aligned}$$

2. Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Câu 2.

1. Ta có: $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x)$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2).(x-1).q(x)$$

Với $x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6$ (1)

Với $x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0$ (2)

Thay (1) vào (2), ta có: $a=2; b=4$

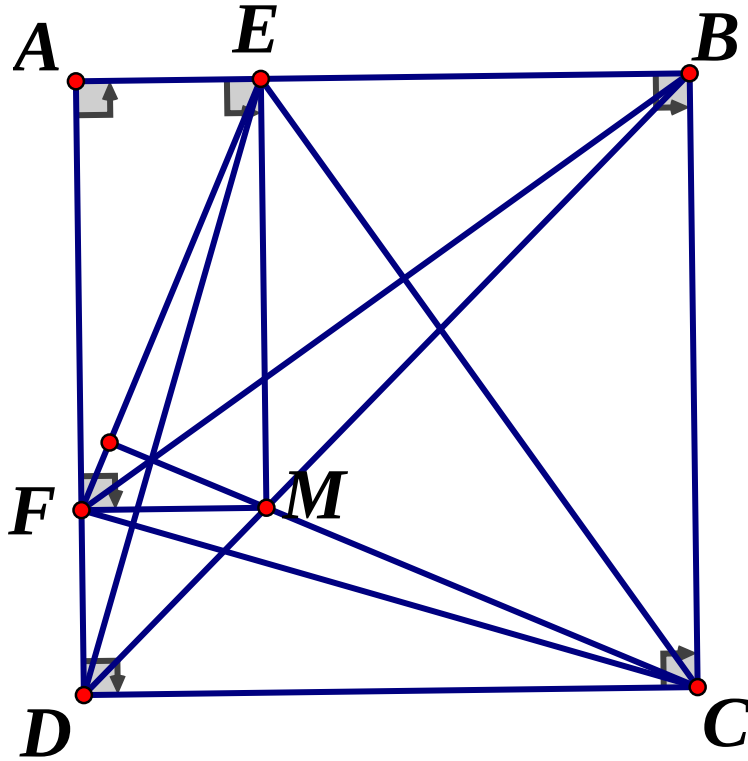
2. Ta có: $a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2).(a^2 + 2a + 2)$

Vì $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 - 2a + 2 \in \mathbb{Z}; a^2 + 2a + 2 \in \mathbb{Z}$

Có: $a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \geq 1 \forall a$ và $a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1 (\forall a)$

Vậy $a^4 + 4$ là số nguyên tố thì $\begin{cases} a^2 + 2a + 2 = 1 \\ a^2 - 2a + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = -1(tm) \end{cases}$

Câu 3.



- a) Chứng minh $AE = FM = DF \Rightarrow \triangle AED = \triangle DFC \Rightarrow dfcm$
- b) DE, BF, CM là ba đường cao của $\triangle EFC \Rightarrow dfcm$
- c) Có chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi
 $\Rightarrow ME + MF = a$ không đổi
 $\Rightarrow S_{AEMF} = ME.MF$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME = MF$ (AEMF là hình vuông)
 $\Rightarrow M$ là trung điểm của BD.

Câu 4.

$$(a^{2001} + b^{2001})(a + b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a + 1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1(tm) \\ b = 0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vì } b=1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a=1(tm) \\ a=0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN PHÚ CHƯ**

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC : 2018-2019

MÔN TOÁN LỚP 8

Thi ngày 04 tháng 4 năm 2018

Bài 1. (4,0 điểm)

3) Phân tích đa thức thành nhân tử:

c) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

d) $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$

4) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$$

Bài 2. (3,0 điểm)

c) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

d) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$ sao cho tích $x.y$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3. (3,0 điểm)

c) Tìm đa thức $f(x)$, biết $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, chia cho $x - 2$ dư 24, chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

d) Cho p và $2p + 1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p + 1$ là hợp số

Bài 4. (8,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AD là tia phân giác của BAC . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC , E là giao điểm của BN và DM , F là giao điểm của CM và DN .

4) Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF \parallel BC$.

5) Gọi H là giao điểm của BN và CM . Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle NFA$ và H là trực tâm $\triangle AEF$

6) Gọi giao điểm của AH và DM là K , giao điểm của AH và BC là O , giao điểm của BK và AD là I . Chứng minh : $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} > 9$

Bài 5. (2,0 điểm)

c) Cho $x > 0, y > 0$ và m, n là hai số thực. Chứng minh rằng $\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y}$

d) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

ĐÁP ÁN**Bài 1.**

3)

$$a) x^3 - x^2 - 14x + 24$$

$$= x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 12x + 24$$

$$= x^2(x-2) + x(x-2) - 12(x-2)$$

$$= (x^2 + x - 12)(x-2)$$

$$= (x-2)(x-3)(x+4)$$

$$b) x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$$

$$= x^4 + 2017x^2 + x^2 + 2017x + 2017 + 1$$

$$= (x^4 + x^2 + 1) + 2017(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2017(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2018)$$

4) Với $x + y = 1$ và $xy \neq 0$ ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} &= \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3-1)(x^3-1)} \\
&= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1)} \\
&= \frac{(x - y)[(x + y)(x^2 + y^2) - 1]}{xy(x^2y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + 2)} \\
&= \frac{(x - y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy(x^2y^2 + (x + y)^2 + 2)} \\
&= \frac{(x - y)[x(x - 1) + y(y - 1)]}{xy(x^2 + y^2 + 3)} = \frac{-2(x - y)}{x^2y^2 + 3} \\
\text{Vậy } \frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x - y)}{x^2y^2 + 3} &= 0
\end{aligned}$$

Bài 2.

c)

$$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x + y) = (x + 1)(x + 2) (*)$$

VT (*) là số chính phương, VP (*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = 2$$

d)

Điều kiện $x \neq 0$

$$2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy = 2$$

$$\text{Vì } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0; \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \neq 0; \text{ mọi } y$$

Do đó $xy \leq 2$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x=1; y=2 \\ x=2; y=1 \\ x=-1; y=-2 \\ x=-2; y=-1 \end{cases}$$

Bài 3.

c)

Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và dư $ax + b$

$$\text{Khi đó } f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + xa + b$$

$$\text{Theo đề ta có: } \begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + \frac{7}{2}x + 17$$

$$\text{Vậy } f(x) = -5x^2 + \frac{47}{2}x + 17$$

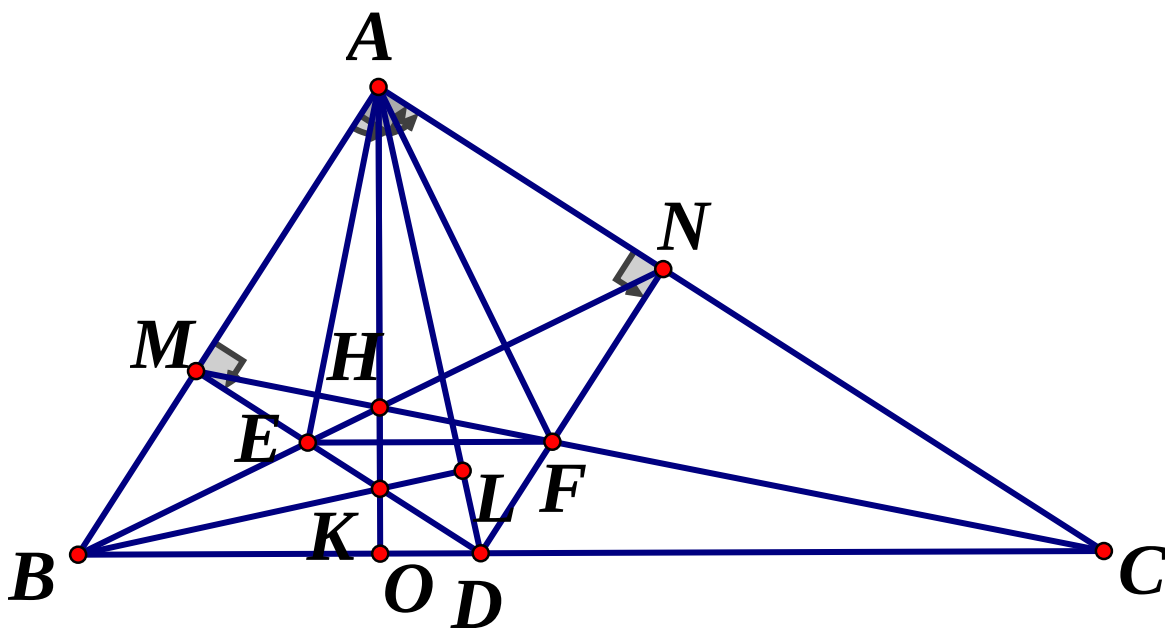
d) Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p = 3k + 1; p = 3k - 1$ với $k > 1$
 + Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$

Suy ra $2p + 1$ là hợp số (vô lý)

+ Nếu $p = 3k - 1, k > 1$ thì $4p + 1 = 12k - 3 = 3(4k - 1)$

Do $k > 1$ nên $4k - 1 > 3$. Do đó $4p + 1$ là hợp số.

Bài 4.



4) *Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông

+) Chứng minh $\angle AMD = 90^\circ$; $\angle AND = 90^\circ$; $\angle MAN = 90^\circ$

Suy ra tứ giác AMDN là hình chữ nhật

+) Hình chữ nhật AMDN có AD là phân giác của $\angle MAN$ nên tứ giác AMDN là hình vuông.

***Chứng minh $EF \parallel BC$**

+) Chứng minh : $\frac{FM}{FC} = \frac{DB}{DC}$ (1)

Chứng minh: $\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MA}$ (2)

Chứng minh $AM = DN \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DN}$ (3)

Chứng minh $\frac{MB}{DN} = \frac{EM}{ED}$ (4)

Từ (1),(2),(3),(4) suy ra $\frac{EM}{ED} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow EF \parallel BC$

5) Chứng minh $\triangle ANB \sim \triangle NFA$

Chứng minh $AN = DN$.suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB}$ (5)

Chứng minh $\frac{DN}{AB} = \frac{CN}{CA}$ (6)

Chúng minh $\frac{CN}{CA} = \frac{FN}{AM}$ (7)

Chúng minh $AM = AN$. Suy ra $\frac{FN}{AM} = \frac{FN}{AN}$ (8)

Từ (5) (6) (7) (8) suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{FN}{AN} \Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle NFA (c.g.c)$

***chứng minh H là trực tâm tam giác AEF**

Vì $\triangle ANB \sim \triangle NFA$ nên $NBA = FAN$

Mà $BAF + FAN = 90^\circ \Rightarrow NBA + BAF = 90^\circ$

Suy ra $EH \perp AF$, Tương tự: $FH \perp AE$, suy ra H là trực tâm $\triangle AEF$

6) Đặt $S_{AKD} = a, S_{BKD} = b, S_{AKB} = c$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABD}}{S_{AKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{BKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{AKB}} &= \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \end{aligned}$$

Theo định lý AM-GM ta có: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

Tương tự: $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$

Suy ra $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} \geq 9$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABD$ là tam giác đều, suy ra trái với giả thiết.

Bài 5.

5a) Với $x > 0, y > 0$ và $m, n \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (m^2y + n^2x)(x+y) \geq xy(m+n)^2$$

$$\Leftrightarrow (nx - my)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

5b) Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n+p)^2}{x+y+z} \quad (2)$$

Ta có:
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có:

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{do } abc=1)$$

Hay
$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên
$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$$

Do đó:
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

UBND HUYỆN VINH BẢO
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ GIAO LƯU HSG HUYỆN CẤP THCS
MÔN: TOÁN 8

Bài 1. (3 điểm)

a) Phân tích đa thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ thành nhân tử

b) Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức:
$$P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$$

c) Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Bài 2. (2 điểm)

a) Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

b) Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a+b=1$. Chứng minh $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Bài 3. (1 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc ABC nhọn. Vẽ ra phía ngoài hình bình hành các tam giác đều BCE và DCF . Tính số đo EAF

Bài 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và H là trực tâm

- Chứng minh $BC' \cdot BA + CB' \cdot CA = BC^2$
- Chứng minh rằng: $\frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} + \frac{HA \cdot HB}{BC \cdot AC} + \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot AB} = 1$
- Gọi D là trung điểm của BC . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với DH cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh H là trung điểm của MN .

Bài 5. (1 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng cùng có tính chất chia hình vuông này thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 505 đường thẳng trong 2018 đường thẳng trên đồng quy.

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b) \\ & = a^2(b-c) - b^2[(a-b) + (b-c)] + c^2(a-b) \\ & = (a^2 - b^2)(b-c) + (c^2 - b^2)(a-b) \\ & = (a-b)(a+b)(b-c) - (b-c)(b+c)(a-b) \\ & = (a-b)(b-c)[a+b-b-c] = (a-b)(b-c)(a-c) \end{aligned}$$

$$\text{b) } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)}; \quad \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\ &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \text{Vì } x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z \Rightarrow (x + y)^3 = -z^3$$

$$\text{Hay } x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3 \Rightarrow 3xyz = x^3 + y^3 + z^3$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } & 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) = (x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) \\ & = x^5 + y^5 + z^5 + x^3(y^2 + z^2) + y^3(z^2 + x^2) + z^3(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = z^2 - 2xy \quad (\text{Vì } x + y = -z)$$

$$\text{Tương tự: } y^2 + z^2 = x^2 - 2yz; \quad z^2 + x^2 = y^2 - 2zx$$

$$\begin{aligned} \text{Vì vậy: } & 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) = x^5 + y^5 + z^5 + x^3(x^2 - 2yz) + y^3(y^2 - 2zx) + z^3(z^2 - 2xy) \\ & = 2(x^5 + y^5 + z^5) - 2xyz(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } 2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

Bài 2.

a) Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$$\Leftrightarrow n+18 = p^2 \text{ và } n-41 = q^2 \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 = (n+18) - (n-41) = 59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q) = 59$$

Nhưng 59 là số nguyên tố, nên: $\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=30 \\ q=29 \end{cases}$

Từ $n+18 = p^2 = 30^2 = 900 \Rightarrow n = 882$

Thay vào $n-41$, ta được $882-41 = 841 = 29^2 = q^2$

Vậy với $n=882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

b) Có: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (*)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$

Áp dụng (*) có: $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(a + \frac{1}{b}\right); \quad \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(b + \frac{1}{a}\right)$

Suy ra: $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5\left[\left(a + \frac{1}{b}\right) + \left(b + \frac{1}{a}\right)\right]$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5\left[(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (\text{Vi } a+b=1)$$

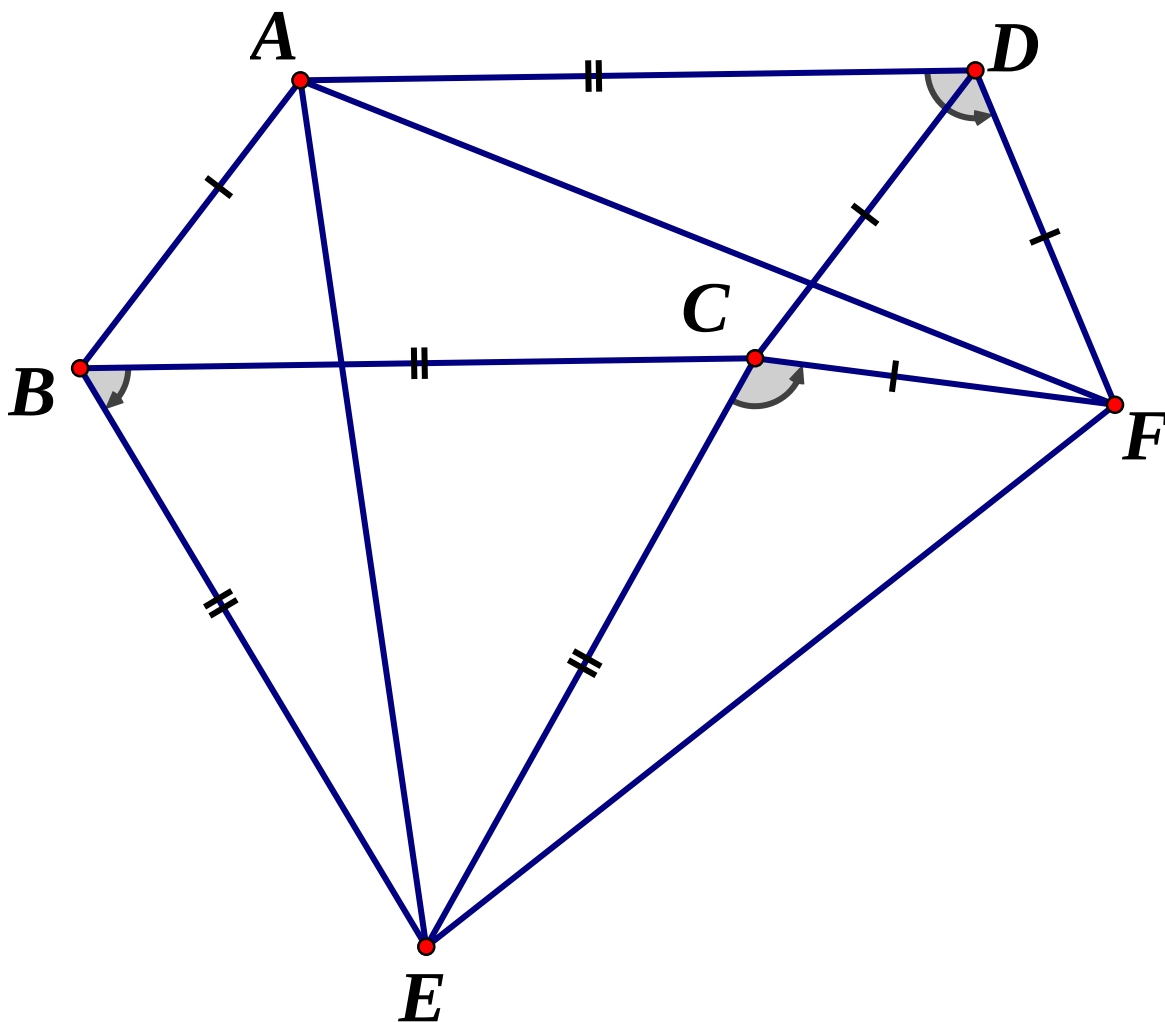
Với a, b dương, chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} = 4 \quad (\text{Vi } a+b=1)$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b$

Ta được: $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5.4$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

Bài 3.



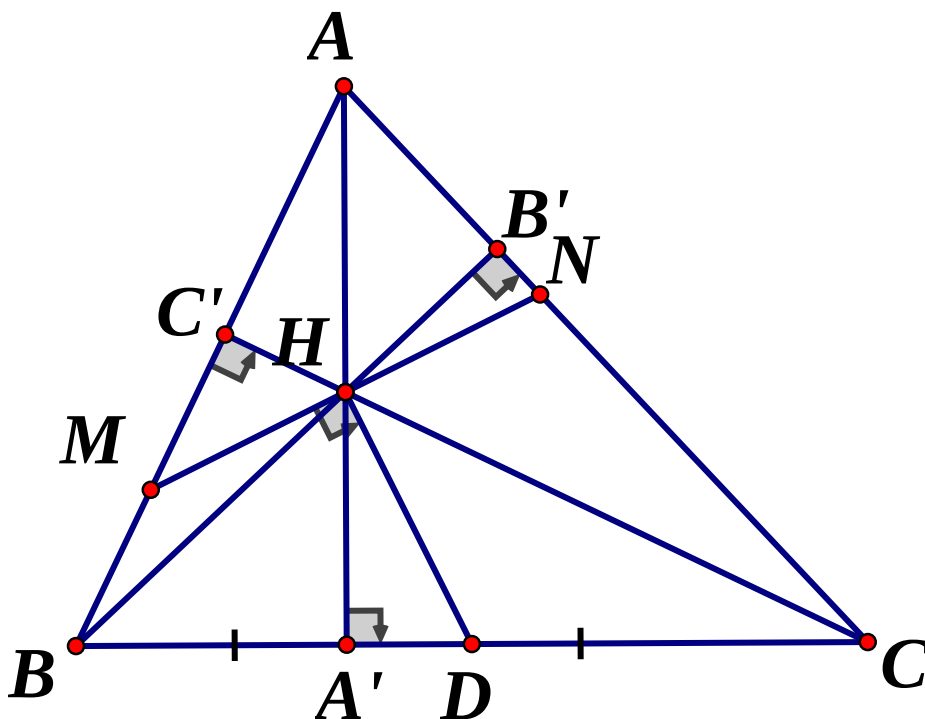
Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle FCE$

Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle FCE (c.g.c) \Rightarrow AE = EF$

Tương tự: $AF = EF$

$\Rightarrow AE = EF = AF \Rightarrow \triangle AEF$ đều $\Rightarrow \angle EAF = 60^\circ$

Bài 4.



a) Chứng minh $\triangle BHC' \sim \triangle BAB' \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{BC'}{BB'} \Rightarrow BH \cdot BB' = BC' \cdot BA$ (1)

Chứng minh $\triangle BHA' \sim \triangle BCB' \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BA'}{BB'} \Rightarrow BH \cdot BB' = BC \cdot BA'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC' \cdot BA = BA' \cdot BC$

Tương tự : $CB' \cdot CA = CA' \cdot BC$

$$\Rightarrow BC' \cdot BA + CB' \cdot CA = BA' \cdot BC + CA' \cdot BC = (BA' + A'C) \cdot BC = BC^2$$

b) Có $\frac{BH}{AB} = \frac{BC'}{BB'} \Rightarrow \frac{BH \cdot CH}{AB \cdot AC} = \frac{BC' \cdot CH}{BB' \cdot AC} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$

Tương tự: $\frac{AH \cdot BH}{CB \cdot CA} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}; \frac{AH \cdot CH}{CB \cdot AB} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}$

$$\Rightarrow \frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} + \frac{HA \cdot HB}{AC \cdot BC} + \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot AB} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

c) Chứng minh $\triangle AHM \sim \triangle CDH (g.g) \Rightarrow \frac{HM}{HD} = \frac{AH}{CD}$ (3)

$$\text{Chứng minh } \triangle AHN \sim \triangle BDH (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{BD} = \frac{HN}{HD} \quad (4)$$

$$\text{Mà } CD = BD \quad (gt) \quad (5)$$

$$\text{Từ } (3), (4), (5) \Rightarrow \frac{HM}{HD} = \frac{HN}{HD} \Rightarrow HM = HN \Rightarrow H \text{ là trung điểm của } MN$$

Bài 5.

Gọi E, F, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD . Lấy các điểm I, G trên EF và K, H trên PQ thỏa mãn:

$$\frac{IE}{IF} = \frac{HP}{HQ} = \frac{GF}{GE} = \frac{KQ}{KP} = \frac{2}{3}$$

Xét d là một trong các đường thẳng bất kỳ đã cho cắt hai đoạn thẳng AD, BC, EF lần lượt tại M, N, G' . Ta có:

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{CDNM}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{AB \cdot (BM + AN)}{2}}{\frac{CD \cdot (CM + DN)}{2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EG'}{G'F} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow G \equiv G' \text{ hay } d \text{ qua } G.$$

Từ lập luận trên suy ra mỗi đường thẳng thỏa mãn yêu cầu của đề bài đều đi qua một trong 4 điểm G, H, I, K

Do có 2018 đường thẳng đi qua 1 trong 4 điểm G, H, I, K theo nguyên lý Dirichle phải tồn tại ít nhất $\left\lceil \frac{2018}{4} \right\rceil + 1 = 505$ đường thẳng cùng đi qua một điểm trong 4 điểm trên.

Vậy có ít nhất 505 đường thẳng trong số 2018 đường thẳng đã cho đồng quy.

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
DUY XUYỀN**

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC : 2017-2018
Môn: TOÁN – LỚP 8
Thời gian làm bài: 120 phút**

Bài 1. (3,5 điểm)

c) Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

d) Rút gọn biểu thức:
$$\frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$$

Bài 2. (4,5 điểm).

c) Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m /$ giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

d) Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Bài 3. (4 điểm)

c) Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$

Bài 4. (4,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BD, BC, DC

c) Chứng minh $APQR$ là hình thang cân

d) Biết $AB = 6cm, AC = 8cm$. Tính độ dài của AR

Bài 5. (2,5 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng qua B cắt cạnh CD tại M, cắt đường chéo AC tại N và cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh:

$$\frac{1}{BN} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{BK}$$

Bài 6. (1,0 điểm)

Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

c) $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3)=1$ nên chia hết cho 6

$18n : 6$, suy ra điều phải chứng minh

d)

$$\begin{aligned}
& \frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1} = \frac{x^2 + x^2a + a + a^2 + a^2x^2 + 1}{x^2 - x^2a - a + a^2 + a^2x^2 + 1} \\
& = \frac{x^2 + x^2a + a^2x^2 + 1 + a + a^2}{x^2 - x^2a + a^2x^2 + 1 - a + a^2} = \frac{x^2(1 + a + a^2) + (1 + a + a^2)}{x^2(1 - a + a^2) + (1 - a + a^2)} \\
& = \frac{(x^2 + 1)(1 + a + a^2)}{(x^2 + 1)(1 - a + a^2)} = \frac{1 + a + a^2}{1 - a + a^2}
\end{aligned}$$

Bài 2.

c) Gọi x là số lần đi ($x \in \mathbb{N}, x > 0$), số lần dừng là $x - 1$

Thời gian đi

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} + \dots + \frac{4x}{2} = 2 + 4 + 6 + \dots + 2x \\
& = 2(1 + 2 + 3 + \dots + x) = x(x + 1)
\end{aligned}$$

Thời gian dừng:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (x - 1) = \frac{(x - 1 + 1)(x - 1)}{2} = \frac{x(x - 1)}{2}$$

Lập được phương trình

$$\frac{x(x - 1)}{2} + x(x + 1) = 155 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 310 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = \frac{-31}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Khoảng cách AB là $10 \cdot (10 + 1) \cdot 2 = 220(m)$

d)

$$\begin{aligned}
& a^3 - 3ab^2 = 5 \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25 \\
& b^3 - 3a^2b = 10 \Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100 \\
& \Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 125 \\
& \Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5^3 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2018} = \frac{5}{2018}
\end{aligned}$$

Bài 3.

$$\text{c) } (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$$

Đặt $x^2 - x + 1 = X$ có

$$X^2 + X - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 4X - 3X - 12 = 0 \Leftrightarrow X(X + 4) - 3(X + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 3)(X + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -4 \end{cases}$$

$$X = -4 \Rightarrow x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

$$X = 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

d)

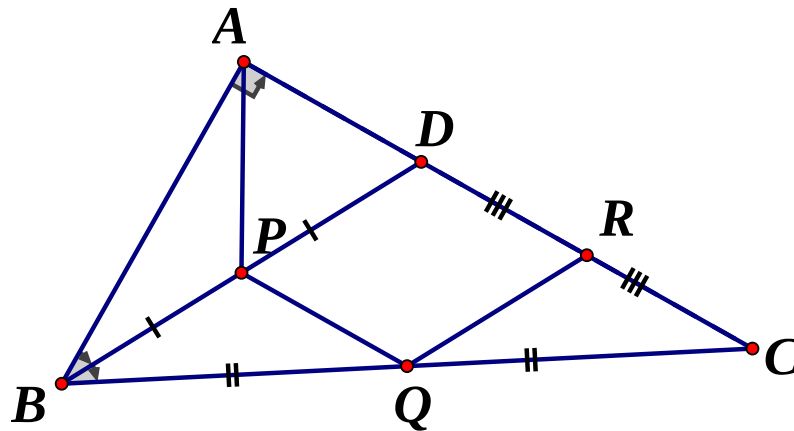
$$P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$$

$$= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 2018$$

$$= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 2018 \geq -2018$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -2018 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Bài 4.



c) PQ là đường trung bình tam giác BDC , suy ra $PQ \parallel AR$ nên $APQR$ là hình thang.

$$AQ = \frac{1}{2} BC \text{ (trung tuyến tam giác vuông } \triangle ABC)$$

$$PR = \frac{1}{2} BC \text{ (đường trung bình tam giác } \triangle BDC)$$

Suy ra $AQ = PR \Rightarrow APQR$ là hình thang cân

d) Tính được $BC = 10cm$

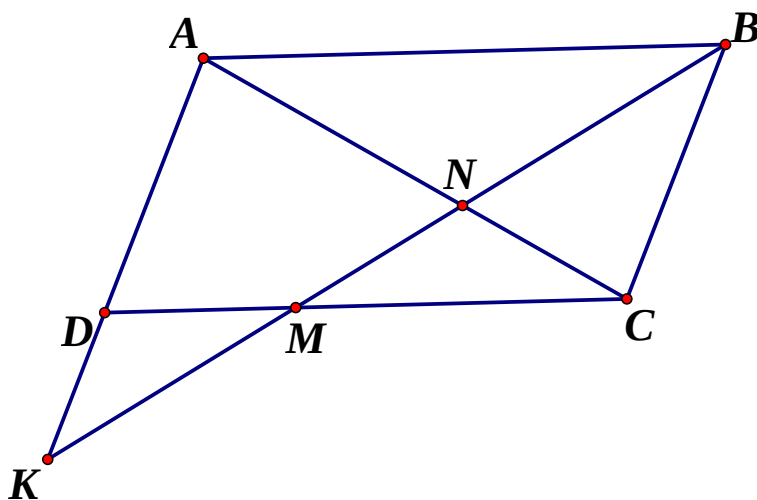
Tính chất đường phân giác trong của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{BA}{BC + BA}$$

Thay số tính đúng $AD = 3cm, DC = 5cm, DR = 2,5cm$

Kết quả $AR = 5,5cm$

Bài 5.



$AB \parallel KC$ (hai cạnh đối diện hình bình hành). Theo định lý Talet có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AN} = \frac{MN}{NB} \Rightarrow \frac{MC + AB}{AB} = \frac{MN + NB}{BN} = \frac{BM}{BN} \quad (1)$$

$$\frac{KM}{BK} = \frac{KD}{KA} = \frac{MD}{AB} \Rightarrow \frac{BK - KM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \Rightarrow \frac{BM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = \frac{AB + MC}{AB} - \frac{AB - MD}{AB} = \frac{MC + MD}{AB}$$

Mà $MC + MD = CD = AB$ nên $\frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = 1$ (Điều phải chứng minh)

Bài 6.

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) \\ &= [(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2] \\ &= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \end{aligned}$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

UBND HUYỆN BÌNH XUYỀN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8

NĂM HỌC: 2017-2018

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể giờ đề

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- Tìm ĐKXĐ và rút gọn A
- Tìm các số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình và bất phương trình sau:

- $x + \frac{x-1}{m} < \frac{x+1}{m} - (m-2)x$ (với m là tham số, $m \neq 0$)
- $8 \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = (x+4)^2 - 4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2$
- $(2x+3)^3 + (3x-5)^3 = (5x-2)^3 - (5x-2)(17x^2 + 2016x - 2063)$

Bài 3. (2,0 điểm)

- Tìm các số tự nhiên n để $B = (n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố
- Trong lớp học bạn An khi đã hoàn thành bài tập mà giáo viên giao cho thì đã giết thời gian bằng cách liệt kê ra một bảng các số nguyên. Bạn ấy bắt đầu ghi ra một số

nguyên nào đó; để có số tiếp theo, An đã cộng hoặc nhân các chữ số của số đứng liền trước. Cứ tiếp tục như thế, và rồi nhận ra rằng các số mình ghi đều là số lẻ. Hỏi có bao nhiêu số đầu tiên An có thể chọn, biết rằng nó không quá 6 chữ số.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

- a) Tính tổng $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$
- b) Chứng minh: $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$
- c) Chứng minh: Điểm H cách đều ba cạnh của tam giác DEF
- d) Trên các đoạn HB, HC lấy tương ứng các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$.

Chứng minh : Đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định .

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số dương.

Chứng minh: $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\text{a) ĐKXD: } \begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ 8 - 4x + 2x^2 - x^3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ thì:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left[\frac{x(x-2)}{2(x^2+4)} + \frac{2x^2}{(x^2+4)(x-2)} \right] \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \frac{x(x-2)^2 + 2x^2 \cdot 2}{2(x^2+4)(x-2)} \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\ &= \frac{(x^2 - 4x + 4) + 4x^2}{2(x^2+4)} \cdot \frac{x+1}{x} \\ &= \frac{x^2 + 4}{2(x^2+4)} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

Vậy, với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ thì $A = \frac{x+1}{2x}$

b) Xét với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} (*)$

Giả sử biểu thức A nhận giá trị nguyên thì biểu thức 2A cũng nhận giá trị nguyên

$$2A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2x+2}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$$

$x = -1; x = 1$ đều thỏa mãn $(*)$

Với $x = -1$ thì $A = \frac{-1+1}{2(-1)} = 0$ (thỏa mãn $A \in \mathbb{Z}$)

Với $x=1$ thì $A = \frac{1+1}{2.1} = 2$ (thỏa mãn $A \in \mathbb{Z}$)

Vậy để biểu thức A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{-1; 1\}$

Câu 2.

$$a) \quad x + \frac{x-1}{m} < \frac{x+1}{m} - (m-2)x \Leftrightarrow (m-1)x < \frac{2}{m} \quad (2a)$$

$$+) \text{ Nếu } m < 1 \text{ và } m \neq 0 \text{ thì } m-1 < 0. \Rightarrow (2a) \Leftrightarrow x > \frac{2}{m(m-1)}$$

$$+) \text{ Nếu } m > 1 \text{ thì } m-1 > 0. (2a) \Leftrightarrow x < \frac{2}{m(m-1)}$$

$$+) \text{ Nếu } m = 1 \text{ thì } m-1 = 0. \Rightarrow (2a) \Leftrightarrow 0x < 2 \text{ (luôn đúng)}$$

Kết luận:

$$+ \text{ Với } m < 1 \text{ và } m \neq 0 \text{ thì tập nghiệm BPT là } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{2}{m(m-1)} \right\}$$

$$+ \text{ Với } m = 1 \text{ thì tập nghiệm của BPT là } S = \mathbb{R}$$

$$+ \text{ Với } m > 1 \text{ thì tập nghiệm của BPT là: } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x < \frac{2}{m(m-1)} \right\}$$

$$b) \quad 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \quad (2b)$$

Điều kiện $x \neq 0$, Khi đó:

$$(2b) \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$$

Vì $x \neq 0$ nên $S = \{-8\}$

c) Trước hết chứng minh được rằng:

Nếu có 3 số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (2c)

Ta có:

$$(2x+3)^3 + (3x-5)^3 = (5x-2)^3 - (5x-2)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)^3 + (3x-5)^3 + (2-5x)^3 = (2-5x)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

Áp dụng đẳng thức (2c) và vì $(2x+3) + (3x-5) + (2-5x) = 0$ nên phương trình đã cho tương đương với :

$$3(2x+3)(3x-5)(2-5x) = (2-5x)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)[3(6x^2 - x - 15) - (17x^2 + 2016x - 2063)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)(x^2 - 2019x + 2018) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)(x-1)(x-2018) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ x = 1 \\ x = 2018 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{2}{5}; 1; 2018 \right\}$

Câu 3.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= (n^2 - 8)^2 + 36 = n^4 - 16n^2 + 64 + 36 \\ &= n^4 + 20n^2 + 100 - 36n^2 \\ &= (n^2 + 10)^2 - (6n)^2 \\ &= (n^2 - 6n + 10)(n^2 + 6n + 10) \end{aligned}$$

Với $n \in \mathbb{N}$ thì $0 < n^2 - 6n + 10 \leq n^2 + 6n + 10$

Nên để B là số nguyên tố thì trước hết $n^2 - 6n + 10 = 1$

$$\text{Hay } (n-3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3$$

Thử lại, với $n = 3$ thì $B = (3^2 - 8)^2 + 36 = 37$

37 là số nguyên tố nên $n = 3$ là giá trị cần tìm

b) Ta gọi số đầu tiên thỏa mãn đề bài là số chấp nhận được. Các chữ số của số chấp nhận đều phải là số lẻ, vì nếu không tích của chúng sẽ chẵn

Như vậy có 5 số chấp nhận được có 1 chữ số

Không thể có số chấp nhận được gồm 2 chữ số vì thế thì tổng hoặc tích các chữ số của chúng sẽ là số chẵn. Tương tự như vậy số chấp nhận được cũng không thể có 4 hoặc 6 chữ số.

Ta xét các số chấp nhận được gồm ba chữ số (tổng và tích các chữ số của các số chấp nhận được gồm ba chữ số này phải là số lẻ, và chúng không thể có hai chữ số, nên và tổng và tích các chữ số không thể vượt quá 9. Như vậy số chấp nhận được gồm 3 chữ số có thể:

Hoặc là gồm 3 chữ số 1,

Hoặc là gồm hai chữ số 1, số còn lại là 1 trong 3 chữ số 3,5,7

Hoặc gồm 1 chữ số 1 và 2 chữ số 3

Do đó có $1+9+3=13$ số chấp nhận được có 3 chữ số.

Tương tự như thế, ta tính được số chấp nhận được gồm 5 chữ số. Tổng các chữ số không vượt quá 45 và là số chấp nhận được nên tích không vượt quá 9, khả năng xảy ra là :

Hoặc gồm 5 chữ số 1

Hoặc gồm 4 chữ số 1 và một chữ số 3

Hoặc gồm 4 chữ số 1 và một chữ số 5

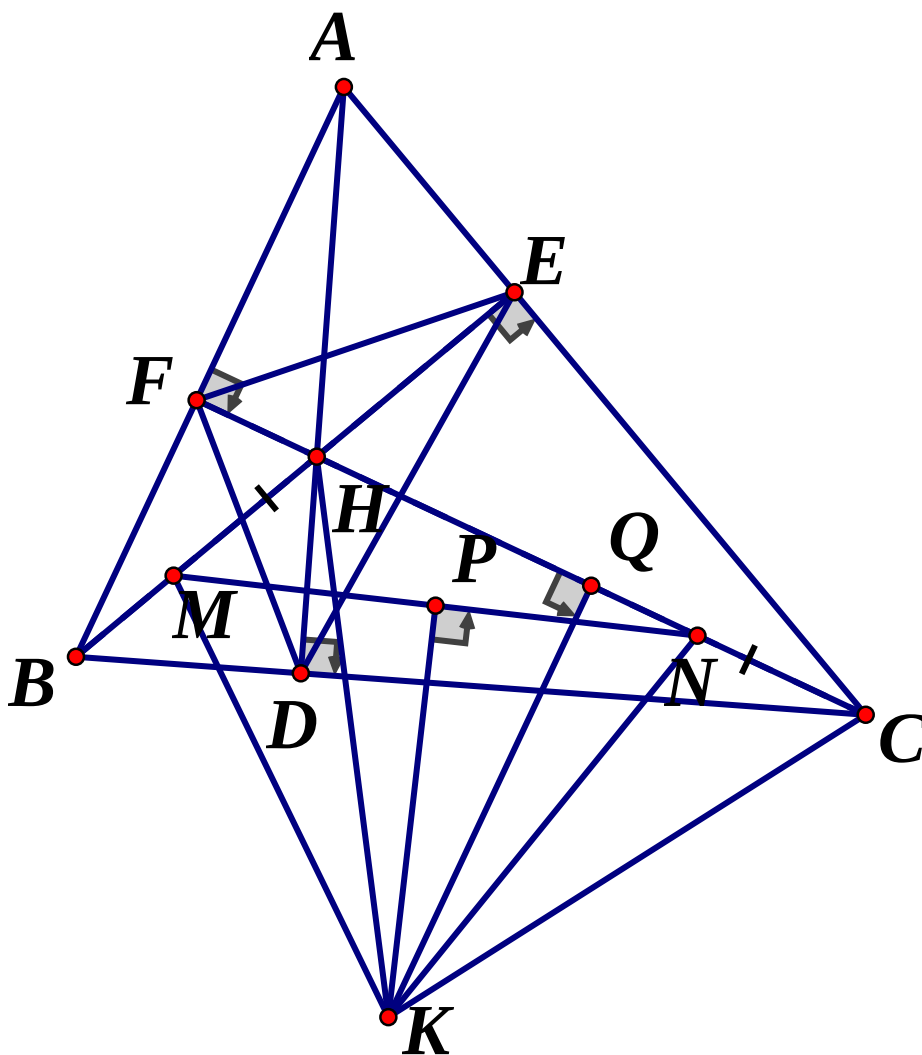
Hoặc gồm ba chữ số 1 và hai chữ số 3

Do đó số các số chấp nhận được gồm 5 chữ số:

$1+5+5+10=21$ số

Vậy số các số thỏa mãn đề bài là: $5+13+21=39$ số

Câu 4.



a) Trước hết chứng minh : $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự có: $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

Nên $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

Vậy $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$

b) Trước hết chứng minh: $\triangle BDH \sim \triangle BEC \Rightarrow BH \cdot BE = BD \cdot BC$
 Và $\triangle CDH \sim \triangle CFB \Rightarrow CH \cdot CF = CD \cdot BC$
 $\Rightarrow BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC \cdot (BD + CD) = BC^2$

c) Trước hết chứng minh $\triangle AEB \sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$. Mặt khác $\angle EAF = \angle BAC$

Nên $\triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$

Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle CDE \sim \triangle CAB \Rightarrow \angle CED = \angle CBA$

$\Rightarrow \angle AEF = \angle CED$ mà $EB \perp AC$ nên EB là phân giác của góc DEF

Tương tự: DA, FC là phân giác của các góc EDF, DFE

Vậy H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

Nên H cách đều ba cạnh của tam giác DEF

d) Gọi K là giao điểm của các đường trung trực của hai đoạn MN và HC, ta có

$$\triangle KMH = \triangle KNC (c.c.c) \Rightarrow \angle KHM = \angle KCN \quad (1)$$

Mặt khác ta cũng có: $\triangle KCH$ cân tại K nên: $\angle KHC = \angle KCH \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\angle KHC = \angle KHB \Rightarrow HK$ là phân giác của góc BHC

Vậy K là giao điểm của trung trực đoạn HC và phân giác của góc BHC nên K là điểm cố định

Hay trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định là K

Câu 5.

Áp dụng BĐT Cô si cho ba số dương ta được:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \quad (*)$$

Cũng theo BĐT Cô si :

$$0 < 3^3 abc \leq (a+b+c)^3 \quad (1) \text{ và } 0 < 3^3 \cdot (a+b)(b+c)(c+a) \leq 8(a+b+c)^3 \quad (2)$$

Nhân tương ứng hai vế các BĐT (1) và (2) được:

$$3^6 abc(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8(a+b+c)^6$$

$$\text{Hay } \frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2} \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra } \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$