

Bài I (3 điểm)

- 1) Tìm các số nguyên dương n để $A = \frac{(n-8)^2 - 48}{n+5}$ có giá trị là số nguyên dương.
- 2) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y(y^2 + y - 3x) = 0$

Bài II (2 điểm)

Giải hệ phương trình (x, y, z là ẩn)
$$\begin{cases} (x^2 + 1)y = 2x^2 \\ (y^2 + 1)z = 2y^2 \\ (z^2 + 1)x = 2z^2 \end{cases}$$

Bài III. (3 điểm)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp (O) . Gọi BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC .

1/ Chứng minh $AD \cdot AC = AE \cdot AB$

2/ Tia AO cắt BC tại A_1 và cắt cung nhỏ BC tại A_2 . Tia BO cắt AC tại B_1 và cắt cung nhỏ AC tại B_2 . Tia CO cắt BA tại C_1 và cắt cung nhỏ AB tại C_2 .

Chứng minh: $\frac{A_1A_2}{AA_1} + \frac{B_1B_2}{BB_1} + \frac{C_1C_2}{CC_1} = 1$

3/ Từ A vẽ tia Ax vuông góc với DE . Cho cạnh BC cố định, đỉnh A di động trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Chứng minh tia Ax luôn đi qua một điểm cố định.

Bài IV. (1 điểm)

Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số). Biết rằng $P(1)=10, P(2)=20, P(3)=30$.

Tính giá trị của biểu thức $\frac{P(12)+P(-8)}{10} + 25$

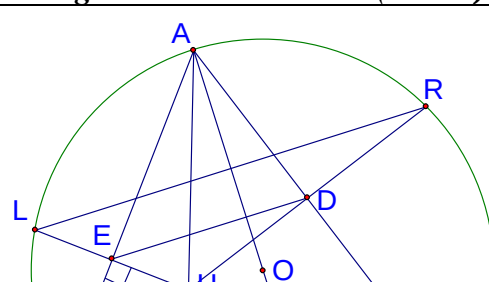
Bài V (1 điểm)

Chứng minh rằng: Nếu ba điểm A, B, C không có điểm nào nằm bên ngoài đường tròn (O) sao cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn thì chu vi của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ không lớn hơn chu vi (O)

..... Hết.....

Họ và tên thí sinh : Số báo danh:

Chữ kí giám thị số 1 Chữ kí giám thị số 2

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
I			3.0
	1	Tìm số nguyên dương n ... (1.5 điểm)	
		$*(n-8)^2 -48 = n^2 -16n+16$ nên $A=n-21+\frac{121}{n+5}$	0.50
		$*121=11^2$ và $n+5\geq 6$; $n+5\in Z$	0.25
		$*n+5=11$ được $n=6$ và $A=-4$	0.25
		$*n+5=121$ được $n=116$ và $A=96$	0.25
		$*KL$ $n=116$	0.25
	2	Tìm các số nguyên dương x, y ... (1.5 điểm)	
		$*x^2+y(y^2+y-3x)=0 \Leftrightarrow x^2-3xy+y^2+y^3=0$ (1)	0.25
		$*Coi$ (1) là pt bậc 2 với ẩn x	0.25
		$*có \Delta=y^2(5-4y)$	0.25
		$*Nếu y\geq 2$ thì $\Delta<0$ phương trình (1) vô nghiệm	0.25
		$*Với y=1$ phương trình (1) trở thành $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1; x_2=2$	0.25
	$*KL: x=1, y=1$ và $x=2, t=1$	0.25	
II		Giải hệ phương trình	2.0
		$*Nếu$ một trong 3 số x, y, z bằng 0 thì hai số còn lại bằng 0 Ta thấy $x=y=z=0$ là một nghiệm của hệ	0.25
		$*Xét$ trường hợp cả ba số x, y, z khác 0	
		hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{2}{y} \\ \frac{y^2+1}{y^2} = \frac{2}{z} \\ \frac{z^2+1}{z^2} = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{y} = 0 \\ 1 + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{z} = 0 \\ 1 + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{x} = 0 \end{cases}$	0.75
		$*Cộng$ vế với vế của 3 PT ta được $\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) + \left(1 + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{y}\right) + \left(1 + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z}\right)=0$	0.25
		$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{y}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{z}-1\right)^2 =0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}-1=0 \\ \frac{1}{y}-1=0 \\ \frac{1}{z}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ (thỏa mãn hệ đã cho)	0.50
		$*KL:$ Hệ đã cho có 2 nghiệm $x=y=z=0$ và $x=y=z=1$	.025
III			3.0
	1	Chứng minh $AD.AC=AE.AB$ (1 điểm)	
		 Chứng minh được tam giác ABD đồng dạng với tam giác ACE	0.50

		Chứng minh được $AD.AC=AE.AB$	0.50
2	Chứng minh ... (1 điểm)		
	*Gọi H là trực tâm của ΔABC tia AH cắt BC tại J và cắt cung BC tại Q. CM được: $\frac{A_1A_2}{A_1A_2} = \frac{JQ}{JA}$		0.25
	*CM được $\frac{JH}{JA} = \frac{JQ}{JA} = \frac{S_{\Delta BHC}}{S_{\Delta BAC}}$		
	*Tương tự chứng minh được $\frac{B_1B_2}{B_1B} = \frac{S_{\Delta AHC}}{S_{\Delta BAC}}, \frac{C_1C_2}{C_1C} = \frac{S_{\Delta AHB}}{S_{\Delta BAC}}$		
	* ΔABC nhọn nên điểm H nằm trong tam giác. Suy ra $S_{BHC}+S_{BHA}+S_{AHC}=S_{BAC}$ Từ đó $\frac{A_1A_2}{AA_1} + \frac{B_1B_2}{BB_1} + \frac{C_1C_2}{CC_1} = \frac{S_{BHC}+S_{BHA}+S_{CHA}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BAC}}{S_{ABC}} = 1$		
3.	Chứng minh tia Ax ... (1 điểm)		
	*tia BD cắt cung AC tại R, tia CE cắt cung AB tại L Chứng minh được $DE \parallel RL$ suy ra $LR \perp Ax$		
	* $\Rightarrow$ cung AL = cung AR chứng minh Ax đi qua tâm O khi A di động t		
IV	Tính giá trị của biểu thức... (1 điểm)		
	*Đặt $Q(x)=P(x)-10x$		
	*Có $Q(1)=Q(2)=Q(3)=0$		
	* $Q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-r)$ $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-r)+10x$		
	* $A = \frac{P(12)+P(-8)}{10} + 25 = 2009$		
V	Chứng minh rằng... (1 điểm)		
	*Gọi đường tròn ngoại tiếp ΔABC là (I), I nằm trong ΔABC Nếu A, B, C nằm trên (O) thì (I) và (O) trùng nhau.		
	*Nếu (O) đựng (I) hoặc (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau thì đường kính của (I) nằm trong (O) suy ra chu vi của (I) nhỏ hơn chu vi của (O).		
	*Nếu (O) và (I) cắt nhau tại M, N. Vì ΔABC có ba góc nhọn nên số đo cung nhỏ $MN < 180^\circ$. Suy ra cung lớn $MN > 180^\circ$, ắt tồn tại đường kính của (I) nằm trong (O). Vậy chu vi của (I) nhỏ hơn chu vi của (O)		

Thí sinh phải lập luận đầy đủ mới có điểm tối đa, điểm làm tròn đến 0.25

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM 2017

Môn thi: Toán (chuyên)

(Dành cho thí sinh thi vào trường THPT Chuyên Hạ Long)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi này có 01 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right) \text{ (với } x \neq 0; x \neq \sqrt{3} \text{)}.$$

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$.

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^3 - x^2 - x\sqrt{x-1} - 2 = 0$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ xy + 3y^2 + x = 3 \end{cases}.$$

Câu 3. (1,0 điểm)

Tìm các số tự nhiên n để $A = n^{2018} + n^{2008} + 1$ là số nguyên tố.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB , M là một điểm tùy ý thuộc đường tròn (M khác A và B). Qua A và B lần lượt kẻ các đường thẳng d và d' là tiếp tuyến với đường tròn. Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt d và d' lần lượt tại C và D . Đường thẳng BM cắt d tại E .

1. Chứng minh $CM = CA = CE$.

2. Chứng minh $AD \perp OE$.

3. Tính độ dài đoạn AM theo R , nếu $AE = BD$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho $a; b$ thỏa mãn $|a| \geq 2; |b| \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq (a + b)(ab + 1) + 5.$$

..... Hết

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Chữ ký của cán bộ coi thi 1:.....Chữ ký của cán bộ coi thi 2:.....

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI TUYỂN SINH
LỚP 10 THPT NĂM 2017**

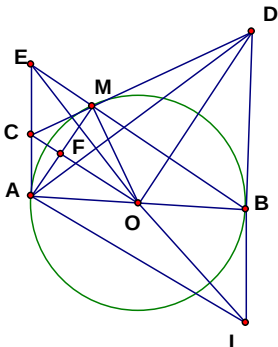
Môn thi: Toán (chuyên)

Dành cho thí sinh thi vào trường THPT Chuyên Hạ Long

(Hướng dẫn này có 03 trang)

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
Câu 1 (2,0 điểm)	1. Với điều kiện xác định là $x \neq 0; x \neq \sqrt{3}$ $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right)$	0,5

	$= \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}x} \right)$	
	$= \left(\frac{(x - \sqrt{3})\sqrt{3} + 3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}x} \right)$ $= \frac{1}{x - \sqrt{3}}$	0,5
	2. Ta có : $x = \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$ $= \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}}$ $= \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$ $= \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}}$ $= \sqrt{3} + 1$	0,75
	nên thay $x = \sqrt{3} + 1$ vào A ta có: $A = \frac{1}{x - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}} = 1$	0,25
Câu 2 (3,0điểm)	1. ĐK: $x \geq 1$. Biến đổi về phương trình $x^2(x - 1) - x\sqrt{x - 1} - 2 = 0$	0,25
	Đặt $t = x\sqrt{x - 1}$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow t^2 = x^2(x - 1)$.	0,25
	Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$ Kết hợp với điều kiện, ta được $t = 2$	0,5
	Với $t = 2 \Rightarrow x\sqrt{x - 1} = 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x = 2$	0,5
	2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 & (1) \\ xy + 3y^2 + x = 3 & (2) \end{cases}$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + y(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y) = 0$, ta được $x = y$ hoặc $x = -2y$	0,75
	* Với $x = y$, từ (2) ta có: $4x^2 + x - 3 = 0$, ta được $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{4}$. Khi đó, $x_1 = y_1 = -1, x_2 = y_2 = \frac{3}{4}$.	0,25
	* Với $x = -2y$, từ (2) ta có $y^2 - 2y - 3 = 0$, ta được $y_1 = -1, y_2 = 3$ Nếu $y = -1 \Rightarrow x = 2$. Nếu $y = 3 \Rightarrow x = -6$.	0,25
	Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) là: $(-1; -1); \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right); (2; -1); (-6; 3)$.	0,25
Câu 3 (1,0điểm)	Tìm số tự nhiên n để $A = n^{2018} + n^{2008} + 1$ là số nguyên tố. Xét $n = 0$ thì $A = 1$ không là số nguyên tố; Xét $n = 1$ thì $A = 3$ là số nguyên tố.	0,25

	Xét $n > 1$, ta thấy $A > n^2 + n + 1$; $A = n^{2018} - n^2 + n^{2008} - n + n^2 + n + 1$ $= n^2((n^3)^{672} - 1) + n((n^3)^{669} - 1) + (n^2 + n + 1)$	0,5
	mà $(n^3)^{672} - 1$ chia hết cho $n^3 - 1$, suy ra $(n^3)^{672} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$. Tương tự: $(n^3)^{669} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ Khi đó A chia hết cho $n^2 + n + 1 > 1$ và $A > n^2 + n + 1$ nên A là hợp số. Tóm lại số tự nhiên cần tìm là $n = 1$.	0,25
Câu 4 (3,0 điểm)		0,25
	1. Gọi F là giao điểm của OC và AM, ta có $OC \perp AM$. Ta có, $CM = CA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). Hai tam giác vuông AME và AFC đồng dạng, nên $\frac{AE}{AC} = \frac{AM}{AF} = 2 \Rightarrow AE = 2AC \Rightarrow AC = CE$. Vậy $CM = CA = CE$.	0,75
	2. Gọi giao điểm của EO với d' là I, Chứng minh được $AEBI$ là hình bình hành $\Rightarrow BE \parallel AI$.	0,5
	Ta có, $OD \perp BE \Rightarrow OD \perp AI$, mà $AB \perp DI$ $\Rightarrow O$ là trực tâm của $\triangle ADI$ $\Rightarrow OI \perp AD \Rightarrow OE \perp AD$ (đpcm).	0,5
	3. Tam giác COD vuông tại O (vì OC, OD là hai phân giác của hai góc kề bù), có OM là đường cao nên $OM^2 = CM.MD$. Theo phần 1, ta có $EC = CA = CM \Rightarrow 2CM = AE$, mà $BD = MD$ và $AE = BD$ (gt) $\Rightarrow 2CM = MD$. $\Rightarrow 2CM^2 = R^2$ (do $MO = R$ và $OM^2 = CM.MD$) $\Rightarrow CM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow AE = R\sqrt{2}$ (do $AE = 2CM$).	0,25
	Do trong giác vuông AEB tại A, ta có $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AB^2}$ $\Rightarrow AM = \frac{AE.AB}{\sqrt{AE^2 + AB^2}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.	0,5
Câu 5 (1,0 điểm)	Xét hiệu $M = (a^2 + 1)(b^2 + 1) - (a + b)(ab + 1) - 5$ $= (a^2b^2 - a^2b - ab^2 + ab) + (a^2 + b^2 - a - b - ab) - 4$	0,5

	$= ab(a-1)(b-1) + \frac{1}{2}[(a-b)^2 + a(a-2) + b(b-2)] - 4.$	
	Chỉ ra với $a \geq 2$ thì $a(a-1) \geq 2$ và $a(a-2) \geq 0$ $b \geq 2$ thì $b(b-1) \geq 2$ và $b(b-2) \geq 0$ nên $ab(a-1)(b-1) \geq 4$; $\frac{1}{2}[(a-b)^2 + a(a-2) + b(b-2)] \geq 0$ $\Rightarrow M \geq 0$ hay $(a^2+1)(b^2+1) \geq (a+b)(ab+1) + 5.$	0,5

Những chú ý khi chấm thi:

- Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới cho điểm tối đa.
- Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết.
- Có thể chia nhỏ điểm thành phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm thống nhất toàn bài là tổng số điểm toàn bài đã chấm, **không làm tròn**.

..... Hết

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẾN TRE
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2016-2017
Môn: TOÁN
Thời gian: 150 phút (không kể phát đề)**

Câu 1. (7 điểm)

a) Chứng minh rằng $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4$ chia hết cho 16 với mọi n là số nguyên

b) Cho biểu thức $B = \sqrt{\frac{(x^2-3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x+2)^2 - 8x}$. Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B có giá trị nguyên

c) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Câu 2 (3 điểm)

Cho hàm số $y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2$ có đồ thị (D)

a) Vẽ đồ thị (D) của hàm số trên

b) Với giá trị nào của m thì phương trình $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = m$ vô nghiệm

c) Dựa vào đồ thị (D), tìm tập nghiệm của bất phương trình: $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq x$

Câu 3. (2 điểm)

Cho x, y, z là các số thực thỏa:
$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 2017 & (1) \\ z^2 + \frac{y^2}{3} = 1009 & (2) \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 & (3) \end{cases} \quad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z)$$

Chứng minh rằng $\frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}$

Câu 4. (5 điểm)

Cho đoạn thẳng AB và điểm E nằm giữa điểm A và điểm B sao cho $AE < BE$. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AE và đường tròn (O_2) đường kính BE. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài MN của hai đường tròn với M là tiếp điểm thuộc (O_1) và N là tiếp điểm thuộc (O_2)

- a) Gọi F là giao điểm của các đường thẳng AM và BN. Chứng minh rằng đường thẳng EF vuông góc với đường thẳng AB
- b) Với $AB = 18$ cm và $AE = 6$ cm, Vẽ đường tròn (O) đường kính AB. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại C và D sao cho điểm C thuộc cung nhỏ AD. Tính độ dài đoạn thẳng CD.

Câu 5. (3 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A, có góc A nhỏ hơn 90° . Từ B kẻ BM vuông góc với AC tại M (điểm M thuộc AC). Chứng minh $\frac{AM}{MC} + 1 = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2$

ĐÁP ÁN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 BẾN TRE 2016-2017

Câu 1.

a) $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4 = n^4 \cdot (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = [n(n+1)]^4$

Vì $n(n+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $n(n+1):2 \Rightarrow [n(n+1)]^4 : 2^4 = 16$

Do đó $A:16$ với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$

b) $B = \sqrt{\frac{(x^2-3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x+2)^2 - 8x} = \sqrt{\frac{(x^2+3)^2}{x^2}} + \sqrt{(x-2)^2} = \frac{x^2+3}{|x|} + |x-2|$

+) Nếu $x < 0$: $B = \frac{-x^2-3}{x} - x + 2 = \frac{-2x^2+2x-3}{x} = -2x + 2 - \frac{3}{x}$

B có giá trị nguyên khi $\frac{x}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(3)$ và $x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

+) Nếu $0 < x \leq 2$: $B = \frac{x^2+3}{x} - x + 2 = \frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$

B có giá trị nguyên khi $\frac{3}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(3)$ và $x > 2 \Leftrightarrow x = 3$

Kết luận

$$B = \begin{cases} \frac{-2x^2+2x-3}{x} & \text{khi } x < 0 \\ \frac{2x+3}{x} & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ \frac{2x^2-2x+3}{x} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

B có giá trị nguyên khi $x \in \{\pm 1; \pm 3\}$

c) $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2y^2 + y) = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-2y^2+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-1 \\ x-2y^2+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên là (2;1) và (0;1)

Câu 2.

a) $y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = 2|x-3| - x - 2 = \begin{cases} x-8 & \text{nếu } x \geq 3 \\ -3x+4 & \text{nếu } x < 3 \end{cases}$

Học sinh tự vẽ đồ thị

b) Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị sau:

(D) $y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2$ (1)

(D'): $y=m$ là đường thẳng song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tung độ m . Căn cứ vào đồ thị, ta có phương trình (*) vô nghiệm

(D) và (D') không giao nhau $\Leftrightarrow m < -5$

Vậy $m < -5$ thì pt (*) vô nghiệm

c) Dựa vào đồ thị đã vẽ ở câu a, ta có: nghiệm của (1) là tập hợp hoành độ của các điểm (D)

có tung độ $y \geq -2$, nên $\begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq 2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của (1) là $x \geq 6$ hoặc $x \leq 2$

Câu 3

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 2017 & (1) \\ z^2 + \frac{y^2}{3} = 1009 & (2) \quad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z) \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 & (3) \end{cases}$$

Trừ (1) và (2) vế theo vế, ta có: $x^2 + xy - z^2 = 1008$ (4)

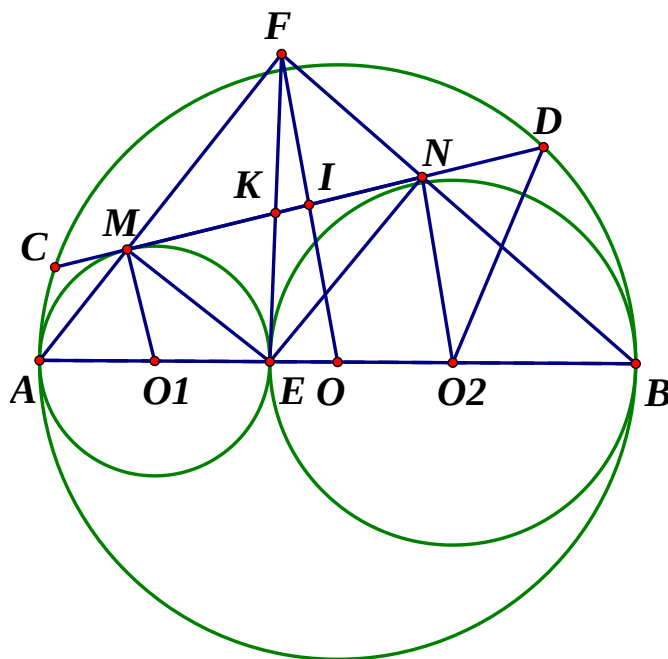
Trừ (3) và (4) vế theo vế ta có: $xz - xy + 2z^2 = 0 \Leftrightarrow xz + 2z^2 = xy$

$$\Leftrightarrow 2xz + 2z^2 = xy + xz \Leftrightarrow 2z(x + z) = x(y + z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}$$

Điều phải chứng minh

Câu 4



a) MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) nên

$$MN \perp O_1M; MN \perp O_2N \Rightarrow O_1M \parallel O_2N \Rightarrow \angle MO_1E + \angle NO_2E = 180^\circ$$

$$\triangle O_1AM \text{ cân tại } O_1 \text{ suy ra } \angle MO_1E = 2\angle O_1AM$$

$$\triangle O_2BN \text{ cân tại } O_2 \text{ nên } \angle NO_2E = 2\angle O_2BN$$

$$\Rightarrow \angle MO_1E + \angle NO_2E = 2(\angle O_1AM + \angle O_2BN) \Rightarrow \angle O_1AM + \angle O_2BN = 90^\circ \Rightarrow \angle MFN = 90^\circ$$

Mặt khác $\angle AME = \angle BNE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle EMF = \angle ENF = 90^\circ$ suy ra MENF là hình chữ nhật $\Rightarrow \angle MEF = \angle NME$

Mà $\angle O_1EM = \angle O_1ME$ ($\triangle O_1ME$ cân tại O_1) và $\angle NME + \angle O_1ME = 90^\circ$ (MN là tiếp tuyến)

$\Rightarrow \angle MEF + \angle O_1EM = 90^\circ$ hay $EF \perp AB$ tại E

b) Ta có $AB = 18$ cm, $AE = 6$ cm $\Rightarrow EB = 12$ cm, $OF = 9$ cm

$\triangle AFB$ vuông tại F có đường cao EF nên $EF^2 = AE \cdot EB = 6 \cdot 12 = 72 \Rightarrow EF = 6\sqrt{2}$ (cm)

$\Rightarrow MN = EF = 6\sqrt{2}$ (cm)

Gọi K, I lần lượt là giao điểm của EF, OF với MN

Tứ giác MENF là hình chữ nhật nên có $\angle NMF = \angle NEF$ mà $\angle NEF = \angle ABF$ (cùng phụ góc BEM) $\Rightarrow \angle NMF = \angle ABF$ (1) $\Rightarrow \triangle FNM \sim \triangle FAB$

Ta lại có $\triangle OAF$ cân tại O suy ra $\angle OAF = \angle OFA$ (2)

Và $\angle OAF + \angle ABF = 90^\circ$ (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow \angle NMF + \angle OFA = 90^\circ \Rightarrow \angle MIF = 90^\circ$

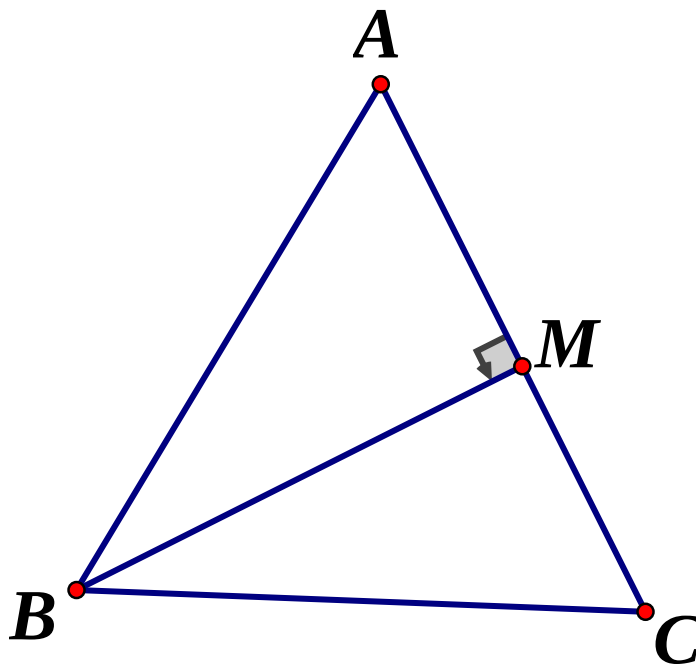
$\triangle FNM$ đồng dạng tam giác FAB và có FI, FE là hai đường cao tương ứng nên

$$\frac{FI}{EF} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{FI}{6\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{18} \Rightarrow FI = 4 \text{ cm} \Rightarrow OI = OF - FI = 9 - 4 = 5 \text{ cm}$$

$\triangle OID$ vuông tại I có $ID^2 = OD^2 - OI^2 = 9^2 - 5^2 = 56 \Rightarrow ID = 2\sqrt{14}$ (cm)

Vì $OF \perp CD$ tại I nên $CD = 2 \cdot ID = 4\sqrt{14}$ (cm)

Câu 5



$\triangle ABC$ cân tại A nên $AB = AC$

$$\text{Ta có } \frac{AM}{MC} + 1 = 2 \cdot \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{AM + MC}{MC} = 2 \cdot \frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow \frac{AC}{MC} = 2 \cdot \frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow BC^2 = 2 \cdot AC \cdot MC$$

Ta cần chứng minh: $BC^2 = 2AC \cdot MC$

$$\text{Thật vậy, } BC^2 = BM^2 + MC^2 = AB^2 - AM^2 + (AC - AM)^2$$

$$= AC^2 - AM^2 + AC^2 - 2AC \cdot AM + AM^2$$

$$= 2AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AM = 2AC \cdot (AC - AM) = 2 \cdot AC \cdot MC$$

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I (2,0 điểm)

1) Cho $A = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$

Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của A

2) Cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm nguyên dương biết a, b là hai số dương thỏa mãn $5a + b = 22$. Tìm hai nghiệm đó.

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $4x^2 - 6x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 - x + \frac{1}{y} = 1 \\ y^2 + y - xy^2 = 4 \end{cases}$$

Câu III (1,0 điểm) Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} > 4$

Câu IV (2,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có trục tâm H, nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AA'. Gọi AD là đường phân giác trong của góc BAC ($D \in BC$). M, I lần lượt là trung điểm của BC và AH.

- 1) Lấy K đối xứng với H qua AD. Chứng minh K thuộc đường thẳng AA'.
- 2) Gọi P là giao điểm của AD với HM. Đường thẳng HK cắt AB và AC lần lượt tại Q và R. Chứng minh rằng Q và R lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên AB, AC.

Câu V (3,0 điểm)

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^4 + y^4 + z^4 = 2012$

2) Cho hình vuông 12×12 , được chia thành lưới các hình vuông đơn vị. Mỗi đỉnh của hình vuông đơn vị này được tô bằng một trong hai màu xanh đỏ. Có tất cả 111 đỉnh màu đỏ. Hai trong số những đỉnh màu đỏ này nằm ở đỉnh hình vuông lớn, 22 đỉnh màu đỏ khác nằm trên cạnh cạnh của hình vuông lớn (không trùng với đỉnh của hình vuông lớn) hình vuông đơn vị được tô màu theo các quy luật sau: cạnh có hai đầu mút màu đỏ được tô màu đỏ, cạnh có hai đầu mút màu xanh được tô màu xanh, cạnh có một đầu mút màu đỏ và một đầu mút màu xanh thì được tô màu vàng. Giả sử có tất cả 66 cạnh vàng. Hỏi có bao nhiêu cạnh màu xanh.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....
Chữ kí của giám thị 1: Chữ kí của giám thị 2:

Từ : Nguyễn Hồng Vân – THPT Trần Hưng Đạo – Hải Phòng- <http://trakhuc66.violet.vn/>

Lời giải một số câu

Câu I

$$1) A = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{15\sqrt{x} - 11 - (3\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3) - (2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$\Leftrightarrow A = -5 + \frac{17}{\sqrt{x} + 3}, A \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow x = 0 \text{ khi đó } A \text{ lớn nhất bằng } \frac{2}{3}.$$

2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của phương trình ($x_1 < x_2$)

Ta có $a = -x_1 - x_2$ và $b = x_1x_2$ nên

$$5(-x_1 - x_2) + x_1x_2 = 22$$

$$\Leftrightarrow x_1(x_2 - 5) - 5(x_2 - 5) = 47$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 47 \quad (*)$$

Vì $x_1 \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x_1 \geq 1$ nên với giả sử $x_1 < x_2$

Ta có: $-4 \leq x_1 - 5 < x_2 - 5$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5 = 1 \\ x_2 - 5 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 52 \end{cases}.$$

Khi đó: $a = -58$ và $b = 312$ thỏa $5a + b = 22$. Vậy hai nghiệm cần tìm là $x_1 = 6; x_2 = 52$.

Câu II:

$$1) 4x^2 - 6x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 2(4x^2 - 2x + 1) - (4x^2 + 2x + 1) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{(4x^2 - 2x + 1)(4x^2 + 2x + 1)}$$

Dễ thấy $4x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + (x - 1)^2 > 0, \forall x$ & $4x^2 + 2x + 1 = 3x^2 + (x + 1)^2 > 0, \forall x$ nên đặt

$$a = \sqrt{4x^2 - 2x + 1}, b = \sqrt{4x^2 + 2x + 1} = b, a > 0, b > 0$$

$$\text{Ta có phương trình } 2a^2 - b^2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}ab$$

$$\Leftrightarrow 6a^2 + \sqrt{3}ab - 3b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{a}{b}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}, (TM) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 2x + 1}{4x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^2 - x + \frac{1}{y} = 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + y - xy^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Nếu } y = 0 \text{ thì (2) vô lý nên } y \neq 0 \text{ vậy } (2) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y} - x = \frac{4}{y^2}$$

Đặt $\frac{1}{y} = b$ ta có hệ

$$\begin{cases} 4x^2 - x + b = 1 & (1') \\ 4b^2 - b + x = 1 & (2') \end{cases}$$

Lấy (1') - (2') ta có $(x-b)(2x+2b-1) = 0$

*) Nếu $x = b$ ta có hai nghiệm $(-\frac{1}{2}, -2)$ và $(\frac{1}{2}; 2)$

*) Nếu $2x + 2b = 1$ thì hệ vô nghiệm

Vậy hệ có hai nghiệm $(-\frac{1}{2}, -2)$ và $(\frac{1}{2}; 2)$

Câu V

1)

Giả sử một số nguyên là số chẵn có dạng $2k$ thì $(2k)^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod{8}$

Nếu Số nguyên là số nguyên lẻ có dạng $2k + 1$ thì $(2k + 1)^4 = (4t + 1)^2 = 16h + 1 \equiv 1 \pmod{8}$

nên với k, t, h là các số nguyên $x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{8}$

Nhưng $2012 \equiv 4 \pmod{8}$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

2) Có 111 đỉnh màu đỏ, trong đó có 22 đỉnh nằm trên cạnh của hình vuông, 87 đỉnh nằm lọt trong hình vuông lớn. Từ đó ta thấy có hai điểm màu xanh ở hai góc của hình vuông lớn, 22 điểm màu xanh trên các cạnh của hình vuông lớn không nằm trên đỉnh của hình vuông lớn còn lại có 34 điểm màu xanh nằm lọt trong hình vuông. Với 312 cạnh của cả hình, ta cho đỉnh của mỗi cạnh như sau: trong 2 mút của nó có i điểm màu xanh thì cho i điểm. Gọi tổng số điểm là S , ta có $S = 2$ (số cạnh màu xanh) + số cạnh vàng. Ta lại có thể đếm số S theo cách khác: Mỗi điểm xanh ở góc là mút của hai đoạn, các điểm còn lại là mút của 4 đoạn. Vậy $S = 2 \times 2 + 22 \times 3 + 34 \times 4 = 206$, suy ra số cạnh xanh là: $(206 - 66):2 = 70$ cạnh màu xanh.

Câu III: Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} > 4$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{9}{a+b}\right) > 18$$

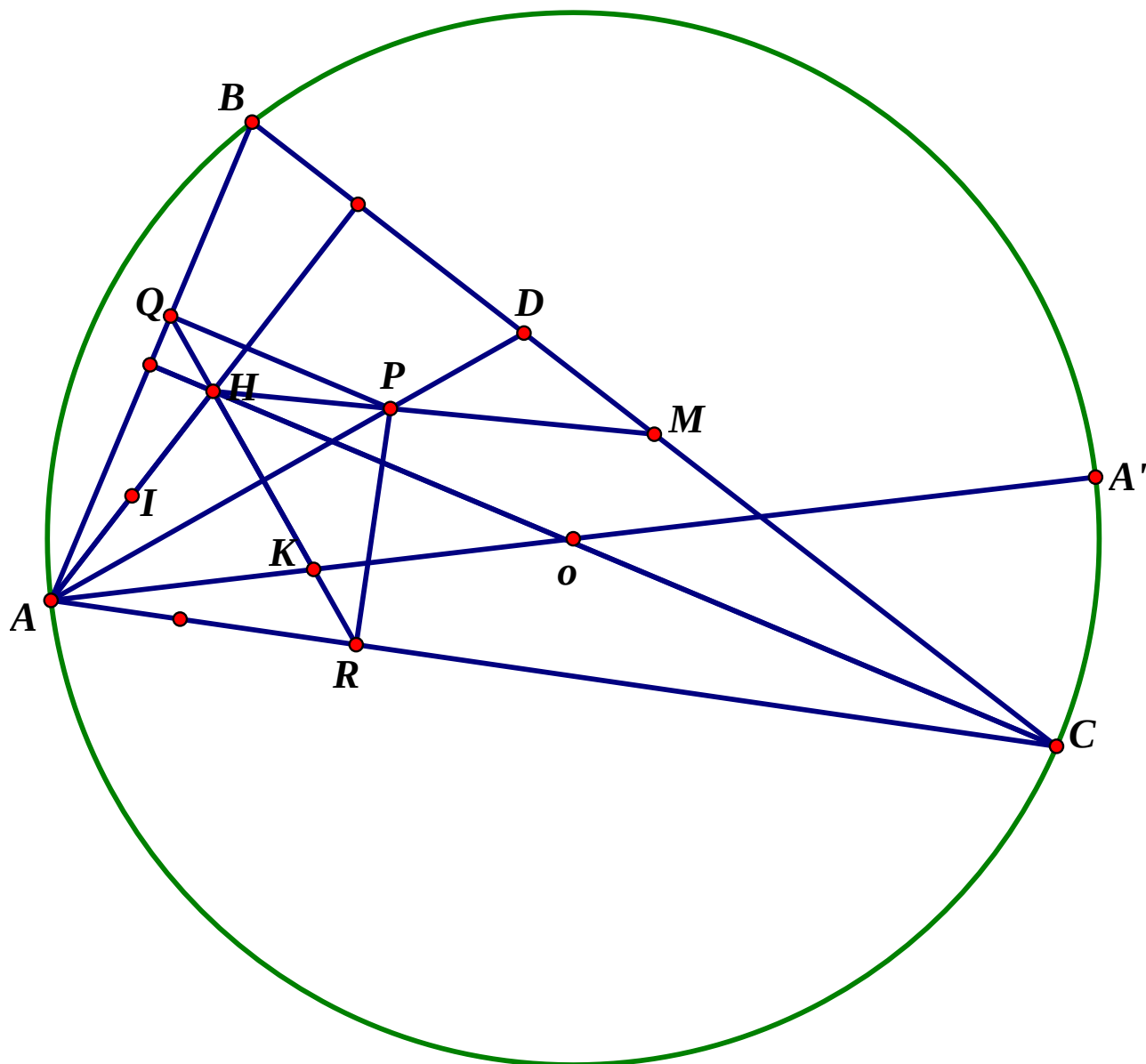
Thật vậy:

$$[(b+c) + (a+c) + a+b]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{9}{a+b}\right) > \left(\sqrt{\frac{b+c}{b+c}} + \sqrt{\frac{4(a+c)}{(a+c)}} + \sqrt{\frac{9(a+b)}{(a+b)}}\right)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{9}{a+b}\right) > 18 \text{ Điều phải chứng minh}$$

.

Bài hình: 1) Tam giác ABA' có: $\angle ABC + \angle A'BC = 90^\circ, \angle ABC + \angle BAN \Rightarrow \angle A'BC = \angle BAN$



Lại có

$A'AC = A'BC$ (cùng chắn cung $A'C$) nên $BAN = A'AC$

Cũng có $BAD = CAD \Rightarrow BAD - BAN = CAD - CAN \Rightarrow$

Mặt khác H đối xứng với K qua AD $\Rightarrow HAD = KAD$, H thuộc AN nên K thuộc AA'

2) Bạn tự giải nhé.

**SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO
BÌNH ĐỊNH**
Đề chính thức

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2013-2014
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN**
Ngày thi: 15/6/2013
Thời gian làm bài: 150'

Bài 1: (2,5 đ) Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) (x + \sqrt{x})$ (Với $x \geq 0$; $x \neq 1$)

1. Rút gọn Q
2. Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên

Bài 2: (2 đ) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{13}{10} \\ \frac{3}{x-3} - \frac{2y+4}{y+1} = -\frac{11}{6} \end{cases}$$

Bài 3: (1,5 đ) Cho a,b,c là các số thực dương. CMR : $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$.

Bài 4: (3 đ) Cho đường tròn (O,R) và đường thẳng (d) không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm A,B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C,D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

1. CMR các điểm M,D,O,H cùng nằm trên một đường tròn.
2. Đoạn OM cắt đường tròn tại điểm I. CMR I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCD .
3. Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P và Q. Tìm vị trí điểm M trên (d) sao cho diện tích ΔMPQ bé nhất.

Bài 5: (1 đ) : Không dùng máy tính, hãy rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}} - \sqrt{2}$
 ---*---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: (2,5 đ) Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x})$ (Với $x \geq 0$; $x \neq 1$)

1. Rút gọn Q

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x}) = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = \frac{x+\sqrt{x}-2-x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

2. Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên:

$Q = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 2 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow Q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{-1; 0; 2; 3\}$ Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow x \in \{0; 2; 3\}$

Vậy với $x \in \{0; 2; 3\}$ thì Q nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (2 đ) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{13}{10} \\ \frac{3}{x-3} - \frac{2y+4}{y+1} = -\frac{11}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{13}{10} \\ \frac{3}{x-3} - 2 - \frac{2}{y+1} = -\frac{11}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{3}{10} \\ \frac{3}{x-3} - \frac{2}{y+1} = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (\text{ĐK } x \neq 3; y \neq -1)$$

Đặt $a = \frac{1}{x-3}$; $b = \frac{1}{y+1}$ ta được hệ :

$$\begin{cases} a + 3b = \frac{3}{10} \\ 3a - 2b = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{10} \\ \frac{1}{y+1} = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 14 \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất $(x; y) = (13; 14)$

Bài 3: (1,5 đ) Cho a, b, c là các số thực dương. CMR : $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$.

a, b, c là các số thực dương $\Rightarrow$ Theo BĐT Cô-Si ta được:

$$\left. \begin{aligned} \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} &\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b}} = 2c \\ \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} &\geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{ca}{b}} = 2a \\ \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} &\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ab}{c}} = 2b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$$

Bài 4: (3 đ)

1. CMR các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

$HA = HB \Rightarrow OH \perp AB$ (đường kính đi qua trung điểm một dây không đi qua tâm) $\Rightarrow \angle OHM = 90^\circ$

Lại có $\angle ODM = 90^\circ$ (Tính chất tiếp tuyến)

Suy ra $\angle OHM = \angle ODM = 90^\circ \Rightarrow H, D$ cùng nhìn đoạn OM dưới 1 góc vuông $\Rightarrow H, D$ cùng nằm trên đường tròn đường kính $OM \Rightarrow$ các điểm M, D, O, H cùng nằm trên đường tròn đường kính OM
 2. Đoạn OM cắt đường tròn tại điểm I . CMR I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MCD$.

Ta có: $\angle COI = \angle DOI$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow CI = DI \Rightarrow \angle CDI = \angle DIM \Rightarrow DI$ là phân giác trong của $\triangle MCD$ (1)

Lại có MI là đường phân giác trong của $\triangle MCD$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) (2)

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MCD$

3. Đường thẳng qua O , vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P và Q . Tìm vị trí điểm M trên (d) sao cho diện tích $\triangle MPQ$ bé nhất.

Ta có $\triangle MOD = \triangle MOP$ (g-c-g) $\Rightarrow S_{\triangle MPQ} = 2 S_{\triangle MOQ} = OD.MQ = R.MQ$

$\Rightarrow S_{\triangle MPQ}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MQ$ nhỏ nhất (3)

Theo BĐT Cô – si cho hai số không âm ,

ta có: $MQ = MD + DQ \geq 2\sqrt{MD.DQ} = 2\sqrt{OD^2} = 2OD = 2R$

(Vì $\triangle MOD$ vuông tại O có đường cao OD nên $OD^2 = MD.DQ$)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow MD = DQ \Leftrightarrow \triangle OMQ$ vuông cân tại O

$$= \frac{OD}{\sin \angle OMD} = \frac{R}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}.R$$

(Vì $\triangle ODM$ vuông nên $OD = OM.\sin \angle OMD$)

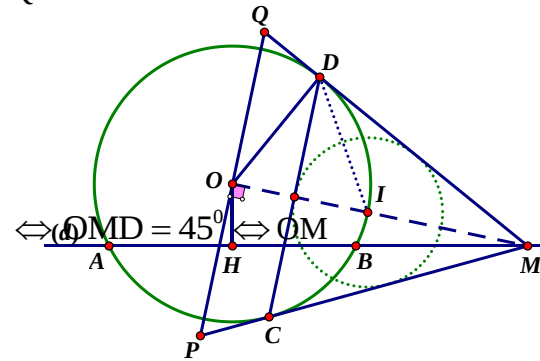
Vậy $MQ_{\min} = 2R \Leftrightarrow OM = \sqrt{2} R$ (2)

Từ (3) và (4) suy ra khi M nằm trên (d) cách O một khoảng $\sqrt{2} R$ thì $S_{\triangle MPQ}$ nhỏ nhất là $R.2R = 2R^2$ (d.v.d.t)

Bài 5: (1 đ) : $A = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}} - \sqrt{2}$.Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}.A &= \sqrt{14 + 2\sqrt{13}} - \sqrt{14 - 2\sqrt{13}} - 2 = \sqrt{(\sqrt{13} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{13} - 1)^2} - 2 \\ &= |\sqrt{13} + 1| - |\sqrt{13} - 1| - 2 = \sqrt{13} + 1 - \sqrt{13} + 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = 0$



**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẮC LẮC
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN 9 – THCS
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể giao đề)
Ngày thi : 05/4/2017**

Bài 1. (4 điểm)

1) Cho số thực a mà $a > 2$. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{a} \left[\frac{(a-1)\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}} + \frac{(a-1)\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}} \right]$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x\sqrt{y} + 3\sqrt{y} = 1 \\ \frac{16}{x} - 3\sqrt{y} = 5 \end{cases}$

Bài 2 (4 điểm)

1) Tìm m để phương trình $x^2 + (2m+1)x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 5$

2) Cho số thực b thỏa mãn điều kiện đa thức $P(x) = x^2 + bx + 2017$ có giá trị nhỏ nhất là một số thực dương. Chứng minh cả hai phương trình $4x^2 - 12\sqrt{10}x + b = 0$ và $4x^2 - 12\sqrt{10}x - b = 0$ đều có hai nghiệm phân biệt

Bài 3 (4 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $1 + 2^x = y^2$

- 2) Với mỗi số tự nhiên n , ta đặt $M(n) = 2^{n^2} + 2^{4n^4+1-n^2}$. Chứng minh rằng $2^{M(n)} - 8$ luôn chia hết cho 31

Bài 4. (4 điểm)

Cho đường tròn (O) có tâm O. Dây AB cố định không phải đường kính. Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Trên cung nhỏ AB lấy hai điểm C, E sao cho góc CIA và EIB là góc nhọn. CI cắt đường tròn (O) tại điểm D khác C. EI cắt đường tròn (O) tại điểm F khác E. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C và D cắt nhau tại M, các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại E và F cắt nhau tại N. Nối OM cắt CD tại P và ON cắt EF tại Q. Chứng minh rằng

- 1) Tứ giác PQNM nội tiếp
- 2) MN song song với AB

Bài 5. (2 điểm) Cho tam giác ABC cân tại C, có góc ở đỉnh là 36° . Chứng minh

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Bài 6 (2,0 điểm) Cho hai số thực a, b thay đổi sao cho $1 \leq a \leq 2; 1 \leq b \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức } A = \left(a + b^2 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b} \right) \left(b + a^2 + \frac{4}{b^2} + \frac{2}{a} \right)$$

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI 9 ĐẮC LẮC 2016-2017

Bài 1.

1)

$$A = \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{(a-1)\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}} + \frac{(a-1)\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}} \right] = \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{(\sqrt{a-1})^3+1}{\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}} + \frac{(\sqrt{a-1})^3-1}{\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{(\sqrt{a-1}+1)(a-1-\sqrt{a-1}+1)}{\sqrt{a-1}+1} + \frac{(\sqrt{a-1}-1)(a-1+\sqrt{a-1}+1)}{\sqrt{a-1}-1} \right]$$

$$= \frac{1}{a} \cdot (a - \sqrt{a-1} + a + \sqrt{a-1}) = 2 \text{ (do } a > 2 \Rightarrow a-1 > 0; \sqrt{a-1}-1 > 0)$$

2)
$$\begin{cases} x^2 - 3x\sqrt{y} + 3\sqrt{y} = 1 \\ \frac{16}{x} - 3\sqrt{y} = 5 \end{cases} \quad (\text{ĐK: } x \neq 0; y \geq 0)$$

Ta có (*)
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3\sqrt{y}+1) = 0 \\ \frac{16}{x} - 3\sqrt{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \frac{16}{x} - 3\sqrt{y} = 5 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\sqrt{y}+1=0 \\ \frac{16}{x} - 3\sqrt{y} = 5 \end{cases} \quad (2)$$

Giải (1)
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 3\sqrt{y}=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{121}{9} \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Giải (2)
$$\begin{cases} x=3\sqrt{y}-1 \\ \frac{16}{3\sqrt{y}-1} - 3\sqrt{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\sqrt{y}-1 \\ 3y+4\sqrt{y}-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\sqrt{y}-1 \\ (\sqrt{y}-1)(3\sqrt{y}+7)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y) = \left\{ \left(1; \frac{121}{9} \right); (2;1) \right\}$

Bài 2.

1) Ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(3m-1) = 4(m-1)^2 + 1 > 0$ với mọi m. Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo Vi et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m+1) \\ x_1 x_2 = 3m-1 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 5$$

Khi đó
$$\Leftrightarrow (2m+1)^2 - 2(3m-1) = 5 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(2m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

2)
$$P(x) = x^2 + bx + 2017 = \left(x + \frac{b}{2} \right)^2 + 2017 - \frac{b^2}{4} \geq 2017 - \frac{b^2}{4}$$

Do đó
$$\text{Min } P(x) = 2017 - \frac{b^2}{4}$$

Ta có $2017 - \frac{b^2}{4} > 0 \Leftrightarrow b^2 < 4 \cdot 2017 \Leftrightarrow -2\sqrt{2017} < b < 2\sqrt{2017}$

Phương trình: $4x^2 - 12\sqrt{10}x + b = 0$ có $\Delta_1' = 360 - 4b$

Phương trình: $4x^2 - 12\sqrt{10}x - b = 0$ có $\Delta_2' = 360 + 4b$

Mà $-2\sqrt{2017} < b < 2\sqrt{2017} \Rightarrow \begin{cases} 360 - 8\sqrt{2017} < 360 - 4b < 360 + 8\sqrt{2017} \\ 360 - 8\sqrt{2017} < 360 + 4b < 360 + 8\sqrt{2017} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \end{cases}$

Vậy cả hai phương trình đều có nghiệm phân biệt

Bài 3.

1) $1 + 2^x = y^2 \Leftrightarrow (y+1)(y-1) = 2^x \Rightarrow \begin{cases} y+1 = 2^m & (1) \\ y-1 = 2^n & (2) \\ m+n = x \end{cases}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2^m - 2^n = 2 = 2^2 - 2 \Rightarrow m = 2, n = 1 \Rightarrow x = 3; y = 3$

2) +) Nếu n chẵn $\Rightarrow n^2 : 4 \Rightarrow n^2 = 4t (t \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^{n^2} = 2^{4t} = 16^t = 5k_1 + 1 (k_1 \in \mathbb{N})$

Và $4n^4 + 1 - n^2 = 4p + 1 (p \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^{4n^4 + 1 - n^2} = 2^{4p+1} = 2 \cdot 16^p = 5k_2 + 2 (k_2 \in \mathbb{N})$

Nên $M(n) = 5k + 3 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^{M(n)} - 8 = 2^{5k+3} - 8 = 8(32^k - 1) : 31 (1)$

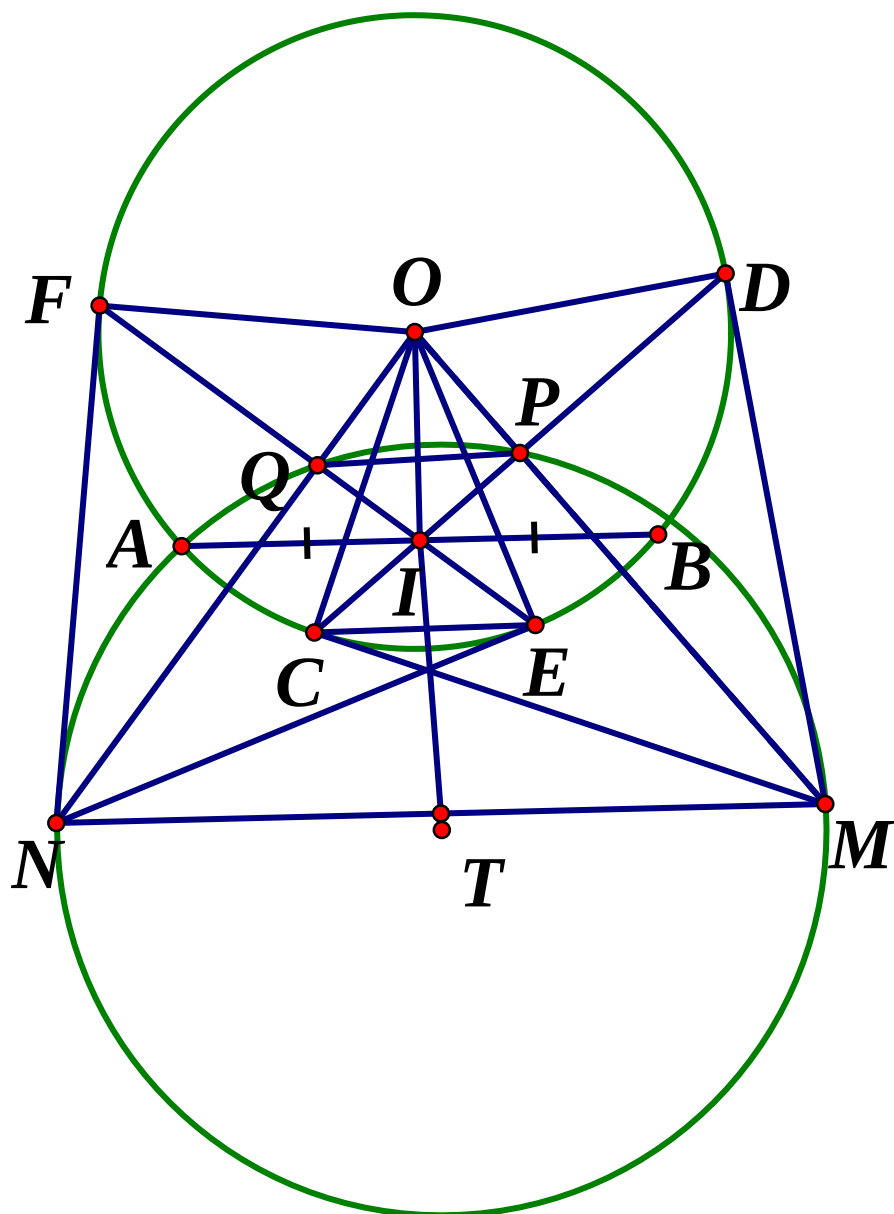
+) Nếu n lẻ $\Rightarrow n^2 = 4t + 1 (t \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^{n^2} = 2^{4t+1} = 2 \cdot 16^t = 5k_1 + 2 (k_1 \in \mathbb{N})$

Và $4n^4 + 1 - n^2 = 4p (p \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^{4n^4 + 1 - n^2} = 2^{4p} = 16^p = 5k_2 + 1 (k_2 \in \mathbb{N})$

Nên $M(n) = 5k + 3 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^{M(n)} - 8 = 2^{5k+3} - 8 = 8(32^k - 1) : 31 (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $2^{M(n)} - 8$ luôn chia hết cho 31.

Bài 4.



1) Tứ giác PQNM nội tiếp

Ta có : $OC = OD$ (bán kính), $MC = MD$ (MC, MD là 2 tiếp tuyến cắt nhau) suy ra OM là trung trực của $CD \Rightarrow OM \perp DP$

Xét $\triangle ODM$: $ODM = 90^\circ$ (MD là tiếp tuyến của (O) tại D), $OM \perp DP$ (cmt)

$$\Rightarrow OD^2 = OP \cdot OM \text{ (a)}$$

Chứng minh tương tự có: $OF^2 = OQ \cdot ON$ (b). Lại có: $OD = OF$ (bán kính) ©

$$\text{Từ (a) (b) (c)} \Rightarrow OP \cdot OM = OQ \cdot ON \Rightarrow \frac{OP}{OQ} = \frac{ON}{OM}$$

$$\text{Xét } \triangle OPQ \text{ và } \triangle ONM \text{ có } O \text{ chung; } \frac{OP}{OQ} = \frac{ON}{OM} \text{ (cmt)}$$

Vậy tam giác OPQ đồng dạng tam giác ONM (c.g.c) nên $\angle OPQ = \angle ONM$

Nên tứ giác $PQNM$ nội tiếp (đpcm)

2) MN song song với AB

Tứ giác $OPIQ$ có : $\angle OPI = \angle OQI = 90^\circ$ (theo câu a)

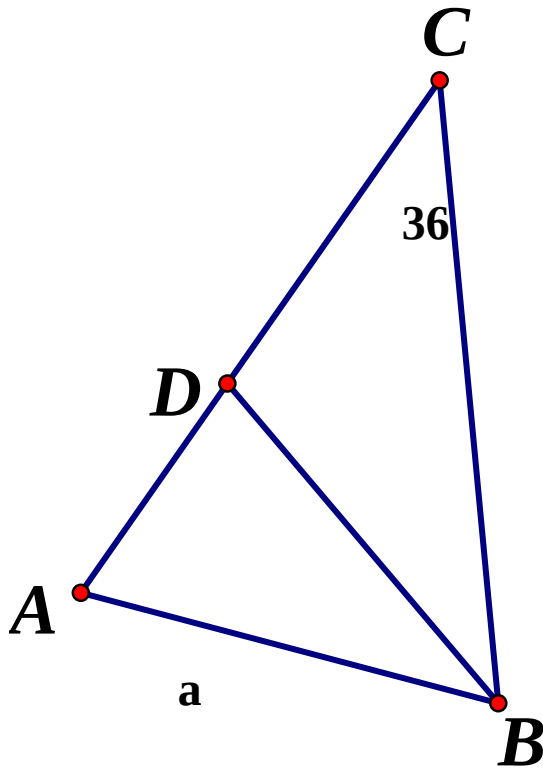
Vậy tứ giác $OPIQ$ nội tiếp $\Rightarrow \angle QOI = \angle QPI$ (góc nội tiếp cùng chắn cung QI)

Lại có $\angle ONM = \angle OPQ$ (cmt) $\Rightarrow \angle QOI + \angle ONM = \angle QPI + \angle OPQ = \angle OPI = 90^\circ$ (do $OM \perp DP$)

$\Rightarrow \triangle ONT$ vuông tại T (T là giao điểm của OI và MN)

$\Rightarrow OI \perp MN$, mặt khác $OI \perp AB$ (vì $IA = IB = \frac{1}{2} AB$ (gt)) vậy $AB \parallel MN$ (đpcm)

Bài 5.



Ta có $\angle CAB = \angle CBA = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$ (Vì tam giác ABC cân tại C)

Kẻ phân giác BD của góc ABC $\Rightarrow \angle CBD = \angle ABD = 36^\circ$

Chứng minh được $\triangle BDC$ cân tại D, $\triangle ABD$ cân tại B

Đặt $AC = BC = x$, $AB = BD = CD = a$ ($x, a > 0$)

Mặt khác BD là phân giác của $\triangle ABC$

Nên $\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{CD+AD}{BC+AB} = \frac{AC}{BC+AB} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{x+a} \Rightarrow x^2 - ax - a^2 = 0$ (*)

Giải phương trình (*) ta được $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ (vì $x > 0$) nên $\frac{AC}{AB} = \frac{(1+\sqrt{5})a}{2} : a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 6.

Áp dụng BĐT $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$

Ta có: $A = \left(a + b^2 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b}\right) \left(b + a^2 + \frac{4}{b^2} + \frac{2}{a}\right) \leq \frac{\left(a + \frac{2}{a} + b + \frac{2}{b} + a^2 + \frac{4}{a^2} + b^2 + \frac{4}{b^2}\right)}{4}$

Đặt $a + \frac{2}{a} = x \Rightarrow a^2 + \frac{4}{a^2} = x^2 - 4$; $b + \frac{2}{b} = y \Rightarrow b^2 + \frac{4}{b^2} = y^2 - 4$

Lại có $1 \leq a \leq 2$; $1 \leq b \leq 2$ suy ra

$(a-1)(a-2) \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 3a-2 \Rightarrow a + \frac{2}{a} = \frac{a^2+2}{a} \leq \frac{3a-2+2}{a} = 3 \Rightarrow 0 < x \leq 3$

$(b-1)(b-2) \leq 0 \Rightarrow b^2 \leq 3b-2 \Rightarrow b + \frac{2}{b} = \frac{b^2+2}{b} \leq \frac{3b-2+2}{b} = 3 \Rightarrow 0 < y \leq 3$

$$\text{Nên } A \leq \frac{(x+y+x^2+y^2-8)^2}{4} \leq \frac{(3+3+9+9-8)^2}{4} = 64$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} a+b^2+\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b}=b+a^2+\frac{4}{b^2}+\frac{2}{a} \\ (a-1)(a-2)=0 \\ (b-1)(b-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \\ a=b=2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \text{Max } A = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \\ a=b=2 \end{cases}$$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ CẦN THƠ
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2012-2013**

Khóa ngày: 11/04/2013

MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \frac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \frac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên

2. Tính giá trị $(a^3 + 15a - 25)^{2013}$ với $a = \sqrt[3]{13 - 7\sqrt{6}} + \sqrt[3]{13 + 7\sqrt{6}}$

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x} - 2(\sqrt{15-2x-x^2} + 1) = 0$

2. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^2 + mx - 1 = 0 \\ mx^2 - x + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (5,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

2. Cho hai số x, y thỏa mãn $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + y^2 - xy$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho đường tròn (O;R) và hai điểm A, B nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Tìm điểm M trên đường tròn để $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi P là một điểm di động trên cung BC không chứa A.

1. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc hạ từ A xuống PB, PC. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định

2. Gọi I, D, E là chân các đường cao lần lượt hạ từ A, B, C xuống các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng chu vi tam giác IDE không đổi khi A, B, C thay đổi trên đường tròn (O;R) sao cho diện tích tam giác ABC luôn bằng a^2

ĐÁP ÁN HỌC SINH GIỎI 9 CẦN THƠ 2012-2013

Câu 1.

1. a) Điều kiện : $m \geq 0; m \neq 1$

$$P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1}$$

$$b) P = 1 + \frac{2}{\sqrt{m} - 1}$$

$$\text{Đề } P \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{4; 9\}$$

2. $a = \sqrt[3]{13 - 7\sqrt{6}} + \sqrt[3]{13 + 7\sqrt{6}} \Rightarrow a^3 = 26 - 15a$
 $\Rightarrow a^3 + 15a - 25 = 1 \Rightarrow (a^3 + 15a - 25)^{2013} = 1$

Câu 2.

1. Điều kiện : $-5 \leq x \leq 3$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}, t^2 = 8 + 2\sqrt{15-2x-x^2} \Rightarrow t \geq 2\sqrt{2}$$

$$\text{Phương trình đã cho có dạng : } t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+5} + \sqrt{3-x} = 3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 59 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2+3\sqrt{7}}{2} \\ x = \frac{-2-3\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

2. Đặt $x^2 = y \geq 0$. Hệ trở thành $\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ -x + my = -2 \end{cases}$

$$\text{Hệ luôn có nghiệm } \begin{cases} x = \frac{m+4}{m^2+2} \\ y = \frac{1-2m}{m^2+2} \geq 0 (m \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x^2 = y \Leftrightarrow \left(\frac{m+4}{m^2+2}\right)^2 = \frac{1-2m}{m^2+2} \Leftrightarrow (m+1)(m^2-m+7) = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

Câu 3

1. Không mất tính tổng quát , giả sử : $1 \leq x \leq y \leq z$

$$\Rightarrow 2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x} \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \leq \frac{2}{y}$$

$$\text{Và } y = 2 \text{ suy ra } z = 2.$$

Vậy (1;2;2) và các hoán vị của chúng là nghiệm của phương trình đã cho

2. Hệ $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2-a (a \geq 0) \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$

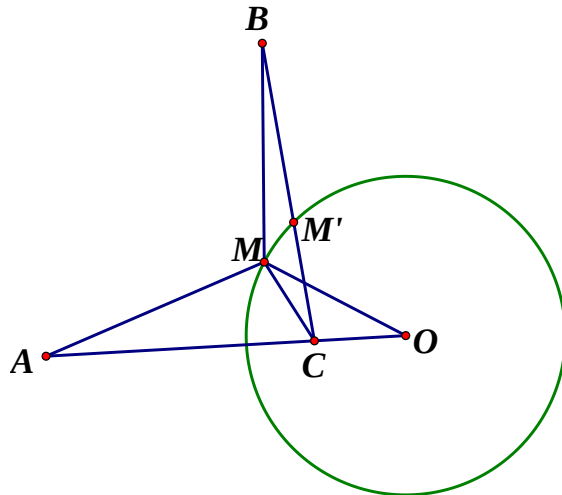
$$\text{Do đó } \begin{cases} x+y=2-a \\ xy=(2-a)^2-3 \end{cases}; \Delta = S^2 - 4P \geq 0 \Rightarrow 0 \leq a \leq 4$$

$$T = x^2 + y^2 + xy - 2xy = 9 - 2(2-a)^2$$

$$\text{Min } T = 1 \text{ khi } x=1; y=1 \text{ hoặc } x=-1, y=-1$$

Max $T = 9$ khi $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$ hoặc $x = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$

Câu 4



Gọi C là điểm trên đoạn thẳng OA sao cho $OC = \frac{R}{2}$, ta có điểm C cố định

Dễ thấy $\triangle OCM$ đồng dạng với $\triangle OMA \Rightarrow MA = 2MC$

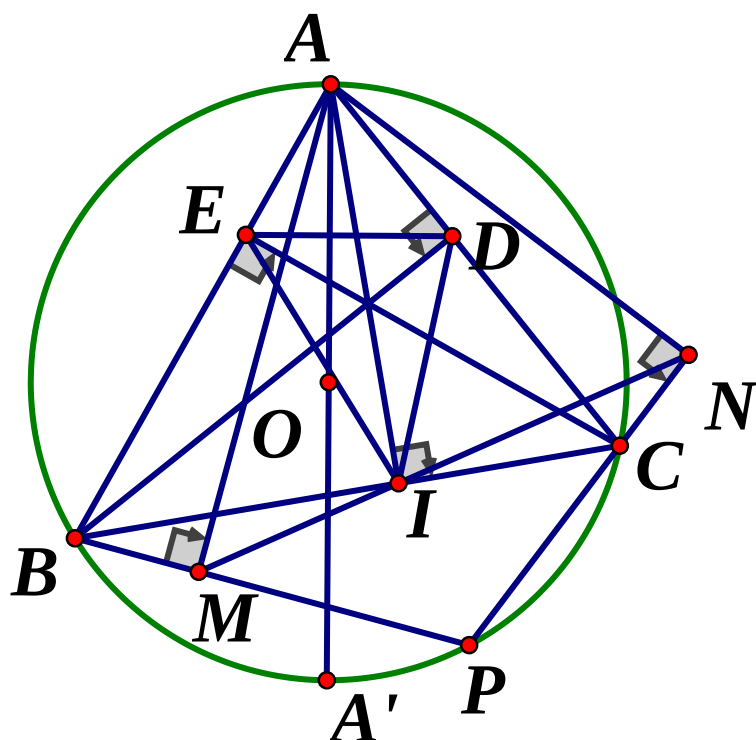
Ta có $MA + MB \geq BC$ (không đổi)

$MA + 2MB = 2(MA + MC) \geq 2BC$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi M nằm giữa B và C

Vậy khi điểm M là giao điểm của đoạn BC và đường tròn (O) thì $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 5.



1. Kẻ $AI \perp BC$, $I \in BC$ cố định. Ta có $\angle BMA = \angle BIA = 90^\circ$ nên tứ giác AMBI nội tiếp hay $\angle AIM = \angle ABM$

Ta lại có tứ giác ABPC nội tiếp nên $\angle ABM = \angle ACP$ do đó $\angle AIM = \angle ACP$ (1)

Mặt khác $\angle AIC = \angle ANC = 90^\circ$ nên tứ giác AINC nội tiếp suy ra $\angle ACP + \angle AIN = 180^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle AIM + \angle AIN = 180^\circ$

Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định I

2. Tứ giác BCDE nội tiếp suy ra $\angle AED = \angle ACB$

Kéo dài AO cắt (O;R) tại điểm A'. Ta có:

$$\angle EAO + \angle AED = \angle BAA' + \angle ACB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AO \perp DE \Rightarrow S_{AEOD} = \frac{1}{2} AO \cdot DE = \frac{1}{2} R \cdot DE$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } S_{BEOI} = \frac{1}{2} R \cdot EI; S_{CDOI} = \frac{1}{2} R \cdot ID$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = S_{AEOD} + S_{BEOI} + S_{CDOI} = \frac{1}{2} R \cdot (DE + EI + ID)$$

$$\Rightarrow DE + EI + ID = \frac{2S_{ABC}}{R} = \frac{2a^2}{R} \text{ (không đổi)}$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC 2015-2016

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x} + 4}{x - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình : $(x+1)(x-2)(x+6)(x-3) = 45x^2$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn : $x(x^2 + x + 1) = 4^y - 1$

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho các số nguyên x, y thỏa mãn $3x + 2y = 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H = x^2 - y^2 + |xy| + |x + y| - 2$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hai điểm A, B phân biệt, lấy điểm C bất kỳ thuộc đoạn AB sao cho $0 < AC < \frac{3}{4} AB$; tia Cx vuông

góc với AB tại C . Trên tia Cx lấy hai điểm D, E phân biệt sao cho $\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3}$. Đường tròn ngoại

tiếp tam giác ADC và đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC cắt nhau tại điểm H (H không trùng với C)

a) Chứng minh rằng $ADC = EBC$ và ba điểm A, H, E thẳng hàng

b) Xác định vị trí của C để $HC \perp AD$

c) Chứng minh rằng khi điểm C thay đổi thì đường thẳng HC luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Chứng minh rằng

$$x + 2y + z \geq (2-x)(2-y)(2-z)$$

Câu 6

Trên mặt phẳng cho 5 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm trong năm điểm đã cho và hai điểm còn lại có đúng một điểm nằm bên trong đường tròn.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI 9 VINH PHÚC NĂM 2015-2016

Câu 1

a) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 4 \neq 0 \\ 1 - \frac{2\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$

Ta có: $A = \frac{2(\sqrt{x} + 3)}{x - 4} : \frac{-(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} + 2} \Leftrightarrow A = \frac{2}{2 - \sqrt{x}}$

b) Để $x, A \in \mathbb{Z}$ thì $2 - \sqrt{x}$ là ước của 2. Suy ra $2 - \sqrt{x}$ nhận các giá trị $\pm 1; \pm 2$

$2 - \sqrt{x}$	1	- 1	2	- 2
x	1	9	0	16
A	2	- 2	1	- 1

Câu 2

a) Phương trình tương đương: $(x^2 + 7x + 6).(x^2 - 5x + 6) = 45x^2$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Phương trình đã cho tương đương với $\left(x + \frac{6}{x} - 5\right)\left(x + \frac{6}{x} + 7\right) = 45$

Đặt $t = x + \frac{6}{x} + 1$, ta được $t^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 9$

Với $t = 9$, ta có $x + \frac{6}{x} - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{10}$

Với $t = -9$ ta có $x + \frac{6}{x} + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \pm \sqrt{19}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x = 4 \pm \sqrt{10}; x = -5 \pm \sqrt{19}$

b) $x(x^2 + x + 1) = 4^y - 1 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 1) = 4^y$

Do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x, y \geq 0$

Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ suy ra $(0; 0)$ là nghiệm của phương trình đã cho

Nếu $x > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow x+1$ chẵn, đặt $x = 2k+1, k \geq 0$

Khi đó $(k+1)(2k^2 + 2k + 1) = 4^{y-1}$

Do $2k^2 + 2k + 1$ là số lẻ, suy ra $k = 0$ nên $x = 1; y = 1$

Suy ra $(1; 1)$ là nghiệm của phương trình đã cho

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$ và $(1; 1)$

Câu 3

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ và $3x + 2y = 1$ suy ra x, y trái dấu

$$3x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -x + \frac{1-x}{2} \Rightarrow \frac{1-x}{2} = t \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 1 - 2t; y = 3t - 1$$

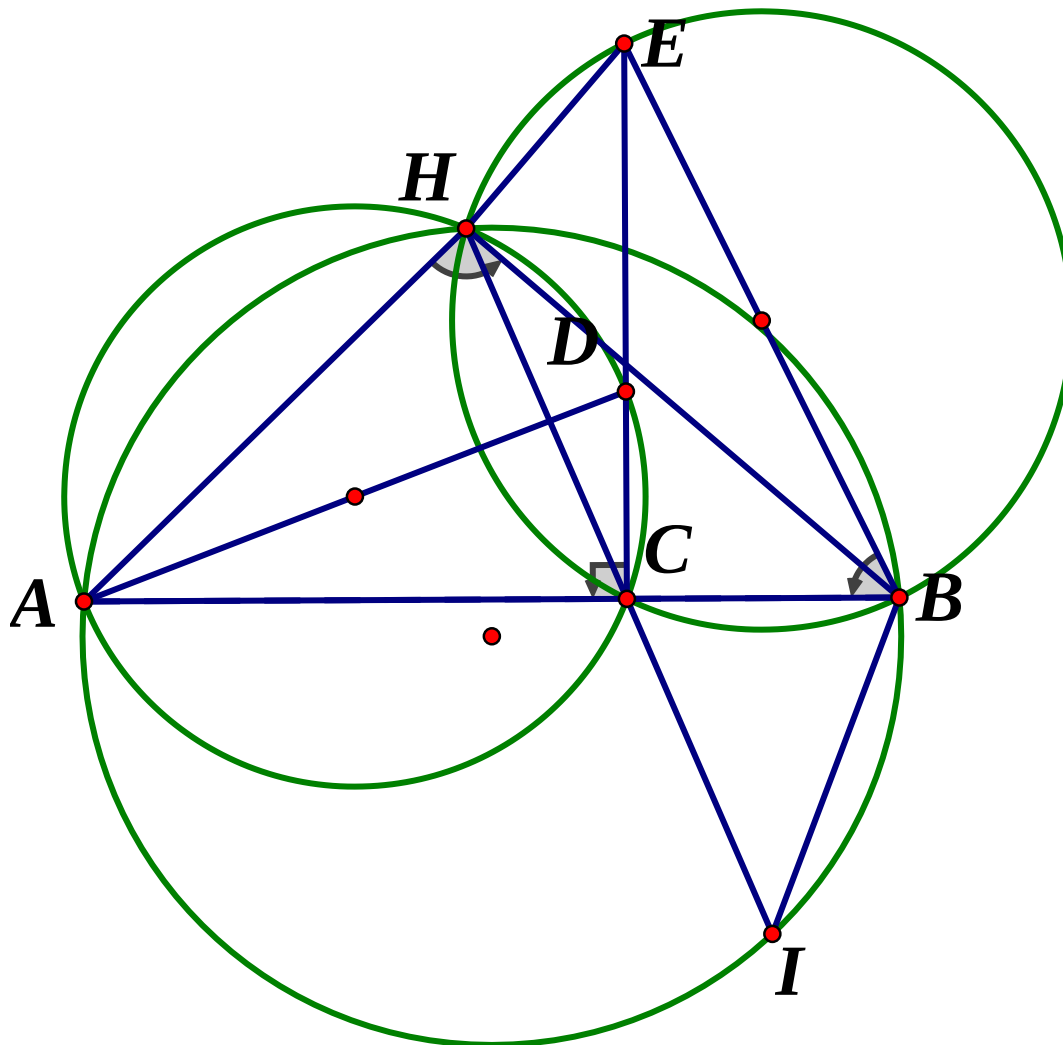
Khi đó $H = t^2 - 3t + |t| - 1$

Nếu $t \geq 0 \Rightarrow H = (t-1)^2 - 2 \geq -2$, dấu “=” xảy ra khi $t = 1$

Nếu $t < 0 \Rightarrow H = t^2 - 4t - 1 > -1 > -2$

Vậy GTNN của H là -2 khi $t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Câu 4



a) Từ giả thiết, có: $CE > CD$; $\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3}$; $\angle DCA = \angle BCE = 90^\circ$

Suy ra hai tam giác $\triangle ADC$, $\triangle EBC$ đồng dạng, suy ra $\angle ADC = \angle EBC$ (1)

Do tứ giác $AHDC$ nội tiếp, suy ra $\angle AHC = \angle ADC$ (2)

Do tứ giác $BCHE$ nội tiếp, suy ra $\angle EBC + \angle CHE = 180^\circ$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra $\angle AHC + \angle CHE = 180^\circ$ suy ra ba điểm A, H, E thẳng hàng

b) Ta có: $\tan \angle ADC = \frac{AC}{CD} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle ADC = 60^\circ \Rightarrow \angle EBC = 60^\circ$

Do $AD \perp HC \Rightarrow \angle ACH = \angle ADC = 60^\circ$

Lại có tứ giác $BCHE$ nội tiếp, suy ra $\angle AEB = \angle HCA = 60^\circ$

Suy ra $\triangle ABE$ đều nên C là trung điểm AB

c) Do $\angle AHB = 90^\circ$ nên H thuộc đường tròn đường kính AB cố định

Kéo dài HC cắt đường tròn đường kính AB tại điểm thứ hai I (I khác H)

Suy ra $\angle AHI = 60^\circ$ nên I cố định

Vậy HC luôn đi qua I cố định khi C thay đổi trên đoạn AB

Câu 5

Đặt $x + y = 2a$; $y + z = 2b$; $z + x = 2c \Rightarrow a, b, c \geq 0$; $a + b + c = 2$

Bất đẳng thức trở thành $a + b \geq 4abc$

Ta có: $2 = a + b + c \geq 2\sqrt{(a+b)c}$. Dấu “=” xảy ra khi $a+b=c$

$$\Rightarrow 1 \geq (a+b)c \Rightarrow a+b \geq (a+b)^2 c \geq 4abc$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b=c \\ a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{1}{2} \\ c=1 \end{cases}$$

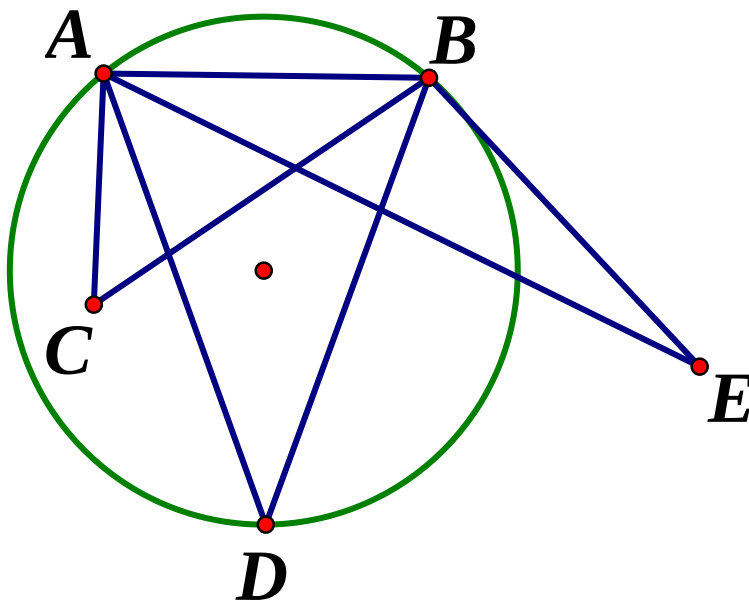
$$\text{Vậy } x+2y+z \geq (2-x)(2-y)(2-z)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=y+z=1 \\ z+x=2 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Câu 6.

Từ 5 điểm có $4+3+2+1=10$ đoạn thẳng tạo thành. Do đó có ít nhất một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Giả sử 5 điểm A, B, C, D, E và hai điểm A, B có độ dài AB nhỏ nhất. Khi đó 3 điểm C, D, E còn lại có hai khả năng sau:

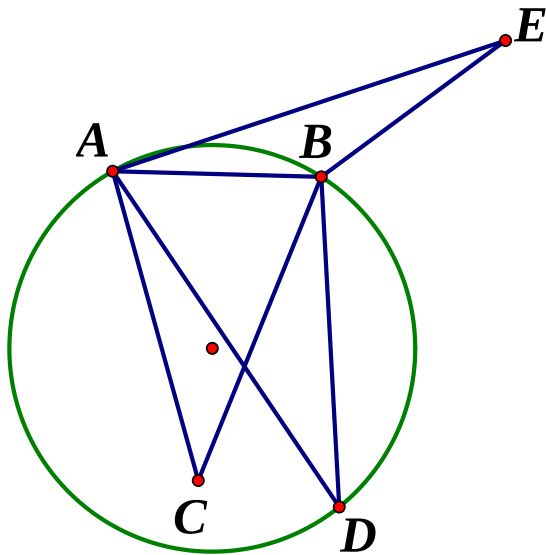
TH1: cả ba điểm này nằm cùng phía trong nửa mặt phẳng bờ AB



Vì không có 4 điểm nào cùng thuộc một đường tròn nên C, D, E nhìn AB với các góc nhọn khác nhau.

Giả sử $\angle ACB > \angle ADB > \angle AEB$ khi đó đường tròn đi qua 3 điểm A, B, D chứa điểm C bên trong và điểm E bên ngoài

TH2: có một điểm khác phía hai điểm khác sở hai nửa mặt phẳng bờ AB. Giả sử E khác phía hai điểm C, D



Vì không có 4 điểm nào cùng thuộc một đường tròn nên C, D nhìn AB với các góc nhọn khác nhau.
Giả sử $\angle ACB > \angle ADB$, khi đó đường tròn đi qua ba điểm A, B, D chứa điểm C bên trong và điểm E bên ngoài

Vậy luôn có một đường tròn thỏa mãn điều kiện

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI
ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH

Năm học : 2011-2012

MÔN: Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho $x = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2012}$

b) Chứng minh biểu thị $P = n^3 \cdot (n^2 - 7)^2 - 36n$ chia hết cho 7 với mọi số nguyên n

Câu 2 (3,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng, hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình $y = x + 1$

Tìm trên đường thẳng Δ các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức $y^2 - 3y\sqrt{x} + 2x = 0$

b) Trong mặt phẳng, hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b để d đi qua điểm $B(1; 2)$ và tiếp xúc với Parabol (P) có phương trình $y = 2x^2$

Câu 3 (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2|y| = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $2012x^2 - (20a - 11)x - 2012 = 0$ (a là số thực)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2$

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Cho các số thực a, b, c sao cho $1 \leq a, b, c \leq 2$. Chứng minh rằng $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 10$

b) Trong hội trại ngày 26 tháng 3, lớp 9A có 7 học sinh tham gia trò chơi ném bóng vào rổ. 7 học sinh này đã ném được tất cả 100 quả bóng vào rổ. Số quả bóng ném được vào rổ của mỗi học sinh đều khác nhau. Chứng minh rằng có 3 học sinh ném được tổng số quả bóng vào rổ không ít hơn 50 quả.

Câu 5. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH và trung tuyến AM (H, M thuộc BC). Đường tròn tâm H bán kính HA, cắt đường thẳng AB và đường thẳng AC lần lượt tại D và E (D và E khác điểm A)

- Chứng minh D, H, E thẳng hàng và MA vuông góc với DE
- Chứng minh 4 điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn. Gọi O là tâm của đường tròn đi qua 4 điểm B, E, C, D . Tứ giác AMOH là hình gì ?
- Đặt $\angle ACB = \alpha$; $\angle AMB = \beta$. Chứng minh rằng $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin \beta$

ĐÁP ÁN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 GIA LAI NĂM 2011-2012

Câu 1

a) Rút gọn $x = \sqrt{2}$

Thay $x = \sqrt{2}$ vào biểu thức A ta được $A = 1$

b)

$$\begin{aligned} P &= n \left[(n^3 - 7n)^2 - 36 \right] = n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6) \\ &= n \left[n^3 + n^2 - (n^2 + n) - 6(n+1) \right] \left[n^3 - n - 6(n-1) \right] \\ &= (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

Ta có P là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 7

Câu 2

a) Điều kiện $x > 0$. Tọa độ M (x;y) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y^2 - 3y\sqrt{x} + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ Vậy } M(1;2)$$

b) Vì đường thẳng d đi qua B (1;2) nên $b = 2 - a$. Khi đó phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + 2 - a$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $2x^2 - ax + a - 2 = 0(1)$

(d) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a = 4 \text{ Với } a = 4 \text{ suy ra } b = -2.$$

Vậy $a = 4$; $b = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 3

a) Ta xét hai trường hợp

TH1: $y \geq 0$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

TH2: $y < 0$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(-3; 4); \left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}\right)$

b) Ta có $ac < 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm trái dấu

$$\text{Ta có: } x_1 + x_2 = \frac{20a - 11}{2012}; x_1 x_2 = -1$$

$$\text{Do đó } P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2 \left[\frac{x_1 - x_2}{2} + (x_1 - x_2) \right]^2 \quad (\text{do } x_1 \cdot x_2 = -1)$$

$$= \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{9}{2}(x_1 - x_2)^2 = 6(x_1 - x_2)^2 = 6[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]$$

$$= 6 \left(\frac{20a - 11}{2012} \right)^2 + 24 \quad (\text{do } x_1 + x_2 = \frac{20a - 11}{2012}; x_1 x_2 = -1) \geq 24 \text{ với mọi } a$$

Vậy GTNN của $P = 24$. Dấu “=” xảy ra khi $a = \frac{11}{20}$

Câu 4

a) $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 10 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \leq 7$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó ta có $(a - b)(b - c) \geq 0$

Suy ra $ab + bc \geq b^2 + ca$

Từ đó suy ra $\frac{a}{c} + 1 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c}$; $\frac{c}{a} + 1 \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$

Suy ra $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \leq 2 + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$

Ta cần chứng minh $2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \leq 5$

Tức là chứng minh $\left(\frac{2a}{c} - 1\right)\left(1 - \frac{2c}{a}\right) \leq 0(*)$

Bất đẳng thức (*) luôn đúng vì $2 \geq a \geq c \geq 1 \Rightarrow \frac{a}{c} \geq 1; \frac{c}{a} \geq \frac{1}{2}$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh

- b) Gọi số quả bóng ném được vào rổ của mỗi học sinh là $a_1; a_2; a_3; \dots; a_7$ được xếp từ nhỏ đến lớn $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$ (1)

Xét hai trường hợp:

TH1: $a_5 \geq 16$. Suy ra $a_6 \geq 17; a_7 \geq 18$. Do đó ta có $a_5 + a_6 + a_7 \geq 51$ (2)

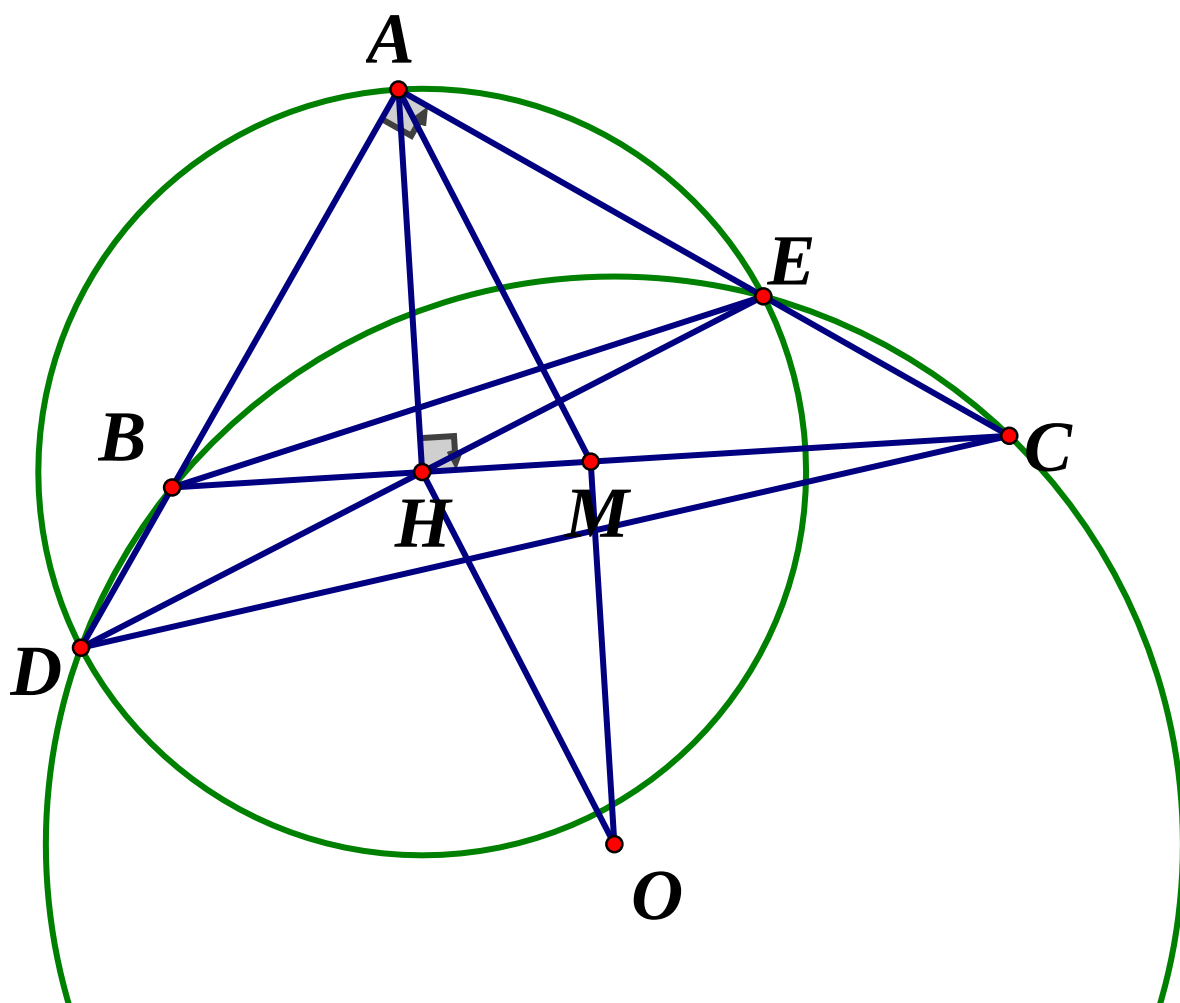
TH2: $a_5 \leq 15$ suy ra $a_4 \leq 14; a_3 \leq 13; a_2 \leq 12; a_1 \leq 11$

Ta có $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 50$

Suy ra $a_5 + a_6 + a_7 \geq 50$ (3)

Từ (2) và (3) ta có điều phải chứng minh

Câu 5



- a) Do $\angle DAE = 90^\circ$ nên DE là đường kính của đường tròn tâm H, bán kính HA suy ra D, H, E thẳng hàng

Ta có : $\angle MAE = \angle MCA = \angle HAD = \angle ADE$

Vì $\angle ADE + \angle AED = 90^\circ$ nên $\angle MAE + \angle AED = 90^\circ$

Suy ra MA vuông góc với DE

- b) Từ $\angle ADE = \angle MCA$ suy ra tứ giác DBEC nội tiếp đường tròn (O)

Do OM vuông góc với BC và AH vuông góc với BC nên $AH \parallel OM$

Do OH vuông góc với DE và AM vuông góc với DE nên $OH \parallel AM$

Vậy tứ giác AMOH là hình bình hành

- c) Do $AB < AC$ nên H thuộc đoạn BM

Ta có : $AH = AM \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} BC \cdot \sin \beta$ (1)

Mặt khác $AH = AC \cdot \sin \alpha = BC \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ (2)

$$\sin \beta = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\text{Mà } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow (\text{dpcm})$$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ YÊN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP
TỈNH**

LỚP 9 NĂM HỌC 2017-2018

MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. Tính giá trị của $P = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}} + \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}}$

Câu 2. Giải phương trình $\frac{(2017-x)^2 + (2017-x)(x-2018) + (x-2018)^2}{(2017-x)^2 - (2017-x)(2018-x) + (x-2018)^2} = \frac{13}{37}$

Câu 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{\frac{a}{a+2b}} > \frac{a}{a+b}$ b) $\sqrt{\frac{a}{a+2b}} + \sqrt{\frac{b}{b+2c}} + \sqrt{\frac{c}{c+2a}} > 1$

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, dựng hai tia Bx, Cy vuông góc với cạnh BC. Trên tia Bx lấy điểm D sao cho BD = BA, trên tia Cy lấy điểm E sao cho CE = CA. Gọi G là giao điểm của BE và CD, K và L lần lượt là giao điểm của AD, AE với cạnh BC

- Chứng minh rằng CA = CK và BA = BL
- Đường thẳng qua G song song với BC cắt AD, AE theo thứ tự tại I, J. Gọi H là hình chiếu vuông góc của G lên BC. Chứng minh rằng tam giác IHJ vuông cân.

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm M chuyển động trên cạnh BC (M khác B, C). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC. Vẽ các đường tròn (H;HM) và (K;KM)

- Chứng minh rằng hai đường tròn (H) và (K) luôn cắt nhau
- Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (H) và (K). Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định

Câu 6. Tìm các số nguyên tố p sao cho $7p+1$ bằng lập phương của một số tự nhiên

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI 9 PHÚ YÊN 2017-2018

Câu 1

$$P = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{6} + \frac{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{6} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 1$$

Câu 2.

Đặt $2017 - x = a$ và $x - 2018 = b$. Ta có phương trình $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} = \frac{13}{37}$

$$\Leftrightarrow 12a^2 + 25ab + 12b^2 = 0 \Leftrightarrow 12a^2 + 16ab + 9ab + 12b^2 = 0 \Leftrightarrow (3a + 4b) \cdot (4a + 3b) = 0$$

$$\text{Xét } 3a + 4b = 0 \Rightarrow 3(2017 - x) + 4(x - 2018) = 0 \Leftrightarrow x = 2021$$

$$\text{Xét } 4a + 3b = 0 \Rightarrow 4(2017 - x) + 3(x - 2018) = 0 \Rightarrow x = 2014$$

Phương trình có tập nghiệm $S = \{2014; 2021\}$

Câu 3.

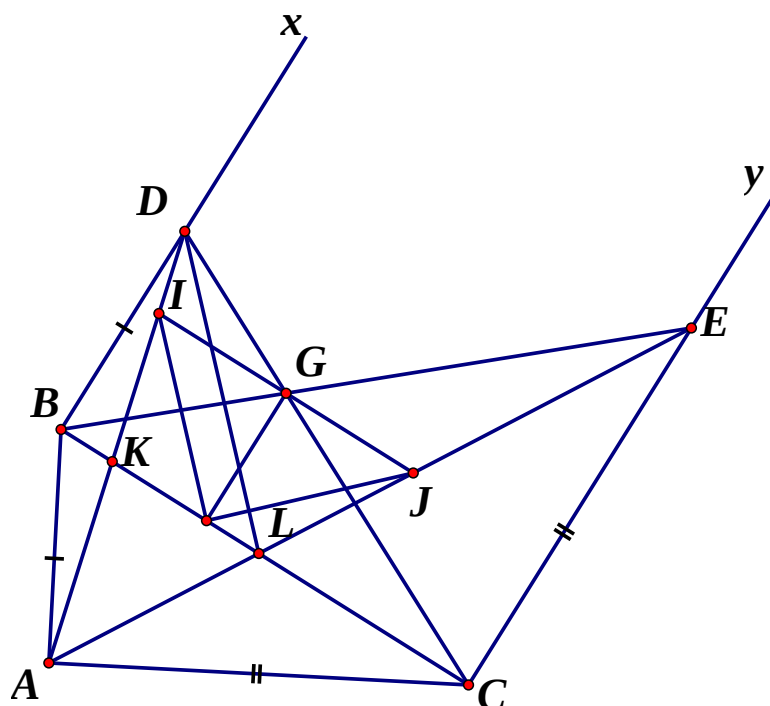
a) Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $\sqrt{\frac{a}{a+2b}} = \frac{a}{\sqrt{a(a+2b)}} \geq \frac{a}{a+b}$.

Dấu “=” xảy ra khi $a = a + 2b \Rightarrow b = 0$ vô lý. Vậy $\sqrt{\frac{a}{a+2b}} > \frac{a}{a+b}$

b) Tương tự câu a ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{a+2b}} + \sqrt{\frac{b}{b+2c}} + \sqrt{\frac{c}{c+2a}} > \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

Câu 4



a) Ta có $BD = BA \Rightarrow \triangle ABD$ cân nên $BAD = BDA$

$$\text{Mà } BAD + KAC = 90^\circ = BDA + BKD = BDA + AKC \Rightarrow KAC = AKC$$

$$\Rightarrow \triangle ACK \text{ cân nên } CA = CL$$

Tương tự $\triangle ABL$ cân nên $BA = BL$

b) Áp dụng định lý Ta let và hệ quả của nó ta có:

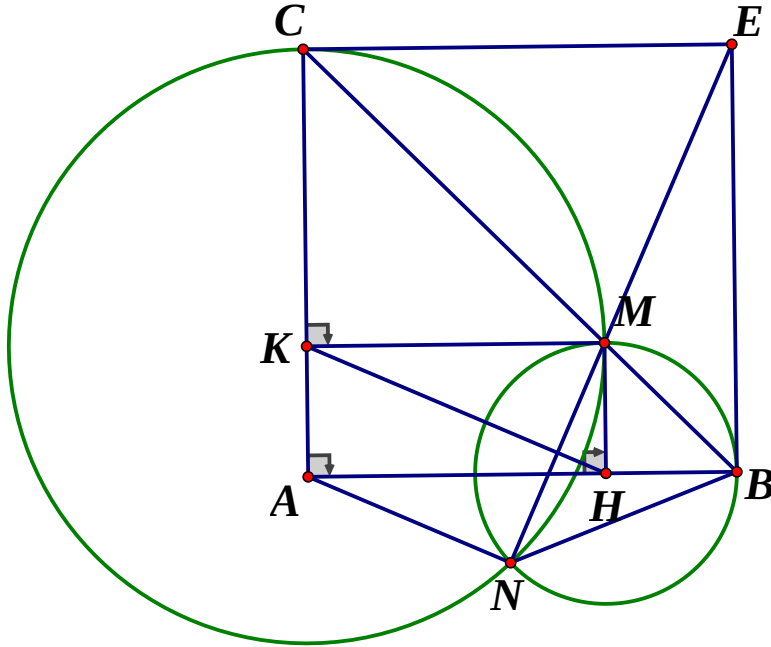
$$\frac{CH}{BH} = \frac{GE}{GB} = \frac{CE}{BD} = \frac{CA}{BA} = \frac{CK}{BL} = \frac{CK - CH}{BL - BH} = \frac{HK}{HL} \quad (\text{Giả sử } AB > AC)$$

Suy ra $\frac{HK}{HL} = \frac{CE}{BD} = \frac{GC}{GD} = \frac{IK}{ID}$ hay $\frac{HK}{HL} = \frac{IK}{ID} \Rightarrow HI // DL$

Ta lại có $BD = BL$ nên tam giác BDL vuông cân $\Rightarrow \angle BLD = 45^\circ \Rightarrow \angle JIH = \angle BHI = \angle BLD = 45^\circ$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\angle IJH = 45^\circ \Rightarrow \triangle IHJ$ vuông cân tại H

Câu 5



a) Ta có $|HM - KM| < HK < HK + KM$ nên 2 đường tròn (H) và (K) luôn cắt nhau

b) Ta có $\angle NHM = \angle NCB$; $\angle NKM = \angle NBC$

Do $AKMH$ là chữ nhật nên $\angle NHM + \angle NKM = 90^\circ \Rightarrow \angle NCB + \angle NBC = 90^\circ \Rightarrow \angle BNC = 90^\circ$

Vẽ hình vuông $ABEC$ ta có A, N, B, E, C cùng thuộc đường tròn đường kính BC cố định

Ta lại có $\angle NEB = \angle NCB$ mà $\angle NCB = \angle NMH$, $\angle NEB = \angle NHM$, do $MH // EB$ nên ba điểm

N, M, E thẳng hàng. Vậy MN luôn đi qua điểm E cố định

Câu 6

Xét $p = 2 \Rightarrow 7p + 1 = 15$ (loại)

Xét $p > 2$ thì p là số nguyên tố lẻ nên $7p + 1$ là số tự nhiên chẵn. Đặt $7p + 1 = (2k)^3$ với k nguyên

dương. Khi đó $7p = (2k)^3 - 1 = (2k - 1)(4k^2 + 2k + 1)$

Vì p và 7 đều là số nguyên tố nên

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2k - 1 = 7 \\ 4k^2 + 2k + 1 = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ p = 73 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2k - 1 = 1 \\ 4k^2 + 2k + 1 = 7p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ p = 1 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2k - 1 = p \\ 4k^2 + 2k + 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k - 1 = p \\ 2k^2 + k - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ p = 1 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy $p = 73$ thỏa mãn bài toán

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO
TỈNH QUẢNG NINH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH NĂM
2018**

Môn thi: TOÁN – Bảng A

Ngày thi: 06/03/2018

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1 (3,0 điểm)

- a) Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt[3]{3\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} - 1}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1}$
- b) Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x^3 + y - x\sqrt[3]{y} = \frac{-1}{27}$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{x}{y}$

Bài 2 (3,0 điểm)

- a) Với mọi số nguyên n , chứng minh rằng : $n(n+2)(73n^2-1):24$
- b) Tìm số tự nhiên n để $2^4 + 2^7 + 2^n$ là số chính phương.

Bài 3 (5,0 điểm)

- a) Giải hệ phương trình : $\sqrt{2-3x} = -3x^2 + 7x - 1$
- b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 3x - y^2 - 2\sqrt{(x-2)(y+1)} = -5 \\ -2x + y^2 + y = 6 \end{cases}$$

Bài 4 (7,0 điểm)

Cho đoạn thẳng AB , điểm C nằm giữa hai điểm A và B . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB , vẽ nửa đường tròn đường kính AB và nửa đường tròn đường kính BC . Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính BC ($M \neq B; M \neq C$). Kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$), đường thẳng MH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K . Hai đường thẳng AK và CM giao nhau tại E .

- a) Chứng minh rằng $HKB = CEB$ và $BE^2 = BC \cdot AB$
- b) Từ C kẻ $CN \perp AB$ (N thuộc nửa đường tròn đường kính AB), đường thẳng NK cắt CE tại P . Chứng minh rằng $NP = PE$
- c) Chứng minh rằng khi NE là tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính AB thì $NE = 2 \cdot NC$

Bài 5 (2,0 điểm)

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a + b + 2ab = 12$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{a^2 + ab}{a + 2b} + \frac{b^2 + ab}{2a + b}$

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI LỚP 9 QUẢNG NINH 2017-2018

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức

$$\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} + \sqrt[3]{(\sqrt[3]{4}+1)^3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1} = 1$$

b) Ta có $x^3 + y - x\sqrt[3]{y} = \frac{-1}{27} \Leftrightarrow 27x^3 + 27y + 1 - 27x\sqrt[3]{y} = 0$

$$\Leftrightarrow (3x)^3 + (3\sqrt[3]{y})^3 + 1 - 3 \cdot 3x \cdot \sqrt[3]{y} = 0 \Leftrightarrow (3x + \sqrt[3]{y} + 1) \cdot \left[(3x - \sqrt[3]{y})^2 + (3\sqrt[3]{y} - 1)^2 + (1 - 3x)^2 \right] = 0$$

$$\text{Do } x, y > 0 \text{ nên suy ra } 3x = 3\sqrt[3]{y} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 9.$$

Vậy giá trị của biểu thức $\frac{x}{y}$ là 9

Câu 2.

a) Ta có $n(n+2)(73n^2-1) = 72n^2 \cdot n(n+2) + (n-1)n(n+1)(n+2) : 24$

b) Ta thử $n = 1, 2, 3$ đều không thỏa mãn. Với $n > 4$ thì ta có

$2^4 + 2^7 + 2^n = k^2 \Leftrightarrow 2^4(9 + 2^{n-4}) = k^2 \Rightarrow k : 4$. Đặt $k = 4h$ với h là số tự nhiên. Ta có:

$$9 + 2^{n-4} = h^2 \Rightarrow 2^{n-4} = h^2 - 9 = (h-3)(h+3) \Rightarrow \begin{cases} h-3 = 2^x \\ h+3 = 2^y \\ x+y = n-4 \end{cases} \Leftrightarrow 6 = 2.3 = 2^y - 2^x = 2^x \cdot (2^{y-x} - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^{y-x} - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow n = 8. \text{ Vậy } n = 8 \text{ là giá trị phù hợp}$$

Câu 3.

a) ĐKXD: $x \leq \frac{2}{3}$

Phương trình

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 + \sqrt{2-3x} - 1 = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x-2) + \frac{1-3x}{\sqrt{2-3x}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-3x) \left(\frac{1}{\sqrt{2-3x}+1} + 2-x \right) = 0. \text{ Do } x \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2-x \geq \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2-3x}+1} + 2-x > 0$$

Suy ra $1-3x=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (TMDK). Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{3}$

b) ĐKXD: $(x-2)(y+1) \geq 0$. Cộng theo hai vế phương trình của hệ ta được:

$$x-2-2\sqrt{(x-2)(y+1)}+y+1=0(*)$$

$$\text{Xét } \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -1 \end{cases} \text{ . phương trình } (*) \Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - \sqrt{y+1})^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x = y+3$$

Thay vào $-2x + y^2 + y = 6$ được $y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y-4)(y+3) = 0 \Rightarrow y = 4$ (Vì $y \geq -1$)

Nên $x = 7$.

$$\text{Xét } \begin{cases} x < 2 \\ y < -1 \end{cases} \text{ . Khi đó } x-2-2\sqrt{(x-2)(y+1)}+y+1 < 0 \text{ phương trình vô nghiệm}$$

$$A = (a+b) \cdot \left(\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{2a+b} \right) = (a+b) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2+2ab} + \frac{b^2}{2ab+b^2} \right) \geq 4 \cdot \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2 + 2ab}$$

$$\geq 4 \cdot \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2 + \frac{(a+b)^2}{2}} = \frac{8}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{a^2+ab}{a+2b} + \frac{b^2+ab}{2a+b}$ là $\frac{8}{3}$ khi và chỉ khi $a = b = 2$

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ VINH
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ
DỰ THI CẤP TỈNH CÁC MÔN VĂN HÓA LỚP 9
NĂM HỌC: 2016-2017**

Môn: Toán – Lớp 9

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể giao đề)

Ngày thi: 26 tháng 11 năm 2016

Bài 1. (4,0 điểm)

- 1) Cho $a+b+c=0$ và a, b, c đều khác 0. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{ab}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca}{c^2+a^2-b^2}$$

- 2) Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{x^3+x^2+5x+3}-6}{\sqrt{x^3-2x^2-7x+3}} \text{ tại } x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

Bài 2. (4,0 điểm)

- 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x - y - xy = 5 \end{cases}$
- 2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau:

$$(2x+5y+1)(2^{|x|} + x^2 + x + y) = 105$$

Bài 3. (4,0 điểm)

- 1) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n thỏa mãn $(2014^{2014} + 1)$ chia hết cho $n^3 + 2012n$
- 2) Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $2x^2 + x = 3y^2 + y$
Chứng minh $x - y$; $2x + 2y + 1$ và $3x + 3y + 1$ đều là các số chính phương

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và một đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. Trên d lấy một điểm M bất kỳ, qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AOC , tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại E

- a) Chứng minh tam giác BCM đồng dạng với tam giác BEO
- b) Chứng minh CM vuông góc với OE
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của dây AB và diện tích tứ giác $MAOB$

Bài 5. (2,0 điểm)

Giả sử a, b, c là những số thực thỏa mãn $a, b, c \neq 0$ và $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

Chứng minh rằng $\frac{a^6 + b^6 + c^6}{a^3 + b^3 + c^3} = abc$

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI 9 VINH NĂM 2016-2017

Câu 1

1) . Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$

Bình phương hai vế ta được $a^2 + b^2 + 2ab = c^2$ nên $a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$

Tương tự : $b^2 + c^2 - a^2 = -2bc$ và $c^2 + a^2 - b^2 = -2ac$

$$\text{Do đó } A = \frac{ab}{-2ab} + \frac{bc}{-2bc} + \frac{ca}{-2ca} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } A = -\frac{3}{2}$$

2) . Ta có $x(\sqrt[3]{2} - 1) = (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{2} - 1) = 2 - 1 = 1$

$$\text{Suy ra } x\sqrt[3]{2} = x + 1 \Rightarrow 2x^3 = (x + 1)^3 \text{ hay } x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

Do đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + x^2 + 5x + 3 - 6}{\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 2x^2 - 7x + 3} = \frac{\sqrt{4x^2 + 8x + 4} - 6}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \\ &= \frac{\sqrt{4(x+1)^2} - 6}{\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{2|x+1| - 6}{|x-2|} = \frac{2(x+1) - 6}{x-2} = \frac{2x-4}{x-2} = 2 \end{aligned}$$

(vì $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} > 2$)

$$\text{Vậy } P = 2 \text{ tại } x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

Câu 2

1) Ta có :
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x - y - xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 + 3xy = 3 \\ x - y - xy = 5 \end{cases}$$

Đặt $a = x - y$, $b = xy$ (1)

$$\text{Hệ phương trình trên trở thành } \begin{cases} a^2 + 3b = 3 \\ a - b = 5 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình trên ta được } \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -6 \\ b = -11 \end{cases}$$

Với $a = 3$, $b = -2$ thay vào (1) ta được

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Với $a = -6$, $b = -11$ thay vào (1) ta được

$$\begin{cases} x - y = -6 \\ xy = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -6 \\ y^2 - 6y + 11 = 0 \end{cases} . \text{ Hệ phương trình vô nghiệm}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

2) . $(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + x^2 + x + y) = 105$

Vì 105 là số lẻ nên $2x + 5y + 1$ và $2^{|x|} + x^2 + x + y$ phải là các số lẻ

Từ $2x + 5y + 1$ là số lẻ mà $2x + 1$ là số lẻ nên $5y$ là số chẵn suy ra y chẵn

$2^{|x|} + x^2 + x + y$ là số lẻ mà $x^2 + x = x(x + 1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên là số chẵn, y

cũng chẵn nên $2^{|x|}$ là số lẻ. Điều này xảy ra khi $x = 0$

Thay $x = 0$ vào phương trình đã cho ta được:

$$(5y+1)(y+1)=105$$

$$\Leftrightarrow 5y^2+6y-104=0$$

$$\Leftrightarrow 5y^2-20y+26y-104=0$$

$$\Leftrightarrow 5y(y-4)+26(y-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (5y+26)(y-4)=0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-26}{5} \text{ (loại) hoặc } y=4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y)=(0;4)$

Câu 3

- 1) .Giả sử tồn tại số nguyên n thỏa mãn $(2014^{2014}+1)$ chia hết cho $n^3+2012n$

$$\text{Ta có } n^3+2012n=n^3-n+2013n=n(n-1)(n+1)+2013n$$

Vì $n-1$, n , $n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3

$$\text{Suy ra } n(n-1)(n+1):3 \text{ mà } 2013:3 \text{ nên } (n^3+2012n):3(1)$$

$$\text{Mặt khác } 2014^{2014}+1=(2013+1)^{2014}+1 \text{ chia cho 3 dư 2 vì } 2013:3(2)$$

Từ (1) và (2) dẫn đến điều giả sử trên là vô lý, tức là không có số nguyên nào thỏa mãn điều kiện bài toán đã cho

- 2) Từ: $2x^2+x=3y^2+y(1) \Rightarrow 2x^2-2y^2+x-y=y^2 \Rightarrow (x-y)(2x+2y+1)=y^2(2)$

$$\text{Mặt khác từ (1) ta có: } 3x^2-3y^2+x-y=x^2 \Leftrightarrow (x-y)(3x+3y+1)=x^2$$

$$\Rightarrow (x-y)^2(2x+2y+1)(3x+3y+1)=x^2y^2$$

$$\Rightarrow (2x+2y+1)(3x+3y+1) \text{ là số chính phương (3)}$$

$$\text{Gọi } (2x+2y+1; 3x+3y+1)=d$$

$$\Rightarrow (2x+2y+1):d; (3x+3y+1):d$$

$$\Rightarrow (3x+3y+1)-(2x+2y+1)=(x+y):d$$

$$\Rightarrow 2(x+y):d \Rightarrow (2x+2y+1)-2(x+y)=1:d \text{ nên } d=1$$

$$\Rightarrow (2x+2y+1; 3x+3y+1)=1(4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow 2x+2y+1 \text{ và } 3x+3y+1 \text{ đều là số chính phương}$$

Lại có từ (2) suy ra $(x-y)(2x+2y+1)$ là số chính phương nên $x-y$ cũng là số chính phương.

Vậy $2y^2+x=3y^2+y$ thì $x-y; 2x+2y+1$ và $3x+3y+1$ đều là các số chính phương

Câu 4

$$\text{Vậy GTNN của AB} = \frac{2R}{OH} \cdot \sqrt{OH^2 - R^2} \Leftrightarrow M \equiv H$$

*) Vì $MO \perp AB$ nên $S_{AOBM} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = AQ \cdot OM$

Vẽ dây cung A_1B_1 vuông góc với OH tại P , do P và (O) cố định nên A_1B_1 không đổi
 Vì $OP \geq OQ \Rightarrow AB \geq A_1B_1$ (liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây).

Mà $OM \geq OH \Rightarrow S_{AOBM} \geq \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot OH$ (không đổi)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$

Vậy GTNN của $S_{AOBM} = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot OH$ khi và chỉ khi $M \equiv H$

Câu 5

$$* a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a + b)^3 = -c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a + b) = 3abc$$

$$* \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = 0$$

$$* a^6 + b^6 + c^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 + (c^3)^2 - 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)$$

$$* ab + bc + ca = 0 \Rightarrow a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$$

$$\text{Do đó } * a^6 + b^6 + c^6 = (3abc)^2 - 2 \cdot 3a^2b^2c^2 = 3a^2b^2c^2$$

$$\text{Vậy } \frac{a^6 + b^6 + c^6}{a^3 + b^3 + c^3} = \frac{3a^2b^2c^2}{3abc} = abc$$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
 NGHỆ AN
 ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9 CẤP THCS
 NĂM HỌC 2016-2017
 Môn thi : TOÁN – BẢNG A
 Thời gian : 150 phút (không kể giao đề)**

Câu 1. (4 điểm)

a) Tìm hệ số a, b, c của đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$ biết $P(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 tại $x = 2$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0 \\ 2(x^2 + 1) - 3\sqrt{x}(y + 1) - y = 0 \end{cases}$$

Câu 2. (4 điểm)

a) Giải phương trình $x + 2 = 3\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 + x}$

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2a}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}$$

Câu 3. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 135^\circ$, $BC = 5\text{cm}$ và đường cao $AH = 1\text{cm}$. Tìm độ dài các cạnh AB và AC

Câu 4. (5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , D là một điểm trên cung BC không chứa A . Dựng hình bình hành $ADCE$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và ACE . Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của K trên BC và AB , gọi I là giao điểm của EK với AC

a) Chứng minh rằng ba điểm P, I, Q thẳng hàng

b) Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của KH

Câu 5. (4 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên tố khác nhau m, n, p, q thỏa mãn

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{mnpq} = 1$$

- b) Trên một bảng có ghi hai số 1 và 5. Ta ghi các số tiếp theo lên bảng theo quy tắc sau: Nếu có hai số phân biệt trên bảng thì ghi thêm số $z = xy + x + y$. Chứng minh rằng các số trên bảng (trừ số 1) có dạng $3k + 2$ với số k là tự nhiên

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI 9 NGHỆ AN BẢNG A 2016-2017

Câu 1

- a) Do đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$ có bậc hai và có giá trị nhỏ nhất là -1 tại $x=2$ nên viết được dưới dạng $P(x) = (x-2)^2 - 1$.

Từ đó ta có $P(x) = x^2 + bx + c = (x-2)^2 - 1$

Hay ta được $x^2 + bx + c = x^2 - 4x + 3$, Đồng nhất hệ số hai vế ta được $b = -4; c = 3$

- b) Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 0$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x(x+y^2) - y(x+y^2) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y^2 = 0 \end{cases}$$

Với $x+y^2=0$, kết hợp với điều kiện ta xác định $x \geq 0$ ta được $x = y = 0$

Thay vào phương trình còn lại ta thấy không thỏa mãn.

Với $x=y$, thay vào phương trình còn lại ta được:

$$2(x^2 + 1) - 3\sqrt{x}(x+1) - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x\sqrt{x} - x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x} \geq 0$, khi đó ta được phương trình $2t^4 - 3t^3 - t^2 - 3t + 2 = 0$

Nhẩm được $t = 2; t = \frac{1}{2}$ nên ta phân tích được

$$2t^3(t-2) + t^2(t-2) + (t-1)(t-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(2t^3 + t^2 + t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(2t-1)(t^2 + t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \sqrt{2} \\ x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Câu 2.

- a) Quan sát phương trình ta chú ý đến biến đổi $1-x^2 = (1-x)(1+x)$. Để ý đến điều kiện xác

định ta phân tích được $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}$

Như vậy ta viết lại được phương trình $x+2 = 3\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}$

Ta có biểu diễn $x+3 = 2(x+1) + (1-x)$

Đến đây ta đặt ẩn phụ $a = \sqrt{x+1}; b = \sqrt{1-x}$ thì ta viết lại phương trình lại thành

$$2a^2 + b^2 - 1 = 3ab + a$$

$$\text{Hay } b^2 - 3ab + 2a^2 - a - 1 = 0$$

Xem phương trình trên là phương trình ẩn b và a là tham số thì ta có

$$\Delta = 9a^2 - 4(2a^2 - a - 1) = (a+2)^2$$

$$\text{Do đó phương trình có hai nghiệm là } b = \frac{3a - (a+2)}{2} = a-1 \text{ và } b = \frac{3a + (a+2)}{2} = 2a+1$$

$$\text{Với } b = a-1 \text{ ta được } \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} - 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Với } b = 2a+1 \text{ ta được } \sqrt{1-x} = 2\sqrt{1+x} + 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = -\frac{24}{25}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm } S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{24}{25} \right\}$$

- b) Từ giả thiết $ab+bc+ca=1$, ta để ý đến phép biến đổi

$$a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$$

Áp dụng tương tự bất đẳng thức trở thành

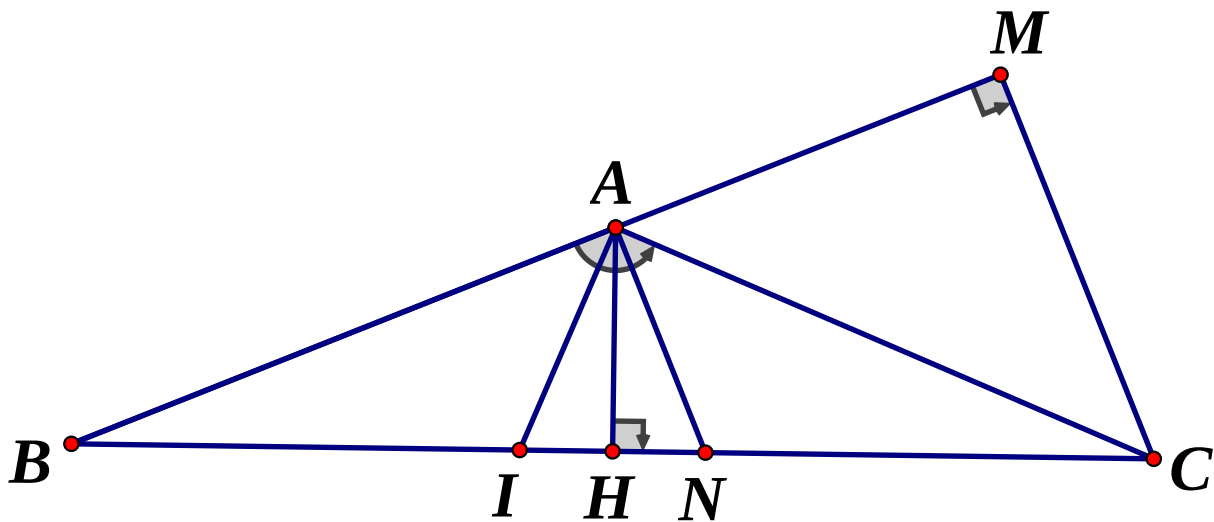
$$P = \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta được

$$\begin{aligned} P &= \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \\ &\leq a \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) + b \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{4(b+c)} \right) + c \left(\frac{1}{4(b+c)} + \frac{1}{a+c} \right) \\ &= \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{4(b+c)} + \frac{a+c}{a+c} = 1 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh . Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a;b;c) = \left(\frac{7}{\sqrt{15}}; \frac{1}{\sqrt{15}}; \frac{1}{\sqrt{15}} \right)$

Câu 3.



Gọi
AB
= y;
AC
= x.
Dựn
g
CM
vuô
ng
góc
với
AB,
khi
đó

ta được

$$AM=CM=\frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{5}{2} . \text{ Lại có } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot AB = \frac{1}{2} y \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Do đó ta được } S_{ABC} = \frac{1}{2} CM \cdot AB = \frac{1}{2} y \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow xy\sqrt{2} = 10$$

Tam giác BCM vuông tại M nên ta lại có $BM^2 + MC^2 = BC^2$. Suy ra

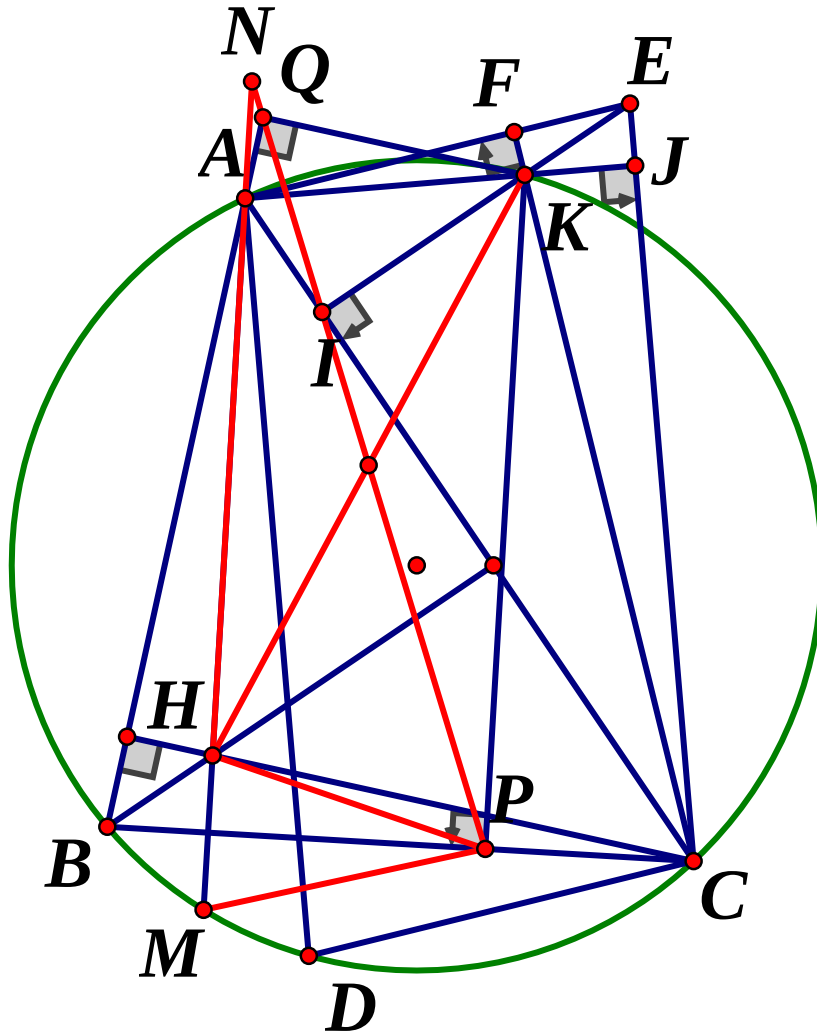
$$\left(y + \frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow y^2 + \frac{x^2}{2} + xy\sqrt{2} + \frac{x^2}{2} = 25$$

Từ đó ta được $x^2 + y^2 = 15$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15 \\ xy\sqrt{2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 15 \\ xy = 5\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{10} \\ y = \sqrt{5} \end{cases}$$

Do vai trò của AB và AC như nhau nên ta có kết quả là $AB = \sqrt{10}; AC = \sqrt{5}$ và $AB = \sqrt{5}; AC = \sqrt{10}$

Câu 4.



- a) Trước hết, ta chứng minh điểm K thuộc đường tròn (O)
 Do K là trực tâm của tam giác ACE nên ta có KJEF nội tiếp
 Từ đó suy ra $\angle AKC + \angle AEC = 180^\circ$
 Mặt khác do tứ giác ADCE là hình bình hành nên lại có $\angle ADC = \angle AEC$
 Từ đó suy ra $\angle AKC + \angle ADC = 180^\circ$, nên tứ giác ADCK nội tiếp hay điểm K nằm trên đường tròn.
 +) Chứng minh ba điểm I, P, Q thẳng hàng
 Do K là trực tâm tam giác ACE nên ta có KI vuông góc với AC.
 Đường thẳng đi qua ba điểm I, P, Q là đường thẳng Simson
 b) Chứng minh PQ đi qua trung điểm của KH
 Gọi N là giao điểm của PQ và AH. Gọi M là giao điểm của AH với đường tròn (O).
 Khi đó dễ thấy tam giác PHK cân. Do $AH \parallel KP$ nên tứ giác KPMN là hình thang
 Lại có BPKQ nội tiếp nên suy ra được $\angle QBK = \angle ABK = \angle AMK = \angle QPK$ nên tứ giác KPMN nội tiếp. Do đó KPMN là hình thang cân. Do đó
 $\angle PMH = \angle PHM = \angle KNM$ nên $KN \parallel HP$
 Do vậy tứ giác HPKN là hình bình hành. Từ đó ta có điều phải chứng minh

Câu 5.

- a) Do m, n, p, q là các số nguyên tố khác nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử
 $n > m > p > q$. Khi đó ta được $q \geq 2; p \geq 3; n \geq 5; m \geq 7$

Dễ thấy $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2.3.5.7} = \frac{3.5.7 + 2.3.7 + 2.5.7 + 2.3.5 + 1}{2.3.5.7} = \frac{248}{210} > 1$

Lại thấy: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{3.5.7.11} = \frac{3.5.7 + 11.3.7 + 11.5.7 + 11.3.5 + 1}{3.5.7.11} = \frac{887}{1155} < 1$

Từ đó suy ra trong các số m, n, p, q có một số là 2. Do q nhỏ nhất nên ta được q=2

Từ đó ta lại được $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{2mnp} = \frac{1}{2}$

Dễ thấy với p=5, n=7, m=11 ta có $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{2.5.7.11} < \frac{1}{2}$. Như vậy trong ba số nguyên tố m, n, p phải có một số bằng 3, do đó suy ra p=3.

Từ đó lại có $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{6mn} = \frac{1}{6}$ hay ta được $mn - 6m - 6n = 1 \Leftrightarrow (m-6)(n-6) = 37$

Đến đây ta được n = 7; m = 43.

Thử lại ta thấy các bội số (m;n;p;q)=(2;3;7;43) thỏa mãn bài toán

b) Từ hai số trên bảng ta thấy có một số chia 3 dư 2. Do đó trong hai số x và y khác nhau thì có x+1 hoặc y+1 chia hết cho 3, suy ra (x+1)(y+1) chia hết cho 3

Khi ta viết thêm số mới là $z = xy + x + y = (x+1)(y+1) - 1$ thì ta được z chia 3 dư 2

Như vậy dãy số viết trên bảng trừ số 1 luôn chia 3 dư 2 hay các số đó có dạng $3k+2$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
BÌNH PHƯỚC
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**NĂM HỌC 2017-2018
MÔN : TOÁN (CHUYÊN)**

(Đề thi gồm 01 trang)

Ngày thi : 03/6/2017

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1 (2.0 điểm) Cho biểu thức : $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{-x + x\sqrt{x} + 6}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$, với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Cho biểu thức $Q = \frac{x + 27}{\sqrt{x} + 3} \cdot \frac{P}{\sqrt{x} - 2}$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$. Chứng minh $Q \geq 6$.

Câu 2 (1.0 điểm) Cho phương trình : $x^2 - 2mx - 1x + m^2 - 3 = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$.

Câu 3 (2.0 điểm)

a) Giải phương trình : $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$.

b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 4\sqrt{x+1} - xy\sqrt{y^2+4} = 0 & 1 \\ \sqrt{x^2 - xy^2 + 1} + 3\sqrt{x-1} = xy^2 & 2 \end{cases}$$

Câu 4 (3.0 điểm)

Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 60^\circ$, $AC = b, AB = c$ $b > c$. Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M (E thuộc cung lớn BC). Gọi I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống các đường thẳng AB và AC. Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống các đường thẳng AB và AC.

a) Chứng minh các tứ giác AIEJ, CMJE nội tiếp và $EA \cdot EM = EC \cdot EI$.

b) Chứng minh I, J, M thẳng hàng và IJ vuông góc với HK.

c) Tính độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c.

Câu 5 (1. điểm) Chứng minh biểu thức $S = n^3 - n + 2^2 + n + 1 - n^3 - 5n + 1 - 2n - 1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên.

Câu 6 (1. điểm)

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$ và $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$. Chứng minh rằng $a^4 + b^6 + c^8 \leq 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^3 + y^3}{x - 1} - \frac{x^2 + y^2}{y - 1}$ với x, y là các số thực lớn hơn 1.

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀO 10 TOÁN CHUYÊN BÌNH PHƯỚC 2017-2018

Câu 1

a) Ta có

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{-x+x\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{\sqrt{x} \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x+x\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{x-\sqrt{x}-x+x\sqrt{x}+6-x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1 \sqrt{x}+2} \\
 &= \frac{-x+x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1 \sqrt{x}+2} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} \\
 &= \sqrt{x}-2.
 \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$, ta có

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{x+27}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{P}{\sqrt{x}-2} = \frac{x+27}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9+36}{\sqrt{x}+3} \\
 &= \sqrt{x}-3 + \frac{36}{\sqrt{x}+3} = -6 + \sqrt{x}+3 + \frac{36}{\sqrt{x}+3} \geq -6+12=6.
 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}+3 = \frac{36}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)^2 = 36 \Leftrightarrow x=9$.

Câu 2 Phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m+4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$ (1).

Theo hệ thức Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1+x_2=2(m-1) \\ x_1.x_2=m^2-3 \end{cases}$$

Mà $x_1^2+4x_1+2x_2-2mx_1=1$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 2x_2 + 4x_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow -x_1.x_2 + 2x_1 + x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 3 + 4m - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \quad 2$$

Từ (1) và (2) suy ra $m = 2 - \sqrt{2}$.

Câu 3

a) Điều kiện $1 \leq x \leq 7$

Ta có $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7} + 1$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{7-x} - \sqrt{x-1} + x-1 - \sqrt{x-1} \sqrt{7-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{7-x} - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} \sqrt{x-1} - \sqrt{7-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7-x} - \sqrt{x-1} \cdot 2 - \sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{7-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 4; x = 5$.

b) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - xy^2 + 1 \geq 0 \end{cases}$, kết hợp với phương trình (1), ta có $y > 0$.

Từ (1), ta có

$$4\sqrt{x+1} - xy\sqrt{y^2+4} = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = xy\sqrt{y^2+4} \\ \Leftrightarrow 16(x+1) = x^2y^2(y^2+4) \Leftrightarrow (y^4+4y^2)x^2 - 16x - 16 = 0.$$

Giải phương trình theo ẩn x ta được $x = \frac{4}{y^2}$ hoặc $x = \frac{-4}{y^2+4} < 0$ (loại).

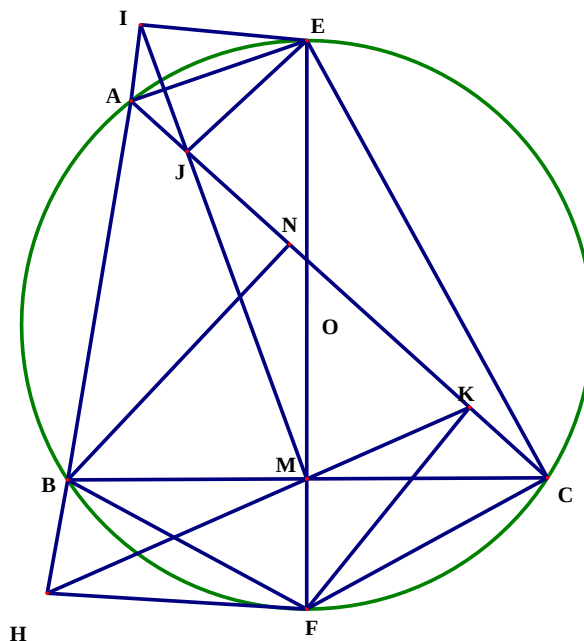
Với $x = \frac{4}{y^2} \Leftrightarrow xy^2 = 4$ thế vào phương trình (2), ta được: $\sqrt{x^2-3} + 3\sqrt{x-1} = 4$

Điều kiện $x \geq \sqrt{3}$, ta có

$$\sqrt{x^2-3} + 3\sqrt{x-1} = 4 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2-3}-1) + 3(\sqrt{x-1}-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} = 0 \\ \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3}{\sqrt{x-1}+1} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow x-2 = 0 \text{ (vì } \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3}{\sqrt{x-1}+1} > 0) \Leftrightarrow x = 2.$$

Với $x = 2$ ta có $\begin{cases} y^2 = 2 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{2}$. Kết hợp với điều kiện trên, hệ phương trình có nghiệm $(2; \sqrt{2})$.

Câu 4



a) Ta có: $\angle AIE = \angle AJE = 90^\circ$ nên tứ giác $AIEJ$ nội tiếp.

$EMC = EJC = 90^\circ$ nên tứ giác $CMJE$ nội tiếp.

Xét tam giác $\triangle AEC$ và $\triangle IEM$, có

$\angle ACE = \angle EMI$ (cùng chắn cung JE của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CMJE$).

$\angle EAC = \angle EIM$ (cùng chắn cung JE của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AIEJ$).

Do đó hai tam giác $\triangle AEC$ đồng dạng $\triangle IEM \Rightarrow \frac{AE}{EI} = \frac{EC}{EM} \Rightarrow EA \cdot EM = EC \cdot EI$ (đpcm).

b) Ta có $\angle IEM = \angle AEC \Rightarrow \angle AEI = \angle CEM$.

Mặt khác $\angle AEI = \angle AJI$ (cùng chắn cung IJ), $\angle CEM = \angle CJM$ (cùng chắn cung CM). Suy ra $\angle CJM = \angle AJI$. Mà I, M nằm hai phía của đường thẳng AC nên $\angle CJM = \angle AJI$ đối đỉnh suy ra I, J, M thẳng hàng.

Tương tự, ta chứng minh được H, M, K thẳng hàng.

Do tứ giác $CFMK$ nội tiếp nên $\angle CFK = \angle CMK$.

Do tứ giác $CMJE$ nội tiếp nên $\angle JME = \angle JCE$.

Mặt khác $\angle ECF = 90^\circ \Rightarrow \angle CFK = \angle JCE$ (vì cùng phụ với $\angle ACF$).

Do đó $\angle CMK = \angle JME \Rightarrow \angle JMK = \angle EMC = 90^\circ$ hay $IJ \perp HK$.

c) Kẻ $BN \perp AC$ ($N \in AC$). Vì $\angle BAC = 60^\circ$ nên $\angle ABN = 30^\circ$

$$\Rightarrow AN = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2} \Rightarrow BN^2 = AB^2 - AN^2 = \frac{3c^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = BN^2 + CN^2 = \frac{3c^2}{4} + \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + c^2 - bc \Rightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

ABC . Xét tam giác đều BCE có $R = OE = \frac{2}{3}EM = \frac{2BC\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3(b^2 + c^2 - bc)}$.

Câu 5

Ta có

$$S = n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 5n - 6$$

$$= n \left[n^3 - 1 \quad n^2 + 6 \quad + 5n \quad n^2 - 1 \right]$$

$$= n \quad n^2 - 1 \quad n^2 + 5n + 6$$

$$= n \quad n - 1 \quad n + 1 \quad n + 2 \quad n + 3$$

$$= n - 1 \quad n \quad n + 1 \quad n + 2 \quad n + 3$$

Ta có S là tích của 5 số nguyên tự nhiên liên tiếp chia hết cho $5!$ nên chia hết cho 120.

Câu 6

a) Từ giả thiết $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$, ta có $a^4 \leq a^2, b^6 \leq b^2, c^8 \leq c^2$. Từ đó

$$a^4 + b^6 + c^8 \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Lại có $a - 1 \quad b - 1 \quad c - 1 \leq 0$ và $a + 1 \quad b + 1 \quad c + 1 \geq 0$ nên

$$a + 1 \quad b + 1 \quad c + 1 - a - 1 \quad b - 1 \quad c - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \quad ab + bc + ca \leq 2.$$

Hơn nữa $a + b + c = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -ab + bc + ca \leq 2$. Vậy $a^4 + b^6 + c^8 \leq 2$.

$$b) \text{ Ta có } T = \frac{x^3 + y^3 - x^2 + y^2}{x - 1 \quad y - 1} = \frac{x^2 \quad x - 1 + y^2 \quad y - 1}{x - 1 \quad y - 1} = \frac{x^2}{y - 1} + \frac{y^2}{x - 1}$$

Do $x > 1, y > 1$ nên $x - 1 > 0, y - 1 > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\frac{x^2}{y - 1}, \frac{y^2}{x - 1}$, ta có :

$$x - 1 + 1 \geq 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1^2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$$

$$y - 1 + 1 \geq 2\sqrt{y-1} \Leftrightarrow \sqrt{y-1} - 1^2 \geq 0 \Leftrightarrow y - 2\sqrt{y-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y-1}} \geq 2$$

$$\text{Do đó } T = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq \frac{2xy}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{y-1}} \geq 8$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \frac{x^2}{y-1} = \frac{y^2}{x-1} \\ x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 8$ khi $x = y = 2$.

Lưu ý : Học sinh giải theo cách khác đúng khoa học theo yêu cầu bài toán giám khảo cần nhắc cho điểm tối đa của từng phần.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LẠNG SƠN**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014-2015**

Môn thi: TOÁN

Thời gian : 150 phút

Ngày thi: 31/3/2015

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

1. Rút gọn biểu thức A
2. Chứng minh rằng A không nhận giá trị nguyên với $x > 0; x \neq 1$

Câu 2. (4 điểm)

Giải phương trình : $x^2 + 6x + 10 = 2\sqrt{2x+5}$

Câu 3. (4 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(a+1)x + 2a = 0$ (1) (với a là tham số)

1. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm với mọi a
2. Tìm a để phương trình (1) có hai nghiệm là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo là $2\sqrt{3}$

Câu 4. (6 điểm)

Cho góc xOy có số đo bằng 60° . Đường tròn có tâm K tiếp xúc với tia Ox tại M và tiếp xúc với tia Oy tại N. Trên tia Ox lấy điểm P thỏa mãn $OP = 3OM$. Tiếp tuyến của đường tròn (K) qua P cắt tia Oy tại Q khác O. Đường thẳng PK cắt đường thẳng MN tại E. Đường thẳng QK cắt đường thẳng MN tại F.

- 1) Chứng minh rằng hai tam giác MPE và KPQ đồng dạng với nhau
- 2) Chứng minh tứ giác PQEF nội tiếp
- 3) Gọi D là trung điểm PQ. Chứng minh tam giác DEF đều

Câu 5. (2 điểm)

Cho x, y dương thỏa mãn điều kiện : $x + y \geq 6$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 LẠNG SƠN 2014-2015

Câu 1.

Rút gọn được $A = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$

Chứng minh được $0 < A < 1$ nên A không nguyên

Câu 2.

$$PT \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 2x + 5 + 2\sqrt{2x + 5} + 1$$

$$\Leftrightarrow (x + 4)^2 = (\sqrt{2x + 5} + 1)^2$$

Nghiệm phương trình là $x = -2$

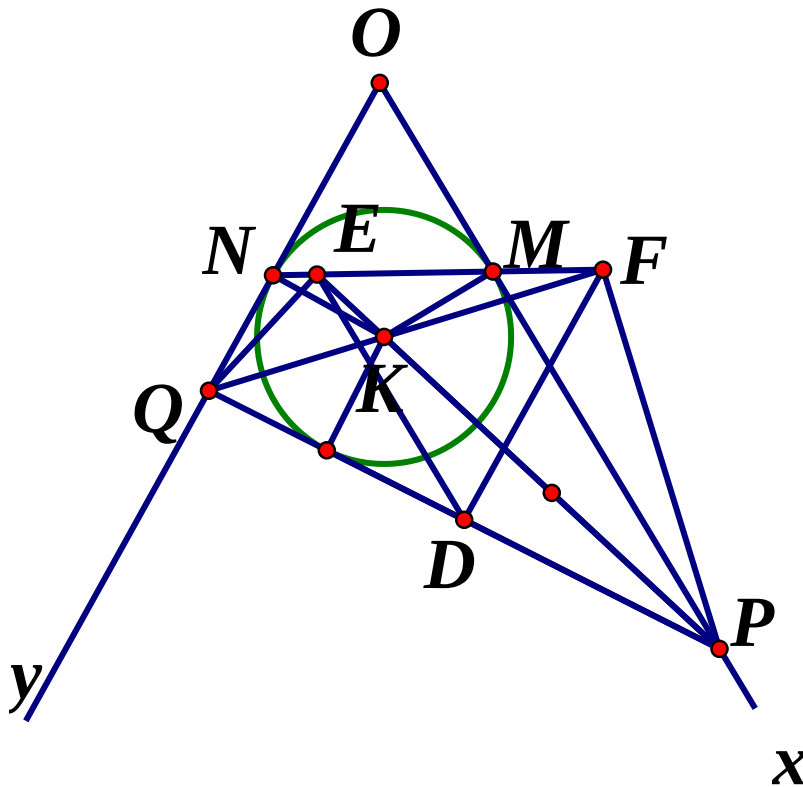
Câu 3.

Có $\Delta' = a^2 + 1 > 0$ với mọi a nên phương trình luôn có nghiệm

Theo giả thiết $x_1^2 + x_2^2 = 12$, theo Vi et $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 2a \end{cases}$

Nên $(2a + 2)^2 - 4a = 12$ hay $a = 1$; $a = -2$

Câu 4.



1. PK là phân giác góc QPO nên $MPE = KPQ$ (*)

Tam giác OMN đều $\Rightarrow EMP = 120^\circ$

QK cũng là phân giác OQP $\Rightarrow QKP = 180^\circ - (KPQ + KQP)$

Mà $2 \cdot KQP + 2 \cdot KPQ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow QKP = 120^\circ$

Do đó $EMP = QKP$ (**)

Từ (*) và (**) ta có tam giác MPE đồng dạng với tam giác KPQ

2. Do hai tam giác MPE và KPQ đồng dạng nên $MEP = KQP$ hay $FEP = FQP$

Suy ra tứ giác PQEF nội tiếp trong đường tròn

3. Do 2 tam giác MPE và KPQ đồng dạng nên $\frac{PM}{PK} = \frac{PE}{PQ}$ suy ra $\frac{PM}{PE} = \frac{PK}{PQ}$

Ngoài ra $MPK = EPQ$, do đó hai tam giác MPK và EPQ đồng dạng

Từ đó $PEQ = PMK = 90^\circ$

Suy ra, D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác PQEF

Vì vậy tam giác DEF cân tại D

Ta có $FPD = 180^\circ - (FDP + EDQ) = POQ = 60^\circ$

Từ đó tam giác DEF là tam giác đều

Câu 5.

Ta có $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$ nên $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với a, b dương

Từ giả thiết

$$2P = 3(x + y) + (3x + \frac{12}{x}) + (y + \frac{16}{y}) \geq 3.6 + 2.6 + 2.4 = 38$$

Nên $2P \geq 38 \Leftrightarrow P \geq 19$. Vậy Min $P = 19$ khi $x = 2; y = 4$

SỞ GD&ĐT NGHỆ AN

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU

NĂM HỌC 2012- 2013

Đề thi chính

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (7,0 điểm).

a) Giải phương trình: $(\sqrt{x+1} + 1)(5 - x) = 2x$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + x - 2y + 3 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2xy + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

Câu 2 (3,0 điểm).

Tìm các số tự nhiên x và y thỏa mãn $2^x + 1 = y^2$.

Câu 3 (2,0 điểm).

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm D khác A và $\angle DAB > 60^\circ$. Trên đường kính AB lấy điểm C (C khác A, B) và kẻ CH vuông góc với AD tại H. Phân giác trong

của góc DAB cắt đường tròn tại E và cắt CH tại F. Đường thẳng DF cắt đường tròn tại điểm thứ hai N.

- a) Chứng minh tứ giác AFCN nội tiếp đường tròn và ba điểm N, C, E thẳng hàng.
b) Cho $AD = BC$, chứng minh DN đi qua trung điểm của AC.

Câu 5 (2,0 điểm).

Một tứ giác lồi có độ dài bốn cạnh đều là số tự nhiên sao cho tổng ba số bất kì trong chúng chia hết cho số còn lại. Chứng minh rằng tứ giác đó có ít nhất hai cạnh bằng nhau.

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ ký của Giám thị 1:..... Chữ ký của Giám thị 2:.....

SỞ GD&ĐT NGHỆ AN

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
NĂM HỌC 2012- 2013

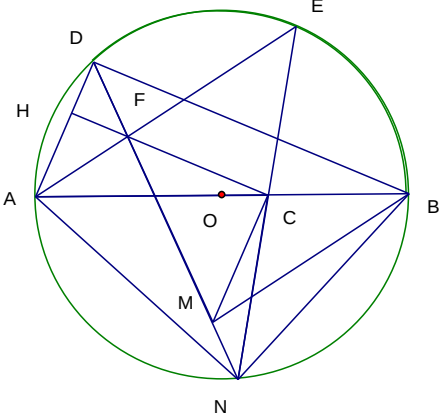
HƯỚNG DẪN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM MÔN TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Hướng dẫn và biểu điểm này gồm có 3 trang)

Câu 1		7,0 điểm
a) 4,0 điểm	ĐK : $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.	0,25
	Với $x = 0$ không là nghiệm của phương trình	0,5
	Với $x \neq 0$, nhân 2 vế với $\sqrt{x+1} - 1 \neq 0$ ta được $x(5-x) = 2x(\sqrt{x+1} - 1)$	0,5
	$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 7-x$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-x \geq 0 \\ 4(x+1) = (7-x)^2 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x^2 - 18x + 45 = 0 \end{cases}$	0,5

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x = 3 \\ x = 15 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn các điều kiện).	0,5
	Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.	0,25
b) 3,0 điểm	$\begin{cases} x^2 - 2xy + x - 2y + 3 = 0 & (1) \\ y^2 - x^2 + 2xy + 2x - 2 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4xy + 2x - 4y + 6 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2xy + 2x - 2 = 0 \end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 4 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x - y + 2)^2 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow y = x + 2$. Thay vào pt (1) ta được	0,5
	$x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$	0,5
	Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{-5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{-5 + \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}\right)$.	0,5
Câu 2		3,0 điểm
	$2^x + 1 = y^2 \Leftrightarrow 2^x = y^2 - 1 \Leftrightarrow 2^x = (y + 1)(y - 1)$.	0,5
	Đặt $y + 1 = 2^m, y - 1 = 2^n$ ($m, n \in \mathbb{N}; m > n$).	0,5
	Khi đó $2^m - 2^n = y + 1 - (y - 1) = 2$	0,5
	$\Leftrightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2$	0,5
	$\Rightarrow \begin{cases} 2^n = 2 \\ 2^{m-n} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 1; m = 2$; thỏa mãn đk $m, n \in \mathbb{N}; m > n$	0,5
	Vậy $x = 3; y = 3$.	0,5
Câu 3		2,0 điểm
	Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$, với $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}, a + b + c = 1$.	0,5
	Ta có: $\sqrt{a + bc} = \sqrt{a(a + b + c) + bc}$ $= \sqrt{a^2 + a(b + c) + bc} \geq \sqrt{a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc} = a + \sqrt{bc}$.	0,75
	Tương tự: $\sqrt{b + ca} \geq b + \sqrt{ca}; \sqrt{c + ab} \geq c + \sqrt{ab}$.	0,25

	Từ đó ta có đpcm. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 3$.	0,5
Câu 4		6,0 điểm
a) 4,0 điểm		
	Ta có : $\angle ACH = \angle ABD$ (so le trong) (1)	0,5
	mà $\angle AND = \angle ABD$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung) (2)	0,5
	từ (1) và (2) suy ra $\angle AND = \angle ACH$ hay $\angle ANF = \angle ACF$	0,5
	suy ra tứ giác AFCN nội tiếp đường tròn	0,5
	$\text{AFCN nội tiếp đường tròn} \Rightarrow \angle CNF = \angle CAF$ hay $\angle CND = \angle BAE$ (3)	0,5
	Mặt khác $\angle BAE = \angle DAE = \angle DNE$ (4)	0,5
	từ (3) và (4) suy ra $\angle CND = \angle END$	0,5
	$\Rightarrow N, C, E$ thẳng hàng	0,5
b) 2,0 điểm	Qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt tia DN tại M	0,25
	Ta có $\angle DAB = \angle ACM$ (so le trong)	0,25
	Mà $\angle DAB = \angle DNB$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)	0,25
	$\Rightarrow \angle ACM = \angle DNB \Rightarrow$ tứ giác BCMN nội tiếp đường tròn	0,25
	$\Rightarrow \angle CBM = \angle END; \angle CMB = \angle ENB$ (vì N, C, E thẳng hàng)	0,25
	mặt khác $\angle END = \angle ENB \Rightarrow \angle CBM = \angle CMB$	0,25
	$\Rightarrow CB = CM$. lại có $CB = AD$ (gt) $\Rightarrow AD = CM$	0,25
	$AD = CM, AD \parallel CM$ suy ra ADCM là hình bình hành $\Rightarrow$ đpcm	0,25
Câu 5		2,0 điểm
	Gọi độ dài các cạnh của tứ giác là a, b, c, d ($a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$). Giả sử không có 2 cạnh nào của tứ giác bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $a > b > c > d$. (*)	0,5

	Do tứ giác lồi nên $a < b + c + d$ $\Rightarrow a < b + c + d < 3a$ $\Rightarrow 2a < a + b + c + d < 4a$	0,5
	Từ giả thiết của bài toán suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho các số a, b, c, d nên ta có : $a + b + c + d = 3a$ (1)	0.25
	Đặt $a + b + c + d = mb$ với $m \in \mathbb{N}^*$ (2) $a + b + c + d = nc$ với $n \in \mathbb{N}^*$ (3)	0,25
	Do $a > b > c \Rightarrow n > m > 3 \Rightarrow n \geq 5, m \geq 4$	0,25
	Cộng (1), (2), (3) được $3(a + b + c + d) = 3a + mb + nc \geq 3a + 4b + 5c$ $\Rightarrow (b - d) + 2(c - d) \leq 0$, mâu thuẫn (*) $\Rightarrow$ Tứ giác có ít nhất 2 cạnh bằng nhau.	0,25

(Thí sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa)

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2015-2016**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn Toán

(Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán)
Thời gian làm bài: **150** phút, không kể thời gian giao đề
Đề thi có 01 trang

Câu 1 (1,5 điểm)

a) Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$.

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{5})}{2\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{5})}{2\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$.

b) Tìm m để phương trình: $(x - 2)(x - 3)(x + 4)(x + 5) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x - 1}(1 - x)$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$$
.

Câu 4 (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F là điểm đối xứng với C qua

AB . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng A). Gọi H là giao điểm của BE và CF .

a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $BHCK$ lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R .

c) Chứng minh AK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y^2 z^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{z^2 x^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{x^2 y^2}{z(x^2 + y^2)}.$$

----- **HẾT** -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

I. Một số chú ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách, khi chấm thi, cán bộ chấm thi cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp lô-gic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với Hướng dẫn mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của Hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án-thang điểm

Câu 1 (1,5 điểm)

a) Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

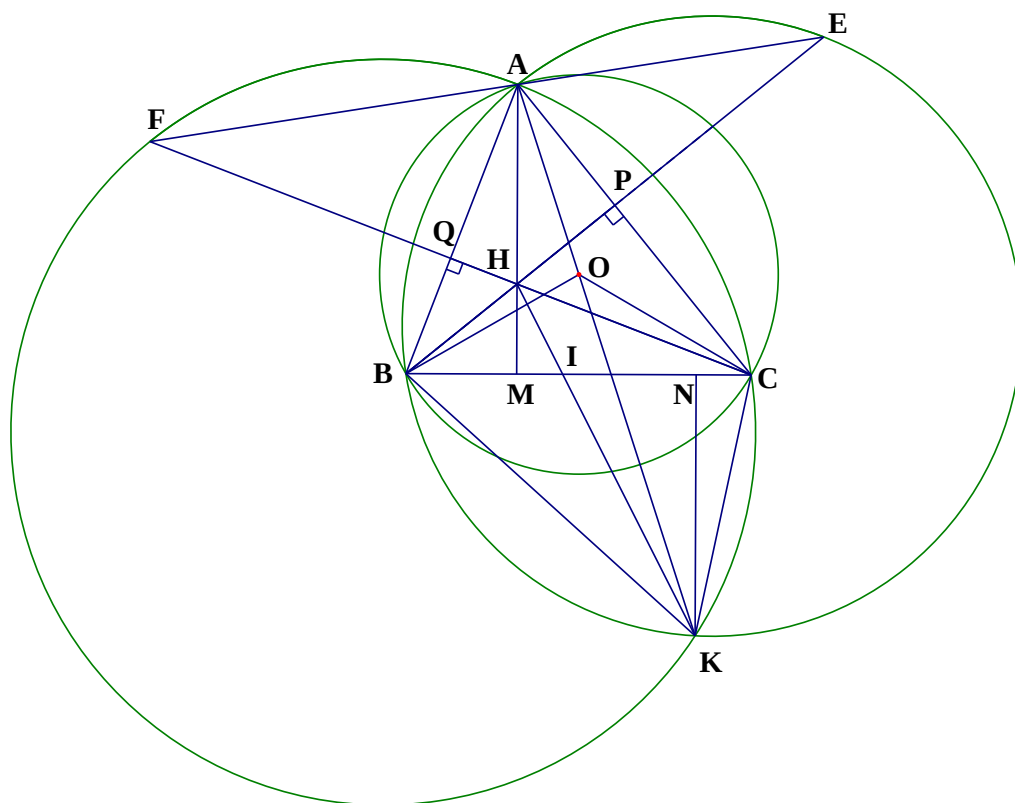
b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$.

Nội dung	Điểm
a) (0,5 điểm) Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0, 1 hoặc 4. + Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2 = 5k + 1 \Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 5 : 5; k \in \mathbb{N}^*$. nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố.	0,25
+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2 = 5k + 4 \Rightarrow n^2 + 16 = 5k + 20 : 5; k \in \mathbb{N}^*$. nên $n^2 + 16$ không là số nguyên tố. Vậy $n^2 : 5$ hay n chia hết cho 5.	0,25
b) (1,0 điểm) $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2(y + 1)x + 2(y^2 - 1) = 0 \quad (1)$ Để phương trình (1) có nghiệm nguyên x thì Δ' theo y phải là số chính phương	0,25
Ta có $\Delta' = y^2 + 2y + 1 - 2y^2 + 2 = -y^2 + 2y + 3 = 4 - (y - 1)^2 \leq 4$. Δ' chính phương nên $\Delta' \in \{0; 1; 4\}$	0,25
+ Nếu $\Delta' = 4 \Rightarrow (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ thay vào phương trình (1) ta có : $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$. + Nếu $\Delta' = 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 3 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$. + Nếu $\Delta' = 0 \Rightarrow (y - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$.	0,25
+ Với $y = 3$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. + Với $y = -1$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên : $(x; y) \in \{(0; 1); (4; 1); (4; 3); (0; -1)\}$.	0,25

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$. b) Tìm m để phương trình: $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.	
Nội dung	Điểm
a) (1,0 điểm) $A = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$	0,25
$= 2 \left[\frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \right] = 2 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \right)$	0,25
$= 2 \left[\frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} \right] = 2 \left(\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5+15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{25-5} \right)$	0,25
$= 2 \cdot \frac{20}{20} = 2. \text{ Vậy } A = 2.$	0,25
b) (1,0 điểm) Phương trình $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = m \Leftrightarrow (x^2+2x-8)(x^2+2x-15) = m$ (1)	0,25
Đặt $x^2+2x+1 = (x+1)^2 = y$ ($y \geq 0$), phương trình (1) trở thành: $(y-9)(y-16) = m \Leftrightarrow y^2 - 25y + 144 - m = 0$ (2)	0,25
Nhận xét: Với mỗi giá trị $y > 0$ thì phương trình: $(x+1)^2 = y$ có 2 nghiệm phân biệt, do đó phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.	
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m + 49 > 0 \\ 25 > 0 \\ 144 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-49}{4} < m < 144.$	0,25
Vậy với $-\frac{49}{4} < m < 144$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.	0,25
Câu 3 (2,0 điểm) a) Giải phương trình: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$. b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$	
Nội dung	Điểm
a) (1,0 điểm) Điều kiện: $x \geq 1$ (*). Ta có: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x) \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$	0,25
Đặt $x + \sqrt{x-1} = y$ (Điều kiện: $y \geq 1$ (**)), phương trình trở thành $y^2 - 2y - 3 = 0$.	0,25
$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$	0,25
+ Với $y = -1$ không thỏa mãn điều kiện (**). + Với $y = 3$ ta có phương trình:	0,25

$x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x-1 = 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x=2 \Leftrightarrow x=2 \\ x=5 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện (*). Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.	
b) (1,0 điểm) $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 & (1) \\ x^2 + 6y^2 = 10 & (2) \end{cases}$	0,25
Từ phương trình (1) ta có $x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 \Leftrightarrow x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + x^2y - 2xy^2 + 3xy^2 - 6y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0$	0,25
$(x-2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$	0,25
+ Trường hợp 1: $x^2 + xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{11y^2}{4} = 0 \Rightarrow x = y = 0$ Với $x = y = 0$ không thỏa mãn phương trình (2). + Trường hợp 2: $x = 2y$ thay vào phương trình (2) ta có: $4y^2 + 8y^2 = 12 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y) \in \{(2; 1); (-2; -1)\}$.	0,25
Câu 4 (3,5 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F là điểm đối xứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng A). Gọi H là giao điểm của BE và CF. a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác $BHCK$ nội tiếp. b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $BHCK$ lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R. c) Chứng minh AK luôn đi qua điểm cố định.	
Nội dung	Điểm



=====

a) (1,5 điểm)

Ta có $AKB = AEB$ (vì cùng chắn cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB)

Mà $\angle ABE = \angle AEB$ (tính chất đối xứng) suy ra $\angle AKB = \angle ABE$ (1)

$AKC = AFC$ (vì cùng chắn cung AC của đường tròn ngoại tiếp tam giác AFC)

$ACF = AFC$ (tính chất đối xứng) suy ra $AKC = ACF$ (2)

Mặt khác $ABE = ACF$ (cùng phụ với BAC) (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $AKB = AKC$ hay KA là phân giác trong của góc BKC .

Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của BE với AC và CF với AB .

Ta có $BC = R\sqrt{3}$ nên $BOC = 120^\circ$; $BAC = \frac{1}{2}BOC = 60^\circ$. Trong tam giác vuông ABP

có $APB = 90^\circ$; $BAC = 60^\circ \Rightarrow ABP = 30^\circ$ hay $ABE = ACF = 30^\circ$.

Tứ giác $APHQ$ có

$$AQH + APH = 180^\circ \Rightarrow PAQ + PHQ = 180^\circ \Rightarrow PHQ = 120^\circ \Rightarrow BHC = 120^\circ \text{ (đối đỉnh).}$$

Ta có $\widehat{AKC} = \widehat{ABE} = 30^\circ$, $\widehat{AKB} = \widehat{ACF} = \widehat{ABE} = 30^\circ$ (theo chứng minh phần a).

Mà $BKC = AKC + AKB = AFC + AEB = ACF + ABE = 60^\circ$ suy ra $BHC + BKC = 180^\circ$ nên tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

b) (1,5 điểm)

Gọi (O') là đường tròn đi qua bốn điểm B, H, C, K . Ta có dây cung $BC = R\sqrt{3}$,

$BKC = 60^{\circ} = BAC$ nên bán kính đường tròn (O') bằng bán kính R của đường tròn (O) .

Gọi M là giao điểm của AH và BC thì MH vuông góc với BC , kẻ KN vuông góc với BC (N thuộc BC), gọi I là giao điểm của HK và BC .

$$\text{Ta có } S_{BHCK} = S_{BHC} + S_{BCK} = \frac{1}{2} BC.HM + \frac{1}{2} BC.KN = \frac{1}{2} BC(HM + KN)$$
$$S_{BHCK} \leq \frac{1}{2} BC(HI + KI) = \frac{1}{2} BC.KH \text{ (do } HM \leq HI; KN \leq KI \text{)}.$$

Ta có KH là dây cung của đường tròn $(O'; R)$ suy ra $KH \leq 2R$ (không đổi) nên S_{BHCK} lớn nhất khi $KH = 2R$ và $HM + KN = HK = 2R$.	0,25
Giá trị lớn nhất $S_{BHCK} = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.2R = R^2\sqrt{3}$.	0,25
Khi HK là đường kính của đường tròn (O') thì M, I, N trùng nhau suy ra I là trung điểm của BC nên $\triangle ABC$ cân tại A . Khi đó A là điểm chính giữa cung lớn BC .	0,25
c) (0,5 điểm) Ta có $\angle BOC = 120^\circ$; $\angle BKC = 60^\circ$ suy ra $\angle BOC + \angle BKC = 180^\circ$ nên tứ giác $BOCK$ nội tiếp đường tròn.	0,25
Ta có $OB=OC=R$ suy ra $OB=OC \Rightarrow \angle BKO = \angle CKO$ hay KO là phân giác góc BKC theo phần (a) KA là phân giác góc BKC nên K, O, A thẳng hàng hay AK đi qua O cố định	0,25
Câu 5 (1,0 điểm) Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{y^2z^2}{x(y^2+z^2)} + \frac{z^2x^2}{y(z^2+x^2)} + \frac{x^2y^2}{z(x^2+y^2)}.$	
Nội dung	Điểm
Ta có $P = \frac{1}{x\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2}\right)} + \frac{1}{y\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}\right)} + \frac{1}{z\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)}$	0,25
Đặt $\frac{1}{x} = a; \frac{1}{y} = b; \frac{1}{z} = c$ thì $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. $P = \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} = \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)}$	0,25
Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có $a^2(1-a^2)^2 = \frac{1}{2}.2a^2(1-a^2)(1-a^2) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$ $\Rightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2(1)$ Tương tự: $\frac{b^2}{b(1-b^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2(2); \quad \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2(3)$	0,25
Từ (1); (2); (3) ta có $P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $x=y=z=\sqrt{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.	0,25

----- HẾT -----

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2016 – 2017

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và chuyên Tin

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1 (2,0 điểm). Cho phương trình $x^4 + 3x^3 - mx^2 + 9x + 9 = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m = -2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm dương.

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Giải phương trình $3x^2 - 4x\sqrt{4x-3} + 4x - 3 = 0$.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình $x^2 = y^2(x + y^4 + 2y^2)$.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$4(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3) \geq 9.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm BC , AM cắt (O) tại điểm D khác A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B .

a) Chứng minh rằng hai tam giác BDF, CDE đồng dạng và ba điểm E, M, F thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $OA \perp EF$.

c) Phân giác của góc BAC cắt EF tại điểm N . Phân giác của các góc CEN và BFN lần lượt cắt CN, BN tại P và Q . Chứng minh rằng PQ song song với BC .

Câu 5 (1,0 điểm). Tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 3n-1; 3n\}$ (n là số nguyên dương) được gọi là tập hợp **cân đối** nếu có thể chia A thành n tập hợp con $A_1, A_2, \dots, A_n$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) Mỗi tập hợp A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) gồm ba số phân biệt và có một số bằng tổng của hai số còn lại.

ii) Các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$ đôi một không có phần tử chung.

a) Chứng minh rằng tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 92; 93\}$ không là tập hợp **cân đối**.

b) Chứng minh rằng tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 830; 831\}$ là tập hợp **cân đối**.

— Hết —

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC

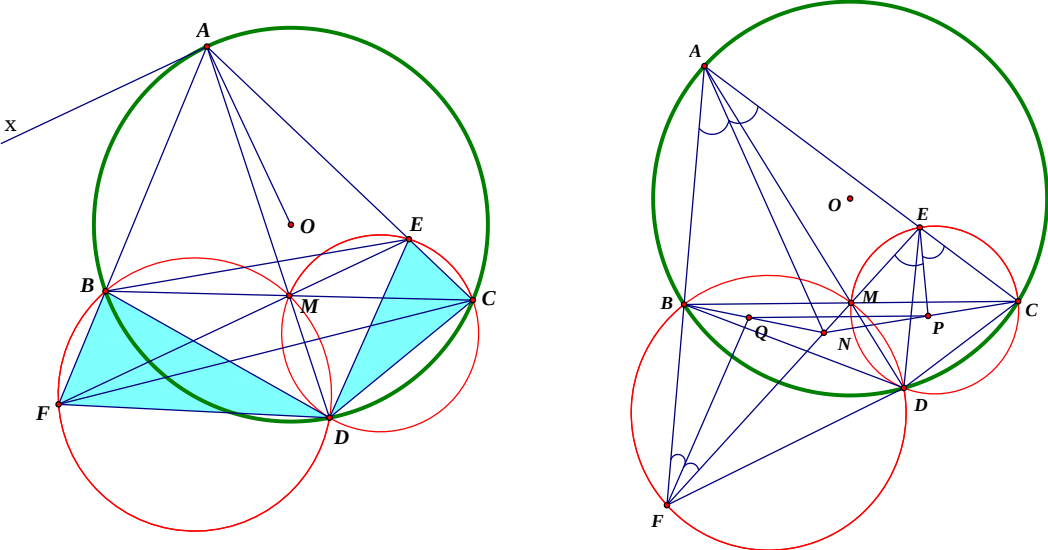
2016-2017

A. LƯU Ý CHUNG

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm, bài học sinh có thể làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

B. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Ý	Nội dung trình bày	Điểm
1			2,0
	a	Với $m = -2$, phương trình đã cho trở thành: $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 9x + 9 = 0$ Ta thấy ngay $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được: $x^2 + \frac{9}{x^2} + 3\left(x + \frac{3}{x}\right) + 2 = 0.$	0,25
		Đặt $t = x + \frac{3}{x}$, ta được phương trình: $t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = -4.$	0,25
		Với $t = 1$ thì $x + \frac{3}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$ (vô nghiệm).	0,25
		Với $t = -4$ thì $x + \frac{3}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = -3.$ Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -1; x = -3.$	0,25
	b	Trong trường hợp tổng quát ta có phương trình: $t^2 + 3t - 6 - m = 0$ (1). Ta có $t = x + \frac{3}{x} \Leftrightarrow x^2 - tx + 3 = 0$ (2). Từ đó suy ra điều kiện để (2) có nghiệm dương là $t \geq 2\sqrt{3}.$	0,25
		Vậy PT đã cho có ít nhất một nghiệm dương khi và chỉ khi (1) có nghiệm $t \geq 2\sqrt{3}.$	0,25
		Xét PT (1) có $\Delta = 4m + 33 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{33}{4}$. Khi đó $t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4m + 33}}{2}$.	0,25
		Do đó (1) có nghiệm $t \geq 2\sqrt{3}$ khi: $\frac{-3 + \sqrt{4m + 33}}{2} \geq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m \geq 6(1 + \sqrt{3}).$ Vậy giá trị cần tìm của m là $m \geq 6(1 + \sqrt{3}).$	0,25
2			3,0
	a	ĐKXĐ: $x \geq \frac{3}{4}.$	0,25
		Phương trình đã cho tương đương: $(x - \sqrt{4x - 3})(3x - \sqrt{4x - 3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x - 3} = x \\ \sqrt{4x - 3} = 3x \end{cases}$	0,5
		$\sqrt{4x - 3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; x = 3.$	0,5
		$\sqrt{4x - 3} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 3 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm).	0,5
		Kết hợp điều kiện suy ra phương trình có nghiệm là $x = 1; x = 3.$	0,25

	b	Ta có $x^2 = y^2(x + y^4 + 2y^2) \Leftrightarrow x^2 - y^2 \cdot x - y^4(y^2 + 2) = 0$ (1)	0,25
		Coi (1) là PT bậc hai ẩn x , ta có $\Delta = y^4(4y^2 + 9) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = y^2\sqrt{4y^2 + 9}$.	
		(1) có nghiệm nguyên nên $4y^2 + 9$ là số chính phương, đặt $4y^2 + 9 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$). Khi đó $(k - 2y)(k + 2y) = 9$.	0,25
		Xét các trường hợp và chú ý $k \in \mathbb{N}$ ta được các bộ $(k, y) \in \{(5; 2); (5; -2); (3; 0)\}$.	0,25
		Với $y = \pm 2$ ta được: $x^2 - 4x - 96 = 0 \Leftrightarrow x = 12; x = -8$. Với $y = 0$ ta được: $x = 0$. Vậy các nghiệm cần tìm là $(x, y) \in \{(0; 0); (12; 2); (12; -2); (-8; 2); (-8; -2)\}$.	0,25
3			1,0
		Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương: $4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 3(a^3+b^3+c^3) \geq 27$	0,25
		$\Leftrightarrow 4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)^3$ $\Leftrightarrow (a^3+b^3+c^3) + 4(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2) \geq (a+b+c)^3 \quad (1)$	0,25
		Ta có đẳng thức $(a+b+c)^3 = (a^3+b^3+c^3) + 3(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2) + 6abc$. Do đó (1) tương đương với $a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b \geq 6abc$.	0,25
		Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b = a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ $\geq 2a^2\sqrt{bc} + 2b^2\sqrt{ca} + 2c^2\sqrt{ab} = 2(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}) \geq 6abc.$	0,25
		Vậy BĐT (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. (Chú ý: Học sinh được sử dụng BĐT AM-GM với 6 số hoặc BĐT Schur's để chứng minh).	
4			3,0
	a	Do các tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $DEC = DMC = DFB$ (1)	0,25
		Tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên $DCE = DCA = DBF$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BDF \sim \triangle CDE$ ($g - g$).	0,25
		Từ $\triangle BDF \sim \triangle CDE \Rightarrow EDC = BDF$. Mà $EMC = EDC$ và $BMF = BDF$.	0,5
		Suy ra $EMC = BMF$. Vậy E, M, F thẳng hàng.	0,25
	b	Từ hai tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $AB \cdot AF = AM \cdot AD = AE \cdot AC$, suy ra tứ giác $BECF$ nội tiếp. Do đó $AFE = ACB$.	0,25
		Vẽ tiếp tuyến Ax của (O) thì $ACB = BAx$. Do đó $BAx = AFE$, suy ra $Ax \parallel EF$.	0,25

		Vậy $OA \perp EF$.	
	c	Ta có $\triangle BDF \sim \triangle CDE$ nên $\frac{S_{BDF}}{S_{CDE}} = \frac{BF^2}{CE^2}$.	0,25
		Ta có $1 = \frac{MB}{MC} = \frac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \frac{S_{DAB}}{S_{BDF}} \cdot \frac{S_{BDF}}{S_{CDE}} \cdot \frac{S_{CDE}}{S_{DAC}} = \frac{AB}{BF} \cdot \frac{BF^2}{CE^2} \cdot \frac{CE}{AC} = \frac{AB \cdot BF}{CE \cdot AC}$.	0,25
		Từ đó $\frac{BF}{CE} = \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE} = \frac{NF}{NE} \Rightarrow \frac{EN}{EC} = \frac{FN}{FB}$ (3).	0,25
		Theo tính chất phân giác ta có $\frac{PN}{PC} = \frac{EN}{EC}$ và $\frac{QN}{QB} = \frac{FN}{FB}$ (4).	0,25
		Từ (3) và (4) suy ra $\frac{PN}{PC} = \frac{QN}{QB}$. Do đó PQ song song với BC .	
5			1,0
	a	Giả sử $A = \{1; 2; 3; \dots; 93\}$ là tập hợp cân đối , khi đó mỗi tập $A_i (i = \overline{1, 31})$ có dạng $\{x_i; y_i; x_i + y_i\}$, như vậy tổng ba phần tử trong A_i là số chẵn. Do đó tổng các phần tử của tập A là số chẵn.	0,25
		Mặt khác tổng các phần tử trong A bằng: $1 + 2 + 3 + \dots + 93 = \frac{93 \cdot 94}{2} = 93 \cdot 47$ (là số lẻ). Mâu thuẫn này chỉ ra A là tập không cân đối .	0,25
	b	Nhận xét: Nếu tập $S_n = \{1; 2; 3; \dots; n\}$, với n chia hết cho 3 là tập hợp cân đối thì tập $S_{4n} = \{1; 2; 3; \dots; 4n\}$ và $S_{4n+3} = \{1; 2; 3; \dots; 4n+3\}$ cũng là tập hợp cân đối. Chứng minh. Từ tập S_{4n} ta chọn ra các tập con ba phần tử sau: $\{1; 2n+n; 2n+n+1\}; \{3; 2n+n-1; 2n+n+2\}; \{5; 2n+n-2; 2n+n+3\}; \dots; \{2n-1; 2n+1; 4n\}.$ Rõ ràng các tập con này đều thỏa mãn có một phần tử bằng tổng hai phần tử còn lại. Còn lại các số sau trong tập S_{4n} là $2, 4, 6, \dots, 2n$. Tuy nhiên vì tập S_n cân đối nên tập $\{2; 4; 6; \dots; 2n\}$ cũng cân đối. Vậy S_{4n} là tập cân đối. Tương tự từ tập S_{4n+3} ta chọn ra các tập con ba phần tử sau: $\{1; 2n+n+2; 2n+n+3\}; \{3; 2n+n+1; 2n+n+4\}; \dots; \{2n+1; 2n+2; 4n+3\}.$ Và còn lại các số là $2, 4, 6, \dots, 2n$, suy ra S_{4n+3} là tập cân đối.	0,25
		Trở lại bài toán. Ta có $\begin{aligned} 831 &= 4 \cdot 207 + 3 \\ 207 &= 4 \cdot 51 + 3 \\ 51 &= 4 \cdot 12 + 3 \\ 12 &= 4 \cdot 3 \end{aligned}$ Chú ý là tập $\{1; 2; 3\}$ là cân đối nên theo nhận xét trên ta xây dựng được các tập hợp cân đối theo quy trình sau: $\{1; 2; 3\} \rightarrow \{1; 2; \dots; 12\} \rightarrow \{1; 2; \dots; 51\} \rightarrow \{1; 2; \dots; 207\} \rightarrow \{1; 2; \dots; 831\}$. Do đó tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 831\}$ là tập hợp cân đối (đpcm).	0,25

-----Hết-----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỶ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
CHUYÊN NGUYỄN TRÃI NĂM HỌC 2015 - 2016
Môn thi: TOÁN (Chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao
đề
(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu I (2,0 điểm)

1) Cho $a - b = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2015$$

2) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$.

Chứng minh rằng $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 0$.

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y-2x+1} - \sqrt{3-3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x+y+5} - \sqrt{x+2y-2} \end{cases}$$

Câu III (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$.

2) Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương.

Câu IV (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

Câu V (1,0 điểm) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$.

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$.

-----Hết-----

Câu I (2,0 điểm)

1) Cho $a - b = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2015$$

$$a - b = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \sqrt{(3 + 2\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5} = 3$$

$$A = a^3 - b^3 + a^2 + b^2 - 11ab + 2015$$

$$= (a - b)(a^2 + b^2 + ab) + a^2 + b^2 - 11ab + 2015$$

$$= 3(a^2 + b^2 + ab) + a^2 + b^2 - 11ab + 2015$$

$$= 4(a^2 - 2ab + b^2) + 2015 = 4(a - b)^2 + 2015 = 2051$$

2) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$.

Chứng minh rằng $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 0$.

$$xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1+x)^2(1+y)^2} = 1 - xy$$

$$\Rightarrow (1+x^2)(1+y^2) = (1-xy)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1 - 2xy + x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2} = 0$$

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 2x + 3 + \sqrt{(x+2)(4x+1)} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}. \text{ĐK: } x \geq -\frac{1}{4}$$

$$\text{Đặt } t^2 = 8x + 4, \sqrt{(x+2)(4x+1)} + 9 \Leftrightarrow 2x + \sqrt{(x+2)(4x+1)} = \frac{t^2 - 9}{4}$$

$$\text{PTTT } t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 3$$

TH1. $t = 1$ giải ra vô nghiệm hoặc kết hợp với ĐK $t \geq \sqrt{7}$ bị loại

TH 2. $t = 3 \Rightarrow 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1} = 3$. Giải pt tìm được $x = -\frac{2}{9}$ (TM)

Vậy pt có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{9}$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y-2x+1} - \sqrt{3-3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x+y+5} - \sqrt{x+2y-2} \end{cases}$$

ĐK: $y - 2x + 1 \geq 0, 4x + y + 5 \geq 0, x + 2y - 2 \geq 0, x \leq 1$

$$\text{TH 1. } \begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ 3 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \sqrt{10} - 1 \end{cases} \text{ (Không TM hệ)}$$

TH 2. $x \neq 1, y \neq 1$ Đưa pt thứ nhất về dạng tích ta được

$$(x+y-2)(2x-y-1) = \frac{x+y-2}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}}$$

$$(x+y-2) \left[\frac{1}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}} + y - 2x + 1 \right] = 0. \text{ Do } y - 2x + 1 \geq 0$$

$$\text{nên } \frac{1}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}} + y - 2x + 1 > 0 \Rightarrow x + y - 2 = 0$$

Thay $y = 2 - x$ vào pt thứ 2 ta được $x^2 + x - 3 = \sqrt{3x+7} - \sqrt{2-x}$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = \sqrt{3x+7} - 1 + 2 - \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = \frac{3x+6}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{2+x}{2+\sqrt{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1 - x \right] = 0$$

$$\text{Do } x \leq 1 \text{ nên } \frac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1 - x > 0$$

$$\text{Vậy } x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=4 \text{ (TMĐK)}$$

Câu III (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$. (1)

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$$

$$\text{Ta thấy } x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \leq x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2+1) < y(y+1) \leq (x^2+4)(x^2+5)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau

$$+ \text{TH1. } y(y+1) = (x^2+1)(x^2+2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Với } x^2 = 9, \text{ ta có } y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 10; y = -11 (t.m)$$

$$+ \text{TH2. } y(y+1) = (x^2+2)(x^2+3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \text{ (loại)}$$

$$+ \text{TH3. } y(y+1) = (x^2+3)(x^2+4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \text{ (loại)}$$

$$+ \text{TH4. } y(y+1) = (x^2+4)(x^2+5) \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Với } x^2 = 0, \text{ ta có } y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5; y = 4$$

Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên $(x; y)$ là :

$(3; 10), (3; -11), (-3; 10), (-3; -11), (0; -5), (0; 4)$.

2) Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương.

$$\text{Đặt } M = k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$$

$$\text{Ta có } M = (k^4 - 2k^2 + 1) - 8k(k^2 - 2k + 1) + 9k^2 - 18k + 9$$

$$= (k^2 - 1)^2 - 8k(k-1)^2 + 9(k-1)^2 = (k-1)^2 \cdot [(k-3)^2 + 1]$$

M là số chính phương khi và chỉ khi $(k-1)^2 = 0$ hoặc $(k-3)^2 + 1$ là số chính phương.

$$\text{TH 1. } (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

$$\text{TH 2. } (k-3)^2 + 1 \text{ là số chính phương, đặt } (k-3)^2 + 1 = m^2 (m \in \mathbb{Z})$$

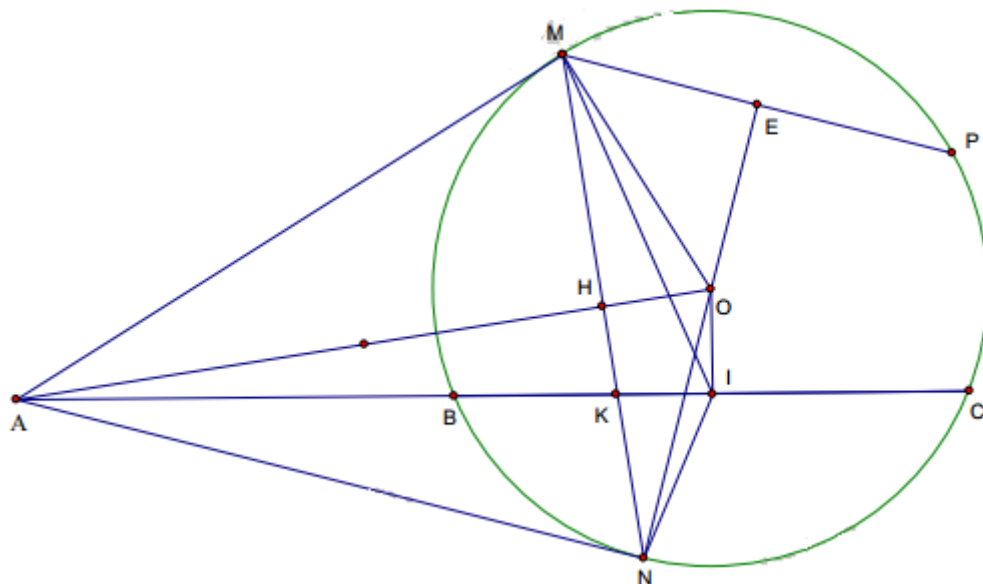
$$\Leftrightarrow m^2 - (k-3)^2 = 1 \Leftrightarrow (m-k+3)(m+k-3) = 1$$

Vì $m, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m-k+3 \in \mathbb{Z}, m+k-3 \in \mathbb{Z}$ nên

$$\begin{cases} m-k+3=1 \\ m+k-3=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m-k+3=-1 \\ m+k-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1, k=3 \\ m=-1, k=3 \end{cases} \Rightarrow k=3$$

Vậy $k = 1$ hoặc $k = 3$ thì $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương

Câu IV (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.



1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN

Theo giả thiết $\angle AMO = \angle ANO = \angle AIO = 90^\circ \Rightarrow 5$ điểm A, O, M, N, I thuộc đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow \angle AIN = \angle AMN, \angle AIM = \angle ANM$ (Góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A $\Rightarrow \angle AMN = \angle ANM$

$\Rightarrow \angle AIN = \angle AIM \Rightarrow đpcm$

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

$$\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \Leftrightarrow 2AB \cdot AC = AK(AB + AC) \Leftrightarrow AB \cdot AC = AK \cdot AI$$

(Do $AB + AC = 2AI$)

$\triangle ABN$ đồng dạng với $\triangle ANC \Rightarrow AB \cdot AC = AN^2$

$\triangle AHK$ đồng dạng với $\triangle AIO \Rightarrow AK \cdot AI = AH \cdot AO$

Tam giác $\triangle AMO$ vuông tại M có đường cao MH $\Rightarrow AH \cdot AO = AM^2$

$\Rightarrow AK \cdot AI = AM^2$. Do $AN = AM \Rightarrow AB \cdot AC = AK \cdot AI$

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

Ta có $AN \perp NO, MP \perp NO, M \notin AN \Rightarrow AN \parallel MP$

Do đó AMPN là hình bình hành $\Leftrightarrow AN = MP = 2x$

Tam giác $\triangle ANO$ đồng dạng với $\triangle NEM \Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{NO}{EM} \Rightarrow NE = \frac{2x^2}{R}$

$$\text{TH 1. } NE = NO - OE \Rightarrow \frac{2x^2}{R} = R - \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 - R\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2.$$

$$\text{PTTT } 2(R^2 - t^2) = R^2 - Rt \Leftrightarrow 2t^2 - Rt - R^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -R \\ t = R \end{cases}$$

$$\text{Do } t \geq 0 \Rightarrow t = R \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - x^2} = R \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A \equiv B \text{ (loại)}$$

$$\text{TH 2 } NE = NO + OE \Rightarrow \frac{2x^2}{R} = R + \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 + R\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2.$$

$$\text{PTTT } 2(R^2 - t^2) = R^2 + Rt \Leftrightarrow 2t^2 + Rt - R^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = R \\ t = -R \end{cases}$$

$$\text{Do } t \geq 0 \Rightarrow 2t = R \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2 - x^2} = R \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = 2R \text{ (loại)}$$

Vậy A thuộc BC, cách O một đoạn bằng 2R thì AMPN là hình

Câu V (1,0 điểm) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$.

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$.

Ta có $12 \geq (a+b)^3 + 4ab \geq (2\sqrt{ab})^3 + 4ab$. Đặt $t = \sqrt{ab}, t > 0$ thì

$$12 \geq 8t^3 + 4t^2 \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + 3t + 3) \leq 0$$

Do $2t^2 + 3t + 3 > 0, \forall t$ nên $t-1 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$. Vậy $0 < ab \leq 1$

Chứng minh được $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

Thật vậy, BĐT $\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \leq 0$

$$\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})} \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \leq 0. \text{ Do } 0 < ab \leq 1 \text{ nên BĐT này đúng}$$

Tiếp theo ta sẽ CM $\frac{2}{1+\sqrt{ab}} + 2015ab \leq 2016, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

Đặt $t = \sqrt{ab}, 0 < t \leq 1$ ta được $\frac{2}{1+t} + 2015t^2 \leq 2016$

$$2015t^3 + 2015t^2 - 2016t - 2014 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2015t^2 + 4030t + 2014) \leq 0. \text{ BĐT này đúng } \forall t: 0 < t \leq 1$$

Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$. Đẳng thức xảy ra $a = b = 1$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2009-2010**

Môn Toán

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể giao đề

Câu 1 (4đ)

a) Chứng minh rằng $A = (2^n - 1)(2^n + 1)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n

b) Tìm số các số nguyên n sao cho $B = n^2 - n + 13$ là số chính phương

Câu 2. (5đ)

a) Giải phương trình

$$x^2 - 2x + 3 = 2\sqrt{2x^2 - 4x + 3}$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 - xy \\ x^2 + y^2 = 3xy + 11 \end{cases}$$

Câu 3 (3đ)

Cho ba số x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y + z = 2010 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2010} \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $P = (x^{2007} + y^{2007})(y^{2009} + z^{2009})(z^{2011} + x^{2011})$

Câu 4. (6đ)

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung AB cố định, $AB = R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C;R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại A , $(D;R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại B . hai đường tròn $(C;R_1)$ và $(D;R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là M .

- Trong trường hợp P không trùng với trung điểm dây AB , chứng minh $OM \parallel CD$ và 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn
- Chứng minh khi P di động trên dây AB thì điểm M di động trên đường tròn cố định và đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định N
- Tìm vị trí của P để tích $PM \cdot PN$ lớn nhất ? diện tích tam giác AMB lớn nhất ?

Câu 5. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 670$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x^2 - yz + 2010} + \frac{y}{y^2 - zx + 2010} + \frac{z}{z^2 - xy + 2010} \geq \frac{1}{x + y + z}$$

ĐÁP ÁN ĐỀ PHÚ THỌ 2009-2010

Câu 1

- a) Theo giả thiết n là số tự nhiên nên $2^n - 1; 2^n; 2^n + 1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp
 Vì tích của 3 số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3 nên $(2^n - 1) \cdot 2^n \cdot (2^n + 1)$ chia hết cho 3
 Mặt khác $(2^n; 3) = 1$ nên $(2^n - 1)(2^n + 1)$ chia hết cho 3
 Vậy A chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n
- b) Ta thấy B là số chính phương $\Leftrightarrow 4B$ là số chính phương
 Đặt $4B = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $4B = 4n^2 - 4n + 52 = k^2 \Leftrightarrow (2n - 1 - k) \cdot (2n - 1 + k) = -51$
 Vì $2n - 1 + k \geq 2n + 1 + k$ nên ta có các hệ

$$\begin{cases} 2n - 1 + k = 1 \\ 2n - 1 - k = -51 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} 2n - 1 + k = 3 \\ 2n - 1 - k = -17 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} 2n - 1 + k = 51 \\ 2n - 1 - k = -1 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} 2n - 1 + k = 17 \\ 2n - 1 - k = -3 \end{cases} \quad (4)$$

 Giải hệ (1) (2) (3) (4) ta tìm được $n = -12; n = -3; n = 13; n = 4$
 Vậy các số nguyên cần tìm là $n \in \{-12; -3; 4; 13\}$

Câu 2

- a) Ta có $2x^2 - 4x + 3 = 2(x - 1)^2 + 1 \geq 1$ nên tập xác định của phương trình là $\mathbb{R}$
 Phương trình đã cho tương đương với
 $2x^2 - 4x + 3 - 4\sqrt{2x^2 - 4x + 3} + 3 = 0$
 Đặt $y = \sqrt{2x^2 - 4x + 3} \geq 1$ thì phương trình đã cho trở thành
 $y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$
 Với $y = 1$ ta có $\sqrt{2x^2 - 4x + 3} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$
 Với $y = 3$ ta có $\sqrt{2x^2 - 4x + 3} = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$
 Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = 1, x = -1, x = 3$

- b) hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 11(x^2 + xy - y^2) = 11 \\ x^2 - 3xy + y^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ 11(x^2 + xy - y^2) = x^2 - 3xy + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ (x + 2y)(5x - 3y) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Từ hệ (*) ta suy ra

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad (I) \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ (x + 2y) \cdot (5x - 3y) = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Giải hệ (I) ta tìm được $(x; y) = (2; -1); (-2; 1)$

Hệ II vô nghiệm

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (2; -1); (-2; 1)$

Câu 3

Từ giả thuyết suy ra x, y, z khác 0 và

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{x + y + z} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x + y + z} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x + y}{xy} + \frac{x + y}{z(x + y + z)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz+yz+z^2}\right) = 0$$

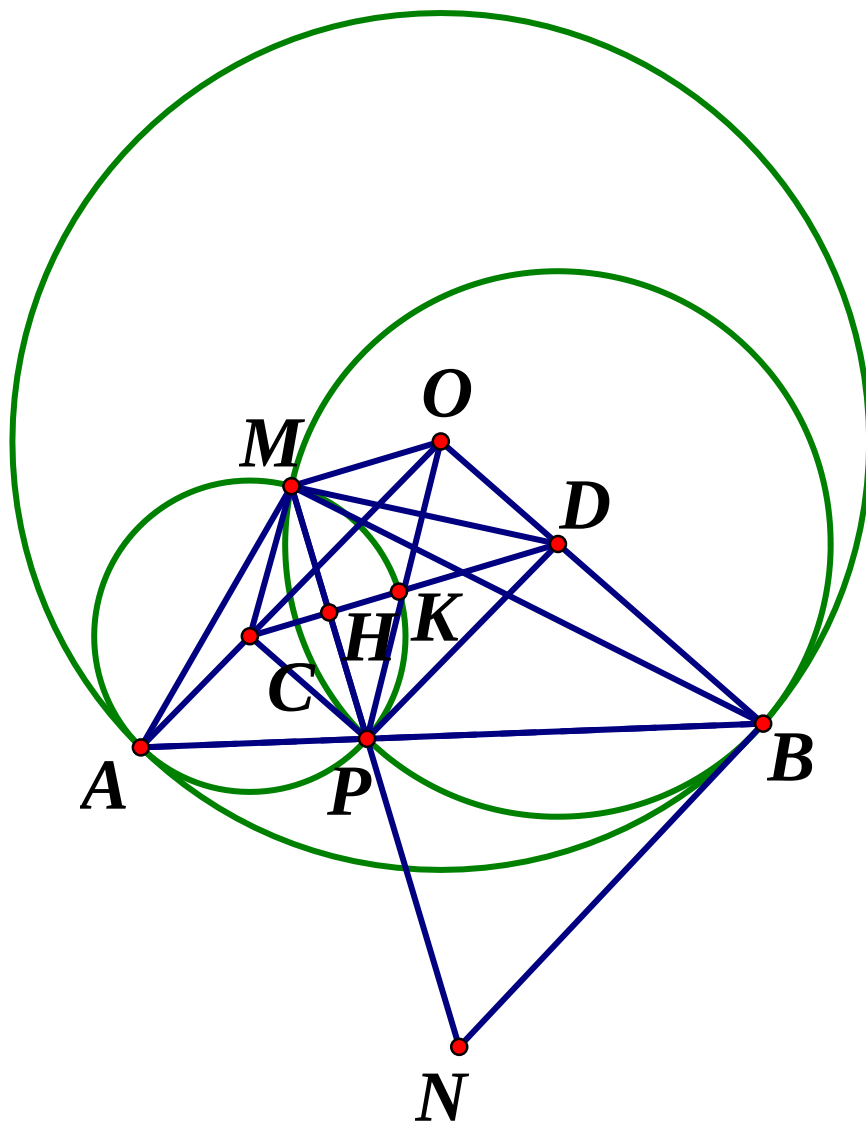
$$\Leftrightarrow (x+y)(xz+yz+z^2+xy) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)[z(z+x)+y(z+x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z+y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=-z \\ z=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2007} = -y^{2007} \\ y^{2009} = -z^{2009} \\ z^{2011} = -x^{2011} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2007} + y^{2007} = 0 \\ y^{2009} + z^{2009} = 0 \\ z^{2011} + x^{2011} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = 0$$

Câu 4



- a) Nối CP, PD ta có $\triangle ACP, \triangle OAB$ lần lượt cân tại C, O nên $CPA = CAP = OBP$
do đó $CP \parallel OD$ (1)
Tương tự $\triangle DPB, \triangle OAB$ lần lượt cân tại D, O nên $DPB = DBP = OAB$ nên $OD \parallel CP$ (2). Từ
(1) và (2) suy ra ODPC là hình bình hành
Gọi CD cắt MP tại H cắt OP tại K thì K là trung điểm của OP
Theo tính chất 2 của đường tròn cắt nhau ta có $CD \perp MP \Rightarrow H$ là trung điểm MP
Vậy $HK \parallel OM$ do đó $CD \parallel OM$
Ta phải xét 2 trường hợp $AP < BP$ và $AP > BP$, đáp án chỉ yêu cầu xét 1 trường hợp giả sử $AP < BP$

Vì tứ giác CDOM là hình bình hành nên $OC = DP, DP = DM = R_2$ nên tứ giác CDOM là hình
thang cân do đó 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn

- b) Xét tam giác AOB có $OA^2 + OB^2 = 2R^2 = AB^2$ nên tam giác OAB vuông cân tại O. Vì 4 điểm
C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn (kể cả $M \equiv O$) nên
 $COB = CMD$ (1)

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MCD$ có: $MAB = MCD$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo của (C))

$MBD = MDC$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo của (D))

Nên $\triangle MAB$ đồng dạng $\triangle MCD$ (g.g)

Vì $\triangle MAB$ đồng dạng với $\triangle MCD$ suy ra $AMB = COD$ hay $AMB = AOB = 90^\circ$

Do AB cố định nên điểm M thuộc đường tròn tâm I đường kính AB

Ta có $ACP = BDP = AOB = 90^\circ$ nên

$$AMP = \frac{1}{2} ACP = 45^\circ \text{ (Góc nội tiếp và góc ở tâm của (C))}$$

$$BMP = \frac{1}{2} BDP = 45^\circ \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm của (D))}$$

Do đó MP là phân giác $\angle AMB$

Mà $AMB = AOB = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác AOB

Giả sử MP cắt đường tròn (I) tại N thì N là trung điểm cung AB không chứa điểm O nên N cố
định

- c) $\triangle MAP$ và $\triangle BNP$ có $MPA = BPN$ (đối đỉnh); $AMP = BPN$ (góc nội tiếp cùng chắn 1 cung)
nên $\triangle MAP$ đồng dạng $\triangle BNP$ (g.g)

$$\text{Do đó } \frac{PA}{PN} = \frac{PM}{PB} \Leftrightarrow PM \cdot PN = PA \cdot PB \leq \left(\frac{PA + PB}{2} \right)^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{R^2}{2} \text{ (không đổi)}$$

Vậy $PM \cdot PN$ lớn nhất bằng $\frac{R^2}{2}$ khi $PA = PB$ hay P là trung điểm dây AB

Vì tam giác AMB vuông tại M nên

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot BM \leq \frac{1}{4} (AM^2 + BM^2) = \frac{AB^2}{4} = \frac{R^2}{2}$$

Diện tích tam giác AMB lớn nhất bằng $\frac{R^2}{2}$ khi $PA = PB$ hay P là trung điểm dây AB

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x}{x^2 - yz + 2010} + \frac{y}{y^2 - zx + 2010} + \frac{z}{z^2 - xy + 2010} \\ &= \frac{x^2}{x(x^2 - yz + 2010)} + \frac{y^2}{y(y^2 - zx + 2010)} + \frac{z^2}{z(z^2 - xy + 2010)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2010(x+y+z)} \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý: $x(x^2 - yz + 2010) = x(x^2 + xy + zx + 1340) > 0$; $y(y^2 - zx + 2010) > 0$ và $z(z^2 - xy + 2010) > 0$

$$\begin{aligned} &x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \\ \text{Chứng minh} &= (x+y+z) \left[(x+y+z)^2 - 3(xy + yz + zx) \right] \quad (2) \end{aligned}$$

Do đó:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2010(x+y+z) = (x+y+z) \left[(x+y+z)^2 - 3(xy + yz + zx) + 2010 \right] = (x+y+z)^3 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta suy ra

$$VT \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3} = \frac{1}{x+y+z}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{2010}}{3}$

SỞ GD&ĐT NGHỆ AN

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2009 – 2010**

Đề chính

Môn thi: TOÁN LỚP 9 - BẢNG A

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (4,5 điểm):

a) Cho hàm số $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2010}$

Tính $f(a)$ tại $a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$

Câu 2. (4,5 điểm):

a) Giải phương trình: $x^2 = \sqrt{x^3 - x^2} + \sqrt{x^2 - x}$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm):

Cho $x; y; z$ là các số thực dương thỏa mãn: $xyz = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1}$

Câu 4. (5,5 điểm):

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB . Vẽ các tiếp tuyến $CD; CE$ với đường tròn tâm O ($D; E$ là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N khác với điểm A). Đường thẳng DE cắt MN tại I . Chứng minh rằng:

a) $ML.BE = BL.AE$

b) Khi điểm C thay đổi thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (2,5 điểm):

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , trung tuyến AD . Điểm M di động trên đoạn AD . Gọi N và P lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AB và AC . Vẽ $NH \perp PD$ tại H . Xác định vị trí của điểm M để tam giác AHB có diện tích lớn nhất.

- - - Hết - - -

Họ và tên thí sinh:..... Số
báo danh:.....

**SỞ GD&ĐT NGHỆ AN KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2009 – 2010**

HƯỚNG DẪN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC
(Hướng dẫn và biểu điểm chấm gồm **04** trang)
Môn: TOÁN - BẢNG A

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1, (4,5đ)	a) (2,0đ)	$a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$ $\Rightarrow a^3 = 32 + 3\sqrt[3]{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})} \cdot (\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}})$	0,5

2, (4,5đ)		$\Rightarrow a^3 = 32 + 3 \cdot (-4) \cdot a$	0,5
		$\Rightarrow a^3 = 32 - 12a$	0,25
		$\Rightarrow a^3 + 12a - 32 = 0$	0,25
		$\Rightarrow a^3 + 12a - 31 = 1$	0,25
		$\Rightarrow f(a) = 1^{2010} = 1$	0,25
	b) (2,5đ)	$5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y) \quad (1)$	
		$\Rightarrow 7(x + 2y) : 5 \quad \Rightarrow (x + 2y) : 5$	0,25
		Đặt $x + 2y = 5t \quad (2) \quad (t \in \mathbb{Z})$	0,25
		(1) trở thành $x^2 + xy + y^2 = 7t \quad (3)$	0,25
		Từ (2) $\Rightarrow x = 5t - 2y$ thay vào (3) ta được	
		$3y^2 - 15ty + 25t^2 - 7t = 0 \quad (*)$	0,25
		$\Delta = 84t - 75t^2$ Đề (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 84t - 75t^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow 0 \leq t \leq \frac{28}{25}$	0,25 0,25
		Vì $t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 0$ hoặc $t = 1$	0,25
		Thay vào (*) Với $t = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$	0,25 0,25
		Với $t = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 3 \Rightarrow x_2 = -1 \\ y_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1 \end{cases}$	0,25 0,25
	a) (2,5đ)	ĐK $x = 0$ hoặc $x \geq 1$	0,25
		Với $x = 0$ thỏa mãn phương trình	0,25
		Với $x \geq 1$ Ta có $\sqrt{x^3 - x^2} = \sqrt{x^2(x-1)} \leq \frac{1}{2}(x^2 + x - 1)$	0,5
		$\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{1(x^2 - x)} \leq \frac{1}{2}(x^2 - x + 1)$	0,5
		$\Rightarrow \sqrt{x^3 - x^2} + \sqrt{x^2 - x} \leq x^2$	0,25
		Dấu "=" Xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x - 1 \\ x^2 - x = 1 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x - 1 \\ x^2 = x + 1 \end{cases} \Rightarrow x + 1 = x - 1$ Vô lý	0,25
		Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$	0,25
	b) (2,0đ)	(I) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \quad (1) \\ \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4 \quad (2) \end{cases} \quad \text{ĐK } x, y, z \neq 0$	0,25
		Từ (1) $\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} = 4$	0,25
		Thế vào (2) ta được: $\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz}$	0,25
		$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{z^2} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} = 0$	0,25

		$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{yz} + \frac{1}{z^2}\right) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 0 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -z$	0,25
		Thay vào hệ (I) ta được: $(x; y; z) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ (TM)	0,25
3, (3,0đ)		Ta có $(x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y$	0,25
		$\Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 \geq xy$	0,25
		Mà $x, y > 0 \Rightarrow x + y > 0$	0,25
		Ta có: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	0,25
		$\Rightarrow x^3 + y^3 \geq (x + y)xy$	0,25
		$\Rightarrow x^3 + y^3 + 1 = x^3 + y^3 + xyz \geq (x + y)xy + xyz$	0,25
		$\Rightarrow x^3 + y^3 + 1 \geq xy(x + y + z) > 0$	0,25
		Tương tự: $y^3 + z^3 + 1 \geq yz(x + y + z) > 0$	0,25
		$z^3 + x^3 + 1 \geq zx(x + y + z) > 0$	0,25
		$\Rightarrow A \leq \frac{1}{xy(x + y + z)} + \frac{1}{yz(x + y + z)} + \frac{1}{xz(x + y + z)}$	0,25
		$\Rightarrow A \leq \frac{x + y + z}{xyz(x + y + z)}$	0,25
		$\Rightarrow A \leq \frac{1}{xyz} = 1$	0,25
		Vậy giá trị lớn nhất của A là $1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$	0,25

4, (5,5đ)			
	a) (3,0đ)	Ta có: $\angle BDE = \angle BAE$ (cùng chắn cung BE của đường tròn tâm O)	0,25
		$\angle BAE = \angle BMN$ (cùng chắn cung BN của đường tròn tâm O')	0,25
		$\Rightarrow \angle BDE = \angle BMN$	0,25
		hay $\angle BDI = \angle BMN \Rightarrow BDMI$ là tứ giác nội tiếp	0,50
		$\Rightarrow \angle MDI = \angle MBI$ (cùng chắn cung MI)	0,25
		mà $\angle MDI = \angle ABE$ (cùng chắn cung AE của đường tròn tâm O)	0,25
		$\Rightarrow \angle ABE = \angle MBI$	0,25
		mặt khác $\angle BMI = \angle BAE$ (chứng minh trên)	0,25
		$\Rightarrow \triangle MBI \sim \triangle ABE$ (g.g)	0,25
		$\Rightarrow \frac{MI}{AE} = \frac{BI}{BE} \Leftrightarrow MI \cdot BE = BI \cdot AE$	0,50
	b) (2,5đ)	Gọi Q là giao điểm của CO và DE $\Rightarrow OC \perp DE$ tại Q $\Rightarrow \triangle OCD$ vuông tại D có DQ là đường cao $\Rightarrow OQ \cdot OC = OD^2 = R^2$ (1)	0,50
		Gọi K giao điểm của hai đường thẳng OO' và DE; H là giao điểm của AB và OO' $\Rightarrow OO' \perp AB$ tại H.	0,50
		Xét $\triangle KQO$ và $\triangle CHO$ có $\angle Q = \angle H = 90^\circ$; O chung $\Rightarrow \triangle KQO \sim \triangle CHO$ (g.g)	0,50
		$\Rightarrow \frac{KO}{CO} = \frac{OQ}{OH} \Rightarrow OC \cdot OQ = KO \cdot OH$ (2)	0,50
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow KO \cdot OH = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R^2}{OH}$	
		Vì OH cố định và R không đổi $\Rightarrow OK$ không đổi $\Rightarrow K$ cố định	0,50

Câu 1. (4,5 điểm)

- Tính giá trị biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$
- Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

$$M = \frac{2018}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \quad N = \frac{-2019}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 3}}}$$

Câu 2. (3,0 điểm)

- Cho 3 số a, b, c khác 0, thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$$

- Tính giá trị của biểu thức: $B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}}$

Câu 3. (4,5 điểm)

- Cho đa thức $f(x)$, tìm dư của phép chia $f(x)$ cho $(x-1)(x+2)$. Biết rằng $f(x)$ chia cho $x - 1$ dư 7 và $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 1.

$$2. \text{ Giải phương trình: } x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$$

- Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x^2 + y^2 = 17 - 2xy$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$a) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

$$b) \frac{1}{a+b}; \frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a} \text{ là độ dài 3 cạnh của một tam giác.}$$

Câu 5. (5,0 điểm)

- Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM, phân giác AI. Tính HI, IM; biết rằng $AC = \frac{4}{3}AB$ và diện tích tam giác ABC là 24 cm^2

2. Qua điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ 3 đường thẳng song song với 3 cạnh tam giác. Đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC, BC lần lượt tại E và D; đường thẳng song song với cạnh BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại M và N; đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB và BC lần lượt tại F và H. Biết diện tích các tam giác ODH, ONE, OMF lần lượt là a^2, b^2, c^2 .

- Tính diện tích S của tam giác ABC theo a, b, c
- Chứng minh $S \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

-----Hết-----

Họ và tên học sinh:SBD:

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm, học sinh không được sử dụng máy tính bỏ túi)

SƠ LƯỢC GIẢI

Đề thi chọn HSG cấp huyện năm học 2018 – 2019

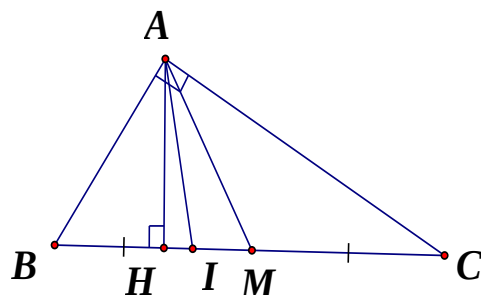
Môn: TOÁN 9

Đáp án

$$1. \text{ Ta có } A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{4 + \sqrt{15}}(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\sqrt{4 - \sqrt{15}})(\sqrt{10} - \sqrt{6})$$

$A = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$
$A = (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$
Điều kiện xác định của M là $x^2 - 2x - 3 > 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases}$
Điều kiện xác định của N là $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x - \sqrt{2x+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{2x+3} \geq 0 \quad (*)$
$\Leftrightarrow x^2 > 2x+3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases} \quad (**)$
Từ (*) và (**) ta được $x > 3$ là điều kiện xác định của M
2. Ta có: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$
$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{c}{abc} + \frac{a}{abc} + \frac{b}{abc}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$
Vậy $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right $
Theo câu a) Ta có $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right = \left \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right \quad (*)$
Áp dụng (*) ta có:
$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(-2)^2}} = \left \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{(-2)}\right = \left \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right \quad (\forall \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} > 0)$
Tương tự $\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \dots$
$\sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}$
Suy ra $B = 2019 - \frac{1}{2019} = \frac{4076360}{2019}$
3. $x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 6) = 0$
$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \quad (1) \text{ hoặc } x^2 - 4x + 6 = 0 \quad (2)$
(1) $\Leftrightarrow x = -1$
(2) $\Leftrightarrow (x-2)^2 + 2 = 0$. Do $(x-2)^2 + 2 \neq 0 \quad \forall x$ nên pt này vô nghiệm.
Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-1\}$
Vì $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ là đa thức bậc 2 nên $f(x) : (x-1)(x+2)$ có đa thức dư dạng $ax + b$
Đặt $f(x) = (x-1)(x+2) \cdot q(x) + ax + b$
Theo đề ra $f(x) : (x-1)$ dư 7 $\Rightarrow f(1) = 7 \Leftrightarrow a + b = 7 \quad (1)$

$f(x) : (x + 2) \text{ dư } 1 \Rightarrow f(-2) = 1 \Leftrightarrow -2a + b = 1 \quad (2)$
Từ (1) và (2) $\Rightarrow a = 2$ và $b = 5$.
Vậy $f(x) : (x - 1)(x + 2)$ được dư là $2x + 5$
$5x^2 + y^2 = 17 - 2xy \Leftrightarrow 4x^2 + (x + y)^2 = 17$
$\Rightarrow 4x^2 \leq 17 \Rightarrow x^2 \leq \frac{17}{4}$ vì x^2 là số chính phương nên $x^2 = 0; 1; 4$
Nếu $x^2 = 0 \Rightarrow (x + y)^2 = 17$ (loại)
Nếu $x^2 = 1 \Rightarrow (x + y)^2 = 13$ (loại)
Nếu $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$ $x = 2 \Rightarrow (2 + y)^2 = 1 \Rightarrow y = -3$ hoặc $y = -1$. $x = -2 \Rightarrow (-2 + y)^2 = 1 \Rightarrow y = 3$ hoặc $y = 1$.
Vậy phương trình có nghiệm : $(x; y) = (2; -3), (2; -1), (-2; 3), (-2; 1)$
4. Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $b + c > a$ $\Leftrightarrow a(b + c) > a^2 \Leftrightarrow a(b + c) + ab + ac > a^2 + ab + ac$ $\Leftrightarrow 2a(b + c) > a(a + b + c) \Leftrightarrow \frac{a}{b + c} < \frac{2a}{a + b + c}$
Tương tự ta cũng có: $\frac{b}{c + a} < \frac{2b}{a + b + c}$; $\frac{c}{b + a} < \frac{2c}{a + b + c}$
Suy ra: $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} < \frac{2a}{a + b + c} + \frac{2b}{b + c + a} + \frac{2c}{a + b + c} = 2$ (dpcm)
Ta có $a + b > c$
$\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} > \frac{1}{b + c + a} + \frac{1}{c + a + b} = \frac{2}{a + b + c} > \frac{2}{(a + b) + (a + b)} = \frac{1}{a + b}$
Chúng minh tương tự ta có $\frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} > \frac{1}{b + c}$; $\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} > \frac{1}{c + a}$
Vậy $\frac{1}{a + b}$; $\frac{1}{b + c}$; $\frac{1}{c + a}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác (Đpcm)
5. Do $AC = \frac{3}{4} AB$ (gt) và $AB \cdot AC = 2S = 48$, suy ra $AC = 6$ (cm); $AB = 8$ (cm). Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABC ta tính được $BC = 10$ cm, suy ra $AM = 5$ (cm) (1) Áp dụng tính chất giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ABC ta tính được $BH = \frac{AB^2}{BC} = 3,6$ (cm) (2) Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{IB}{IB + IC} = \frac{AB}{AB + AC} \Leftrightarrow \frac{IB}{10} = \frac{6}{6 + 8} \Rightarrow IB = \frac{30}{7}$ cm (3) Từ (1), (2) và (3), ta có I nằm giữa B và M; H nằm giữa B và I Vậy: $HI = BI - BH = \frac{4,8}{7}$ cm $MI = BM - BI = \frac{5}{7}$ cm



Ta có các tam giác ODH, EON, FMO đồng dạng với tam giác ABC

Đặt $S_{ABC} = d^2$.

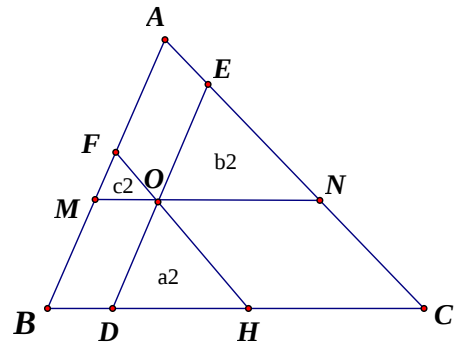
Ta có: $\frac{S_{ODH}}{S_{ABC}} = \frac{a^2}{d^2} = \left(\frac{DH}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{DH}{BC}$;

$\frac{S_{EON}}{S_{ABC}} = \frac{b^2}{d^2} = \left(\frac{ON}{BC}\right)^2 = \left(\frac{HC}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{d} = \frac{HC}{BC}$; Tương tự

$\frac{c}{d} = \frac{BD}{BC}$

Suy ra: $\frac{a+b+c}{d} = \frac{DH+HC+DB}{BC} = 1 \Rightarrow d = a+b+c$

Vậy $S = d^2 = (a+b+c)^2$



Áp dụng BĐT Cosy, ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $a^2 + c^2 \geq 2ac$

$S = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$S \leq a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$, hay O là trọng tâm của tam giác ABC

Lưu ý: Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa;
Điểm toàn bài quy tròn đến 0,5.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LỚP 9 THCS

BÌNH ĐỊNH

Đề chính thức

đề)

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

KHOÁ NGÀY 18 – 3 – 2017

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian phát

Ngày thi: **18/3/2017**

Bài 1 (6,0 điểm).

1. Cho biểu thức: $P = \frac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \frac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên.

2. Cho biểu thức: $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Bài 2 (5,0 điểm).

a) Chứng minh rằng: với mọi số thực x, y dương, ta luôn có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

b) Cho phương trình: $2x^2 + 3mx - \sqrt{2} = 0$ (m là tham số). Có hai nghiệm x_1 và x_2 .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1+x_1^2}{x_1} - \frac{1+x_2^2}{x_2}\right)^2$

Bài 3 (2,0 điểm)

Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

Bài 4 (7,0 điểm).

1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

a) Chứng minh $MB + MC = MA$

b) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA. Gọi

S, S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC, MBC. Chứng minh rằng: Khi M di động ta luôn có đẳng thức:

$$MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$$

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. AD, BE, CF là các đường cao. Lấy M trên đoạn FD, lấy N trên tia DE sao cho $MAN = BAC$. Chứng minh MA là tia phân giác của góc NMF

ĐÁP ÁN

Bài 1 (6,0 điểm).

1a) Rút gọn được $P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1}$ (với $m \geq 0, m \neq 1$)

1b)

$$P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{m} - 1}$$

Ta có: $P \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{m} - 1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{m} - 1$ là ước dương của 2 $\Rightarrow m \in \{4; 9\}$ (TMĐK)

Vậy $m = 4; m = 9$ là giá trị cần tìm.

2) $a + b + c : 4$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$)

Đặt $a + b + c = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow a + b = 4k - c$; $b + c = 4k - a$; $a + c = 4k - b$

Ta có: $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc = (4k - c)(4k - a)(4k - b) - abc$

$$= (16k^2 - 4ak - ack + ac)(4k - b) - abc$$

$$= 64k^3 - 16bk^2 - 16ak^2 + 4abc - 16ck^2 + 4bck + 4ack - abc - abc$$

$$= 4(16k^3 - 4bk^2 - 4ak^2 + abk - 4ck^2 + bck + ack) - 2abc \quad (*)$$

Giả sử a, b, c đều chia 2 dư 1 $\Rightarrow a + b + c$ chia 2 dư 1 (1)

Mà: $a + b + c : 4 \Rightarrow a + b + c : 2$ (theo giả thiết) (2)

Do đó (1) và (2) mâu thuẫn $\Rightarrow$ Điều giả sử là sai

$\Rightarrow$ Trong ba số a, b, c ít nhất có một số chia hết cho 2

$$\Rightarrow 2abc : 4 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow P : 4$

Bài 2 (5,0 điểm).

$$a) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

b) PT có a, c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2

$$\text{Ta có: } x_1 + x_2 = -\frac{3m}{2} \text{ và } x_1 \cdot x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1+x_1^2}{x_1} - \frac{1+x_2^2}{x_2} \right)^2 = \dots =$$

$$(x_1 - x_2)^2 \left[1 + \frac{(1-x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2} \right] = [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] \left[1 + \frac{(1-x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2} \right]$$

$$= \left(9 + \frac{9\sqrt{2}}{2} \right) m^2 + 8\sqrt{2} + 8 \geq 8\sqrt{2} + 8$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = 0$

Vậy GTNN của M là $8\sqrt{2} + 8$ khi $m = 0$

Bài 3 (2,0 điểm)

Áp dụng BĐT Cô si cho các số dương x^2 và yz , ta có:

$$x^2 + yz \geq 2\sqrt{x^2yz} = 2x\sqrt{yz} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{yz}}$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \frac{1}{y^2 + xz} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y\sqrt{xz}} \text{ và } \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z\sqrt{xy}}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \right) \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy}}{xyz} \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy} \leq x + y + z \quad (3)$$

$$\text{Thật vậy: } (*) \Leftrightarrow 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xy} \leq 2x + 2y + 2z$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0 \text{ (BĐT đúng)}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra: } \frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \leq \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4) suy ra: } \frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

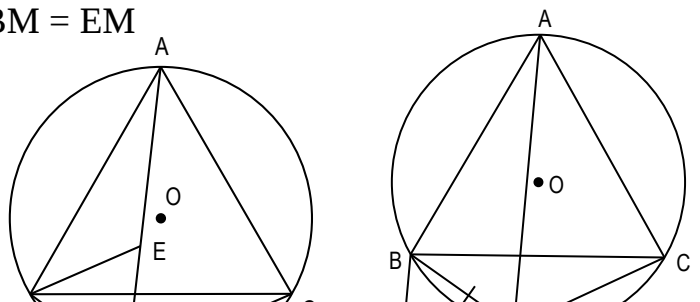
Bài 4 (7,0 điểm).

1.a) Cách 1: Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MB$

Ta có: $\triangle BEM$ là tam giác đều $\Rightarrow BE = BM = EM$

$$\triangle BMA = \triangle BEC \Rightarrow MA = EC$$

Do đó: $MB + MC = MA$



Cách 2:

Trên AM lấy điểm E sao cho ME = MB

Ta có: $\triangle BEM$ là tam giác đều

$\Rightarrow BE = BM = EM$

$\triangle MBC = \triangle EBA$ (c.g.c) $\Rightarrow MC = AE$

Do đó: $MB + MC = MA$

1.b) Kẻ AN vuông góc với BC tại N

Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác

$\Rightarrow A, O, N$ thẳng hàng $\Rightarrow AN = \frac{3}{2}R$

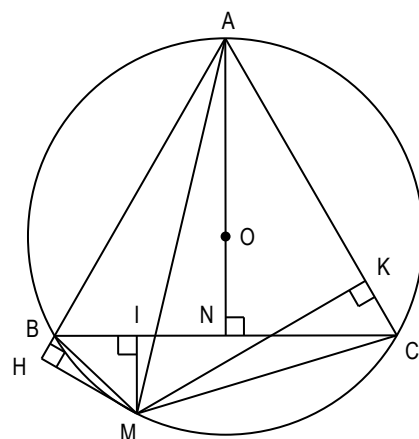
Ta có: $AN = AB \cdot \sin \angle ABN \Rightarrow AB = \frac{AN}{\sin \angle ABN} = \frac{3}{2}R : \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

Ta có: $\frac{1}{2}MH \cdot AB = S_{ABM} \Leftrightarrow MH = \frac{2S_{ABM}}{AB} = \frac{2S_{ABM}}{R\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}MK \cdot AC = S_{ACM} \Leftrightarrow MK = \frac{2S_{ACM}}{AC} = \frac{2S_{ACM}}{R\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}MI \cdot BC = S_{BCM} \Leftrightarrow MI = \frac{2S_{BCM}}{BC} = \frac{2S_{BCM}}{R\sqrt{3}} = \frac{2S'}{R\sqrt{3}}$

Do đó: $MH + MK + MI = \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}(S_{ABM} + S_{ACM}) = \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}} \cdot S_{ABMC}$
 $= \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}} \cdot (S + S') = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$



2. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE tại K

Tứ giác AEDB nội tiếp $\Rightarrow \angle CDE = \angle BAC$

Mà: $\angle MKD = \angle CDE$ (vì $MK \parallel BC$).

Do đó: $\angle MKD = \angle MAN \Rightarrow$ Tứ giác AMKN nội tiếp

$\Rightarrow \angle AMN = \angle AKN$

Ta có: $\angle D_3 = \angle D_4 (= \angle BAC) \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2$

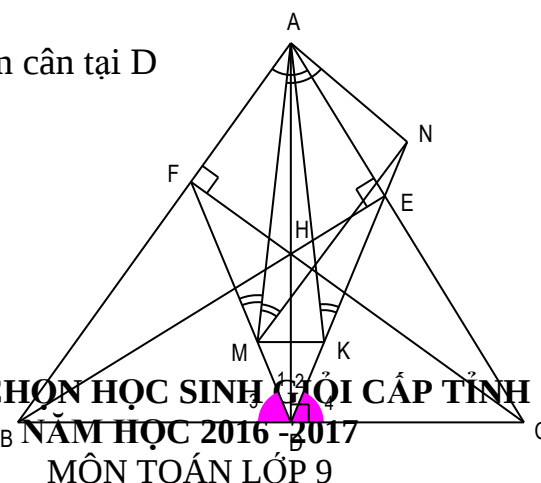
$\triangle DMK$ có DA là phân giác vừa là đường cao nên cân tại D

$\Rightarrow DM = DK$

$\triangle AMD = \triangle AKD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AMD = \angle AKD$

Nên: $\angle AMF = \angle AKN$. Ta có: $\angle AMF = \angle AMN (= \angle AKN)$

Vậy: MA là phân giác của góc $\angle NMF$



**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI**

ĐỀ CHÍNH

(Đề thi gồm 01 trang)

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2016 - 2017
MÔN TOÁN LỚP 9**

Thi ngày 08 tháng 12 năm 2016

(Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao
đề)

Bài 1 (4,0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

2) Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$

a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A

b) Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

Bài 2 (4,0 điểm). Giải phương trình

1) Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$

2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12} + \sqrt{2x^2+3x+2} = x+5$.

Bài 3 (3,0 điểm).

1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 25 = y(y+6)$

Bài 4 (7,0 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.

a) Chứng minh $CIJ = CBH$

b) Chứng minh $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh $HE \cdot HD = HC^2$

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5 (2,0 điểm). Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.....

Họ, tên chữ ký

GT1:.....

Số báo danh:.....

Họ, tên chữ ký

GT2:.....

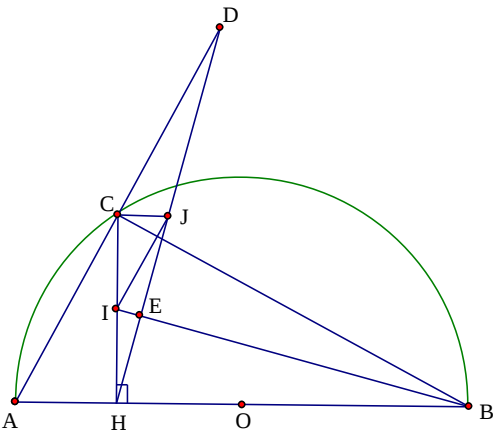
GD-ĐT Quảng Ngãi

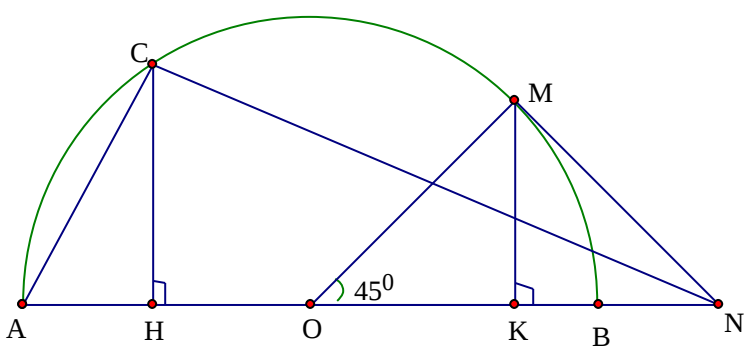
**HƯỚNG DẪN CHẤM THI
KỲ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2016 - 2017
Môn thi : Toán 9**

Bài	Câu	Nội dung	Điểm
Bài 1 (4 đ)	Câu 1 (1,75đ)	1. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$	

Bài 2 (4 đ)		$A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$	0,75
		$A = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+3} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}$	0,5
		$A = 2\sqrt{2}$	0,5
	Câu 2 (2,25)	2. $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$	
		a) ĐKXD: $x \geq 0$	0,25
		$A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$	0,5
		$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$ $= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} = -2\sqrt{x}$	0,5
		b) $B = A + x - 1 = -2\sqrt{x} + x - 1 = x - 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2 \geq -2$	0,5
		Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (TM ĐKXD)	0,25
		Vậy GTNN của biểu thức B=-2 khi x=1	0,25
	Câu 1 (2đ)	1) Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$	
		ĐKXD : $x \geq 1$	0,25
		$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = \frac{x+3}{2}$	0,5
		$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \frac{x+3}{2}$	0,25
		$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = \frac{x+3}{2} \quad (*)$	0,25
		Nếu $x \geq 2$ phương trình (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = x+3$ $\Leftrightarrow 16(x-1) = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (TM)}$	0,25
		Nếu $1 \leq x < 2$ phương trình (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 + 1 - \sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4 = x+3 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (TM)}$	0,25
		Vậy phương trình có nghiệm x=1 và x=5	0,25
	Câu 2 (2đ)	2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12} + \sqrt{2x^2+3x+2} = x+5$.	
		Đặt $u = \sqrt{2x^2+5x+12}, v = \sqrt{2x^2+3x+2} \quad (u > 0, v > 0)$	0,25
		$\Rightarrow u^2 = 2x^2 + 5x + 12, v^2 = 2x^2 + 3x + 2 \Rightarrow u^2 - v^2 = 2x + 10 = 2(x+5)$	0,25
		Từ (1) $\Rightarrow 2(u+v) = (u^2 - v^2) \Leftrightarrow (u+v)(u-v-2) = 0$ (2)	0,25

		Vì $u > 0, v > 0$, từ (2) suy ra: $u - v - 2 = 0$. Vì vậy $\sqrt{2x^2 + 5x + 12} = \sqrt{2x^2 + 3x + 2} + 2$ (3)	0,25
		Bình phương 2 vế và thu gọn ta được phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 3$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2\sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 7x^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (7x^2 - 7) + (6x + 6) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x + 1)(7x - 1) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -1, x = \frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1, x = \frac{1}{7} (tm)$	0,5
		Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = \frac{1}{7}$	0,25
Bài 3 (3 đ)	Câu 1 (1,5đ)	1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.	
		Giả sử $2016k + 3 = a^3$ với k và a là số nguyên. Suy ra: $2016k = a^3 - 3$ Ta chứng minh $a^3 - 3$ không chia hết cho 7.	0,5
		Thật vậy: Ta biểu diễn $a = 7m + r$, với $r \in \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3\}$.	0,25
		Trong tất cả các trường hợp trên ta đều có $a^3 - 3$ không chia hết cho 7	0,5
		Mà $2016k$ luôn chia hết cho 7, nên $a^3 - 3 \neq 2016k$. ĐPCM	0,25
	Câu 2 (1,5đ)	2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 25 = y(y + 6)$	
		Từ $x^2 - 25 = y(y + 6)$ Ta có : $(y + 3 + x)(y + 3 - x) = -16$	0,25
		Để ý trong phương trình chỉ chứa ẩn số x với số mũ bằng 2, do đó ta có thể hạn chế giải với x là số tự nhiên. Khi đó: $y + 3 + x \geq y + 3 - x$. Ta có $(y + 3 + x) + (y + 3 - x) = 2(y + 3)$ là số chẵn Suy ra 2 số $(y + 3 + x)$ và $(y + 3 - x)$ cùng tính chẵn lẻ. Ta lại có tích của chúng là số chẵn, vậy 2 số $(y + 3 + x)$ và $(y + 3 - x)$ là 2 số chẵn.	0,5
		Ta chỉ có cách phân tích -16 ra tích của 2 số chẵn sau đây: $-16 = 8(-2) = 4(-4) = 2(-8)$ trong $\mathbb{Z}$ thỏa sẽ $\mathbb{Z}$ cho b»ng gì, trĐ $(y + 3 + x)$.	0,25
		Khi $y + 3 + x = 8, y + 3 - x = -2$ ta cả $x = 5, y = 0$. Khi $y + 3 + x = 4, y + 3 - x = -4$ ta cả $x = 4, y = -3$. Khi $y + 3 + x = 2, y + 3 - x = -8$ ta cả $x = 5, y = -6$. V× thÕ ph-ng tr×nh ®· cho cả c,c nghiÕm : $(x, y) \in \{(\pm 5, 0); (\pm 5, -6); (\pm 4, -3)\}$	0,5

Bài 4 (7 đ)			
	Câu a (1,5 đ)	+ Vì $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $AC \perp BC$ Suy ra $BC \perp CD$ (1) + Lập luận để chỉ ra $IJ \parallel CD$ (2) + Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp BC$ + Suy ra $\angle CIJ = \angle CBH$ (cùng phụ với $\angle HCB$) (3)	0,5 0,5 0,5
	Câu b (2 đ)	+) Trong $\triangle$ vuông CBH ta có: $\tan \angle CBH = \frac{CH}{BH}$ (4) + Lập luận chứng minh được $CJ \parallel AB$ + Mà $CH \perp AB$ (gt) + Suy ra $CJ \perp CH$ +) Trong tam giác vuông CIJ ta có $\tan \angle CIJ = \frac{CJ}{CI} = \frac{CJ}{HI}$ $CI = HI$ (5) + Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$ + Xét $\triangle CJH$ và $\triangle HIB$ có $\angle H CJ = \angle BHI = 90^\circ$ và $\frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$ (cmt) + Nên $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$	0,5 0,5 0,5 0,5
	Câu c (1,5 đ)	+ Lập luận để chứng minh được $\angle HEI = 90^\circ$ + Chứng minh được $\triangle HEI$ đồng dạng với $\triangle H CJ$ + Suy ra $\frac{HE}{HC} = \frac{HI}{HJ}$ + Suy ra $HE \cdot HJ = HI \cdot HC$ + Mà $HJ = \frac{1}{2}HD$; $HI = \frac{1}{2}HC$ + Suy ra $HE \cdot HD = HC^2$	0,5 0,5 0,5

Câu d (2 đ)			
	+ Lấy điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho $BOM = 45^\circ$ + Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại M cắt AB tại N. Ta có M và N cố định.		0,5
	+ Kẻ $MK \perp AB$ tại K + Chứng minh được $\triangle MON$ vuông cân tại M và $KM = KN$ Suy ra $ANC = 45^\circ$ Xét $C \equiv M$ Ta có $C \equiv M$ nên $H \equiv K$ Do đó $AH + CH = AK + KM = AK + KN = AN$ (không đổi)		0,5
	+ Xét C khác M. Tia NC nằm giữa hai tia NA và NM Do đó $ANC < ANM = 45^\circ$ + $\triangle HNC$ có $NHC = 90^\circ$ nên $HNC + HCN = 90^\circ$ Mà $HNC < 45^\circ$ nên $HCN > 45^\circ$ Suy ra $HNC < HCN$ Suy ra $HC < HN$		0,5
	+ Do đó $AH + CH < AH + HN = AN$ + Vậy Khi C ở trên nửa đường tròn (O) sao cho $BOC = 45^\circ$ thì $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất		0,5
Bài 5 (2 đ)	Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.		
	Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a+b+c \geq 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$		0,5
	Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$		0,5
	Suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$		0,5

	$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + c \\ b = c + a \Leftrightarrow a = b = c = 0 \text{ (Trái với giả thiết)} \\ c = a + b \end{cases}$ Vậy dấu = không xảy ra suy ra đpcm.	0,5
--	--	-----

**PHÒNG GD&ĐT
LỚP 9 THCS**

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2012 - 2013

Đề chính

Môn thi: Toán

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao bài)

Bài 1 (5 điểm).

Cho biểu thức: $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1}\right)$, với $a \geq 0$

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 2010 - 2\sqrt{2009}$.

Bài 2 (4 điểm).

1. Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8) = 28x^2$
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x-y) \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Bài 3 (4 điểm).

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$
2. Cho tam giác ABC vuông tại A có phân giác AD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng AD.

Chứng minh rằng: $2AD \leq BM + CN$

Bài 4 (5 điểm).

Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, P là điểm trên cạnh BC; các điểm N, L thuộc AP sao cho $CN \perp AP$ và $AL = CN$.

1. Chứng minh góc MCN bằng góc MAL.
2. Chứng minh $\triangle LMN$ vuông cân
3. Diện tích $\triangle ABC$ gấp 4 lần diện tích $\triangle MNL$, hãy tính góc CAP.

Bài 5 (2 điểm).

Cho $a \neq b$ và $ab = 6$. Chứng minh: $\frac{a^2 + b^2}{|a - b|} \geq 4\sqrt{3}$

.....Hết.....

Họ và tên thí sinh: Số báo
 danh:.....

Họ tên và chữ ký của giá thị 1

Họ tên và chữ ký của giám thị 2

.....

.....

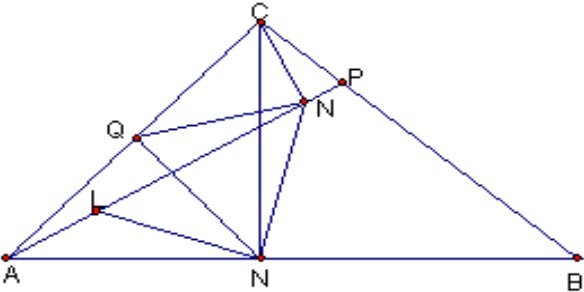
**PHÒNG GD&ĐT
9 THCS**

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN LỚP

Hướng dẫn chấm môn toán

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 5,0 điểm	1 (3,0đ) Với điều kiện $a \geq 0$. Ta có: $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1}\right)$ $= \frac{a-2\sqrt{a}+1}{a+1} : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}\right)$ $= \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a+1} : \frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}$ $= \frac{(\sqrt{a}-1)^2(a+1)(1+\sqrt{a})}{(a+1)(\sqrt{a}-1)^2} = 1 + \sqrt{a}$	1,0 1,0 1,0
	2(2,0 đ) Khi $a = 2010 - 2\sqrt{2009} = (\sqrt{2009} - 1)^2$ Thì $A = 1 + \sqrt{(\sqrt{2009} - 1)^2} = \sqrt{2009}$	1,0 1,0
Câu 2 4,0 điểm	1 (2,0đ) Ta có $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8) = 28x^2$ $(x^2+9x+8)(x^2+8x+8) = 28x^2$ $+ x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) + Với $x \neq 0$ chia hai vế (1) cho x^2 ta được: $(1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{8}{x} + 6\right)\left(x + \frac{8}{x} + 9\right) = 28$ Đặt $t = x + \frac{8}{x}$ (1) trở thành $(t+6)(t+9) = 28 \Leftrightarrow t^2 + 15t + 26 = 0$	0,5

	$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -13 \end{cases}$ Với $t = -2$ ta có $x + \frac{8}{x} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 8 = 0$. PT này vô nghiệm. Với $t = -13$ ta có $x + \frac{8}{x} = -13 \Leftrightarrow x^2 + 13x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -13 \pm \sqrt{137}$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = -13 \pm \sqrt{137}$.	0,5 0,5 0,5
	2 (2,0 đ) Hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$ Hệ này tương đương với tuyển của hai hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \text{ (I) và } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \text{ (II)}$ * Giải hệ (I) có nghiệm $(x, y) = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ * Xét hệ (II) từ $x + y = -1$ ta có $y = -x - 1$ thay vào phương trình đầu của hệ (II) ta được $x^2 + x - 2 = 0$ Phương trình này có hai nghiệm: $x = -1$ và $x = 2$ Từ đó ta thấy hệ (II) có hai nghiệm: $(1; -2); (2; -1)$ Kết luận: Hệ đã cho có nghiệm (x, y) là: $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}); (1; -2); (2; -1)$	0,5 0,5 0,25 0,5 0,25
Câu 3 4,0 điểm	1(2,0đ): Ta có: $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32) \Leftrightarrow x^6 + (y - x^3)^2 = 64$ $\Rightarrow x^6 \leq 64 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$ do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; -2; 1; 0; 1; 2\}$ Xét các trường hợp: + $x = 2 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 0 \Rightarrow y = 8$ + $x = 1 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 63 \Rightarrow y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ pt này không có nghiệm nguyên + $x = 0 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 4 \Rightarrow y = 8$ và $y = -8$ + $x = -1 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 63 \Rightarrow y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ pt này không có nghiệm nguyên + $x = -2 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 0 \Rightarrow y = -8$ Vậy nghiệm của phương trình là: $(0; 8); (0; -8); (2; 8); (-2; -8)$.	0,5 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	2(2,0đ) Ta có $\triangle AMB$ và $\triangle ANC$ vuông cân nên $MA = MB$ và $NA = NC$ Nên $BM + CN = AM + AN$	0,5

	Giả sử: $AB \geq AC$ Theo tính chất phân giác ta có $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} \leq 1$ $\triangle CDN$ và $\triangle BDM$ nên $\frac{DN}{DM} = \frac{DC}{DB} \leq 1 \Rightarrow DN \leq DM$ Nếu I là trung điểm của MN thì $AD \leq AI$ và $AM + AN = 2AI$ Khi đó $2AD \leq 2AI - AM + AN = BM + CN$ (đpcm)	0,5 0,5 0,5
Câu 4 5,0 điểm	1(1,0đ)  Đặt $\angle ACP = a \Rightarrow \angle ACN = 90^\circ - a$ $\angle MCN = \angle ACN - 45^\circ = 90^\circ - a - 45^\circ = 45^\circ - a = \angle LAM$	0,5 0,5
	2(2,0đ) Do $\triangle ABC$ vuông tại A mà AM là trung tuyến nên $AM = CM$ và $AL = CN$ (gt) $\angle MCN = \angle LAM$ (c/m trên) Nên $\triangle AML = \triangle CMN \Rightarrow LM = MN$ và $\angle AML = \angle CMN$ $\Rightarrow \angle LMN = 90^\circ - \angle AML + \angle CMN = 90^\circ$. Vậy tam giác $\triangle LMN$ vuông cân tại M	1,0 1,0
	3 (2,0đ) Do các $\triangle LMN, \triangle ABC$ vuông cân nên: $2 S_{\triangle LMN} = MN^2$ và $2 S_{\triangle ABC} = AC^2$ $S_{\triangle ABC} = 4 S_{\triangle LMN}$ (gt) Từ đó suy ra $MN = \frac{1}{2} AC$. Gọi Q là trung điểm của AC thì $QM = QN = \frac{1}{2} AC = MN$ $\Rightarrow \angle QMN = 60^\circ$ và $\angle QNA = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Mặt khác $AQ = NQ$ nên $\angle CAP = \angle QNA = 15^\circ$	1,0 1,0

PHÒNG GD & ĐT THÀNH PHỐ
THANH HÓA

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2016 - 2017

Môn Toán: Lớp 9

ĐỀ CHÍNH

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 5 2,0 điểm	Ta có: $\frac{a^2 + b^2}{ a - b } = \frac{(a - b)^2 - 2ab}{ a - b } = a - b + \frac{12}{ a - b }$	1,0
	Áp dụng bất đẳng thức Côsi : $a - b + \frac{12}{ a - b } \geq 2 \sqrt{ a - b \cdot \frac{12}{ a - b }} = 4\sqrt{3}$	1,0

Bài 1: (5,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

b) Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$

b) Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB. Gọi E là giao điểm của CN và DA. Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F. Lấy M là trung điểm của EF.

a) Chứng minh: CM vuông góc với EF.

b) Chứng minh: $NB \cdot DE = a^2$ và B, D, M thẳng hàng.

c) Tìm vị trí của N trên AB sao cho diện tích của tứ giác AEFC gấp 3 lần diện tích của hình vuông ABCD

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

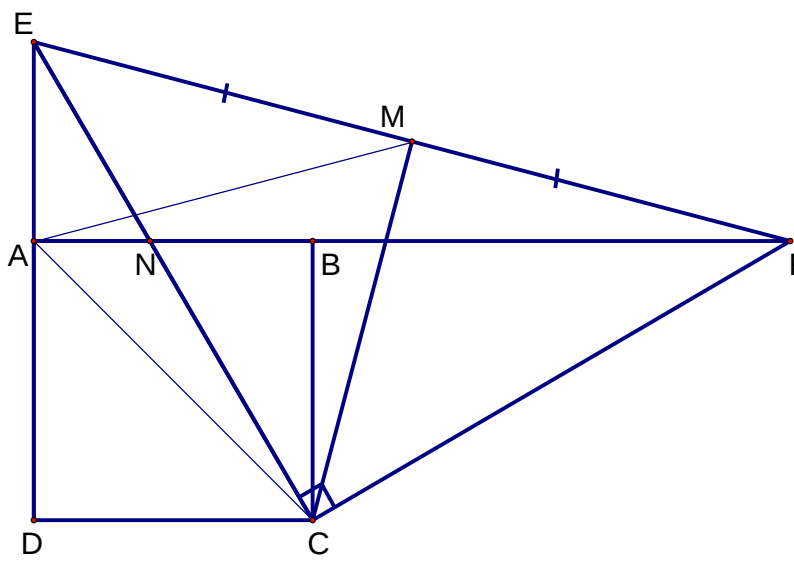
----- Hết -----

Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9

Bài	Câu	Nội dung	Điểm
1	a	Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.	0,5

2	a $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$ $\Leftrightarrow 2y^2x + x + y + 1 - x^2 - 2y^2 - xy = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(2y^2 - y - x) = -1$ Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 1 \in U(-1) = \{1; -1\}$ +) Nếu $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$ Khi đó $2y^2 - y - 2 = -1$ $\Leftrightarrow y = 1 \text{ (t/m) hoặc } y = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$ +) Nếu $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$ Khi đó $2y^2 - y = 1$ $\Leftrightarrow y = 1 \text{ (t/m) hoặc } y = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$ Vậy $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$	0,5 0,25 0,5 0,5 0,25
	b a) Từ giả thiết $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ $\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 0$ Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a + b + c = 0$ $\Rightarrow a + b = -c$ $\Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ Vậy $a^3 + b^3 + c^3 : 3$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ <u>Lưu ý:</u> Nếu học sinh sử dụng hằng đẳng thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ mà không chứng minh thì trừ 0,5 điểm.	0,5 0,5 0,5 0,25 0,25
3	a Đkxđ: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$ Vì $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} \geq 0$ với $\forall x$ $\Rightarrow 10x - 20 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$	0,25 0,5

		Ta có: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$ $\Leftrightarrow 2x + 5 + x + 3 = 10x - 20$ $\Leftrightarrow 2x + 5 + x + 3 = 10x - 20$ $\Leftrightarrow 7x = 28$ $\Leftrightarrow x = 4(t / m)$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$	0,5
			0,5
			0,25
	b	$x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0.$ $\Leftrightarrow (x + y)^2 + 7(x + y) + 10 = -y^2$ $\Leftrightarrow (x + y + 2)(x + y + 5) = -y^2 \leq 0$ $\Leftrightarrow -4 \leq x + y + 1 \leq -1$ * $x + y + 1 = -4$ khi $x = -5; y = 0$ * $x + y + 1 = -1$ khi $x = -2; y = 0$ Vậy $A_{\min} = -4$ khi $x = -5; y = 0$ $A_{\max} = -1$ khi $x = -2; y = 0$	0,5
4	a	 Ta có: $\angle ECD = \angle BCF$ (cùng phụ với $\angle ECB$) Chứng minh được: $\triangle EDC = \triangle FBC$ (cạnh góc vuông – góc nhọn) $\Rightarrow CE = CF$ $\Rightarrow \triangle ECF$ cân tại C Mà CM là đường trung tuyến nên $CM \perp EF$	1,0
	b	* Vì $\triangle EDC = \triangle FBC \Rightarrow ED = FB$ $\triangle NCF$ vuông tại C. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông	0,5

	ta có: $BC^2 = NB.BF \Rightarrow a^2 = NB.DE \text{ (đpcm)}$ * ΔCEF vuông tại C có CM là đường trung tuyến nên $CM = \frac{EF}{2}$ ΔAEF vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên $AM = \frac{EF}{2}$ $\Rightarrow CM = AM \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AC. Vì ABCD là hình vuông nên B, D thuộc đường trung trực của AC $\Rightarrow B, D, M$ thẳng hàng vì cùng thuộc đường trung trực của AC (đpcm).	0,5 0,5 0,5
c	Đặt $DE = x \ (x > 0) \Rightarrow BF = x$ $S_{ACFE} = S_{ACF} + S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot (AE + CB)$ $= \frac{1}{2} (AB + BF) \cdot (AE + AD)$ $= \frac{1}{2} (a + x).DE$ $= \frac{1}{2} (a + x)x$ $S_{ACFE} = 3.S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} (a + x)x = 3a^2 \Leftrightarrow 6a^2 - ax - x^2 = 0$ $\Leftrightarrow (2a - x)(3a + x) = 0$ Do $x > 0; a > 0 \Rightarrow 3a + x > 0 \Rightarrow 2a - x = 0 \Leftrightarrow x = 2a$ $\Leftrightarrow A$ là trung điểm của DE $\Leftrightarrow AE = a$ Vì $AE \parallel BC$ nên $\frac{AN}{NB} = \frac{AE}{BC} = 1$ $\Rightarrow N$ là trung điểm của AB. Vậy với N là trung điểm của AB thì $S_{ACFE} = 3.S_{ABCD}$	0,5 0,25 0,5 0,5 0,25
5	* Vì $a, b, c > 0$ nên $\frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$. Tương tự: $\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}; \quad \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$ $\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 \quad (1)$	0,5

* Ta có: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$ Vì $a, b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức Cô- si ta có: $\frac{a + (b+c)}{2} \geq \sqrt{a(b+c)} > 0$ $\Leftrightarrow \frac{2}{a+b+c} \leq \frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}$ $\Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{a}{b+c}}$ Tương tự: $\frac{2b}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{b}{a+c}}; \quad \frac{2c}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{c}{b+a}}$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$ Dấu ‘=’ xảy ra khi $a = b + c; b = c + a; c = a + b$ tức là $a = b = c$ (vô lý). $\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2 \quad (2)$ Từ (1) (2) ta có đpcm.	0,5
---	-----

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HOÁ**

Đề chính thức

Số báo danh

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
Năm học 2010- 2011**

Môn thi: Toán

Lớp: 9 THCS

Thời gian: **150** phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 24/03/2011

(Đề thi có 01 trang, gồm 05 câu).

Câu I. (5,0 điểm).

1) Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm

x_1, x_2 với mọi m . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$ khi m thay đổi.

2) (a). Cho ba số hữu tỉ a, b, c thoả mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng $A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ là số hữu tỉ.

(b). Cho ba số hữu tỉ x, y, z đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$B = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}} \text{ là số hữu tỉ.}$$

Câu II. (5,0 điểm). 1) Giải phương trình: $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}.$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y}\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ x^3 + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4. \end{cases}$$

Câu III. (2,0 điểm). Cho tam giác đều ABC, các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh AC, AB, sao cho BD, CE cắt nhau tại P và diện tích tứ giác ADPE bằng diện tích tam giác BPC.

Tính BPE .

Câu IV. (4,0 điểm). Cho đường tròn tâm O và dây cung AB cố định ($O \notin AB$). P là điểm di động trên đoạn thẳng AB ($P \neq A, B$ và P khác trung điểm AB). Đường tròn tâm C đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Đường tròn tâm D đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại N ($N \neq P$).

- 1) Chứng minh rằng $ANP = BNP$ và bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.
- 2) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn ON luôn đi qua điểm cố định khi P di động.

Câu V. (4,0 điểm).

- 1) Cho $a_1, a_2, \dots, a_{45}$ là 45 số tự nhiên dương thoả mãn $a_1 < a_2 < \dots < a_{45} \leq 130$. Đặt $d_j = a_{j+1} - a_j$, ($j = 1, 2, \dots, 44$). Chứng minh rằng ít nhất một trong 44 hiệu d_j xuất hiện ít nhất 10 lần.

- 2) Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = \sqrt{2011}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2011}{2}}.$

..... **HẾT**

Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

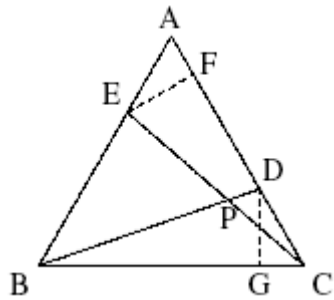
SỞ GD & ĐT THANH HOÁ
HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ CHÍNH THỨC

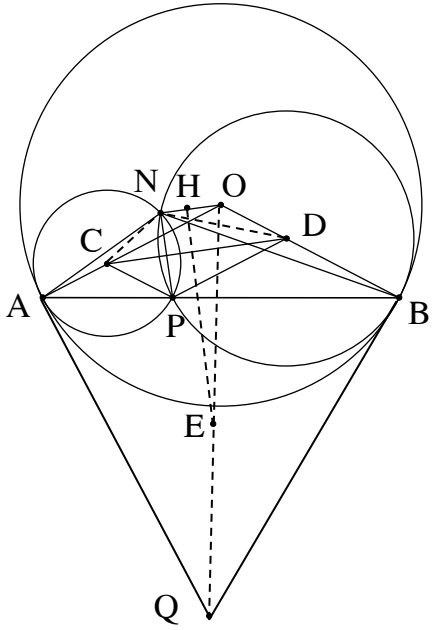
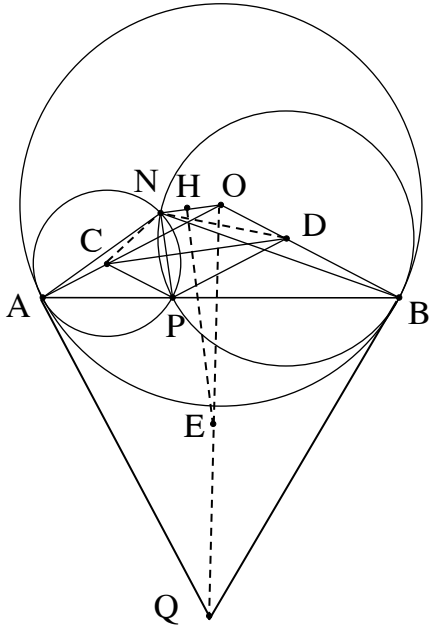
(Gồm có 3 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
NĂM HỌC 2010 - 2011
MÔN THI: TOÁN
LỚP: 9 THCS

Ngày thi: 24 - 3 - 2011

Câu	Ý	Hướng dẫn chấm	Điểm
Câu I 6 đ	1) 2,5đ	Ta có $\Delta' = (m-1)^2 \geq 0, \forall m$ nên phương trình có hai nghiệm với mọi m .	0,5
		Theo định lí Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2m, x_1 x_2 = 2m - 1$, suy ra $P = \frac{4m+1}{4m^2+2}$	1,0
		$= 1 - \frac{(2m-1)^2}{4m^2+2} \leq 1$. $\text{Max } P = 1$, khi $m = \frac{1}{2}$.	1,0

	2a) 1,5đ	Từ giả thiết suy ra $2ab - 2bc - 2ca = 0$	0,5
		Suy ra $A = \sqrt{(a+b-c)^2} = a+b-c $ là số hữu tỉ	1,0
	2b) 1,0đ	Đặt $a = \frac{1}{x-y}, b = \frac{1}{y-z}, c = \frac{1}{x-z}$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.	0,5
		Áp dụng câu 2a) suy ra $B = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}$ là số hữu tỉ.	0,5
Câu II 6 đ	1) 2,5đ	Đk: $x \neq \pm 1$. Phương trình tương đương với $\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right)^2 - 2\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{10}{9} = 0.$	1,0
		Đặt $t = \frac{2x^2}{x^2-1}$, ta được phương trình $t^2 - t - \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}$ hoặc $t = -\frac{2}{3}$	0,5
		Với $t = \frac{5}{3}$, ta được $\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{5}{3}$ (vô nghiệm)	0,5
		Với $t = -\frac{2}{3}$, ta được $\frac{2x^2}{x^2-1} = -\frac{2}{3}$ suy ra $x = \pm \frac{1}{2}$.	0,5
	2) 2,5đ	Đk: $y \neq 0$. Hệ tương đương với $\begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} + x + \frac{1}{y} = 4 \\ x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{x}{y} \left(x + \frac{1}{y}\right) = 4. \end{cases}$	0,5
		Đặt $\begin{cases} u = x + \frac{1}{y} \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases} u^2 + u - 2v = 4 \\ u^3 - 2uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 4u + 4 = 0 \\ u^2 + u - 4 = 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1. \end{cases}$	1,0
		Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1, \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)	1,0
Câu III 2đ		Kẻ $EF \perp AC$ tại F, $DG \perp BC$ tại G. Theo giả thiết $S_{(ADPE)} = S_{(BPC)}$ $\Rightarrow S_{(ACE)} = S_{(BCD)}$.	0,5
		Mà $AC = BC \Rightarrow EF = DG$ và $A = C$ Suy ra $\triangle AEF = \triangle CDG \Rightarrow AE = CG$.	0,5
		Do đó $\triangle AEC = \triangle CDB (c - g - c) \Rightarrow DBC = ECA$	0,5
		$\Rightarrow BPE = PBC + PCB = PCD + PCB = 60^\circ$	0,5
			

Câu IV 4,0đ	1) 3,0đ	Gọi Q là giao điểm của các tiếp tuyến chung của (O) với (C), (D) tại A, B tương ứng. Suy ra $ANP = QAP = QBP = BNP$.		1,0
		Ta có $ANB = ANP + BNP = QAP + QBP$ $= 180^\circ - AQB$, suy ra NAQB nội tiếp (1).		0,5
		Dễ thấy tứ giác OAQB nội tiếp (2) Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm O, N, A, Q, B cùng nằm trên một đường tròn.		0,5
		Suy ra các điểm O, N, A, B cùng nằm trên một đường tròn.		0,5
		Ta có $OCN = 2OAN = 2OBN = ODN$, suy ra bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.		0,5
	2) 1,0đ	Gọi E là trung điểm OQ, suy ra E cố định và E là tâm đường tròn đi qua các điểm N, O, D, C. Suy ra đường trung trực của ON luôn đi qua điểm E cố định.		1,0
Câu V 2đ	1) 2,0đ	$d_1 + d_2 + \dots + d_{44} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{45} - a_{44}) = a_{45} - a_1 \leq 130 - 1 = 129$. (1) Nếu mỗi hiệu d_j ($j = 1, 2, \dots, 44$) xuất hiện không quá 10 lần thì $d_1 + d_2 + \dots + d_{44} \geq 9(1 + 2 + 3 + 4) + 8.5 = 130$ mâu thuẫn với (1). Vậy phải có ít nhất một hiệu d_j ($j = 1, \dots, 44$) xuất hiện không ít hơn 10 lần		0,5
	2) 2,0đ	Ta có $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$. Suy ra $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}}$		0,5
		Đặt $x = \sqrt{b^2 + c^2}$, $y = \sqrt{c^2 + a^2}$, $z = \sqrt{a^2 + b^2}$, suy ra $VT \geq \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2\sqrt{2}x} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2\sqrt{2}y} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2\sqrt{2}z}$ $\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} - x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} - y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} - z \right) \right]$		1,0

		$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} + 2x - 3x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} + 2y - 3y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} + 2z - 3z \right) \right]$ $\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} [(2(y+z) - 3x) + (2(z+x) - 3y) + (2(x+y) - 3z)]$ Suy ra $VT \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2011}{2}}$	0,5
--	--	---	-----

GHI CHÚ: Nếu học sinh giải cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.

PHÒNG GD & ĐT THÀNH PHỐ
THANH HÓA

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2016 - 2017

Môn Toán: Lớp 9

(Thời gian làm bài: 150 phút)

ĐỀ CHÍNH

Bài 1: (5,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

b) Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Bài 3: (4,0 điểm)

c) Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$

d) Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB. Gọi E là giao điểm của CN và DA. Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F. Lấy M là trung điểm của EF.

d) Chứng minh: CM vuông góc với EF.

e) Chứng minh: $NB \cdot DE = a^2$ và B, D, M thẳng hàng.

f) Tìm vị trí của N trên AB sao cho diện tích của tứ giác AEFC gấp 3 lần diện tích của hình vuông ABCD

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

----- Hết -----

Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9

Bài	Câu	Nội dung	Điểm
1	a	Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.	0,5
		$P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$	0,5
		$= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$	0,5
		$= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$	0,5
		$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$	0,5
		$= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$	
	b	Với $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có:	
		$P = \frac{2}{7}$	0,5
		$\Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7}$	1,0
		$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7$	0,25
		$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0$	0,25
	c	$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$	
		Vì $\sqrt{x}+3 > 0$ nên $\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow x=4$ (t/m)	
		Vậy $P = \frac{2}{7}$ khi $x=4$	
	c	Vì $x \geq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1 \geq 1$	0,25
			0,25

		$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 2$ $\Leftrightarrow 0 < P \leq 2$ $\Leftrightarrow P(P - 2) \leq 0$ $\Leftrightarrow P^2 - 2P \leq 0$ $\Leftrightarrow P^2 \leq 2P$ Dấu “=” xảy ra khi $P = 2 \Leftrightarrow x = 0$ Vậy $P^2 \leq 2P$	0,25 0,25
2	a	$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$ $\Leftrightarrow 2y^2x + x + y + 1 - x^2 - 2y^2 - xy = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(2y^2 - y - x) = -1$ Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 1 \in U(-1) = \{1; -1\}$ +) Nếu $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$ Khi đó $2y^2 - y - 2 = -1$ $\Leftrightarrow y = 1 \text{ (t/m) hoặc } y = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$ +) Nếu $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$ Khi đó $2y^2 - y = 1$ $\Leftrightarrow y = 1 \text{ (t/m) hoặc } y = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$ Vậy $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$	0,5 0,25 0,5 0,5 0,25
	b	b) Từ giả thiết $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ $\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 0$ Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a + b + c = 0$ $\Rightarrow a + b = -c$ $\Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ Vậy $a^3 + b^3 + c^3 : 3$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$	0,5 0,5 0,5 0,25 0,25

		<u>Lưu ý:</u> Nếu học sinh sử dụng hằng đẳng thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ mà không chứng minh thì trừ 0,5 điểm.	
3	a	Đkxđ: $\forall x \in R$ $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$ Vì $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} \geq 0$ với $\forall x$ $\Rightarrow 10x - 20 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ Ta có: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$ $\Leftrightarrow 2x + 5 + x + 3 = 10x - 20$ $\Leftrightarrow 2x + 5 + x + 3 = 10x - 20$ $\Leftrightarrow 7x = 28$ $\Leftrightarrow x = 4(t / m)$ Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$	0,25 0,5 0,5 0,5 0,25
	b	$x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0.$ $\Leftrightarrow (x + y)^2 + 7(x + y) + 10 = -y^2$ $\Leftrightarrow (x + y + 2)(x + y + 5) = -y^2 \leq 0$ $\Leftrightarrow -4 \leq x + y + 1 \leq -1$ * $x + y + 1 = -4$ khi $x = -5; y = 0$ * $x + y + 1 = -1$ khi $x = -2; y = 0$ Vậy $A_{\min} = -4$ khi $x = -5; y = 0$ $A_{\max} = -1$ khi $x = -2; y = 0$	0,5 0,5 0,5 0,5
4	a		1,0

	Ta có: $ECD = BCF$ (cùng phụ với ECB) Chứng minh được: $\triangle EDC = \triangle FBC$ (cạnh góc vuông – góc nhọn) $\Rightarrow CE = CF$ $\Rightarrow \triangle ECF$ cân tại C Mà CM là đường trung tuyến nên $CM \perp EF$	1,0
b	* Vì $\triangle EDC = \triangle FBC \Rightarrow ED = FB$ $\triangle NCF$ vuông tại C. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $BC^2 = NB.BF \Rightarrow a^2 = NB.DE$ (đpcm) * $\triangle CEF$ vuông tại C có CM là đường trung tuyến nên $CM = \frac{EF}{2}$ $\triangle AEF$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên $AM = \frac{EF}{2}$ $\Rightarrow CM = AM \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AC. Vì ABCD là hình vuông nên B, D thuộc đường trung trực của AC $\Rightarrow B, D, M$ thẳng hàng vì cùng thuộc đường trung trực của AC (đpcm).	0,5 0,5 0,5 0,5
c	Đặt $DE = x$ ($x > 0$) $\Rightarrow BF = x$ $S_{ACFE} = S_{ACF} + S_{AEF} = \frac{1}{2}AF \cdot (AE + CB)$ $= \frac{1}{2}(AB + BF) \cdot (AE + AD)$ $= \frac{1}{2}(a + x).DE$ $= \frac{1}{2}(a + x)x$ $S_{ACFE} = 3.S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a + x)x = 3a^2 \Leftrightarrow 6a^2 - ax - x^2 = 0$ $\Leftrightarrow (2a - x)(3a + x) = 0$ Do $x > 0; a > 0 \Rightarrow 3a + x > 0 \Rightarrow 2a - x = 0 \Leftrightarrow x = 2a$ $\Leftrightarrow A$ là trung điểm của DE $\Leftrightarrow AE = a$ Vì $AE \parallel BC$ nên $\frac{AN}{NB} = \frac{AE}{BC} = 1$ $\Rightarrow N$ là trung điểm của AB.	0,5 0,25 0,5 0,5 0,25

KỲ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN
CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2008-2009
ĐỀ THI VÒNG II

(Thời gian làm bài 120 phút)

Bài 1: (2 điểm) Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$; a, b, c đôi một khác nhau.

Chúng minh rằng $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$ bằng bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2: (2 điểm) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5^x + 2 \cdot 5^y + 5^z = 4500$ với $x < y < z$.

Bài 3: (2 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$

Bài 4: (2 điểm) Tìm một số có hai chữ số; biết rằng số đó chia hết cho 3 và nếu thêm số 0 vào giữa các chữ số rồi cộng vào số mới tạo thành một số bằng hai lần chữ số hàng trăm của nó thì được một số lớn gấp 9 lần số phải tìm.

Bài 5: (2 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A, có góc $BAC = 20^\circ$. Trên AC lấy điểm E sao cho góc $EBC = 20^\circ$. cho $AB = AC = b$, $BC = a$

a) Tính CE.

b) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Hướng dẫn và thang điểm chấm Toán vòng 2

Kỳ thi học sinh giỏi cấp huyện năm học 2008-2009

Bài 1: (2 điểm)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \\ & = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-c} \cdot \frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-a} \cdot \frac{1}{a-b} \right) \quad (1đ) \\ & = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 - 2 \frac{c-a+b-c+a-b}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad (0.5đ) \\ & = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 \quad (0.5đ) \end{aligned}$$

Bài 2: (2 điểm) $5^x + 2.5^y + 5^z = 4500$ (*)

$$\begin{aligned} & 5^x (1 + 2.5^{y-x} + 5^{z-x}) = 4500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \quad (0.5đ) \\ & \Rightarrow 5^x = 5^3; 1 + 2.5^{y-x} + 5^{z-x} = 36 = 1 + 35 \quad (0.5đ) \\ & \Rightarrow x = 3; 5^{y-x} (2 + 5^{z-y}) = 5 \cdot 7 \quad (0.25đ) \\ & \Rightarrow x = 3; y - 3 = 1; 2 + 5^{z-y} = 7 = 2 + 5 \quad (0.25đ) \\ & \Rightarrow x = 3; y = 4; z - y = 1 \quad (0.25đ) \\ & \Rightarrow x = 3; y = 4; z = 5 \text{ thỏa } (*) \quad (0.25đ) \end{aligned}$$

Bài 3: (2 điểm)

$$\begin{aligned} A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2} &= 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (0.5đ) \\ &= -3 + \left(4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \quad (0.5đ) \\ &= -3 + \left(2 - \frac{1}{x} \right)^2 \geq -3 \quad (0.5đ) \end{aligned}$$

$$\text{Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi } \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad (0.5đ)$$

Bài 4: (2 điểm)

$$\text{Gọi số cần tìm là } \overline{ab}. \text{ Ta có: } \overline{ab} : 3 \text{ và } \overline{a0b} + 2a = 9\overline{ab} \quad (0.25đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b) : 3 \\ 100a + b + 2a = 9(10a + b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b) : 3 \\ 3a = 2b \end{cases} \quad (0.5đ)$$

$$\text{Từ } 3a = 2b \Rightarrow 2b : 3 \text{ mà } (2,3) = 1 \Rightarrow b : 3 \text{ do } (a+b) : 3 \Rightarrow a : 3 \text{ mà } 3a : 2 \Rightarrow a : 2 \quad (0.5đ)$$

$$\text{Ta có } a : 3, a : 2, (2,3) = 1 \Rightarrow a : 6, 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 9 \text{ Vậy } \overline{ab} = 69 \quad (0.5đ)$$

Bài 5: (2 điểm)

a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác BCE (hai tam giác cân có góc đỉnh bằng 20° và góc đáy bằng 80°) nên $\frac{CE}{BC} = \frac{BC}{AB}$ (0.5đ)

Và $BE = BC = a$, suy ra $CE = \frac{a^2}{b}$ (0.5đ)

b) Đặt $AD \perp BE$, suy ra $BD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} b$

ta có: $AE^2 = ED^2 + AD^2$, $AB^2 = BD^2 + AD^2$ do đó

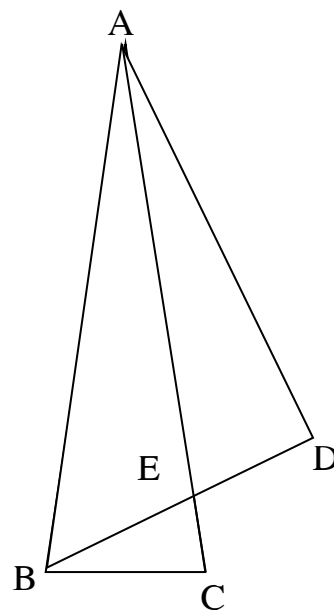
$$AB^2 = BD^2 + EA^2 - DE^2 \quad (0.5đ)$$

Thay vào ta được: $b^2 = \frac{b^2}{4} + \left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - a\right)^2$

$$= \frac{b^2}{4} + b^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2a^2 - \frac{b^2}{4} - a^2 + ab$$

$$\Leftrightarrow b^4 = b^4 + a^4 - 3a^2b^2 + ab^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2 \quad (0.5đ)$$



**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KÌ THI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2012- 2013**

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút

Đề thi gồm : 01 trang

Câu I (2,0 điểm)

3) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $a^2(b-2c)+b^2(c-a)+2c^2(a-b)+abc$.

4) Cho x, y thỏa mãn $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^4 + x^3y + 3x^2 + xy - 2y^2 + 1$.

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $(x^2 - 4x + 11)(x^4 - 8x^2 + 21) = 35$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012}) = 2012 \\ x^2 + z^2 - 4(y+z) + 8 = 0 \end{cases}$$
.

Câu III (2,0 điểm)

1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $(n^2 + n + 1)$ không chia hết cho 9.

2) Xét phương trình $x^2 - mx + 2m + 2 = 0$ (1) (ẩn x). Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình (1) có nghiệm nguyên.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC; BO cắt EF tại I. M là điểm di chuyển trên đoạn CE.

1) Tính BIF.

2) Gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng nếu $AM = AB$ thì tứ giác ABHI nội tiếp.

3) Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

Câu V (1,0 điểm)

Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = (a+b+c+3) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right)$.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....
 Chữ kí của giám thị 1: Chữ kí của giám thị 2:

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
 HẢI DƯƠNG**

**KÌ THI HỌC SINH GIỎI
 NĂM HỌC 2012 - 2013**

HƯỚNG DẪN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM MÔN TOÁN (chuyên) **Hướng dẫn chấm gồm : 03 trang**

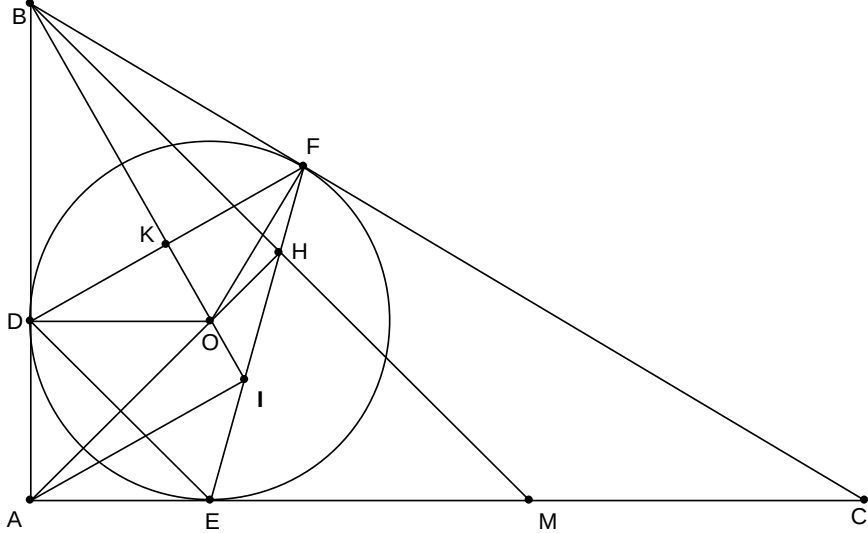
I) HƯỚNG DẪN CHUNG.

- Thí sinh làm bài theo cách riêng nhưng đáp ứng được yêu cầu cơ bản vẫn cho đủ điểm.
- Việc chi tiết điểm số (nếu có) so với biểu điểm phải được thống nhất trong Hội đồng chấm.
- Sau khi cộng điểm toàn bài, điểm lẻ đến 0,25 điểm.

II) ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I (2,0đ)		
1) 1,0 điểm	$a^2(b-2c) + b^2(c-a) + 2c^2(a-b) + abc = 2c^2(a-b) + ab(a-b) - c(a^2 - b^2) - ac(a-b)$	0,25
	$= (a-b)[2c^2 - 2ac + ab - bc]$	0,25
	$= (a-b)[2c(c-a) + b(a-c)]$	0,25
	$= (a-b)(a-c)(b-2c)$	0,25
2) 1,0 điểm	Có $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$ $\Rightarrow x^3 = 2y + 3\sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} \cdot \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}} \left(\sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}} \right)$	0,25
	$\Rightarrow x^3 + 3x - 2y = 0$	0,25
	$A = x^4 + x^3y + 3x^2 - 2xy + 3xy - 2y^2 + 1 = (x^4 + 3x^2 - 2xy) + (x^3y + 3xy - 2y^2) + 1$	0,25
	$= x(x^3 + 3x - 2y) + y(x^3 + 3x - 2y) + 1 = 1$	0,25

Câu II (1,0đ)		
1)1,0 điểm	phương trình đã cho tương đương với $[(x-2)^2 + 7][(x^2 - 4)^2 + 5] = 35$ (1)	0,25
	Do $\left. \begin{matrix} (x-2)^2 + 7 \geq 7 \forall x \\ (x^2 - 4)^2 + 5 \geq 5 \forall x \end{matrix} \right\} \Rightarrow [(x-2)^2 + 7][(x^2 - 4)^2 + 5] \geq 35 \forall x$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + 7 = 7 \\ (x^2 - 4)^2 + 5 = 5 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow x=2$	0,25
2)1,0 điểm	$\begin{cases} (x+\sqrt{x^2+2012})(y+\sqrt{y^2+2012}) = 2012 & (1) \\ x^2 + z^2 - 4(y+z)+8=0 & (2) \end{cases}$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow (x+\sqrt{x^2+2012})(y+\sqrt{y^2+2012})(\sqrt{y^2+2012}-y) = 2012(\sqrt{y^2+2012}-y)$ (Do $\sqrt{y^2+2012}-y \neq 0 \forall y$)	
	$\Leftrightarrow (x+\sqrt{x^2+2012})2012 = 2012(\sqrt{y^2+2012}-y) \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+2012} = \sqrt{y^2+2012}-y$	
	$\Leftrightarrow x+y = \sqrt{y^2+2012}-\sqrt{x^2+2012}$	
	$\Leftrightarrow x+y = \frac{(\sqrt{y^2+2012}-\sqrt{x^2+2012})(\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012})}{\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}}$	
	$\Leftrightarrow x+y = \frac{y^2-x^2}{\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}} \Leftrightarrow (x+y) \frac{\sqrt{y^2+2012}-y+\sqrt{x^2+2012}+x}{\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}} = 0$	
	Do $\left. \begin{matrix} \sqrt{y^2+2012} > y \geq y \forall y \\ \sqrt{x^2+2012} > x \geq -x \forall x \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sqrt{y^2+2012}-y+\sqrt{x^2+2012}+x > 0 \Rightarrow y = -x$	0,25
	Thay $y=-x$ vào(2) $\Rightarrow x^2 + z^2 + 4x - 4z + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (z-2)^2 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ (z-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -x = 2$ Vậy hệ có nghiệm $(x;y;z)=(-2;2;2)$.	0,25
Câu III (2,0đ)		
1)1,0 điểm	Đặt $A = n^2 + n + 1$ do $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 3k; n = 3k + 1; n = 3k + 2 (k \in \mathbb{Z})$	0,25
	* $n = 3k \Rightarrow A$ không chia hết cho 9 (vì A không chia hết cho 3)	0,25
	* $n = 3k + 1 \Rightarrow A = 9k^2 + 9k + 3$ không chia hết cho 9.	0,25
	* $n = 3k + 2 \Rightarrow A = 9k^2 + 9k + 7$ không chia hết cho 9 Vậy với mọi số nguyên n thì $A = n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.	0,25
2)1,0 điểm	Giả sử tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ để phương trình đã nghiệm x_1, x_2 Theo Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m^2 \\ x_1 x_2 = 2m + 2 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = -m^2 + 2m + 3$	0,25

	Với $m \in \mathbb{N}^*$. Ta cần $x_1 x_2 \geq 4$ và $x_1 + x_2 \geq 1$ mà x_1 hoặc x_2 nguyên và $x_1 + x_2 = m^2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0$ $\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (m + 1)(m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 3 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$	0,25
	Với $m = 1; m = 2$ thay vào ta thấy phương trình (*) cho v« nghiệm.	0,25
	Với $m = 3$ thay vào phương trình ta được nghiệm của phương trình (*) cho $x = 1; x = 8$ thỏa mãn. Vậy $m = 3$	0,25
Câu IV (2,0đ)		
1) 1,0 điểm	Vẽ hình đúng theo yêu cầu chung của đề 	0,25
	Gọi K là giao điểm của BO với DF $\Rightarrow \Delta IKF$ vuông tại K	0,25
	Có $\angle DFE = \frac{1}{2} \angle DOE = 45^\circ$	0,25
	$\Rightarrow \angle BIF = 45^\circ$	0,25
2) 1,0 điểm	Khi $AM = AB$ thì ΔABM vuông cân tại A $\Rightarrow \angle DBH = 45^\circ$. Có $\angle DFH = 45^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác BDHF nội tiếp $\Rightarrow$ 5 điểm B, D, O, H, F cùng thuộc một đường tròn. $\Rightarrow \angle BFO = \angle BHO = 90^\circ \Rightarrow OH \perp BM$, mà $OA \perp BM \Rightarrow A, O, H$ thẳng hàng $\angle BAH = \angle BIH = 45^\circ \Rightarrow$ Tứ giác ABHI nội tiếp.	0,25
		0,25
		0,25
		0,25

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề gồm 1 trang)

NĂM HỌC: 2011 - 2012

Môn thi: TOÁN 9

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian

giao đề)

Câu 1. Cho biểu thức: $P = \frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

- Rút gọn P .
- Tính P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.
- Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. Giải phương trình:

- $x^2 - 10x + 27 = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4}$
- $x^2 - 2x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4 = 0$

Câu 3.

- Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$
- Cho $x > 1; y > 0$, chứng minh: $\frac{1}{(x-1)^3} + \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + \frac{1}{y^3} \geq 3\left(\frac{3-2x}{x-1} + \frac{x}{y}\right)$
- Tìm số tự nhiên n để: $A = n^{2012} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Câu 4.

Cho hình vuông ABCD, có độ dài cạnh bằng a . E là một điểm di chuyển trên CD (E khác C, D). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

a. Chứng minh: $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2}$ không đổi

b. Chứng minh: $\cos AKE = \sin EKF \cdot \cos EFK + \sin EFK \cdot \cos EKF$

c. Lấy điểm M là trung điểm đoạn AC. Trình bày cách dựng điểm N trên DM sao cho khoảng cách từ N đến AC bằng tổng khoảng cách từ N đến DC và AD.

Câu 5.

Cho ABCD là hình bình hành. Đường thẳng d đi qua A không cắt hình bình hành, ba điểm H, I, K lần lượt là hình chiếu của B, C, D trên đường thẳng d . Xác định vị trí đường thẳng d để tổng: $BH + CI + DK$ có giá trị lớn nhất.

Hết./.

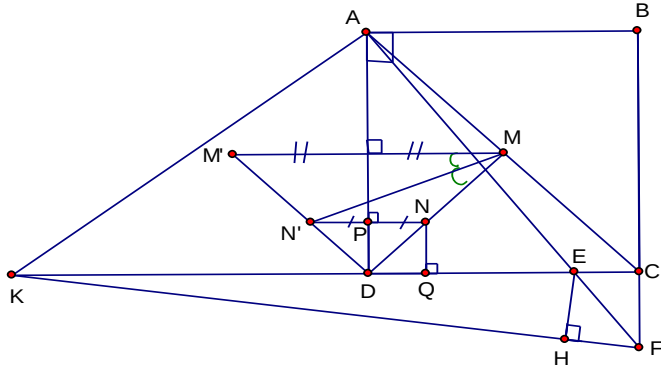
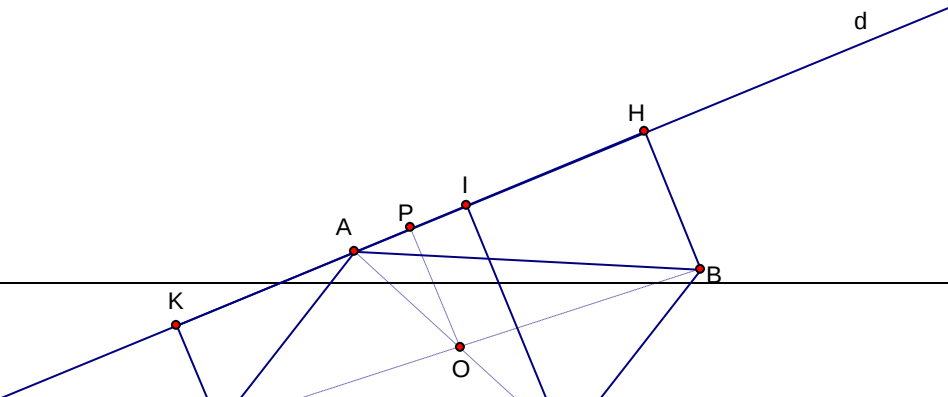
TOÁN 9.

Thời gian: 150 phút(không kể thời

gian giao đề)

Câu	Ý	Nội dung cần đạt	Điểm	
1	a	$P = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$ $= \frac{x(\sqrt{x}+2) + 2(\sqrt{x}-1) + x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} - 2 + x + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$ $= \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}$	0,2 5	2,2
	b	$x = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1$ $P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$	0,2 5	
	c	ĐK: $x > 0; x \neq 1$: $P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ Học sinh lập luận để tìm ra $x = 4$ hoặc $x = 9$	0,2 5	
2	a	ĐK: $4 \leq x \leq 6$: $VT = x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \geq 2, \text{ dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow x = 5$ $VP = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)((\sqrt{6-x})^2 + (\sqrt{x-4})^2)} \Leftrightarrow VP \leq 2, \text{ dấu "}" xảy ra}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{6-x}} = \frac{1}{\sqrt{x-4}} \Rightarrow 6-x = x-4 \Leftrightarrow x = 5$ $VT = VP \Leftrightarrow x = 5$ (TMĐK), Vậy nghiệm của phương trình: $x = 5$	0,2 5	1,7

		ĐK: $x \geq 0$. Nhận thấy: $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế cho x ta có: $x^2 - 2x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2 - \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{4}{x}\right) - \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) - 2 = 0$ Đặt $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x + 4 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} = t^2 - 4$, thay vào ta có: $\Leftrightarrow (t^2 - 4) - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \end{cases}$ Đổi chiều ĐK của t $\Rightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$	0.7 5	
	a	$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 = (x + 1)(x + 2) \quad (*)$ VT của (*) là số chính phương; VP của (*) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0. $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$ Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y) = (-1; 1)$ hoặc $(x; y) = (-2; 2)$	0.5	
3	b	$x > 1; y > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0; y > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3} > 0; \frac{x-1}{y} > 0; \frac{1}{y^3} > 0$ Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số dương: $\frac{1}{(x-1)^3} + 1 + 1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^3} \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3} \geq \frac{3}{x-1} - 2 \quad (1)$ $\left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + 1 + 1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{y}\right)^3 \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 \geq \frac{3(x-1)}{y} - 2 \quad (2)$ $\frac{1}{y^3} + 1 + 1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{y^3} \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{1}{y^3} \geq \frac{3}{y} - 2 \quad (3)$ Từ (1); (2); (3): $\frac{1}{(x-1)^3} + \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + \frac{1}{y^3} \geq \frac{3}{x-1} - 6 + \frac{3(x-1)}{y} + \frac{3}{y}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3} + \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + \frac{1}{y^3} \geq \frac{3-6x+6}{x-1} + \frac{3x}{y} = 3\left(\frac{3-2x}{x-1} + \frac{x}{y}\right)$	0.7 5	2.0
	c	Xét $n = 0$ thì $A = 1$ không phải nguyên tố; $n = 1$ thì $A = 3$ nguyên tố. Xét $n > 1$: $A = n^{2012} - n^2 + n^{2002} - n + n^2 + n + 1$ $= n^2((n^3)^{670} - 1) + n \cdot ((n^3)^{667} - 1) + (n^2 + n + 1)$	0.2 5	

		Mà $(n^3)^{670} - 1$ chia hết cho $n^3 - 1$, suy ra $(n^3)^{670} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ Tương tự: $(n^3)^{667} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ Vậy A chia hết cho $n^2 + n + 1 > 1$ nên A là hợp số. Số tự nhiên cần tìm $n = 1$.	0.5	
			0.2 5	
	a	Học sinh c/m: $\triangle ABF = \triangle ADK$ (g.c.g) suy ra $AF = AK$ Trong tam giác vuông: KAE có AD là đường cao nên: $\frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} \text{ hay } \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} \text{ (không đổi)}$	0.5 0,5	
4	b	HS c/m $S_{KEF} = \frac{1}{2} KE.EF . \sin AEK = \frac{1}{2} KE.EF . \cos AKE$ Mặt khác: $S_{KEF} = \frac{1}{2} EH.KF = \frac{1}{2} EH.(KH + HF)$. Suy ra: $KE.EF . \cos AKE = EH.(KH + HF) \Leftrightarrow \cos AKE = \frac{EH.KH + EH.HF}{KE.EF}$: $\Leftrightarrow \cos AKE = \frac{EH}{EF} . \frac{KH}{EK} + \frac{EH}{KE} . \frac{HF}{EF} = \sin EFK . \cos EKF + \sin EKF . \cos EFK$	0,2 5 0,2 5 0,5	
	c	Giả sử đã dựng được điểm N thỏa mãn. $NP + NQ = MN$ Lấy N' đối xứng N; M' đối xứng M qua AD suy ra tam giác NN'M cân tại N $\Rightarrow MN'$ là phân giác của $DMM' \Rightarrow$ Cách dựng điểm N: - Dựng M' đối xứng M qua AD - Dựng phân giác DMM' cắt DM' tại N' - Dựng điểm N đối xứng N' qua AD Chú ý: Học sinh có thể không trình bày phân tích mà trình bày được cách dựng vẫn cho điểm tối đa.	0.2 5 0.2 5 0.2 5	3. 0
5			0.2 5	1. 0

		Gọi O giao điểm 2 đường chéo hình bình hành, kẻ OP vuông góc d tại P HS lập luận được $BH + CI + DK = 4OP$ Mà $OP \leq AO$ nên $BH + CI + DK \leq 4AO$. Vậy $\text{Max}(BH + CI + DK) = 4AO$ Đạt được khi $P \equiv A$ hay d vuông góc AC	0.2 5 0.2 5 0.2 5	
Học sinh làm các cách khác đúng với yêu cầu đề ra vẫn chấm điểm tối đa				

SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO
THANH HOÁ
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề gồm có 1 trang)

KỲ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2012 - 2013
Môn thi : TOÁN

Thời gian làm bài :150 phút

Câu 1: (2.0 điểm)

Cho biểu thức : $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$

1/ Rút gọn biểu thức A.

2/ Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

Câu 2 (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) : $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (d):

$$y = bx + 1$$

1/ Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm M(1; 2)

2/ Với a, b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M. Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc tọa độ)

Câu 3 (2.0 điểm)

1/ Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

2/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

Câu 4 (3.0 điểm) : Cho A là điểm cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ tiếp tuyến AP và AQ tới đường tròn (P và Q là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua O và vuông góc với OP cắt đường thẳng OQ tại M .

1/ Chứng minh rằng: $MO = MA$

2/ Lấy điểm N trên cung lớn PQ của đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến với (O) tại N cắt các tia AP, AQ lần lượt tại B và C . Chứng minh rằng:

a) $AB + AC - BC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm N .

b) Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được trong một đường tròn thì $PQ \parallel BC$

Câu 5 (1.0 điểm)

Cho x, y là các số thực dương thoả mãn : $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$. Chứng minh rằng :

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

----- **Hết** -----

Họ tên thí sinh Số báo danh:

Chữ ký giám thị 1: Chữ ký giám thị 2:

Bài giải

Câu 1: (2.0 điểm)

Cho biểu thức : $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$

1/ Rút gọn biểu thức A.

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \quad (\text{ĐK: } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9)$$

$$A = \dots = \frac{\sqrt{x}+1}{x-4}$$

2/ Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

$$\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x}+1} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x-8 \leq -5\sqrt{x}-5$$

$$\Leftrightarrow 2x+5\sqrt{x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

Kết hợp với ĐK $\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

Câu 2 (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) : $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (d): $y = bx + 1$

1/ Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm M(1; 2)

$$M \in (P) \Rightarrow \dots \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2x^2$$

$$M \in (d) \Rightarrow \dots \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = x + 1$$

2/ Với a, b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M. Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc tọa độ)

$$\text{Xét pt hoành độ gđ: } 2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M(1; 2); N\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$S_{\Delta MON} = S_{\text{thang}} - (S_1 + S_2) = \dots = 0,75 \quad (\text{dvv})$$

Câu 3 (2.0 điểm)

1/ Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt
phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ ac > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 > 0 \\ m^2 + m - 6 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 2 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

2/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 & (1) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 & (2) \end{cases} \quad (\text{ĐK: } x \geq 1; y \geq 1)$$

$$(2) \Leftrightarrow x + y = xy \quad (3)$$

Hai vế của (1) đều dương ta bình phương hai vế ta có:

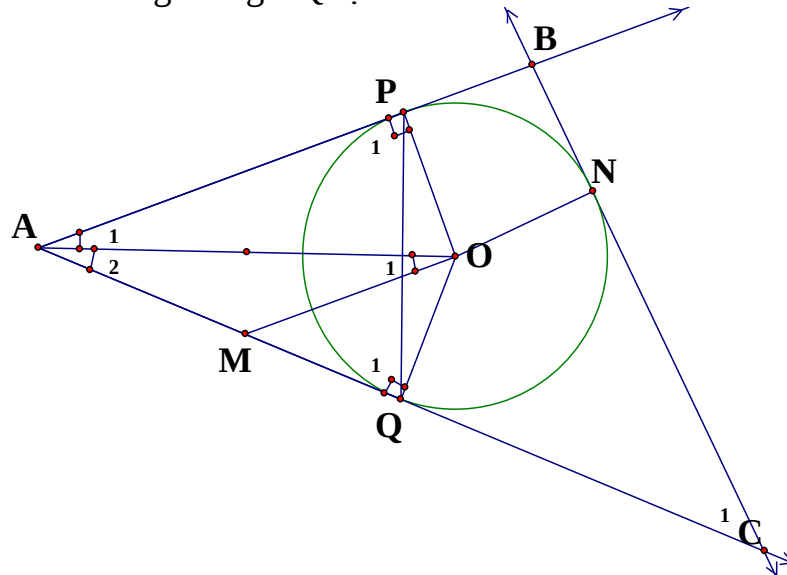
$$x + y - 2 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} = 4$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2 + 2\sqrt{xy - (x+y) + 1} = 4$$

Thay (3) vào ta có: $x + y = 4$ kết hợp với (3) có hệ:
$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Vi Ét ta có x, y là hai nghiệm của pt: $X^2 - 4x + 4 = 0$
 $\Rightarrow x = 2; y = 2$

Câu 4 (3.0 điểm) : Cho A là điểm cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ tiếp tuyến AP và AQ tới đường tròn (P và Q là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua O và vuông góc với OP cắt đường thẳng OQ tại M .



1/ Chứng minh rằng: $MO = MA$

$$\angle A_1 = \angle O_1 \text{ và } \angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow \angle A_2 = \angle O_1 \Rightarrow \triangle MAO \text{ cân} \Rightarrow MO = MA$$

2/ Lấy điểm N trên cung lớn PQ của đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến với (O) tại N cắt các tia AP, AQ lần lượt tại B và C . Chứng minh rằng:

a) $AB + AC - BC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm N .

Theo t/c hai tia tiếp tuyến ta có $\dots \Rightarrow AB + AC - BC = \dots = 2 \cdot AP$ (không đổi)

b) Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được trong một đường tròn thì $PQ \parallel BC$

Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được $\Rightarrow \angle P_1 = \angle C_1$

$$\text{mà } \angle P_1 = \angle Q_1 \Rightarrow \angle C_1 = \angle Q_1 \Rightarrow PQ \parallel BC$$

Câu 5 (1.0 điểm)

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn : $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$. Chứng minh rằng :

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

* Ta có:

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + y - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + x^2 + y - 3 \geq 0$$

$$* \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{y} = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{2x-1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{2x}{2x-1}$$

Vì : $y > 0 ; x > 0 \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1/2$ Thay $y = \frac{2x}{2x-1}$ vào $x^2 + y - 3 \geq 0$

$$\text{Ta có: } x^2 + y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2x}{2x-1} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3}{2x-1} \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } 2x - 1 > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } & 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \\ &= 2x^3 - 2x^2 + x^2 - x - 3x + 3 \\ &= (x-1)(2x^2 + x - 3) \\ &= (x-1)^2(2x+3) \geq 0 \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (2x - y)^2 + x^2 + y - 3 \geq 0 \quad \forall x > 0; y > 0$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
NĂM HỌC 2011 - 2012

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN

Lớp 9 thcs

Thời gian làm bài 150 phút không kể thời gian phát đề

Ngày thi: 23 tháng 3 năm 2012

Câu I (4đ)

$$\text{Cho biểu thức } P = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}} + \frac{x+8}{10-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)$$

1) Rút gọn P

$$2) \text{ Tính giá trị của P khi } x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$$

Câu II (4đ)

Trong cùng một hệ toạ độ, cho đường thẳng d: $y = x - 2$ và parabol (P): $y = -x^2$. Gọi A và B là giao điểm của d và (P).

1) Tính độ dài AB.

2) Tìm m để đường thẳng $d': y = -x + m$ cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho $CD = AB$.

Câu III (4đ)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 2 \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320$

Câu IV (6đ)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$. Gọi M là trung điểm của BC; H là trực tâm; AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Kí hiệu (C_1) và (C_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và DKE, với K là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng:

1) ME là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

2) $KH \perp AM$.

Câu V (2đ)

Với $0 \leq x, y, z \leq 1$. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}$$

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh SDB

Câu I:

1,

C₁,

$$a, P = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}} + \frac{x+8}{10-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) \quad (\text{ĐK: } x > 1; x \neq 10; x \neq 5)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x-1} = a \quad (a \geq 0)$$

$$\Rightarrow P = \frac{3a+9}{a+3} \cdot \frac{1}{3-a} : \left[\frac{1}{a} \cdot \frac{2a+4}{a-3} \right] = \frac{3}{a+3} \cdot \frac{a+3}{3-a} \cdot \frac{a-3}{2} \cdot \frac{a-3}{a+2} = -\frac{3a}{2a+2}$$

$$P = -\frac{3\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}+2} = -\frac{3\sqrt{x-1}}{2x-5}$$

b,

$$x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2} - \sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$= 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2 \quad (\text{T/M})$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{x-1} = \sqrt{2-1} = 1 \quad (\text{T/m})$$

$$\Rightarrow P = -\frac{3a}{2a+2} = -\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 2} = -\frac{1}{2}$$

C₂,

$$a, P = \frac{3\sqrt{x-1}+9}{10-x} : \left[\frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{2\sqrt{x-1}+4}{\sqrt{x-1}-3} \right] \quad (\text{ĐK: } x > 1; x \neq 10)$$

$$P = \frac{3(\sqrt{x-1}+3)}{10-x} \cdot \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}-3}{2\sqrt{x-1}+4}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x-1}(x-10)(\sqrt{x-1}-2)}{2(10-x)(x-1-4)} = -\frac{3\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}+2} = -\frac{3\sqrt{x-1}}{2x-5}$$

$$b) x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2} - \sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2 \quad \text{vì } x > 1 \Rightarrow P = \dots \Rightarrow P = -\frac{1}{2}$$

Câu II:

1) Hoàn chỉnh độ giao điểm là nghiệm phương trình

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 2$$

$$\text{Vậy } A(1; -1) \text{ và } B(-2; -4) \text{ hoặc } A(-2; -4) \text{ và } B(1; -1) \Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 18$$

$$\Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$

2) Để (d') cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình $x^2 - x + m = 0$ (1)

có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$

Ta có $CD^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ mà $y_2 - y_1 = (-x_2 + m) - (-x_1 + m) = x_1 - x_2$

nên: $(y_2 - y_1)^2 = [(-x_2 + m) - (-x_1 + m)]^2 = (x_1 - x_2)^2$

Ta có $AB^2 = 18$

$$\begin{aligned} \text{nên } CD = AB &\Leftrightarrow CD^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 18 \quad (*) \\ &\Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 = 18 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9 \\ &\Leftrightarrow 1 - 4m - 9 = 0 \text{ (Theo Viet)} \\ &\Leftrightarrow m = -2 \quad (\text{TM}) \end{aligned}$$

Câu III

1, ĐK $x \neq 0, y \neq 0$

C₁,

Dùng phương pháp thế rút y theo x từ (1) thay vào pt (2) ta có pt:

$$3x^3 + 4x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x^2 + 4x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (0 \text{ t/m}) \\ 3x^2 + 4x - 4 = 0 & (*) \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

C₂,

Nhân vế của hai PT được: $(x+y)^2 = 1 \Leftrightarrow x+y = \pm 1 \quad (1)$

Chia vế của hai PT được: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2y \quad (2)$

Từ 4 PT trên giải được $(x;y) = (1/3; 2/3); (2;-1); (-2/3; -1/3); (-2;1)$

Thử lại: Chỉ có hai nghiệm thỏa mãn HPT là: $(-2;1)$ và $(1/3; 2/3)$

2, GPT: $2x^6 + y^2 - x^3y = 320$

C₁,

$$y^2 - 2x^3y + (2x^6 - 320) = 0$$

$$\Delta' = x^6 - 2x^6 + 320 = 320 - x^6 \geq 0 \Leftrightarrow x^6 \leq 320 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \quad (\text{vì } x \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x = 0; \pm 1; \pm 2$$

$$* \quad x = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{I} \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$$

$$* \quad x = \pm 1 \Rightarrow y \in \mathbb{I} \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$$

$$* \quad x = \pm 2 \Rightarrow \Delta' = 320 - (\pm 2)^6 = 256 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 16 \Rightarrow y = \frac{(\pm 2)^3 \pm 16}{1} = \dots$$

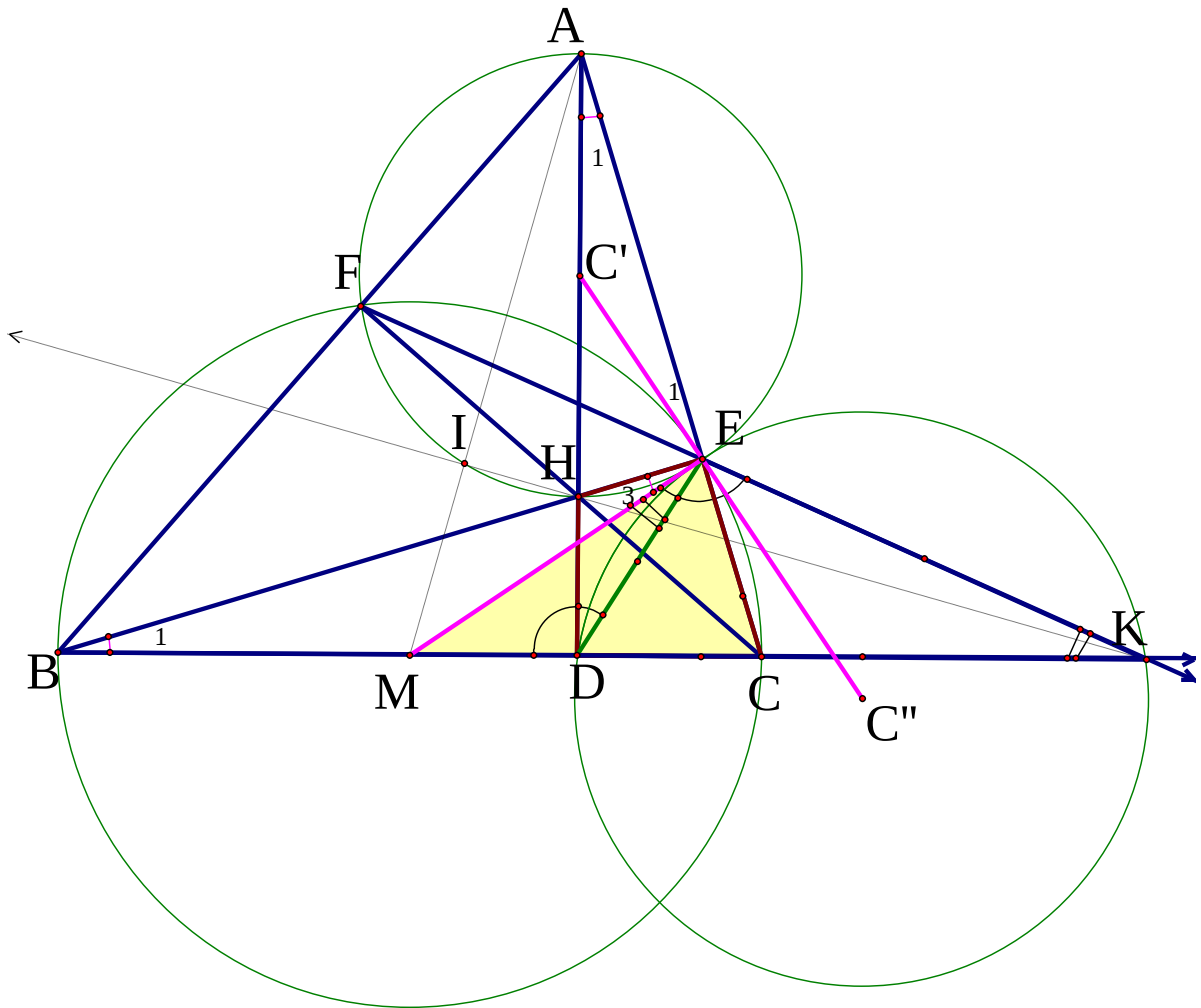
$$\text{KL: } (x;y) = (-2;-24); (-2;8); (2;-8); (2;24)$$

Câu IV: (Đổi điểm C_1 thành C' , C_2 thành C'' cho dễ đánh máy và vẽ hình)

1) Ta có $\angle E = \angle F = 90^\circ$ nên tứ giác AEHF nội tiếp một đường tròn tâm chính là (C_1) là trung điểm AH

$$\begin{array}{c}
 \angle AEC' = \angle B_1 = \angle A_1 = \angle BEM \\
 \uparrow \\
 \angle AEC' = \angle BEM \\
 \uparrow \\
 ME \perp C'E \\
 \uparrow \\
 ME \text{ là tt của } (C')
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \angle MEC + \angle CEK = \angle MCE + \angle DEC \\
 \uparrow \\
 \angle MEK = \angle MDE \\
 \uparrow \\
 \angle MED = \angle MKE \\
 \uparrow \\
 ME \text{ là tt của } (C'')
 \end{array}$$



2, gọi giao điểm AM với (C') là I. ta có:

$$ME \text{ là tt của } (C'') \Rightarrow ME^2 = MI \cdot MA$$

$$ME \text{ là tt của } (C'') \Rightarrow ME^2 = MD \cdot MK$$

$$\Rightarrow MI \cdot MA = MD \cdot MK \Rightarrow \dots \Rightarrow \square AIDK \text{ nt} \Rightarrow \angle AIK = \angle ADK = 1v \Rightarrow KI \perp AM$$

(1)

$$\text{Ta lại có: } \angle AIH = 1v \text{ (góc nt chắn nửa } (C') \Rightarrow HI \perp AM \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow I; H; K \text{ thẳng hàng} \Rightarrow KH \perp AM \text{ (Đpcm)}$$

Câu V: GPT $\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}$ (1)

$$\text{Do vai trò } x, y, z \text{ như nhau nên } 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$$

* **TH1:** Nếu $x = 0 \Rightarrow$

$$\frac{y}{1+z} + \frac{z}{1+zy} = \frac{3}{y+z}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{1+z} - \frac{1}{y+z}\right) + \left(\frac{z}{1+zy} - \frac{1}{y+z}\right) = \frac{1}{y+z}$$

$$\Rightarrow \frac{(y-1)(y+1+z)}{(1+z)(y+z)} + \frac{z^2-1}{(1+yz)(y+z)} = \frac{1}{y+z}$$

Ta có VT < 0 mà VP ≥ 0 nên trong trường hợp này không có nghiệm

* **TH2:** Nếu x khác 0 mà $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1 \Rightarrow (z-1)(1-x) \leq 0 \Leftrightarrow xz - x - z + 1 \geq 0$
 $\Leftrightarrow 1 + zx \geq x + z$ Dấu “=” xảy ra khi: x=1 hoặc z=1.

+ Ta lại có: $1 + zx \geq x + z \Leftrightarrow 1 + y + zx \geq x + y + z$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+y+zx} \leq \frac{x}{x+y+z}$$

+ Tương tự: $\frac{y}{1+z+xy} \leq \frac{y}{x+y+z}$

$$\frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{z}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow VT = \frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1. \quad (2)$$

+ Mặt khác, vì: $0 \leq x, y, z \leq 1 \Rightarrow x + y + z \leq 3$. Dấu “=” xảy ra khi : x = y = z = 1

$$\Rightarrow VP = \frac{3}{x+y+z} \geq \frac{3}{3} = 1 \quad \text{Dấu “=” xảy ra khi : } x = y = z = 1 \quad (3)$$

+ Từ (2) và (3) $\Rightarrow VT = VP$ chỉ đúng khi: $VT = VP = 1$. Khi đó x = y = z = 1.

* Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: (x; y; z) = (1; 1; 1).

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO TUYÊN QUANG**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
CHUYÊN**

NĂM HỌC 2012 - 2013

MÔN THI: TOÁN CHUYÊN

ĐỀ CHÍNH

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

(Đề này có 01 trang)

Câu 1 (3 điểm).

1) Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(x+3)(6-x)} = 3$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2xy + z^2 = 1 \end{cases}$$

3) Tìm nghiệm nguyên (x, y) của phương trình

$$x^2 + x - y^2 + y = 3$$

Câu 2 (2 điểm). Cho phương trình: $x^4 - 2(m^2+2)x^2 + m^4 + 3 = 0$

1) Chứng minh rằng phương trình luôn có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 với mọi giá trị của m

2) Tìm giá trị của m sao cho các nghiệm của phương trình thỏa mãn:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 11$$

Câu 3 (1 điểm). Chứng minh: $A = n^3 + 11n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}$

Câu 4 (3 điểm). Cho góc xOy có số đo bằng 60° . Đường tròn có tâm K nằm trong góc xOy tiếp xúc với tia Ox tại M và tiếp xúc với tia Oy tại N. Trên tia Ox lấy điểm P sao cho $OP = 3OM$. Tiếp tuyến của đường tròn (K) qua P cắt tia Oy tại Q khác O. Đường thẳng PK cắt đường thẳng MN ở E. Đường thẳng QK cắt đường thẳng MN ở F.

a) Chứng minh tam giác MPE đồng dạng với tam giác KPQ.

b) Chứng minh tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.

c) Gọi D là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh tam giác DEF là một tam giác đều.

Câu 5 (1 điểm). Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}} > 5$$

-Hết-

Ghi chú:

+ Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

+ Thí sinh không được sử dụng tài liệu trong khi làm bài.

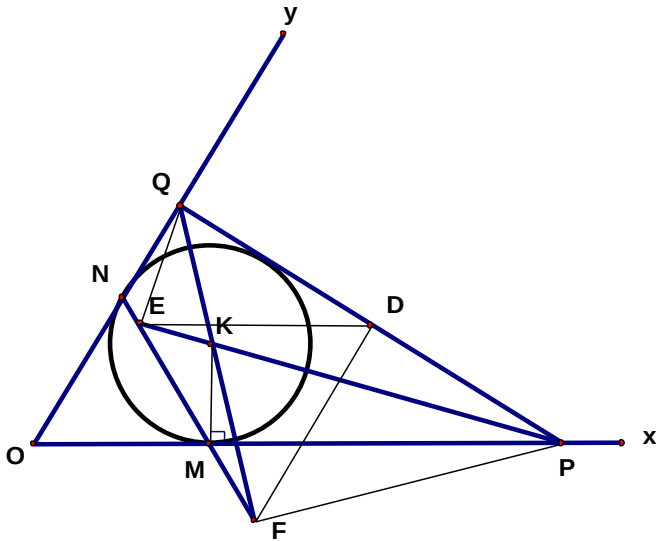
**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
CHUYÊN
TUYÊN QUANG NĂM HỌC 2012-2013**

**HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN
TOÁN CHUYÊN
(Đáp án có 04 trang)**

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
Câu 1	1) Giải pt: $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(x+3)(6-x)} = 3$	1,0 điểm
	đ/k: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$	0,25
	Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x+3} \\ v = \sqrt{6-x} \end{cases}, u, v \geq 0$ pt trở thành: $\begin{cases} u^2 + v^2 = 9 \\ u + v - uv = 3 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 9 \\ u+v = 3+uv \end{cases}$ $\Rightarrow (3+uv)^2 - 2uv = 9$	

	$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 0 \\ uv = -4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 0 \\ \sqrt{6-x} = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases}$ Vậy pt có nghiệm $x = -3; x = 6$	0,25
	2) Giải hệ pt: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2xy + z^2 = 1 \end{cases}$	1,0 điểm
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2xy = z^2 - 2(x + y) - 1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2xy = z^2 - 2z + 1 = (1 - z)^2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow 2xy = (x + y)^2$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0$ $\Leftrightarrow x = y = 0; z = 1$ Hệ pt có nghiệm duy nhất: $(x, y, z) = (0, 0, 1)$	0,25
	3) Tìm nghiệm nguyên (x, y): $x^2 + x - y^2 + y = 3 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + y = 3$ $\Leftrightarrow (x - y)(x + y) + x + y = 3 \Leftrightarrow (x + y)(x - y + 1) = 3$ Để phương trình có nghiệm nguyên thì:	1,0 điểm
	<u>Trường hợp 1:</u> $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad (\text{loại})$	0,5
	<u>Trường hợp 2:</u> $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (\text{loại})$	0,25
	<u>Trường hợp 3:</u> $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (\text{loại})$	0,25

	<u>Trường hợp 4:</u> $\begin{cases} x+y=-3 \\ x-y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-5}{2} \\ y=\frac{-1}{2} \end{cases} \quad (\text{loại})$ Vậy pt không có nghiệm nguyên	
Câu 2	Cho phương trình: $x^4 - 2(m^2+2)x^2 + m^4+3 = 0$	1,0 điểm
	1) Chứng minh rằng phương trình luôn có 4 nghiệm phân biệt $x^4 - 2(m^2+2)x^2 + m^4+3 = 0 \quad (1)$ Đặt: $t = x^2 \quad (t \geq 0)$	0,25
	pt trở thành: $t^2 - 2(m^2+2)t + m^4+3 = 0 \quad (2)$ Ta chứng tỏ (2) luôn có 2 nghiệm $0 < t_1 < t_2$ $\Delta' = (m^2+2)^2 - (m^4+3) = 4m^2+1 > 0, \forall m$ Vậy (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2	0,25
	Ta có: $t_1 \cdot t_2 = m^4+3$ $t_1 + t_2 = 2(m^2+2) > 0, \forall m$ Do đó pt (1) có 4 nghiệm: $-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}$	0,25 0,25
	2) Tìm giá trị của m sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 11$ Ta có: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4$ $= 2(t_1+t_2) + t_1 \cdot t_2$ $= 4(m^2+2) + m^4+3 = m^4+4m^2+11$ do đó: $m^4+4m^2=0$ $\Leftrightarrow m=0$	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 3	Chứng minh: $A = n^3 + 11n$, chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}$	
	$A = n^3 - n + 12n$ $= n(n^2 - 1) + 12n$ $= n(n+1)(n-1) + 12n$	0,25 0,25
	Vì $n(n+1)(n-1) \div 6$ và $12n \div 6$ Vậy $A \div 6$	0,25 0,25
Câu 4		3,0 điểm

	Hình vẽ đúng.  a) Chứng minh $\triangle MPE \sim \triangle KPQ$. + PK là phân giác góc QPO $\Rightarrow MPE = KPQ$ (1). + Tam giác OMN đều $\Rightarrow EMP = 120^\circ$.	0,25
	+ QK cũng là phân giác OQP $QKP = 180^\circ - (KQP + KPQ)$ Mà $2KQP + 2KPQ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ $\Rightarrow QKP = 120^\circ$. Do đó: $EMP = QKP$ (2). Từ (1) và (2), ta có tam giác MPE đồng dạng với tam giác KPQ.	0,25 0,25 0,25
	b) Chứng minh tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn. Do hai tam giác MPE và KPQ đồng dạng nên: $MEP = KQP$, hay: $FEP = FQP$ Suy ra, tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.	0,25 0,25 0,25
	c) Gọi D là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh: $\triangle DEF$ đều. Do hai tam giác MPE và KPQ đồng dạng nên: $\frac{PM}{PK} = \frac{PE}{PQ}$. Suy ra: $\frac{PM}{PE} = \frac{PK}{PQ}$. Ngoài ra: $MPK = EPQ$. Do đó, hai tam giác MPK và EPQ đồng dạng.	0,25
	Từ đó: $PEQ = PMK = 90^\circ$. Suy ra, D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác PQEF. Vì vậy, tam giác DEF cân tại D.	0,25 0,25
	Ta có: $FDP = 2FQD = OQP$; $EDQ = 2EPD = OPQ$.	

	$FDE = 180^\circ - (FDP + EDQ) = POQ = 60^\circ$ Từ đó, tam giác DEF là tam giác đều.	0,25
Câu 5	Chứng minh:	1.0 điểm
	Ta có: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} > \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$ $\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}} > \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$	0,25
	$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ $\Rightarrow$ $2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}\right) > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$	0,25
	$\Rightarrow$ $2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}\right) > \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{121}-\sqrt{120}$ $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}} > 5$	0,25

Ghi chú: Thí sinh làm bài không giống đáp án (nếu đúng) vẫn được điểm tối đa theo quy định.

SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

NĂM HỌC 2012 - 2013

MÔN: TOÁN - LỚP 9

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài 150 phút không kể thời gian giao đề

Câu 1(3,0 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên

$$8x^2 - 3xy - 5y = 25$$

2) Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho $A = n \cdot 4^n + 3^n : 7$

Câu 2(4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

2) Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa mãn $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$

$$\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$$

Chứng minh rằng

Câu 3(4,0 điểm)

1) Cho phương trình: $x^2 - 6x - m = 0$ (Với m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 - x_2^2 = 12$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$$

Câu 4(7,0 điểm)

1) Cho đường tròn (O) đường kính $BD = 2R$, dây cung AC của đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn vuông góc và cắt BD tại H . Gọi P, Q, R, S lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ H xuống AB, AD, CD, CB .

a) CMR: $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2$ không đổi.

b) CMR : $PQRS$ là tứ giác nội tiếp.

2) Cho hình vuông $ABCD$ và $MNPQ$ có bốn đỉnh M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh

AB, BC, CD, DA của hình vuông. CMR: $S_{ABCD} \leq AC \frac{MN + NP + PQ + QM}{4}$

Câu 5(2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương. CMR:
$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

---Hết---

Hướng dẫn

Câu 1.1) $8x^2 - 3xy - 5y = 25 \Leftrightarrow y(3x+5) = 8x^2 - 25 \Leftrightarrow y = \frac{8x^2 - 25}{3x+5} \Leftrightarrow 9y = 24x - 40 - \frac{25}{3x+5} \in \mathbb{Z}$

Khi $3x+5$ là ước 25 từ đó tìm được $(x; y) \in \{(-10; -31); (-2; -7); (0; -5)\}$

(cách khác nhân 2 vế với 9 đưavề tích)

1.2) Với n chẵn $n=2k$ thì

$$A = 2k.4^{2k} + 3^{2k} = (2k+1).4^{2k} + (16^k - 9^k):7 \Rightarrow 2k+1:7 \Rightarrow k = \frac{7t-1}{2} \Rightarrow n = 14t - 1 = 14m + 6 (m \in \mathbb{N})$$

Với n lẻ $n=2k+1$

$$A = (2k+1).4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 2k.4^{2k+1} + (4^{2k+1} + 3^{2k+1}):7 \Rightarrow 2k:7 \Rightarrow k = 7t \Rightarrow n = 14m + 1 (m \in \mathbb{N})$$

Vậy $n = 14m + 6$ hoặc $n = 14m + 1$ (với mọi $n \in \mathbb{N}$) thì A chia hết cho 7

Câu 2.1) $\sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3}-1} =$

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{6}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{2}$$

2.2) $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x^2 - yz} = \frac{b}{y^2 - zx} = \frac{c}{z^2 - xy} \Leftrightarrow \frac{a^2}{x^4 - 2x^2yz + y^2z^2} = \frac{bc}{y^2z^2 - xy^3 - xz^3 + x^2yz} = \frac{a^2 - bc}{x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad (1)$$

$$\text{Tuongtu: } \frac{b^2}{y^4 - 2y^2xz + x^2z^2} = \frac{ac}{x^2z^2 - x^3y - yz^3 + xy^2z} = \frac{b^2 - ac}{y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad (2)$$

$$\text{Tuongtu: } \frac{c^2}{z^4 - 2xyz^2 + x^2y^2} = \frac{ab}{x^2y^2 - x^3z - y^3z + xyz^2} = \frac{c^2 - ab}{z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) ta có ĐPCM

Câu 3.1) Để phương trình có nghiệm $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -9 (*)$

Mặt khác ta phải có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \\ x_1^2 - x_2^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \\ x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -8 \text{ TM ĐK } (*)$

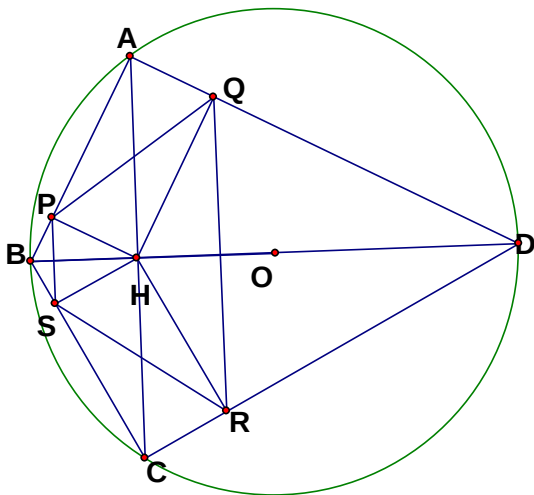
3.2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$

HD $y = 0$ không là nghiệm của hệ chia 2 vế PT(1) cho y^3 PT(2) cho y^2 Ta có hệ

$$\begin{cases} 8x^3 + \frac{27}{y^3} = 18 \\ 4\frac{x^2}{y} + 6\frac{x}{y^2} = 1 \end{cases} \quad \text{Đặt } \begin{cases} 2x = a \\ \frac{3}{y} = b \end{cases} \text{ ta có hệ } \begin{cases} a^3 + b^3 = 18 \\ a^2b + ab^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 1 \end{cases}$$

Hệ có 2 nghiệm $(x, y) \in \left\{ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3+\sqrt{5}} \right); \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3-\sqrt{5}} \right) \right\}$

Câu 4.1)



a) theo Pitago $HA^2 + HB^2 = AB^2; HC^2 + HB^2 = BC^2; HC^2 + HD^2 = CD^2; HA^2 + HD^2 = AD^2$;
suy ra đpcm

b) Tứ giác HPBS nội tiếp $\Rightarrow \angle HPS = \angle HBS = \angle DBC$

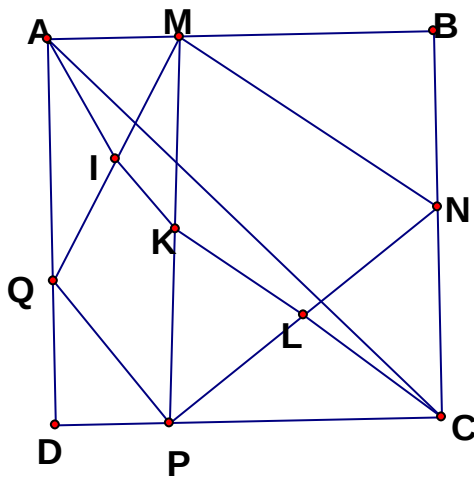
Tứ giác HPAQ là hình chữ nhật $\Rightarrow \angle HPQ = \angle HAQ = \angle CAD = \angle CBD$

Do đó $\angle SPQ = \angle HPS + \angle HPQ = 2\angle DBC$

Tương tự $\angle SQR = 2\angle DBC$

Do đó $\angle DBC + \angle BDC = 180^\circ \Leftrightarrow \angle SPQ + \angle SRQ = 180^\circ$ nên tứ giác PQRS nội tiếp (đ/ lí đảo)

4.2)



Cách 1 Gọi T, K, L là trung điểm MQ, MP, NP theo t/c đường trung bình và trung tuyến tam giác vuông ta có $MN + NP + PQ + QM = 2(KL + CL + IK + AI) \geq 2AC$ từ đó suy ra đpcm

Cách 2 Ta có theo Pitago

$$MN^2 = BN^2 + BM^2 \geq \frac{(BM + BN)^2}{2} \Leftrightarrow MN \geq \frac{BM + BN}{\sqrt{2}} \quad (\text{áp dụng BĐT Bunhiacopsky})$$

$$\text{Tương Tự } NP \geq \frac{CN + NP}{\sqrt{2}}; PQ \geq \frac{DP + DQ}{\sqrt{2}}; MQ \geq \frac{AQ + AM}{\sqrt{2}}$$

Nên

$$MN + NP + PQ + QM \geq \frac{BM + NB + NC + CP + PD + DQ + QA + AM}{\sqrt{2}} = \frac{4a}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2}$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{4}(MN + NP + PQ + QM) = a^2 \Leftrightarrow \text{đpcm}$$

Dấu “=” xảy ra khi MNPQ là hình chữ nhật

Câu 5

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{2a+b+3c} + \frac{ca}{3a+2b+c} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

Dự đoán $a=b=c$ tách mẫu để $a+c=b+c=2b$

Tácó áp dụng BĐT $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$

$$\frac{ab}{a+3b+2c} = \frac{ab}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq \frac{ab}{9} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2} \right) \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{bc}{2a+b+3c} = \frac{bc}{(a+b)+(a+c)+2c} \leq \frac{bc}{9} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{b}{2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{ac}{3a+2b+c} = \frac{ac}{(a+b)+(b+c)+2a} \leq \frac{ac}{9} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2a} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c} + \frac{c}{2} \right) \quad (2)$$

Từ (1) (2) (3)

$$P \leq \frac{1}{9} \left(\frac{ac+bc}{a+b} + \frac{ab+ac}{b+c} + \frac{bc+ab}{a+c} + \frac{a+b+c}{2} \right) = \frac{a+b+c}{6}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c$

**SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO
TẠO NGHỆ AN**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2010 - 2011**

ĐỀ CHÍ NH THỨC

Môn thi: TOÁN - BẢNG B

Thời gian: **150** phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là một số chính phương.

Câu 2 (5,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x+y = x^2 \\ 2y+x = y^2 \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Câu 4 (4,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$

b) Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh rằng $K \in (O)$.

Câu 5 (2,5 điểm).

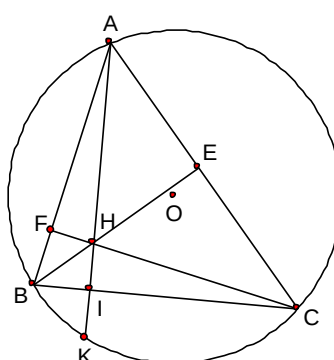
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

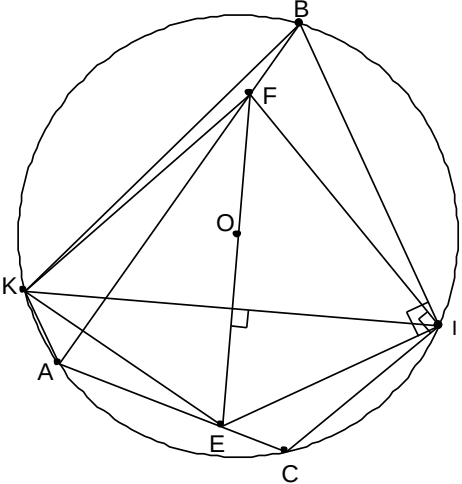
- - - **Hết** - - -

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐÁP ÁN ĐỀ CHÍNH THỨC
Môn: TOÁN - Bảng B

Câu:	Nội dung
1.	
a, (2,5)	*) Nếu $n \vdots 3 \Rightarrow n^2 + n \vdots 3$
	nên $n^2 + n + 2 \nmid 3$ (1)
	*) Nếu $n \nmid 3 \Rightarrow n^2 + 2 \vdots 3$
	$\Rightarrow n^2 + n + 2 \nmid 3$ (2)
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$ thì $n^2 + n + 2 \nmid 3$
b, (2,5)	Đặt $m^2 = n^2 + 17$ ($m \in \mathbb{N}$)
	$\Rightarrow m^2 - n^2 = 17 \Rightarrow (m - n)(m + n) = 17 = 1.17 = 17.1$
	Do $m + n > m - n$
	$\Rightarrow \begin{cases} m + n = 17 \\ m - n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 9 \\ n = 8 \end{cases}$
	Vậy với $n = 8$ ta có $n^2 + 17 = 64 + 17 = 81 = 9^2$
2.	
a, (2,5)	Giải phương trình $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$ (1)
	Điều kiện: $2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$
	(1) $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 - 2\sqrt{2x+3} = 0$
	$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2x + 3 - 2\sqrt{2x+3} + 1 = 0$
	$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (\sqrt{2x+3} - 1)^2 = 0$
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+3}-1=0 \end{cases}$
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2x+3=1 \end{cases}$
	$\Leftrightarrow x = -1$ thỏa mãn điều kiện
b, (2,5)	Giải hệ phương trình
	$\begin{cases} 2x+y=x^2 & (1) \\ 2y+x=y^2 & (2) \end{cases}$
	Trừ từng vế 2 phương trình ta có: $x^2 - y^2 = x - y$
	$\Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0$

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 - y \end{cases}$ Ta có: *) $\begin{cases} x = y \\ x(x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 0 \text{ hoặc } x = 3 \end{cases}$ Vậy $(x; y) = (0; 0); (3; 3)$ *) $\begin{cases} x = 1 - y \\ 2x + y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 2 - 2y + y = (1 - y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$ Vì phương trình $y^2 - y + 1 = 0$ vô nghiệm nên hệ (*) vô nghiệm Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = (0; 0); (3; 3)$
3.	
	Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$ Ta có: $A = \frac{4x+3}{x^2+1} = -1 + \frac{x^2+4x+4}{x^2+1}$ $A = -1 + \frac{(x+2)^2}{x^2+1} \geq -1$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ Vậy $A_{\min} = -1$ khi $x = -2$
4.	
a, (2,5)	 Gọi I là giao điểm của AH và BC $\Rightarrow AI \perp BC$ Ta có: $\triangle BHI \sim \triangle BCE$ (g, g) $\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BI}{BE} \Rightarrow BH \cdot BE = BC \cdot BI \quad (1)$ Ta có: $\triangle CHI \sim \triangle CBF$ (g, g) $\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CI}{CF} \Rightarrow CH \cdot CF = BC \cdot CI \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $BH \cdot HE + CH \cdot CF = BC(BI + CI) = BC^2$
b,	Gọi K là điểm đối xứng của H qua BC suy ra $HCB = KCB$

(2,0)	Mà $\angle FAI = \angle HCI$ (do tứ giác AFIC nội tiếp)
	$\Rightarrow \angle FAI = \angle BCK$ hay $\angle BAK = \angle BCK$
	$\Rightarrow$ tứ giác BACK nội tiếp đường tròn (O) $\Rightarrow K \in (O)$
5.	
	+ Khi $\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \angle BIC = 90^\circ$. $\Rightarrow$ F trùng với B, E trùng với C lúc đó EF là đường kính. $\Rightarrow$ EF đi qua điểm O cố định.
	 + Khi $\angle BAC < 90^\circ \Rightarrow \angle BIC > 90^\circ$. Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF.
	$\Rightarrow \angle EIF = \angle EAF$ (cùng bù $\angle BIC$) $\angle EKF = \angle EIF$ (Do I và K đối xứng qua EF) $\Rightarrow \angle EKF = \angle EAF$ $\Rightarrow$ AKFE nội tiếp
	$\Rightarrow \angle KAB = \angle KEF$ (cung chắn KF) (1) $\angle IEF = \angle KEF$ (Do K và I đối xứng qua EF) (2) $\angle IEF = \angle BIK$ (cùng phụ $\angle KIE$) (3) Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle KAB = \angle BIK$ $\Rightarrow$ AKBI là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow K \in (O)$
	Mà EF là đường trung trực của KI $\Rightarrow E, O, F$ thẳng hàng. + Khi $\angle BAC > 90^\circ \Rightarrow \angle BIC < 90^\circ$ chứng minh tương tự. Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.

--- Hết ---

Bài 1: (4,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

b) Cho x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + xz = 1$.

Hãy tính giá trị biểu thức: $A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$

Bài 2: (3,0 điểm)

a) Cho hàm số: $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2012}$

Tính $f(a)$ tại $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

b) Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là số chính phương?

Bài 3: (4,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3$

b) $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$

Bài 4: (3,0 điểm)

a) Tìm $x; y$ thỏa mãn: $2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy$

b) Cho $a; b; c$ là các số thuộc đoạn $[-1; 2]$ thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ hãy chứng minh rằng:

$a + b + c \geq 0$

Bài 5: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn; các đường cao AK; BD; CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $\frac{KC}{KB} = \frac{AC^2 + CB^2 - BA^2}{CB^2 + BA^2 - AC^2}$

b) Giả sử: $HK = \frac{1}{3} AK$. Chứng minh rằng: $\tan B \cdot \tan C = 3$

c) Giả sử $S_{ABC} = 120 \text{ cm}^2$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hãy tính diện tích tam giác ADE?

Môn: Toán 9
Thời gian: 120'

Câu 1: (4 điểm)

a/ Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

ĐKXD: $x \neq 4; x \neq 9$

$$A = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$
$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

b/ Cho x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + xz = 1$.

Hãy tính: $A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$

Gợi ý: $xy + yz + xz = 1 \Leftrightarrow 1 + x^2 = xy + yz + xz + x^2 = y(x+z) + x(x+z) = (x+z)(x+y)$

Tương tự: $1 + y^2 = \dots; 1 + z^2 = \dots$

Câu 2: (3 điểm)

a/ Cho hàm số: $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2012}$

Tính $f(a)$ tại $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

b/ Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là số chính phương?

Giải

a/ Từ $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow a^3 = 32 + 3\sqrt[3]{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})} \left[\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} \right] = 32 - 12a \text{ nên } a^3 + 12a = 32$$

Vậy $f(a) = 1$

b/ Giả sử: $n^2 + 17 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$) và $k > n \Rightarrow (k-n)(k+n) = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} k-n=1 \\ k+n=17 \end{cases} \Rightarrow n=8$

Vậy với $n = 8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: (4 điểm)

Giải các phương trình sau:

a/ $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3$

b/ $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$

Giải

a/ ĐK: $-4 \leq x \leq 1$

Bình phương 2 vế: $1-x+4+x+2\sqrt{(1-x)(4+x)}=9 \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(4+x)}=2$

$$\Leftrightarrow 4-3x-x^2=4 \Leftrightarrow x(x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x=0$; $x=-3$

b/ $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$ ĐKXD: $x \geq \frac{-3}{2}$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1) + (2x+3-2\sqrt{2x+3}+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (\sqrt{2x+3}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+3}=1 \end{cases} \Rightarrow x=-1 \text{ vậy phương trình có nghiệm duy nhất}$$

$$x=-1$$

Câu 4: (3 điểm)

a/ Tìm x ; y thỏa mãn: $2(x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4})=xy$

b/ Cho a ; b ; c là các số thuộc đoạn $[-1;2]$ thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=6$ hãy chứng minh rằng: $a+b+c \geq 0$

Giải

a/ $2(x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4})=xy \Leftrightarrow x.2.\sqrt{y-4}+y.2.\sqrt{x-4}=xy$

Xét VP = $x.2.\sqrt{y-4}+y.2.\sqrt{x-4}$ theo BĐT cosi:

$$2\sqrt{y-4} \leq \frac{4+y-4}{2} = \frac{y}{2}; 2\sqrt{x-4} \leq \frac{4+x-4}{2} = \frac{x}{2} \text{ vậy VP} \leq xy = VT$$

$$\text{Đấu} = \text{xảy ra khi: } \begin{cases} \sqrt{x-4}=2 \\ \sqrt{y-4}=2 \end{cases} \Rightarrow x=y=8$$

b/ Do a ; b ; c thuộc đoạn $[-1;2]$ nên $a+1 \geq 0$; $a-2 \leq 0$ nên $(a+1)(a-2) \leq 0$

$$\text{Hay: } a^2-a-2 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq a+2$$

$$\text{Tương tự: } b^2 \leq b+2; c^2 \leq c+2$$

Ta có: $a^2+b^2+c^2 \leq a+b+c+6$ theo đầu bài: $a^2+b^2+c^2=6$ nên: $a+b+c \geq 0$

Câu 5: (6 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn; các đường cao AK; BD; CE cắt nhau tại H.

a/ Chứng minh: $\frac{KC}{KB} = \frac{AC^2+CB^2-BA^2}{CB^2+BA^2-AC^2}$

b/ Giả sử: $HK = \frac{1}{3}AK$. Chứng minh rằng: $\tan B \cdot \tan C = 3$

c/ Giả sử $S_{ABC} = 120 \text{ cm}^2$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hãy tính diện tích tam giác ADE?

Giải

a/ Sử dụng định lý pytago:

$$\frac{AC^2 + CB^2 - BA^2}{CB^2 + BA^2 - AC^2} = \frac{AK^2 + KC^2 + (BK + CK)^2 - AB^2}{(BK + CK)^2 + BA^2 - (AK + KC)^2}$$

$$= \frac{2CK^2 + 2BK.CK}{2BK^2 + 2BK.CK} = \frac{2CK(CK + BK)}{2BK(BK + CK)} = \frac{CK}{BK}$$

b/ Ta có: $\tan B = \frac{AK}{BK}$; $\tan C = \frac{AK}{CK}$

Nên: $\tan B \tan C = \frac{AK^2}{BK.CK} \quad (1)$

Mặt khác ta có: $B = HKC$ mà: $\tan HKC = \frac{KC}{KH}$

Nên $\tan B = \frac{KC}{KH}$ tương tự $\tan C = \frac{KB}{KH} \Rightarrow \tan B. \tan C = \frac{KB.KC}{KH^2} \quad (2)$

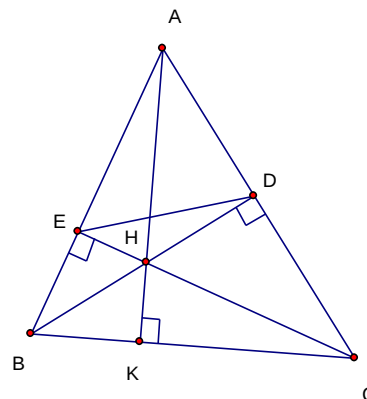
Từ (1)(2) $\Rightarrow (\tan B. \tan C)^2 = \left(\frac{AK}{KH}\right)^2$

Theo gt: $HK = \frac{1}{3} AK \Rightarrow \tan B. \tan C = 3$

c/ Ta chứng minh được: $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ đồng dạng vậy: $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 \quad (3)$

Mà $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\widehat{ABD} = 30^\circ \Rightarrow AB = 2AD \quad (4)$

Từ (3)(4) ta có: $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = 4 \Rightarrow S_{ADE} = 30(cm^2)$



**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NINH BÌNH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY
NĂM HỌC 2015 – 2016**

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian
giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} + \frac{1}{x - \sqrt{x}}$

2. Tính giá trị biểu thức: $B = \sqrt[3]{85 + 62\sqrt{7}} + \sqrt[3]{85 - 62\sqrt{7}}$

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 2m + 1 \\ 4x + 2y = 5m - 1 \end{cases}$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho parabol (P): $y = x^2$ cắt đường thẳng d: $y = mx - 2$ tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 1$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 16} = 1$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB,AC,BC. Đường thẳng BO cắt các đường thẳng EF và DF lần lượt tại I và K.

1. Tính số đo góc BIF
2. Giả sử M là điểm di chuyển trên đoạn CE .
 - a. Khi $AM = AB$, gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng ba điểm A,O,H thẳng hàng, từ đó suy ra tứ giác ABHI nội tiếp.
 - b. Gọi N là giao điểm của đường thẳng BM với cung nhỏ EF của (O), P, Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE và DF. Xác định vị trí điểm M để độ dài đoạn thẳng PQ max.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq 3$$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỰY – NINH BÌNH

Câu 1.

1. Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-1) - 2\sqrt{x}\sqrt{x} + (\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{-2x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{-2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{x}+1}
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{-2}{\sqrt{x}+1}$

2. $B = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}} + \sqrt[3]{85-62\sqrt{7}}$

Đặt $a = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}}; b = \sqrt[3]{85-62\sqrt{7}} \Rightarrow a+b = B$

Mặt khác:

$$a^3 + b^3 = (85+62\sqrt{7}) + (85-62\sqrt{7}) = 170$$

$$ab = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}} \sqrt[3]{85-62\sqrt{7}} = \sqrt[3]{85^2 - (62\sqrt{7})^2} = \sqrt[3]{-19683} = -27$$

Ta có:

$$B^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$= 170 - 3 \cdot 27 \cdot B$$

$$\Rightarrow B^3 + 81B - 170 = 0$$

$$\Rightarrow (B-2)(\underbrace{B^2+2B+85}_{>0}) = 0$$

$$\Rightarrow B = 2$$

Vậy $B=2$

Câu 2.

1. $\begin{cases} x+2y=2m+1 \\ 4x+2y=5m-1 \end{cases} \quad (I)$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x+2y-1}{2} \\ m = \frac{4x+2y+1}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2y-1}{2} = \frac{3x+2y+1}{5}$$

$$\Rightarrow 5(x+2y-1) = 2(4x+2y+1) \Rightarrow 3x-6y+7=0$$

Giả sử hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x_0; y_0)$ thì

$$3x_0 - 6y_0 + 7 = 0 \Rightarrow 6y_0 - 7 = 3x_0 : 3 \Rightarrow 7:3 \text{ (vô lí)}$$

Vậy hệ phương trình không có nghiệm nguyên $\forall m$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d:

$$x^2 - mx + 2 = 0 \quad (1)$$

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2) \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 \cdot 2 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 8 \Leftrightarrow m > 2\sqrt{2}$ hoặc $m < -2\sqrt{2}$

Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của (1). Áp dụng định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m$; $x_1 x_2 = 2$.
Do $A, B \in d$ nên $y_1 = mx_1 - 2$ và $y_2 = mx_2 - 2$.

Ta có:

$$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 1$$

$$\Leftrightarrow mx_1 - 2 + mx_2 - 2 = 2(x_1 + x_2) - 1$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(x_1 + x_2) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-2) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại) hoặc } m = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.

$$1. \sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 16} = 1 \quad (1)$$

$$\text{ĐK: } x^2 \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ hoặc } x \leq -4.$$

$$(I) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 16} + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = x^2 - 16 + 2\sqrt{x^2 - 16} + 1$$

$$\Leftrightarrow 6 = 2\sqrt{x^2 - 16}$$

$$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{x^2 - 16}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 5$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-5; 5\}$.

$$2. \begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{– Xét } x = 0, \text{ hệ (I) trở thành } \begin{cases} 4y = y^3 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 2$$

$$\text{– Xét } x \neq 0, \text{ đặt } \frac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = xt. \text{ Hệ (I) trở thành}$$

$$\begin{cases} x^3 + 4xt = x^3 t^3 + 16x \\ 1 + x^2 t^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4xt - 16x \\ x^2(t^2 - 5) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4x(t - 4) \\ 4 = x^2(t^2 - 5) \end{cases} \quad (1)$$

Nhân từng vế của (1) và (2), ta được phương trình hệ quả

$$4x^3(t^3 - 1) = 4x^3(t - 4)(t^2 - 5)$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 1 = t^3 - 4t^2 - 5t + 20 \quad (\text{Do } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 5t - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = -3, \text{ thay vào (2) được } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

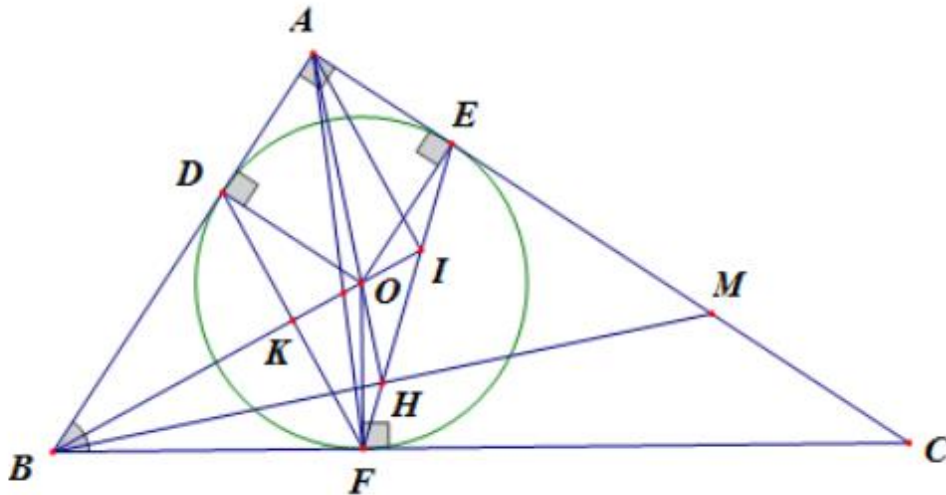
$$x = 1 \text{ thì } y = -3, \text{ thử lại } (1; -3) \text{ là một nghiệm của (I)}$$

$$x = -1 \text{ thì } y = 3, \text{ thử lại } (-1; 3) \text{ là một nghiệm của (I)}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{7}{4}, \text{ thay vào (2) được } x^2 = -\frac{64}{31} \text{ (loại)}$$

Vậy hệ (I) có các nghiệm $(0; 2), (0; -2), (1; -3), (-1; 3)$.

Câu 4.



1. Vì BD, BF là các tiếp tuyến của (O) nên $OD \perp BD$, $OF \perp BF$.

Xét 2 tam giác vuông OBD và OBF có

$\left. \begin{array}{l} OB \text{ chung} \\ OBD = OBF(gt) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBD = \triangle OBF \text{ (cạnh huyền-góc nhọn)}$

$\Rightarrow BD = BF$

Mà $OD = OF = r$ nên OB là trung trực của DF $\Rightarrow OB \perp DF \Rightarrow \triangle KIF$ vuông tại K.

Mà $OD = OF = r$ nên OB là trung trực của DF $\Rightarrow OB \perp DF \Rightarrow \triangle KIF$ vuông tại K.

$\angle DOE = 90^\circ$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cho đường tròn (O), ta có:

$$\angle DFE = \frac{1}{2} \angle DOE = 45^\circ$$

$\Rightarrow \triangle KIF$ vuông cân tại K.

$\Rightarrow \angle BIF = 45^\circ$

2.

a. Hình chữ nhật ADOE có $OD = OE = r$ nên nó là hình vuông

$\Rightarrow AO$ là trung trực DE (1)

Vì $AB = AM$ nên tam giác ABM vuông cân tại A, suy ra $\angle ABM = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle DBH = \angle DFH = 45^\circ$

$\Rightarrow BDHF$ là tứ giác nội tiếp (2)

Vì $\angle BDO + \angle BFO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên BDOF là tứ giác nội tiếp (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow 5$ điểm B, D, O, H, F nằm trên một đường tròn.

$\Rightarrow \angle BHO = \angle BFO = 90^\circ$

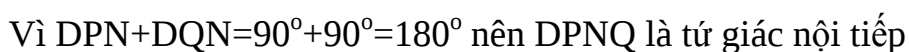
$\Rightarrow OH \perp BM$.

Mặt khác $\angle ADE = \angle ABM = 45^\circ \Rightarrow DE \parallel BM \Rightarrow OH \perp DE$

Mà $OD = OE$ nên OH là trung trực của đoạn OE (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow A, O, H$ thẳng hàng.

b.



Mặt khác DENF là tứ giác nội tiếp nên $QDN = FEN$ (6)

Từ (5) và (6) ta có $FEN=QPN$ (7)

Tương tự ta có: $EFN = PQN$ (8)

Từ (7) và (8) suy ra $\Delta NPQ \sim \Delta NEF(g.g) \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF}$

Theo quan hệ đường vuông góc – đường xiên, ta có

$$NQ \leq NF \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF} \leq 1 \Rightarrow PQ \leq EF$$

Dấu bằng xảy ra khi $Q \equiv F \Leftrightarrow NF \perp DF \Leftrightarrow D, O, N$ thẳng hàng.

Do đó PQ max khi M là giao điểm của AC và BN, với N là điểm đối xứng với D qua O.

Câu 5.

Ta chứng minh BĐT

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9(*)$$

$$(*) \Leftrightarrow 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 9$$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số dương ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$$

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$$

$\Rightarrow (*)$ đúng

$$\Rightarrow \frac{9}{a+b+c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

Trở lại bài toán: Áp dụng BĐT Cô si cho hai số dương ta có $1+b^2 \geq 2b$

Ta có:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2} \quad (2)$$

$$\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a + b + c - \frac{1}{2}(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \geq a + b + c \geq 3$$

$\Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG THÁP
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2016-2017
ĐỀ THI MÔN: TOÁN
Ngày thi: 19/03/2017
Thời gian làm bài: 150 phút**

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức $A = \frac{4\sqrt{3-2\sqrt{2}}+10}{(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})+1}$

b) Cho $B = n^4 + n^3 - n^2 - n$. Chứng minh rằng B chia hết cho 6 với mọi số nguyên n

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{5-2x}{x-1}$

a) Tìm điều kiện của x để P xác định và rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để P có giá trị bằng 7

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}+y} + \frac{5}{\sqrt{x}-y} = 6 \\ \frac{3}{\sqrt{x}+y} - \frac{4}{\sqrt{x}-y} = -3 \end{cases}$$

b) Một ô tô dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc trung bình là 40 km/h. Lúc đầu ô tô đi với vận tốc đó, khi còn 60 km nữa thì mới được một nửa quãng đường AB, người lái xe tăng thêm vận tốc 10km/h trên quãng đường còn lại. Do đó ô tô đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ C, B của tam giác ABC. D là điểm đối xứng của A qua O, M là trung điểm BC, H là trực tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm HD

b) Gọi L là giao điểm thứ hai của CE với đường tròn tâm O. Chứng minh rằng H, L đối xứng nhau qua AB

c) Chứng minh rằng EF vuông góc với AO

Câu 6. (4,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 4. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho EC là phân giác góc BEF. Trên tia AB lấy K sao cho BK=DF.

a) Chứng minh rằng CK = CF

b) Chứng minh rằng EF=EK và EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

c) Tìm vị trí của E, F sao cho diện tích tam giác CEF lớn nhất

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI 9 ĐỒNG THÁP 2016-2017

Câu 1 $A = \frac{4\sqrt{3-2\sqrt{2}}+10}{(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})+1}$

$$4\sqrt{3-2\sqrt{2}}+10=4\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+10=4(\sqrt{2}-1)+10=6+4\sqrt{2}$$

$$(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})+1=3+\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2+1=6+4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A=1$$

b)

$$B=n^4+n^3-n^2-n$$

$$B=n^2(n^2-1)+n(n^2-1)$$

$$B=n.n.(n-1)(n+1)+n(n-1)(n+1)$$

$$B=n(n-1)(n+1)(n+1)$$

Do $(n-1)n(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3

Vậy B chia hết cho 6

Câu 2.

a) ĐK: $x \geq 0 ; x \neq 1$

$$P = \frac{x^2 - x\sqrt{x} + x\sqrt{x} + x + 5 - 2x}{x-1} = \frac{x^2 - x + 5}{x-1}$$

b) $P = x + \frac{5}{x-1}$

$$P=7 \Leftrightarrow x + \frac{5}{x-1} = 7 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=2; x=6 \text{ (nhận)}$$

Câu 3.

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad (1)$$

a) Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a.b.c}} \quad (2)$

$$(1) \text{ Nhân } (2) \text{ vế theo vế ta được } (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

b) $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$

$$P = 1 - \frac{1}{x+1} + 1 - \frac{1}{y+1} + 1 - \frac{1}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$$

Ta có : $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}$ (theo câu a)

Nên $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \geq \frac{9}{x+1+y+1+z+1} = \frac{9}{4}$

$$P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Vậy GTLN của P là $\frac{3}{4}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Câu 4.

a) Điều kiện $x \geq 0; \sqrt{x} \neq \pm y$

$$\text{Đặt } a = \frac{1}{\sqrt{x}+y}; b = \frac{1}{\sqrt{x}-y}$$

Hệ trở thành $\begin{cases} 3a+5b=6 \\ 3a-4b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+y=3 \\ \sqrt{x}-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ thỏa điều kiện

b) Gọi x là quãng đường AB ($x > 0$)

Quãng đường ô tô đi với vận tốc ban đầu là : $\frac{x}{2} - 60$

Quãng đường ô tô đi với vận tốc tăng lên là $\frac{x}{2} + 60$

Thời gian ô tô đi lúc ban đầu là: $\frac{x-120}{80}$

Thời gian ô tô đi lúc tăng vận tốc là: $\frac{x+120}{100}$

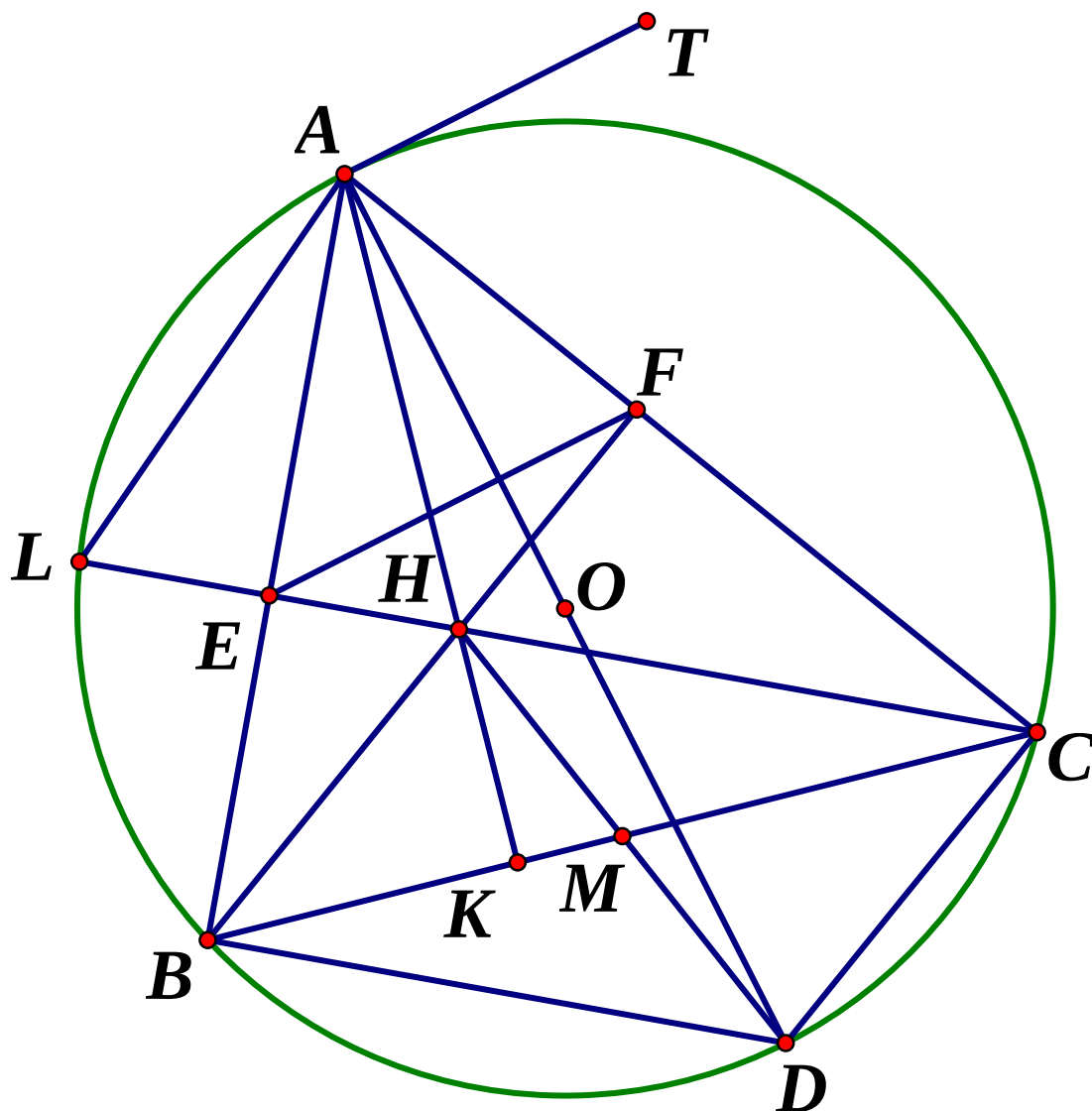
Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{x-120}{80} + \frac{x+120}{100} = \frac{x}{40} - 1$$

Giải phương trình được $x = 280$

Vậy quãng đường AB dài 280 km

Câu 5.



- a) $DB \perp AB, CE \perp AB$ nên $CE \parallel DB$
 $DC \perp AC, BF \perp AC$ nên $DC \parallel BF$
 Tứ giác $ABDC$ là hình bình hành, M là trung điểm BC nên M là trung điểm DH
- b) $AE \perp HL$ (a)

$$EAL = LCB \text{ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung)}$$

ΔEHA đồng dạng $\Delta KHC \Rightarrow LCB = HAB(2)$ (K là giao điểm của AH và BC)

Từ (1) và (2) suy ra AE là phân giác HAL (b)

Từ (a) và (b) suy ra E là trung điểm HL. Vậy H, L đối xứng qua AB

- c) Kẻ tiếp tuyến từ A của đường tròn tâm (O) (3)

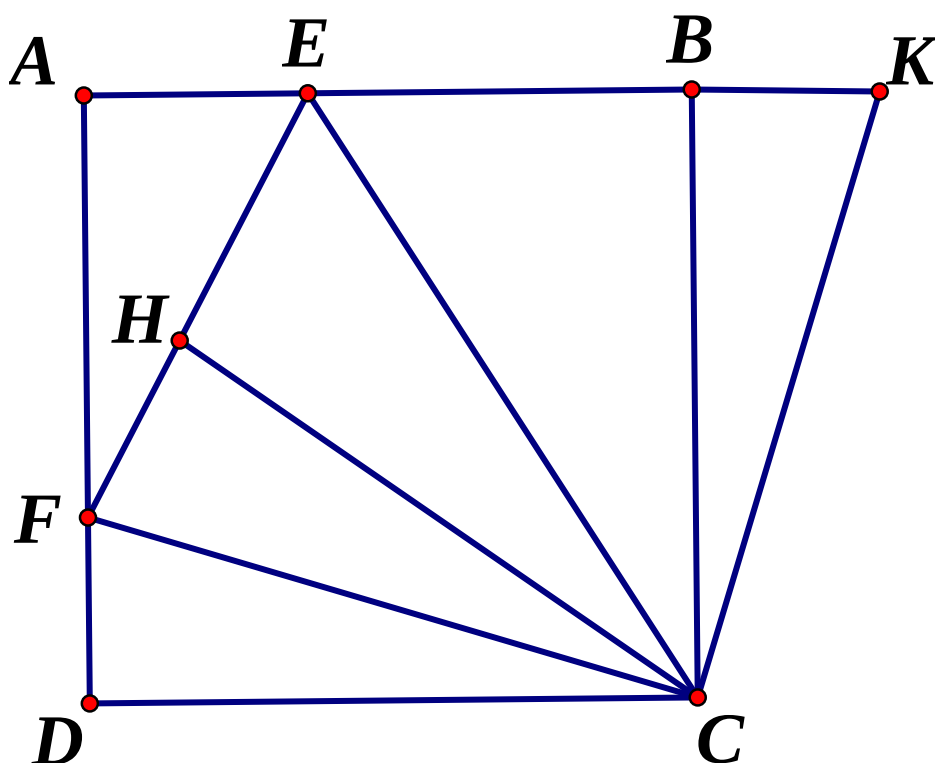
TAC = ABC (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Tứ giác EFCB nội tiếp $\Rightarrow \angle ABC + \angle EFC = 180^\circ$

$\angle EFC + \angle EFA = 180^\circ$ nên $\angle ABC = \angle AFE = \angle TAC$ suy ra $EF \parallel AT$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra EF vuông góc với AO

Câu 6.



a) $CD=CB$, $DF=BK$, $\angle FDC = \angle CBK = 90^\circ$ nên $\triangle DFC = \triangle BKC \Rightarrow CK = CF$

b) Gọi H là chân đường cao kẻ từ C của tam giác CEF

$$\triangle HEC = \triangle BEC \Rightarrow HE = EB$$

$$\triangle HFC = \triangle BKC \text{ nên } FH = BK$$

Cộng vế theo vế suy ra $EF = EK$

Do $\triangle HEC = \triangle BEC \Rightarrow CB = CH$ và $EF \perp CH$

Vậy tam giác EFC luôn tiếp xúc đường tròn cố định tâm C bán kính $CH = 4$

$$c) S_{DFC} = S_{HFC}; S_{HEC} = S_{BEC}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} S_{CDFEB} = \frac{1}{2} (16 - S_{AEF}) \Rightarrow S_{CEF} \leq 8$$

S_{CEF} lớn nhất bằng 8. Khi đó $E \equiv A, F \equiv D$.

**SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2013-2014**

BÌNH ĐỊNH
Đề chính thức

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Môn thi: **Toán (Chuyên toán - tin)**

Ngày thi: **15/6/2013**

Thời gian làm bài: **150'**

Bài 1: (2,5 đ) Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) (x + \sqrt{x})$ (Với $x \geq 0$; $x \neq 1$)

1. Rút gọn Q

2. Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên

Bài 2: (2 đ) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{13}{10} \\ \frac{3}{x-3} - \frac{2y+4}{y+1} = -\frac{11}{6} \end{cases}$$

Bài 3: (1,5 đ) Cho a,b,c là các số thực dương. CMR : $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$.

Bài 4: (3 đ) Cho đường tròn (O,R) và đường thẳng (d) không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm A,B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C,D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB.

1. CMR các điểm M,D,O,H cùng nằm trên một đường tròn.
2. Đoạn OM cắt đường tròn tại điểm I. CMR I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCD .
3. Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P và Q. Tìm vị trí điểm M trên (d) sao cho diện tích ΔMPQ bé nhất.

Bài 5: (1 đ) : Không dùng máy tính, hãy rút gọn biểu thức:

$$A = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}} - \sqrt{2}$$

---*---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: (2,5 đ) Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x})$ (Với $x \geq 0$; $x \neq 1$)

1. Rút gọn Q

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x}) = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = \frac{x+\sqrt{x}-2-x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1} \end{aligned}$$

2. Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên:

$$Q = \frac{2\sqrt{x}}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1} \Rightarrow Q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\} \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow x \in \{0; 2; 3\}$

Vậy với $x \in \{0; 2; 3\}$ thì Q nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (2 đ) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{13}{10} \\ \frac{3}{x-3} - \frac{2y+4}{y+1} = -\frac{11}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{13}{10} \\ \frac{3}{x-3} - 2 - \frac{2}{y+1} = -\frac{11}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{3}{10} \\ \frac{3}{x-3} - \frac{2}{y+1} = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (\text{ĐK } x \neq 3; y \neq -1)$$

1)

Đặt $a = \frac{1}{x-3}$; $b = \frac{1}{y+1}$ ta được hệ :

$$\begin{cases} a + 3b = \frac{3}{10} \\ 3a - 2b = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{10} \\ \frac{1}{y+1} = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 14 \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất $(x; y) = (13; 14)$

Bài 3: (1,5 đ) Cho a,b,c là các số thực dương. CMR : $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$.

a,b,c là các số thực dương $\Rightarrow$ Theo BĐT Cô-Si ta được:

$$\left. \begin{aligned} \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} &\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b}} = 2c \\ \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} &\geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{ca}{b}} = 2a \\ \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} &\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ab}{c}} = 2b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geq 2(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$$

Bài 4: (3 đ)

1. CMR các điểm M,D,O,H cùng nằm trên một đường tròn.

$HA=HB \Rightarrow OH \perp AB$ (đường kính đi qua trung điểm một dây không đi qua tâm) $\Rightarrow$

$$OHM = 90^\circ$$

Lại có $ODM = 90^\circ$ (Tính chất tiếp tuyến)

Suy ra $OHM = ODM = 90^\circ \Rightarrow H, D$ cùng nhìn đoạn OM dưới 1 góc vuông $\Rightarrow H, D$ cùng nằm trên đường tròn đường kính $OM \Rightarrow$ các điểm M, D, O, H cùng nằm trên đường tròn đường kính OM

2. Đoạn OM cắt đường tròn tại điểm I . CMR I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCD .

Ta có: $COI = DOI$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow CI = DI \Rightarrow CDI = DIM \Rightarrow DI$ là phân giác trong của ΔMCD (1)

Lại có MI là đường phân giác trong của ΔMCD (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
(2)

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMCD

3. Đường thẳng qua O , vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại P và Q .

Tìm vị trí điểm M trên (d) sao cho diện tích ΔMPQ bé nhất.

Ta có $\Delta MOD = \Delta MOP$ (g-c-g) $\Rightarrow S_{\Delta MPQ} = 2 S_{\Delta MOQ} = OD.MQ = R.MQ$

$\Rightarrow S_{\Delta MPQ}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MQ$ nhỏ nhất (3)

Theo BĐT Cô – si cho hai số không âm ,

ta có: $MQ = MD + DQ \geq 2\sqrt{MD.DQ} = 2\sqrt{OD^2} = 2OD = 2R$

(Vì ΔMOD vuông tại O có đường cao OD nên $OD^2 = MD.DQ$)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow MD = DQ \Leftrightarrow \Delta OMQ$ vuông cân tại O

$$= \frac{OD}{\sin \angle OMD} = \frac{R}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}.R$$

(Vì ΔODM vuông nên $OD = OM.\sin \angle OMD$)

Vậy $MQ_{\min} = 2R \Leftrightarrow OM = \sqrt{2} R$ (2)

Từ (3) và (4) suy ra khi M nằm trên (d) cách O một khoảng $\sqrt{2} R$ thì $S_{\Delta MPQ}$ nhỏ nhất là $R.2R = 2R^2$ (d.v.d.t)

Bài 5: (1 đ) : $A = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}} - \sqrt{2}$.Ta có:

$$\sqrt{2}.A = \sqrt{14 + 2\sqrt{13}} - \sqrt{14 - 2\sqrt{13}} - 2 = \sqrt{(\sqrt{13} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{13} - 1)^2} - 2$$

$$= |\sqrt{13} + 1| - |\sqrt{13} - 1| - 2 = \sqrt{13} + 1 - \sqrt{13} + 1 - 2 = 0$$

$\Rightarrow A = 0$

SỞ GD & ĐT HOÀ BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ

NĂM HỌC 2015-2016

ĐỀ THI MÔN TOÁN

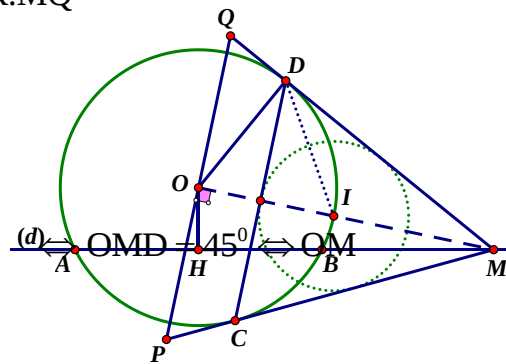
(DÀNH CHO CHUYÊN TOÁN)

Ngày thi: 07 tháng 6 năm 2015

Thời gian làm bài : 150 phút (không kể thời gian
giao đề)

(Đề thi gồm có 01 trang, 05 câu)

Câu I (2,0 điểm)



1) Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{8}{1+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}}$$

$$b) B = \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

2) Rút gọn biểu thức:

$$C = \frac{a^2 - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} + a + 1$$

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{2x+4} = \frac{1}{9x-2} + \frac{1}{5-4x}$

2) Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=z \\ x^3+y^3=z^2 \end{cases}$

Câu III (2,0 điểm)

Một vận động viên A chạy từ chân đồi đến đỉnh đồi cách nhau 6km với vận tốc 10km/h rồi chạy xuống dốc với vận tốc 15km/h. Vận động viên B chạy từ chân đồi lên đỉnh đồi với vận tốc 12km/h và gặp vận động viên A đang chạy xuống. Hỏi điểm hai người gặp nhau cách đỉnh đồi bao nhiêu ki-lô-mét, biết rằng B chạy sau A là 15 phút.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính AB và dây MN có độ dài bằng bán kính (M thuộc cung AN, M khác A, N khác B). Các tia AM và BN cắt nhau tại I, các dây AN và BM cắt nhau tại K.

1) Chứng minh rằng: IK vuông góc với AB.

2) Chứng minh rằng: $AK \cdot AN + BK \cdot BM = AB^2$

3) Tìm vị trí của dây MN để diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Câu V (1,0 điểm)

1) Chứng minh rằng nếu p và (p+2) là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

2) Cho $\begin{cases} x > 0, y > 0, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \leq 1$

----- Hết -----

SỞ GD & ĐT HOÀ BÌNH

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN
THỤ

NĂM HỌC 2015-2016

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
(DÀNH CHO CHUYÊN TOÁN)

(Hướng dẫn chấm này gồm có 03 trang)

Câu I (2,0 điểm)

Phân ý	Nội dung	Điểm
-----------	----------	------

1	$A = \frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{8}{1+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}}$ $= \frac{4(3-\sqrt{5})}{4} - \frac{8(1-\sqrt{5})}{-4} + \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3 - \sqrt{5} + 2 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5$	0,5đ
	$B = \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$ $= \sqrt{(\sqrt{\sqrt{2}-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{\sqrt{2}-1}-1)^2}$ $= \sqrt{\sqrt{2}-1} + 1 + 1 - \sqrt{\sqrt{2}-1}$ $= 2$	0,5đ
2	$C = \frac{a^2 - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} + a + 1 \quad (\text{DK: } a \geq 0)$ $C = \frac{\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3 - 1]}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3 + 1]}{a - \sqrt{a} + 1} + a + 1$	0,5đ
	$= \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) - \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1) + a + 1$ $= a - \sqrt{a} - a - \sqrt{a} + a + 1$ $= (\sqrt{a} - 1)^2$	0,5đ

Câu II (2,0 điểm)

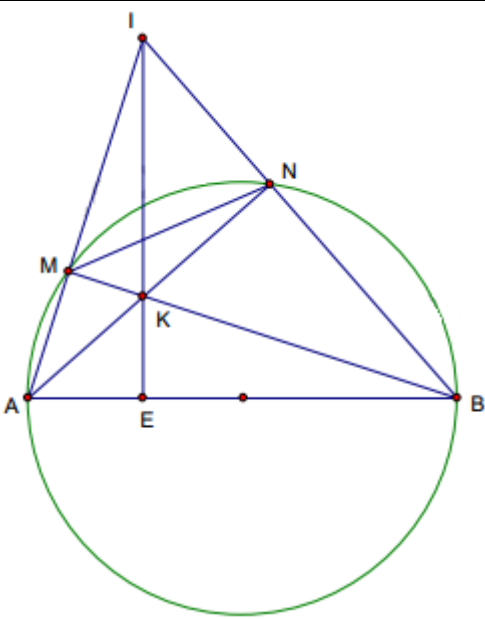
Phầ n ý	Nội dung	Điể m
1	$\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{2x+4} = \frac{1}{9x-2} + \frac{1}{5-4x} : \text{ĐK: } x \neq \frac{1}{3}, x \neq -2, x \neq \frac{2}{9}, x \neq \frac{5}{4}$	0,25 đ
	Ta có pt: $\frac{5x+3}{(3x-1)(2x+4)} = \frac{5x+3}{(9x-2)(5-4x)}$	0,25 đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{5} \\ (3x-1)(2x+4) = (9x-2)(5-4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ 6x^2 + 12x - 2x - 4 = -36x^2 + 45x + 8x - 10 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} (TM) \\ x = \frac{6}{7} (TM) \\ x = \frac{1}{6} (TM) \end{cases}$ Vậy phương trình đã có 3 nghiệm phân biệt như trên.	0,5đ
2	Ta có: $x^3 + y^3 = (x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2 - x - y) = 0$	0,25 đ
	Vì x, y nguyên dương nên $x+y > 0$, ta có: $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$	
	$\Leftrightarrow 2(x^2 - xy + y^2 - x - y) = 0$	0,25 đ
	$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$	
	Vì x, y nguyên nên có 3 trường hợp:	0,25

	+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x - y = 0 \\ (x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = y = 2, z = 4 \\ (y - 1)^2 = 1 \end{cases}$	đ
	+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ (x - y)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1, y = 2, z = 3 \\ (y - 1)^2 = 1 \end{cases}$	
	+ Trường hợp 3: $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ (x - y)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2, y = 1, z = 3 \\ (x - 1)^2 = 1 \end{cases}$	
	Vậy hệ có 3 nghiệm (1,2,3);(2,1,3);(2,2,4)	0,25 đ

Câu III (2,0 điểm)

Phần ý	Nội dung	Điểm
	Gọi điểm 2 vận động viên gặp nhau cách đỉnh đồi x km (x>0)	0,25đ
	Thời gian B đã chạy là $\frac{6-x}{12}$. Đồi $15p = \frac{1}{4}$ (giờ)	0,25đ
	Thời gian A đã chạy từ chân đồi đến đỉnh đồi là $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (giờ)	0,25đ
	Thời gian A đã chạy từ đỉnh đồi đến chỗ gặp nhau là $\frac{x}{15}$.	0,25đ
	Ta có phương trình $\frac{1}{4} + \frac{6-x}{12} = \frac{x}{15} + \frac{3}{5}$	0,5đ
	Giải phương trình được x= 1(km) . KL	0,5đ

Câu IV (3,0 điểm)

Phần ý	Nội dung	Điểm
		
1	Ta thấy $AN \perp BI$, $BM \perp AI$, nên K là trực tâm tam giác IAB. Do đó $IK \perp$	1,0đ

	AB	
2	Vì $\triangle AKE \sim \triangle ANB \sim$ nên $AK \cdot AN = AE \cdot AB$	0,25đ
	Tương tự vì $\triangle BEK \sim \triangle BMA \sim$ nên $BK \cdot BM = BE \cdot BA$	0,25đ
	Vậy $AK \cdot AN + BK \cdot BM = AE \cdot AB + BE \cdot BA = AB^2$	0,5đ
3	Chỉ ra số $MN=60^\circ$ nên tính được $\angle IAB=60^\circ$, do đó điểm I thuộc cung chứa góc 60° dựng trên đoạn AB.	0,5đ
	Diện tích tam giác IAB lớn nhất khi IE lớn nhất (IE là đường cao của tam giác IAB), khi đó I nằm chính giữa cung chứa góc 60° dựng trên đoạn AB tương ứng với MN song song với AB.	0,5đ

Câu V (1,0 điểm)

Phầ n ý	Nội dung	Điể m
1	Ta có: $p+(p+2)=2(p+1)$	0,25 đ
	Vì p lẻ nên $(p+1):2 \Rightarrow 2(p+1):4$ (1)	
	Vì p, (p+1), (p+2) là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có ít nhất một số chia hết cho 3, mà p và (p+2) nguyên tố nên $(p+1):3$ (2)	0,25 đ
	Từ (1) và (2) suy ra $[p+(p+2)]:12$ (đpcm)	
2	Đặt $\begin{cases} x = a^3 \\ y = b^3 \\ z = c^3 \end{cases}$, vì $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$	0,25 đ
	Ta có $x+y+1 = a^3+b^3+1 = (a+b)(a^2-ab+b^2)+1 \geq (a+b)ab+1 = ab(a+b+c) = \frac{a+b+c}{c}$	
	Do đó $\frac{1}{x+y+1} \leq \frac{c}{a+b+c}$	0,25 đ
	Tương tự ta có $\frac{1}{y+z+1} \leq \frac{a}{a+b+c}$ $\frac{1}{z+x+1} \leq \frac{b}{a+b+c}$	
	Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.	

*** Chú ý: Các lời giải đúng khác đều được xem xét cho điểm tương ứng.**

SỞ GIÁO DỤC VÀ
ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ
MINH

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10- THPT CHUYÊN
Năm học 2010- 2011
Môn thi: TOÁN
(Thời gian : 150 phút – không kể thời gian phát đề)

Câu 1: (4 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} + y = 1 \\ \frac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases}$$

2) Giải phương trình : $(2x^2 - x)^2 + 2x^2 - x - 12 = 0$

Câu 2: (3 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(2m + 1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$ (x là ẩn số)
 Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa

$$|x_1| = 2|x_2|$$

Câu 3: (2 điểm)

Thu gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

Câu 4: (4 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là điểm
 chính giữa của cung nhỏ AC. Hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại
 M. Chứng minh rằng :

a) $\mathbf{ABP = AMB}$

b) $\mathbf{MA \cdot MP = BA \cdot BM}$

Câu 5 : (3 điểm)

a) Cho phương trình $2x^2 + mx + 2n + 8 = 0$ (x là ẩn số và m, n là các số nguyên). Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng $m^2 + n^2$ là hợp số

b) Cho hai số dương a, b thỏa $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$. Tính $P = a^{2010} + b^{2010}$

Câu 6 : (2 điểm)

Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = 2a$. Gọi (O) là đường tròn tâm O bán kính a . Tìm điểm M thuộc (O) sao cho $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 7: (2 điểm)

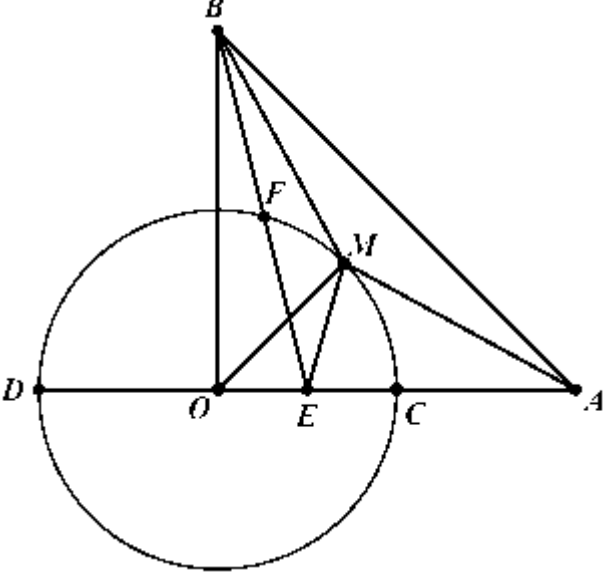
Cho a, b là các số dương thỏa $a^2 + 2b^2 \leq 3c^2$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{3}{c}$

ĐÁP ÁN

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
-----	----------------	------

Câu 1	<u>Câu 1:</u> (4 điểm) 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x+1} + y = 1 \\ \frac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{x+1} + y = 1 \\ \frac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{x+1} - 2y = -2 \\ \frac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 1 \\ \frac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$	0,5 x4 đ
(4 đ)	2) Giải phương trình : $(2x^2 - x)^2 + 2x^2 - x - 12 = 0$ Đặt $t = 2x^2 - x$, pt trở thành: $t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ hay } t = -4$ $t = 3 \Rightarrow 2x^2 - x = 3 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = \frac{3}{2}$ $t = -4 \Rightarrow 2x^2 - x = -4$ (vô nghiệm) Vậy pt có hai nghiệm là $x = -1$, $x = 3/2$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
Câu 2	<u>Câu 2 :</u> (3 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2(2m + 1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$ (x là ẩn số) (*) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ thỏa $x_1 = 2 x_2$	
(3 đ)	$\Delta' = (2m+1)^2 - (4m^2 + 4m - 3) = 4 > 0$, với mọi 1 Vậy (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m	0,5 đ
	$x_1 = 2m-1$; $x_2 = 2m+3$ $x_1 = 2 x_2 \Leftrightarrow 2m-1 = 2 2m+3$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 = 2(2m+3) \\ 2m-1 = -2(2m+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{7}{2} \\ m = -\frac{5}{6} \end{cases}$	0,5 đ 1,5 đ
Câu 3	<u>Câu 3 :</u> (2 điểm)	
(2 đ)	Thu gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$	
	Xét $M = \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}}$ Ta có $M > 0$ và $M^2 = \frac{14+2\sqrt{44}}{7+2\sqrt{11}} = 2$, suy ra $M = \sqrt{2}$ $A = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1$	1 đ 1 đ

<u>Câu 4</u> (4 đ)	<u>Câu 4</u> : (4 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O).Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ AC.Hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại M.Chứng minh rằng : a) $\angle ABP = \angle AMB$ b)$MA.MP = BA.BM$	
	a) $\angle AMB = \frac{1}{2} (sđ AB - sđ PC) = \frac{1}{2} (sđ AC - sđ PC) = \frac{1}{2} sđ AP = \angle ABP$ b) $PA = PC \Rightarrow \angle CAP = \angle ABP = \angle AMB \Rightarrow CM = AC = AB$ $\triangle MAC \sim \triangle MBP$ (g-g) $\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MP} \Rightarrow MA.MP = MB.MC = MB.AB$	2 đ 1 đ 1 đ
<u>Câu 5</u> (3 đ)	<u>Câu 5</u>: (3 điểm) a)Cho phương trình $2x^2 + mx + 2n + 8 = 0$ (x là ẩn số và m, n là các số nguyên).Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng $m^2 + n^2$ là hợp số Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{m}{2}, x_1.x_2 = n + 4$ $m^2 + n^2 = (2x_1 + 2x_2)^2 + (x_1x_2 - 4)^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 16$ $= (x_1^2 + 4).(x_2^2 + 4)$ $x_1^2 + 4, x_2^2 + 4$ là các số nguyên lớn hơn 1 nên $m^2 + n^2$ là hợp số b)Cho hai số dương a,b thỏa $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$.Tính $P = a^{2010} + b^{2010}$ Ta có $0 = a^{100} + b^{100} - (a^{101} + b^{101}) = a^{101} + b^{101} - (a^{100} + b^{100})$ $\Rightarrow a^{100}(1-a) + b^{100}(1-b) = a^{101}(1-a) + b^{101}(1-b)$ $\Rightarrow a=b=1$ $\Rightarrow P = a^{2010} + b^{2010} = 2$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 1 đ 0,5 đ

Câu 6	Câu 6: (2 điểm) Cho tam giác OAB vuông cân tại O với OA=OB =2a.Gọi (O) là đường tròn tâm O bán kính a.Tìm điểm M thuộc (O) sao cho MA+2MB đạt giá trị nhỏ nhất	
(2 đ)		
	Đường thẳng OA cắt (O) tại C và D, với C là trung điểm của OA.Gọi E là trung điểm của OC	
	*Trường hợp M không trùng với C và D Hai tam giác OEM và OMA đồng dạng (do $\angle MOE = \angle AOM, \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} = \frac{OE}{OM}$) $\Rightarrow \frac{ME}{AM} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2.EM$	1 đ
	* Trường hợp M trùng với C : MA=CA=2.EC=2.EM * Trường hợp M trùng với D: MA=DA=2.ED=2.EM Vậy ta luôn có MA=2.EM	0,5 đ
	$MA+2.MB=2(EM+MB) \geq 2.EB =$ hằng số Dấu “=” xảy ra khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn (O) Vậy MA +2.MB nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn (O)	0,5 đ
Câu 7	Câu 7 : (2 điểm) Cho a , b là các số dương thỏa $a^2 + 2b^2 \leq 3 c^2$.Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{3}{c}$ Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{9}{a+2b}$ (1) $\Leftrightarrow (a+2b)(b+2a) \geq 9ab$ $\Leftrightarrow 2a^2 - 4ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(a-b) \geq 0 \text{ (đúng)}$ $a+2b \leq \sqrt{3(a^2 + 2b^2)}$ (2) $\Leftrightarrow (a+2b)^2 \leq 3(a^2 + 2b^2)$ $\Leftrightarrow 2a^2 - 4ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(a-b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$ Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{9}{a+2b} \geq \frac{9}{\sqrt{3(a^2 + 2b^2)}} \geq \frac{3}{c} \text{ (do } a^2 + 2b^2 \leq 3c^2 \text{)}$	0,5 đ 0,5 đ 1 đ

Đề chính

NĂM HỌC 2015 – 2016

Môn thi: TOÁN - BẢNG A

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (3,0 điểm)

a. Chia 18 vật có khối lượng 2016^2 ; 2015^2 ; 2014^2 ; ...; 1999^2 gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau. (không được chia nhỏ các vật đó).

b. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x + 171 = y^2$

Câu 2. (6,0 điểm)

a. Giải phương trình: $x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}$

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 + 1 = y^2 - 4x \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$

Câu 4. (6,0 điểm)

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm (O; R). Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm), cát tuyến MPQ không đi qua O (P nằm giữa M, Q). Gọi H là giao điểm của OM và AB.

a. Chứng minh: $HPO = HQO$

b. Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. (2,0 điểm)

Tìm hình vuông có kích thước nhỏ nhất để trong hình vuông đó có thể sắp xếp được 5 hình tròn có bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn bất kì nào trong chúng có điểm chung.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN LỚP 9

Câu		Nội dung	Điểm
1	a	- Nhận xét: $n^2 + (n + 5)^2 = 2n^2 + 10n + 25 = x + 25$	0,5

		$(n+1)^2 + (n+4)^2 = 2n^2 + 10n + 17 = x + 17$ $(n+2)^2 + (n+3)^2 = 2n^2 + 10n + 13 = x + 13$	
		Lần thứ nhất, chia 6 vật có khối lượng $1999^2, \dots, 2004^2$ thành ba phần: $A + 25, A + 17, A + 13$ Lần thứ hai, chia 6 vật có khối lượng $2005^2, \dots, 2010^2$ thành ba phần: $B + 25, B + 17, B + 13$ Lần thứ ba, chia 6 vật có khối lượng $2011^2, \dots, 2016^2$ thành ba phần: $C + 25, C + 17, C + 13$	0,5
		Lúc này ta chia thành các nhóm như sau: Nhóm thứ nhất $A + 25, B + 17, C + 13$; nhóm thứ hai $B + 25, C + 17, A + 13$; nhóm thứ ba $C + 25, A + 17, B + 13$. Khối lượng của mỗi nhóm đều bằng $A + B + C + 55$ gam.	0,5
	b	Viết phương trình đã cho về dạng: $9.(3^{x-2} + 19) = y^2$ ($x \geq 2$). Để y là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là $3^{x-2} + 19 = z^2$ là số chính phương (z là số nguyên dương)	0,25
		Nếu $x - 2 = 2k + 1$ là số lẻ thì $3^{2k+1} + 19 = (3^{2k+1} + 1) + 18 = 4.B + 18$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương. Do đó $x - 2 = 2k$ là số chẵn	0,5
		Ta có $3^{x-2} + 19 = z^2 \Leftrightarrow (z - 3^k)(z + 3^k) = 19$. Vì 19 là số nguyên tố và $z - 3^k < z + 3^k$ nên $\begin{cases} z - 3^k = 1 \\ z + 3^k = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10 \\ 3^k = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10 \\ k = 2 \end{cases}$	0,5
		Vậy $x = 6$ và $y = 30$.	0,25
2	a	ĐKXD: R .	0,5
		Vì $x = \frac{-1}{2}$ không phải là nghiệm, nên phương trình đã cho tương đương với phương trình: $\frac{x^2 + 6x + 1}{2x + 1} = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$	
		$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 6x + 1}{2x + 1} - 2 = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - 2$	0,5
		$\frac{x^2 + 6x + 1 - 2(2x + 1)}{2x + 1} = \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - 2)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2}$	0,25

		$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{2x+1} = \frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}$	0,25
		$\Leftrightarrow (x^2+2x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2} - \frac{1}{2x+1}\right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-1=0 & (1) \\ \sqrt{x^2+2x+3}+2=2x+1 & (2) \end{cases}$	0,5
		PT (1) có hai nghiệm $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$	0,25
		PT (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3}+2=2x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}=2x-1$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2+2x+3=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$	0,25
		Vậy phương đã cho có ba nghiệm: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}; x_3 = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$	0,25
	b	Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2 = y^2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 2x+1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$	0,5
		Xét hệ: $\begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2+x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \end{cases}$	0,5
		$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ 7x^2+5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{5}{7} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-\frac{5}{7} \\ y=-\frac{3}{7} \end{cases}$	0,5
		Xét hệ: $\begin{cases} y = -2x-1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ x^2-x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \end{cases}$	0,5
		$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ 3x^2+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$	0,5
		Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) là: (0; 1), $\left(-\frac{5}{7}; -\frac{3}{7}\right)$, (0; -1), (-1; 1)	0,5
3		Sử dụng bất đẳng thức Cô si Ta có: $\frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geq a+1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a+1 - \frac{b+ab}{2} \quad (1)$	0,5
		Tương tự: $\frac{b+1}{c^2+1} \geq b+1 - \frac{c+bc}{2} \quad (1)$	0,5

	Trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho $EB = EF$ hay $\triangle EBF$ cân tại E, suy ra $BFA = \frac{1}{2}BEA$. Đặt $AEB = \alpha$ khi đó $AFB = \frac{\alpha}{2}$ nên F di chuyển trên cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên BC.	0,5
	Ta có: $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} \geq \frac{4}{EA+EB}$. Như vậy $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ nhỏ nhất khi EA + EB lớn nhất hay EA + EF lớn nhất $\Leftrightarrow$ AF lớn nhất (**)	0,5
	Gọi O' là điểm chính giữa của cung lớn AB, suy ra $\triangle O'AB$ cân tại O' suy ra $O'A = O'B$ (3)	0,5
	$\triangle O'EB$ và $\triangle O'EF$ có $EB = EF$, $O'E$ chung và $FEO' = BEO'$ (cùng bù với $BAO' \Rightarrow \triangle O'EB = \triangle O'EF$ (c.g.c) suy ra $O'B = O'F$ (4)	0,5
	Từ (3) và (4) suy ra O' là tâm cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn thẳng BC. (cung đó và cung lớn AB cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB)	0,5
	Do đó AF lớn nhất khi nó là đường kính của (O') khi $E \equiv O'$ (***)).	0,25
	Từ (**) và (***) suy ra E là điểm chính giữa cung lớn AB thì $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.	0,25
5	Gọi O là tâm của hình vuông ABCD cạnh là $a > 2$ chứa 5 hình tròn bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn nào trong chúng có điểm trong chung. Suy ra tâm của các hình tròn này nằm trong hình vuông MNPQ tâm O cạnh là $(a-2)$ và $MN \parallel AB$. Các đường trung bình của hình vuông MNPQ chia hình vuông này thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau.	0,75
	Theo nguyên lí Dirichle tồn tại một hình vuông nhỏ chứa ít nhất 2 trong 5 tâm của các hình tròn nói trên, chẳng hạn đó là O_1 và O_2 .	0,5
	Do 5 hình tròn này không có hai hình tròn nào có điểm trong chung nên $O_1O_2 \geq 2$ (1)	0,5
	Mặt khác O_1O_2 cùng nằm trong một hình vuông nhỏ có cạnh là $\frac{a-2}{2}$ nên $O_1O_2 \leq \frac{a-2}{2} \cdot \sqrt{2}$ (2) ($\frac{a-2}{2} \cdot \sqrt{2}$ là đường chéo hình vuông nhỏ)	0,5

	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{a-2}{2}\sqrt{2} \geq 2 \Leftrightarrow a \geq 2+2\sqrt{2}$. Do đó mọi hình vuông có cạnh lớn hơn hoặc bằng $(2+2\sqrt{2})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,5
	Vậy hình vuông ABCD có cạnh $(2+2\sqrt{2})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG**

**KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂNG KHIẾU TRẦN PHÚ NĂM HỌC 2012- 2013**
Môn thi: TOÁN (chuyên) Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi 25 tháng 6 năm 2012
Đề thi gồm : 01 trang

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I (2,0 điểm)

5) Cho $A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của A

6) Cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm nguyên dương biết a, b là hai số dương thỏa mãn $5a + b = 22$. Tìm hai nghiệm đó.

Câu II (2,0 điểm)

3) Giải phương trình: $4x^2 - 6x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}$

4) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 - x + \frac{1}{y} = 1 \\ y^2 + y - xy^2 = 4 \end{cases}$$

Câu III (1,0 điểm) Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} > 4$

Câu IV (2,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có trực tâm H, nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AA'. Gọi AD là đường phân giác trong của góc BAC ($D \in BC$). M, I lần lượt là trung điểm của BC và AH.

3) Lấy K đối xứng với H qua AD. Chứng minh K thuộc đường thẳng AA'.

4) Gọi P là giao điểm của AD với HM. Đường thẳng HK cắt AB và AC lần lượt tại Q và R. Chứng minh rằng Q và R lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên AB, AC.

Câu V (3,0 điểm)

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^4 + y^4 + z^4 = 2012$

2) Cho hình vuông 12×12 , được chia thành lưới các hình vuông đơn vị. Mỗi đỉnh của hình vuông đơn vị này được tô bằng một trong hai màu xanh đỏ. Có tất cả 111 đỉnh màu đỏ. Hai trong số những đỉnh màu đỏ này nằm ở đỉnh hình vuông lớn, 22 đỉnh màu đỏ khác nằm trên cạnh cạnh của hình vuông lớn (không trùng với đỉnh của hình vuông lớn) hình vuông đơn vị được tô màu theo các quy luật sau: cạnh có hai đầu mút màu đỏ được tô màu đỏ, cạnh có hai đầu mút màu xanh được tô màu xanh, cạnh có một đầu mút màu đỏ và một đầu mút màu xanh thì được tô màu vàng. Giả sử có tất cả 66 cạnh vàng. Hỏi có bao nhiêu cạnh màu xanh.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....

Chữ kí của giám thị 1: Chữ kí của giám thị 2:

Lời giải một số câu

Câu I

$$1) A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{15\sqrt{x}-11-(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)-(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$\Leftrightarrow A = -5 + \frac{17}{\sqrt{x}+3}, A \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x=0 \text{ khi đó } A \text{ lớn nhất bằng } \frac{2}{3}.$$

2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của phương trình ($x_1 < x_2$)

Ta có $a = -x_1 - x_2$ và $b = x_1 x_2$ nên

$$5(-x_1 - x_2) + x_1 x_2 = 22$$

$$\Leftrightarrow x_1(x_2 - 5) - 5(x_2 - 5) = 47$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 47 \quad (*)$$

Vì $x_1 \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x_1 \geq 1$ nên với giả sử $x_1 < x_2$

Ta có: $-4 \leq x_1 - 5 < x_2 - 5$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5 = 1 \\ x_2 - 5 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 52 \end{cases}.$$

Khi đó: $a = -58$ và $b = 312$ thỏa $5a + b = 22$. Vậy hai nghiệm cần tìm là $x_1 = 6; x_2 = 52$.

Câu II:

$$1) 4x^2 - 6x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 2(4x^2 - 2x + 1) - (4x^2 + 2x + 1) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{(4x^2 - 2x + 1)(4x^2 + 2x + 1)}$$

Để thấy $4x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + (x-1)^2 > 0, \forall x$ & $4x^2 + 2x + 1 = 3x^2 + (x+1)^2 > 0, \forall x$ nên đặt

$$a = \sqrt{4x^2 - 2x + 1}, b = \sqrt{4x^2 + 2x + 1} = b, a > 0, b > 0$$

Ta có phương trình $2a^2 - b^2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}ab$

$$\Leftrightarrow 6a^2 + \sqrt{3}ab - 3b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{a}{b}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}, (TM) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 2x + 1}{4x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^2 - x + \frac{1}{y} = 1 & (1) \\ y^2 + y - xy^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

Nếu $y = 0$ thì (2) vô lý nên $y \neq 0$ vậy (2) $\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y} - x = \frac{4}{y^2}$

Đặt $\frac{1}{y} = b$ ta có hệ

$$\begin{cases} 4x^2 - x + b = 1 & (1') \\ 4b^2 - b + x = 1 & (2') \end{cases}$$

Lấy (1') - (2') ta có $(x-b)(2x+2b-1) = 0$

*) Nếu $x = b$ ta có hai nghiệm $(-\frac{1}{2}, -2)$ và $(\frac{1}{2}; 2)$

*) Nếu $2x + 2b = 1$ thì hệ vô nghiệm

Vậy hệ có hai nghiệm $(-\frac{1}{2}, -2)$ và $(\frac{1}{2}; 2)$

Câu V

3)

Giả sử một số nguyên là số chẵn có dạng $2k$ thì $(2k)^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod{8}$

Nếu Số nguyên là số nguyên lẻ có dạng $2k + 1$ thì

$$(2k + 1)^4 = (4t + 1)^2 = 16h + 1 \equiv 1 \pmod{8} \text{ nên với } k, t, h \text{ là các số nguyên}$$

$$x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{8}$$

Nhưng $2012 \equiv 4 \pmod{8}$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

4) Có 111 đỉnh màu đỏ, trong đó có 22 đỉnh nằm trên cạnh của hình vuông, 87 đỉnh nằm lọt trong hình vuông lớn. Từ đó ta thấy có hai điểm màu xanh ở hai góc của hình vuông lớn, 22 điểm màu xanh trên các cạnh của hình vuông lớn không nằm trên đỉnh của hình vuông lớn còn lại có 34 điểm màu xanh nằm lọt trong hình vuông. Với 312 cạnh của cả hình, ta cho đỉnh của mỗi cạnh như sau: trong 2 mút của nó có i điểm màu xanh thì cho i điểm. Gọi tổng số điểm là S , ta có $S = 2$ (số cạnh màu xanh) + số cạnh vàng. Ta lại có

thể đếm số S theo cách khác: Mỗi điểm xanh ở góc là mút của hai đoạn, các điểm còn lại là mút của 4 đoạn. Vậy $S = 2 \times 2 + 22 \times 3 + 34 \times 4 = 206$, suy ra số cạnh xanh là : $(206 - 66) : 2 = 70$ cạnh màu xanh.

Câu III: Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} > 4$

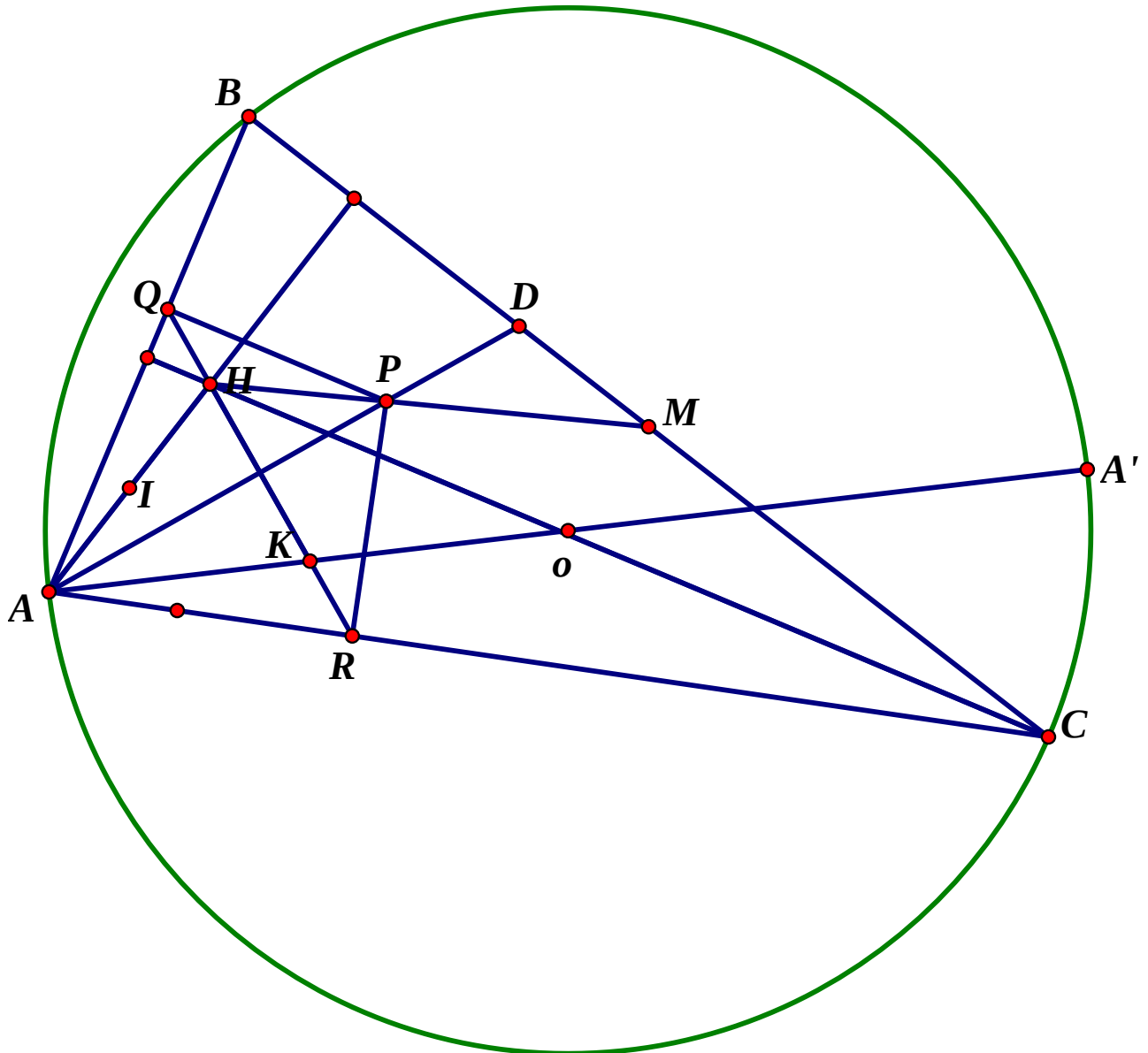
$$\Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{9}{a+b} \right) > 18$$

Thật vậy:

$$[(b+c) + (a+c) + (a+b)] \left(\frac{1}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{9}{a+b} \right) > \left(\sqrt{\frac{b+c}{b+c}} + \sqrt{\frac{4(a+c)}{(a+c)}} + \sqrt{\frac{9(a+b)}{(a+b)}} \right)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{9}{a+b} \right) > 18 \text{ Điều phải chứng minh}$$

Bài hình: 1) Tam giác ABA' có: $\angle ABC + \angle A'BC = 90^\circ$, $\angle ABC + \angle BAN \Rightarrow \angle A'BC = \angle BAN$



Lại có

$A'AC = A'BC$ (cùng chắn cung $A'C$) nên $BAN = A'AC$

Cũng có $BAD = CAD \Rightarrow BAD - BAN = CAD - CAN \Rightarrow$

Mặt khác H đối xứng với K qua AD $\Rightarrow HAD = KAD$, H thuộc AN nên K thuộc AA'

2) Bạn tự giải nhé.

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO

TẠO

ĐỀ CHÍNH

(Đề thi gồm có 01

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT

Năm học: 2015-2016

Đề thi môn: TOÁN (chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút

ĐỀ

Câu 1.

$$P = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2}{4\sqrt{a}} - 1 \right) \quad \text{Với } a > 0, a \neq 1.$$

1) Rút gọn: P

2) Đặt $Q = (a - \sqrt{a} + 1).P$. Chứng minh $Q > 1$

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ (1) Tìm m để pt có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1 - m)^2 + x_2 = m + 2 \quad (2)$$

Câu 3. 1) Giải pt $(x+1)\sqrt{2(x^2+4)} = x^2 - x - 2$ (1)

$$2) \text{ Giải hpt } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 & (1) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{x^2+3x}) = 3 & (2) \end{cases}$$

Câu 4 Giải pt trên tập số nguyên $x^{2015} = \sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)} + 1$ (1)

Câu 5. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính

R. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC.

1) Chứng minh rằng: $AH = 2.OM$

2) Dựng hình bình hành AHIO. Gọi J là tâm Đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC.

Chứng minh rằng: $OI.OJ = R^2$

3) Gọi N là giao điểm của AH và đường tròn tâm O (N khác A). Gọi D là điểm bất kỳ trên cung nhỏ NC của đường tròn tâm O (D khác N và C). Gọi E là điểm đối xứng với D qua AC, K là giao điểm của AC và HE. Chứng minh rằng: $ACH = ADK$.

Câu 6. 1) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1 + \sqrt{ab}$

2) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2+2a} + \frac{1}{b^2+2b} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$$

(về phải của pt (1) ta thường hay gặp trong các bài toán giải hệ pt ta cần chú ý)

SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN BÌNH PHƯỚC 2015-2016

Câu	Nội dung
1	2) Đặt $Q = (a - \sqrt{a} + 1).P$. Chứng minh $Q > 1$ Ta có: $Q = (a - \sqrt{a} + 1).P = \frac{a - \sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} = \frac{a - \sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{\sqrt{a}} + 1 > 1, \forall a > 0; a \neq 1.$ (Cách khác: có thể tách ra rồi sử dụng bất côsi và xét thấy dấu bằng không xảy ra suy ra $Q > 1$)
2	Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ (1) Tìm m để pt có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 - m)^2 + x_2 = m + 2$ (2) Pt (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$. Khi đó theo vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m + 2; x_1 x_2 = m^2$ Vì x_1 là nghiệm của pt (1) nên $x_1^2 = 2(m+1)x_1 - m^2$ thay vào (2) ta được $2x_1 + x_2 = m + 2$ Từ vi-ét và giả thiết, ta có $-m(3m+2) = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn) Vậy $\begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$ thỏa mãn ycbt.
3	1) Giải pt $(x+1)\sqrt{2(x^2+4)} = x^2 - x - 2$ (1) ĐK: $x \in R$ Pt (1) $\Leftrightarrow (x+1)\left[\sqrt{2(x^2+4)} - (x-2)\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \geq 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$ Vậy pt có nghiệm $x = -1$ 2) Giải hpt $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 & (1) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{x^2+3x}) = 3 & (2) \end{cases}$ (về phải của pt (1) ta thường hay gặp trong các bài toán giải hệ pt ta cần chú ý) ĐK: $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ (*) Từ pt (1) suy ra $(y-x)\left(x + 2y + \frac{1}{y\sqrt{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x + 2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} = 0 \end{cases}$ +) Với $y = x$ thay vào (2) ta được $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x^2+3x}) = 3 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2+3x} = \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 1)(\sqrt{x} - 1) = 0$ (nhân hai vế pt với $\sqrt{x+3} + \sqrt{x}$) (Ta cũng có thể đặt $t = \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$ rồi bình phương hai

	về) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=1 \\ \sqrt{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ (L)} \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$	
	+) Vì $x > 0; y > 0$ nên $x + 2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} = 0$ vô nghiệm	
	Vậy nghiệm của hpt là: $(x; y) = (1; 1)$.	
4	Giải pt trên tập số nguyên $x^{2015} = \sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)} + 1$ (1) ĐK: $y(y+1)(y+2)(y+3) \geq 0$ Pt (1) $\Leftrightarrow x^{2015} - 1 = \sqrt{(y^2 + 3y + 1)^2 - 1}$ Đặt: $y^2 + 3y + 1 = a (a \in \mathbb{Z})$ Vì x nguyên nên $x^{2015} - 1$ nguyên, suy ra $a^2 - 1 = k^2 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a^2 - k^2 = 1 \Rightarrow (a - k)(a + k) = 1 \Rightarrow k = 0$ $\Rightarrow (y^2 + 3y + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 3y + 1 = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = -3 \Rightarrow x = 1 \\ y = -1 \Rightarrow x = 1 \\ y = -2 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$ Vậy pt có 4 nghiệm nguyên $(x; y)$: $(1; 0), (1; -1), (1; -2), (1; -3)$. (Ta thường hay gặp chứng minh biểu thức dưới dấu căn cộng 1 là số chính phương)	
6	1) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1 + \sqrt{ab}$ Ta chứng minh bằng phép biến đổi tương đương 2) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + 2a} + \frac{1}{b^2 + 2b} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ (Ta cần sử dụng hai bất phụ sau $\sqrt{(1+x)(1+y)} \geq 1 + \sqrt{xy}$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ nhưng phải chứng minh hai bất này mới được điểm tối đa) Cách1: $P \geq \frac{4}{a^2 + 2a + b^2 + 2b} + 1 + ab = \frac{4}{(a+b)^2 - 2ab + 2(a+b)} + 1 + ab = \frac{4}{a^2 b^2} + ab + 1$ $= \left(\frac{4}{a^2 b^2} + \frac{ab}{16} + \frac{ab}{16} \right) + \frac{7ab}{8} + 1 \geq 3 \sqrt[3]{4 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} + \frac{7ab}{8}} + 1 = \frac{7}{4} + \frac{7ab}{8}$ Mặt khác: từ giả thiết, ta có: $ab = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \geq 4$ Do đó $P \geq \frac{7}{4} + \frac{7 \cdot 4}{8} = \frac{21}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{21}{4}$ khi $a = b = 2$ Bình luận: nếu không có bất phụ thứ nhất, ta phải nghĩ đến sử dụng bất Bu-nhia-copxki cho biểu thức dưới dấu căn. Còn tổng hai biểu thức nghịch đảo thì quá rõ, sau đó dùng pp pháp dồn biến)	
	Cách 2: $P = \frac{1}{a^2 + 2a} + \frac{1}{b^2 + 2b} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \geq \frac{1}{a^2 + 2a} + \frac{1}{b^2 + 2b} + 1 + ab = \frac{1}{a(a+2)} + \frac{1}{b(b+2)} + a + b + 1$ $= \left(\frac{1}{a(a+2)} + \frac{a}{16} + \frac{a+2}{32} \right) + \left(\frac{1}{b(b+2)} + \frac{b}{16} + \frac{b+2}{32} \right) + \frac{29}{32}(a+b) + \frac{7}{8}$	

	$\geq 3\sqrt[3]{1 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32}} + 3\sqrt[3]{1 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32}} + \frac{29}{32}(a+b) + \frac{7}{8} = \frac{13}{8} + \frac{29}{32}(a+b)$ Mặt khác: từ giả thiết, ta có: $a+b=ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow a+b \geq 4$ Do đó $P = \frac{13}{8} + \frac{29}{32}(a+b) \geq \frac{13}{8} + \frac{29}{32} \cdot 4 = \frac{21}{4}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{21}{4}$ tại $a=b=2$
	Cách 3: Ta có $a+b=ab \Rightarrow (a-1)(b-1)=1$ Đặt $a-1=x \Rightarrow a=x+1; b-1=y \Rightarrow b=y+1; x \cdot y=1$ Khi đó $P \geq \frac{1}{a^2+2a} + \frac{1}{b^2+2b} + 1 + ab = \frac{1}{a(a+2)} + \frac{1}{b(b+2)} + a+b+1$ $= \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(y+1)(y+3)} + x+y+3$
5	Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC. 1) Chứng minh rằng: $AH = 2 \cdot OM$ 2) Dựng hình bình hành $AHIO$. Gọi J là tâm Đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Chứng minh rằng: $OI \cdot OJ = R^2$ 3) Gọi N là giao điểm của AH và đường tròn tâm O (N khác A). Gọi D là điểm bất kỳ trên cung nhỏ NC của đường tròn tâm O (D khác N và C). Gọi E là điểm đối xứng với D qua AC, K là giao điểm của AC và HE. Chứng minh rằng: $ACH = ADK$.

Quá trình làm và đánh máy không tránh khỏi sai sót, độc giả tự chỉnh sửa!

Tiếp tục cập nhật!

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG
VƯƠNG
NĂM HỌC 2012-2013

Môn Toán

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán)

Thời gian làm bài :150 phút không kể thời gian giao đề

Đề thi có 1 trang

Câu 1 (2,0 điểm)

Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{29+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} - 5\sqrt{2}$

Câu 2 (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ (m là tham số)

a) Xác định các giá trị của m để phương trình có nghiệm

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 Thỏa mãn $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7$

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + 2xy - 5x - y + 2 = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2x = 3 \end{cases}$$

b) Giải phương trình

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+16} = \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9}$$

Câu 4(4 điểm)

Cho đường tròn (O;R) có dây $AB = R\sqrt{2}$, M là điểm chuyển động trên cung lớn AB sao cho tam giác MAB nhọn. Gọi H là trực tâm tam giác MAB, C,D lần lượt là giao điểm thứ 2 của AH và BH với đường tròn (O). Giả sử N là giao của BC và AD

a) Tính số đo góc AOB, góc MCD

b) Chứng minh CD là đường kính của đường tròn (O) và HN có độ dài không đổi

c) Chứng minh HN luôn đi qua điểm cố định

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho x,y,z là các số không âm thỏa mãn $x + y + z = \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$S = x^3 + y^3 + z^3 + x^2 y^2 z^2$$

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN

Câu 1(1đ) tính $A = \sqrt{29 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} - 5\sqrt{2}$

HD

$$A = \sqrt{29 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} - 5\sqrt{2} = \sqrt{29 + 30\sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1}} - 5\sqrt{2} = \sqrt{59 + 30\sqrt{2}} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 3 - 5\sqrt{2} = 3$$

Câu 2(2đ) Cho phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$

a) Xác định m để phương trình có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1 ; x_2$ thỏa mãn $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7$

HD

a) Có $\Delta = m^2 - 4$ để pt có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$

b) Có $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7 \Leftrightarrow \left[\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} \right]^2 > 9 \quad (*)$

theo viet ta có $x_1 + x_2 = -m$; $x_1x_2 = 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \left(\frac{m^2 - 2}{1} \right)^2 > 9 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m^2 - 2 > 3 \\ m^2 - 2 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 > 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{5} \\ m < -\sqrt{5} \end{cases}$$

Câu 3 (2đ) a) giải hệ pt $\begin{cases} 2x^2 + 2xy - 5x - y + 2 = 0(1) \\ 4x^2 + y^2 + 2x = 3(2) \end{cases}$

b) giải pt $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+16} = \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} \quad (*)$

HD

a) Từ (1) ta được $(2x-1)(x+y-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(3) \\ x = 2 - y(4) \end{cases}$

Thay (3) vào (2) ta được $y=1$ hoặc $y=-1$

Thay (4) vào (2) ta được $5y^2 - 18y + 17 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy hệ có 2 nghiệm $x=1/2, y=1$ hoặc $x=1/2, y=-1$

b) ĐK $x \geq -1$

$(*) \Leftrightarrow 2x+17+2\sqrt{(x+1)(x+16)}=2x+13+2\sqrt{(x+4)(x+9)}$

$\Leftrightarrow 2 + \sqrt{(x+1)(x+16)} = \sqrt{(x+4)(x+9)} \Leftrightarrow 4+x^2+17x+16+4\sqrt{(x+1)(x+16)}=x^2+13x+36$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+16)}=4-x \quad (x \leq 4)$

$\Leftrightarrow x^2+17x+16=x^2+16-18x \Leftrightarrow 25x=0 \Leftrightarrow x=0$

Vậy pt có nghiệm $x=0$,

Câu 4 (4đ) Cho $(O;R)$ có dây cung $AB=R\sqrt{2}$ cố định. Lấy M di động trên cung lớn AB sao cho tam giác AMB có 3 góc nhọn. Gọi H là trực tâm tam giác AMB và C;D lần lượt là giao điểm thứ 2 của các đường thẳng AH;BH với (O) Giả sử N là giao điểm của đường thẳng BC và DA.

a) Tính số đo góc AOB và MCD

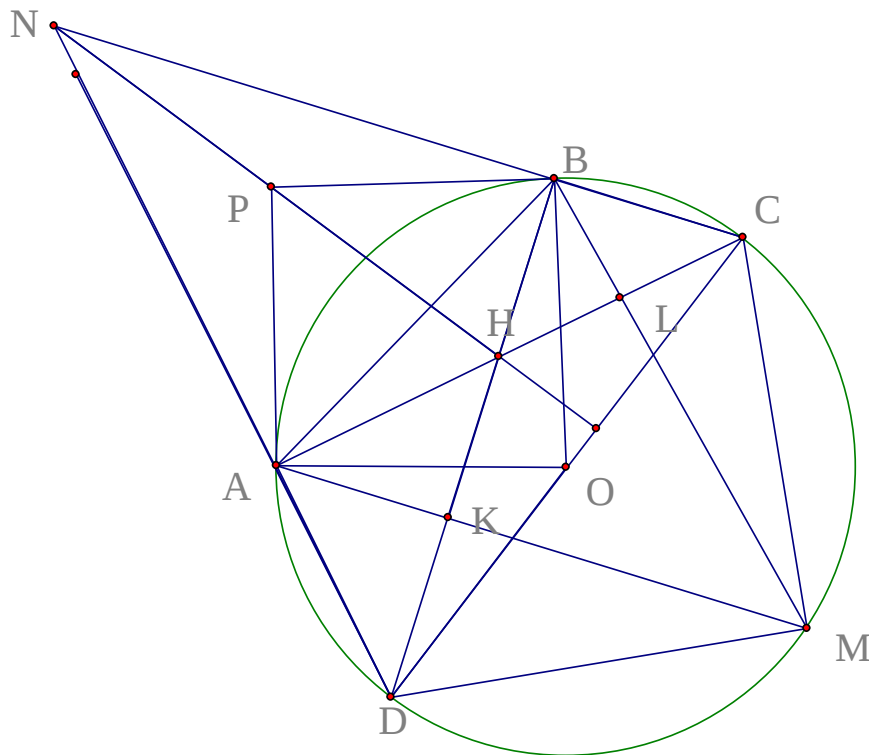
b) CMR : CD là đường kính của (O) và đoạn NH có độ dài không đổi.

c) CMR : NH luôn đi qua 1 điểm cố định.

HD

Gọi K;L lần lượt là chân đường cao hạ từ B; A của tam giác ABM

a) có $OA^2 + OB^2 = 2R^2 = AB^2 \Rightarrow$ Tam giác OBA vuông tại O $\Rightarrow$ góc AOB = 90°
có góc BMA = $45^\circ \Rightarrow \Delta BKM$ vuông cân tại K $\Rightarrow$ góc DBM = $45^\circ \Rightarrow$ góc DCM = $45^\circ(1)$



b) tương tự ta có $\triangle ALM$ vuông cân tại $L \Rightarrow \angle LAM = 45^\circ = \angle CDM$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle DCM$ vuông tại $M \Rightarrow CD$ là đường kính của (O)

$\triangle NHB$ và $\triangle DCB$ có $\angle BNH = \angle BDC \Rightarrow \triangle NHB$ đồng dạng $\triangle DCB$ (g-g)

$\Rightarrow NH/DC = HB/BC$ (3)

Lại có $\triangle HBC$ vuông tại C mà $\angle BCA = 1/2 \angle AOB = 45^\circ \Rightarrow \triangle HBC$ vuông cân tại B

$\Rightarrow BH = HC$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow NH/DC = 1 \Rightarrow NH = CD$ không đổi.

c) Gọi P là trung điểm của NH

$\Rightarrow PB = PA = 1/2 NH$ ($\triangle AHN$ và $\triangle BHN$ vuông tại A và B)

Mà $OB = OA = 1/2 CD$

$\Rightarrow OB = OA = PA = PB$ (vì $CD = HN$)

Lại có $\angle AOB = 90^\circ$

$\Rightarrow OBPA$ là hình vuông, mà B, O, A không thẳng hàng $\Rightarrow P$ không đổi $\Rightarrow PO = AB = R\sqrt{2}$ không đổi.

Vậy NH luôn đi qua điểm P cố định

Câu 5 (1đ)

Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $x + y + z = \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$S = x^3 + y^3 + z^3 + x^2 y^2 z^2$$

HD

Áp dụng BĐT Bunhia cho 2 dãy

Dãy 1 $x\sqrt{x}; y\sqrt{y}; z\sqrt{z}$ dãy 2 $\sqrt{x}; \sqrt{y}; \sqrt{z}$

Ta có $(\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 + \sqrt{z}^2)[(x\sqrt{x})^2 + (y\sqrt{y})^2 + (z\sqrt{z})^2] \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(x^3 + y^3 + z^3) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^2 (*)$$

Mặt khác

$$x^2 \geq x^2 - (y-z)^2 \Leftrightarrow x^2 \geq (x+y-z)(x-y+z) \quad (1)$$

$$y^2 \geq (y+x-z)(y-x+z) \quad (2); \quad z^2 \geq (z+y-x)(z-y+x) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có

$$xyz \geq (x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) = \left(\frac{3}{2} - 2z\right) \left(\frac{3}{2} - 2x\right) \left(\frac{3}{2} - 2y\right)$$

$$= \frac{27}{8} - \frac{9}{2}(x+y+z) + 6(xy+yz+xz) - 8xyz$$

$$\Leftrightarrow 9xyz \geq \frac{27}{8} - 3(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow x^2y^2z^2 \geq \left(\frac{3}{8} - \frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^2 \quad (**)$$

Mặt khác Bunhia cho x; y; z và 1;1;1; ta có $t = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{3}{4} \quad (***)$

Từ (*), (**), (***)ta có

$$S \geq \frac{2}{3}t^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{t}{3}\right)^2 = \frac{2t^2}{3} + \frac{t^2}{9} - \frac{t}{4} + \frac{9}{64} = \frac{7t^2}{9} - \frac{t}{4} + \frac{9}{64} = \frac{1}{6}\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{11}{8}t^2 + \frac{3}{64} \geq \frac{25}{64}$$

$$\text{Min}(S) = \frac{25}{64} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$$

GV Trần Bình Trân THCS Phụng Lâu –Việt Trì - Phú Thọ

mọi góp ý lời giải liên hệ gmail: tbtran1234@gmail.com

số điện thoại: **0988280207**

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ
NỘI

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA
VIỆT NAM
Độc lập – Tự do – Hạnh phúc

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN 2016

Môn thi: TOÁN

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào Trường Chuyên)

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (2 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right)$ với $0 < a$

< 1 . Chứng minh rằng $P = -1$

Câu 2 (2,5 điểm). Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - 1$ với m là tham số.

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi $m = 1$

b) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m, d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi y_1, y_2 là tung độ của A, B. Tìm m sao cho $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5}$

Câu 3 (1,5 điểm). Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120 km. Vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đều không đổi, vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB

sau bằng $\frac{1}{2}$ vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút và trở lại A với vận tốc lớn hơn vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu tiên lúc đi là 10 km/h .

Thời gian kể từ lúc xuất phát tại A đến khi xe trở về A là 8,5 giờ. Tính vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A?

Câu 4 (3,0 điểm). Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A, B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = AB$

c) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác AMPC và BMPD cắt PA, PB tương ứng tại E, F. Chứng minh CDFE là hình thang.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq 7$$

—————Hết—————

ĐÁP ÁN

Câu 1

Với $0 < a < 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{(1-a)(1+a)} - (\sqrt{1-a})^2} \right] \left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}} - \frac{1}{a} \right) \\
&= \left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{1-a}(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})} \right] \left[\sqrt{\frac{(1-a)(1+a)}{a^2}} - \frac{1}{a} \right] \\
&= \left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \right] \left(\frac{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}}{a^2} - \frac{1}{a} \right) \\
&= \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \cdot \frac{2\sqrt{1-a}\sqrt{1+a} - (1-a) - (1+a)}{2a} \\
&= \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \cdot \frac{-(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a})^2}{2a} \\
&= - \frac{(\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a})(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a})}{2a} \\
&= - \frac{1+a-1+a}{2a} = - \frac{2a}{2a} = -1
\end{aligned}$$

Câu 2

a) Khi $m = 1$ ta có $d: y = 2x - 1$ và $(P): y = -x^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

Với $x = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 + 2\sqrt{2}$

Với $x = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 2\sqrt{2}$

Vậy các giao điểm là $(-1 + \sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}); (-1 - \sqrt{2}; -3 - 2\sqrt{2})$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và $(P): -x^2 = 2mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2mx - 1 = 0$ (*)

Phương trình (*) có $\Delta' = m^2 + 1 > 0 \Rightarrow (*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \forall m$ hay d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Áp dụng Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{4m^2 + 4} = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} y_1 = 2mx_1 - 1 \\ y_2 = 2mx_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow |y_1^2 - y_2^2| = |(2mx_1 - 1)^2 - (2mx_2 - 1)^2|$$

$$\Rightarrow |y_1^2 - y_2^2| = |(2mx_1 - 1 - 2mx_2 + 1)(2mx_1 - 1 + 2mx_2 - 1)| = |4m(x_1 - x_2)[m(x_1 + x_2) - 1]|$$

$$= |4m(2m^2 + 1)(x_1 - x_2)| = 4|m(2m^2 + 1)| |x_1 - x_2| = 4|m|(2m^2 + 1)2\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\text{Ta có } |y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 64m^2(2m^2 + 1)^2(m^2 + 1) = 45 \Leftrightarrow 64(4m^4 + 4m^2 + 1)(m^4 + m^2) = 45$$

$$\text{Đặt } m^4 + m^2 = t \geq 0 \text{ có phương trình } 64t(4t + 1) = 45 \Leftrightarrow 256t^2 + 64t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{16} \text{ (vì } t \geq 0)$$

$$\text{Suy ra } m^4 + m^2 = \frac{5}{16} \Leftrightarrow 16m^4 + 16m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } m = \pm \frac{1}{2}$$

Câu 3

Gọi vận tốc của người đi xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu (90 km) là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc của người đi xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB sau là $0,5x$ (km/h)

Vận tốc của người đi xe máy khi quay trở lại A là $x + 10$ (km/h)

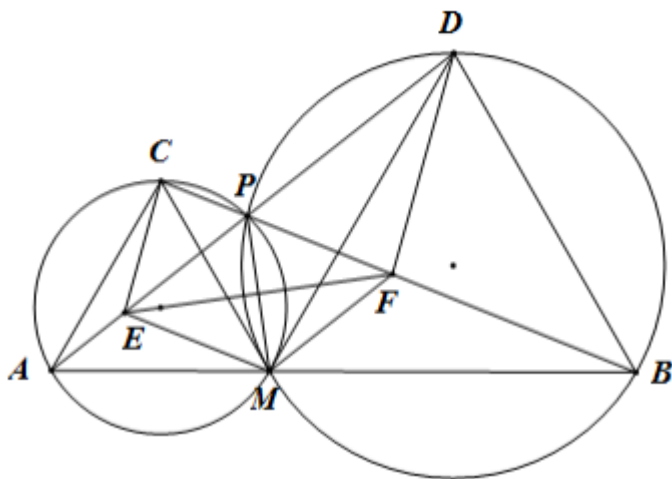
Tổng thời gian của chuyến đi là $\frac{90}{x} + \frac{30}{0,5x} + \frac{120}{x+10} + \frac{1}{2} = 8,5$

$$\Leftrightarrow \frac{90}{x} + \frac{60}{x} + \frac{120}{x+10} = 8 \Leftrightarrow \frac{150}{x} + \frac{120}{x+10} = 8 \Leftrightarrow 75(x+10) + 60x = 4x(x+10)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 95x - 750 = 0 \Leftrightarrow x = 30 \text{ (do } x > 0)$$

Vậy vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A là $30 + 10 = 40$ (km/h)

Câu 4



a) Vì $\angle CMA = \angle DMB = 60^\circ \Rightarrow \angle CMB = \angle DMA = 120^\circ$. Xét $\triangle CMB$ và $\triangle AMD$ có

$$\begin{cases} CM = AM \\ \angle CMB = \angle DMA \\ MB = MD \end{cases} \Rightarrow \triangle CMB = \triangle AMD (c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} \angle MCB = \angle MAD \\ \angle MBC = \angle MDA \end{cases}$$

Suy ra AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp

b) Vì AMPC là tứ giác nội tiếp nên

$$\angle CPM = 180^\circ - \angle CAM = 120^\circ = \angle CMB \Rightarrow \triangle CPM \sim \triangle CMB (g.g) \Rightarrow \frac{CP}{CM} = \frac{CM}{CB}$$

$$\Rightarrow CP \cdot CB = CM^2 \Rightarrow \sqrt{CP \cdot CB} = CM. \text{ Tương tự } \sqrt{DP \cdot DA} = DM$$

$$\text{Vậy } \sqrt{CP \cdot CB} + \sqrt{DP \cdot DA} = CM + DM = AM + BM = AB$$

c) Ta có EF là đường trung trực của PM $\Rightarrow EP = EM \Rightarrow \triangle EPM$ cân tại E
Mặt khác $\angle EPM = \angle ACM = 60^\circ$ (do AMPC là tứ giác nội tiếp) nên $\triangle EPM$ đều
 $\Rightarrow PE = PM$. Tương tự $PF = PM$

Ta có $CM \parallel DB$ nên $\angle PCM = \angle PBD$

Mà BMPD là tứ giác nội tiếp nên $\angle PBD = \angle PMD$. Suy ra $\angle PCM = \angle PMD$

$$\text{Ta lại có } \angle CPM = \angle DPM = 120^\circ \Rightarrow \triangle CPM \sim \triangle DPM (g.g) \Rightarrow \frac{CP}{MP} = \frac{PM}{PD} \Rightarrow \frac{CP}{PF} = \frac{PE}{PD}$$

Theo định lý Talét đảo ta có $CE \parallel DF \Rightarrow CDFE$ là hình thang.

Câu 5

Vì a, b, c không âm và có tổng bằng 1 nên $0 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a(1-a) \geq 0 \\ b(1-b) \geq 0 \\ c(1-c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq a^2 \\ b \geq b^2 \\ c \geq c^2 \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{5a+4} \geq \sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} = a+2$

Tương tự $\sqrt{5b+4} \geq b+2; \sqrt{5c+4} \geq c+2$

Do đó $\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq (a+b+c) + 6 = 7$ (đpcm)

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH

(Đề thi gồm cú 01

KỶ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT Năm học: 2013-2014

Đề thi mụn: TOÁN (chuyên)

Ngày thi: 30/6/2013

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1 (2,0 điểm)

a. Tính $A = \sqrt{8+2\sqrt{7}} + \sqrt{16-6\sqrt{7}}$

b. Rút gọn biểu thức: $M = \left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x}$, (với $x > 0, x \neq 1$).

Câu 2 (1,0 điểm)

Cho phương trình: $x^2 - 4x + 2m - 3 = 0$, (1) với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\sqrt{3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = \sqrt{x_1 x_2 + 17}.$$

Câu 3 (2,0 điểm)

a. Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{5x} = \sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+4}$.

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+2y-2)(2x+y) = 2x(5y-2) - 2y \\ x^2 - 7y = -3 \end{cases}$$

Câu 4 (1,0 điểm)

a. Chứng minh rằng trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

b. Giải phương trình nghiệm nguyên: $3x^2 - 2y^2 - 5xy + x - 2y - 7 = 0$.

Câu 5 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$. Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại E; AE cắt đường tròn (O) tại D (khác điểm A). Kẻ đường thẳng (d) qua điểm E và song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O), đường thẳng (d) cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P và Q. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại N (khác điểm A).

a. Chứng minh rằng: $EB^2 = ED \cdot EA$ và $\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD}$.

- b. Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác ABC, EBP, ECQ cùng đi qua một điểm.
 c. Chứng minh E là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác BCQP.
 d. Chứng minh tứ giác BCND là hình thang cân.

Câu 6 (1,0 điểm)

- a. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, với a, b là hai số dương.
 b. Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a + b \geq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = (a^3 + b^3)^2 + (a^2 + b^2) + \frac{3}{2}ab$.

Hết

Giỏm thị coi thi khụng giải thóch gỡ thờm

Họ và tên thớ sinh:SBD:
 Họ và tên giỏm thị 1: chữ kớ:
 Họ và tên giỏm thị 2: chữ kớ:



**GỢI Ý GIẢI ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN TUYỂN SINH 10 TỈNH BÌNH PHƯỚC
NĂM HỌC 2013-2014**

Câu 1 (2,0 điểm)

a. Tính $A = \sqrt{8+2\sqrt{7}} + \sqrt{16-6\sqrt{7}}$

Giải

Ta có $A = \sqrt{7+2\sqrt{7}+1} + \sqrt{9-2.3\sqrt{7}+7} = \sqrt{(\sqrt{7}+1)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{7})^2} = \sqrt{7}+1+3-\sqrt{7} = 4$

b. Rút gọn biểu thức: $M = \left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x}$, (với $x > 0, x \neq 1$).

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{\sqrt{x}+1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x} = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \end{aligned}$$

Vậy $M = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$

Câu 2 (1,0 điểm)

Cho phương trình: $x^2 - 4x + 2m - 3 = 0$, (1) với m là tham số. **Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:** $\sqrt{3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = \sqrt{x_1 x_2 + 17}$.

Giải

Chú ý Vì x_1, x_2 nằm trong các căn bậc hai nên phải có điều kiện $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

+) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_2 > x_1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2m+3 > 0 \\ 4 > 0 \\ 2m-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq m < \frac{7}{2}$

+) Với $\frac{3}{2} \leq m < \frac{7}{2}$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_2 > x_1 \geq 0$.

Áp dụng định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 \end{cases}$

+) Ta có

$$\sqrt{3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = \sqrt{x_1 x_2 + 17} \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}) = x_1 x_2 + 17 \Leftrightarrow 3(4 + 2\sqrt{2m-3}) = 2m - 3 + 17$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{2m-3} = 2m + 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{2m-3} = m + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 9(2m-3) = m^2 + 2m + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m^2 - 16m + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m = 2 \\ m = 14 \end{cases}$$

So sánh với các điều kiện ta có giá trị m thỏa mãn là $m = 2$.

Câu 3 (2,0 điểm)**a. Giải phương trình:** $\sqrt{x+1} + \sqrt{5x} = \sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+4}$ (1).**Giải**

$$+) \text{ ĐK: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 5x \geq 0 \\ 4x-3 \geq 0 \\ 2x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 0 \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{4}$$

$$+) \text{ Ta có } PT \Leftrightarrow x+1+2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{5x}+5x=4x-3+2\sqrt{4x-3}\cdot\sqrt{2x+4}+2x+4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{5x} = \sqrt{4x-3}\cdot\sqrt{2x+4} \Leftrightarrow 5x(x+1) = (4x-3)(2x+4) \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 & (l) \\ x = \frac{4}{3} & (n) \end{cases}$$

$$+) \text{ KL: Phương trình có một nghiệm } x = \frac{4}{3}.$$

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+2y-2)(2x+y) = 2x(5y-2) - 2y \\ x^2 - 7y = -3 \end{cases}$$
Giải

$$\begin{aligned} +) \text{ Ta có } PT(1) &\Leftrightarrow 2x^2 + xy + 4xy + 2y^2 - 4x - 2y = 10xy - 4x - 2y \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 4xy) + (2y^2 - xy) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2y) - y(x-2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2y)(2x-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ y=2x \end{cases} \end{aligned}$$

$$+) \text{ Trường hợp 1: } x=2y, \text{ kết hợp với phương trình (2) ta có hệ } \begin{cases} x=2y \\ x^2 - 7y = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 4y^2 - 7y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$+) \text{ Trường hợp 2: } y=2x, \text{ kết hợp với phương trình (2) ta có hệ } \begin{cases} y=2x \\ x^2 - 7y = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2 - 14x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ \begin{cases} x=7+\sqrt{46} \\ x=7-\sqrt{46} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=7+\sqrt{46} \\ y=14+2\sqrt{46} \end{cases} \\ \begin{cases} x=7-\sqrt{46} \\ y=14-2\sqrt{46} \end{cases} \end{cases}$$

$$+) \text{ Kết luận: Hệ phương trình có 4 nghiệm: } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=7+\sqrt{46} \\ y=14+2\sqrt{46} \end{cases}, \begin{cases} x=7-\sqrt{46} \\ y=14-2\sqrt{46} \end{cases}.$$

Câu 4 (1,0 điểm)

a. Chứng minh rằng trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Giải

+) Vì một số nguyên bất kỳ phải là số chẵn hoặc là số lẻ. Do đó theo nguyên lý Dirichlet trong 3 số nguyên bất kỳ luôn chọn ra được 2 số có cùng tính chẵn lẻ.

+) Áp dụng ta có trong 3 số chính phương bất kỳ luôn chọn ra được hai số có cùng tính chẵn lẻ. Gọi 2 số chính phương được chọn ra đó là a^2 và b^2 . Khi đó ta có $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

+) Vì a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ nên a, b cũng cùng tính chẵn lẻ. Do đó $a - b$ là số chẵn và $a + b$ cũng là số chẵn $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) : 4$, (đpcm).

Chú ý

Ta có thể giải bài toán này bằng cách vận dụng tính chất sau của số chính phương:

“Một số chính phương chia cho 4 thì sẽ có số dư là 0 hoặc 1”. Khi đó lập luận như cách làm trên ta thu được điều phải chứng minh. Tuy nhiên trong khi làm bài thi nếu vận dụng tính chất này thì học sinh phải chứng minh lại.

Bình luận: Với cách làm trên ngắn gọn, đầy đủ song một số học sinh cảm thấy hơi trừu tượng (do nguyên lý **Dirichlet** học sinh ít ôn tập không nằm trong chương trình SGK mà ở sách tham khảo). bài toán trên có thể trình bày như sau:

Trong ba số nguyên tùy ý luôn tồn tại hai số hoặc chẵn hoặc lẻ

Gọi hai số chính phương chọn ra là a^2 và b^2 (a, b nguyên)

+ TH1: a, b cùng chẵn: suy ra $a^2 - b^2 = (2k_1)^2 - (2k_2)^2 = 4(k_1^2 - k_2^2) \vdots 4$ chia hết cho 4

; $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

+ TH2: a, b cùng lẻ: suy ra $a^2 - b^2 = (2k_1 + 1)^2 - (2k_2 + 1)^2 = 4(k_1^2 + k_1 - k_2^2 - k_2) \vdots 4$ chia hết cho 4

; $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Vậy trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

NGUYỄN ANH TUẤN 0985.767.113

b. Giải phương trình nghiệm nguyên: $3x^2 - 2y^2 - 5xy + x - 2y - 7 = 0$.

Giải

+) Ta có PT $\Leftrightarrow (3x^2 - 6xy) + (-2y^2 + xy) + (x - 2y) = 7$.

$$\Leftrightarrow 3x(x - 2y) + y(x - 2y) + (x - 2y) = 7$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)(3x + y + 1) = 7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = -1 \cdot (-7) = -7 \cdot (-1)$$

Do đó ta có 4 trường hợp sau:

$$+) \text{ TH1: } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + y + 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{7} \\ y = \frac{3}{7} \end{cases}, (\text{loại}).$$

$$+) \text{ TH2: } \begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}, (\text{nhận}).$$

$$+) \text{ TH3: } \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y + 1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{17}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \end{cases}, (\text{loại}).$$

$$+) \text{ TH4: } \begin{cases} x-2y=-7 \\ 3x+y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-7 \\ 3x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{11}{7} \\ y=\frac{19}{7} \end{cases}, (\text{loại}).$$

+) Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm nguyên là (1; -3).

Bình luận:

Với cách làm trên là hoàn hảo song nhiều học sinh lại thắc mắc tại sao thầy Quý lại chuyển số 7 sang và phân tích về trái thành nhân tử, vì việc xác định nhân tử chung không hề đơn giản. Sau đây tôi nêu một kỹ thuật làm như vậy: Ta xem về trái là pt bậc

hai ẩn x: $3x^2 - (5y-1)x - (2y^2 + 2y) = 7 \quad (1)$

$$\Delta_{VT} = 49y^2 + 14y + 1 = (7y+1)^2$$

Nhằm tạo ra đen ta là bình phương của một biểu thức(có thể thêm bớt số tự do vào hai vế của (1))

Từ đó ta suy ra được: $x = 2y \Rightarrow x - 2y = 0$ từ đó phân tích như trên (nhớ vét hết từ trái qua phải)

Trên đây xem như làm nháp

NGUYỄN ANH TUẤN 0985.767.113

Câu 5 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$. Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại E; AE cắt đường tròn (O) tại D (khác điểm A). Kẻ đường thẳng (d) qua điểm E và song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O), đường thẳng (d) cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P và Q. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại N (khác điểm A).

a. Chứng minh rằng: $EB^2 = ED.EA$ và $\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD}$.

Giải

+) Ta có $\triangle ABE \sim \triangle BDE$ (g - g), (vì E chung và $\angle BAD = \angle DBE$) $\Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{BE}{DE} \Rightarrow BE^2 = AE.DE$, (đpcm).

+) Ta có $\triangle ABE \sim \triangle BDE$ (g - g) $\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BE}{DE}$, (1). Tương tự ta có

$$\triangle ACE \sim \triangle CDE \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{CE}{DE}, \quad (2)$$

Mặt khác ta có $EB = CE$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$, (đpcm).

b. Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác ABC, EBP, ECQ cùng đi qua một điểm.

Giải

+) Ta có $AP \parallel PQ \Rightarrow \angle BPE = \angle BAP$ (so le trong), mặt khác $\angle BAP = \angle ADB$ (cùng bằng nửa số đo cung AB). Do đó ta có $\angle BPE = \angle ADB \Rightarrow BDEP$ là tứ giác nội tiếp.

+) Ta có $Ax \parallel PQ \Rightarrow CQE = CAy$ (so le trong), mặt khác $CAy = ADC$ (cùng bằng nửa số đo cung AC). Do đó ta có $CQE = ADC \Rightarrow CDEQ$ là tứ giác nội tiếp.
 Vậy ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, BPE, CQD cùng đi qua điểm D, (đpcm).

c. Chứng minh E là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác BCQP.

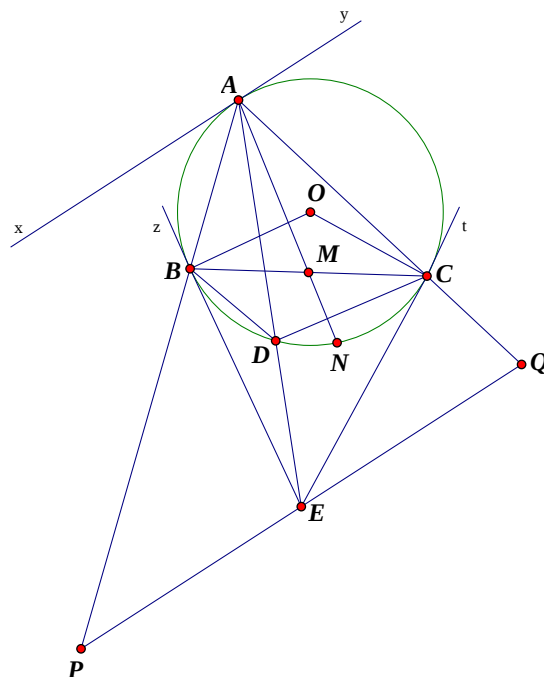
+) Ta có $BPE = BAx = ADB = ABz = EBP \Rightarrow \triangle EBP$ cân tại E $\Rightarrow EB = EP$, (1).

+) Ta có $CQE = CAy = ADC = ACt = ECQ \Rightarrow \triangle ECQ$ cân tại E $\Rightarrow EC = EQ$, (2).

+) Ta có $EB = EC$ (giả thiết), (3).

Từ (1), (2), (3) ta có: $EB = EC = EP = EQ \Rightarrow E$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của đường tròn ngoại tiếp tứ giác PBCQ.

d. Chứng minh tứ giác BCND là hình thang cân.



Nhận xét Đường thẳng AD được gọi là đường đối trung của tam giác ABC. Nó chính là đường thẳng đối xứng với đường trung tuyến AM qua đường phân giác trong của tam giác ABC tại đỉnh A. Nó có nhiều tính chất rất và ứng dụng rất thú vị, là một kiến thức quan trọng trong bồi dưỡng học sinh giỏi hình học, đặc biệt ở bậc THPT. Câu (d) của đề thi được khai thác từ định nghĩa của đường đối trung là sự đối xứng của AD và AM qua phân giác trong tại đỉnh A.

Cách 1 (Sử dụng tam giác đồng dạng)

Xét hai tam giác ABC và AQP có: A chung, $ABC = AQP$ (vì cùng bằng góc ADC). Do đó hai tam giác đồng dạng theo trường hợp (góc – góc)

$$\Rightarrow \frac{BA}{QA} = \frac{BC}{QP} \Rightarrow \frac{BA}{QA} = \frac{2BM}{2QD} \Rightarrow \frac{BA}{QA} = \frac{BM}{QD} \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle AQD \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \angle BAM = \angle QAD \Rightarrow \angle BAD = \angle CAM$$

$$\Rightarrow BD = CN \Rightarrow BC \parallel DN \Rightarrow BCND \text{ là hình thang cân.}$$

Cách 2 (Sử dụng định lý Ptôlômê)

+) Theo như câu (a), ta có: $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BD$

+) Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác ABCD, ta được:

$$AD \cdot BC = AB \cdot DC + BD \cdot AC = 2 \cdot AC \cdot DC$$

$$\Rightarrow AD \cdot BC = 2 \cdot AC \cdot DC \Leftrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{\frac{BC}{2}} = \frac{BD}{MC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{MC} \Leftrightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{MC} (*)$$

+) Ta có: Tứ giác ABCD nội tiếp $\Rightarrow \angle ACB = \angle BDA (**)$

+) Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle ACM (c - g - c) \Rightarrow \angle BAD = \angle NAC$

$$+) \text{ Ta có: } \begin{cases} \angle BAD = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{BD} = \widehat{BCD} \\ \angle NAC = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{NC} = \widehat{NBC} \end{cases} . \text{ Mà } \angle BAD = \angle NAC \Rightarrow \angle BCD = \angle NBC$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCDN là hình thang cân, (đpcm).

Cách 3 (Sử dụng bài toán phụ $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$, còn được gọi là định lý hàm Sin trong tam giác).

+) Trước hết ta đi chứng minh kết quả: Cho tam giác ABC ta luôn có

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R, \text{ với } R \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.}$$

Thật vậy kẻ đường kính BD của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có: $\angle A = \angle BDC$, xét tam giác vuông BDC ta có: $\sin BDC = \frac{BC}{BD} \Leftrightarrow \sin A = \frac{BC}{2R} \Leftrightarrow \frac{BC}{\sin A} = 2R$, lập luận tương tự ta có $\frac{AC}{\sin B} = 2R, \frac{AB}{\sin C} = 2R$.

$$\text{tự ta có } \frac{AC}{\sin B} = 2R, \frac{AB}{\sin C} = 2R.$$

+) Gọi M' là giao điểm của đường thẳng đối xứng với đường thẳng AD qua đường phân giác trong tại đỉnh A. Ta sẽ chứng minh M' trùng với điểm M.

Thật vậy áp dụng kết quả chứng minh ở trên cho các tam giác ABM', ACM', ABE, ACE ta có và lưu ý $\angle BAM' = \angle CAE, \angle ACM' = \angle ABE, \angle ABM' = \angle ACE, \angle CAM' = \angle BAE$ ta có:

$$\frac{M'B}{M'C} = \frac{\frac{M'A \cdot \sin \angle BAM'}{\sin \angle ABM'}}{\frac{M'A \cdot \sin \angle CAM'}{\sin \angle ACM'}} = \frac{\sin \angle BAM' \cdot \sin \angle ACM'}{\sin \angle ABM' \cdot \sin \angle CAM'} = \frac{\sin \angle CAE \cdot \sin \angle ABE}{\sin \angle ACE \cdot \sin \angle BAE} = \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AE}{BE} = 1 \Rightarrow M'B = M'C$$

hay M' là trung điểm của BC, do đó M trùng với M' mà

$$\angle CAM' = \angle BAE \Rightarrow \angle CAM = \angle BAE \Rightarrow BD = CN$$

$$\Rightarrow BC \parallel DN \Rightarrow BCND \text{ là hình thang cân.}$$

Câu 6 (1,0 điểm)

a. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$, với a, b là hai số dương.

Giải

Ta có bất đẳng thức

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a^2-2ab+b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

Ta thấy với a, b là hai số dương nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

Dấu “=” xảy ra khi a = b.

BỔ SUNG THÊM MỘT SỐ CÁCH:

C1: Xét hiệu: $a^3+b^3-ab(a+b)=(a^3-a^2b)+(b^3-b^2a)=a^2(a-b)-b^2(a-b)=\dots\dots$

C2: Biến đổi tương đương

C3: Sử dụng BĐT Côsi cho VP:

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)^2(a+b)-3ab(a+b) \geq 4ab(a+b)-3ab(a+b)=ab(a+b)$$

NGUYỄN ANH TUẤN 0985.767.113

b. Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a+b \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F=(a^3+b^3)^2+(a^2+b^2)+\frac{3}{2}ab.$$

Giải

Cách 1

+) Áp dụng bất đẳng thức đã chứng minh ở câu (a) ta có: $(a^3+b^3)^2 \geq [ab(a+b)]^2$ mà theo giả thiết $a+b \geq 1$

$$\text{Do đó } (a^3+b^3)^2 \geq [ab(a+b)]^2 \geq (ab)^2$$

$$\text{+) Mặt khác ta có: } F=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \geq 1-1ab$$

$$\text{+) Do đó } F \geq (ab)^2+1-2ab+\frac{3}{2}ab=(ab)^2-\frac{ab}{2}+1=(ab)^2-2.ab.\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{15}{16}=\left(ab-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16} \geq \frac{15}{16}$$

$$\text{+) Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

+) Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Cách 2

$$\text{+) Ta có } F=(a^3+b^3)^2+(a+b)^2-\frac{1}{2}ab.$$

+) Ta luôn có bất đẳng thức: $a^3+b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4}$, (*) với mọi a, b > 0. Thật vậy (*)

$$\Leftrightarrow a^2-ab+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2-4ab+4b^2 \geq a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0, \text{ (luôn đúng).}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có: } (a^3+b^3)^2 \geq \left[\frac{(a+b)^3}{4}\right]^2 \geq \frac{1}{16}.$$

$$\text{+) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: } ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow -ab \geq -\frac{(a+b)^2}{4}.$$

$$\text{+) Do đó } F \geq \frac{1}{16}+(a+b)^2-\frac{(a+b)^2}{8}=\frac{1}{16}+\frac{7(a+b)^2}{8} \geq \frac{1}{16}+\frac{7}{8}=\frac{15}{16}. \text{ Dấu “=” xảy ra}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

+) Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}$.

BỔ SUNG THÊM: $F = (a^3 + b^3)^2 + a^2 + b^2 + \frac{3}{2}ab$.

C3: Ta có:

$$F = \left[(a+b)^3 - 3ab(a+b) \right]^2 + (a+b)^2 - 2ab + \frac{3}{2}ab \geq \left[(a+b)^3 - 3 \cdot \frac{(a+b)^2}{4} (a+b) \right]^2 + (a+b)^2 - \frac{1}{2}ab$$

$$\geq \left[\frac{(a+b)^3}{4} \right]^2 + (a+b)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a+b)^6}{16} + \frac{7(a+b)^2}{8} \geq \frac{1}{16} + \frac{7}{8} = \frac{15}{16}$$

Dấu “=” xảy ra $\begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}$.

ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN CHUYÊN

QUẢNG NAM

NĂM HỌC: 2015 – 2016

Thời gian: 150 phút

Sở giáo dục và đào tạo tỉnh Quảng
Nam

Câu 1. (2 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x+1}}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ (với $x \neq 1$; $x \geq 0$). Rút gọn A, sau đó tính giá trị A –

1 khi $x = 2016 + 2\sqrt{2015}$

b) Cho $A = 2(1^{2015} + 2^{2015} + \dots + n^{2015})$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho $n(n+1)$

Câu 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình sau: $\frac{6}{x^2-9} + \frac{4}{x^2-11} - \frac{7}{x^2-8} - \frac{3}{x^2-12} = 0$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+4)(4x+y) = 6 \\ x^2 + 8x + y = -5 \end{cases}$

Câu 3. (1 điểm) Cho parabol (P): $y = ax^2$ và đường thẳng (d): $y = bx + c$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác vuông trong đó a là độ dài cạnh huyền. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 < 2$

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Các tia phân giác các góc EHB, DHC cắt AB, AC lần lượt tại I và K. Qua I và K lần lượt vẽ các đường vuông góc với AB, AC chúng cắt nhau tại M.

a) Chứng minh $AI = AK$.

b) Giả sử tam giác nhọn ABC có hai đỉnh B, C cố định, đỉnh A di động. Chứng minh đường thẳng HM luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (2 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua A và B lần lượt vẽ các tiếp tuyến d_1 và d_2 với (O). Từ điểm M bất kì trên (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt d_1 tại C và cắt d_2 tại D. Đường tròn đường kính CD cắt đường tròn (O) tại E và F (E thuộc cung AM), gọi I là giao điểm của AD và BC.

- a) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
b) Chứng minh MI vuông góc với AB và ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Câu 6. (1 điểm) Cho ba số thực $x; y; z$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z - (xy + yz + zx)$

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x})^3 + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - (\sqrt{x} - 1) \\ &= \frac{x - \sqrt{x} + 1 - (\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \\ A - 1 &= \frac{\sqrt{x} - (\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

Ta có $x = 2016 + 2\sqrt{2015}$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$

Có $x = 2015 + 2\sqrt{2015} + 1 = (\sqrt{2015} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2015} + 1$. Thay vào biểu thức $A - 1$ ta được:

$$A - 1 = \frac{1}{\sqrt{2015}}$$

b) Với 2 số nguyên dương a, b bất kì ta có:

$$a^{2015} + b^{2015} = (a + b)(a^{2014} + a^{2013}b + \dots + ab^{2013} + b^{2014}) \Rightarrow a^{2015} + b^{2015} : (a + b)$$

+ Xét trường hợp n là số lẻ

Áp dụng khẳng định trên ta có:

$$2[1^{2015} + (n-1)^{2015}] : n$$

$$2[2^{2015} + (n-2)^{2015}] : n$$

...

$$2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : n$$

Suy ra

$$A = n^{2015} + 2[1^{2015} + (n-1)^{2015}] + 2[2^{2015} + (n-2)^{2015}] + \dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : n$$

Tương tự

$$A = 2(1^{2015} + n^{2015}) + 2[2^{2015} + (n-1)^{2015}] + \dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+3}{2}\right)^{2015}\right] + \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : (n+1)$$

Mặt khác n và $n+1$ nguyên tố cùng nhau nên $A : n(n+1)$

Tương tự với trường hợp n chẵn ta cũng có $A : n(n+1)$

Câu 2

a) Điều kiện: $x^2 \neq 8; x^2 \neq 9; x^2 \neq 11; x^2 \neq 12$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{7}{x^2-8}\right) + \left(\frac{4}{x^2-11} - \frac{3}{x^2-12}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x^2-8) - 7(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-8)} + \frac{4(x^2-12) - 3(x^2-11)}{(x^2-11)(x^2-12)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+15}{(x^2-9)(x^2-8)} + \frac{x^2-15}{(x^2-11)(x^2-12)} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 15 = 0(2) \\ -\frac{1}{(x^2-9)(x^2-8)} + \frac{1}{(x^2-11)(x^2-12)} = 0(3) \end{cases}$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{15}$ (thỏa mãn)

Phương trình (3) $\Leftrightarrow (x^2-9)(x^2-8) = (x^2-11)(x^2-12)$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{\pm\sqrt{15}; \pm\sqrt{10}\}$

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x^2 + 4x) \cdot (4x + y) = 6 \\ (x^2 + 4x) + (4x + y) = -5 \end{cases}$$

Suy ra $x^2 + 4x$ và $4x + y$ là 2 nghiệm của phương trình

$$t^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x^2 + 4x = -2 \\ 4x + y = -3 \end{cases} (I)$ hoặc $\begin{cases} x^2 + 4x = -3 \\ 4x + y = -2 \end{cases} (II)$

$$\text{Giải (I): } x^2 + 4x = -2 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 4x = 5 - 4\sqrt{2} \\ x = -2 - \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 4x = 5 + 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Giải (II): } x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -2 - 4x = 2 \\ x = -3 \Rightarrow y = -2 - 4x = 10 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(-2 + \sqrt{2}; 5 - 4\sqrt{2}), (-2 - \sqrt{2}; 5 + 4\sqrt{2}), (-1; 2), (-3; 10)$

Câu 3

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $ax^2 = bx + c \Leftrightarrow ax^2 - bx - c = 0 (1)$

Vì a, b, c là 3 cạnh của tam giác vuông với cạnh huyền là a nên a, b, c > 0, $a^2 = b^2 + c^2$

(d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$

$\Delta = b^2 + 4ac > 0$ (luôn đúng $\forall a, b, c > 0$)

Gọi 2 giao điểm có hoành độ là x_1, x_2 , là 2 nghiệm của (1). Theo Viét ta có:

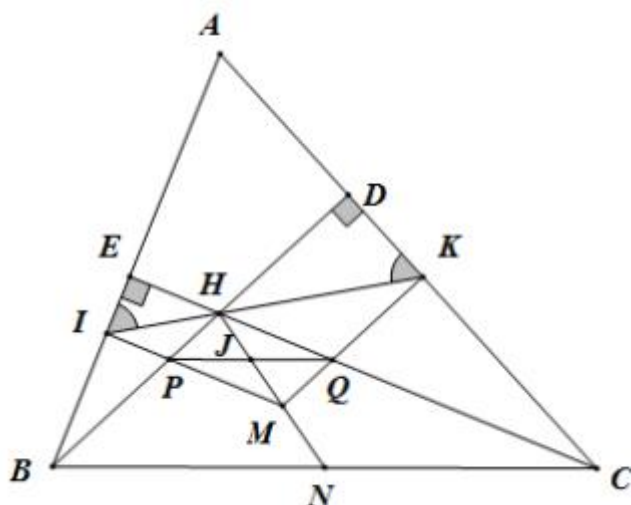
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\text{Xét } P = x_1^2 + x_2^2 - 2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{c}{a} - 2 = \frac{b^2 - 2ac - 2a^2}{a^2}$$

$$\text{Có } b^2 + 2ac - 2a^2 = b^2 + 2ac - (b^2 + c^2) - a^2 = 2ac - c^2 - a^2 = -(c-a)^2 < 0, \forall a, c, 0 < c < a$$

Suy ra $P < 0 \Rightarrow$ đpcm.

Câu 4



a) Vì HI, HK là phân giác của góc EHB và góc DHC nên

Gọi J là trung điểm của CD thì JO là đường trung bình của hình thang ACDB suy ra JO // BD và

$$OJ = \frac{AC + BD}{2} = \frac{CM + MD}{2} = \frac{CD}{2} = IC = ID \quad (1)$$

Vì BD ⊥ AB nên JO ⊥ AB tại O (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn (J) đường kính CD

b) Vì CA // BD nên theo định lý Talét ta có: $\frac{CI}{IB} = \frac{CA}{CD} = \frac{CM}{MD} \Rightarrow IM // BD$

Mà BD ⊥ AB nên MI ⊥ AB

Gọi P, Q lần lượt là giao của AD và (O), BC và (J)

Có APB = CQD = 90° (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) ⇒ DPB = BQD = 90°

Suy ra BQPD là tứ giác nội tiếp ⇒ PDB = PQI

Vì AC // BD nên PDB = IAC

$$\Rightarrow PQI = IAC \Rightarrow \Delta PQI \sim \Delta CAI \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{PI}{CI} = \frac{QI}{AI} \Rightarrow IP \cdot IA = IC \cdot IQ$$

Suy ra phương tích của điểm I đối với 2 đường tròn (O) và (J) là bằng nhau

Suy ra I nằm trên trục đẳng phương EF của 2 đường tròn.

Vậy I, E, F thẳng hàng.

Câu 6

Ta có:

$$(x + y + z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \leq 9 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \geq \frac{(x + y + z)^2 - 9}{2}$$

$$\Rightarrow P \leq x + y + z + \frac{9 - (x + y + z)^2}{2}$$

$$\text{Đặt } x + y + z = t \Rightarrow P \leq t + \frac{9 - t^2}{2} = -\frac{t^2 - 2t + 1}{2} + 5 = -\frac{1}{2}(t - 1)^2 + 5 \leq 5$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$ chẳng hạn khi $x = 1, y = 2, z = -2$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 5.

**Sẽ gi, o đoc vư @m o t¹o
phó thầ**

**k× thi tuyỐn sinh lớp 10
THPT chuy^an hĩng v-ng
n"m hăc 2009-2010**

ĐỀ CHÍNH

M«n: To,n (Chuy^an To,n)

Thời gian làm bài: 150 phút, không có thời gian giao @Ồ.

(§Ồ thi cũ 01 trang)

Câu 1(2 điểm). Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2 & (1) \\ x + my = 5 & (2) \end{cases}$ (m là tham số)

a) Chứng tỏ hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất với mọi m.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm (x, y) thỏa mãn $x + y = 5$.

Câu 2(1 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3 - y^3 = z^2$ trong đó y là số nguyên tố, $(z; 3) = (z; y) = 1$

Câu 3(3 điểm).

a) Giải phương trình:

$$(x+1)^{2009} + (x+1)^{2008}(x+2) + (x+1)^{2007}(x+2)^2 + \dots + (x+1)(x+2)^{2008} + (x+2)^{2009} = 0$$

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $A = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$.

Câu 4(3 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho $BAP = PBC; CAP = PCB$. Đường thẳng AP cắt cạnh BC tại M .

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của cạnh BC .

b) Chứng minh rằng tứ giác $BHPC$ nội tiếp trong một đường tròn (ω) , trong đó H là trực tâm tam giác ABC .

c) Đường trung trực của đoạn thẳng PA cắt đường thẳng BC tại Q . Chứng minh rằng QA tiếp xúc với (O) và QP tiếp xúc với (ω) .

Câu 5(1 điểm).

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq 1$$

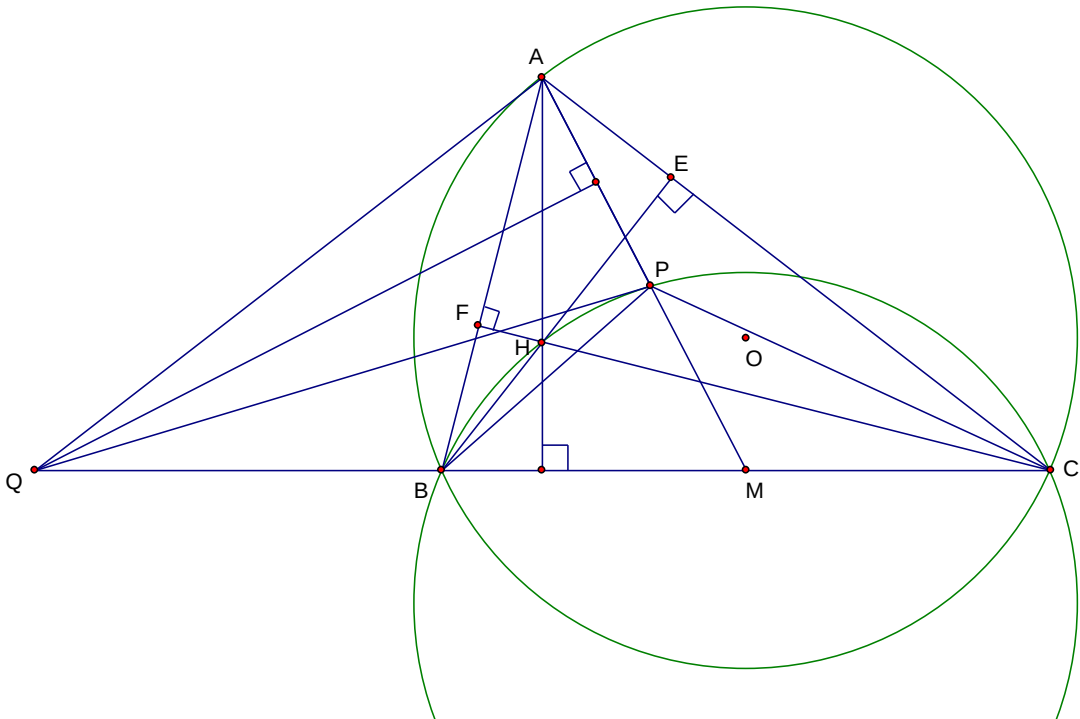
—Hết—

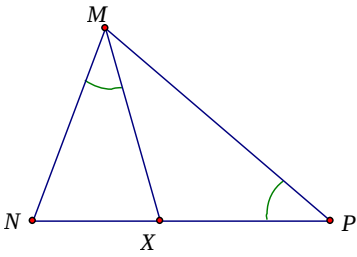
Chú ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh **SBD**

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ
KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2009-2010
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN: TOÁN
(Chuyên Toán)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a) (1đ)	Từ (1) $\Rightarrow y = mx - 2$ (3)	0.25
		Thế vào (2) được $x = \frac{2m+5}{m^2+1}; \forall m$	0.25
		Từ đó tính được $y = \frac{5m-2}{m^2+1}$	0.25
		Kết luận	0.25
	b) (1đ)	$x + y = 7 \Leftrightarrow \frac{7m+3}{m^2+1} = 7$	0.5
		Tìm được $\begin{cases} m=1 \\ m=\frac{2}{5} \end{cases}$; kết luận	0.5
2	(1đ)	Phương trình đã cho tương đương với $(x-y)(x^2+xy+y^2)=z^2 \Leftrightarrow (x-y)((x-y)^2+3xy)=z^2$ (1)	0.25
		Do y là số nguyên tố, $(z;3)=(z;y)=1$ nên từ (1), $\Rightarrow (x;y)=1, (x-y;3)=1$ (2)	
		Từ (1),(2) suy ra $x-y=m^2, x^2+xy+y^2=n^2, z=mn$ với $m,n \in \mathbb{Z}^+$. Từ đó $4n^2 = 4x^2 + 4xy + 4y^2 = (2x+y)^2 + 3y^2 \Rightarrow 3y^2 = (2n-2x-y)(2n+2x+y)$	0.25
		Từ đó, do y là số nguyên tố, nên có các trường hợp sau xảy ra $2n+2x+y=3y^2, 2n-2x-y=1$: Suy ra $3y^2-1=2(2x+y)=2(2m^2+3y)$ suy ra $m^2+1=3y^2-6y-3m^2:3$, nhưng $m^2+1 \not\equiv 3 \pmod{3} \forall m$, vô lý $2n+2x+y=3y, 2n-2x-y=y$. Suy ra $2y=4x+2y \Rightarrow x=0$, loại $2n+2x+y=y^2, 2n-2x-y=3$. Suy ra $y^2-3=2(2x+y)=2(2m^2+3y)$ do đó $(y-3)^2-4m^2=12$. Tìm được $y=7, m=1, x=8, z=13$ Vậy $(x;y;z)=(8;7;13)$ là nghiệm duy nhất của phương trình.	0.25
			0.25
3	a) (1,5đ)	Do $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,	0.25
		với $a = x+1, b = x+2$ suy ra phương trình đã cho tương đương với $(x+1)^{2010} = (x+2)^{2010}$	0.5
		$\Leftrightarrow (x+1)^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = x+2 \\ x+1 = -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$	0.5
		Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -\frac{3}{2}$	0.25

4	b) (1,5đ)	Với $x > 0$ ta có: $\frac{4}{x} + 4x \geq 2\sqrt{\frac{4}{x} \cdot 4x} = 8$	0.5
		Với $y > 0$ ta có: $\frac{1}{4y} + 4y \geq 2\sqrt{\frac{1}{4y} \cdot 4y} = 2$	0.5
		$\frac{4}{x} + \frac{1}{4y} + 4(x+y) \geq 10 \Rightarrow A = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} \geq 5$ Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x} = 4x \\ \frac{1}{4y} = 4y \\ x+y = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$	0.5
		Giá trị nhỏ nhất của A là 5 đạt được khi $x = 1; y = \frac{1}{4}$	
	a) (1đ)		0.25
		Từ giả thiết, suy ra $\triangle ABM \sim \triangle BPM (g.g)$ suy ra $BM^2 = AM \cdot PM$ (1)	0.25
		Tương tự, $\triangle ACM \sim \triangle CPM (g.g)$ suy ra $CM^2 = AM \cdot PM$ (2)	0.25
		Từ (1),(2) suy ra $BM = CM$ suy ra điều phải chứng minh.	0.25

b) (1đ)	Gọi E, F là giao điểm của BH, CH với các cạnh AC, AB . Khi đó do $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp,	0.25
	suy ra $\angle BHC = \angle EHF = 180^\circ - \angle BAC$ (1)	0.25
	Từ cách xác định điểm P suy ra $\angle BPC = 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB = 180^\circ - \angle PAB - \angle PAC = 180^\circ - \angle BAC$ (2)	0.25
	Từ (1) và (2), do tam giác ABC nhọn, nên bốn điểm B, C, H, P cùng nằm trên một đường tròn.	0.25
c) (1đ)		
	+ Phát biểu và chứng minh bổ đề. Điểm X nằm trên cạnh NP của tam giác MNP sao cho $\angle NMX = \angle MPN$. Khi đó $\frac{NX}{NP} = \left(\frac{MX}{MP}\right)^2$	0.25
	+ Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại Q_1 . Do $\angle Q_1AB = \angle ACQ_1$, nên $\frac{Q_1B}{Q_1C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ (3)	0.25
	+ Tiếp tuyến tại P của đường tròn (ω) cắt BC tại Q_2 . Do $\angle Q_2PB = \angle PCB$, nên $\frac{Q_2B}{Q_2C} = \left(\frac{PB}{PC}\right)^2$ (4)	
	+ Theo kết quả phần 1, M là trung điểm BC suy ra $S_{ABM} = S_{ACM} \Rightarrow AB \sin \angle BAP = AC \sin \angle CAP \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \angle CAP}{\sin \angle BAP} \quad (5)$ cũng vậy $S_{PBM} = S_{PCM} \Rightarrow PB \sin \angle PBM = PC \sin \angle PCM \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{\sin \angle PCM}{\sin \angle PBM} = \frac{\sin \angle PAC}{\sin \angle PAB} \quad (6)$	0.25
	Từ (3),(4),(5),(6) suy ra $\frac{Q_1B}{Q_1C} = \frac{Q_2B}{Q_2C} \Leftrightarrow Q_1 \equiv Q_2$ Do $\triangle Q_1AB \sim \triangle Q_1CA$ và $\triangle Q_1PB \sim \triangle Q_1CP$, nên $Q_1A^2 = Q_1B \cdot Q_1C = Q_1P^2$ suy ra $Q_1A = Q_1P$. Suy ra $Q_1 \equiv Q$. Điều phải chứng minh.	0.25

5	(1đ)	Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2c^2 \geq 4$	0.25
		Đặt $bc = x, ca = y, ab = z$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4$ với $x, y, z \geq 0: x + y + z = 3$	0.25
		Không giảm tổng quát, coi $x = \min(x, y, z)$, thế thì $x \leq 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 4 = x^2 + (y + z)^2 + yz(x - 2) - 4$ $\geq x^2 + (y + z)^2 + \frac{1}{4}(y + z)^2(x - 2) - 4$ $= x^2 + \frac{x + 2}{4}(y + z)^2 - 4 = x^2 + \frac{x + 2}{4}(3 - x)^2 - 4$ $= \frac{1}{4}(x - 1)^2(x + 2) \geq 0$ Suy ra điều phải chứng minh. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$	0.5

Ghi chú: Nếu học sinh giải theo cách khác đúng thì cho điểm tối đa.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9 THCS
HƯNG YÊN NĂM HỌC 2016-2017
ĐỀ CHÍNH THỨC Môn thi: TOÁN

Thời gian: 150 phút
Ngày thi: 22/3/2017

Câu 1.(2 điểm)

Cho $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}; b = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính $a^7 + b^7$

Câu 2. (4 điểm)

a) Cho hàm số $y = ax + b$ (a khác 0) có đồ thị là (d). Lập phương trình đường thẳng (d), biết (d) đi qua điểm A(1;2) và cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương và thỏa mãn $(OB + OC)$ nhỏ nhất (O là gốc tọa độ)

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$3x - 16y - 24 = \sqrt{9x^2 + 16x + 32}$$

Câu 3. 3 điểm

Giải phương trình $4x^3 + 5x^2 + 1 = \sqrt{3x + 1} - 3x$

Câu 4. (3 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2\sqrt{2x-1} + \sqrt{3} = 5y^2 - \sqrt{6x-3} \\ 2y^4(5x^2 - 17x + 6) = 6 - 15x \end{cases}$$

Câu 5. (6 điểm)

Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB ($M \neq A, M \neq B, MA < MB$).

Tia phân giác của $\angle AMB$ cắt AB tại C. Qua C vẽ đường vuông góc với AB cắt đường thẳng AM, BM theo thứ tự ở D, H.

a) Chứng minh $CA = CH$

b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của (O), F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B của (O). Chứng minh E, M, F thẳng hàng.

c) Gọi S_1, S_2 thứ tự là diện tích tứ giác ACHE và BCDF. Chứng minh $CM^2 < \sqrt{S_1 \cdot S_2}$

Câu 6. (2 điểm)

Cho ba số $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $32abc = 18(a+b+c) + 27$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{b} + \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c}$$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI 9 HÙNG YÊN 2016-2017

Câu 1.

Ta có : $a+b=\sqrt{2}$; $ab=\frac{1}{4}$; $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Lại có $a^7+b^7=(a^3+b^3)(a^4+b^4)-a^3b^3(a+b)$
 $=\left[(a+b)^3-3ab(a+b)\right]\left[(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\right]-a^3b^3(a+b)$
 $=\left[\sqrt{2^3}-3\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{16}\right]-\frac{1}{16}\cdot\sqrt{2}=\frac{5}{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{17}{8}-\frac{1}{64}\cdot\sqrt{2}=\frac{169\sqrt{2}}{64}$

Câu 2.

a) Do (d) đi qua điểm A(1;2) nên (d) có dạng $y=ax+2-a$

Có (d) cắt trục Ox tại $B\left(\frac{a-2}{a};0\right)$ và cắt trục Oy tại $C(0;2-a)$

Vì điểm B có hoành độ dương và C có tung độ dương nên $a < 0$

Khi đó ta có $OB+OC=\frac{a-2}{a}+2-a=1-\frac{2}{a}+2-a=3+\frac{-2}{a}+(-a)\geq 3+2\sqrt{\frac{-2}{a}\cdot(-a)}=5$

Suy ra $OB+OC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $a=-\sqrt{2}$

Vậy phương trình (d) có dạng: $y=-\sqrt{2}x+2+\sqrt{2}$

b) $3x-16y-24=\sqrt{9x^2+16x+32}$ (1)

ĐK: $3x-16y-24\geq 0$

$$3x-16y-24=\sqrt{9x^2+16x+32} \Leftrightarrow (3x-16y-24)^2=9x^2+16x+32$$

$$\Leftrightarrow 9(3x-16y-24)^2=9(9x^2+16x+32)$$

$$\Leftrightarrow (9x-48y-72)^2=81x^2+144x+288$$

$$\Leftrightarrow (9x-48y-72)^2=(9x+8)^2+224$$

$$\Leftrightarrow (9x-48y-72)^2-(9x+8)^2=224$$

$$\Leftrightarrow (9x-48y-72+9x+8)(9x-48y-72-9x-8)=224$$

$$\Leftrightarrow (18x-48y-64)(-48y-80)=224$$

$$\Leftrightarrow -32\cdot(9x-24y-32)(3y+5)=224$$

$$\Leftrightarrow (9x-24y-32)\cdot(3y+5)=-7$$

Với x, y nguyên thì $(3y+5)$ là ước của (-7) và chia cho 3 dư 2

$$\Rightarrow (3y+5)=-1 \text{ hoặc } (3y+5)=-7$$

+) TH1: $(3y+5)=-1 \Leftrightarrow y=-2 \Rightarrow x=-1$

+) TH2: $(3y+5)=-7 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow x=-7$

Vậy các cặp nghiệm nguyên (x;y) là $(-1;-2);(-7;-4)$

Câu 3. ĐK: $x \geq \frac{-1}{3}$

$$4x^3 + 5x^2 + 1 = \sqrt{3x+1} - 3x$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + 5x^2 + 1 - \sqrt{3x+1} + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + 5x^2 + x + (2x+1) - \sqrt{3x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + 5x^2 + x + \frac{(2x+1)^2 - (3x+1)}{(2x+1) + \sqrt{3x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + x)(x+1) + \frac{4x^2 + x}{(2x+1) + \sqrt{3x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + x) \left[(x+1) + \frac{1}{(2x+1) + \sqrt{3x+1}} \right] = 0 (*)$$

$$\text{Với } x \geq -\frac{1}{3} \text{ thì } (x+1) + \frac{1}{(2x+1) + \sqrt{3x+1}} > 0$$

$$(*) \Leftrightarrow 4x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0; x = -\frac{1}{4}$

Câu 4.

Điều kiện xác định $x \geq \frac{1}{2}$. Biến đổi phương trình thứ hai ta được

$$2y^4(5x-2)(x-3) = 3(2-5x) \text{ suy ra } x = \frac{2}{5} \text{ (loại) hoặc } 2xy^4 + 3 = 6y^4$$

$$\text{Ta đưa về hệ phương trình } \begin{cases} y^2\sqrt{2x-1} + \sqrt{3}\sqrt{2x-1} = 5y^2 - \sqrt{3} \\ 2xy^4 + 3 = 6y^4 \end{cases}$$

Nhận thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên chia 2 vế của phương trình thứ nhất cho y^2 và phương trình thứ hai cho y^4 có:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{3}}{y^2}\sqrt{2x-1} = 5 - \frac{\sqrt{3}}{y^2} \\ 2x - 1 + \frac{3}{y^4} = 5 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{2x-1}; b = \frac{\sqrt{3}}{y^2} \text{ với } a \geq 0; b \geq 0$$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} a + ab + b = 5 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Ta được $a = \frac{5-b}{1+b}$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$\left(\frac{5-b}{1+b} \right)^2 + b^2 = 5 \Leftrightarrow b^4 + 2b^3 - 3b^2 - 20b + 20 = 0 \Leftrightarrow (b-1)(b-2)(b^2 + 5b + 10) = 0$$

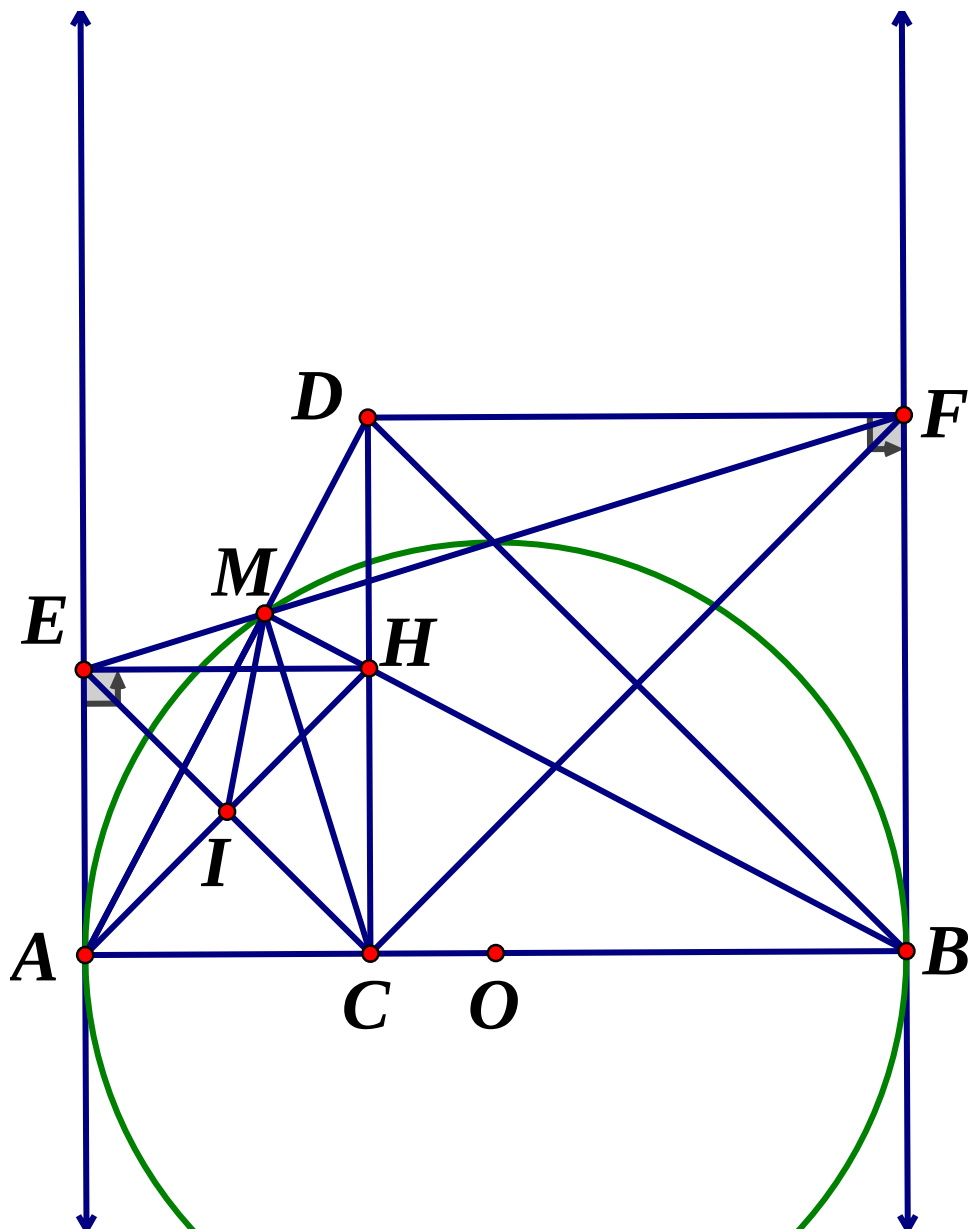
$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

+ Với $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\pm\sqrt[4]{3} \end{cases}$

+) Với $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x=1 \\ y=\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Kết luận $(x;y) \in \left\{ \left(\frac{5}{2}; \pm\sqrt[4]{3} \right); \left(1; \pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

Câu 5.



a) Do MC là phân giác của ΔAMB , theo tính chất đường phân giác $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BM}$ (1)

Xét ΔBHC và ΔBAM có $\angle BCH = \angle BMA = 90^\circ$, $\angle CBH = \angle MBA$ là góc chung

$$\Rightarrow \Delta BHC \text{ đồng dạng với } \Delta BAM \Rightarrow \frac{HC}{BC} = \frac{AM}{BM} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC = HC$

b) Tứ giác ACHE là hình vuông suy ra $AH = EC$

Gọi AH cắt EC tại I

$$\text{Xét } \Delta AMH \text{ vuông tại } M \Rightarrow MI = \frac{AH}{2} \Rightarrow MI = \frac{EC}{2} \Rightarrow \angle EMC = 90^\circ$$

Chứng minh tương tự ta có $\angle CMF = 90^\circ$

Vậy $\angle EMF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ suy ra E, M, F thẳng hàng

c) Do tứ giác ACHE là hình vuông $\Rightarrow CH = \frac{CE}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow S_1 = CH^2 = \frac{CE^2}{2} \Rightarrow 2S_1 = CE^2$$

Tương tự $2S_2 = CF^2$

Xét ΔFCE vuông tại C, đường cao CM, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông

$$\text{ta có, } \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CF^2} = \frac{1}{CM^2}$$

$$\Rightarrow CM^2 = \frac{CE^2 \cdot CF^2}{CE^2 + CF^2} = \frac{2S_1 S_2}{S_1 + S_2} \leq \frac{2S_1 S_2}{2\sqrt{S_1 S_2}} = S_1 \cdot S_2$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_2 \Leftrightarrow AM = BM$ (vô lý vì $AM < BM$)

$$\text{Vậy } CM^2 < \sqrt{S_1 \cdot S_2}$$

Câu 6.

+) Sử dụng bất đẳng thức : Với $x, y, z \geq 0$, ta luôn có $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3(x+y+z)}$

Từ bất đẳng thức đã cho ta có:

$$P = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{b^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}} \leq \sqrt{3 \left[3 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right]} = \sqrt{9 - 3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)}$$

$$\text{Suy ra } P \leq \sqrt{9 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2}$$

$$\text{Từ giả thiết } 32abc = 18(a+b+c) + 27 \Leftrightarrow 18 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) + \frac{27}{abc} = 32 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 \text{ và } \frac{1}{abc} \leq \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^3$$

Đặt $t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Từ (*) ta có

$$18 \left(\frac{t^2}{3} \right) + 27 \cdot \left(\frac{t^3}{27} \right) \geq 32 \Leftrightarrow t^3 + 6t^2 - 32 \geq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$$

$$\text{Suy ra } P \leq \sqrt{9 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} \leq \sqrt{9 - 2^2} = \sqrt{5}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{5}$

Đề chính thức

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ

ĐỀ THI MÔN TOÁN

(Dành cho chuyên Tin)

Ngày thi: 28 tháng 6 năm 2013

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm có 01 trang

Bài 1: (2 điểm)

a/ Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}} \right)^2$

b/ Tìm giá trị x nguyên để biểu thức $M = \frac{x^2+1}{x-1}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (2 điểm)

a/ Tìm m để đường thẳng $(a): y = x + 2m$ cắt đường thẳng $(b): y = 2x - 4$ tại một điểm trên trục hoành.

b/ Cho phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 2m - 11 = 0$ (x là ẩn, m là tham số).

Tìm m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 1, một nghiệm lớn hơn 1.

Bài 3: (2 điểm)

Trên quãng đường AB dài 60 km, người thứ nhất đi xe máy từ A đến B, người thứ hai đi xe đạp từ B đến A. Họ khởi hành cùng một lúc và gặp nhau tại C sau khi khởi hành được 1 giờ 20 phút. Từ C người thứ nhất đi tiếp đến B và người thứ hai đi tiếp đến A. Kết quả người thứ nhất đến nơi sớm hơn người thứ hai là 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng trên suốt quãng đường cả hai người đều đi với vận tốc không đổi.

Bài 4: (3 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có đường chéo $AC > BD$. Kẻ $CH \perp AD, CK \perp AB$.

a/ Chứng minh $\triangle CKH$ đồng dạng $\triangle BCA$

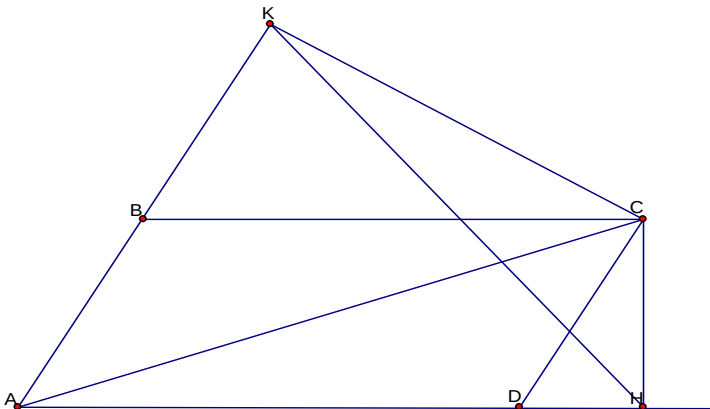
b/ Chứng minh $HK = AC \cdot \sin \angle BAD$

c/ Tính diện tích tứ giác AKCH biết $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 6\text{cm}$, $AD = 8\text{cm}$.

Bài 5: (1 điểm)

Cho $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 - x + \frac{1}{x} + 2013$

----- Hết -----

Bài	ý	Nội dung	Điểm
1 (2đ)	a	ĐK: $x \geq 0, x \neq 1$	0,25 đ
		$P = \left[\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right] \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$	0,25 đ
		$P = \frac{-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{2} = -x + \sqrt{x}$	0,5 đ
	b	Ta có $M = x+1 + \frac{2}{x-1}$	0,5 đ
		M nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow x-1$ là ước của 2	0,25 đ
		$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = \pm 1 \\ x-1 = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \text{ . KL...}$	0,25 đ
2 (2 đ)	a	Đường thẳng (b): $y = 2x - 4$ cắt trục hoành tại điểm $A(2;0)$	0,5 đ
		Ycbt $\Leftrightarrow$ đường thẳng (a): $y = x + 2m$ đi qua A, từ đó tìm được $m = -1$	0,5 đ
	b	Ta có $\Delta' = m^2 + 12 > 0, \forall m$	0,25 đ
		PT luôn có hai nghiệm phân biệt, gọi hai nghiệm đó là x_1 và x_2	0,25 đ
		Theo định lý vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m - 11 \end{cases}$	
		Ycbt $\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$	0,25 đ
3 (2đ)		$\Leftrightarrow m < 2$	0,25 đ
		Gọi vận tốc của người thứ nhất là x (km/h, $x > 0$) Gọi vận tốc của người thứ hai là y (km/h, $y > 0$)	0,5 đ
		Đôi 1 giờ 20 phút = $\frac{4}{3}$ giờ $\Rightarrow \frac{4}{3}(x+y) = 60 \Rightarrow x+y = 45$	0,5 đ
		Mặt khác ta có pt $\frac{60}{x} + 2 = \frac{60}{y}$	0,5 đ
		Từ đó giải ra được $x = 30(\text{km/h}), y = 15(\text{km/h})$. KL...	0,5 đ
4 (3đ)			

	a	Vì $AKC = AHC = 90^\circ$ nên tứ giác AKCH nội tiếp	0,25 đ
		$\Rightarrow BAC = KHC, CKH = CAH$	0,25đ
		Mặt khác $CAH = ACB$ (so le trong)	0,25 đ
		$\Rightarrow CKH = ACB$ nên $\triangle CKH$ đồng dạng $\triangle BCA$ (g-g).	0,25đ
	b	Ta có $\sin BAD = \sin KBC = \frac{KC}{BC}$	0,5 đ
		Mà $\triangle CKH$ đồng dạng $\triangle BCA \Rightarrow \frac{CK}{BC} = \frac{HK}{AC}$	0,25đ
		$\Rightarrow \frac{HK}{AC} = \sin BAD \Rightarrow HK = AC \cdot \sin BAD$	0,25 đ
	c	Trong tam giác KBC vuông tại K có $KBC = 60^\circ$ và $BC = 8$ cm nên $KC = 4\sqrt{3}$ cm, $BK = 4$ cm.	0,25 đ
		Trong tam giác CHD vuông tại H có $CDH = 60^\circ$ và $DC = 6$ cm nên $CH = 3\sqrt{3}$ cm, $HD = 3$ cm.	0,25 đ
		$\Rightarrow S_{\triangle ACK} = \frac{1}{2} AK \cdot CK = 20\sqrt{3} (cm^2),$ $\Rightarrow S_{\triangle ACH} = \frac{1}{2} AH \cdot CH = \frac{33\sqrt{3}}{2} (cm^2)$	0,25 đ
		Vậy $S_{AKCH} = \frac{73\sqrt{3}}{2} (cm^2)$	0,25 đ
Bài 5 (1 điểm)		Ta có $A = x^2 - x + \frac{1}{x} + 2013 = (x-1)^2 + (x + \frac{1}{x}) + 2012$	0,5 đ
		$A \geq 0 + 2 + 2012 = 2014$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$	0,25 đ
		Vậy $A_{\min} = 2014$ khi $x = 1$.	0,25 đ

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN**

NĂM HỌC 2008-2009

KHÓA NGÀY 18-06-2008

Môn thi: TOÁN

**Thời gian làm bài: 150 phút
(không kể thời gian giao đề)**

Câu 1 (4 điểm):

a) Tìm m để phương trình $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $|x_1 - x_2| = 17$.

b) Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x \geq m-1 \\ mx \geq 1 \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất.

Câu 2(4 điểm): Thu gọn các biểu thức sau:

$$a) S = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \quad (a, b, c \text{ khác nhau đôi một})$$

$$b) P = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \quad (x \geq 2)$$

Câu 3(2 điểm): Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa $a \leq b \leq c \leq d$ và $a + d = b + c$.

Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là tổng của ba số chính phương.

b) $bc \geq ad$.

Câu 4 (2 điểm):

a) Cho a, b là hai số thực thỏa $5a + b = 22$. Biết phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Hãy tìm hai nghiệm đó.

b) Cho hai số thực sao cho $x + y, x^2 + y^2, x^4 + y^4$ là các số nguyên. Chứng minh $x^3 + y^3$ cũng là các số nguyên.

Câu 5 (3 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính AB . Từ một điểm C thuộc đường tròn (O) kẻ CH vuông góc với AB (C khác A và B ; H thuộc AB). Đường tròn tâm C bán kính CH cắt đường tròn (O) tại D và E . Chứng minh DE đi qua trung điểm của CH .

Câu 6 (3 điểm): Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $\angle ABD = \angle CBE = 20^\circ$. Gọi M là trung điểm của BE và N là điểm trên cạnh BC sao $BN = BM$. Tính tổng diện tích hai tam giác BCE và tam giác BEN .

Câu 7 (2 điểm): Cho a, b là hai số thực sao cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh $0 < a + b \leq 2$.

-----oOo-----

Gợi ý giải đề thi môn toán chuyên

Câu 1:

a) $\Delta = (4m + 1)^2 - 8(m - 4) = 16m^2 + 33 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Ta có: $S = -4m - 1$ và $P = 2m - 8$.

Do đó: $|x_1 - x_2| = 17 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 289 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 289$

$\Leftrightarrow (-4m - 1)^2 - 4(2m - 8) = 289 \Leftrightarrow 16m^2 + 33 = 289$

$\Leftrightarrow 16m^2 = 256 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m = \pm 4$.

$$\text{b)} \begin{cases} 2x \geq m-1 & (a) \\ mx \geq 1 & (b) \end{cases}.$$

Ta có: (a) $\Leftrightarrow x \geq \frac{m-1}{2}$.

Xét (b): * $m > 0$: (b) $\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{m}$.

* $m = 0$: (b) $\Leftrightarrow 0x \geq 1$ (VN)

* $m < 0$: (b) $\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{m}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \frac{1}{m} = \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Câu 2:

$$\begin{aligned} \text{a) } S &= \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \quad (a, b, c \text{ khác nhau đôi một}) \\ &= \frac{a(c-b) + b(a-c) + c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{ac - ab + ba - bc + cb - ca}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P &= \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \quad (x \geq 2) \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \right]}{\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[|\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| \right]}{\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[|\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| \right]}{|\sqrt{2x-1}+1| - |\sqrt{2x-1}-1|} \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 \right]}{\sqrt{2x-1}+1 - (\sqrt{2x-1}-1)} \quad (\text{vì } x \geq 2 \text{ nên } \sqrt{x-1} \geq 1 \text{ và } \sqrt{2x-1} \geq 1) \\ &= \sqrt{2}\sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

Câu 3: Cho a, b, c, d là các số nguyên thoả $a \leq b \leq c \leq d$ và $a + d = b + c$.

a) Vì $a \leq b \leq c \leq d$ nên ta có thể đặt $a = b - k$ và $d = c + h$ ($h, k \in \mathbb{N}$)

Khi đó do $a + d = b + c \Leftrightarrow b + c + h - k = b + c \Leftrightarrow h = k$.

Vậy $a = b - k$ và $d = c + k$.

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (b-k)^2 + b^2 + c^2 + (c+k)^2$
 $= 2b^2 + 2c^2 + 2k^2 - 2bk + 2ck$
 $= b^2 + 2bc + c^2 + b^2 + c^2 + k^2 - 2bc - 2bk + 2ck + k^2$
 $= (b+c)^2 + (b-c-k)^2 + k^2$ là tổng của ba số chính phương (do $b+c, b-c-k$ và k là các số nguyên)

b) Ta có $ad = (b-k)(c+k) = bc + bk - ck - k^2 = bc + k(b-c) - k^2 \leq bc$ (vì $k \in \mathbb{N}$ và $b \leq c$)

Vậy $ad \leq bc$ (ĐPCM)

Câu 4:

a) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của phương trình ($x_1 \leq x_2$)

Ta có $a = -x_1 - x_2$ và $b = x_1x_2$ nên

$$5(-x_1 - x_2) + x_1x_2 = 22$$

$$\Leftrightarrow x_1(x_2 - 5) - 5(x_2 - 5) = 47$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 47 \quad (*)$$

Ta có: $-4 \leq x_1 - 5 \leq x_2 - 5$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5 = 1 \\ x_2 - 5 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 52 \end{cases}$$

Khi đó: $a = -58$ và $b = 312$ thỏa $5a + b = 22$. Vậy hai nghiệm cần tìm là $x_1 = 6; x_2 = 52$.

b) Ta có $(x + y)(x^2 + y^2) = x^3 + y^3 + xy(x + y)$ (1)

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \quad (2)$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \quad (3)$$

Vì $x + y, x^2 + y^2$ là số nguyên nên từ (2) $\Rightarrow 2xy$ là số nguyên.

Vì $x^2 + y^2, x^4 + y^4$ là số nguyên nên từ (3) $\Rightarrow 2x^2y^2 = \frac{1}{2}(2xy)^2$ là số nguyên

$\Rightarrow (2xy)^2$ chia hết cho 2 $\Rightarrow 2xy$ chia hết cho 2 (do 2 là nguyên tố) $\Rightarrow xy$ là số nguyên.

Do đó từ (1) suy ra $x^3 + y^3$ là số nguyên.

Câu 5: Ta có: $OC \perp DE$ (tính chất đường nối tâm

$\Rightarrow \Delta CKJ$ và ΔCOH đồng dạng (g-g)

$\Rightarrow CK \cdot CH = CJ \cdot CO$ (1)

$$\Rightarrow 2CK \cdot CH = CJ \cdot 2CO = CJ \cdot CC'$$

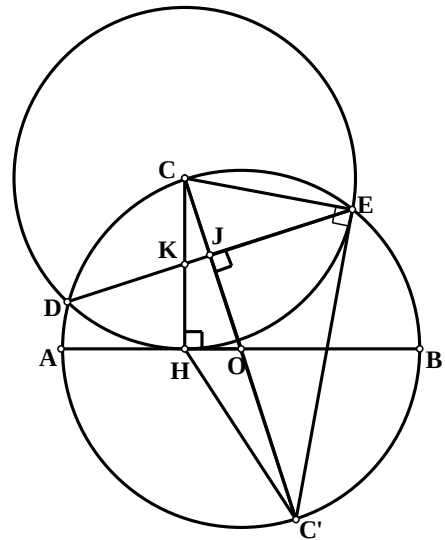
mà $\Delta CEC'$ vuông tại E có EJ là đường cao

$$\Rightarrow CJ \cdot CC' = CE^2 = CH^2$$

$$\Rightarrow 2CK \cdot CH = CH^2$$

$$\Rightarrow 2CK = CH$$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của CH.



Câu 6: Kẻ $BI \perp AC \Rightarrow I$ là trung điểm AC.

Ta có: $\angle ABD = \angle CBE = 20^\circ \Rightarrow \angle DBE = 20^\circ$ (1)

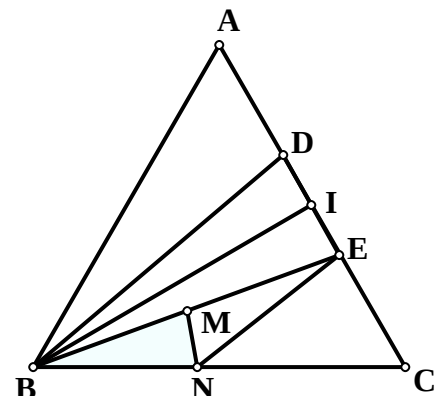
$$\Delta ADB = \Delta CEB \text{ (g-c-g)}$$

$\Rightarrow BD = BE \Rightarrow \Delta BDE$ cân tại B $\Rightarrow I$ là trung điểm DE.

mà $BM = BN$ và $\angle MBN = 20^\circ$

$\Rightarrow \Delta BMN$ và ΔBDE đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{S_{BMN}}{S_{BED}} = \left(\frac{BM}{BE} \right)^2 = \frac{1}{4}$$



$$\Rightarrow S_{BNE} = 2S_{BMN} = \frac{1}{2}S_{BDE} = S_{BIE}$$

$$\text{Vậy } S_{BCE} + S_{BNE} = S_{BCE} + S_{BIE} = S_{BIC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 7: Cho a, b là hai số thực sao cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh $0 < a + b \leq 2$.

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 > 0 \Rightarrow a^3 > -b^3 \Rightarrow a > -b \Rightarrow a + b > 0 \quad (1)$$

$$(a - b)^2(a + b) \geq 0 \Rightarrow (a^2 - b^2)(a - b) \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 - ab(a + b) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Rightarrow 3(a^3 + b^3) \geq 3ab(a + b)$$

$$\Rightarrow 4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3 \Rightarrow 8 \geq (a + b)^3 \Rightarrow a + b \leq 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 < a + b \leq 2$.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG**

ĐỀ CHÍNH THỨC

-----oOo-----

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10THPT
NĂM HỌC 2016 – 2017**

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể giao đề

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

$$\text{a) } (x + 3)^2 = 16$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{3} - 1 \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm)

$$\text{a) Rút gọn biểu thức } A = \left(\frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} \right) \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

$$\text{b) Tìm } m \text{ để phương trình: } x^2 - 5x + m - 3 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 = 1.$$

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Tìm a và b biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(-1; 5)$ và song song với đường thẳng $y = 3x + 1$.

b) Một đội xe chuyên chở 36 tấn hàng. Trước khi đi làm việc, đội xe đó được bổ sung thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn so với dự định. Hỏi đội xe lúc ban đầu có bao nhiêu xe? Biết rằng số hàng chở trên tất cả các xe có khối lượng bằng nhau.

Câu 4 (3,0 điểm) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại C , cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M . Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại F , tia BN cắt đường thẳng d tại E . Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

a) Chứng minh: $AD.AE = AC.AB$.

b) Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDN .

c) Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB .

Câu 5 (1,0 điểm) Cho a, b, c là 3 số thực dương thỏa mãn : $abc = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca}$

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2,0 điểm)

a, $(x+3)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ x+3=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3=1 \\ x=-4-3=-7 \end{cases}$ Vậy pt có 2 nghiệm là 1 và -7.

b, $\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-4y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x=0 \\ 3x-4y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ Vậy $(x; y) = (0; 3)$.

Câu 2 (2,0 điểm)

a, $A = \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right)$ Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, ta có :

$$A = \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}+2)}{x+\sqrt{x}+1} \right)$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}+1} \right)$$

$$A = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{x-1} \right) = \frac{1}{x-1}$$

Vậy với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, ta có $A = \frac{1}{x-1}$

b, $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ (1) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi

$\Delta = 25 - 4m + 12 = -4m + 37 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{37}{4}$ (*) Khi đó theo định lý Vi-ét ta có : $\begin{matrix} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{matrix}$

Có $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - x_2 \\ (5 - x_2)^2 - 2(5 - x_2)x_2 + 3x_2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - x_2 \\ (5 - x_2)^2 - 2(5 - x_2)x_2 + 3x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - x_2 \\ 3x_2^2 - 17x_2 + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} \\ x_2 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Vậy thay vào $x_1 x_2 = m - 3$ được $m = 9$ (TMĐK (*)) hoặc $m = \frac{83}{9}$ (TMĐK (*))

Câu 3 (2,0 điểm)

a, Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm A (-1 ;5) thay $x = -1$; $y = 5$ ta được $-a + b = 5$ (1)

Đồ thị hs $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ ta có $a = 3$; $b \neq 1$

Kết hợp hai điều kiện được $a = 3$; $b = 8$

b, Gọi số xe lúc đầu là x xe (ĐK : $x \in \mathbb{N}^*$)

Số xe sau khi bổ sung là $x+3$ (xe) Lúc đầu mỗi xe chở số hàng là $\frac{36}{x}$ (tấn)

Lúc sau mỗi xe chở số hàng là $\frac{36}{x+3}$ (tấn) Theo đề bài ta có PT $\frac{36}{x} - \frac{36}{x+3} = 1$

Giải Pt được $x = 9$ (TM) ; $x = -12$ (Loại)

Câu 4 (3,0 điểm)

Hình vẽ

a, $\triangle ADB \sim \triangle AEC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AC \cdot AB$$

b, Có $AN \perp BN$ (Vì $\angle ANB = 90^\circ$ theo tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Có $AD \perp BD$ (Vì $\angle ADB = 90^\circ$ theo tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Vậy F là trực tâm $\triangle AEB$ suy ra $BF \perp AE$
mà $BD \perp AE$ suy ra 3 điểm B, F, D thẳng hàng.

C,

$$\Delta FAC \sim \Delta BEC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{AC}{EC}$$

$$\Rightarrow FC.EC = AC.BC \quad (1)$$

$$\Delta CFK \sim \Delta CAE \Rightarrow \frac{FC}{CA} = \frac{CK}{EC} \Rightarrow FC \cdot CE = CA \cdot CK \quad (2)$$

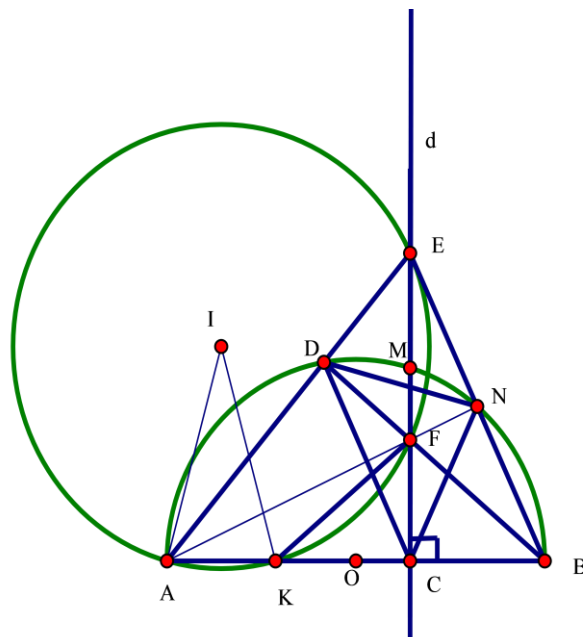
Từ (1) và (2) suy ra $BC = CK$ suy ra K cố định

Mà $IA = IK$ suy ra I thuộc trung trực của AK là đường thẳng cố định.

Cách 2 : Gọi giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với AB là K $\Rightarrow$ tứ giác AEFK là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle AEC = \angle FKB$ (Cùng bù với $\angle AKF$). (6)

Lại có $AEC = FBK$ (Cùng phụ với EAB) (7)

Từ (6) và (7) ta có $\angle FKB = \angle FBK \Rightarrow \triangle FKB$ là tam giác cân tại F. Mà FC vuông góc với KB nên FC là đường cao đồng thời là trung trực của KB nên C là trung điểm của KB tức là $BC = CK$.



Có B, C cố định nên BC có độ dài không đổi $\Rightarrow$ CK có độ dài không đổi, K thuộc đường kính AB cố định nên K là điểm cố định

Mà IA = IK nên I thuộc đường trung trực của đoạn AK. Mà AK cố định nên trung trực của AK là đường thẳng không đổi.

Vậy : Điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB

Câu 5 (1,0 điểm)

+ Ta chứng minh BĐT : $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3 = a^2b^2(a+b)$

+Ta có

$$a^5 + b^5 + ab \geq a^3b^2 + a^2b^3 + ab = a^2b^2(a+b) + ab = ab[ab(a+b) + 1] = ab[ab(a+b) + abc] = a^2b^2(a+b+c)$$

$$= ab \cdot \frac{abc(a+b+c)}{c} = ab \cdot \frac{a+b+c}{c}$$

Vậy $a^5 + b^5 + ab \geq ab \cdot \frac{a+b+c}{c}$ hay $\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{c}{a+b+c}$ (1)

Tương tự : $\frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq \frac{a}{a+b+c}$ (2)

$$\frac{ac}{a^5 + c^5 + ac} \leq \frac{b}{a+b+c}$$
 (3)

Từ (1)(2)(3) Suy ra :

$$P = \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

$$P_{\max} = 1 \text{ khi } a = b = c = 1$$

SỞ GD & ĐT
HOÀ BÌNH

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 NĂM HỌC 2013 – 2014
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ
ĐỀ THI MÔN TOÁN CHUYÊN

Đề chính thức

Ngày thi: 29 tháng 6 năm 2013

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm có 01 trang

Bài 1 (2 điểm)

1) Cho x là số thực âm thỏa mãn $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$, tính giá trị của biểu thức

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

2) Phân tích thành nhân tử biểu thức sau: $x^4 - 2y^4 - x^2y^2 + x^2 + y^2$.

Bài 2 (3 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A, $\angle ABC = 60^\circ$. Trung tuyến CD = $\frac{3}{4}$ cm. Tính diện tích tam giác ABC.

2) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $y = (m+1)x - m$, m là tham số. Tìm m để đường thẳng d cắt parabol (P): $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho OA vuông góc với OB.

Bài 3 (2 điểm)

1) Cho x, y là 2 số dương thỏa mãn $x + y = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right).$$

2) Tìm nghiệm x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $2x^2 - 2xy = 5x - y - 19$.

Bài 4 (2 điểm)

Cho đường tròn (O), bán kính R, A là 1 điểm cố định nằm ngoài đường tròn. Một đường tròn thay đổi đi qua 2 điểm O, A cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua 1 điểm cố định. (trước khi chứng minh hãy nêu dự đoán điểm cố định mà P, Q đi qua, giải thích cách nghĩ).

Bài 5 (1 điểm)

Có thể lát kín một cái sân hình vuông cạnh 3,5m bằng những viên gạch hình chữ nhật kích thước 25cm x 100cm mà không cắt gạch được hay không?

..... Hết

Lời giải tóm tắt

Bài 1

1) Ta có $A = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x})$

Từ giả thiết ta có: $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 25 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 5^2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -5$ vì $x < 0$

Do đó $A = (-5)^3 - 3(-5) = -110$

2) $x^4 - 2y^4 - x^2y^2 + x^2 + y^2 = (x^4 - y^4) - (y^4 + x^2y^2) + (x^2 + y^2)$
 $= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2 - y^2 + 1) = (x^2 + y^2)(x^2 - 2y^2 + 1)$

Bài 2

1)

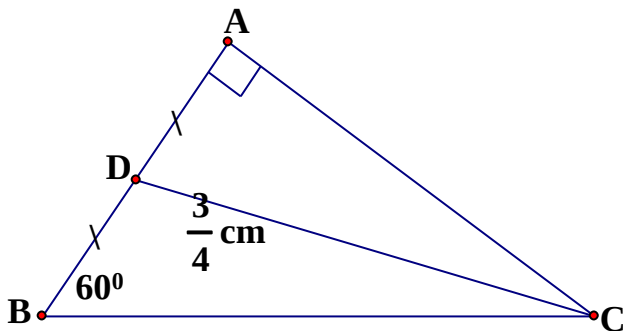
Đặt $BC = 2x$ ($x > 0$). Vì $\angle ABC = 60^\circ$
 $\Rightarrow \angle C = 30^\circ \Rightarrow AB = x \Rightarrow AD = \frac{1}{2}x$;

$AC = \sqrt{3}x$

Tam giác ADC vuông tại A $\Rightarrow$

$CD^2 = AD^2 + AC^2$ (Đ/l Py tago)

$\Rightarrow \frac{9}{16} = 3x^2 + \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x = \frac{3}{2\sqrt{13}}$



Vậy diện tích S của tam giác ABC là $S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{3}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{104} (\text{cm}^2)$

2) Phương trình hoành độ của hai đồ thị là $x^2 - (m+1)x + m = 0$ (*)

Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B $\Leftrightarrow$ PT (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Xét PT hoành độ, có $a + b + c = 1 - m - 1 + m = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = m \Rightarrow y_1 = 1; y_2 = m^2$

$\Rightarrow A(1;1); B(m; m^2)$

Phương trình đường thẳng đi qua O và A là $y = x$

Phương trình đường thẳng đi qua O và B là $y = mx$

Đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng OB $\Leftrightarrow m \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow m = -1$

Vậy với $m = -1$ thì đường thẳng và parabol cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho OA vuông góc với OB.

Bài 3.

1) ĐK: $xy \neq 0$; Từ giả thiết $\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2xy$

Ta có $P = \frac{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}{x^2 y^2} = \frac{x^2 y^2 - (x^2 + y^2) + 1}{x^2 y^2} = \frac{x^2 y^2 - 1 + 2xy + 1}{x^2 y^2} = \frac{x^2 y^2 + 2xy}{x^2 y^2} = 1 + \frac{2}{xy}$.

Mặt khác ta có $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow 1 \geq 4xy$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \geq xy \Leftrightarrow \frac{1}{xy} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{2}{xy} \geq 8 \Rightarrow P \geq 1 + 8 = 9$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$. Thỏa ĐK

Vậy $\min P = 9 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

2) Từ PT ta có $y = \frac{2x^2 - 5x + 19}{2x - 1} = \frac{x(2x - 1) - 2(2x - 1) + 17}{2x - 1} = x - 2 + \frac{17}{2x - 1}$ ($x \neq \frac{1}{2}$ vì nếu $x = \frac{1}{2}$ không nguyên)

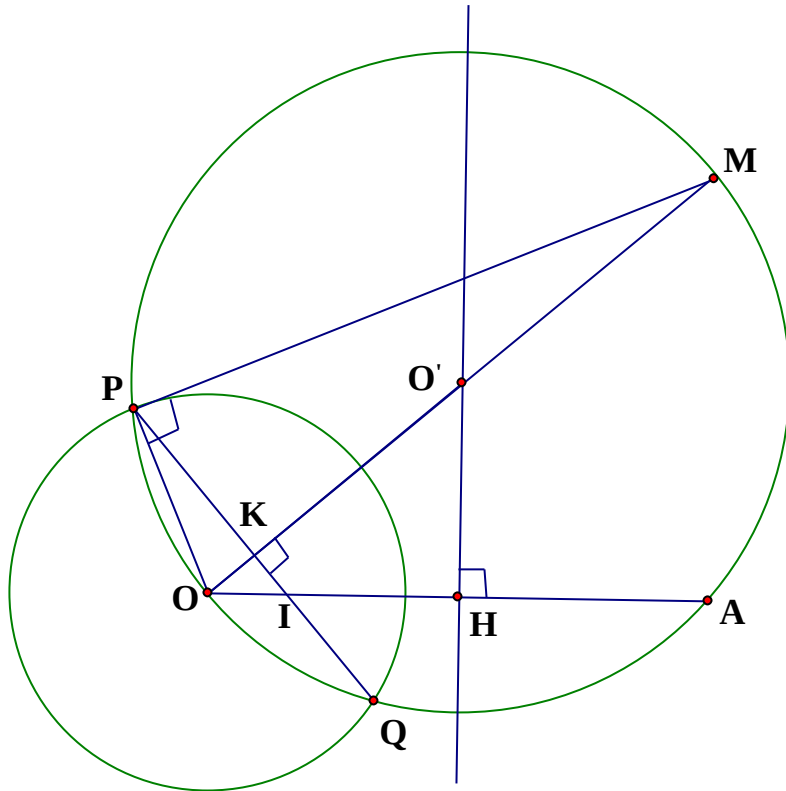
$\Rightarrow$ với x nguyên thì y nguyên khi và chỉ khi $\frac{17}{2x - 1}$ nguyên $\Leftrightarrow 17 : 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - 1$ là

ước của 17. Mà 17 có các ước là $\pm 1; \pm 17$

Do x nguyên dương nên $2x - 1 \geq 1 \Rightarrow 2x - 1 = 1$ hoặc $2x - 1 = 17 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 9$
 $\Rightarrow y = 16$ hoặc $y = 8$.

Vậy PT có các nghiệm nguyên là: $(x; y) = (1; 16); (9; 8)$

Bài 4.



*) Dự đoán điểm cố định là giao điểm I của OA và PQ.

*) Chứng minh: G/s (O') đi qua O và A $\Rightarrow O'$ nằm trên đường trung trực của AO, gọi giao điểm của đường trung trực đó với AO là H, giao điểm của OA với PQ là I, giao của OO' với PQ là K, OO' cắt đường tròn (O') ở M.

Ta có OO' là đường trung trực của PQ $\Rightarrow OO' \perp PQ$

ΔOKI đồng dạng với $\Delta OHO'$ (g.g)

(Do $OO' = \frac{1}{2} OM$ và $AO = 2.OH$)

Ta có $OPM = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \Delta OPM$ vuông tại P, lại có $PQ \perp OO' \Rightarrow OP^2 = OK.OM$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow OI = \frac{OP^2}{OA} = \frac{R^2}{OA}$ không đổi.

Do O cố định, OI không đổi nên I cố định

Vậy đường thẳng PQ đi qua 1 điểm cố định.

Bài 5. Không thể lát sân mà không phải cắt gạch vì nếu gọi số gạch lát theo chiều dài và chiều rộng của viên gạch là x, y thì hệ PT sau phải có nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} 100x = 350 \\ 25y = 350 \end{cases} \text{ nhưng hệ vô nghiệm nguyên.}$$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO
HÀ NAM
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC: 2013 – 2014
Môn: Toán (Chuyên Toán)
Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao
đề)**

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a} - \sqrt{3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$

a) Tìm điều kiện của a và b để M xác định và rút gọn M .

b) Tính giá trị của M khi $a = 1 + 3\sqrt{2}$, $b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3}$

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^3 - 5x^2 + (2m + 5)x - 4m + 2 = 0$, m là tham số.

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

b) Tìm giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

Bài 3. (1,0 điểm)

Cho số nguyên dương n và các số $A = \underbrace{444\dots4}_{2n}$ (A gồm $2n$ chữ số 4); $B = \underbrace{888\dots8}_n$

(B gồm n chữ số 8). Chứng minh rằng $A + 2B + 4$ là số chính phương.

Bài 4. (4,0 điểm)

Cho đường tròn (O) , đường thẳng d cắt (O) tại hai điểm C và D . Từ điểm M tùy ý trên d kẻ các tiếp tuyến MA và MB với (O) (A và B là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của CD .

a) Chứng minh tứ giác $MAIB$ nội tiếp.

b) Các đường thẳng MO và AB cắt nhau tại H . Chứng minh H thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle COD$.

c) Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên đường thẳng d .

d) Chứng minh $\frac{MD}{MC} = \frac{HA^2}{HC^2}$

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho ba số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 2013$.

Chứng minh $\frac{a}{a + \sqrt{2013a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2013b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2013c + ab}} \leq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

HẾT

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO
HÀ NAM**

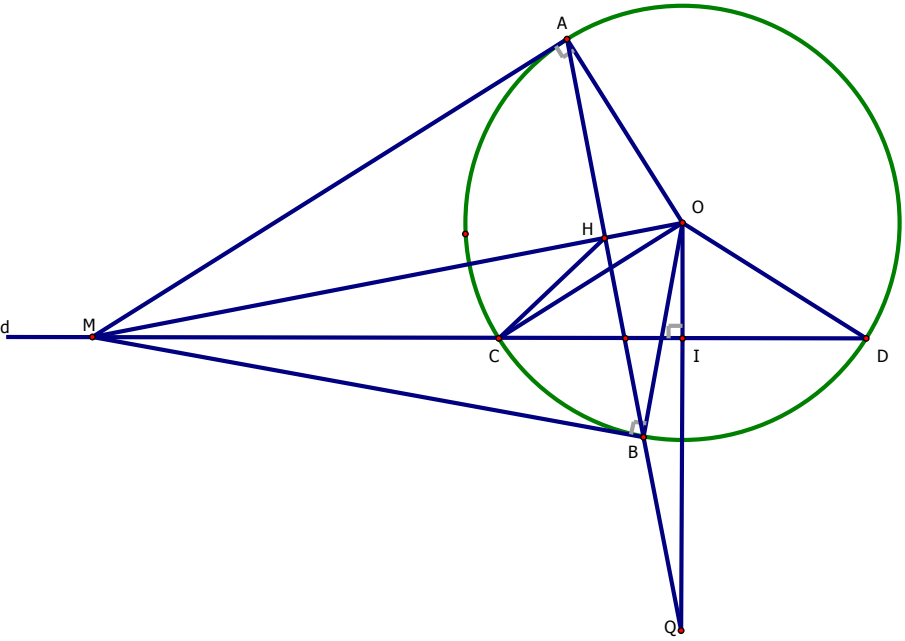
**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC: 2013 – 2014
Môn: Toán (Chuyên Toán)**

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn này gồm 4 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0 đ)	a) $M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a - 3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$	
	ĐK xác định của M : $\begin{cases} a, b \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$	0,25

	$M = \frac{2a + 2a\sqrt{2} - 2\sqrt{3ab} + 2\sqrt{3ab} - 3b - 2a\sqrt{2}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$	0,25
	$= \frac{2a - 3b}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}} = \frac{(\sqrt{2a} + \sqrt{3b})(\sqrt{2a} - \sqrt{3b})}{\sqrt{a}(\sqrt{2a} + \sqrt{3b})} = \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{3b}}{\sqrt{a}}$	0,5
	b) Ta có $M = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{3b}{a}}$ với $a = 1 + 3\sqrt{2}$, $b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3}$	0,25
	$\Rightarrow \frac{3b}{a} = \frac{30 + 22\sqrt{2}}{1 + 3\sqrt{2}} = \frac{(30 + 22\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1)}{(1 + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1)} = \frac{102 + 68\sqrt{2}}{17}$	0,25
	Vậy $\sqrt{\frac{3b}{a}} = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2}$	0,25
	Từ đó $M = \sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}) = -2$	0,25
Câu 2 (2,0 đ)	a) $x^3 - 5x^2 + (2m + 5)x - 4m + 2 = 0$ (1)	
	$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 3x + 2m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 3x + 2m - 1 = 0(*) \end{cases} \text{ Nếu}$ $\begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 3x + 2m - 1 = 0 \end{cases} \text{ trừ 0,25 điểm}$	0,25
	Đề (1) có ba nghiệm phân biệt thì pt (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2	0,25
	Điều kiện là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ 4 - 6 + 2m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 - 8m > 0 \\ 2m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \neq m < \frac{13}{8}$	0,5
	b) Ta có ba nghiệm phân biệt của phương trình (1) là $x_1 = 2$; x_2 ; x_3 trong đó x_2 ; x_3 là hai nghiệm phân biệt của pt (*)	0,25
	Khi đó $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$ $\Leftrightarrow 4 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 11 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 7(**)$	0,25
	áp dụng định lý Vi-ét đối với pt (*) ta có $\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 \cdot x_3 = 2m - 1 \end{cases}$ (0,25 đ) Vậy (**) $\Leftrightarrow 9 - 2(2m - 1) = 7 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn ĐK) Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.	0,5
Câu 3 (1,0 đ)	Ta có $A = \underbrace{444\dots4}_{2n} = \underbrace{444\dots4}_n \underbrace{000\dots0}_n + \underbrace{444\dots4}_n = \underbrace{444\dots4}_n \cdot (10^n - 1) + \underbrace{888\dots8}_n$	0,25
	$= 4 \cdot \underbrace{111\dots1}_n \cdot \underbrace{999\dots9}_n + B = 4 \cdot \underbrace{111\dots1}_n \cdot \underbrace{9 \cdot \underbrace{111\dots1}_n}_n + B = \left(\underbrace{6 \cdot \underbrace{111\dots1}_n}_n \right)^2 + B$	0,25
	$= \left(\frac{3}{4} \cdot \underbrace{888\dots8}_n \right)^2 + B = \left(\frac{3}{4} B \right)^2 + B$	0,25
	Khi đó $A + 2B + 4 = \left(\frac{3}{4} B \right)^2 + B + 2B + 4 = \left(\frac{3}{4} B \right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} B \cdot 2 + 4 = \left(\frac{3}{4} B + 2 \right)^2$ $= \left(\frac{3}{4} \cdot \underbrace{888\dots8}_n + 2 \right)^2 = \left(3 \cdot \underbrace{222\dots2}_n + 2 \right)^2 = \left(\underbrace{666\dots68}_{n-1} \right)^2$ Ta có điều phải chứng minh.	0,25

		
Câu 4 (4,0 đ)	a) MA, MB là các tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow MAO = MBO = 90^\circ$	0,25
	I là trung điểm của CD $\Rightarrow OI \perp CD \Rightarrow MIO = 90^\circ$	0,25
	$\Rightarrow A, I, B$ cùng thuộc đường tròn đường kính MO	0,25
	$\Rightarrow$ Tứ giác MAIB nội tiếp đường tròn đường kính MO.	
	b) MA = MB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) OA = OB $\Rightarrow$ MO là đường trung trực của AB $\Rightarrow MO \perp AB$ $\Rightarrow MH.MO = MB^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (1)	0,25
	$MBC = MBD = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{BC}$ $\Rightarrow \triangle MBC \sim \triangle MDB (g.g)$ $\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MC.MD = MB^2$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH.MO = MC.MD$ $\frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD} \Rightarrow \triangle MCH \sim \triangle MOD (c.g.c)$ $\Rightarrow MHC = MDO$	0,25
	$\Rightarrow$ tứ giác CHOD nội tiếp $\Rightarrow H$ thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle COD$.	0,25
	c) Gọi Q là giao điểm của AB và OI Hai tam giác vuông MIO và QHO có $\angle IOH$ chung $\Rightarrow \triangle MIO \sim \triangle QHO$	0,25
	$\frac{MO}{OI} = \frac{OQ}{OH}$ $\Rightarrow OQ = \frac{MO.OH}{OI} = \frac{OA^2}{OI} = \frac{R^2}{OI}$ (R là bán kính (O) không đổi)	0,25
	O, I cố định $\Rightarrow$ độ dài OI không đổi $\Rightarrow$ lại có Q thuộc tia OI cố định	0,5

	$\Rightarrow Q$ là điểm cố định $\Rightarrow đpcm.$	
	$d) AHC = 90^\circ + MHC = 90^\circ + ODC = 90^\circ + \frac{180^\circ - COD}{2}$ (ΔCOD cân tại O) $= 180^\circ - \frac{1}{2}COD = \frac{1}{2}(360^\circ - sd CBCB) = \frac{1}{2}sd CAD$ $= CBD$ (3)	0,25
	$CAH = CDB$ (4) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC) Từ (3) và (4) $\Rightarrow \Delta AHC \sim \Delta DBC(g.g)$ $\Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{BD}{BC}$ (5)	0,25
	$\Delta MBC \sim \Delta MDB(g.g)$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MB}{MC} = \frac{BD}{BC}$ $\Rightarrow \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 = \frac{MD}{MB} \cdot \frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MC}$ (6)	0,25
	Từ (5) và (6) $\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{HA^2}{HC^2}$	0,25
Câu 5 (1,0 đ)	Ta có $2013a + bc = (a + b + c)a + bc = a^2 + ab + ac + bc = a^2 + bc + a(b + c)$ Theo BĐT Cô-Si cho hai số dương ta có $a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc}$. Từ đó $a^2 + bc + a(b + c) \geq 2a\sqrt{bc} + a(b + c) = a(b + c + 2\sqrt{bc}) = a(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$	0,25
	Vậy $\frac{a}{a + \sqrt{2013a + bc}} \leq \frac{a}{a + \sqrt{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2}} = \frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (1)$	0,25
	Chứng minh tương tự được $\frac{b}{b + \sqrt{2013b + ca}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (2) \text{ và } \frac{c}{c + \sqrt{2013c + ba}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (3)$ Cộng từng vế của (1); (2); (3) ta được $\frac{a}{a + \sqrt{2013a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2013b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2013c + ab}} \leq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = 1$	0,25
	Dời “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = bc \\ b^2 = ca \\ c^2 = ab \\ a + b + c = 2013 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 671$	0,25

**

HƯỚNG DẪN GIẢI CÂU 3,5 MÔN TOÁN CHUYÊN HÀ NAM

$$A = 4.\underbrace{111\dots1}_{2n} = 4(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \dots + 1)$$

Câu 3: Từ giả thiết ta có

$$B = 2.\underbrace{888\dots8}_n = 16.\underbrace{111\dots1}_n = 16(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1)$$

$$\begin{aligned}
\text{Từ đó suy ra } D &= A + 2B + 4 = 4(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \dots + 1) + 16(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1) + 4 \\
9D &= 4(10-1)(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \dots + 1) + 16(10-1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1) + 36 \\
&= 4(10^{2n} - 1) + 16(10^n - 1) + 36 \\
9D &= 4(10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4) \\
&= \left[2(10^n + 2) \right]^2
\end{aligned}$$

Suy ra đpcm.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a + \sqrt{2013a + bc}} &= \frac{a}{a + \sqrt{(a+b+c)a + bc}} \\
\text{Câu 5: Với gt đã cho ta có: } &= \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} = \frac{a(a - \sqrt{(a+b)(a+c)})}{a^2 - a^2 - ab - ac - bc} \\
&= \frac{a(2\sqrt{(a+b)(a+c)} - 2a)}{2(ab + ac + bc)} \leq \frac{a(a+b+a+c-2a)}{2(ab + ac + bc)} = \frac{ab + ac}{2(ab + ac + bc)}
\end{aligned}$$

(theo BĐT cosi $2\sqrt{ab} \leq a+b$ dấu = xảy ra khi $a=b$).

$$\text{Từ đó suy ra } VT \leq \frac{ab+ac}{ab+ac+bc} + \frac{bc+ba}{ab+ac+bc} + \frac{cb+ac}{ab+ac+bc} = 1 \text{ (ĐPCM)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=2013:3=671$.

UBND HUYỆN
PHÒNG GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
HUYỆN VĨNH BẢO

ĐỀ CHÍNH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
NĂM HỌC 2013-2014
MÔN: TOÁN LỚP 9

Thời gian làm bài 150 phút không kể thời gian giao đề

$$\text{Bài 1: (4 điểm)} \text{ Cho biểu thức: } P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right).$$

a) Rút gọn biểu thức P.

$$\text{b) Tính giá trị của P với } x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}.$$

Bài 2: (4 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (D) và (L) lần lượt là đồ thị của hai hàm số: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ và $y = |x|$.

a) Vẽ đồ thị (D) và (L).

b) (D) và (L) cắt nhau tại M và N. Chứng minh OMN là tam giác vuông.

Bài 3: (4 điểm) Giải phương trình: $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.

Bài 4: (2 điểm) Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh là a, vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng DC ở I.

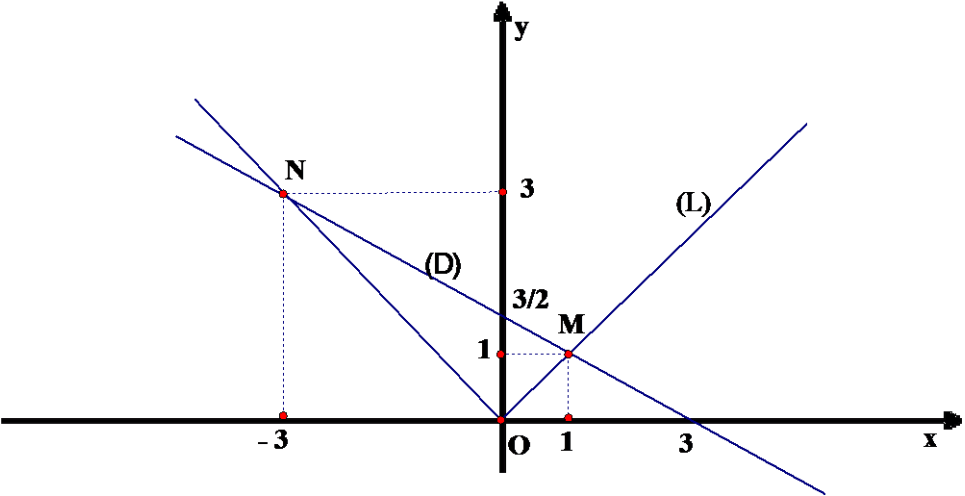
$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Bài 5: (6 điểm)

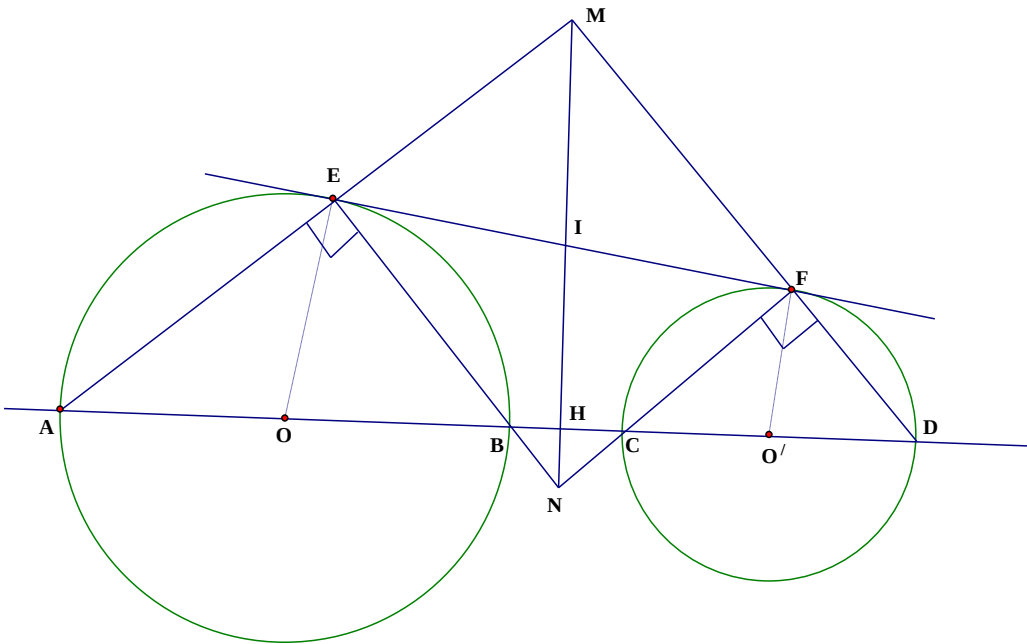
Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt đường tròn (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF , $E \in (O)$ và $F \in (O')$. Gọi M là giao điểm của AE và DF ; N là giao điểm của EB và FC . Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác $MENF$ là hình chữ nhật.
- b) $MN \perp AD$.
- c) $ME.MA = MF.MD$.

----- **Hết** -----

Bài	Đáp án	Điểm
1	ĐKXD: $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$.	0,5 đ
a)	Mẫu thức chung là $1 - xy$ $P = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} : \frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy}$ $= \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{1 + x + y + xy}$ $= \frac{2(\sqrt{x} + y\sqrt{x})}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
b)	$x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$ $\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} - 1$ $P = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{1 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1} =$ $P = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{5 - 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3} + 2}{13}$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
2	a) Đồ thị $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ có: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \\ y = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$ Đồ thị $y = x = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ Đồ thị như hình vẽ: 	0,5 đ 0,5 đ 1 đ
b)	Đồ thị (D) và (L) cắt nhau tại hai điểm có tọa độ M(1; 1) và N(-3; 3) Ta có: $OM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow OM^2 = 2$	0,5 đ

	$ON = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow ON^2 = 18$ $MN = \sqrt{(1-3)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow MN^2 = 20$ Vì: $OM^2 + ON^2 = MN^2$ Vậy: tam giác OMN vuông tại O	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
3	Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình Chia cả 2 vế của phương trình cho x^2 ta được: $6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$ $\Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$ Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ thì: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ Ta được pt: $6y^2 - 5y - 50 = 0 \Leftrightarrow (3y - 10)(2y + 5) = 0$ Do đó: $y = \frac{10}{3}$ và $y = -\frac{5}{2}$ * Với $y = \frac{10}{3}$ thì: $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow (3x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$ * Với $y = -\frac{5}{2}$ thì: $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow (2x + 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = -2 \end{cases}$	1 đ 1 đ 1 đ
4		
	Vẽ $Ax \perp AI$ cắt đường thẳng CD tại J. Ta có ΔAIJ vuông tại A, có AD là đường cao thuộc cạnh huyền IJ, nên: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AJ^2} + \frac{1}{AI^2} \quad (1)$ Xét hai tam giác vuông ADJ và ABM, ta có: $AB = AD = a$; $DAJ = BAM$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) $\Rightarrow \Delta ADJ = \Delta ABM$. Suy ra: $AJ = AM$ Thay vào (1) ta được: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$ (đpcm)	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ

5		
a)	Ta có $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Vì EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O'), nên: $OE \perp EF$ và $OF \perp EF \Rightarrow OE \parallel O'F$ $\Rightarrow \angle EOB = \angle FO'D$ (góc đồng vị) $\Rightarrow \angle EAO = \angle FCO'$ Do đó $MA \parallel FN$, mà $EB \perp MA \Rightarrow EB \perp FN$ Hay $\angle ENF = 90^\circ$. Tứ giác MENF có $\angle E = \angle N = \angle F = 90^\circ$, nên MENF là hình chữ nhật	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
b)	Gọi I là giao điểm của MN và EF; H là giao điểm của MN và AD Vì MENF là hình chữ nhật, nên $\angle IFN = \angle INF$ Mặt khác, trong đường tròn (O'): $\angle IFN = \angle FDC = \frac{1}{2}$ số đo $\widehat{FC}$ $\Rightarrow \angle FDC = \angle HNC$ Suy ra $\triangle FDC$ đồng dạng $\triangle HNC$ (g – g) $\Rightarrow \angle NHC = \angle DFC = 90^\circ$ hay $MN \perp AD$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
c)	Do MENF là hình chữ nhật, nên $\angle MFE = \angle FEN$ Trong đường tròn (O) có: $\angle FEN = \angle EAB = \frac{1}{2}$ số đo $\widehat{EB}$ $\Rightarrow \angle MFE = \angle EAB$ Suy ra $\triangle MEF$ đồng dạng $\triangle MDA$ (g – g) $\Rightarrow \frac{ME}{MD} = \frac{MF}{MA}$, hay $ME \cdot MA = MF \cdot MD$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ

Câu 1 (2 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3})}{2-\sqrt{1-x^2}}$

với $-1 \leq x \leq 1$.

b) Cho a và b là các số thỏa mãn $a > b > 0$ và $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4}$.

Câu 2 (2 điểm).

a) Giải phương trình $x^2(x^2 + 2) = 4 - x\sqrt{2x^2 + 4}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$.

Câu 3 (2 điểm).

a) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình $xy^2 + 2xy + x = 32y$.

b) Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$.

Chứng minh rằng $2a + 2b + 1$ là số chính phương.

Câu 4 (3 điểm).

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O, R). H là một điểm di động trên đoạn OA (H khác A). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

a) Chứng minh $HKM = 2AMH$.

b) Các tiếp tuyến của (O, R) tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của (O, R) lần lượt tại D và E. OD, OE cắt AB lần lượt tại F và G. Chứng minh $OD \cdot GF = OG \cdot DE$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB theo R.

Câu 5 (1 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ac}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c}$.

-----Hết-----

ĐÁP ÁN

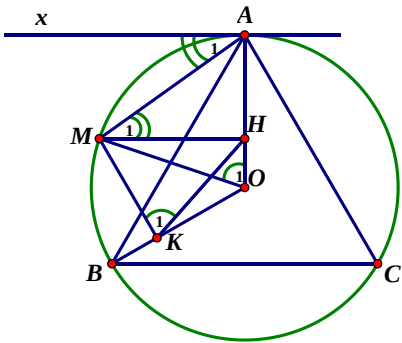
**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG**

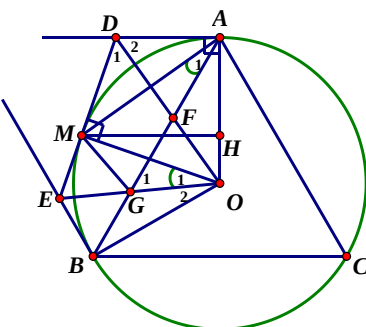
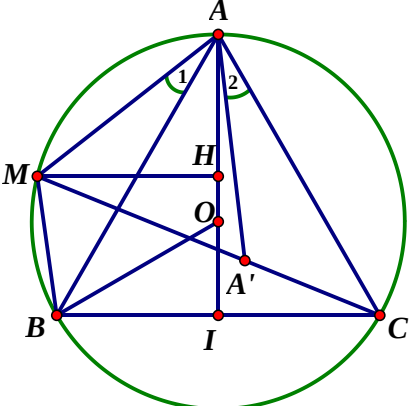
**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN
HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN**

Ngày thi 20 tháng 03 năm 2014
(Hướng dẫn chấm gồm có 03 trang)

Lưu ý: Nếu học sinh làm theo cách khác mà kết quả đúng thì giám khảo vẫn cho điểm tối đa.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a: (1,0 đ)	$A = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) (2-\sqrt{1-x^2})}{2-\sqrt{1-x^2}}$	0.25
	$= \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$	0.25
	$= \sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2} = \sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})(2+2\sqrt{1-x^2})}$	0.25
	$= \sqrt{2x^2} = x \sqrt{2}$	0.25
Câu 1b: (1,0 đ)	$a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0 \Leftrightarrow (a-2b)(a^2 + ab + 3b^2) = 0 \quad (*)$	0.25
	Vì $a > b > 0 \Rightarrow a^2 + ab + 3b^2 > 0$ nên từ (*) ta có $a = 2b$	0.25
	Vậy biểu thức $B = \frac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4} = \frac{16b^4 - 4b^4}{b^4 - 64b^4}$	0.25
	$B = \frac{12b^4}{-63b^4} = \frac{-4}{21}$	0.25
Câu 2a: (1,0 đ)	Đặt $t = x\sqrt{2x^2+4} \Rightarrow t^2 = 2(x^4+2x^2) \Rightarrow x^2(x^2+2) = \frac{t^2}{2}$	0.25
	ta được phương trình $\frac{t^2}{2} = 4-t \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2 \end{cases}$	0.25
	Với $t = -4$ ta có $x\sqrt{2x^2+4} = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2(x^4+2x^2) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4 + 2x^2 - 8 = 0 \end{cases}$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$	
	Với $t = 2$ ta có $x\sqrt{2x^2+4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2(x^4+2x^2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4 + 2x^2 - 2 = 0 \end{cases}$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = \sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{3}-1}. \text{ Kết luận nghiệm của phương trình.}$	
Câu 2b: (1,0 đ)	Từ hệ ta có $x^3(2y+x) = y^3(2x+y) \Leftrightarrow (x^2-y^2)(2xy+x^2+y^2) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow (x+y)^3(x-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$	0.25

	* Với $x = y$ ta tìm được $(x ; y) = (0; 0); (\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ * Với $x = -y$ ta tìm được $(x ; y) = (0; 0); (1; -1); (-1; 1)$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x ; y) = (0; 0); (\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (-1; 1); (1; -1)$	0.25
	$xy^2 + 2xy + x = 32y \Leftrightarrow x(y+1)^2 = 32y$ Do y nguyên dương $\Rightarrow y+1 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{32y}{(y+1)^2}$	0.25
Câu 3a: (1,0 đ)	Vì $(y, y+1) = 1 \Rightarrow (y+1)^2 \in U(32)$	0.25
	mà $32 = 2^5 \Rightarrow (y+1)^2 = 2^2$ và $(y+1)^2 = 2^4$ (Do $(y+1)^2 > 1$)	0.25
	*Nếu $(y+1)^2 = 2^2 \Rightarrow y = 1; x = 8$ *Nếu $(y+1)^2 = 2^4 \Rightarrow y = 3; x = 6$ Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là: $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$	0.25
Câu 3b: (1,0 đ)	$2a^2 + a = 3b^2 + b \Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1) = b^2$ (*)	0.25
	Gọi d là ước chung của $(a-b, 2a+2b+1)$ ($d \in \mathbb{N}^*$). Thì	0.25
	$\begin{cases} (a-b):d \\ (2a+2b+1):d \end{cases} \Rightarrow (a-b)(2a+2b+1):d^2$ $\Rightarrow b^2:d^2 \Rightarrow b:d$	0.25
	Mà $(a-b):d \Rightarrow a:d \Rightarrow (2a+2b):d$ mà $(2a+2b+1):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = 1$	0.25
	Do đó $(a-b, 2a+2b+1) = 1$. Từ (*) ta được $a-b$ và $2a+2b+1$ là số chính phương $\Rightarrow 2a+2b+1$ là số chính phương.	0.25
Câu 4a: (1,0 đ)	 Qua A kẻ tia tiếp tuyến Ax của (O). Ta có $A_1 = \frac{1}{2}O_1 = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AM}$ (1)	0.25
	Có $Ax \parallel MH$ (cùng vuông góc với OA) $\Rightarrow A_1 = M_1$ (2)	0.25
	Tứ giác MHOK nội tiếp $\Rightarrow O_1 = K_1$ (cùng chắn MH) (3)	0.25
	Từ (1), (2), (3) ta có $M_1 = \frac{1}{2}K_1$ hay $HKM = 2AMH$.	0.25

Câu 4b: (1,0 đ)	 Có tứ giác AOMD nội tiếp (4)	0.25
	$A_1 = \frac{1}{2} \text{sđ BM}; O_1 = O_2 = \frac{1}{2} \text{sđ BM}$ $\Rightarrow A_1 = O_1 \Rightarrow$ tứ giác AMGO nội tiếp (5)	0.25
	Từ (4), (5) ta có 5 điểm A, D, M, G, O cùng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow G_1 = D_2 = D_1$	0.25
	$\Rightarrow \triangle OGF$ và $\triangle ODE$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{OG}{OD} = \frac{GF}{DE}$ hay $OD \cdot GF = OG \cdot DE$.	0.25
Câu 4c: (1,0 đ)	 Trên đoạn MC lấy điểm A' sao cho $MA' = MA \Rightarrow \triangle AMA'$ đều $\Rightarrow A_1 = A_2 (= 60^\circ - BAA')$ $\Rightarrow \triangle MAB = \triangle A'AC \Rightarrow MB = A'C$	0.25
	$\Rightarrow MA + MB = MC$ Chu vi tam giác MAB là $MA + MB + AB = MC + AB \leq 2R + AB$	0.25
	Đẳng thức xảy ra khi MC là đường kính của (O) $\Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung AM $\Rightarrow H$ là trung điểm đoạn AO Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là $2R + AB$	0.25
	Gọi I là giao điểm của AO và BC $\Rightarrow AI = \frac{3}{2}R = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$ Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là $2R + AB = (2 + \sqrt{3})R$	0.25
Câu 5: (1,0 đ)	Từ gt : $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$ và $a, b, c > 0$ Chia cả hai vế cho $abc > 0 \Rightarrow \frac{2}{c} + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = 7$ đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ 2z + 6x + 2y = 7 \end{cases}$	0.25
	Khi đó $C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ac}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c} = \frac{4}{2x+y} + \frac{9}{4x+z} + \frac{4}{y+z}$ $\Rightarrow C = \frac{4}{2x+y} + 2x + y + \frac{9}{4x+z} + 4x + z + \frac{4}{y+z} + y + z - (2x + y + 4x + z + y + z)$	0.25

	$= \left(\frac{2}{\sqrt{x+2y}} - \sqrt{x+2y} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{4x+z}} - \sqrt{4x+z} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y+z}} - \sqrt{y+z} \right)^2 + 17 \geq 17$	0.25
	Khi $x = \frac{1}{2}, y = z = 1$ thì $C = 7$ Vậy GTNN của C là 7 khi $a = 2; b = 1; c = 1$	0.25

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ**

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2013 - 2014
MÔN: TOÁN - THCS**

Thời gian làm bài 150 phút không kể thời gian giao đề

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1(3,0 điểm)

a) Giải phương trình trên tập nguyên

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 8y - 12 = 0$$

b) Cho $P(x) = x^3 - 3x^2 + 14x - 2$.

Tìm các số tự nhiên x nhỏ hơn 100 mà $P(x)$ chia hết cho 11

Câu 2(4,0 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a^3 - 3a + 2}{a^3 - 4a^2 + 5a - 2}$, biết $a = \sqrt[3]{55 + \sqrt{3024}} + \sqrt[3]{55 - \sqrt{3024}}$

b) Cho số thực x,y,z đôi 1 khác nhau thỏa mãn $x^3 = 3x - 1; y^3 = 3y - 1, z^3 = 3z - 1$
Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Câu 3(4,0 điểm)

a) Giải phương trình $3x - 1 + \frac{x-1}{4x} = \sqrt{3x+1}$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Câu 4(7,0 điểm)

Cho đường tròn (O;R) và dây cung BC không đi qua tâm .Gọi A là chính giữa cung nhỏ BC.Góc nội tiếp EAF quay quanh điểm A và có số đo bằng α không đổi sao cho E và F khác phía với điểm A qua BC ;AE và AF cắt BC lần lượt tại M và N .Lấy điểm D sao cho tứ giác MNED là hình bình hành .

a)Chứng minh tứ giác MNEF nội tiếp .

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF .Chứng minh rằng khi góc nội tiếp EAF quay quanh A thì I chuyển động trên đường thẳng cố định.

c) Khi $\alpha = 60^\circ$ và $BC=R$,tính theo R độ dài nhỏ nhất của đoạn OI.

Câu 5(2,0 điểm)

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$

Chứng minh rằng
$$\frac{2x^2 + y^2 + z^2}{4 - yz} + \frac{2y^2 + x^2 + z^2}{4 - xz} + \frac{2z^2 + y^2 + x^2}{4 - yx} \geq 4xyz$$

---Hết---

Họ và tên thí sinh.....số báo danh.....

Thí sinh không sử dụng tài liệu, Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

HƯỚNG DẪN

Câu 1(3,0 điểm)

a) Giải phương trình trên tập nguyên

b) Cho $P(x) = x^3 - 3x^2 + 14x - 2$.

Hướng dẫn

: a) $x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 8y - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x(y-1) - (5y^2 - 8y - 12) = 0(*)$

để PT(*) có nghiệm nguyên x thì Δ' chính phương

$$\Delta' = 4(y-1)^2 - 5(5y^2 - 8y - 12) = 16 - y^2 \leq 16$$

từ đó tìm được $(x; y) \in \{(2;0); (-6;0); (-10;-4); (6;4)\}$

Cách khác $x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 8y - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y + 2)^2 + y^2 = 16 = 4^2 + 0^2$

xét từng trường hợp sẽ ra nghiệm

b) ta có $P(x) = x^3 - 3x^2 + 14x - 2 = (x-2)(x^2 - x + 12) + 22$

để P(x) chia hết 11 thì $(x-2)(x^2 - x + 12) : 11$

mà $(x^2 - x + 12) = x(x-1) + 1 + 11$ ta có $x(x-1) + 1$ không chia hết cho 11

suy ra $(x^2 - x + 12)$ không chia hết cho 11 nên x-2 chia hết cho 11 mà $x < 100$;

$x \in N$

suy ra $x \in \{2; 13; 22; 35; 47; 57; 68; 79; 90\}$

Cách khác $P(x) = x^3 - 3x^2 + 14x - 2 = [(x-1)^3 - 1 + 11x] : 11 \Leftrightarrow [(x-1)^3 - 1] : 11$

Suy ra $(x-1)^3$ chia cho 11 dư 1 suy ra x-1 chia cho 11 dư 1 suy ra x chia cho 11 dư

2 mà $x < 100$ suy ra kết quả

Câu 2(4,0 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a^3 - 3a + 2}{a^3 - 4a^2 + 5a - 2}$, biết $a = \sqrt[3]{55 + \sqrt{3024}} + \sqrt[3]{55 - \sqrt{3024}}$

b) Cho số thực x, y, z đôi 1 khác nhau thỏa mãn $x^3 = 3x - 1; y^3 = 3y - 1, z^3 = 3z - 1$

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Hướng dẫn

a) tính $a^3 = 110 - 3a \Leftrightarrow (a-5)(a^2 + 5a + 22) = 0 \Leftrightarrow a = 5$ thay $a=5$ vào $P = \frac{7}{3}$

b) Cộng cả ba đẳng thức ta có hệ

$$\begin{cases} x^3 = 3x - 1 \\ y^3 = 3y - 1 \\ z^3 = 3z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ y^3 - z^3 = 3(y - z) \\ z^3 - x^3 = 3(z - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3(1) \\ y^2 + zy + z^2 = 3(2) \\ x^2 + xz + z^2 = 3(3) \end{cases}$$

trừ (1) cho (2) ta được $(x-z)(x+y+z) = 0 \Leftrightarrow x+y+z = 0$

cộng (1); (2); (3) ta có $2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + xz = 9(*)$

mà từ $x+y+z=0$ suy ra $xy + yz + xz = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$ thay vào (*) ta có đpcm

Câu 3(4,0 điểm)

a) Giải phương trình $3x - 1 + \frac{x-1}{4x} = \sqrt{3x+1}$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn

a) HD đkxd $x \geq \frac{-1}{3}$

$$3x - 1 + \frac{x-1}{4x} = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 4x(3x-1) + x-1 = 4x\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 12x^2 - 3x - 1 = 4x\sqrt{3x+1}$$

$$16x^2 = (2x + \sqrt{3x+1})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2x + \sqrt{3x+1} \\ -4x = 2x + \sqrt{3x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{3x+1} \\ -6x = \sqrt{3x+1} \end{cases}$$

giải ra pt có 2 nghiệm $x=1$; $x = \frac{3-\sqrt{153}}{72}$

b)

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0(1) \\ 2x^2 - 2y^2 + 4x + 2y - 6 = 0(2) \end{cases}$$

lấy pt(1) trừ pt(2) t_đ được

$$(x-2y)^2 - 3(x-2y) + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2y-1)(x-2y-2) = 0$$

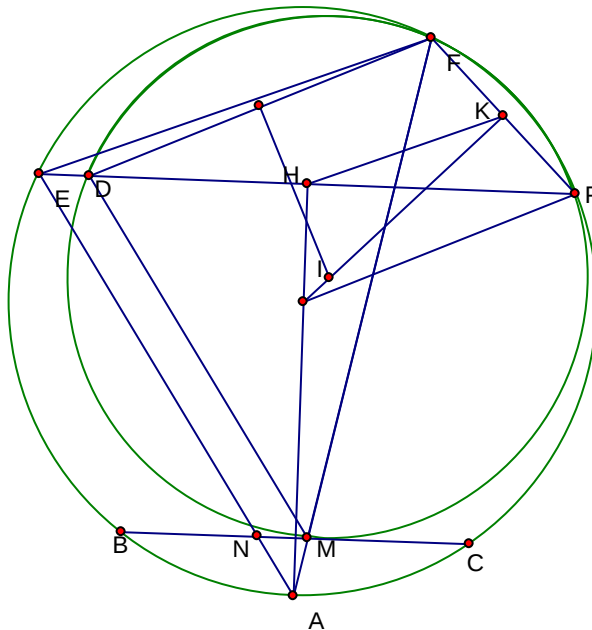
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y+1 \\ x = 2y+2 \end{cases}$$

thay vào phương trình $x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0$ hệ có 4 nghiệm

$$(x; y) \in \left\{ (1; 0); (-5; -3); \left(\frac{-7+\sqrt{109}}{3}; \frac{-13+\sqrt{109}}{6} \right); \left(\frac{-7-\sqrt{109}}{3}; \frac{-13-\sqrt{109}}{6} \right) \right\}$$

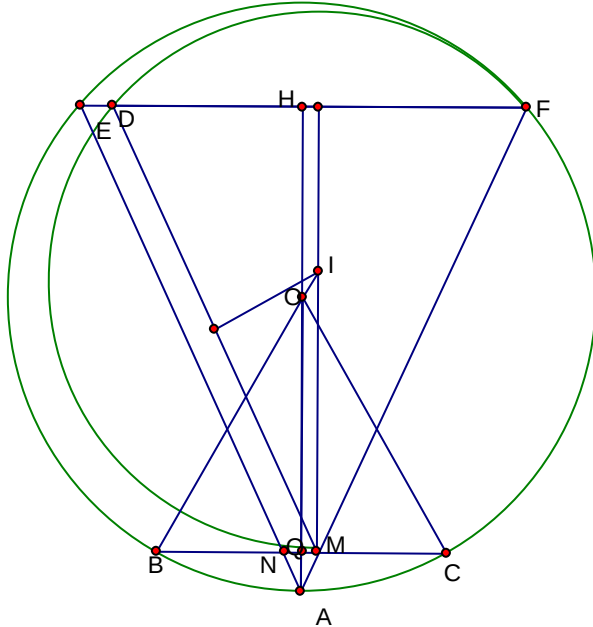
Câu 4(7,0 điểm)

Hướng dẫn



a) $\angle ENB = \angle EFM$ suy ra $\angle ENM + \angle EFM = 180^\circ$

b) gọi giao (O) và (I) tiếp tam giác MDF tại P ta có $\angle DPF = \angle DMF = \angle EAF = \alpha$
 mặt khác $\angle EAF = \angle EPF$ nên $\angle EPF = \angle DPF$ nên E;D;P thẳng hàng suy ra $EP \parallel BC$ mà
 $AO \perp BC \Rightarrow AO \perp EP$ gọi AO cắt EP tại H ;OI cắt PF tại K thì K là trung điểm FP và OI
 vuông góc FP nên tứ giác OHKP nội tiếp suy ra $\angle HOI = \angle HPF = \alpha$ (không đổi)
 suy ra I thuộc tia Ox tạo với tia AO một góc bằng α



c) khi $BC=R$; $\angle EAF=60^\circ$ thì tam giác OBC đều suy ra IO đi qua B ta chứng minh
 được OI min khi F trùng P khi đó $EF \parallel BC$ tam giác AMN; MDF đều khi đó $IM \parallel AO$ ta
 tính BQ;QM được áp dụng Talet tam giác BIM có $AO \parallel IM$ tính được OI

Câu 5. Hướng dẫn

Lời giải 1

$$\frac{2x^2 + y^2 + z^2}{4 - yz} + \frac{2y^2 + x^2 + z^2}{4 - xz} + \frac{2z^2 + y^2 + x^2}{4 - yx} \geq 4xyz$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{x^2 + y^2 + x^2 + z^2}{xyz(4 - yz)} + \frac{x^2 + y^2 + y^2 + z^2}{xyz(4 - xz)} + \frac{z^2 + y^2 + x^2 + z^2}{xyz(4 - yx)} \geq 4(*)$$

$$\Leftrightarrow M \geq \frac{2xy + 2xz}{xyz(4 - yz)} + \frac{2xy + 2yz}{xyz(4 - xz)} + \frac{2xz + 2yz}{xyz(4 - yx)} = N$$

$$N = 2 \left(\frac{y + z}{yz(4 - yz)} + \frac{x + z}{xz(4 - xz)} + \frac{x + y}{yx(4 - yx)} \right)$$

$$N = 2 \left(\frac{1}{z(4 - yz)} + \frac{1}{x(4 - yz)} + \frac{1}{y(4 - yx)} \right) + 2 \left(\frac{1}{y(4 - yz)} + \frac{1}{zx(4 - yz)} + \frac{1}{x(4 - yx)} \right)$$

$$N \geq \frac{6}{\sqrt[3]{xyz(4 - yz)(4 - xz)(4 - xy)}} + \frac{6}{\sqrt[3]{xyz(4 - yz)(4 - xz)(4 - xy)}} = \frac{12\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3xyz(4 - yz)(4 - xz)(4 - xy)}}$$

Mặt khác

$$3xyz(4 - xz)(4 - yz)(4 - xy) \leq \left(\frac{3xyz + 4 - xz + 4 - xy + 4 - yz}{4} \right)^4 = \left(\frac{3xyz + 12 - xz - xy - yz}{4} \right)^4$$

$$\text{Mà } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = 3 \Leftrightarrow \frac{xy+yz+xz}{xyz} \geq 3 \Leftrightarrow 3xyz - xy - xz - yz \leq 0$$

$$3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy) \leq \left(\frac{3xyz+12-xz-xy-yz}{4} \right)^4 = 81 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3xyz(4-xy)(4-xz)(4-yz)} \leq 3\sqrt[3]{3}$$

$$\text{Nên } M \geq N \geq \frac{12\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}} = 4 \text{ BĐT (*) được cm dấu "}" xảy ra khi } x=y=z=1$$

**PHÒNG GD&ĐT
HUYỆN**
-----★-----

KÌ THI HỌC SINH GIỎI
Môn: TOÁN NĂM 2009-2010
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2.0 điểm). Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right).$$

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P tại $a = (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Câu 2 (1.5 điểm). Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 1$.

Câu 3 (2.5 điểm). Cho x, y là các số dương.

a) Chứng minh: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Câu 4 (3.0 điểm). Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB , kẻ tiếp tuyến Ax . Đường thẳng BM cắt Ax tại I ; tia phân giác của $\angle IAM$ cắt nửa đường tròn O tại E , cắt IB tại F ; đường thẳng BE cắt AI tại H , cắt AM tại K .

a) Chứng minh 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $HF \perp BI$.

c) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn O để chu vi $\triangle AMB$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó theo R ?

Câu 5 (1.0 điểm). Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng:

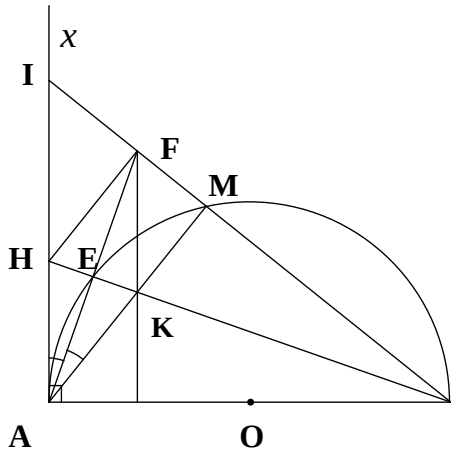
$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879.$$

----- Hết -----

***Ghi chú:** Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

ĐÁP ÁN,

CÂU		NỘI DUNG	ĐIỂM
1	a	Điều kiện $\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \\ \sqrt{a} \neq 0 \end{cases}$	0.25
		$P = \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2 + 4\sqrt{a}(a-1)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}}$	0.25
		$= \frac{4\sqrt{a} + 4\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}(1+a-1)}{\sqrt{a}} = 4a$	0.25
		Vậy $P = 4a$	0.25
	b	$a = \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \cdot (\sqrt{3}-1)$	0.25
		$= \sqrt{(2+\sqrt{3})} \cdot (\sqrt{3}-1) = \sqrt{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{(2+\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}$	0.25
		$= \sqrt{2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \sqrt{2}.$	0.25
		Vậy $a = \sqrt{2}$ do đó $P = 4a = 4\sqrt{2}$	0.25
2		Điều kiện $x \geq 1$	0.25
		$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} - \sqrt{x-1} = 1$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1 - \sqrt{x-1} = 1 \quad (1)$	0.5
		Khi $\sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$: Ta có $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1-\sqrt{x-1}=1$. Phương trình vô nghiệm	0.25
		Khi $0 \leq \sqrt{x-1} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x-1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$: Ta có $(1) \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow 1-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow -2\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1$	0.25
		Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.	0.25
3	a	Vì $x > 0, y > 0$ nên $\frac{x}{y} > 0$ và $\frac{y}{x} > 0$	0.25

		Áp dụng bất đẳng thức $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$	0.25
		ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$	0.25
		Vậy $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.	0.25
		Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ (vì $x > 0, y > 0$)	0.25
	b	Đặt $a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, ta có $M = a + \frac{1}{a} = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{1}{a}$	0.25
		Vì $a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ nên $\frac{3a}{4} \geq \frac{3}{2}$;	0.25
		Ta có $\frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{1}{a}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	0.25
		Do đó $M = a + \frac{1}{a} = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$; $M = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow x = y$	0.25
		Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x = y$.	0.25
		Hình vẽ	
			
		Ta có M, E nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên $\angle FMK = 90^\circ$ và $\angle FEK = 90^\circ$.	0.5
		Vậy 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên đường tròn đường kính FK	0.25
		Ta có $\triangle HAK$ cân tại A nên $AH = AK$ (1)	0.25
		K là trực tâm của $\triangle AFB$ nên ta có $FK \perp AB$ suy ra $FK \parallel AH$ (2)	0.25
		Do đó $\angle FAH = \angle AFK$ mà $\angle FAH = \angle FAK$ (gt) cho nên $\angle AFK = \angle FAK$	0.25
		Suy ra $AK = KF$, kết hợp với (1) ta được $AH = KF$ (3)	0.25
		Từ (2) và (3) ta có $AKFH$ là hình bình hành nên $HF \parallel AK$. Mà $AK \perp IB$ suy ra $HF \perp IB$.	0.25
		Chu vi của $\triangle AMB = C_{\triangle AMB} = MA + MB + AB$ lớn nhất khi chỉ khi $MA + MB$ lớn nhất (vì AB không đổi).	0.25
		Áp dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$, ta có $(MA + MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2) = 2AB^2$	0.25

		Nên $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất bằng $AB\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $MA = MB$ hay M nằm chính giữa cung AB .	0.25
		Vậy khi M nằm chính giữa cung AB thì $C_{\Delta AMB}$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $C_{\Delta AMB} = MA + MB + AB = AB\sqrt{2} + AB = (1 + \sqrt{2})AB = 2R(1 + \sqrt{2})$	0.25
5		Đặt $A = (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4)$, ta có $2^x.A$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên $2^x.A$ chia hết cho 5. Nhưng 2^x không chia hết cho 5, do đó A chia hết cho 5.	0.25
		Nếu $y \geq 1$, ta có $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y$ chia hết cho 5 mà 11879 không chia hết cho 5 nên $y \geq 1$ không thỏa mãn, suy ra $y = 0$.	0.25
		Khi đó, ta có $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$ $\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 1 = 11879$ $\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) = 11880$	0.25
		$\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) = 9.10.11.12 \Leftrightarrow x = 3$. Vậy $x = 3; y = 0$ là hai giá trị cần tìm.	0.25

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2011-2012

Môn thi: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (3,0 điểm)

Cho tam giác vuông có độ dài các cạnh là những số nguyên và số đo chu vi bằng hai lần số đo diện tích. Tìm độ dài các cạnh của tam giác đó.

Câu 2. (3,0 điểm)

Cho biểu thức:

$$P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}} \text{ với } x \in [-1;1]$$

Tính giá trị của biểu thức P với $x = \frac{-1}{2012}$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Tìm các số thực x, y thỏa mãn:

$$(x^2 + 1)^2 y^2 + 16x^2 + \sqrt{x^2 - 2x - y^3 + 9} = 8x^3 y + 8xy$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và hai điểm $A(-1;1)$, $B(3;9)$ nằm trên (P). Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là m ($-1 < m < 3$).

Tìm m để tam giác ABM có diện tích lớn nhất.

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi I là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC (I không nằm trên cạnh của tam giác). Các tia AI, BI, CI lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P.

a) Chứng minh: $\frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} = 2.$

b) Chứng minh: $\frac{1}{AM \cdot BN} + \frac{1}{BN \cdot CP} + \frac{1}{CP \cdot AM} \leq \frac{4}{3(R - OI)^2}.$

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có góc A tù, nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ tâm O đến các cạnh BC, CA, AB và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $y + z - x = R + r.$

Câu 7. (2,0 điểm)

Cho x; y thỏa mãn $\begin{cases} x; y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x; y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

----Hết----

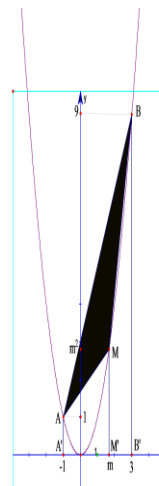
Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

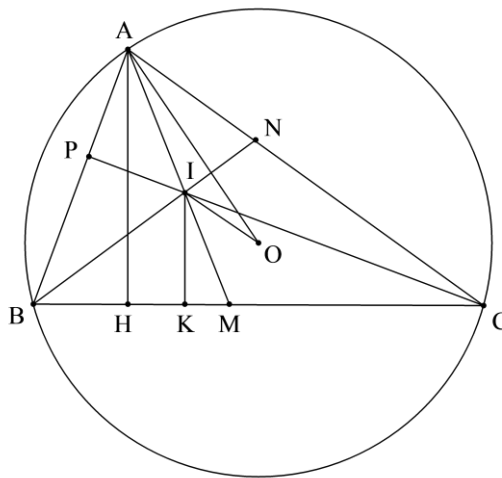
(Gồm 4 trang)

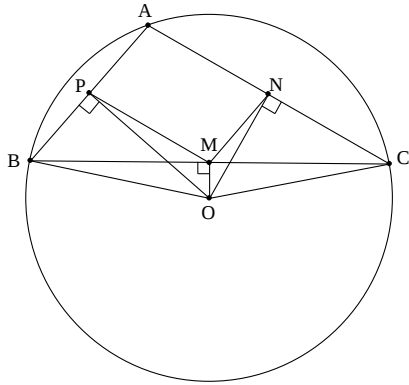
CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM																																			
Câu 1	Cho tam giác vuông có độ dài các cạnh là những số nguyên và số đo chu vi bằng hai lần số đo diện tích. Tìm độ dài các cạnh của tam giác đó.	3.0																																			
	Gọi độ dài các cạnh của tam giác vuông là a, b, c (a là độ dài cạnh huyền) Theo giả thiết và định lý Pitago, ta có: $\begin{cases} a + b + c = bc \text{ (1)} \\ b^2 + c^2 = a^2 \text{ (2)} \end{cases}$	0.5																																			
	$\Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 2(a + b + c) + a^2$ $\Leftrightarrow (b + c - 1)^2 = (a + 1)^2$	0.5																																			
	$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c - 2 = a \\ a + b + c = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$	0.5																																			
	Thế a = b + c - 2 vào (2) ta được: $2 + bc - 2b - 2c = 0 \Leftrightarrow (b - 2)(c - 2) = 2$	0.5																																			
	Vì b, c là các số nguyên dương nên ta có các trường hợp sau: <table><tr><td>T.Hợp</td><td>b - 2</td><td>c - 2</td><td>b</td><td>c</td><td>a</td><td>K.Luận</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>Nhận</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>Nhận</td></tr><tr><td>3</td><td>-1</td><td>-2</td><td>1</td><td>0</td><td></td><td>Loại</td></tr><tr><td>4</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td></td><td>Loại</td></tr></table>	T.Hợp	b - 2	c - 2	b	c	a	K.Luận	1	1	2	3	4	5	Nhận	2	2	1	4	3	5	Nhận	3	-1	-2	1	0		Loại	4	-2	-1	0	1		Loại	1.0
T.Hợp	b - 2	c - 2	b	c	a	K.Luận																															
1	1	2	3	4	5	Nhận																															
2	2	1	4	3	5	Nhận																															
3	-1	-2	1	0		Loại																															
4	-2	-1	0	1		Loại																															
	Vậy tam giác cần tìm có các cạnh là 3; 4; 5																																				
Câu 2	Cho biểu thức $P = \sqrt{1 - x} + (1 - x)\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x} - (1 - x)\sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1; 1]$ Tính giá trị của biểu thức khi $x = -\frac{1}{2012}$.	3.0																																			
	Ta có: +) $2(1 - x) + 2(1 - x)\sqrt{1 - x^2} = (x^2 - 2x + 1) + 2(1 - x)\sqrt{1 - x^2} + (1 - x^2)$ $= [1 - x + \sqrt{1 - x^2}]^2$	0.5																																			
	+) $2(1 - x) - 2(1 - x)\sqrt{1 - x^2} = [1 - x - \sqrt{1 - x^2}]^2$	0.5																																			
	Suy ra: $P\sqrt{2} = 1 - x + \sqrt{1 - x^2} + 1 - x - \sqrt{1 - x^2} $	0.5																																			
	$= 1 - x + \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x} \sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x} $	0.5																																			

	$\text{Vì } x = \frac{-1}{2012} \Rightarrow 1-x > 1+x \quad \Rightarrow P\sqrt{2} = 2(1-x)$ $\Rightarrow P = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2012} \right) = \frac{2013}{2012} \cdot \sqrt{2}$	0.5
		0.5
	Chú ý: Nếu HS tính P^2 - Tính: $P^2 = 2(1-x) + 2\sqrt{(1-x)^2 x^2}$ - Rút gọn: $P^2 = 2(1-x) + 2(1-x) x$ - Thay $x = \frac{-1}{2012}$ được $P^2 = 2 \cdot \frac{2013}{2012} + 2 \cdot \frac{2013}{2012^2} = 2 \cdot \left(\frac{2013}{2012} \right)^2$ - Do P không âm suy ra $P = \frac{2013}{2012} \sqrt{2}$	1.0 0.5 0.5 1.0
Câu 3	Tìm các số thực x, y thỏa mãn: $(x^2 + 1)^2 y^2 + 16x^2 + \sqrt{x^2 - 2x - y^3 + 9} = 8x^3 y + 8xy \quad (*)$	3.0
	Ta có: $(*) \Leftrightarrow [(x^2 + 1)y - 4x]^2 + \sqrt{x^2 - 2x - y^3 + 9} = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 1)y - 4x = 0 \\ x^2 - 2x - y^3 + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yx^2 - 4x + y = 0 \quad (1) \\ x^2 - 2x - y^3 + 9 = 0 \quad (2) \end{cases}$	0.5
	+ Nếu $y = 0$ thì từ (1) suy ra $x = 0$, thay vào (2) không thỏa mãn	0.5
	+ Nếu $y \neq 0$, ta coi (1), (2) là phương trình bậc hai ẩn x. Điều kiện để có nghiệm x là: $\begin{cases} \Delta_1 = 4 - y^2 \geq 0 \\ \Delta_2 = y^3 - 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ y \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2$	0.5
	Thay $y = 2$ vào hệ (1), (2) ta được: $\begin{cases} 2x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ Vậy $x = 1, y = 2$.	1.0
Câu 4	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và hai điểm $A(-1;1)$, $B(3;9)$ nằm trên (P). Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là m ($-1 < m < 3$). Tìm m để tam giác ABM có diện tích lớn nhất.	3.0
	$S_{ABB'A'} = \frac{1}{2} (AA' + BB') \cdot A'B'$ $= \frac{1}{2} (1 + 9) \cdot 4 = 20$	5



	$S_{AMM'A'} = \frac{1}{2}(AA' + MM').A'M'$ $= \frac{1}{2}(1 + m^2)(m + 1)$	0.5
	$S_{MBB'M'} = \frac{1}{2}(MM' + BB').B'M'$ $= \frac{1}{2}(m^2 + 9)(3 - m)$	0.5
	$S_{ABM} = S_{ABB'A'} - S_{AMM'A'} - S_{MBB'M'}$ $= 8 - 2(m - 1)^2$	0.5
	Ta có: $S_{ABM} = 8 - 2(m - 1)^2 \leq 8$ và $S_{ABM} = 8 \Leftrightarrow m = 1$ Suy ra S_{ABM} lớn nhất bằng 8 $\Leftrightarrow m = 1$ Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.	1.0
Câu 5	Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi I là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC (I không nằm trên cạnh của tam giác). Các tia AI, BI, CI lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P. a) Chứng minh: $\frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} = 2$ b) Chứng minh: $\frac{1}{AM \cdot BN} + \frac{1}{BN \cdot CP} + \frac{1}{CP \cdot AM} \leq \frac{4}{3(R - OI)^2}$	3.0
a	Kẻ IK, AH vuông góc với BC tại K, H. Ta có: $\frac{IM}{AM} = \frac{IK}{AH} = \frac{S_{IBC}}{S_{ABC}}$	0.5
	Tương tự, ta có: $\frac{IN}{BN} = \frac{S_{IAC}}{S_{ABC}}, \quad \frac{IP}{CP} = \frac{S_{IAB}}{S_{ABC}}$	0.25
	Suy ra: $\frac{IM}{AM} + \frac{IN}{BN} + \frac{IP}{CP} = 1$	0.25
	$\Leftrightarrow \frac{AM - AI}{AM} + \frac{BN - BI}{BN} + \frac{CP - CI}{CP} = 1$	0.5
	$\Leftrightarrow \frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} = 2 \text{ (đpcm)}$	
b	Ta có: $2 = \frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} \geq \frac{OA - OI}{AM} + \frac{OB - OI}{BN} + \frac{OC - OI}{CP}$	0.5



	$\Leftrightarrow 2 \geq (R - OI) \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \right)$ $\Leftrightarrow \frac{2}{R - OI} \geq \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \quad (\text{vì } R > OI)$	
	Chúng minh: $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ (*) dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$	0.5
	Áp dụng (*) $\frac{1}{AM \cdot BN} + \frac{1}{BN \cdot CP} + \frac{1}{CP \cdot AM} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \right)^2$ $\leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{R - OI} \right)^2 = \frac{4}{3(R - OI)^2} \quad (\text{đpcm})$ Khi tam giác ABC đều thì dấu đẳng thức xảy ra.	0.5
Câu 6	Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;R) có góc A tù. Chúng minh rằng: $y + z - x = R + r$	
	Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB $\Rightarrow OM = x$, $ON = y$, $OP = z$. Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Ta có tứ giác OMNC nội tiếp nên theo định lý Ptôlê-mê suy ra: $MN \cdot OC + OM \cdot CN = ON \cdot MC$ $\Leftrightarrow \frac{c}{2} \cdot R + x \cdot \frac{b}{2} = y \cdot \frac{a}{2}$ $\Leftrightarrow c \cdot R + x \cdot b = y \cdot a \quad (1)$	0.5
		
	Tương tự, từ hai tứ giác nội tiếp OMPB và ONAP ta có: $b \cdot R + x \cdot c = z \cdot a \quad (2)$ $y \cdot c + z \cdot b = R \cdot a \quad (3)$	1.0
	Mặt khác: $S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} - S_{OBC} \Leftrightarrow r(a + b + c) = c \cdot z + b \cdot y - a \cdot x \quad (4)$	0.5
	Cộng v.v.v của (1) và (2) rồi trừ v.v.v cho (3) ta được	0.5

	$c.R + b.x + c.x + b.R - c.y - b.z = a.y + a.z - a.R$ $\Leftrightarrow R(a + b + c) = a(y + z) + b(z - x) + c(y - x) \quad (5)$	
	Cộng v.v.v của (4) và (5) được $(R + r)(a + b + c) = (a + b + c)(y + z - x)$ $\Leftrightarrow R + r = y + z - x \quad (\text{đpcm})$	0.5
Câu 7	Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x, y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$	2.0
	Từ giả thiết suy ra: +) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{y}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\sqrt{xy} \quad (1)$ +) $x\sqrt{x} \leq x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y\sqrt{y} \leq y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \quad (2)$	0.5 0.5
	Lại có: $\begin{cases} \sqrt{xy} \leq xy + \frac{1}{4} \\ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \leq \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y) \end{cases} \quad (3) \quad (4)$	0.5
	Từ (1), (2), (3) và (4) ta có: $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y)$ $\leq \frac{2\sqrt{2}}{3}(1+x+y+xy)$	0.25
	Suy ra: $VT = \frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{1+x+y+xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{đpcm})$ Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x = y = \frac{1}{2}$	0.25

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LANG SƠN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn thi: TOÁN (Dành cho lớp chuyên)

*Thời gian làm bài 150 phút (không kể thời gian
giao đề)
Đề thi gồm có 1 trang, 5 câu*

Câu 1 (2 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = 2x - m + 1$ và parabol (P): $y = -x^2$.

- Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm (1; 2);
- Giả sử đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

Tìm m để $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 25$.

Câu 2 (2 điểm)

a. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3x}{x-1} - \frac{2y}{y+1} = 2 \\ \frac{2x}{x-1} + \frac{3y}{y+1} = 10 \end{cases};$$

- Tìm x, y thỏa mãn $x - y + 1 = 2\sqrt{x-y} - \sqrt{x-2}$.

Câu 3 (2 điểm)

- Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm M di động trên cạnh BC, gọi D, E lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AC. Tìm vị trí điểm M để DE có độ dài nhỏ nhất.
- Với x là số thực. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A =$

$$\frac{3x+4}{x^2+1}$$

Câu 4 (3 điểm)

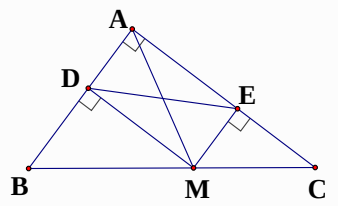
Cho đường tròn đường kính AB; C là một điểm trên đường tròn (C khác A, B). Gọi I là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC, các tia AI, CI lần lượt cắt đường tròn tại D, E.

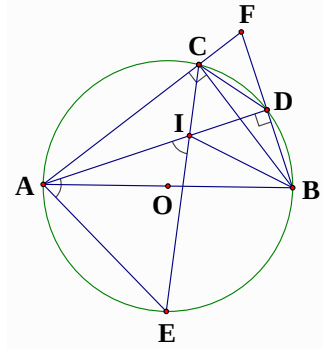
- Chứng minh tam giác EAI cân;
- Chứng minh: $IC \cdot IE = IA \cdot ID$;
- Giả sử biết $BI = a$, $AC = b$. Tính AB theo a, b.

Câu 5 (1 điểm)

Chứng minh trong các số có dạng 20142014 ... 2014 có số chia hết cho 2013.

ĐÁP ÁN

Câu	Ý	Nội dung trình bày		Điểm
Câu 1 2 điểm	a	Đường thẳng (d) đi qua điểm (1; 2) $\Leftrightarrow 2 = 2.1 - m + 1$		0,5
		Vậy: $m = 1$		0,5
	b	Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 + 2x - m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m > 0$		0,25
		Theo Định lí Viet: $x_1 + x_2 = -2, x_1x_2 = -m + 1$		0,25
		Có: $y_1 = 2x_1 - m + 1, y_2 = 2x_2 - m + 1 \Rightarrow y_1 - y_2 = 2(x_1 - x_2)$ Nên: $25 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 5(x_1 - x_2)^2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 5$		0,25
		Hay: $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 5 \Rightarrow 4 - 4(-m + 1) = 5 \Rightarrow m = 5/4$ (t/m)		0,25
Câu 2 2 điểm	a	Đặt $u = \frac{x}{x-1}; v = \frac{y}{y+1}$		0,25
		Khi đó có hệ: $\begin{cases} 3u - 2v = 2 \\ 2u + 3v = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u - 6v = 6 \\ 4u + 6v = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2 \end{cases}$		0,25
		Từ: $\frac{x}{x-1} = 2 \Rightarrow x = 2; \frac{y}{y+1} = 2 \Rightarrow y = -2$		0,25
		Vậy hệ có nghiệm (2; -2)		0,25
	b	Ta có: $x - y + 1 = 2\sqrt{x-y} - \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x - y + 1 - 2\sqrt{x-y} + \sqrt{x-2} = 0$.		0,25
		Hay: $(\sqrt{x-y} - 1)^2 + \sqrt{x-2} = 0$.		0,25
		Suy ra: $(\sqrt{x-y} - 1)^2 = \sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-y} - 1 = \sqrt{x-2} = 0$.		0,25
		Vì vậy có: $x = 2; y = 1$.		0,25
Câu 3 2 điểm	a		Do: $\angle ADM = \angle AEM = \angle DAE = 90^\circ$ nên ADME là hình chữ nhật	0,25
			Nên : $DE = AM$	0,25
			DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM \perp BC$	0,25
			Vì vậy : M là chân đường cao hạ từ A	0,25
	b	$A = \frac{3x+4}{x^2+1} \Leftrightarrow A(x^2+1) = 3x+4 \Leftrightarrow Ax^2 - 3x + A - 4 = 0, (*)$ có nghiệm x		0,25

		Nếu $A = 0$ từ (*) có : $x = -4/3$	0,25	
		Nếu $A \neq 0$ có : $\Delta = 9 - 4A(A - 4) = -4(A - 2)^2 + 25 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq A \leq \frac{9}{2}$	0,25	
		Vậy : $\min A = \frac{-1}{2}$ khi $x = \frac{-b}{2a} = -3$; $\max A = \frac{9}{2}$ khi $x = \frac{1}{3}$	0,25	
Câu 4 3 điểm	a		Vẽ hình để chứng minh a	0,25
		Do AD, CE là các đường phân giác nên :	0,25	
		$DC = DB, EB = EA$	0,25	
		Do đó: $DC + EA = DB + EB$	0,25	
	Suy ra: $AIE = IAE$	0,25		
	Vậy: tam giác EAI cân tại E			
	b	Ta có: $AIE = CID$ (đối đỉnh)	0,25	
		$EAI = DCI$ (cùng chắn cung DE)	0,25	
		Do đó : $\Delta ICD \sim \Delta IAE$.	0,25	
		Suy ra: $\frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IE} \Rightarrow IC.IE = IA.ID$	0,25	
	c	AC cắt BD tại F. Do AD vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên ΔABF cân. Do đó $AF = AB = x > 0$	0,25	
		Do: $DIB = IBA + IAB = 45^0$ nên ΔBID vuông cân suy ra: $DB = a/\sqrt{2} \Rightarrow BF = a\sqrt{2}$	0,25	
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACB và BCF có: $BC^2 = AB^2 - AC^2 = BF^2 - CF^2$ hay: $x^2 - b^2 = 2a^2 - (x - b)^2 \Leftrightarrow x^2 - bx - a^2 = 0$		0,25		
Có: $x = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2}$ (loại), $x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2}$. Vậy $AB = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2}$		0,25		

Câu 5 1 điểm	Ta xét 2014 số khác nhau có dạng $20142014\dots2014 = a_n$, có n bộ 2014. $n \in \mathbb{N}^*$ Trong 2014 số này có ít nhất hai số khi chia cho 2013 có cùng số dư.	0,25
	Giả sử 2 số đó là a_i, a_j ($j > i$). Khi đó $a_j - a_i \vdots 2013$ hay: $\underbrace{20142014\dots2014}_{j \text{ số } 2014} - \underbrace{20142014\dots2014}_{i \text{ số } 2014} = \underbrace{20142014\dots2014}_{j-i \text{ số } 2014} \underbrace{0000\dots0000}_{4i \text{ số } 0} \vdots 2013$	0,25
	Số có dạng $20142014\dots2014 \cdot 10^{4i} \vdots 2013$ Vì $\text{UCLN}(10, 2013) = 1$ nên $\text{UCLN}(10^n, 2013) = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$	0,25
	Vậy: có số dạng $20142014\dots2014$ chia hết cho 2013	0,25

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO NGHỆ AN **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9 THCS**
NĂM HỌC 2010 - 2011

ĐỀ CHÍ NH THỨC

Môn thi: TOÁN - BẢNG B

Thời gian: **150** phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (5,0 điểm).

- a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 3.
b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là một số chính phương.

Câu 2 (5,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x+y = x^2 \\ 2y+x = y^2 \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Câu 4 (4,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $BH.BE + CH.CF = BC^2$

b) Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh rằng $K \in (O)$.

Câu 5 (2,5 điểm).

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

--- **Hết** ---

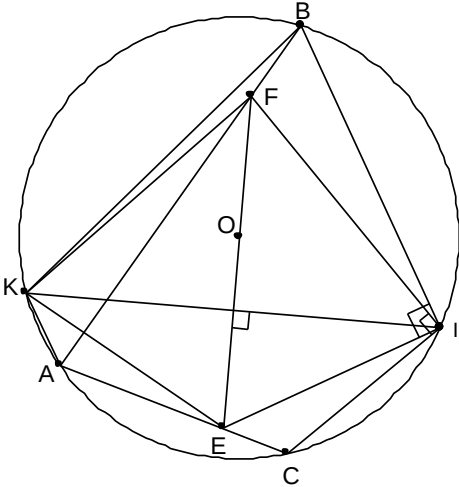
SỞ GD&ĐT NGHỆ AN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2010 - 2011

ĐÁP ÁN ĐỀ CHÍNH THỨC
Môn: TOÁN - Bảng B

Câu:	Nội dung
1.	
a, (2,5)	*) Nếu $n \vdots 3 \Rightarrow n^2 + n \vdots 3$
	nên $n^2 + n + 2 \nmid 3$ (1)
	*) Nếu $n \nmid 3 \Rightarrow n^2 + 2 \vdots 3$
	$\Rightarrow n^2 + n + 2 \nmid 3$ (2)
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$ thì $n^2 + n + 2 \nmid 3$
b, (2,5)	Đặt $m^2 = n^2 + 17$ ($m \in \mathbb{N}$)
	$\Rightarrow m^2 - n^2 = 17 \Rightarrow (m - n)(m + n) = 17 = 1.17 = 17.1$

	Do $m + n > m - n$ $\Rightarrow \begin{cases} m + n = 17 \\ m - n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 9 \\ n = 8 \end{cases}$ Vậy với $n = 8$ ta có $n^2 + 17 = 64 + 17 = 81 = 9^2$
2.	
a, (2.5)	Giải phương trình $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$ (1) Điều kiện: $2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$
	$(1) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 - 2\sqrt{2x+3} = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2x + 3 - 2\sqrt{2x+3} + 1 = 0$
	$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (\sqrt{2x+3} - 1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+3}-1=0 \end{cases}$
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2x+3=1 \end{cases}$
	$\Leftrightarrow x = -1 \text{ thỏa mãn điều kiện}$
b, (2.5)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y=x^2 & (1) \\ 2y+x=y^2 & (2) \end{cases}$
	Trừ từng vế 2 phương trình ta có: $x^2 - y^2 = x - y$
	$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0$
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=1-y \end{cases}$
	Ta có: $*) \begin{cases} x=y \\ x(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=0 \text{ hoặc } x=3 \end{cases}$ Vậy $(x; y) = (0;0); (3;3)$
	$*) \begin{cases} x=1-y \\ 2x+y=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 2-2y+y=(1-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y^2-y+1=0 \end{cases} (*)$ Vì phương trình $y^2 - y + 1 = 0$ vô nghiệm nên hệ (*) vô nghiệm

	Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = (0; 0); (3; 3)$
3.	
	Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$ Ta có: $A = \frac{4x+3}{x^2+1} = -1 + \frac{x^2+4x+4}{x^2+1}$ $A = -1 + \frac{(x+2)^2}{x^2+1} \geq -1$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ Vậy $A_{\min} = -1$ khi $x = -2$
4.	
a, (2,5)	Gọi I là giao điểm của AH và BC $\Rightarrow AI \perp BC$ Ta có: $\triangle BHI \sim \triangle BCE$ (g, g) $\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BI}{BE} \Rightarrow BH \cdot BE = BC \cdot BI \quad (1)$ Ta có: $\triangle CHI \sim \triangle CBF$ (g, g) $\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CI}{CF} \Rightarrow CH \cdot CF = BC \cdot CI \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $BH \cdot HE + CH \cdot CF = BC(BI + CI) = BC^2$
b, (2,0)	Gọi K là điểm đối xứng của H qua BC suy ra $\angle HCB = \angle KCB$ Mà $\angle FAI = \angle HCI$ (do tứ giác AFIC nội tiếp) $\Rightarrow \angle FAI = \angle BCK$ hay $\angle BAK = \angle BCK$ $\Rightarrow$ tứ giác BAKC nội tiếp đường tròn (O) $\Rightarrow K \in (O)$
5.	
	+ Khi $\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \angle BIC = 90^\circ$.

	$\Rightarrow F$ trùng với B , E trùng với C lúc đó EF là đường kính. $\Rightarrow EF$ đi qua điểm O cố định.
	 + Khi $\angle BAC < 90^\circ \Rightarrow \angle BIC > 90^\circ$. Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF.
	$\Rightarrow \angle EIF = \angle EAF$ (cùng bù $\angle BIC$) $\angle EKF = \angle EIF$ (Do I và K đối xứng qua EF) $\Rightarrow \angle EKF = \angle EAF$ $\Rightarrow AKFE$ nội tiếp
	$\Rightarrow \angle KAB = \angle KEF$ (cung chắn KF) (1) $\angle IEF = \angle KEF$ (Do K và I đối xứng qua EF) (2) $\angle IEF = \angle BIK$ (cùng phụ $\angle KIE$) (3) Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle KAB = \angle BIK$ $\Rightarrow AKBI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow K \in (O)$
	Mà EF là đường trung trực của $KI \Rightarrow E, O, F$ thẳng hàng. + Khi $\angle BAC > 90^\circ \Rightarrow \angle BIC < 90^\circ$ chứng minh tương tự. Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.

Câu 1: (4 điểm)

3) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} + y = 1 \\ \frac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases}$$

4) Giải phương trình : $(2x^2 - x)^2 + 2x^2 - x - 12 = 0$

Câu 2: (3 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(2m + 1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$ (x là ẩn số)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa

$$|x_1| = 2|x_2|$$

Câu 3: (2 điểm)

Thu gọn biểu thức:
$$A = \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

Câu 4: (4 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng :

a) $\mathbf{ABP = AMB}$

b) $\mathbf{MA.MP = BA.BM}$

Câu 5: (3 điểm)

c) Cho phương trình $2x^2 + mx + 2n + 8 = 0$ (x là ẩn số và m, n là các số nguyên). Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng $m^2 + n^2$ là hợp số

d) Cho hai số dương a, b thỏa $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$. Tính $P = \frac{a^{2010}}{a^{2010} + b^{2010}}$

Câu 6: (2 điểm)

Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = 2a$. Gọi (O) là đường tròn tâm O bán kính a. Tìm điểm M thuộc (O) sao cho $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất

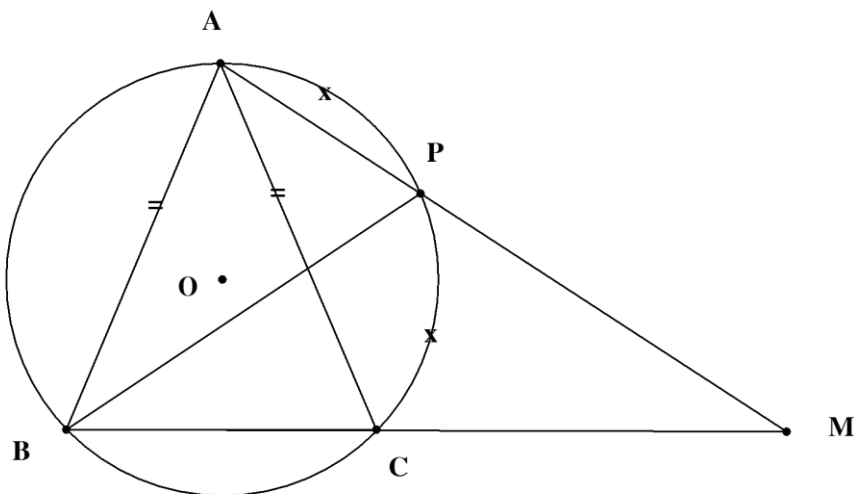
Câu 7: (2 điểm)

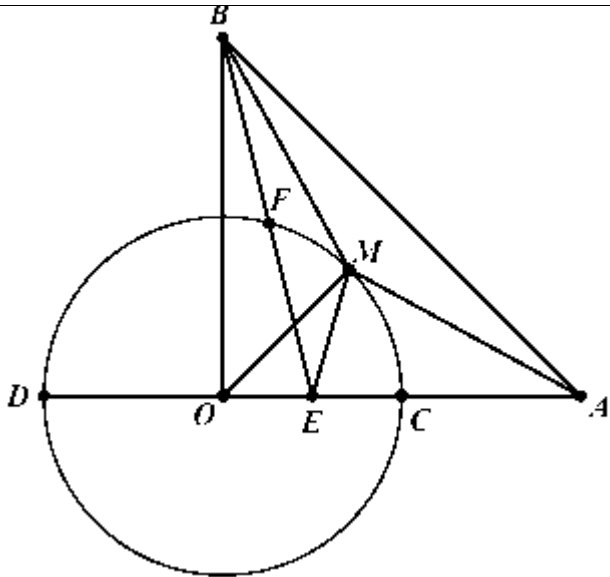
Cho a, b là các số dương thỏa $a^2 + 2b^2 \leq 3c^2$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{3}{c}$

HẾT

ĐÁP ÁN

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
Câu 1	<u>Câu 1:</u> (4 điểm) 3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x+1} + y = 1 \\ \frac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{x+1} + y = 1 \\ \frac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{x+1} - 2y = -2 \\ \frac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 1 \\ \frac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$	0,5 x4 đ
(4 đ)	4) Giải phương trình : $(2x^2 - x)^2 + 2x^2 - x - 12 = 0$ Đặt $t = 2x^2 - x$, pt trở thành: $t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ hay } t = -4$ $t = 3 \Rightarrow 2x^2 - x = 3 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = \frac{3}{2}$ $t = -4 \Rightarrow 2x^2 - x = -4 \text{ (vô nghiệm)}$ Vậy pt có hai nghiệm là $x = -1$, $x = 3/2$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
Câu 2	<u>Câu 2 :</u> (3 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2(2m + 1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$ (x là ẩn số) (*) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa $ x_1 = 2 x_2 $	
	$\Delta' = (2m+1)^2 - (4m^2 + 4m - 3) = 4 > 0$, với mọi 1 Vậy (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m	0,5 đ
(3 đ)	$x_1 = 2m-1 ; x_2 = 2m+3$ $ x_1 = 2 x_2 \Leftrightarrow 2m-1 = 2 2m+3 $ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 = 2(2m+3) \\ 2m-1 = -2(2m+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{7}{2} \\ m = -\frac{5}{6} \end{cases}$	0,5 đ 1,5 đ
Câu 3	<u>Câu 3 :</u> (2 điểm)	
(2 đ)	Thu gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} \cdot \sqrt{3-2\sqrt{2}}$	

	Xét $M = \frac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}}$ Ta có $M > 0$ và $M^2 = \frac{14+2\sqrt{44}}{7+2\sqrt{11}} = 2$, suy ra $M = \sqrt{2}$ $A = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1$	1 đ
		1 đ
<u>Câu 4</u> (4 đ)	<u>Câu 4</u> : (4 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng : a) $\angle ABP = \angle AMB$ b) $MA \cdot MP = BA \cdot BM$	
		
	a) $\angle AMB = \frac{1}{2}(\text{sđ } AB - \text{sđ } PC) = \frac{1}{2}(\text{sđ } AC - \text{sđ } PC) = \frac{1}{2} \text{sđ } AP = \angle ABP$	2 đ
	b) $PA = PC \Rightarrow \angle CAP = \angle ABP = \angle AMB \Rightarrow CM = AC = AB$	1 đ
	$\triangle MAC \sim \triangle MBP$ (g-g) $\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MP} \Rightarrow MA \cdot MP = MB \cdot MC = MB \cdot AB$	1 đ
<u>Câu 5</u>	<u>Câu 5</u>: (3 điểm) a) Cho phương trình $2x^2 + mx + 2n + 8 = 0$ (x là ẩn số và m, n là các số nguyên). Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng $m^2 + n^2$ là hợp số	

(3 đ)	Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{m}{2}, x_1 \cdot x_2 = n + 4$	0,5 đ
	$m^2 + n^2 = (2x_1 + 2x_2)^2 + (x_1 x_2 - 4)^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2 x_1^2 + x_2^2 x_1^2 + 16$ $= (x_1^2 + 4) \cdot (x_2^2 + 4)$	0,5 đ
	$x_1^2 + 4, x_2^2 + 4$ là các số nguyên lớn hơn 1 nên $m^2 + n^2$ là hợp số	0,5 đ
	b) Cho hai số dương a, b thỏa $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$. Tính $P = a^{2010} + b^{2010}$	
	Ta có $0 = a^{100} + b^{100} - (a^{101} + b^{101}) = a^{101} + b^{101} - (a^{100} + b^{100})$	
	$\Rightarrow a^{100}(1-a) + b^{100}(1-b) = a^{101}(1-a) + b^{101}(1-b)$	
	$\Rightarrow a = b = 1$	1 đ
	$\Rightarrow P = a^{2010} + b^{2010} = 2$	0,5 đ
Câu 6	Câu 6: (2 điểm) Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = 2a$. Gọi (O) là đường tròn tâm O bán kính a. Tìm điểm M thuộc (O) sao cho $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất	
(2 đ)		
	Đường thẳng OA cắt (O) tại C và D, với C là trung điểm của OA. Gọi E là trung điểm của OC	
	*Trường hợp M không trùng với C và D Hai tam giác OEM và OMA đồng dạng (do $\angle MOE = \angle AOM, \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} = \frac{OE}{OM}$) $\Rightarrow \frac{ME}{AM} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2 \cdot EM$	1 đ

	* Trường hợp M trùng với C : $MA=CA=2.EC=2.EM$ * Trường hợp M trùng với D: $MA=DA=2.ED=2.EM$ Vậy ta luôn có $MA=2.EM$	0,5 đ
	$MA+2.MB=2(EM+MB) \geq 2.EB = \text{hằng số}$ Dấu “=” xảy ra khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn (O) Vậy $MA + 2.MB$ nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn (O)	0,5 đ
<u>Câu 7</u>	<u>Câu 7</u> : (2 điểm)	
(2 đ)	Cho a , b là các số dương thỏa $a^2 + 2b^2 \leq 3c^2$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{3}{c}$	
	Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{9}{a+2b}$ (1) $\Leftrightarrow (a+2b)(b+2a) \geq 9ab$ $\Leftrightarrow 2a^2 - 4ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(a-b) \geq 0$ (đúng)	0,5 đ
	$a+2b \leq \sqrt{3(a^2+2b^2)}$ (2) $\Leftrightarrow (a+2b)^2 \leq 3(a^2+2b^2)$ $\Leftrightarrow 2a^2 - 4ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(a-b)^2 \geq 0$ (đúng)	0,5 đ
	Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{9}{a+2b} \geq \frac{9}{\sqrt{3(a^2+2b^2)}} \geq \frac{3}{c}$ (do $a^2 + 2b^2 \leq 3c^2$)	1 đ

PHÒNG GIÁO DỤC ĐÀO
TẠO
HUYỆN XUYỀN MỘC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP
HUYỆN
NĂM HỌC 2016 - 2017
Môn: **Toán**

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Khóa thi, ngày 10 tháng 01 năm 2017

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1:(3,0 điểm)

1) Chứng minh rằng các số $A = 6^{2015} + 1$ và $B = 6^{2016} - 1$ đều là bội của 7.

2) So sánh $A = \frac{10^{2016} - 1}{10^{2017} - 11}$ và $B = \frac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 9}$

Bài 2: (5,5 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

- 2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1}$
- 3) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2 + 5y^2 = 74$

Bài 3: (3,5 điểm)

- 1) Trên mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $(m-4)x + (m-3)y = 1$ (m là tham số). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.
- 2) Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng : $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Bài 4: (5,5 điểm) Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Lấy điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A và B); các tiếp tuyến tại A và M của nửa đường tròn (O) cắt nhau ở K. Gọi E là giao điểm của AM và OK.

- 1) Chứng minh OE.OK không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.
- 2) Qua O kẻ đường vuông góc với AB cắt BK tại I và cắt đường thẳng BM tại N.
Chứng minh: IN = IO.
- 3) Vẽ MH vuông góc với AB tại H. Gọi F là giao điểm của BK và MH.
Chứng minh: EF//AB.

Bài 5: (2,5 điểm) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Một điểm P chạy trên cung nhỏ AB (P khác A và B). Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn (O).

----- **HẾT** -----

Họ và tên thí sinh:

Chữ ký giám thị số 1:

.....

Số báo danh:

UBND HUYỆN XUYỀN MỘC
PHÒNG GD&ĐT XUYỀN MỘC

**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2016 – 2017 MÔN THI TOÁN LỚP 9
(Hướng dẫn chấm có trang)**

Bài 1:(3,0 điểm)

1) Chứng minh rằng các số $A = 6^{2015} + 1$ và $B = 6^{2016} - 1$ đều là bội của 7.

2) So sánh $A = \frac{10^{2016} - 1}{10^{2017} - 11}$ và $B = \frac{10^{2016} + 1}{10^{2017} + 9}$

Bài 1	Đáp án	Điểm
1.1 (1,0đ)	Ta có: $A = 6^{2015} + 1 : 6 + 1 = 7 : 7$	0,5
	$B = 6^{2016} - 1 = (6^2)^{1013} - 1 : 6^2 - 1 = 35 : 7$	0,5
1.2 (2,0đ)	Ta có: $10.A = \frac{10.(10^{2016} - 1)}{10^{2017} - 11} = \frac{10^{2017} - 11 + 1}{10^{2017} - 11} = 1 + \frac{1}{10^{2017} - 11}$ (*)	0,75
	Và: $10.B = \frac{10.(10^{2016} + 1)}{10^{2017} + 9} = \frac{10^{2017} + 9 + 1}{10^{2017} + 9} = 1 + \frac{1}{10^{2017} + 9}$ (**)	0,5
	Ta thấy $\frac{1}{10^{2017} - 11} > \frac{1}{10^{2017} + 9}$ nên từ (*) và (**) $\Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B$. (Trong 2 ý đầu, ý nào chứng minh trước đúng cho 0,75; ý sau tương tự cho 0,5đ)	0,75

Bài 2: (5,5 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1}$

3) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2 + 5y^2 = 74$

Bài 2	Đáp án	Điểm
2.1 (2,0đ)	$P = \frac{2\sqrt{x} - 9 + (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) - (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}$	0,75
	$P = \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$	0,5x2 +0,25

2.2 (2,0đ)	a) Ta có: $Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1} = \frac{(2017x^2 + 2017) - (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1}$	0,5
	$= \frac{2017(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} = 2017 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \quad (*)$	0,5
	Vì $\frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \geq 0$ nên từ $(*) \Rightarrow Q \leq 2017$.	0,25
	Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$	0,5
	Vậy $\max Q = 2017 \Leftrightarrow x = 1$	0,25
2.3 (1,5đ)	<u>Cách 1:</u> Ta có : $6x^2 + 5y^2 = 74 \Leftrightarrow 6x^2 - 24 = 50 - 5y^2$ $\Leftrightarrow 6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2) \quad (*)$ Từ $(*)$ suy ra: $6(x^2 - 4) : 5$. Mà $(6;5) = 1$ nên $(x^2 - 4) : 5$	0,25 0,25
	Đặt $x^2 - 4 = 5t$ ($t \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow x^2 = 5t + 4$. Thay vào $(*) \Rightarrow y^2 = 10 - 6t$	0,25
	Vì $\begin{cases} x^2 > 0 \\ y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 5t + 4 > 0 \\ y^2 = 10 - 6t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -\frac{4}{5} \\ t < \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{5} < t < \frac{5}{3}$	0,25
	$\Rightarrow t = 0$ hoặc $t = 1$	
	⊕ Khi $t = 0$ thì $y^2 = 10$ (loại vì $y \in \mathbb{Z}$)	
	⊕ Khi $t = 1$ thì $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ (vì $x > 0; y > 0$)	0,5
	<u>Cách 2:</u> Ta có : $6x^2 + 5y^2 = 74 \Leftrightarrow 6x^2 - 24 = 50 - 5y^2 \Leftrightarrow 6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2) \quad (*)$ Từ $(*)$ suy ra: $6(x^2 - 4) : 5$. Mà $(6;5) = 1$ nên $(x^2 - 4) : 5$ $\Rightarrow [(x^2 - 4) + 5] : 5 \Leftrightarrow (x^2 + 1) : 5 \quad (**)$. Từ bài ra $\Rightarrow 0 < 6x^2 < 74 \Rightarrow 0 < x^2 \leq 12$. Kết hợp $(**)$ $\Rightarrow x^2 = 4$ hoặc $x^2 = 9$ ⊕ Khi $x^2 = 4$ thì $y^2 = 10$ (loại vì $y \in \mathbb{Z}$) ⊕ Khi $x^2 = 9$ thì $y^2 = 4 \Rightarrow (x = 3, y = 2)$ (vì $x > 0; y > 0$)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

Bài 3: (3,5 điểm)

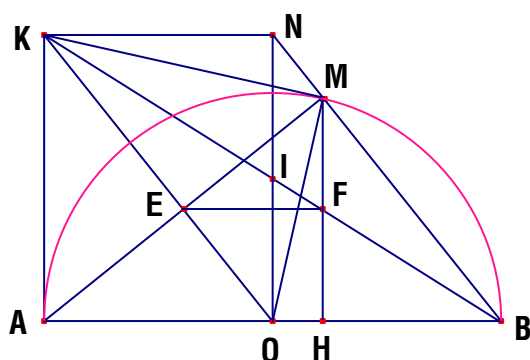
1) Trên mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $(m-4)x + (m-3)y = 1$ (m là tham số). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

2) Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng : $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Bài 3	Đáp án	Điểm
3.1 (2,0đ)	Xét pt: $(m-4)x + (m-3)y = 1$ Ta thấy: $(m-4).0 + (m-3).0 = 0 \neq 1$ nên (d) không thể đi qua O(0;0)	0,25
	+ $m = 4$ ta được $y = 1$ nên K/c từ (d) đến O bằng $ y = 1$ + $m = 3$ ta được $x = -1$ nên K/c từ (d) đến O bằng $ x = -1 = 1$	0,25x2
	+ $m \neq 3; m \neq 4$ thì (d) cắt Ox tại $A\left(\frac{1}{m-4}, 0\right)$ và cắt Oy tại $B\left(0, \frac{1}{m-3}\right)$	0,25
	Kẻ OH vuông góc với (d) tại H; ta có K/c từ O đến (d) là OH. Dựa vào ΔOAB vuông tại O chỉ ra được $\frac{1}{OH^2} = (m-4)^2 + (m-3)^2 = 2\left(m - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ Suy ra được: $OH \leq \sqrt{2}$	0,5 0,25
	Suy được khoảng cách từ O đến (d) lớn nhất $OH = \sqrt{2}$ khi $m = \frac{7}{2}$	0,25
3.2 (1,5đ)	Vì a, b, c là các số dương (gt) nên ta có: $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c} \quad (1)$	0,5
	$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{b+c+a} \quad (2)$	0,25
	$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{c+a+b} \quad (3)$	0,25
	Cộng từng vế (1), (2) và (3), ta có: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$ <i>Lưu ý: HS chứng minh đúng một vế cho 0,75đ</i>	0,5

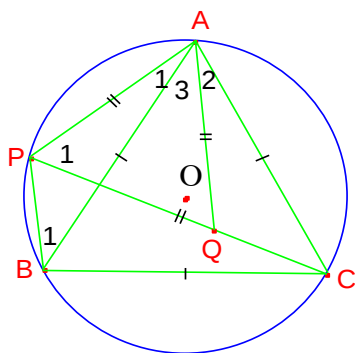
Bài 4:(5,5 điểm) Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Lấy điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A và B); các tiếp tuyến tại A và M của nửa đường tròn (O) cắt nhau ở K. Gọi E là giao điểm của AM và OK.

- 1) Chứng minh OE.OK không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.
- 2) Qua O kẻ đường vuông góc với AB cắt BK tại I và cắt đường thẳng BM tại N.
Chứng minh: IN = IO.
- 3) Vẽ MH vuông góc với AB tại H. Gọi F là giao điểm của BK và MH. Chứng minh:
EF//AB.



Bài 4	Đáp án	Điểm
4.1 (1,75đ)	Hình vẽ đến câu 1	0,25
	Chứng minh được $OK \perp AM$ tại E Dựa vào $\triangle OAK$ vuông tại A chỉ ra được $OE \cdot OK = OA^2 = R^2$ không đổi.	0,75 0,75
4.2 (1,75đ)	Chứng minh được: $OK \parallel BN$ ($\perp AM$) Chứng minh được: $\triangle AOK = \triangle OBN$ (g.c.g) $\Rightarrow OK = BN$	0,25x2 0,5 + 0,25
	Suy được $OBNK$ là hình bình hành từ đó suy được: $IN = IO$	0,5
4.3 (2,0đ)	Chứng minh được $\triangle AOK$ đồng dạng $\triangle HBM$ $\Rightarrow \frac{HB}{AO} = \frac{MB}{OK} \Rightarrow \frac{HB^2}{AO^2} = \frac{MB^2}{OK^2} \quad (1)$ Chỉ ra được $MB^2 = HB \cdot AB$ và $OA^2 = OE \cdot OK$ (cma) (2)	0,5 0,25
	Từ (1) và (2) suy được $\frac{HB^2}{OK \cdot OE} = \frac{HB \cdot AB}{OK^2} \Rightarrow \frac{HB}{OE} = \frac{AB}{OK} \Rightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{OE}{OK} \quad (3)$	0,5
	Chứng minh được $\frac{HB}{AB} = \frac{FB}{BK} \quad (4)$ Từ (3) và (4) suy ra $\frac{FB}{KB} = \frac{OE}{OK} \Rightarrow EF \parallel OB \parallel AB$ (đl Ta let)	0,25 0,5

Bài 5: (2,5 điểm) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Một điểm P chạy trên cung nhỏ AB (P khác A và B). Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn (O) .



Bài 5	Đáp án	Điểm
5 (2,5đ)	Vì $\triangle ABC$ đều, $P \in AB$ nên $AP < PC$. Lấy điểm Q trên PC sao cho $PQ = PA$	0,25
	$\triangle APQ$ cân có $\angle APQ = \angle P_1 = 60^\circ$ (chấn cung 120°) nên $\triangle APQ$ đều $\Rightarrow AP = AQ = PQ$	0,75
	- Chứng minh được $\triangle APB = \triangle AQC$ (c.g.c) $\Rightarrow PB = QC$ Từ đó $\Rightarrow PA + PB = PQ + QC = PC$. Mà PC là 1 dây của (O) nên $PC \leq 2R$ (đường kính)	1,0
	Chứng tỏ tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn (O). (đpcm)	0,5

Chú ý: 1. Nếu thí sinh làm bài bằng cách khác đúng thì GK vẫn cho điểm tương đương.
2. Điểm toàn bài không được làm tròn.

UBND HUYỆN XUYỀN MỘC
HUYỆN LỚP 9 THCS
PHÒNG GD&ĐT XUYỀN MỘC
2017

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP

NĂM HỌC 2016 –

MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài thi 150 phút

Ngày thi tháng 01 năm 2017

ĐỀ DỰ BỊ

Bài 1: (2,5 điểm)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) sao cho $2n^3 - mn^2 - 3n^2 + 14n - 7m - 5 = 0$

Bài 2: (7,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+1}$

b) $|x-2014| + |x-2016| + |y-2016| + |x| = 2016$

c) Tìm GTNN của biểu thức: $A = \frac{3-4\sqrt{x}}{x+1}$

d) Cho x, y, z là các số không âm và $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$

Bài 3: (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC có chu vi $2p = a + b + c$ (a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác).

Chứng minh rằng: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

Bài 4: (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, M là tiếp điểm của AB với đường tròn (I) ; H là giao điểm của AI với đường tròn (O) (H khác A), HK là đường kính của đường tròn (O) . Gọi a là độ dài đoạn OI. Chứng minh rằng:

- Tam giác AMI và tam giác KCH đồng dạng
- $HB = HI$
- $IA \cdot IH = R^2 - a^2$.
- $R^2 - 2Rr = a^2$

Bài 5: (3,0 điểm) Cho đường tròn (C) đường kính $PQ = 2R$ cố định và một đường kính MN của đường tròn thay đổi (MN khác PQ). Qua P vẽ đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn, (d) cắt QM và QN lần lượt ở E và F.

- Chứng minh tam giác QMN đồng dạng với tam giác QFE.
- Tìm vị trí của đường kính MN để EF có độ dài nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó theo R.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:

Chữ ký giám thị số 1:

.....

Số báo danh:

UBND HUYỆN XUYÊN MỘC
PHÒNG GD&ĐT XUYÊN MỘC

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2016 – 2017 MÔN THI TOÁN LỚP 9
(Hướng dẫn chấm có trang)

Bài 1:(2,5 điểm)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) sao cho $2n^3 - mn^2 - 3n^2 + 14n - 7m - 5 = 0$

Bài 1	Đáp án	Điểm
1.2 (2,5đ)	$2n^3 - mn^2 - 3n^2 + 14n - 7m - 5 = 0$ $\Leftrightarrow m = 2n - 3 + \frac{16}{n^2 + 7} \quad (1)$	1,0
	Vì $m, n \in \mathbb{Z}$ nên $n^2 + 7 \in U(16) \Rightarrow n^2 + 7 \in \{8; 16\} \Rightarrow n^2 \in \{1; 9\} \Rightarrow n \in \{\pm 1; \pm 3\} \quad (2)$	0,75
	Từ (1) và (2) suy được: $(m, n) = \{(1; 1), (-3; -1); (4; 3), (-8; -3)\}$	0,75

Bài 2: (7,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+1}$

b) $|x-2014| + |x-2016| + |y-2016| + |x| = 2016 \quad (1)$

c) Tìm GTNN của biểu thức: $A = \frac{3-4\sqrt{x}}{x+1}$

d) Cho x, y, z là các số không âm và $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$

Bài 2	Đáp án	Điểm
2.1 (2,0đ)	Ta có: $A = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+1}$	1,0
	$= \frac{(2\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1) + \sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x^3}+1}{2\sqrt{x}-1}$ $= \frac{(2\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}$	1,0
2.2 (2,0đ)	$ x-2014 + x-2016 + y-2016 + x = 2016 \quad (1)$ Ta có: $ x-2016 + x = 2016-x + x \geq x+2016-x = 2016 \quad (2)$	0,5
	Chỉ ra được dấu « = » xảy ra khi $0 \leq x \leq 2016$ (*) Từ (1) và (2) suy được: $ x-2014 + y-2016 = 0$	0,25x2
	Lập luận suy được: $\begin{cases} x-2014 =0 \\ y-2016 =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2014 \\ y=2016 \end{cases}$	0,5
	Đối chiếu ĐK (*) và kết luận được nghiệm	0,5
2.3 (1,5đ)	. ĐK: $x \geq 0$ $A = \frac{3-4\sqrt{x}}{x+1} = \frac{(x-4\sqrt{x}-4)-(x+1)}{x+1} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x+1} - 1 \geq -1$ (vì $x \geq 0$)	1,0
	Chỉ ra được: Min A = -1 khi x = 4 (tmdk)	0,5
2.4 (2,0đ)	Áp dụng BĐT Bunhiakopski có $A^2 = (1.\sqrt{x+y} + 1.\sqrt{y+z} + 1.\sqrt{z+x})^2$ $\leq (1^2+1^2+1^2) \left((\sqrt{x+y})^2 + (\sqrt{y+z})^2 + (\sqrt{z+x})^2 \right)$	1,0
	$= 3.2(x+y+z) = 6.1 = 6$ (vì $x+y+z=1$)	0,5
	Suy được $A \leq \sqrt{6}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$	0,5

Bài 3: (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC có chu vi $2p = a + b + c$ (a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác).

Chứng minh rằng : $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

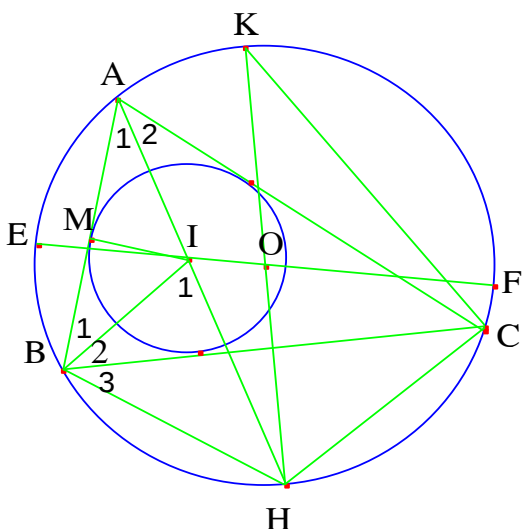
Bài 3	Đáp án	Điểm
	Chỉ ra được: $p-a = \frac{b+c-a}{2} > 0; p-b > 0; p-c > 0$	0,25

3 (2,0đ)	Áp dụng BĐT Cô si ta có : $[(p-a)+(p-b)]\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\right) \geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)} \cdot \frac{2}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} = 4$	0,5
	Suy được: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{4}{c}$	0,25
	Tương tự: $\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}; \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}$	0,25
	Suy được: $2 \cdot \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \geq 4 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ Suy được đpcm và Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.	0,25 0,5

Bài 4:(5,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi (I ; r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, M là tiếp điểm của AB với đường tròn (I); H là giao điểm của AI với đường tròn (O) (H khác A), HK là đường kính của đường tròn (O). Gọi a là độ dài đoạn OI. Chứng minh rằng:

- Tam giác AMI và tam giác KCH đồng dạng
- $HB = HI$
- $IA \cdot IH = R^2 - a^2$.
- $R^2 - 2Rr = a^2$

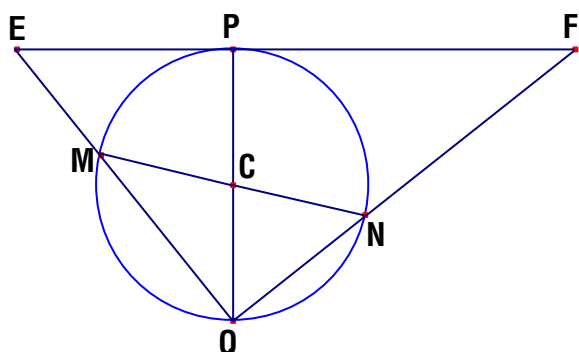


Bài 4	Đáp án	Điểm
4.a (1,75đ)	* Hình vẽ đúng – Chứng minh được các tam giác AMI và KCH là các tam giác vuông - Chứng minh được $A_1 = A_2 = K$ - Suy ra được tam giác AMI và tam giác KCH đồng dạng (<i>đpcm</i>)	0,25 0,5 0,5 0,5
4.b (1,0đ)	- Chứng minh được $\hat{I}_1 = A_1 + B_1$; $IBH = B_2 + B_3 = B_1 + A_1$ Do đó $\hat{I}_1 = IBH \Rightarrow HB = HI$ (<i>đpcm</i>)	0,5 0,5
4.c (1,0đ)	Gọi EF là đường kính của (O) và đi qua I. - Nêu được: $IA.IH = IE.IF$ (hệ thức trong đường tròn) - Suy ra: $IA.IH = (R - a).(R + a) = R^2 - a^2$	0,25 0,25 0,5
4.d (1,25đ)	Từ câu a), ta có: $\frac{IA}{HK} = \frac{IM}{HC} \Rightarrow IA.HC = HK.IM = 2Rr$ (*) Mà $HB = HC$ (do $A_1 = A_2$) $\Rightarrow HC = HI$. Kết hợp câu c), thay vào (*) ta có: $R^2 - a^2 = 2Rr \Rightarrow R^2 - 2Rr = a^2$ (<i>đpcm</i>)	0,50 0,25 0,50

Bài 5:(3,0 điểm) Cho đường tròn (C) đường kính $PQ = 2R$ cố định và một đường kính MN của đường tròn thay đổi (MN khác PQ). Qua P vẽ đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn, (d) cắt QM và QN lần lượt ở E và F.

1) Chứng minh tam giác QMN đồng dạng với tam giác QFE.

- 2) Tìm vị trí của đường kính MN để EF có độ dài nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó theo R.



Bài 5	Đáp án	Điểm
5.1 (1,5đ)	Chứng minh được: $QM.QE = QN.QF(=PQ^2) \Rightarrow \frac{QM}{QF} = \frac{QN}{QE}$	0,75
	Chỉ ra được: ΔQMN đồng dạng ΔQFE (c.g.c)	0,75
5.2 (1,5đ)	ΔQFE vuông tại Q có $PQ \perp EF$ (gt) (1) $\Rightarrow PQ^2 = PE.PF$ (hệ thức 2) $\Rightarrow PE.PF = (2R)^2 = 4R^2$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số EP, PF > 0 ta có $EF = EP + PF \geq 2\sqrt{EP.PF} = 2.\sqrt{4R^2} = 4R$ $\Rightarrow EF$ nhỏ nhất bằng 4R khi EP = PF (2)	0,25
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta QEF$ cân tại Q có PQ là đường cao đồng thời là phân giác.	0,25
	Chỉ ra được PMQN là hình chữ nhật	0,25
	$\Rightarrow PMQN$ là hình vuông $\Rightarrow MN \perp PQ$ Vậy Khi $MN \perp PQ$ thì EF có độ dài nhỏ nhất bằng 4R'	0,25

Chú ý: 1. Nếu thí sinh làm bài bằng cách khác đúng thì GK vẫn cho điểm tương đương.
2. Điểm toàn bài không được làm tròn.

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

(Đề thi có 01 trang)

Câu 1. (3,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$

2) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0, a^2 + b^2 \neq c^2, b^2 + c^2 \neq a^2, c^2 + a^2 \neq b^2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Trong hệ trục tọa độ Oxy , tìm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ những điểm $M(x; y)$ sao cho $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0$.

2) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $\frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{8}{(b+c)^2 + 4abc} + \frac{8}{(a+c)^2 + 4abc} + a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3}$$

2) Tìm các số nguyên tố a, b, c và số nguyên dương k thỏa mãn phương trình $a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1$.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho đoạn thẳng $AB = 2a$ có trung điểm là O . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn tâm O đường kính AB và nửa đường tròn tâm O' đường kính AO . Điểm M thay đổi trên nửa đường tròn O' (M khác A và O), tia OM cắt đường tròn O tại C . Gọi D là giao điểm thứ hai của CA với đường tròn O' .

1) Chứng minh rằng tam giác ADM cân.

2) Tiếp tuyến tại C của đường tròn O cắt tia OD tại E , chứng minh EA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn O và O' .

3) Đường thẳng AM cắt OD tại H , đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt đường tròn O tại điểm thứ hai là N . Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

4) Tính độ dài đoạn OM theo a biết ME song song với AB .

Câu 5. (3,0 điểm)

1) Cho hình vuông $MNPQ$ và điểm A nằm trong tam giác MNP sao cho $AM^2 = AP^2 + 2AN^2$. Tính góc PAN .

2) Cho các đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $Q(x) = x^2 + 2016x + 2017$ thỏa mãn $P(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt và $P(Q(x)) = 0$ vô nghiệm.

Chứng minh rằng $P(2017) > 1008^6$.

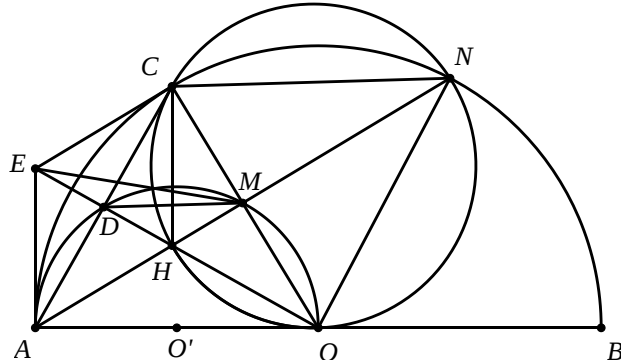
-----HẾT-----

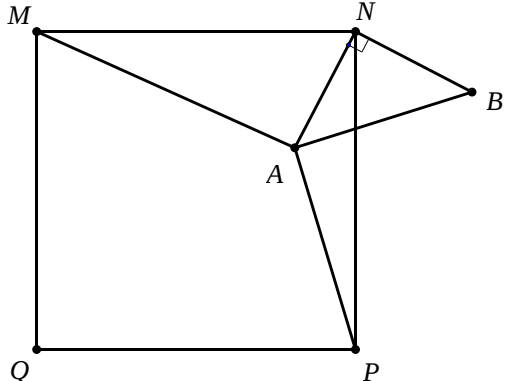
UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM
THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2016 - 2017
Môn: Toán - Lớp 9

Câu	Đáp án	Điểm
1.1. (1.5 điểm)		
	$B = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{8 + 2\sqrt{8} + 1}}}$ $= \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{(\sqrt{8} + 1)^2}}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{8} + 1}}$	0.75
	$= \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}} = \sqrt{18 + 2\sqrt{18 \cdot 5} + 25}$ $= \sqrt{(\sqrt{18} + 5)^2} = 3\sqrt{2} + 5$	0.75
1.2. (1.5 điểm)		
	$P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = \frac{a^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(a+b)^2}{(b+c)(c+a)(a+b)}$ $= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}$	0.75
	Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$ $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ Do vậy, $P = \frac{3}{2}$	0.75
2.1. (2.0 điểm)		
	Ta có $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ y = 3\sqrt{x} \end{cases}$ Với $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow 2x + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 = 0$, không có x thỏa mãn.	1.0
	Với $y = 3\sqrt{x} \Rightarrow 2x + 1 = 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$	1.0

	Từ đó tìm được các điểm thỏa mãn là $M \ 1;3$ hoặc $M \left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$.	
2.2. (2.0 điểm)		
	Với $a = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{4}c$ ta được $\frac{5}{4}cx = c$. Nếu $c = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nếu $c \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = \frac{4}{5}$.	1.0
	Với $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4a\left(-\frac{4}{6}a - \frac{4}{5}b\right) = b^2 + \frac{16}{5}ab + \frac{8}{3}a^2 = b^2 + \frac{16}{5}ab + \frac{64}{25}a^2 + \frac{8}{75}a^2$ $= \left(b + \frac{8}{5}a\right)^2 + \frac{8}{75}a^2 > 0, \forall a \neq 0, \forall b. \text{ Suy ra, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.}$ Vậy phương trình luôn có nghiệm.	1.0
3.1. (2.0 điểm)		
	Ta có $\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} \geq \frac{8}{(a+b)^2 + c(a+b)^2} = \frac{8}{(c+1)(a+b)^2}; a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \text{ nên}$	0.5
	$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{8}{(c+1)(a+b)^2} + \frac{(a+b)^2}{4} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}$	0.5
	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}} = \frac{8}{2\sqrt{2}c+1} \geq \frac{8}{c+3}$	0.5
	Do đó, $\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{8}{c+3}$ Tương tự $\frac{8}{(b+c)^2 + 4abc} + \frac{b^2 + c^2}{2} \geq \frac{8}{a+3}, \frac{8}{(a+c)^2 + 4abc} + \frac{a^2 + c^2}{2} \geq \frac{8}{b+3}.$ Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.	0.5
3.2. (2.0 điểm)		
	Vì VP chia 3 dư 1 nên VT chia 3 dư 1. Mà bình phương của số nguyên tố chia 3 dư 1 hoặc 0 nên hai trong ba số a, b, c phải bằng 3.	0.5
	TH1: $a = b = 3$ ta có $18 + 16c^2 = 9k^2 + 1 \Rightarrow 17 = 9k^2 - 16c^2 = (3k - 4c)(3k + 4c)$ $\Rightarrow \begin{cases} 3k - 4c = 1 \\ 3k + 4c = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ c = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$ Vậy ta được $a; b; c; k = 3; 3; 2; 3$.	0.5

	TH2: Nếu $c = 3$; $a = 3$ hoặc $b = 3$. Với $a = 3$ ta có $3^2 + b^2 + 16 \cdot 3^2 = 9k^2 + 1 \Rightarrow 152 = 9k^2 - b^2 = (3k - b)(3k + b) = 2^3 \cdot 19$. Vì $3k - b, 3k + b$ cùng tính chẵn lẻ mà tích là chẵn nên chúng cùng chẵn. Ta được các trường hợp: $\begin{cases} 3k - b = 2 \\ 3k + b = 76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 13 \\ b = 37 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$ Ta được các bộ $a; b; c; k$ thỏa mãn là $(a, b, c, k) = (3, 37, 3, 13)$. $\begin{cases} 3k - b = 4 \\ 3k + b = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7 \\ b = 17 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$ Ta được các bộ $a; b; c; k$ thỏa mãn là $(a, b, c, k) = (3, 17, 3, 7)$ Tương tự ta có các bộ $(a, b, c, k) = (37, 3, 3, 13), (17, 3, 3, 7)$.	1.0	
4.1. (1.0 điểm)			
		Tam giác AOC cân tại O, có OD là đường cao nên là phân giác trong góc AOC, do đó $AOD = COD$	0.5
	$\Rightarrow AD = DM$ nên $DA = DM$. Vậy tam giác AMD cân tại D.	0.5	
4.2. (1.0 điểm)			
	$\triangle OEA = \triangle OEC$ c.g.c $\Rightarrow OAE = OCE = 90^\circ$.	0.5	
	Do đó, $AE \perp AB$. Vậy AE là tiếp tuyến chung của O và O'.	0.5	
4.3. (2.0 điểm)			
	Giả sử AM cắt O tại N'. $\triangle OAN'$ cân tại O, có $OM \perp AN'$ nên OM là đường trung trực của $AN' \Rightarrow CA = CN'$.	1.0	
	Ta có $CN'A = CAM$ mà $CAM = DOM$, do đó $CN'H = COH$. Bốn điểm C, N', O, H thuộc một đường tròn. Suy ra, N' thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle CHO$. Do vậy, N' trùng với N. Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.	1.0	
4.4. (2.0 điểm)			

	Vì $ME \parallel AB$ và $AB \perp AE$ nên $ME \perp AE$. Ta có hai tam giác MAO, EMA đồng dạng nên $\frac{MO}{EA} = \frac{MA}{EM} = \frac{AO}{MA} \Rightarrow MA^2 = AO \cdot EM \quad (*)$	1.0
	Dễ thấy $\triangle MEO$ cân tại M nên $ME = MO$. Thay vào $(*)$ ta được $MA^2 = OA \cdot MO \quad (**)$ Đặt $MO = x > 0$ ta có $MA^2 = OA^2 - MO^2 = a^2 - x^2$. Từ $(**)$ suy ra $a^2 - x^2 = ax \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$. $\text{Từ đó tìm được } OM = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$	1.0
5.1. (1.5 điểm)		
	Dựng tam giác ANB vuông cân tại N (A, B nằm khác phía đối với NP). Ta có $AB^2 = 2AN^2$, $BAN = 45^\circ$ và $\triangle AMN = \triangle BNP$ c.g.c $\Rightarrow AM = BP$.	1.0
	Do đó, $AP^2 + AB^2 = AP^2 + 2AN^2 = AM^2 = BP^2 \Rightarrow \triangle ABP$ vuông tại A. Nên $PAN = PAB + BAN = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$	0.5
5.2. (1.5 điểm)		
	Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của $P(x)$ ta có $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ Suy ra, $P'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_2)(x - x_3)$	0.5
	Do $P'(x) = 0$ vô nghiệm nên các phương trình $Q(x) - x_i = 0$ $i = 1, 2, 3$ vô nghiệm. Hay các phương trình $x^2 + 2016x + 2017 - x_i = 0$ $i = 1, 2, 3$ vô nghiệm	
	Do đó, các biệt thức tương ứng $\Delta_i' = 1008^2 - 2017 - x_i < 0 \Leftrightarrow 2017 - x_i > 1008^2$ Suy ra, $P(2017) = (2017 - x_1)(2017 - x_2)(2017 - x_3) > 1008^6$.	1.0

Chú ý:

1. Học sinh làm đúng đến đâu giám khảo cho điểm đến đó, tương ứng với thang điểm.
2. HS trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo cho điểm tương ứng với thang điểm. Trong trường hợp mà hướng làm của HS ra kết quả nhưng đến cuối còn sai sót thì giám khảo trao đổi với tổ chấm để giải quyết.

3. Tổng điểm của bài thi không làm tròn.

-----Hết-----

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO
HUYỆN TRỰC NINH**

ĐỀ CHÍNH

(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC 2016 -2017

MÔN TOÁN LỚP 9

Thi ngày 08 tháng 11 năm 2016

(Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao
đề)

Bài 1 (4,0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

2) Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$

a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A

b) Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

Bài 2 (4,0 điểm). Giải phương trình

1) Giải phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$

2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12} + \sqrt{2x^2+3x+2} = x+5$.

Bài 3 (3,0 điểm).

1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 25 = y(y+6)$

Bài 4 (7,0 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.

a) Chứng minh $CIJ = CBH$

b) Chứng minh $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh $HE \cdot HD = HC^2$

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5 (2,0 điểm). Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.....

Họ, tên chữ ký

GT1:.....

Số báo danh:.....

Họ, tên chữ ký

GT2:.....

**PHÒNG GD-ĐT
HUYỆN TRỰC NINH**

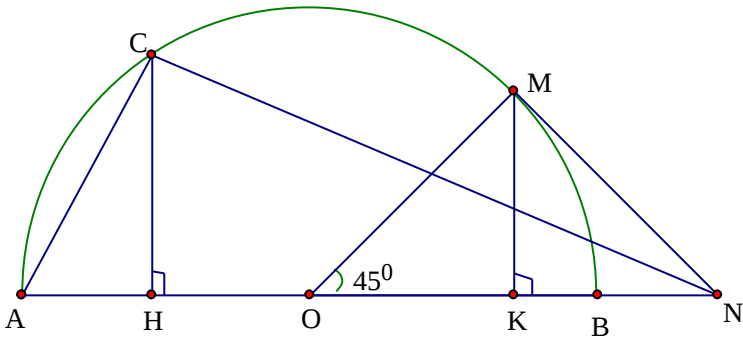
**HƯỚNG DẪN CHẤM THI
KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2016 - 2017
Môn thi : Toán 9**

Bài	Câu	Nội dung	Điểm
Bài 1 (4 đ)	Câu 1 (1,75đ)	1. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$	
		$A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$	0,75
		$A = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+3} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}$	0,5
		$A = 2\sqrt{2}$	0,5
	Câu 2 (2,25)	2. $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$	
		a) ĐKXĐ: $x \geq 0$	0,25
		$A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3 - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3 + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$	0,5
		$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1}$ $= \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} = -2\sqrt{x}$	0,5
		b) $B = A + x - 1 = -2\sqrt{x} + x - 1 = x - 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2 \geq -2$	0,5
		Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (TM ĐKXĐ)	0,25
		Vậy GTNN của biểu thức B=-2 khi x=1	0,25

Bài 2 (4 đ)		1) Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$	
	Câu 1 (2đ)	ĐKXD : $x \geq 1$	0,25
		$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = \frac{x+3}{2}$	0,5
		$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \frac{x+3}{2}$	0,25
		$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = \frac{x+3}{2} (*)$	0,25
		Nếu $x \geq 2$ phương trình (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = x+3$ $\Leftrightarrow 16(x-1) = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (TM)}$	0,25
		Nếu $1 \leq x < 2$ phương trình (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 + 1 - \sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4 = x+3 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (TM)}$	0,25
		Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=5$	0,25
	Câu 2 (2đ)	2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12} + \sqrt{2x^2+3x+2} = x+5$.	
		Đặt $u = \sqrt{2x^2+5x+12}, v = \sqrt{2x^2+3x+2} \text{ (} u > 0, v > 0 \text{)}$	0,25
		$\Rightarrow u^2 = 2x^2+5x+12, v^2 = 2x^2+3x+2 \Rightarrow u^2 - v^2 = 2x+10 = 2(x+5)$	0,25
		Từ (1) $\Rightarrow 2(u+v) = (u^2 - v^2) \Leftrightarrow (u+v)(u-v-2) = 0$ (2)	0,25
		Vì $u > 0, v > 0$, từ (2) suy ra: $u-v-2=0$. Vì vậy $\sqrt{2x^2+5x+12} = \sqrt{2x^2+3x+2} + 2$ (3)	0,25
		Bình phương 2 vế và thu gọn ta được phương trình 2 $\sqrt{2x^2+3x+2} = x+3$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2\sqrt{2x^2+3x+2} = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 7x^2+6x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (7x^2-7)+(6x+6)=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x+1)(7x-1)=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x=-1, x=\frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x=-1, x=\frac{1}{7} \text{ (tm)}$	0,5

		Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = \frac{1}{7}$	0,25
Bài 3 (3 đ)	Câu 1 (1,5đ)	1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.	
		Giả sử $2016k + 3 = a^3$ với k và a là số nguyên. Suy ra: $2016k = a^3 - 3$ Ta chứng minh $a^3 - 3$ không chia hết cho 7.	0,5
		Thật vậy: Ta biểu diễn $a = 7m + r$, với $r \in \{0;1;-1;2;-2;3;-3\}$.	0,25
		Trong tất cả các trường hợp trên ta đều có $a^3 - 3$ không chia hết cho 7	0,5
		Mà $2016k$ luôn chia hết cho 7, nên $a^3 - 3 \neq 2016k$. ĐPCM	0,25
	Câu 2 (1,5đ)	2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 25 = y(y + 6)$	
		Từ $x^2 - 25 = y(y + 6)$ Ta có : $(y+3+x)(y+3-x) = -16$	0,25
		Để ý trong phương trình chỉ chứa ẩn số x với số mũ bằng 2 , do đó ta có thể hạn chế giải với x là số tự nhiên. Khi đó: $y+3+x \geq y+3-x$. Ta có $(y+3+x)+(y+3-x) = 2(y+3)$ là số chẵn Suy ra 2 số $(y+3+x)$ và $(y+3-x)$ cùng tính chẵn lẻ . Ta lại có tích của chúng là số chẵn , vậy 2 số $(y+3+x)$ và $(y+3-x)$ là 2 số chẵn.	0,5
		Ta chỉ có cách phân tích -16 ra tích của 2 số chẵn sau đây: $-16 = 8(-2) = 4(-4) = 2(-8)$ trong đó thỏa sẽ có 3 trường hợp, ta xét trường hợp đầu tiên: $(y+3+x) = 8, (y+3-x) = -2$ ta có $x = 5, y = 0$.	0,25
		Khi $y+3+x = 4, y+3-x = -4$ ta có $x = 4, y = -3$. Khi $y+3+x = 2, y+3-x = -8$ ta có $x = 5, y = -6$. Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $(x,y) \in \{(5,0);(4,-3);(5,-6)\}$	0,5
Bài 4 (7 đ)			

	Câu a (1,5 đ)	+ Vì $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $AC \perp BC$ Suy ra $BC \perp CD$ (1)	0,5
		+ Lập luận để chỉ ra $IJ \parallel CD$ (2)	0,5
		+ Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp BC$	0,5
		+ Suy ra $\angle CIJ = \angle CBH$ (cùng phụ với $\angle HCB$) (3)	
	Câu b (2 đ)	+) Trong $\triangle$ vuông CBH ta có: $\tan \angle CBH = \frac{CH}{BH}$ (4)	0,5
		+ Lập luận chứng minh được $CJ \parallel AB$ + Mà $CH \perp AB$ (gt) + Suy ra $CJ \perp CH$	0,5
		+) Trong tam giác vuông CIJ ta có $\tan \angle CIJ = \frac{CJ}{CI} = \frac{CJ}{HI}$ $CI = HI$ (5)	0,5
		+ Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$	
		+ Xét $\triangle CJH$ và $\triangle HIB$ có $\angle H CJ = \angle BHI = 90^\circ$ và $\frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$ (cmt) + Nên $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$	0,5
	Câu c (1,5 đ)	+ Lập luận để chứng minh được $\angle HEI = 90^\circ$	0,5
		+ Chứng minh được $\triangle HEI$ đồng dạng với $\triangle H CJ$	0,5
		+ Suy ra $\frac{HE}{HC} = \frac{HI}{HJ}$	
		+ Suy ra $HE \cdot HJ = HI \cdot HC$	0,5
		+ Mà $HJ = \frac{1}{2}HD$; $HI = \frac{1}{2}HC$ + Suy ra $HE \cdot HD = HC^2$	

			
Câu d (2 đ)		+ Lấy điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho $BOM = 45^\circ$ + Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại M cắt AB tại N. Ta có M và N cố định.	0,5
		+ Kẻ $MK \perp AB$ tại K + Chứng minh được $\triangle MON$ vuông cân tại M và $KM = KN$ Suy ra $ANC = 45^\circ$ Xét $C \equiv M$ Ta có $C \equiv M$ nên $H \equiv K$ Do đó $AH + CH = AK + KM = AK + KN = AN$ (không đổi)	0,5
		+ Xét C khác M. Tia NC nằm giữa hai tia NA và NM Do đó $ANC < ANM = 45^\circ$ + $\triangle HNC$ có $NHC = 90^\circ$ nên $HNC + HCN = 90^\circ$ Mà $HNC < 45^\circ$ nên $HCN > 45^\circ$ Suy ra $HNC < HCN$ Suy ra $HC < HN$	0,5
		+ Do đó $AH + CH < AH + HN = AN$ + Vậy Khi C ở trên nửa đường tròn (O) sao cho $BOC = 45^\circ$ thì $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất	0,5
Bài 5 (2 đ)		Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.	
		Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a+b+c \geq 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$	0,5

	Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$	0,5
	Suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$	0,5
	Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + c \\ b = c + a \\ c = a + b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$ (Trái với giả thiết) Vậy dấu = không xảy ra suy ra đpcm.	0,5

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO
QUẢNG NAM**

**KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
Năm học 2016 – 2017**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi : **TOÁN**

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi : **10/4/2017**

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \left(x\sqrt{x} + 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq \frac{1}{4}$.

Rút gọn biểu thức P và tìm x để $P \leq \frac{3}{2}$.

b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $ab + bc + ca = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{a^3}{c+a^2} + \frac{b^3}{a+b^2} + \frac{c^3}{b+c^2}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn đẳng thức:

$$a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) + 3(a - b) = (a+1)(b+1) + 25.$$

b) Cho hai số nguyên a và b thỏa $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC cân tại A và nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AK ; lấy điểm I thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O) (I khác A, B). Gọi M là giao điểm của IK và BC , đường trung trực của đoạn thẳng IM cắt AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh tứ giác $ADME$ là hình bình hành.

Câu 5. (4,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) và có trục tâm là H . Gọi D, E, F lần lượt là các chân đường cao vẽ từ A, B, C của tam giác ABC .

a) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC , gọi L là giao điểm của đường thẳng AK và đường tròn (O) (L khác A). Chứng minh HL vuông góc với AK .

b) Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B, C). Gọi N và P lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm M qua hai đường thẳng AB và AC . Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

————— **Hết** —————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NAM**

**KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2016 – 2017**

HƯỚNG DẪN CHẤM
Môn: TOÁN
(Hướng dẫn chấm thi này có 08 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (5,0 đ)	Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \left(x\sqrt{x} + 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq \frac{1}{4}$. Rút gọn biểu thức P và tìm x để $P \leq \frac{3}{2}$.	3,0

$P = \left[\frac{x-4}{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left(\frac{2x^2+4\sqrt{x}+x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} \right)$ (mỗi ý trong khai triển được 0,25 điểm)	0,75
$= \left[\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-1} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{(2\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}} \right]$	0,5
$= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{(2\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}} \right]$	0,5
$= \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$	0,25
+ Với $x > 0$, ta có: $x\sqrt{x}+2 = x\sqrt{x}+1+1 \geq 3\sqrt[3]{x\sqrt{x}.1.1} \Rightarrow x\sqrt{x}+2 \geq 3\sqrt{x}$	0,5
Suy ra $P = \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} \geq \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ hay $P \geq \frac{3}{2}$ (dấu bằng xảy ra khi $x=1$).	0,25
Do đó, để $P \leq \frac{3}{2}$ thì $x=1$.	0,25
<u>Hoặc trình bày cách khác:</u>	
+ Với $x > 0$, ta có: $P \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2 \leq 0$ (*)	0,25
Đặt $t = \sqrt{x}$, $t > 0$. Khi đó (*) trở thành: $t^3 - 3t + 2 \leq 0$	0,25
$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2) \leq 0$	0,25
Vì $t+2 > 0, (t-1)^2 \geq 0$ nên $(t-1)^2(t+2) \leq 0 \Leftrightarrow t-1=0 \Leftrightarrow t=1$ hay $x=1$.	0,25
b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa: $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{a^3}{c+a^2} + \frac{b^3}{a+b^2} + \frac{c^3}{b+c^2}$.	2,0
<u>Cách 1:</u> heo đề : $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$ $\frac{a^3}{c+a^2} = \frac{(a^3+ac)-ac}{c+a^2} = a - \frac{ac}{c+a^2}$	0,25
$c+a^2 \geq 2a\sqrt{c} \Rightarrow \frac{ac}{c+a^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{c} \leq \frac{c+1}{4}$	0,5
Suy ra $\frac{a^3}{c+a^2} \geq a - \frac{c+1}{4}$.	0,25

Tương tự : $\frac{b^3}{a+b^2} \geq b - \frac{a+1}{4}, \frac{c^3}{b+c^2} \geq c - \frac{b+1}{4}.$	0,25
Suy ra $A \geq \frac{3}{4}(a+b+c) - \frac{3}{4}$	0,25
Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$	0,25
$\Rightarrow (a+b+c)3 \geq 9 \Rightarrow a+b+c \geq 3$	
Suy ra $A \geq \frac{3}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy min $A = \frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.	0,25
Cách 2 :Ta có: $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$	0,25
Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, khi đó: $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z=3 \end{cases}$.	
Biểu thức A được viết lại: $A = \frac{x}{y(x+y^2)} + \frac{y}{z(y+z^2)} + \frac{z}{x(z+x^2)}$	0,25
Ta có : $\frac{x}{y(x+y^2)} = \frac{(x+y^2)-y^2}{y(x+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x+y^2}$; mà $x+y^2 \geq 2y\sqrt{x} \Rightarrow \frac{y}{x+y^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ nên $\frac{x}{y(x+y^2)} \geq \frac{1}{y} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$;	0,25
mà $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{1 \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ nên $\frac{x}{y(x+y^2)} \geq \frac{1}{y} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ (dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$)	0,25
Tương tự : $\frac{y}{z(y+z^2)} \geq \frac{1}{z} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{y}\right), \frac{z}{x(z+x^2)} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{z}\right)$ Suy ra $A = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{3}{4}.$	0,25
Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9.$	0,25
$\Leftrightarrow 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$ (vì $x+y+z=3$).	0,25
Do đó $A \geq \frac{3}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$. Vậy min $A = \frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.	0,25

Câu 2 (4,0 đ)	a) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0$	2,0
	Cách 1: Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.	0,25
	Khi đó ta có: $x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 = (2-x^2)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} + 2 = (2-x^2)^2 \quad (1)$	0,25
	Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$, $t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành: $2t + 2 = (t^2 + 1)^2$	0,25
	$\Leftrightarrow t^4 + 2t^2 - 2t - 1 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (t-1)[(t+1)(t^2+1) + 2t] = 0 \quad (2)$	0,5
	Vì $t \geq 0$ nên $(t+1)(t^2+1) + 2t > 0$. Do đó phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $t = 1$.	0,25
	+ Với $t = 1 \Rightarrow x = 0$ (thỏa). Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = 0$.	0,25
	Cách 2: + Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.	0,25
	$x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - x^2 \quad (*)$ + Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, $t \geq 0$. Suy ra $t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{t^2-2}{2}\right)^2 + 1 = 2 - x^2$	0,25
	Khi đó phương trình (*) trở thành: $t^4 - 4t^2 - 4t + 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 - 4) = 0 \quad (*)$	0,5
	+ vì $t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \geq 2$ và $t \geq 0$ nên $t \geq \sqrt{2}$.	0,25
	Do đó $t^3 + 2t^2 - 4 \geq 2\sqrt{2} + 4 - 4 > 0$. Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $t = 2$.	0,5
	+ Với $t = 2 \Rightarrow x = 0$ (thỏa). Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = 0$.	0,25
	Cách 3: + Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.	0,25
	Đặt $\sqrt{1+x} = a$, $\sqrt{1-x} = b$ ($a, b \geq 0$). Suy ra: $a^2 + b^2 = 2 \quad (1)$	0,5

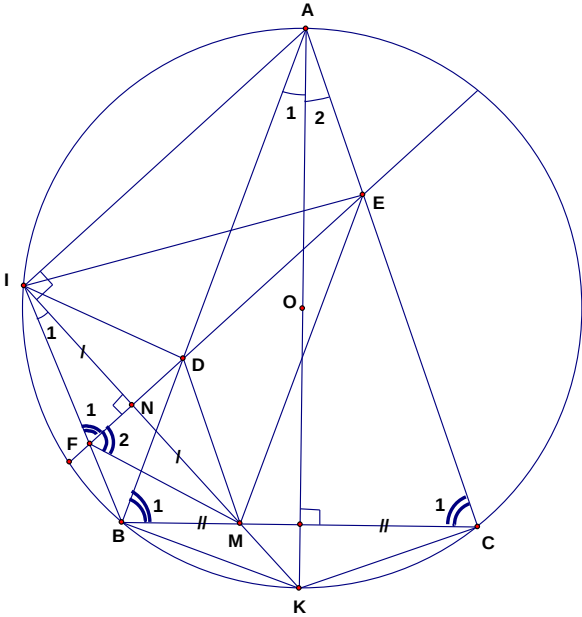
	+ Hơn nữa: $\sqrt{1-x^2} = ab \Rightarrow 2-x^2 = a^2b^2 + 1$. + Phương trình đã cho trở thành: $a+b = a^2b^2 + 1$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a + b = a^2b^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$	0,5

	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases}$	2,0
	Cách 1: $\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + (2x+1) = 4y \\ (x^2y^2 + 2xy + 1)y - 2(2x+1) = -2y \end{cases} (*)$ <i>(lưu ý: không nhất thiết biến đổi đưa về phải của pt thứ hai về $-2y$, có thể $-3y$)</i>	0,25
	- Xét $y = 0$ thay vào hệ (*) ta được: $\begin{cases} 2x+1 = 0 \\ -2(2x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ Suy ra $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ là một nghiệm của hệ.	0,25
	- Xét $y \neq 0$, hệ phương trình (*) tương đương với hệ: $\begin{cases} xy + \frac{2x+1}{y} = 4 \\ x^2y^2 + 2xy + 1 - 2\left(\frac{2x+1}{y}\right) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+1) + \frac{2x+1}{y} = 5 \\ (xy+1)^2 - 2\left(\frac{2x+1}{y}\right) = -2 \end{cases} (**)$	0,25
	Đặt $a = xy + 1, b = \frac{2x+1}{y}$; khi đó hệ phương trình (**) trở thành: $\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 - 2b = -2 \end{cases} (***)$	0,25
	+ Giải hệ (***) tìm được: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}, \begin{cases} a = -4 \\ b = 9 \end{cases}$.	0,25
	* Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} xy + 1 = 2 \\ \frac{2x+1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{2x+1}{3}\right) = 1 \\ y = \frac{2x+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$	0,25

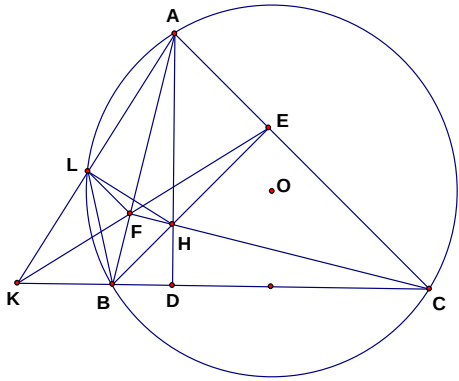
	* Với $\begin{cases} a = -4 \\ b = 9 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} xy + 1 = -4 \\ \frac{2x+1}{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{2x+1}{9}\right) = -5 \\ y = \frac{2x+1}{9} \end{cases}$ (vô nghiệm)	0,25
	Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$.	0,25
	Cách 2: $\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + (2x+1) = 4y \\ x^2y^3 + 2xy^2 - (4x+2) = -3y \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + (4x+2) = 8y \\ x^2y^3 + 2xy^2 - (4x+2) = -3y \end{cases} \Rightarrow x^2y^3 + xy^2 - 5y = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ xy = 1 \\ xy = -5 \end{cases}$	0,5
	+ Với $y = 0$. Suy ra được $(x; y) = (-\frac{1}{2}; 0)$.	0,25
	+ Với $xy = 1$. Suy ra được $(x; y) = (1; 1)$ hoặc $(x; y) = (-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3})$.	0,25
	+ Với $xy = -5$. Trường hợp này không tồn tại cặp $(x; y)$.	0,25
	Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$.	0,25

Câu 3 (4,0 đ)	a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn đẳng thức: $a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) + 3(a - b) = (a + 1)(b + 1) + 25$.	2,0
	$a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) + 3(a - b) = (a + 1)(b + 1) + 25$ $\Leftrightarrow (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - (b^3 + 3b^2 + 3b + 1) = (a + 1)(b + 1) + 25$ $\Leftrightarrow (a + 1)^3 - (b + 1)^3 = (a + 1)(b + 1) + 25$ (*)	0,5
	Đặt $x = a + 1, y = b + 1 (x, y \in \mathbb{Z}; x, y \geq 2)$. Khi đó (*) trở thành: $x^3 - y^3 = xy + 25 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = xy + 25$ (**)	0,25

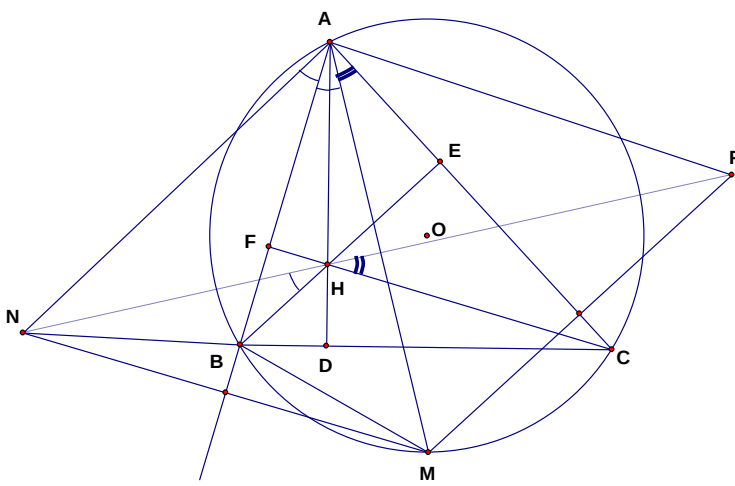
+ Từ (**) suy ra $x > y \Rightarrow x - y \geq 1$, mà $x^2 + xy + y^2 > 0$ nên: $x^2 + xy + y^2 \leq xy + 25 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 25 \Rightarrow x \leq 4$ (1).	0,25
+ Hơn nữa: $x > y$ và $x, y \geq 2$ nên $xy \geq 6$. Suy ra $x^3 - y^3 = xy + 25 \geq 31 \Rightarrow x^3 > 31 \Rightarrow x > 3$ (2)	0,25
Từ (1) và (2) suy ra: $x = 4$. Do $x > y$ và $y \geq 2$ nên $y \in \{2; 3\}$.	0,25
+ Thử lại, chỉ có $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ thỏa (**). Suy ra $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ là cặp số cần tìm.	0,5
b) Cho hai số nguyên a và b thỏa: $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.	2,0
Cách 1: $24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 1(\text{mod } 5)$ (1)	0,25
Ta có: $\begin{cases} a \equiv 0, \pm 1, \pm 2(\text{mod } 5) \\ b \equiv 0, \pm 1, \pm 2(\text{mod } 5) \end{cases}$	0,5
$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0, 1, 4(\text{mod } 5) \\ b^2 \equiv 0, 1, 4(\text{mod } 5) \end{cases}$ (2)	0,5
Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a^2 \equiv 0(\text{mod } 5) \\ b^2 \equiv 1(\text{mod } 5) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 \equiv 1(\text{mod } 5) \\ b^2 \equiv 0(\text{mod } 5) \end{cases}$.	0,5
Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.	0,25
Cách 2: $24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5k + 1$ (1)	0,25
$\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 5l + r \left(l \in \mathbb{Z}, r \in \{0; 1; 2; 3; 4\} \right)$	0,5
$\Rightarrow n^2 = 5l_1^2 + r_1^2 \left(l_1 \in \mathbb{Z}, r_1^2 \in \{0; 1; 4\} \right)$ (2)	0,5
Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a^2 = 5k_1 + 1 \\ b^2 = 5k_2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 = 5k_1 \\ b^2 = 5k_2 + 1 \end{cases}$	0,5
Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.	0,25
Cách 3: $24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 24a^2 - b^2 = -1$ không chia hết cho 5 nên a và b không đồng thời chia hết cho 5.	0,25
+ Giả sử a và b đều không chia hết cho 5. Theo định lý Fermat ta có $\begin{cases} a^4 \equiv 1(\text{mod } 5) \\ b^4 \equiv 1(\text{mod } 5) \end{cases} \Rightarrow (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \equiv 0(\text{mod } 5)$	0,5
Nếu $a^2 + b^2 \equiv 0(\text{mod } 5)$ thì $25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \equiv 0(\text{mod } 5)$ (vô lí).	0,25

	Suy ra $a^2 - b^2 \equiv 0(\text{mod } 5) \Rightarrow 23a^2 + 1 = b^2 - a^2 \equiv 0(\text{mod } 5)$ (*)	0,25
	Vì a không chia hết cho 5 nên $a \equiv \pm 1, \pm 2(\text{mod } 5)$.	0,25
	Với $a \equiv \pm 1(\text{mod } 5) \Rightarrow a^2 \equiv 1(\text{mod } 5) \Rightarrow 23a^2 + 1 \equiv -1(\text{mod } 5)$ (trái với (*))	0,25
	Với $a \equiv \pm 2(\text{mod } 5) \Rightarrow a^2 \equiv 4(\text{mod } 5) \Rightarrow 23a^2 + 1 \equiv 3(\text{mod } 5)$ (trái với (*))	0,25
	Vậy điều giả sử là sai. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.	
Câu 4 (2,5 đ)	Cho tam giác nhọn ABC cân tại A và nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AK; lấy điểm I thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O) (I khác A, B). Gọi M là giao điểm của IK và BC, đường trung trực của đoạn thẳng IM cắt AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh tứ giác ADME là hình bình hành.  (Không có hình vẽ không chấm bài)	2,5
	+ Gọi N là trung điểm của IM, F là giao điểm của DE và IB.	
	+ Ta có: $I_1 = A_1 = A_2 \Rightarrow F_1 = C_1 \Rightarrow F_2 = B_1$	0,5
	Suy ra tứ giác BFDM nội tiếp trong đường tròn.	0,25
	$\Rightarrow DMB = F_1 = C_1$	
	Suy ra $DM \parallel AC$ hay $DM \parallel AE$ (1)	0,5
	$AED = EDM = EDI$. Suy ra AEDI là hình thang cân.	0,5
	(Hoặc tứ giác BFDM và BIAC nội tiếp nên $FDM = IAE$; $FDM = FDI = DIA \Rightarrow DIA = IAE$. Suy ra AEDI là hình thang cân.)	
	Suy ra $ADE = IED = DEM$ nên $AD \parallel EM$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ADME là hình bình hành.	0,25

	Cách khác: + Gọi N là trung điểm của IM , F là giao điểm của DE và IB . + Ta có: $I_1 = A_1 = A_2 \Rightarrow F_1 = C_1 \Rightarrow$ tứ giác $BFEC$ nội tiếp trong đường tròn.	0,5
	Suy ra $FBC = AED$ (1).	0,25
	+ Mặt khác $F_1 = C_1 \Rightarrow F_2 = B_1 \Rightarrow$ tứ giác $BFDM$ nội tiếp trong đường tròn. Suy ra $FBC = MDE$ (2).	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $AED = MDE \Rightarrow AE // DM$ (*)	0,25
	Hơn nữa $AED = MDE \Rightarrow AED = IDE$ Mà $DE // IA$. Do đó tứ giác $AEDI$ là hình thang cân.	0,25
	Suy ra $ADE = IED$; mà $IED = DEM$ nên $ADE = DEM \Rightarrow AD // EM$ (**) Từ (*) và (**) suy ra tứ giác $ADME$ là hình bình hành.	0,25

Câu 5 (4,5 đ)	Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) và có trực tâm là H . Gọi D, E, F lần lượt là các chân đường cao vẽ từ A, B, C của tam giác ABC .	
	a) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC , gọi L là giao điểm của đường thẳng AK và đường tròn (O) (L khác A). Chứng minh HL vuông góc với AK .	2,5
	 (Không có hình vẽ không chấm bài)	
	Cách 1: + Xét hai tam giác ΔKBF và ΔKEC có: K chung, $KBF = KEC$ (vì cùng bù với FBC) Suy ra ΔKBF và ΔKEC đồng dạng.	0,5
	Suy ra: $\frac{KB}{KE} = \frac{KF}{KC} \Leftrightarrow KB.KC = KF.KE$ (1)	0,25
	+ Tương tự: ΔKBL và ΔKAC đồng dạng. Suy ra: $\frac{KB}{KA} = \frac{KL}{KC} \Leftrightarrow KB.KC = KL.KA$ (2)	0,5

Từ (1) và (2) suy ra: $KF \cdot KE = KL \cdot KA \Leftrightarrow \frac{KF}{KA} = \frac{KL}{KE}$; hơn nữa $\angle FKL = \angle AKE$.	0,5
Suy ra $\triangle KFL$ và $\triangle KAE$ đồng dạng.	
Suy ra $\angle KFL = \angle KAE$.	0,25
Do đó 4 điểm A, L, F, E cùng nằm trên đường tròn. Mà A, E, F nằm trên đường tròn đường kính AH nên L cũng nằm trên đường tròn đường kính AH . Vậy HL vuông góc với AK .	0,5
Cách 2: + Hạ HL' vuông góc AK tại L' . Ta đi chứng minh L' thuộc đường tròn (O) .	0,25
+ 5 điểm A, L', F, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AH .	0,5
+ Chứng minh được $\triangle KFL'$ và $\triangle KAE$ đồng dạng. $\Rightarrow KL' \cdot KA = KF \cdot KE$.	0,5
Tương tự chứng minh được: $KF \cdot KE = KB \cdot KC$	0,5
Suy ra $KL' \cdot KA = KB \cdot KC$.	0,25
Chứng minh được $AL'BC$ nội tiếp. Suy ra L' trùng L . Vậy HL vuông góc với AK .	0,5

b) Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B, C). Gọi N và P lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm M qua hai đường thẳng AB và AC . Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.	2,0
 (Không có hình vẽ không chấm bài)	
+ Ta có: $\begin{cases} \angle ANB = \angle AMB \\ \angle AMB = \angle ACB \end{cases} \Rightarrow \angle ANB = \angle ACB$	0,25
+ Tứ giác $DHEC$ nội tiếp nên $\angle ACB + \angle AHB = 180^\circ$. Suy ra $\angle ANB + \angle AHB = 180^\circ$. Do đó tứ giác $AHBN$ nội tiếp trong đường tròn.	0,5
Suy ra $\angle NHB = \angle NAB$. Mà $\angle NAB = \angle MAB$ nên $\angle NHB = \angle MAB$	0,25

	+ Tương tự ta cũng chứng minh được: $CHP = MAC$.	0,5
	+ Suy ra $NHB + BHC + CHP = MAB + BHC + MAC = (MAB + MAC) + BHC$ $= BAC + BHC = BAC + FHE = 180^\circ$ Suy ra N, H và P thẳng hàng.	0,5

Ghi chú: Nếu học sinh có cách giải khác đúng thì Ban Giám khảo thảo luận và thống nhất thang điểm cho phù hợp với Hướng dẫn chấm.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO
QUẢNG NAM**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
THCS**

Năm học 2013 – 2014

Môn thi : **TOÁN**

Thời gian : **150 phút** (không kể thời gian giao
đề)

Ngày thi : **08/04/2014**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (4 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$ với $x \geq 4$.

b) Cho a, b, c, d, e, f là các số thực khác 0, thỏa mãn $\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} = 1$ và

$$\frac{d}{a} + \frac{e}{b} + \frac{f}{c} = 0.$$

Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{f^2}$.

Câu 2 (4 điểm).

a) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là một số chính phương.

b) Cho a là số tự nhiên lớn hơn 5 và không chia hết cho 5.

Chứng minh rằng $a^{8n} + 3a^{4n} - 4$ chia hết cho 5, với mọi số tự nhiên n.

Câu 3 (6 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x + 2014} = 2014$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$

c) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng $abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \geq 0$.

Câu 4 (3 điểm).

a) Cho hình bình hành ABCD, các điểm M và N theo thứ tự thuộc các cạnh AB và BC sao cho $AN = CM$. Gọi K là giao điểm của AN và CM. Chứng minh rằng KD là tia phân giác của góc AKC.

b) Cho $\triangle ABC$ vuông ở A ($AB < AC$). Biết $BC = 4 + 4\sqrt{3}$ và bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ bằng 2. Tính số đo góc B và góc C của $\triangle ABC$.

Câu 5 (3 điểm).

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O. Trên cạnh BC lấy một điểm D tùy ý (D khác B và C). Đường tròn tâm O_1 qua D và tiếp xúc với AB tại B; đường tròn tâm O_2 qua D và tiếp xúc với AC tại C; hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là E.

a) Chứng minh rằng khi D di động trên cạnh BC thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

b) Giả sử $\triangle ABC$ cân tại A, chứng minh rằng tích $AD \cdot AE$ không phụ thuộc vào vị trí điểm D trên cạnh BC.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC

I. Hướng dẫn chung:

1. Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án và đúng thì giám khảo căn cứ vào thang điểm của đáp án để cho điểm hợp lý.
2. Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không sai lệch với hướng dẫn chấm và phải được thống nhất trong Hội đồng chấm thi.
3. Điểm toàn bài lấy điểm lẻ đến 0,25

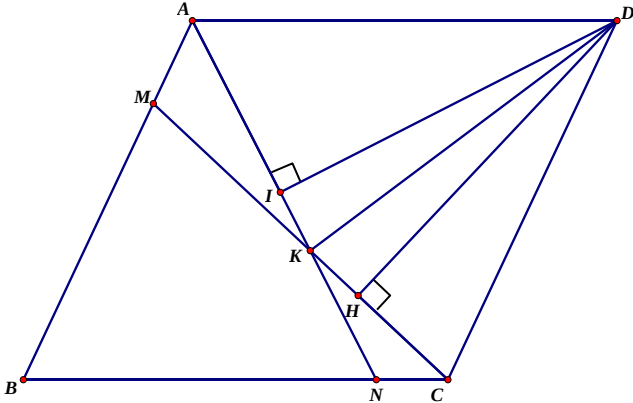
II. Đáp án:

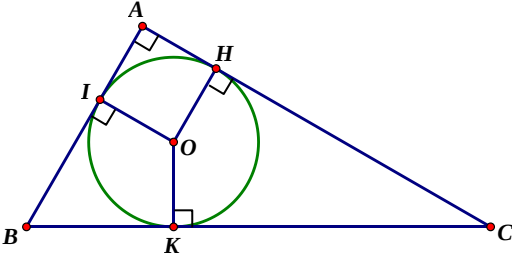
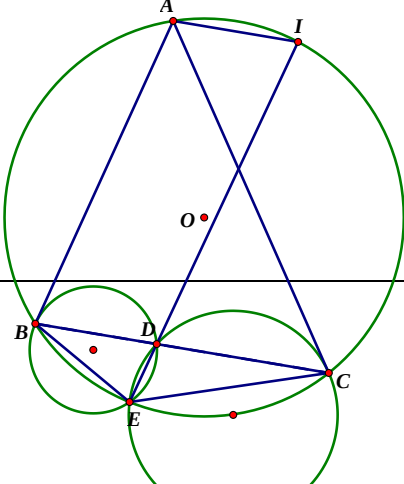
Câu	Nội dung	Điểm
1 (4đ)	a) Với $x \geq 4$, ta có :	
	$A = \sqrt{(x-4) + 4\sqrt{x-4} + 4} + \sqrt{(x-4) - 4\sqrt{x-4} + 4}$	0,25
	$= \sqrt{(\sqrt{x-4} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4} - 2)^2}$	0,5
	$= \sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2 $	0,25
	Xét các trường hợp :	
	* Với $x \geq 8$ ta có :	
	$A = \sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2$	0,25
	$= 2\sqrt{x-4}$	0,25
	* Với $4 \leq x < 8$ ta có :	
	$A = \sqrt{x-4} + 2 - \sqrt{x-4} + 2$	0,25
	$= 4$	0,25
	b) Với a, b, c, d, e, f là các số thực khác 0, ta có:	
		0,5
		0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	$\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} \right)^2 = 1$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{f^2} + \frac{2ab}{de} + \frac{2bc}{ef} + \frac{2ac}{df} = 1$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{f^2} + \frac{2abc}{def} \left(\frac{f}{c} + \frac{d}{a} + \frac{e}{b} \right) = 1$ Mà $\frac{d}{a} + \frac{e}{b} + \frac{f}{c} = 0$ Vậy $B = \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{f^2} = 1$	0,5 0,5
2 (4đ)	a) Đặt $n^2 - 14n - 256 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow (n - 7)^2 - k^2 = 305$ $\Leftrightarrow (n - 7 - k)(n - 7 + k) = 305$ Mà $305 = 305.1 = (-305).(-1) = 5.61 = (-5).(-61)$ và $(n - 7 - k) \leq (n - 7 + k)$ nên xét các trường hợp: $\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} n - 7 - k = 1 \\ n - 7 + k = 305 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} n - 7 - k = -305 \\ n - 7 + k = -1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} n - 7 - k = 5 \\ n - 7 + k = 61 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} n - 7 - k = -61 \\ n - 7 + k = -5 \end{array} \right. \end{array} \right.$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 160 \\ k = 152 \end{cases}$ $\begin{cases} n = -146 \\ k = 152 \end{cases}$ $\begin{cases} n = 40 \\ k = 28 \end{cases}$ $\begin{cases} n = -26 \\ k = 28 \end{cases}$ Vì n và k là các số tự nhiên nên ta chọn $n = 160$ hoặc $n = 40$.	0,25
	b) $A = a^{8n} + 3a^{4n} - 4 = (a^{8n} - 1) + 3(a^{4n} - 1)$ $= [(a^8)^n - 1] + 3[(a^4)^n - 1]$ $= (a^8 - 1)[(a^8)^{n-1} + (a^8)^{n-2} + \dots + 1] + 3(a^4 - 1)[(a^4)^{n-1} + (a^4)^{n-2} + \dots + 1]$ $= (a^4 - 1)(a^4 + 1).B + 3(a^4 - 1).C$ $= (a^4 - 1)[(a^4 + 1).B + 3C]$ $= (a^2 - 1)(a^2 + 1).D$ Vì a là số tự nhiên lớn hơn 5 và không chia hết cho 5 nên: $\begin{cases} a = 5k + 1 \Rightarrow (a^2 - 1) : 5 \\ a = 5k + 2 \Rightarrow (a^2 + 1) : 5 \\ a = 5k + 3 \Rightarrow (a^2 + 1) : 5 \\ a = 5k + 4 \Rightarrow (a^2 - 1) : 5 \end{cases} \quad (\text{với } k \text{ là số nguyên dương})$ Vậy $(a^{8n} + 3a^{4n} - 4) : 5$ với mọi số tự nhiên n.	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
3 (4đ)	a) Điều kiện: $x \geq -2014$	0,25 0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Đặt $t = \sqrt{x + 2014} \Rightarrow t^2 = x + 2014 \ (t \geq 0)$ Ta có hệ sau : $\begin{cases} x^2 + t = 2014 \ (1) \\ t^2 - x = 2014 \ (2) \end{cases}$ Trừ vế theo vế phương trình (2) cho phương trình (1) ta được : $t^2 - x^2 - x - t = 0$ $\Leftrightarrow (t+x)(t-x-1) = 0 \Leftrightarrow t = -x \text{ hoặc } t = x + 1$ - Với $t = -x$ ta có : $(-x)^2 = x + 2014 \Leftrightarrow x^2 - x - 2014 = 0 \ (*)$ Giải (*) được nghiệm $x = \frac{1 + \sqrt{8057}}{2}$ (loại vì $t \geq 0$) hoặc $x = \frac{1 - \sqrt{8057}}{2}$ - Với $t = x + 1$ ta có: $(x + 1)^2 = x + 2014 \Leftrightarrow x^2 + x - 2013 = 0 \ (**)$ Giải (**) được nghiệm $x = \frac{-1 + \sqrt{8053}}{2}$ hoặc $x = \frac{-1 - \sqrt{8053}}{2}$ (loại vì $t \geq 0$) Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{-1 + \sqrt{8053}}{2}$ hoặc $x = \frac{1 - \sqrt{8057}}{2}$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	b) Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ Khi đó từ hệ phương trình đã cho ta có: $\begin{cases} S = 2 - z \\ P = \frac{1}{2}(z^2 + 4) \end{cases}$ Theo cách đặt ta có x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$ $\Leftrightarrow X^2 - (2 - z)X + \frac{1}{2}(z^2 + 4) = 0 \ (1)$ $\Delta = [-(2 - z)]^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(z^2 + 4) = -(z + 2)^2$ Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$ $\Leftrightarrow (z + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow z = -2$ Thay $z = -2$ vào phương trình (1) ta được: $X^2 - 4X + 4 = 0 \ (2)$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Giải phương trình (2) được nghiệm $X_1 = X_2 = 2 \Rightarrow x = y = 2$. Vậy hệ đã cho có nghiệm: $x = 2, y = 2, z = -2$	0,25 0,25
	c) Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 - b^2 - c^2 \leq 1$ $\Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1 \Rightarrow 1 + a \geq 0$ Tương tự : $1 + b \geq 0; 1 + c \geq 0$ $\Rightarrow (1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 0$ $\Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc \geq 0 \quad (1)$ Mặt khác: $(1 + a + b + c)^2 = (1 + a)^2 + (b + c)^2 + 2(1 + a)(b + c)$ $= 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ab + 2bc$ $= (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ab + 2bc$ $= 2(a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + ab + ac + bc)$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + ab + ac + bc = \frac{1}{2}(1 + a + b + c)^2 \geq 0 \quad (2)$ Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được : $abc + a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ab + 2bc \geq 0$ $\Leftrightarrow abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \geq 0$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
4 (3đ)	a) Hình vẽ  Kẻ DI vuông góc với AN tại I, kẻ DH vuông góc CM tại H. Ta có: $S_{\triangle ADN} = \frac{1}{2} DI \cdot AN$; $S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2} DH \cdot MC$ $S_{\triangle ADN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (do cùng cạnh đáy AD và đường cao kẻ từ N)	0,25 0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	và $S_{\Delta DMC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (do cùng cạnh đáy DC và đường cao kẻ từ M) nên : $S_{\Delta ADN} = S_{\Delta DMC}$. $\begin{cases} \frac{1}{2} DI \cdot AN = \frac{1}{2} DH \cdot MC \\ AN = CM \text{ (gt)} \end{cases} \Rightarrow DI = DH$ $\Rightarrow \Delta DIK = \Delta DHK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow IKD = HKD \Rightarrow KD$ là phân giác góc AKC.	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) Hình vẽ  Gọi I, H, K lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ΔABC với các cạnh AB, AC, BC. Ta có: $AB + AC = AI + AH + BI + CH = AI + AH + BK + KC$ $= 8 + 4\sqrt{3} \quad (1)$ $\Rightarrow (AB + AC)^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB.AC = BC^2 + 2AB.AC = (8 + 4\sqrt{3})^2$ $\Rightarrow AB.AC = \frac{(8 + 4\sqrt{3})^2 - BC^2}{2} = 24 + 16\sqrt{3} \quad (2)$ Từ (1) và (2), kết hợp với $AB < AC$ suy ra $AB = 2 + 2\sqrt{3}$; $AC = 6 + 2\sqrt{3}$ $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 + 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ Suy ra $C = 30^\circ$; $B = 60^\circ$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
5 (3đ)	Hình vẽ 	

Câu	Nội dung	Điểm
	a) Kéo dài ED cắt (O) tại I AB là tiếp tuyến của (O₁) $\Rightarrow$ ABD = BED AC là tiếp tuyến của (O₂) $\Rightarrow$ ACD = CED $\Rightarrow$ ABD + ACD = BEC $\Rightarrow$ BEC + BAC = 180° $\Rightarrow$ Tứ giác ABEC nội tiếp (O) $\Rightarrow$ AIE = ACE = ACD + DCE = DEC + DCE = IDC $\Rightarrow$ AI//BC $\Rightarrow$ I cố định Vậy DE luôn đi qua điểm cố định I.	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	b) Ta có: AB = IC (vì AI//BC) ΔABC cân tại A $\Rightarrow$ AB = AC $\Rightarrow$ AC = IC $\Rightarrow$ I $\equiv$ A $\Rightarrow$ A, D, E thẳng hàng $\Rightarrow$ AD.AE = AB² (vì $\Delta ABE \sim \Delta ADB$) $\Rightarrow$ AD.AE không phụ thuộc vào vị trí của điểm D trên cạnh BC.	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

PHÒNG GD&ĐT THÀNH ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2015 - 2016

PHỐ

MÔN: TOÁN LỚP 9

THANH HÓA

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (4,0 điểm)

Cho $P = \frac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2} + \frac{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}$

1. Rút gọn P. Với giá trị nào của x thì $P > 1$
2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{|5-3x|-|x-1|}{x-3+|3+2x|} = 4$
2. Tìm số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Cho $a = x + \frac{1}{x}$

$b = y + \frac{1}{y}$

$c = xy + \frac{1}{xy}$

Tính giá trị biểu thức: $A = a^2 + b^2 + c^2 - abc$

2. Chứng minh rằng với mọi $x > 1$ ta luôn có. $3(x^2 - \frac{1}{x^2}) < 2(x^3 - \frac{1}{x^3})$

Bài 4: (4,0 điểm) Cho tứ giác ABCD có $AD = BC$; $AB < CD$. Gọi I, Q, H, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD

1. Chứng minh IPHQ là hình thoi và PQ tạo với AD, BC hai góc bằng nhau.
2. Về phía ngoài tứ giác ABCD, dựng hai tam giác bằng nhau ADE và BCF. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng AB, CD, EF cùng thuộc một đường thẳng.

Bài 5: (2,0 điểm) Tam giác ABC có $BC = 40\text{cm}$, phân giác AD dài 45cm đường cao AH dài 36cm . Tính độ dài BD, DC.

Bài 6: (2,0 điểm) Với a, b là các số thực thỏa mãn đẳng thức $(1+a)(1+b) = \frac{9}{4}$.

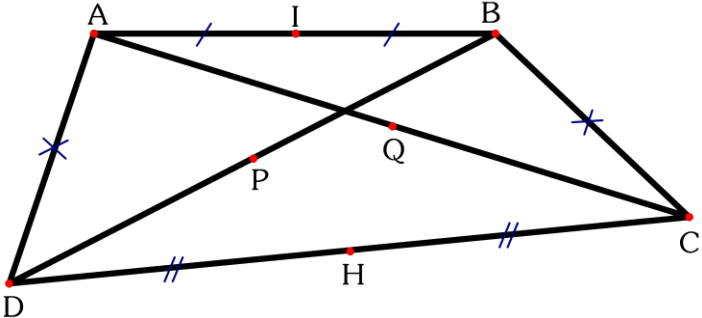
Hãy tìm GTNN của $P = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4}$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9

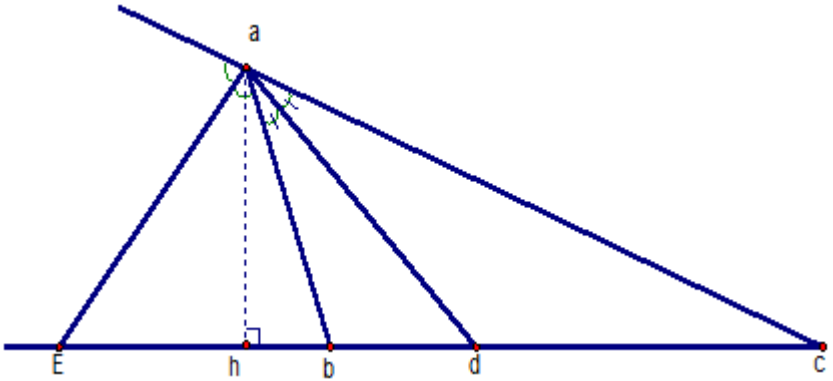
Bài	Câu	Tóm tắt cách giải	Điểm
-----	-----	-------------------	------

1	1	Điều kiện $x > 0; x \neq 1; 4$ $P = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2}$ $= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ $= \frac{2(x+1)}{x-1}$ $P > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2-x+1}{x-1} > 0$ $\Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} > 0 \text{ Theo đ/k } x > 0 \Rightarrow x+3 > 0$ $\Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ Kết hợp điều kiện $x > 0; x \neq 1; 4$ Suy ra $x > 1; x \neq 4$ thì $P > 1$	0,5
	2	$P = \frac{2(x+1)}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1} \text{ Với } x > 0; x \neq 1; 4$ P nguyên $\Leftrightarrow x-1$ là ước của 4 P đạt giá trị nguyên lớn nhất $\Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 6 khi $x = 2$	0,5 0,5 0,5
2	1	Điều kiện $x - 3 + 3 + 2x \neq 0$ Phương trình tương đương $ 3x-5 - x-1 - 4 2x+3 - 4x + 12 = 0 \quad (*)$ Xét $x < -\frac{3}{2}$ Thì $(*) \Leftrightarrow -3x + 5 + (x-1) + 4(2x+3) - 4x + 12 = 0$ $\Leftrightarrow 2x = -28$ $\Leftrightarrow x = -14 \text{ (Thỏa mãn đk)}$ Xét $-\frac{3}{2} \leq x < 1$ Thì $(*)$ $\Leftrightarrow -3x + 5 + x - 1 - 4(2x+3) - 4x + 12 = 0$	0,25 0,5 0,25 0,25

		$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \text{ (Thỏa mãn đk)}$ $\text{Xét } 1 \leq x < \frac{5}{3} \text{ Thì (*)}$ $\Leftrightarrow -3x + 5 - (x - 1) - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{3}{8} \text{ (loại)}$ $\text{Xét } x \geq \frac{5}{3} \text{ Thì (*)} \Leftrightarrow 3x - 5 - (x - 1) - 4(2x + 3) - 4x + 12 = 0$ $\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \text{ (Loại)}$ $\text{Vậy phương trình có nghiệm } x \in \left\{-14; \frac{2}{7}\right\}$	0,25 0,25 0,25
	2	Ta có $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ $\Leftrightarrow (x + y)^2 = xy(xy + 1)$ + Nếu $x + y = 0 \Rightarrow xy(xy + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$ Với $xy = 0$. Kết hợp với $x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$ Với $xy = -1$. Kết hợp với $x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ + Nếu $x + y \neq 0 \Rightarrow (x + y)^2$ là số chính phương $xy(xy + 1)$ là hai số nguyên liên tiếp khác 0 nên chúng nguyên tố cùng nhau. Do đó không thể cùng là số chính phương Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x; y) = (0; 0); (1; -1); (-1; 1)$	0,5 0,5 0,5 0,5
	1	$a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ $b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$ $c^2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2$	0,5

3	$ab = (x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y}) = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = c + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ $\Rightarrow abc = (c + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}).c$ $= c^2 + c(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$ $= c^2 + (xy + \frac{1}{xy})(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$ $= c^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$ $= a^2 - 2 + b^2 - 2 + c^2$ $\Rightarrow A = a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$	0,5 0,5 0,5
	2 $3(x^2 - \frac{1}{x^2}) < 2(x^3 - \frac{1}{x^3})$ $\Leftrightarrow 3(x - \frac{1}{x})(x + \frac{1}{x}) < 2(x - \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1)$ $\Leftrightarrow 3(x + \frac{1}{x}) < 2(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1) \quad (1)$ (Vì $x > 1$ nên $x - \frac{1}{x} > 0$) Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ Ta có (1) $\Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 > 0$ $\Leftrightarrow (t - 2)(2t + 1) > 0 \quad (2)$ Vì $x > 1$ nên $(x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} > 2$ hay $t > 2$ $\Rightarrow$ (2) đúng. Suy ra điều phải chứng minh	0,5 1,0 0,5
1		

4	$IP = HQ$; $IP \parallel HQ$ (Tính chất đường trung bình) và $AD = BC$ (GT) $\Rightarrow IPHQ$ là h.b.h Có $IP = IQ = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC$ nên $IPHQ$ là hình thoi Gọi P_1; Q_1 là giao điểm của PQ với AD và BC Nhận thấy $\triangle HPQ$ cân đỉnh H $\Rightarrow \widehat{HPQ} = \widehat{HQP}$ (Góc ở đáy tam giác cân) (1) Mà $PH \parallel BC \Rightarrow \widehat{BQ_1P} = \widehat{HPQ}$ (So le trong) (2) $QH \parallel AD \Rightarrow \widehat{AP_1P} = \widehat{HQP}$ (So le trong) (3) Từ (1); (2); (3) Suy ra $\widehat{AP_1P} = \widehat{BQ_1P}$ (đpcm)	0,5 0,5 0,5 0,5
2	Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm của EF, DF, CE Từ giả thiết $\triangle ADE = \triangle BCF$ và dựa vào tính chất của đường trung bình trong tam giác ta có $\triangle HMP = \triangle HNQ$ (c.c.c) Suy ra $MHP = NHQ \Rightarrow MHQ = NHP \Rightarrow MHN$ và PHQ có cùng tia phân giác Mặt khác dễ có $IPHQ$ và $KMHN$ là các hình thoi. Suy ra HK và HI lần lượt là phân giác của $\widehat{MHN}$ và $\widehat{PHQ}$. Suy ra	0,5 0,5 0,5

		H, I, K thẳng hàng	0,5
5		 Đặt $BD = x$, $DC = y$. Giả sử $x < y$. Pitago trong tam giác vuông AHD ta tính được $HD = 27\text{cm}$. Vẽ tia phân giác của góc ngoài tại A, cắt BC ở E. Ta có $AE \perp AD$ nên $AD^2 = DE \cdot DH$. Suy ra $DE = \frac{AD^2}{DH} = \frac{45^2}{27} = 75\text{cm}$ Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{75-x}{75+y} \quad (1)$ Mặt khác $x + y = 40 \quad (2)$ Thay $y = 40 - x$ vào (1) và rút gọn được $x^2 - 115x + 1500 = 0 \Leftrightarrow (x - 15)(x - 100) = 0$ Do $x < 40$ nên $x = 15$, từ đó $y = 25$. Vậy $DB = 15\text{cm}$, $DC = 25\text{cm}$	0,5 0,5 0,5 0,5
6		Áp dụng Bunhiacopski cho hai dãy a^2; 1 và 1; 4 ta có $(1^2 + 4^2)(a^4 + 1) \geq (a^2 + 4)^2$ $\Rightarrow \sqrt{1+a^4} \geq \frac{a^2+4}{\sqrt{17}} \quad (1)$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ Áp dụng Bunhiacopski cho b^2; 1 và 1; 4 ta có	0,5

	$17(b^4 + 1) \geq (b^2 + 4)^2 \Rightarrow \sqrt{b^4 + 1} \geq \frac{b^2 + 4}{\sqrt{17}} \quad (2)$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow P \geq \frac{a^2 + b^2 + 8}{\sqrt{17}} \quad (*)$ Mặt khác theo giả thiết $(1 + a)(1 + b) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a + b + ab = \frac{5}{4}$ Áp dụng Côsi ta có: $a \leq a^2 + \frac{1}{4}$ $b \leq b^2 + \frac{1}{4}$ $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ Cộng từng vế ba bất đẳng thức ta được $\frac{3}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2} \geq a + b + ab = \frac{5}{4}$ $\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right): \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{ Thay vào } (*)$ $P \geq \frac{\frac{1}{2} + 8}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{\sqrt{17}}{2}$ khi $a = b = \frac{1}{2}$	0,5
		0,5
		0,5

Lưu ý: - Học sinh làm cách khác đúng cho điểm tương đương

- Bài hình không có hình vẽ hoặc hình vẽ sai không cho điểm

PHÒNG GD&ĐT HẠ HÒA

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2015 – 2016

Môn: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi: 21 tháng 12 năm 2015

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 1 trang)

Câu 1 (3,0 điểm).

- a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $4x^2 + 8x = 38 - 6y^2$
b) Tìm số tự nhiên n để $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

Câu 2 (4,0 điểm).

- a) Cho $(x + \sqrt{x^2 + 2015})(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x + y + 2016$.

- b) Chứng minh rằng: Nếu $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Câu 3 (4,0 điểm).

- a) Giải phương trình: $4(x^2 + 4x + 2) = 11\sqrt{x^4 + 4}$

- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x + y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x + y)^2 - 2x^2 - 7y = 2 \end{cases}$$

Câu 4 (7,0 điểm).

Cho đường tròn (O, R) và dây cung BC cố định ($BC < 2R$). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Kẻ các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ đồng dạng và $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$.

- b) Chứng minh rằng: $S_{DEF} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \cdot S_{ABC}$

c) Xác định vị trí điểm A trên cung lớn BC sao cho chu vi tam giác DEF đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho a, b, c là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ca}.$$

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:, SBD:

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

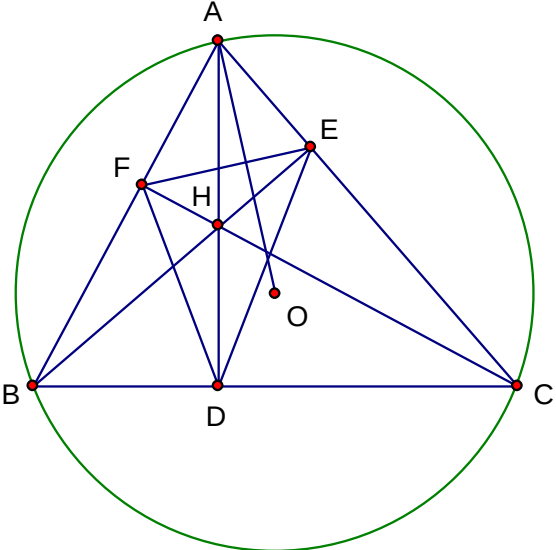
HƯỚNG DẪN CHẤM CHỌN ĐT HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2015-2016

MÔN: TOÁN

Đây là lời giải sơ lược, thí sinh có lời giải khác mà đúng thì giám khảo chấm vẫn chấm theo thang điểm dưới đây

Bài	Nội dung	
1	a	Giải phương trình nghiệm nguyên: $4x^2 + 8x = 38 - 6y^2$
		$4x^2 + 8x = 38 - 6y^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 19 - 3y^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 3(7 - y^2) (*)$
		Ta thấy: $2(x+1)^2 : 2 \Rightarrow 7 - y^2 : 2 \Rightarrow y$ lẻ
		Ta lại có: $7 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 7$. Do đó $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$
		Lúc đó: $2(x+1)^2 = 18 \Rightarrow (x+1) = \pm 3$ nên $x_1 = 2; x_2 = -4$
		Ta thấy các cặp số (2;1), (2;-1), (-4;1), (-4;-1) thỏa mãn (*) nên là nghiệm của phương trình.
	b	Ta có $n^4 + 4 = n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2$
		$= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$
		$= (n^2 - 2n + 2).(n^2 + 2n + 2)$
		Vì n là số tự nhiên nên $n^2 + 2n + 2 > 1$ nên
		$n^2 - 2n + 2 = 1$
		$\Leftrightarrow n = 1$
2	a	Cho $(x + \sqrt{x^2 + 2015})(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015$. Hãy tính A biết: $A = x + y + 2016$?
		Nhân cả 2 vế của đẳng thức đã cho với $(x - \sqrt{x^2 + 2015})$ ta được:
		$-2015(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015(x - \sqrt{x^2 + 2015}) \quad (1)$
		Nhân cả 2 vế của đẳng thức đã cho với $(y - \sqrt{y^2 + 2015})$ ta được:
		$-2015(x + \sqrt{x^2 + 2015}) = 2015(y - \sqrt{y^2 + 2015}) \quad (2)$
		Cộng (1) với (2) theo vế rồi rút gọn ta được: $x + y = 0$.

		Vậy $A = 2016$.	0,25
		b) Chứng minh rằng: Nếu $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$	
		Đặt: $ax^3 = by^3 = cz^3 = t$. Ta có:	0,25
		$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{\frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z}} = \sqrt[3]{t} \text{ vì } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad (1)$	0,5
		Mặt khác: $\sqrt[3]{t} = x\sqrt[3]{a} = y\sqrt[3]{b} = z\sqrt[3]{c}$	0,5
		Suy ra: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{t} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \sqrt[3]{t} \quad (2)$	0,5
		Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.	0,25
3	a	$4(x^2 + 4x + 2) = 11\sqrt{x^4 + 4} \quad (1)$ $\Leftrightarrow 6(x^2 + 2x + 2) - 2(x^2 - 2x + 2) = 11\sqrt{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}$	0,5
		$\Leftrightarrow \frac{6(x^2 + 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} - 2 = 11\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}}$ do $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$ với mọi x	0,5
		Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}} \quad (t > 0)$ Ta được phương trình: $6t^2 - 11t - 2 = 0$	0,5
		Giải (*) được $t = 2$ thỏa mãn yêu cầu Nên $t = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} = 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$	0,5
	b	$\begin{cases} x(x+y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x+y)^2 - 2x^2 - 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ y(x+y)^2 - 2(x^2 + 1) = 7y \end{cases}$	
		Để thấy $y \neq 0$, ta có: $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + x + y = 4 \\ (x+y)^2 - 2\frac{x^2 + 1}{y} = 7 \end{cases}$	0,5
		Đặt $u = \frac{x^2 + 1}{y}, v = x + y$ ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 4 \\ v^2 - 2u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 + 2v - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3, u = 1 \\ v = -5, u = 9 \end{cases}$	0,5

		+) Với $v=3, u=1$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=2 \\ x=-2, y=5 \end{cases}$.	0,5
		+) Với $v=-5, u=9$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2+1=9y \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=9y \\ y=-5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9x+46=0 \\ y=-5-x \end{cases}$ VN. KL: Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: (1;2) và (-2;5)	0,5
4			
	a	Tam giác ABE vuông tại E nên $\cos A = \frac{AE}{AB}$	0,5
		Tam giác ACF vuông tại F nên $\cos A = \frac{AF}{AC}$.	0,5
		Suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC (c.g.c)$	0,5
		Từ $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ suy ra $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \cos^2 A$	0,5
	b	Tương tự câu a, $\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = \cos^2 B, \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \cos^2 C$.	1,0
		Từ đó suy ra $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$	0,5
		Suy ra $S_{DEF} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \cdot S_{ABC}$	0,5

c	c) Chứng minh được $OA \perp EF; OB \perp DF; OC \perp ED$.	0,5
	Có $2S_{ABC} = 2.(S_{AEOF} + S_{BDOF} + S_{CDOE})$	0,5
	$\Rightarrow BC.AD = OA.EF + OB.FD + OC.ED$	0,5
	$\Rightarrow BC.AD = R(EF + FD + ED)$	0,5
	$\Rightarrow EF + FD + ED = \frac{BC.AD}{R}$	0,5
	Chu vi tam giác DEF lớn nhất khi và chỉ khi AD lớn nhất; AD lớn nhất khi và chỉ khi A là điểm chính giữa cung lớn BC.	0,5
5	$P = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ab} + \frac{2ab}{c^2 + ab} + \frac{2bc}{a^2 + bc} + \frac{2ac}{b^2 + ac}$	0,5
	Mà $\frac{a^2}{2bc} = \frac{a^2 + bc}{2bc} - \frac{1}{2}; \frac{b^2}{2ac} = \frac{b^2 + ac}{2ac} - \frac{1}{2}; \frac{c^2}{2ab} = \frac{c^2 + ab}{2ab} - \frac{1}{2}$ nên	0,5
	Với các số dương x, y ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ luôn đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.	0,25
	Áp dụng ta có: $P = \left(\frac{c^2 + ab}{2ab} + \frac{2ab}{c^2 + ab} \right) + \left(\frac{a^2 + bc}{2bc} + \frac{2bc}{a^2 + bc} \right) + \left(\frac{b^2 + ac}{2ac} + \frac{2ac}{b^2 + ac} \right) - \frac{3}{2} \geq$ $2 + 2 + 2 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$	0,5
	Kết luận : giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ca}$ bằng $\frac{9}{2}$ khi $a = b = c$	0,25

Đỉnh chính : Câu 5: $P \geq$

**SỞ GD&ĐT
LỚP 9 THPT
QUẢNG BÌNH**

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

NĂM HỌC 2012- 2013

Môn thi: Toán

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Khóa ngày 27 tháng 3 năm 2013)

SỐ BÁO DANH:.....
đề)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao

Câu 1:(2.0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}$

a) Rút gọn P .

b) Tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2:(2.0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 26m$

b) Tìm m nguyên để phương trình có hai nghiệm nguyên.

Câu 3:(3,5 điểm)

Cho tam giác ABC đều cố định nội tiếp trong đường tròn (O). Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A và cắt cung nhỏ AB tại điểm thứ hai là E ($E \neq A$). Đường thẳng d cắt hai tiếp tại B và C của đường tròn (O) lần lượt tại M và N. MC cắt BN tại F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác CAN đồng dạng với tam giác BMA, tam giác MBC đồng dạng với tam giác BCN.

b) Tứ giác BMEF là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi nhưng luôn đi qua A.

Câu 4:(1,5 điểm)

Cho a, b, c số thực dương, a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c+5}{1+a} + \frac{c+a+4}{2+b} + \frac{a+b+3}{3+c} \geq 6. \text{ Điều này thực sự xảy ra khi nào?}$$

Câu 5:(1,0 điểm)

Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $n^4 + 4^n$ là hợp số.

-----HẾT-----

**SỞ GD&ĐT
LỚP 9 THPT
QUẢNG BÌNH**

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

NĂM HỌC 2012 - 2013

Môn thi: Toán

(Khóa ngày 27 tháng 3 năm 2013)

HƯỚNG DẪN CHẤM

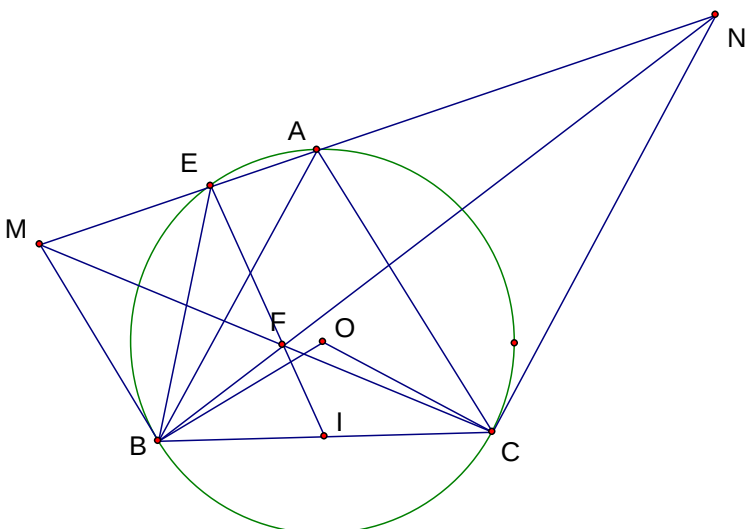
(Đáp án, hướng dẫn này có 4 trang)

yêu cầu chung

- * Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lô gic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.
- * Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu 3 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.
- * Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.
- * Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.
- * Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

Câu	Nội dung	Điểm
1	a) ĐK: $0 \leq x \neq 1$. Ta có:	1,0 điểm 0,25

	$P = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}$ $= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) + (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}$ $= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2x - 6\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}$ $= \frac{x\sqrt{x} - x + 16\sqrt{x} - 16}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + 16)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 3}$	0,25 0,25 0,25
	b) $P = \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{25}{\sqrt{x} + 3} = \sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x} + 3} - 6$ $\geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 3) \cdot \frac{25}{\sqrt{x} + 3}} - 6 = 10 - 6 = 4$ Vậy GTNN của $P = 4$ khi $\sqrt{x} + 3 = \frac{25}{\sqrt{x} + 3} \Leftrightarrow x = 4$	1,0 điểm 0,5 0,25 0,25
2	a) $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ Ta có: $\Delta' = m^2 - m + 4 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \quad \forall m$ Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m . Theo định lý Viet: $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1 x_2 = m - 4$ $x_1^3 + x_2^3 = 26m \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 26m$ $\Leftrightarrow 8m^3 - 6m(m - 4) = 26m \Leftrightarrow m(8m^2 - 6m - 2) = 0$ $\Leftrightarrow m = 0; m = 1; m = -\frac{1}{4}$	1,0 điểm 0,25 0,25 0,25 0,25

	b) Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm nguyên của phương trình. Ta có: $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1 x_2 = m - 4$. Suy ra $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 8 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 - 1 = 15 \Leftrightarrow (2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = -15$. TH1: $\begin{cases} 2x_1 - 1 = -1 \\ 2x_2 - 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow m = 4$ TH2: $\begin{cases} 2x_1 - 1 = -5 \\ 2x_2 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow m = 0$ TH3: $\begin{cases} 2x_1 - 1 = -15 \\ 2x_2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = -3$ TH4: $\begin{cases} 2x_1 - 1 = -3 \\ 2x_2 - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow m = 1$ Thử lại $m=0, m=1, m=-3, m=4$ thỏa mãn điều kiện bài toán.	1,0 điểm 0,25 0,5 0,25
3		3,5 điểm 0,5
	a) Ta có: $AC \parallel BM$ suy ra $\angle BMA = \angle CAN$ $AB \parallel CN$ suy ra $\angle BAM = \angle CNA$ Do đó tam giác CAN đồng dạng với tam giác BMA Suy ra: $\frac{MB}{AC} = \frac{AB}{NC} \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{BC}{CN}$ Mặt khác $\angle MBC = \angle BCN = 120^\circ$ Suy ra tam giác MBC đồng dạng với tam giác BCN.	0,5 0,25 0,25 0,25

	b) $\angle BFM = \angle BCM + \angle NBC = \angle BCM + \angle BMC = 180^\circ - \angle MBC = 60^\circ$ Mặt khác $\angle BEM = \angle BCA = 60^\circ$ (do t/c góc ngoài của tứ giác nội tiếp) Suy ra $\angle BFM = \angle BEM = 60^\circ$. Do đó tứ giác BMEF nội tiếp.	0,5 0,25 0,25
	c) Gọi I là giao điểm EF với BC. Ta có $\angle IBF = \angle BMF$ (câu a), suy ra IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tứ giác BMEF. Tương tự chứng minh được IC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tứ giác CNEF. Từ đó: $IB^2 = IE \cdot IF; IC^2 = IE \cdot IF \Rightarrow IB = IC$ hay I là trung điểm BC. Vậy d luôn đi qua điểm cố định là I.	0,25 0,25 0,25
4	Đặt $x = a + 1; y = b + 2; z = c + 3$. ($x, y, z > 0$) $VT = \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$ $\geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z}} + 2\sqrt{\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y}} = 6$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$, suy ra $a=3, b=2, c=1$	1,5 điểm 0,5 0,5 0,25 0,25
5	n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên n có dạng $n = 2k$ hoặc $n = 2k + 1$, với k là số tự nhiên lớn hơn 0. - Với $n = 2k$, ta có $n^4 + 4^n = (2k)^4 + 4^{2k}$ lớn hơn 2 và chia hết cho 2. Do đó $n^4 + 4^n$ là hợp số. - Với $n = 2k+1$, ta có $n^4 + 4^n = n^4 + 4^{2k} \cdot 4 = n^4 + (2 \cdot 4^k)^2 = (n^2 + 2 \cdot 4^k)^2 - (2 \cdot n \cdot 2^k)^2$ $= (n^2 + 2 \cdot 4^k - 2 \cdot n \cdot 2^k)(n^2 + 2 \cdot 4^k + 2 \cdot n \cdot 2^k)$ $= ((n - 2^k)^2 + 4^k)((n + 2^k)^2 + 4^k)$ Mỗi thừa số đều lớn hơn hoặc bằng 2. Vậy $n^4 + 4^n$ là hợp số	1,0 điểm 0,25 0,25 0,25 0,25

Ngày thi: 04/03/2015

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời

gian giao đề)

Đề thi gồm 05 câu

trong 01 trang

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} \right) : \left[\frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right]$

Với x không âm, khác 4.

a, Rút gọn A

b, Chứng minh rằng $A < 1$ với mọi x không âm, khác 4

c, Tìm x để A là số nguyên

Câu 2 (5 điểm)

Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a, $\sqrt{2x^2 + 5x + 12} + \sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 5$

b,
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ xyz = 6 \end{cases}$$

Câu 3 (2 điểm)

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2}$$

Câu 4 (7 điểm)

Cho đường tròn O, dây cung BC cố định. Điểm A trên cung nhỏ BC, A không trùng với B, C và điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Gọi H là hình chiếu của A trên đoạn thẳng BC; E, F thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường kính AA'. Chứng minh rằng:

a, Hai tam giác HEF và ABC đồng dạng với nhau

b, Hai đường thẳng HE và AC vuông góc với nhau

c, Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF là điểm cố định khi A chuyển động trên cung nhỏ BC

Câu 5 (1 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A, độ dài cạnh huyền bằng 2015. Trong tam giác ABC lấy 2031121 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm có khoảng cách không lớn hơn 1.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} \right) : \left[\frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right]$

Với x không âm, khác 4.

a, Rút gọn A

b, Chứng minh rằng $A < 1$ với mọi x không âm, khác 4

c, Tìm x để A là số nguyên

Giải

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} \right) : \left[\frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right] \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} - \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} \\ &= \left[\sqrt{x}+2 - \frac{x+2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)^2 - x - 2\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{x+4} \end{aligned}$$

b) Ta giả sử: $\frac{2\sqrt{x}}{x+4} < 1$

$$\text{Suy ra } \frac{2\sqrt{x}-x-4}{x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-2\sqrt{x}+1)-3}{x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{x}-1)^2-3}{x+4} < 0$$

Vì $-(\sqrt{x}-1)^2-3 < 0$ luôn đúng, suy ra điều phải chứng minh

Câu 2 (5 điểm)

Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a, $\sqrt{2x^2+5x+12} + \sqrt{2x^2+3x+2} = x+5$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{2x^2+5x+12}; \quad b = \sqrt{2x^2+3x+2} \Rightarrow a^2 - b^2 = 2x+10 \Rightarrow x+5 = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

Thay vào phương trình ta được:

$$a + b = \frac{a^2 - b^2}{2} \Leftrightarrow 2(a + b) - (a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow (a+b)(2 - a + b) = 0$$

vì $a + b > 0$ nên $2 - (a - b) = 0$ hay $a - b = 2$

Giải ta tìm được $x = -1$; $x = \frac{1}{7}$

$$b, \begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ xyz = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 - z \\ xy + yz + zx = 11 \\ xy = \frac{6}{z} \text{ (vì } z \neq 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{z} + z(6 - z) = 11$$

Giải ra ta có hệ phương trình có 6 nghiệm là hoán vị của (1;2;3)

Câu 3 (2 điểm)

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2}$$

$$A = \sqrt{2(x+y)^2 - xy} + \sqrt{2(y+z)^2 - yz} + \sqrt{2(z+x)^2 - zx}$$

$$\text{Ta có: } 2(x+y)^2 - xy \geq 2(x+y)^2 - \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{7}{4}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} \geq \frac{\sqrt{7}}{2}(x+y) \text{ dấu "=" xảy ra khi } x = y$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} \geq \frac{\sqrt{7}}{2}(y+z) \text{ dấu "=" xảy ra khi } y = z$$

$$\sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2} \geq \frac{\sqrt{7}}{2}(z+x) \text{ dấu "=" xảy ra khi } z = x$$

$$A = \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2}$$

$$\geq \sqrt{7}(x+y+z) = 3\sqrt{7}$$

Vậy $\min A = 3\sqrt{7}$ khi $x = y = z = 1$

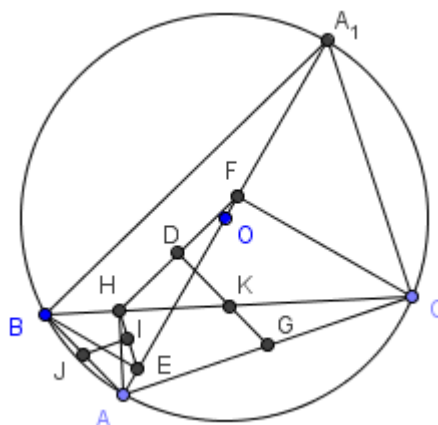
Câu 4 (7 điểm)

Cho đường tròn O , dây cung BC cố định. Điểm A trên cung nhỏ BC , A không trùng với B, C và điểm chính giữa của cung nhỏ BC . Gọi H là hình chiếu của A trên đoạn thẳng BC ; E, F thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường kính AA' . Chứng minh rằng:

a, Hai tam giác HEF và ABC đồng dạng với nhau

b, Hai đường thẳng HE và AC vuông góc với nhau

c, Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF là điểm cố định khi A chuyển động trên cung nhỏ BC



ĐỀ CHÍNH THỨC**Môn thi: Toán lớp 9**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Ngày thi 19 tháng 03 năm 2015

Câu I (3,0 điểm). Cho $x = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1)^{2015}.$$

Câu II (4,0 điểm).

1. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 1$ (m là tham số thực). Tìm m để (d) cắt

(P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB = \sqrt{10}$.

2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình

$$5x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x + 2y - 40 = 0.$$

Câu III (5,0 điểm).

1. Giải phương trình $\frac{x^3}{\sqrt{5-x^2}} + 8x^2 = 40$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 15y - 14 = 3 \cdot (2y^2 - x) \\ 4x^3 + 6xy + 15x + 3 = 0 \end{cases}$$
.

Câu IV (6,0 điểm). Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 5a$ và $AD = 2a$ ($a > 0$). M là điểm bất kì trên cạnh AB (M khác A và khác B). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AC và DC .

1. Chứng minh rằng 5 điểm B, C, K, H, M cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.

2. Tính $\frac{AH \cdot MK}{MH}$ theo a .

3. Khi AK là tiếp tuyến của đường tròn (O) . Tính AM theo a .

Câu V (2,0 điểm). Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + ac + bc = 3$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{19a+3}{1+b^2} + \frac{19b+3}{1+c^2} + \frac{19c+3}{1+a^2}$.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN CÁCH LÀM BÀI

Câu I :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3}}{\sqrt{3}+1}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Thay $x = \sqrt{2}$ vào A ta có

$$A = \left(x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 \right)^{2015} = \left(4 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} - 1 \right)^{2015} = 1^{2015} = 1$$

Câu II:

1. Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$

Ta có $\Delta = m^2 + 4$ (vì $m^2 + 4 > 0$) nên đồ thị hàm số (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt)

Theo hệ thức Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$

Gọi A ($x_1; y_1$) và B ($x_2; y_2$) là giao điểm của (P) và (d) ta có:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 \cdot (x_1 - x_2)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 10$$

$$\Rightarrow m^2 + 4 + m^2 \cdot (m^2 + 4) = 10$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 5m^2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^4 - m^2 + 6m^2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1) \cdot (m^2 + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1$$

2. Ta có

$$5x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x + 2y - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 + 4x^2 + 4xy + y^2 = 41$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 + (2x + y)^2 = 41$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 + (2x + y)^2 = 4^2 + 5^2$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x + y + 1 = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x + y + 1 = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là (2; 1).

Câu III:

1. ĐK: $5 - x^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

Ta có: $\frac{x^3}{\sqrt{5-x^2}} + 8x^2 = 40$

$$\Leftrightarrow x^3 + 8x^2 \cdot \sqrt{5-x^2} = 40 \cdot \sqrt{5-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 8 \cdot \sqrt{5-x^2} \cdot (x^2 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (2 \cdot \sqrt{5-x^2})^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 \cdot \sqrt{5-x^2}) \cdot (x^2 + 2x \cdot \sqrt{5-x^2} + 20 - 4x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 \cdot \sqrt{5-x^2}) \cdot (2x \cdot \sqrt{5-x^2} - 3x^2 - 20) = 0$$

TH1: $x - 2 \cdot \sqrt{5-x^2} = 0$ ĐK: $x > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot (5 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

TH2: $2x \cdot \sqrt{5-x^2} - 3x^2 - 20 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \sqrt{5-x^2} = 3x^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 \cdot (5 - x^2) = 9x^4 + 120x^2 + 400$$

$$\Leftrightarrow 13x^4 + 100x^2 + 400 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 15y - 14 = 3 \cdot (2y^2 - x) & (1) \\ 4x^3 + 6xy + 15x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

2. Ta có:

Ở phương trình (1) ta có:

$$x^3 - y^3 - 15y - 14 = 3 \cdot (2y^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x = y^3 + 15y + 6y^2 + 14$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 + 3y + 6$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x = (y+2)^3 + 3 \cdot (y+2)$$

$$\Leftrightarrow x = y + 2 \text{ (*)}$$

Từ (2) và (*) ta có hệ phương trình:

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\frac{-1-\sqrt[3]{5}}{2}; \frac{-5-\sqrt[3]{5}}{2}\right)$

- Xét tứ giác MHCB ta có $MHC = MBC = 90^\circ$
 $\Rightarrow MHC + MBC = 180^\circ$
 $\Rightarrow$ Tứ giác MHCB nội tiếp đường tròn đường kính MC (1).
 Xét tứ giác MKCB ta có $MKC = MBC = 90^\circ$
 $\Rightarrow MKC + MBC = 90^\circ$
 $\Rightarrow$ Tứ giác MKCB nội tiếp đường tròn đường kính MC (2).
 Từ (1) và (2) suy ra năm điểm B, C, K, H, M cùng thuộc một đường tròn đường kính MC.
 $\Rightarrow$ Tâm O là trung điểm MC.
- Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AHM$ có
 $MHM = MBC = 90^\circ$ và CAB chung
 $\Rightarrow \triangle ABC$ đồng dạng $\triangle AHM$.
 $\Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{BC}{MH}$ mà $MK = BC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{MK}{MH} \Rightarrow AB = \frac{AH \cdot MK}{MH} \text{ mà } AB = 5a$$

$$\Rightarrow \frac{AH \cdot MK}{MH} = 5a$$

3. Giả sử AK là tiếp tuyến của (O). Dễ dàng ta có tứ giác MKCB là hình chữ nhật nên O sẽ nằm trên đoạn BK.

Xét $\triangle ABK$ vuông tại K đường cao KM ta có

$$AM \cdot MB = MK^2$$

$$\Rightarrow AM \cdot (AB - AM) = AD^2$$

$$\Leftrightarrow AM \cdot 5a - AM^2 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow AM^2 - 5a \cdot AM + 4a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow AM^2 - 4a \cdot AM - a \cdot AM + 4a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow AM \cdot (AM - 4a) - a \cdot (AM - 4a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (AM - a) \cdot (AM - 4a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM = a \\ AM = 4a \end{cases}$$

Vậy $AM = 4a$ hoặc $AM = a$.

Câu V:

Áp dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$ab + ac + bc \geq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (b^2 + a^2 + c^2)}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc) \geq 3 + 2 \cdot 3$$

$$\Rightarrow (a + b + c)^2 \geq 9$$

$$\Rightarrow a + b + c \geq 3$$

$$T = \frac{19a+3}{1+b^2} + \frac{19b+3}{1+c^2} + \frac{19c+3}{1+a^2} = 16 \cdot \left(\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \right) + 3 \left(\frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2} \right)$$

$$\text{Đặt } A = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \text{ và } B = \frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2}$$

Ta lại có:

$$a) \quad a + b + c - A = a + b + c - \left(\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \right) = \frac{ab^2}{1+b^2} + \frac{bc^2}{1+c^2} + \frac{ca^2}{1+a^2} \leq \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{ac}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A \geq a + b + c - \frac{3}{2} \quad (*)$$

$$b) \quad a + b + c + 3 - B = a + b + c + 3 - \left(\frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a+ab^2-a-1+1+b^2}{1+b^2} + \frac{b+bc^2-b-1+1+c^2}{1+c^2} + \frac{c+a^2c-c-1+1+a^2}{1+a^2} \\
&= \frac{ab^2+b^2}{1+b^2} + \frac{bc^2+c^2}{1+c^2} + \frac{a^2c+a^2}{1+a^2} \leq \frac{3}{2} + \frac{a+b+c}{2} \\
&\Rightarrow B \geq a+b+c+3-\frac{3}{2}-\frac{a+b+c}{2} \\
&\Leftrightarrow B \geq \frac{a+b+c}{2} + \frac{3}{2} \quad (**)
\end{aligned}$$

Từ (*) và (**) ta có:

$$\begin{aligned}
16A+3B &\geq 16 \cdot \left(a+b+c-\frac{3}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} + \frac{3}{2}\right) \\
\Rightarrow T &\geq \frac{35}{2} \cdot (a+b+c) - \frac{39}{2} \geq 33
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 33.

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=1$.

SỞ GD&ĐT VINH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HSG LỚP 9 NĂM HỌC 2014 – 2015

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (1,5 điểm): Cho biểu thức: $A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $A = -6$.

Câu 2 (1,5 điểm): Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases}$ (với m là tham số).

a) Giải hệ phương trình trên khi $m=10$.

b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức:

$$x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$$

Câu 3 (3,0 điểm):

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{9a^3 + 3b^2 + c} + \frac{b}{9b^3 + 3c^2 + a} + \frac{c}{9c^3 + 3a^2 + b}$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x(1+x+x^2) = 4y(y-1)$.

Câu 4 (3,0 điểm): Cho đoạn thẳng AC có độ dài bằng a . Trên đoạn AC lấy điểm B sao cho $AC = 4AB$. Tia Cx vuông góc với AC tại điểm C , gọi D là một điểm bất kỳ thuộc tia Cx (D không trùng với C). Từ điểm B kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt hai đường thẳng AD và CD lần lượt tại K , E .

a) Tính giá trị $DC.CE$ theo a .

b) Xác định vị trí điểm D để tam giác BDE có diện tích nhỏ nhất.

c) Chứng minh rằng khi điểm D thay đổi trên tia Cx thì đường tròn đường kính DE luôn

có một dây cung cố định.

Câu 5 (1,0 điểm): Cho dãy gồm 2015 số: $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2014}; \frac{1}{2015}$.

Người ta biến đổi dãy nói trên bằng cách xóa đi hai số u, v bất kỳ trong dãy và viết thêm vào dãy một số có giá trị bằng $u + v + uv$ vào vị trí của u hoặc v . Cứ làm như thế đối với dãy mới thu được và sau 2014 lần biến đổi, dãy cuối cùng chỉ còn lại một số. Chứng minh rằng giá trị của số cuối cùng đó không phụ thuộc vào việc chọn các số u, v để xóa trong mỗi lần thực hiện việc biến đổi dãy, hãy tìm số cuối cùng đó.

-----Hết-----

Ghi chú: - *Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.*
- *Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

**SỞ GD&ĐT VINH
PHÚC**

**KÌ THI CHỌN HSG LỚP 9 NĂM HỌC 2014 – 2015
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN
(05 trang)**

I) Hướng dẫn chung:

1) Hướng dẫn chấm chỉ nêu một cách giải với những ý cơ bản, nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng vẫn đúng thì cho đủ số điểm từng phần như thang điểm quy định.

2) Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm sai lệch

hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện với tất cả giám khảo.

3) Điểm toàn bài tính đến **0,25** điểm. Sau khi cộng điểm toàn bài, **giữ nguyên kết quả**.

4) Với bài hình học nếu học sinh **không vẽ hình** phần nào thì **không** cho điểm phần đó.

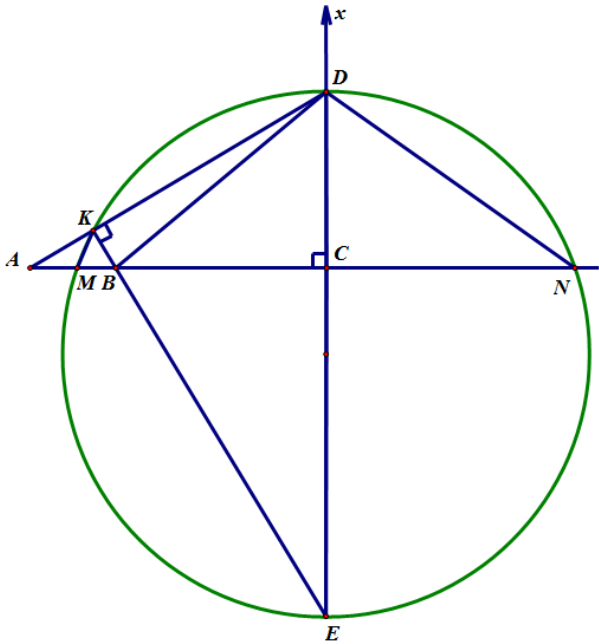
II) Đáp án và thang điểm:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
-----	--------------------	------

Câu 1 (1,5 đ)	Cho biểu thức: $A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$ a) (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức A.	
	Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2\sqrt{x} - 3 \neq 0 \\ \sqrt{x} + 3 \neq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ 2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \neq 0 \end{cases}$ Từ đó: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$	0,25
	Biến đổi: $\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 7)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1}$ $= \frac{2\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1}$	0,25
	$= \frac{2(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} = 2 - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 1}$	
	và $2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$	0,25
	Từ đó: $A = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 1} : \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 2}$	0,25
	b) (0,5 điểm) Tìm x để A = -6.	
	Biến đổi: $A = -6 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 2} = -6 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 9 = -6(\sqrt{x} - 2)$	0,25
Câu 2 (1,5 đ)	Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases}$ (với m là tham số) a) (0,5 điểm) Giải hệ phương trình trên khi m = 10.	
	Thay m = 10 ta được hệ: $\begin{cases} 10x - 2y = 2 \\ 2x + 10y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 1 \\ 2x + 10y = 5 \end{cases}$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} 50x-10y=10 \\ 2x+10y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 52x=15 \\ 2x+10y=5 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{15}{52} \\ y=\frac{5-2x}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{15}{52} \\ y=\frac{23}{52} \end{cases}$	0,25
Kết luận: với $m=10$ thì hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x=\frac{15}{52} \\ y=\frac{23}{52} \end{cases}$		
b) (1,0 điểm) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức: $x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$		
Dùng phương pháp thế, ta có:		
	$\begin{cases} mx-2y=2 \\ 2x+my=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{mx-2}{2} \\ 2x+my=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{mx-2}{2} \\ 2x+m\frac{mx-2}{2}=5 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{mx-2}{2} \\ (m^2+4)x=2m+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2m+10}{m^2+4} \\ y=\frac{5m-4}{m^2+4} \end{cases}, \forall m \in R$	0,25
Nên hệ luôn có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x=\frac{2m+10}{m^2+4} \\ y=\frac{5m-4}{m^2+4} \end{cases}, \forall m \in R$		
Thay vào hệ thức: $x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$		
Ta được: $\frac{-2014m^2 + 7m - 8050}{m^2 + 4} = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$ $\Leftrightarrow -2014m^2 + 7m - 8050 = -2015m^2 + 14m - 8056$		0,25
$\Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-6) = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=6 \end{cases}$		
Kết luận: để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức: $x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4} \text{ thì } \begin{cases} m=1 \\ m=6 \end{cases}$		0,25

Câu 3 (3,0 đ)	a) (1,5 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{9a^3 + 3b^2 + c} + \frac{b}{9b^3 + 3c^2 + a} + \frac{c}{9c^3 + 3a^2 + b}$	
	Chứng minh: $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2, \forall a, b, c, x, y, z \in R. \quad (1)$ Thật vậy: $(1) \Leftrightarrow (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) + (a^2z^2 - 2acxz + c^2z^2) + (b^2y^2 - 2bcyz + c^2z^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (by - cz)^2 \geq 0$ (đúng) $\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \begin{cases} ay = bx \\ az = cx \\ by = cz \end{cases}$	0,25
	Áp dụng BĐT (1) ta có: $(9a^3 + 3b^2 + c)(\frac{1}{9a} + \frac{1}{3} + c) \geq (a + b + c)^2 = 1$ $\text{Dấu "="} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$	0,25
	$\Rightarrow 9a^3 + 3b^2 + c \geq \frac{1}{\frac{1}{9a} + \frac{1}{3} + c}$	0,25
	$\Rightarrow \frac{a}{9a^3 + 3b^2 + c} \leq a(\frac{1}{9a} + \frac{1}{3} + c)$	
	Tương tự có: $\frac{b}{9b^3 + 3c^2 + a} \leq b(\frac{1}{9b} + \frac{1}{3} + a); \frac{c}{9c^3 + 3a^2 + b} \leq c(\frac{1}{9c} + \frac{1}{3} + b)$ $\Rightarrow P \leq 3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{a+b+c}{3} + (ab + bc + ca)$	0,25
	$\Rightarrow P \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{(a+b+c)^2}{3} = 1. \text{ Do } ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$	0,25
	Vậy $P_{\max} = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.	0,25
	b) (1,5 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x(1 + x + x^2) = 4y(y - 1)$	
	Có: $x(1 + x + x^2) = 4y(y - 1) \Leftrightarrow (x^3 + x^2) + (x + 1) = 4y^2 - 4y + 1$ $\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 1) = (2y - 1)^2 \quad (1)$	0,25

	Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2y-1)^2 > 0$, nên từ (1) $\Rightarrow x \geq 0$ và x chẵn.	0,25
	Giả sử $(x+1, x^2+1) = d \Rightarrow d$ lẻ và $x^2-1 \vdots d; x^2+1 \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d=1$	0,25
	Vì $(x+1)(x^2+1)$ là số chính phương, $(x+1, x^2+1)=1$ nên $(x+1)$ và (x^2+1) cũng là hai số chính phương.	0,25
	Do $x \geq 0 \Rightarrow x^2 < x^2+1 \leq (x+1)^2 \Rightarrow x^2+1 = (x+1)^2 \Rightarrow x=0$	0,25
	Khi $x=0$, có $(1) \Leftrightarrow 4y(y-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases}$. Vậy có hai cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(0;0), (0;1)$	0,25
Câu 4 (3,0 đ)	Cho đoạn thẳng AC có độ dài bằng a. Trên đoạn AC lấy điểm B sao cho $AC=4AB$. Tia Cx vuông góc với AC tại điểm C, gọi D là một điểm bất kỳ thuộc tia Cx (D không trùng với C). Từ điểm B kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt hai đường thẳng AD và CD lần lượt tại K, E.	
		
	a) (1,0 điểm) Tính giá trị $DC \cdot CE$ theo a.	
	Ta có: $EBC = ADC$ (Cùng bù với góc KBC); $ACD = ECB = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle ACD$ và $\triangle ECB$ đồng dạng với nhau (g-g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow DC \cdot CE = AC \cdot BC$	0,25
	Do $AB = \frac{a}{4}; BC = \frac{3a}{4} \Rightarrow DC \cdot EC = AC \cdot BC = \frac{3a^2}{4}$	0,25
	b) (1,0 điểm) Xác định vị trí điểm D để tam giác BDE có diện tích nhỏ nhất.	

	$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} BC \cdot DE \Rightarrow S_{\triangle BDE}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi DE nhỏ nhất.	0,25
	Ta có: $DE = DC + EC \geq 2\sqrt{DC \cdot EC} = 2\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a\sqrt{3}$ (Theo chứng minh phần a) $\text{Dấu "="} \Leftrightarrow DC = EC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$	0,5
	$\Rightarrow S_{(BDE)}$ nhỏ nhất bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ khi D thuộc tia Cx sao cho $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.	0,25
	c) (1,0 điểm) Chứng minh rằng khi điểm D thay đổi trên tia Cx thì đường tròn đường kính DE luôn có một dây cung cố định.	
	Gọi giao điểm của đường tròn đường kính DE với đường thẳng AC là M, N (M nằm giữa A và B) $\Rightarrow M, N$ đối xứng qua DE .	0,25
	Ta có: Hai tam giác $\triangle AKB$ và $\triangle ACD$ đồng dạng (g-g) $\Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AK \cdot AD = AC \cdot AB \quad (1)$ Hai tam giác $\triangle AKM$ và $\triangle AND$ đồng dạng (g-g) $\Rightarrow \frac{AK}{AN} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow AK \cdot AD = AM \cdot AN \quad (2)$	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $AM \cdot AN = AC \cdot AB = \frac{a^2}{4}$ $\Rightarrow \frac{a^2}{4} = (AC - MC)(AC + NC) = AC^2 - MC^2 \quad (\text{Do } MC = NC)$ $\Rightarrow MC^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow MC = NC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	0,25
	$\Rightarrow M, N$ là hai điểm cố định. Vậy đường tròn đường kính DE luôn có dây cung MN cố định.	0,25
Câu 5 (1,0 đ)	Cho dãy gồm 2015 số: $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2014}; \frac{1}{2015}$. Người ta biến đổi dãy nói trên bằng cách xóa đi hai số u, v bất kỳ trong dãy và viết thêm vào dãy một số có giá trị bằng $u + v + uv$ vào vị trí của u hoặc v. Cứ làm như thế đối với dãy mới thu được và sau 2014 lần biến đổi, dãy cuối cùng chỉ còn lại một số. Chứng minh rằng giá trị của số cuối cùng đó không phụ thuộc vào việc chọn các số u, v để xóa trong mỗi lần thực hiện việc biến đổi dãy, hãy tìm số cuối cùng đó.	
	Với hai số thực u, v bất kỳ ta luôn có:	0,25

	$(u+1)(v+1) = u+v+uv+1 = (u+v+uv)+1 \quad (*)$	
	Với dãy số thực bất kỳ $a_1; a_2; \dots; a_{2015}$, ta xét “ Tích thêm T ”: $T = (a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\dots(a_{2015}+1)$ Áp dụng cách biến đổi dãy như trong đề bài kết hợp với nhận xét (*), ta nhận thấy “Tích thêm T” không thay đổi với mọi dãy thu được.	0,25
	Với dãy đã cho ban đầu của bài toán, “ Tích thêm T ”: $T = \left(\frac{1}{1}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{4}+1\right)\dots\left(\frac{1}{2015}+1\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{2015}{2014} \cdot \frac{2016}{2015} = 2016$	0,25
	Giả sử sau 2014 lần biến đổi tùy ý theo yêu cầu, dãy còn lại chỉ còn một số là x thì “ Tích thêm T ” đối với dãy cuối là: $T = x+1$ Vậy ta có: $x+1 = 2016 \Rightarrow x = 2015$ Bài toán được giải quyết; và sau 2014 lần biến đổi dãy theo đúng yêu cầu của bài toán ta thu được số 2015.	0,25

-----Hết-----

**PHÒNG GD&ĐT
TP. BẮC GIANG**

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2017-2018**

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 150 phút

Thi ngày 14 tháng 1 năm 2018

Bài 1: (5 điểm)

a/ Cho biểu thức $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

b/ Cho a, b, c > 0 thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính $H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$

Bài 2: (4 điểm)

a/ Giải phương trình $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$

b/ Tìm số thực x để 3 số $x - \sqrt{3}; x^2 + 2\sqrt{3}; x - \frac{2}{x}$ là số nguyên

Bài 3: (4 điểm)

a/ Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương

b/ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq xyz$

Bài 4: (6 điểm)

Cho đoạn thẳng $OA=R$, vẽ đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy H bất kỳ sao cho $AH < R$, qua H vẽ đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$. Trên đường thẳng a lấy B và C sao cho H nằm giữa B và C và $AB=AC=R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M \in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N \in OC$)

a/ Chứng minh $OM \cdot OB = ON \cdot OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định

b/ Chứng minh $OB \cdot OC = 2R^2$

c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi

(chú ý: dùng kiến thức học kỳ 1 lớp 9)

Bài 5: (1 điểm)

cho dãy số $n, n+1, n+2, \dots, 2n$ với n nguyên dương. Chứng minh trong dãy có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

Họ tên thí

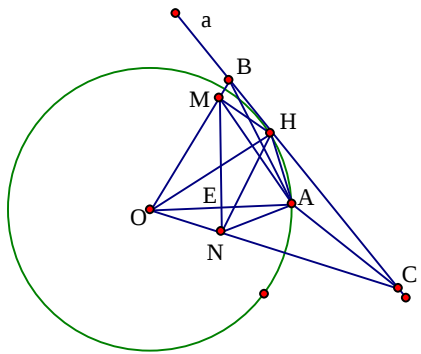
sinh.....SBD:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2017-2018
MÔN: TOÁN LỚP 9 (BẢNG A)

Câu	Nội Dung	Điểm
Bài 1		5 đ
a/ 3đ	a/ Cho biểu thức $M = \left(\frac{x + 2\sqrt{x} + 4}{x\sqrt{x} - 8} + \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x - 1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x} + 10}{x + 6\sqrt{x} + 5} \right)$ Rút gọn M và tìm x để $M > 1$ * $M = \left(\frac{x + 2\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} + 4)} + \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2(\sqrt{x} + 5)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 5)} \right)$ $= \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \right)$	0,5

	$= \frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$ $= \frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} \cdot \frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$ $= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} \cdot \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ Vậy M = $\frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ với $x \geq 0; x \neq 1, 3, 4$ *M < 1 $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0$ Ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4$. Vậy M > 1 khi $1 < x < 4$ và $x \neq 3$	0,5 0,25 0,5 0,25 0,5 0,5
b/ 2 đ	b/Cho a, b, c > 0 thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính H = $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$ - Vì $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$ nên $1+c = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + c = \dots = (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$ - Tương tự ta có $1+a = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c}); 1+b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$ - Vậy $H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})}$ $= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{c})-(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{b}+\sqrt{c})-(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$ $= \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = 0$	0,5 0,5 1,0
Bài 2		4,0đ
a/ 2,0đ	Giải phương trình $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}} = 6x^2$ ĐK: $x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}}$ Vì $x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow \frac{5}{x^2} > 0; 6x^2-1 > 0$, theo côsi ta có $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}} = \sqrt{\frac{5}{x^2}(6x^2-1)} \leq \frac{\frac{5}{x^2} + (6x^2-1)}{2}$	0,5

	Dấu = có khi $\frac{5}{x^2} = 6x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ Vì $x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow 6x^2 - \frac{5}{x^2} \geq 0$, theo côsi ta có $\sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = \sqrt{(6x^2 - \frac{5}{x^2}) \cdot 1} \leq \frac{(6x^2 - \frac{5}{x^2}) + 1}{2}$ Dấu = có khi $6x^2 - \frac{5}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ Vậy ta có $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} \leq \frac{\frac{5}{x^2} + 6x^2 - 1 + 6x^2 - \frac{5}{x^2} + 1}{2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} \leq 6x^2$ Dấu = có khi $\Leftrightarrow x = \pm 1$ Vậy $x = \pm 1$ là nghiệm phương trình $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$	0,5 0,5 0,5
b/ 2,0đ	Tìm số thực x để 3 số $x - \sqrt{3}; x^2 + 2\sqrt{3}; x - \frac{2}{x}$ là số nguyên Đặt $a = x - \sqrt{3}; b = x^2 + 2\sqrt{3}; c = x - \frac{2}{x}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ Từ $a = x - \sqrt{3} \Rightarrow x = a + \sqrt{3}$; từ $b = x^2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = b - 2\sqrt{3}$, nên ta có $(a + \sqrt{3})^2 = b - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 + 2\sqrt{3}a + 3 = b - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(a + 1) = b - a^2 - 3$ -Nếu $a + 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -1 \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{b - a^2 - 3}{a + 1}$, vì $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{b - a^2 - 3}{a + 1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ VL Vậy $a + 1 = 0$ nên ta có $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ b - a^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1$ Với $x = \sqrt{3} - 1$ ta có $a = -1; b = 4$ và $c = -2$ nguyên, thỏa mãn đầu bài	0,75 0,5 0,5 0,25
Bài 3		4,0 đ
a/ 2,0đ	a/ Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương Vì $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$ Ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = \dots = (x + 2)(4x^2 + 6x - 3)$ nên ta có $(x + 2)(4x^2 + 6x - 3) = k^2$ Đặt $(x + 2, 4x^2 + 6x - 3) = d$ với $d \in \mathbb{N}^*$ Ta có $x + 2 : d \Rightarrow (x + 2)(4x - 2) : d \Rightarrow 4x + 6x - 4 : d$ Ta lại có $4x^2 + 6x - 3 : d \Rightarrow (4x^2 + 6x - 3) - (4x^2 + 6x - 4) = 1 : d \Rightarrow d = 1$ Vậy $(x + 2, 4x^2 + 6x - 3) = 1$ mà $(x + 2)(4x^2 + 6x - 3) = k^2$ nên ta có $x + 2$ và $4x^2 + 6x - 3$ là số chính phương $\Rightarrow x + 2 = a^2$ và $4x^2 + 6x - 3 = b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$	0,5 0,5 0,75

	Vì $x > 0$ nên ta có $4x^2 < b^2 < 4x^2 + 12x + 9 \Leftrightarrow (2x)^2 < b^2 < (2x+3)^2$ Vì b lẻ nên $b^2 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 3 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x = 2$ Với $x=2$ ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = 100 = 10^2$ là số chính phương	0,25
b/ 2,0đ	b/ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng: $\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$ Từ Gt suy ra: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$. Nên ta có: $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow y = z$ Vậy $\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$. Tương tự ta có $\frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z}\right); \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}\right)$ Vậy ta có $\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \leq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow x = y = z$ Ta có $(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = \dots = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2] \geq 0$ Nên $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ $\Rightarrow (xyz)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow 3\frac{xy+yz+zx}{xyz} \leq xyz \Rightarrow 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq xyz$ Vậy $\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz; "=" \Leftrightarrow x = y = z$	0,5 0,5 0,25 0,5 0,25
Bài 4		6 đ
		

a/ 3đ	a/ Chứng minh $OM \cdot OB = ON \cdot OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định *Ta có $OH \perp HB$ (t/c tiếp tuyến) $\Rightarrow \triangle OHB$ vuông tại H, mà $HM \perp OB$ (gt) nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$ Chứng minh tương tự ta có $ON \cdot OC = OH^2 = R^2$. Vậy ta có $OM \cdot OB = ON \cdot OC$ * Ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$ mà $OA=R$ nên ta có $OM \cdot OB = OA^2 \Rightarrow \frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OB}$ Xét $\triangle OMA$ và $\triangle OAB$ có O chung, có $\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \triangle OMA \sim \triangle OAB \Rightarrow \angle OAM = \angle OBA$. Ta có $AO=AB=R$ (gt) $\Rightarrow \triangle OAB$ cân $\Rightarrow \angle AOB = \angle OBA \Rightarrow \angle AOM = \angle OBA$, vậy $\angle OAM = \angle AOM \Rightarrow \triangle OMA$ cân $\Rightarrow MO = MA$ Chứng minh tương tự ta có $\triangle ONA$ cân $\Rightarrow NO = NA$ Ta có $MO = MA$; $NO = NA$, vậy MN là trung trực của OA, gọi E là giao điểm của MN với OA ta có $EO=EA=\frac{OA}{2}$ và $MN \perp OA$ tại E, mà O, A cố định nên E cố định. Vậy MN luôn đi qua 1 điểm cố định	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
b/ 1,5đ	b/ Chứng minh $OB \cdot OC = 2R^2$ Ta có $OM \cdot OB = ON \cdot OC \Rightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{ON}{OB}$ Xét $\triangle OMN$ và $\triangle OCB$ có O chung, có $\frac{OM}{OC} = \frac{ON}{OB} \Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle OCB$, mà $OE \perp MN$ và $OH \perp BC$ nên ta có $\frac{OM}{OC} = \frac{OE}{OH} \Rightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{OE}{OA} = \frac{OE}{2OE} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}OC$ (vì $OH=OA=2OE$) Ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$ (cm trên) $\Rightarrow \frac{1}{2}OC \cdot OB = R^2 \Rightarrow OC \cdot OB = 2R^2$	0,5 0,5 0,5
c/ 1,5đ	c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi Ta có $\triangle OMN \sim \triangle OCB$ (cm trên) $\Rightarrow \frac{S_{OMN}}{S_{OCB}} = \frac{OE^2}{OH^2} = \frac{OE^2}{OA^2} = \frac{OE^2}{(2OE)^2} = \frac{1}{4}$ Nên $S_{OMN} = \frac{1}{4}S_{OCB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot OH \cdot BC = \frac{1}{8}R \cdot BC \leq \frac{1}{8}R(AB + AC) = \frac{1}{8}R(R + R) = \frac{1}{4}R^2$ Dấu bằng có khi B, A, C thẳng hàng $\Leftrightarrow H \equiv A$ Vậy diện tích tam giác OMN lớn nhất là $S_{OMN} = \frac{1}{4}R^2$ khi $H \equiv A$	0,5 0,75 0,25
Bài 5		1đ
	-Nếu n là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên bài toán chứng minh xong -Nếu n không là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên, ta luôn tìm được 1 số nguyên dương k sao cho $k^2 < n < (k+1)^2$. Vì n nguyên dương và $n > k^2 \Rightarrow n \geq k^2 + 1$, vậy ta có: $2n - (k+1)^2 \geq 2(k^2 + 1) - (k+1)^2 = \dots = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0$	0,25 0,5 0,25

	Vậy mọi k nguyên dương, nên ta có $k^2 < n < (k+1)^2 \leq 2n$ Vậy trong dãy luôn có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.	
--	--	--

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2015-2016

Môn: TOÁN – Lớp 9

ĐỀ CHÍNH

Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1. (3,0 điểm)

1. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sqrt{5+\sqrt{3}} + \sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$. Tính giá trị của $S = \frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$.

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Giải phương trình $2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} - \sqrt{5x+11} = 0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - y(\sqrt{x-1} + 1) + \sqrt{x-1} = 0 \\ x^2 + y - \sqrt{7x^2 - 3} = 0. \end{cases}$

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy - x - y = 1$.

2. Chứng minh với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}} < 3$.

Câu 4. (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $ABD = ACB$. Đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DIC tại điểm thứ hai là E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q . Đường thẳng đi qua E và song song với AB cắt BD tại P .

1. Chứng minh tam giác QBI cân;

2. Chứng minh $BP \cdot BI = BE \cdot BQ$;

3. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD , K là trung điểm của JE . Chứng minh $PK \parallel JB$.

Câu 5. (2,0 điểm) Cho một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tổ chức một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:.....Họ, tên chữ ký

GT1:.....

Số báo danh:..... Họ, tên chữ ký

GT2:.....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM THI
KỲ THI CHỌN HSG NĂM HỌC 2015-2016

ĐỀ CHÍNH

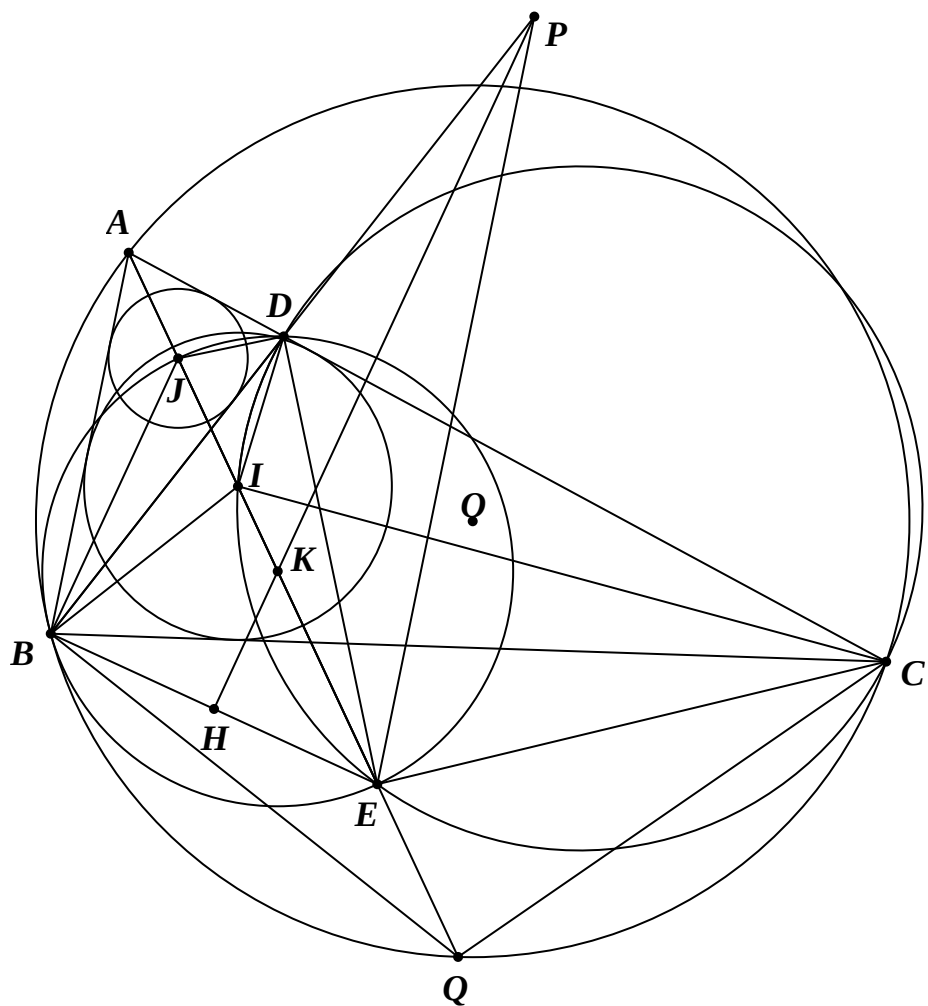
Môn: TOÁN – Lớp 9

Câu	Đáp án	Điểm
1.1 (1,5)	Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sqrt{5+\sqrt{3}} + \sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}.$	
	Đặt $M = \frac{\sqrt{5+\sqrt{3}} + \sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}$. Ta có $M^2 = \frac{10+2\sqrt{22}}{5+\sqrt{22}} = 2$	0,5
	$\Rightarrow M = \sqrt{2}$ (Do $M > 0$)	0,25
	$\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2}$	0,5
	Suy ra $P = 3$	0,25
1.2 (1,5)	Cho các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2,$ $x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$. Tính giá trị của $S = \frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}.$	
	Ta có $xy+z-1 = xy-x-y+1 = (x-1)(y-1)$	0,5
	Tương tự $yz+x-1 = (y-1)(z-1)$ và $zx+y-1 = (z-1)(x-1)$	0,25

	$\text{Suy ra } S = \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} = \frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$ $= \frac{-1}{xyz - (xy + yz + zx) + (x + y + z) - 1} = \frac{1}{xy + yz + zx}$	0,25
	Ta có $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx = -7$	0,25
	Suy ra $S = -\frac{1}{7}$	0,25
2.1 (2,0)	Giải phương trình $2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} - \sqrt{5x+11} = 0$.	
	Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$	0,5
	$2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} - \sqrt{5x+11} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{5x+11}$	
	$\Leftrightarrow 9x-1+4\sqrt{2x^2+5x-3} = 5x+11 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x-3} = 3-x$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 2x^2+5x-3=9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2+11x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-12 \end{cases}$	0,5
	Đối chiếu điều kiện ta được $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.	0,5
2.2 (3,0)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - y(\sqrt{x-1}+1) + \sqrt{x-1} = 0 & (1) \\ x^2 + y - \sqrt{7x^2-3} = 0 & (2) \end{cases}$	
	Điều kiện $x \geq 1, y \in \mathbb{R}$ $y^2 - y(\sqrt{x-1}+1) + \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - \sqrt{x-1}(y-1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-\sqrt{x-1}) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=\sqrt{x-1} \end{cases}$	0,5
	Với $y=1$, thay vào (2) ta được $x^2 + 1 - \sqrt{7x^2-3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = \sqrt{7x^2-3} \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 7x^2 - 3$ $\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (do điều kiện của } x)$	0,5
	Với $y = \sqrt{x-1}$, thay vào (2) ta được $x^2 + \sqrt{x-1} - \sqrt{7x^2-3} = 0$	0,5

	$\Leftrightarrow (x^2 - 4) + (\sqrt{x-1} - 1) - (\sqrt{7x^2 - 3} - 5) = 0$ $\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x-2)(x+2)}{\sqrt{7x^2 - 3} + 5} = 0$																								
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x+2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2 - 3} + 5} = 0 \end{cases}$	0,25																							
	Với $x = 2$ suy ra $y = 1$.	0,5																							
	Ta có $x+2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2 - 3} + 5} = (x+2)\left(1 - \frac{7}{\sqrt{7x^2 - 3} + 5}\right) + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$ $= (x+2)\frac{\sqrt{7x^2 - 3} - 2}{\sqrt{7x^2 - 3} + 5} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$ Với $x \geq 1$ thì $\sqrt{7x^2 - 3} - 2 \geq 0 \Rightarrow (x+2)\frac{\sqrt{7x^2 - 3} - 2}{\sqrt{7x^2 - 3} + 5} \geq 0$ Suy ra $(x+2)\frac{\sqrt{7x^2 - 3} - 2}{\sqrt{7x^2 - 3} + 5} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} > 0$	0,5																							
	Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(1;1), (2;1)$.	0,25																							
3.1 (2,0)	Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy - x - y = 1$.																								
	Ta có $x^2 + y^2 + xy - x - y = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$	0,75																							
	Ta có bảng giá trị tương ứng (học sinh có thể xét từng trường hợp) <table><tr><th>$x+y$</th><th>$x-1$</th><th>$y-1$</th><th>Nghiệm $(x; y)$</th></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>$(1;1)$</td></tr><tr><td>-2</td><td>0</td><td>0</td><td>Loại</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>Loại</td></tr><tr><td>0</td><td>-2</td><td>0</td><td>$(-1;1)$</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>Loại</td></tr></table>	$x+y$	$x-1$	$y-1$	Nghiệm $(x; y)$	2	0	0	$(1;1)$	-2	0	0	Loại	0	2	0	Loại	0	-2	0	$(-1;1)$	0	0	2	Loại
$x+y$	$x-1$	$y-1$	Nghiệm $(x; y)$																						
2	0	0	$(1;1)$																						
-2	0	0	Loại																						
0	2	0	Loại																						
0	-2	0	$(-1;1)$																						
0	0	2	Loại																						

		0	0	-2	(1;-1)	
	Vậy các số $(x; y)$ cần tìm là $(1;1), (-1;1), (1;-1)$					0,25
3.2 (1,0)	Chứng minh với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{(n-1)}\sqrt{n}}}} < 3$.					
	Với mỗi số nguyên dương k ta có $k = \sqrt{k^2} = \sqrt{1+(k^2-1)} = \sqrt{1+(k-1)(k+1)}$.					0,25
	Sử dụng đẳng thức trên liên tiếp với $k = 3, 4, \dots, n$ ta được $3 = \sqrt{1+2.4} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3.5}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4.6}}} = \dots$ $= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots\sqrt{1+(n-1)(n+1)}}}}$					0,5
	$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots\sqrt{1+(n-1)}\sqrt{(n+1)^2}}} > \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{(n-1)}\sqrt{n}}}}$					0,25
	Ta có điều phải chứng minh.					
4 (7,0)	Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $ABD = ACB$. Đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DIC tại điểm thứ hai là E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q. Đường thẳng đi qua E và song song với AB cắt BD tại P. 4. Chứng minh tam giác QBI cân; 5. Chứng minh $BP.BI = BE.BQ$; 6. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD, K là trung điểm của JE. Chứng minh $PK // JB$.					



4.1 (2,0)	Ta có AI là phân giác của BAC nên Q là điểm chính giữa của cung BC của (O). Suy ra $BAQ = QAC = QBC$	1,0
	$IBQ = IBC + QBC = IBA + BAQ = BIQ$ Hay tam giác QBI cân tại Q.	1,0
4.2 (3,0)	Tam giác ABD đồng dạng tam giác ACB Suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$ hay $AB^2 = AD.AC$ (1).	0,5
	Tam giác ADI đồng dạng tam giác AEC (có góc A chung và $AID = ACE$) Suy ra $\frac{AD}{AE} = \frac{AI}{AC}$ hay $AI.AE = AD.AC$ (2).	0,5

	Từ (1) và (2) suy ra $AI.AE = AB^2$, suy ra tam giác ABI đồng dạng tam giác AEB. Suy ra $AEB = ABI = \frac{ABC}{2}$	0,5
	Ta có $AEP = BAE = \frac{BAC}{2}$ (hai góc so le trong), suy ra $BEP = \frac{ABC + BAC}{2}$.	0,5
	Theo a) ta có $BIQ = \frac{BAC + ABC}{2}$ suy ra $BIQ = BEP$	0,25
	Ta có $BPE = ABD = ACB = BQI$	0,25
	Suy ra hai tam giác PBE và QBI đồng dạng, suy ra $\frac{BP}{BQ} = \frac{BE}{BI} \Leftrightarrow BP.BI = BE.BQ$, ta có điều phải chứng minh.	0,5
4.3 (2,0)	Tam giác BQI đồng dạng tam giác BPE và tam giác BQI cân tại Q nên tam giác PBE cân tại P, suy ra $PBE = \frac{BAC + ABC}{2}$ và $PH \perp BE$ với H là trung điểm của BE.	0,5
	Do HK là đường trung bình của tam giác EBJ nên $HK // BJ$	0,5
	Ta có $JBD = \frac{ACB}{2}$ và $DBE = \frac{BAC + ABC}{2}$, suy ra $JBE = 90^\circ$ hay JB vuông góc BE .	0,75
	Suy ra $PH // JB$, suy ra P, H, K thẳng hàng hay $PK // JB$.	0,25
5 (2,0)	Cho một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tổ chức một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh.	
	Giả sử tất cả các câu lạc bộ đều có không quá 8 học sinh. Gọi N là số câu lạc bộ có hơn 1 học sinh. Nếu $N > 4$, từ 5 trong số các câu lạc bộ này, chọn mỗi câu lạc bộ 2 học sinh, khi đó 10 học sinh này không thỏa mãn điều kiện bài toán.	0,5

Nếu $N < 4$, khi đó số học sinh tham gia các câu lạc bộ này không quá $3.8 = 24$, nghĩa là còn ít nhất $35 - 24 = 11$ học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh. Chọn 10 học sinh trong số này, không thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy $N = 4$.	0,5
Số học sinh tham gia 4 câu lạc bộ này không quá $4.8 = 32$, nghĩa là còn ít nhất 3 học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh.	0,5
Chọn 2 trong số học sinh này và mỗi câu lạc bộ trên chọn 2 học sinh, khi đó 10 học sinh không thỏa mãn điều kiện.	0,25
Vậy điều giả sử sai, nghĩa là tồn tại một câu lạc bộ có ít nhất 9 học sinh tham gia.	0,25

Ghi chú: Các cách giải khác với đáp án mà đúng và phù hợp với chương trình, thì giám khảo thống nhất chia điểm thành phần tương ứng.

-----HẾT-----

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LẠNG SƠN**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 – 2018**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán 9 THCS

Thời gian: 150 phút

Ngày thi: 05/4/2018

(Đề thi gồm 01 trang, 05 câu)

Câu 1 (4,0 điểm). Cho biểu thức:

$$A = \frac{x\sqrt{x} - x - 4\sqrt{x} + 4}{2 - 3\sqrt{x} + x\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} - 4}{2 + 3\sqrt{x} - x\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4.$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2} - 1}$.

Câu 2 (4,0 điểm). Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}.$$

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình: $x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x - 1} = 0$.

b) Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Biết $f(2017).f(2018) = 2019$.
 Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AC > AB$ nội tiếp đường tròn (O) .
 Kẻ phân giác trong AI của tam giác ABC ($I \in BC$) cắt (O) ở E . Tại E và C kẻ hai
 tiếp tuyến với (O) cắt nhau ở F , AE cắt CF tại N , AB cắt CE tại M .

a) Chứng minh tứ giác $AMNC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\frac{1}{CN} + \frac{1}{CI} = \frac{1}{CF}$.

c) Gọi AD là trung tuyến của tam giác ABC , kẻ $DK \parallel AI$ ($K \in AC$). Chứng
 minh $2AK = AC - AB$.

Câu 5 (2,0 điểm). Trường trung học phổ thông A tổ chức giải bóng đá cho học sinh
 nhân ngày thành lập đoàn 26 – 3 . Biết rằng có n đội tham gia thi đấu vòng tròn
 một lượt (hai đội bất kỳ đấu với nhau đúng một trận). Đội thắng được 3 điểm, đội
 hòa được 1 điểm và đội thua không được điểm nào. Kết thúc giải, ban tổ chức nhận
 thấy số trận thắng thua gấp bốn lần số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 336.
 Hỏi có tất cả bao nhiêu đội bóng tham gia?

-----Hết-----

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
 TẠO
 LẠNG SƠN**

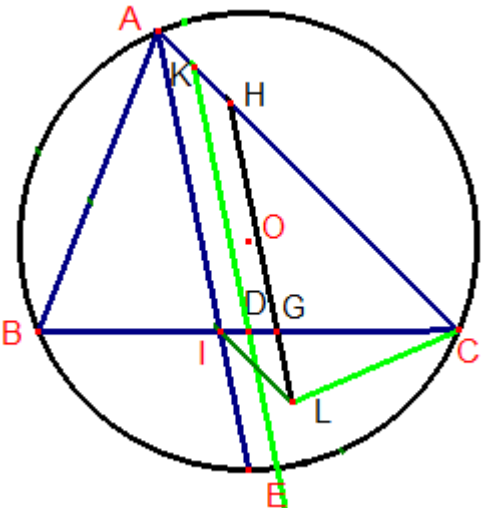
**ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP
 TỈNH
 LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 – 2018**

Câu	Nội dung	Điểm
1a	Đặt $t = \sqrt{x}$, $t \geq 0, t \neq 1, t \neq 2$ khi đó: $\Rightarrow A = \frac{t^3 - t^2 - 4t + 4}{2 - 3t + t^3} - \frac{t^3 + t^2 - 4t - 4}{2 + 3t - t^3}$	
	$\Rightarrow A = \frac{(t-1)(t-2)(t+2)}{(t-1)(t-1)(t+2)} - \frac{(t+1)(t-2)(t+2)}{(t+1)(t+1)(2-t)}$	
	$\Rightarrow A = \frac{t-2}{t-1} + \frac{t+2}{t+1} = \frac{2t^2 - 4}{t^2 - 1} = 2 - \frac{2}{t^2 - 1}$	
	$\Rightarrow A = 2 - \frac{2}{x-1}$	
1b	$x = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{2} - 1}$	
	$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$	

	Do đó: $A = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}+1-1} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$	
2a	phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có $a + b + c = 0$ nên có hai nghiệm: $x_1 = 1, x_2 = 2m - 1$. Chứng tỏ PT luôn có nghiệm $\forall m$ (hoặc tính theo Δ để biện luận)	
2b	Do PT luôn có nghiệm nên theo ĐL Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = 2m, x_1 \cdot x_2 = 2m - 1$	
	Suy ra: $B = \frac{2(2m-1)+3}{(x_1+x_2)^2+2} = \frac{4m+1}{4m^2+2}$	
	Nhận thấy rằng mẫu số của B luôn dương, do đó để B nhỏ nhất thì ta chỉ xét $4m+1 < 0$ hay $m < -1/4$, đặt $-t = m + 1/4 < 0$, (nên $t > 0$)	
	Vậy $m = -t - 1/4$ thay vào B, ta được: $B = \frac{4(-t-1/4)+1}{4(-t-1/4)^2+2} = \frac{-4t}{4t^2+2t+9/4}$	
	Để B nhỏ nhất thì $C = \frac{4t}{4t^2+2t+9/4}$ phải lớn nhất, $C > 0$ Để C lớn nhất thì $D = \frac{4t^2+2t+9/4}{4t} = t + \frac{1}{2} + \frac{9}{16t}$ nhỏ nhất	
	Áp dụng BĐT Cô si: $D = \left(t + \frac{9}{16t}\right) + \frac{1}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{t \cdot \frac{9}{16t}} + \frac{1}{2} = 2$	
	Dấu = xảy ra khi $t = \frac{9}{16t} \Rightarrow t = \frac{3}{4}$ khi đó $m = -1$, vậy $\min B = -1/2$ khi $m = -1$	
3a	ĐK: $x \geq \frac{1}{3}$	
	$x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (3x-1) - x + \sqrt{3x-1} = 0$	
	Đặt $t = \sqrt{3x-1} \geq 0$ ta được: $x^2 - t^2 - x + t = 0$	
	$\Leftrightarrow (x-t)(x+t) - (x-t) = 0 \Leftrightarrow (x-t)(x+t-1) = 0$	
	Với TH $x-t=0$ hay $x = \sqrt{3x-1} \Leftrightarrow x^2 = 3x-1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ t/m	
	Với TH $x+t-1=0$ hay $t = 1-x \Rightarrow \sqrt{3x-1} = 1-x$, ĐK: $x \leq 1$	
	$\Rightarrow 3x-1 = 1-2x+x^2 \Rightarrow x = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ t/m (loại $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$)	

	Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$	
3b	Từ giả thiết ta có $f(2017), f(2018)$ là các số nguyên và $x = 2017, x = 2018$ không là nghiệm của PT $f(x) = 0$	
	Giả sử PT $f(x) = 0$ có nghiệm nguyên là $x = a \in \mathbb{Z}$, theo định lý Bô- zu: $f(x) = (x - a).g(x)$ với $g(x)$ là đa thức hệ số nguyên không nhận $x = 2017, x = 2018$ làm nghiệm	
	Do vậy: $f(2017) = (2017 - a).g(2017), f(2018) = (2018 - a).g(2018)$	
	Nhân vế với vế và áp dụng giả thiết $f(2017).f(2018) = 2019$: $2019 = (2017 - a).g(2017).(2018 - a).g(2018)$	
	Điều này là vô lý vì vế trái là số lẻ, còn vế phải là số chẵn ($(2017 - a); (2018 - a)$ là 2 số nguyên liên tiếp, tích là số chẵn)	
	Vậy $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên (đpcm)	
	GV có thể mở rộng cho HS: - Số 2017 và 2018 có thể thay bởi bất cứ số nguyên nào miễn sao có 1 số chẵn và 1 số lẻ. Số 2019 có thể thay bằng 1 số nguyên lẻ bất kỳ. - Liệu có tìm được đa thức nào hệ số nguyên thỏa mãn giả thiết $f(2017).f(2018) = 2019$? - Đa số chứng minh phương trình không có nghiệm đều sử dụng phương pháp phản chứng (dựa vào chia hết, số tận cùng ...)	

4a	Do AI là phân giác nên $BE = CE$, theo tính chất góc ngoài đường tròn, ta có : $AMC = AC - BE = AC - CE = ANC$ Vậy tứ giác $AMNC$ nội tiếp	
4b	Do hai tứ giác $AMNC$ và $ABEC$ nội tiếp, nên ta có các góc trong bằng nhau: $A_1 = C_1; A_1 = C_2; A_2 = M_2$ Suy ra : $BC // MN // EF$, $\triangle CMN$ cân tại N Xét tam giác CIN có CE là phân giác và $EF // IC$ nên ta có các tỉ số $\frac{EN}{EI} = \frac{CN}{CI} ; \frac{EN}{EI} = \frac{FN}{FC} \Rightarrow \frac{CN}{CI} = \frac{FN}{FC}$ $\Rightarrow \frac{CN}{CI} = \frac{CN - CF}{FC} \Rightarrow \frac{CN}{CI} = \frac{CN}{FC} - 1$ Chuyển vế : $\frac{CN}{CI} + 1 = \frac{CN}{FC}$, chia 2 vế cho CN ta có điều phải chứng minh	

4c		
	Gọi H thuộc AC sao cho K là trung điểm của AH , Kẻ $HG \parallel AI$ với G thuộc BC , trên HG lấy điểm L sao cho $CG = CL$ ($\triangle CLG$ cân)	
	Từ $AI \parallel DK \parallel HG$ và K là trung điểm của AH nên $DI = DG$, theo giả thiết $DB = DC$ nên $BI = GC$ vậy $BI = CL$	
	$AI \parallel HL$ nên $BAI = IAC = LHC$, và $BIA = EIC = LGC = HLC$ (so le và đồng vị)	
	Xét hai tam giác AIB và HLC có hai góc bằng nhau nên góc còn lại bằng nhau, có 1 cạnh bằng nhau $BI = CL$ nên $\triangle AIB = \triangle HLC$ g.c.g	
	Vậy $AB = HC$	
	Mặt khác $HC = AC - AH = AC - 2AK$	
	Nên $AB = AC - 2AK \Rightarrow 2AK = AC - AB$ đpcm	
5	Gọi số trận hòa là x ($x \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow$ tổng số điểm của các trận hòa là $2x$, (1 trận hòa có 2 đội, mỗi đội được 1 điểm)	
	Theo giả thiết số trận thắng là $4x \Rightarrow$ tổng số điểm của các trận thắng là $12x$	
	Tổng số điểm các đội là $336 \Rightarrow 2x + 12x = 336 \Rightarrow x = 24$ Vậy ta có tất cả $24 + 4.24 = 120$ trận đấu diễn ra	
	Từ giả thiết có n đội, mỗi đội đấu với $n - 1$ đội còn lại nên số trận đấu diễn ra là $n(n - 1)$, nhưng đây là tính cả trận lượt đi và lượt về, giả thiết mỗi đội đấu với nhau đúng 1 lần nên tổng số trận giảm đi một nửa, do đó có tất cả $\frac{n(n - 1)}{2}$ trận đấu	
	Vậy $\frac{n(n - 1)}{2} = 120 \Rightarrow n(n - 1) = 240 \Rightarrow n = 16$, ($n = -15$ loại)	
	KL : có tất cả 16 đội bóng tham gia.	

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ YÊN**

**KỲ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH
LỚP 9 THCS, NĂM HỌC 2015-2016
Môn TOÁN**

Ngày thi : 02/3/2016

Thời gian : 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (4,00 điểm) Cho biểu thức:

$$p = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})(\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}).$$

- a) Rút gọn biểu thức P
- b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$.

Câu 2. (4.50 điểm) Giải phương trình $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$.

Câu 3. (4,00 điểm) Cho ba số không âm x,y,z thỏa mãn $\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+2z} = 2$.

Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{1}{64}$.

Câu 4. (2.50 điểm) Cho hình bình hành ABCD có $\hat{A} < 90^\circ$. Dựng các tam giác vuông cân tại A là BAM và DAN (B và N cùng nửa mặt phẳng bờ AD, D và M cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng AC vuông góc với MN.

Câu 5 (5.00 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, G là trọng tâm. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt CG tại M. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt BG tại N. Gọi X, Y theo thứ tự là giao điểm của CN, AN và đường thẳng qua B song song với AC; Z, T theo thứ tự là giao điểm của BM, AM và đường thẳng qua C song song với AB. Chứng minh rằng :

- a). $AB.CZ = AC.BX$.
- b) $M\hat{A}B = N\hat{A}C$.

-----Hết-----

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm

ĐÁP ÁN

Câu 1. (4,00 điểm) Cho biểu thức:

$$p = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right).$$

a) Rút gọn biểu thức P

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{a^3}-1^3}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{\sqrt{a^3}+1^3}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} + \left(\frac{\sqrt{a^2}-1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} - \frac{(2+\sqrt{a})(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}\right). \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} + \frac{a-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{3a+3\sqrt{a}-2\sqrt{a}+2-a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} - \frac{(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} + \frac{a-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2a+2\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2(a+\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= 2 + \frac{2(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{2\sqrt{a}+2a+2\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}} \\ &= 2\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + 4 \end{aligned}$$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$.

Ta có $2\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}}} = 4$ vậy $p \geq 8$ hay $p > 6$ (đpcm).

Câu 2.(4.50 điểm) Giải phương trình

$$\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3.$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1})(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2\sqrt{x^2 - x + 1}) = (9x - 3)(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2\sqrt{x^2 - x + 1})$$

$$\Leftrightarrow 9x - 3 = (9x - 3)(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2\sqrt{x^2 - x + 1})$$

$$\Leftrightarrow (9x - 3)(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Ta dễ chứng minh được phương trình $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 = 0$ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$

Câu 3. (4,00 điểm) Cho ba số không âm x,y,z thỏa mãn $\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+2z} = 2$.

Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{1}{64}$.

$$\text{Ta có : } \frac{1}{1+2x} = 1 - \frac{1}{1+2y} + 1 - \frac{1}{1+2z} = \frac{2y}{1+2y} + \frac{2z}{1+2z} \geq 2\sqrt{\frac{4yz}{(1+2y)(1+2z)}}$$

$$\text{Tương tự ta có : } \frac{1}{1+2y} \geq 2\sqrt{\frac{4xz}{(1+2x)(1+2z)}}, \frac{1}{1+2z} \geq 2\sqrt{\frac{4xy}{(1+2x)(1+2y)}}$$

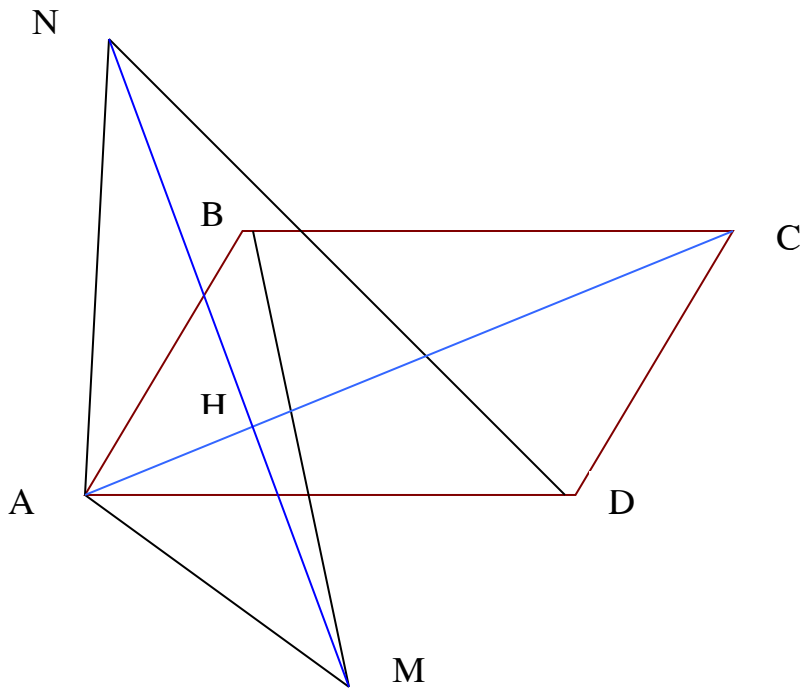
$$\frac{1}{1+2x} \cdot \frac{1}{1+2y} \cdot \frac{1}{1+2z} \geq 8 \cdot \sqrt{\frac{64x^2y^2z^2}{(1+2x)^2(1+2y)^2(1+2z)^2}}$$

$$\text{Khi đó : } \Leftrightarrow \frac{1}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)} \geq 8 \cdot \frac{8xyz}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 64xyz$$

$$\Leftrightarrow xyz \leq \frac{1}{64}$$

Câu 4. (2.50 điểm) Cho hình bình hành ABCD có $\hat{A} < 90^\circ$. Dựng các tam giác vuông cân tại A là BAM và DAN (B và N cùng nửa mặt phẳng bờ AD, D và M cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng AC vuông góc với MN.



Gọi H là giao điểm của MN và AC .

$$\widehat{NAD} + \widehat{BAM} = 2v$$

Ta có : $\Rightarrow \widehat{NAB} + \widehat{BAD} + \widehat{BAD} + \widehat{DAM} = 2v$

$$\Rightarrow \widehat{NAM} + \widehat{BAD} = 2v$$

Mặt khác : $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{ABC} = 2v$

Do đó : $\widehat{NAM} = \widehat{ABC} (= 2v - \widehat{BAD})$

Xét tam giác NAM và tam giác CAB ta có :

$$AM = AB$$

$$AN = BC$$

$$\widehat{NAM} = \widehat{ABC} \text{ (cmt)}$$

Do đó hai tam giác bằng nhau

Suy ra : $\widehat{BAC} = \widehat{AMN}$ (Hai góc tương ứng).

Trong tam giác AHM có góc AMN + góc MAH = góc BAC + góc HAM = góc BAM = 90° .

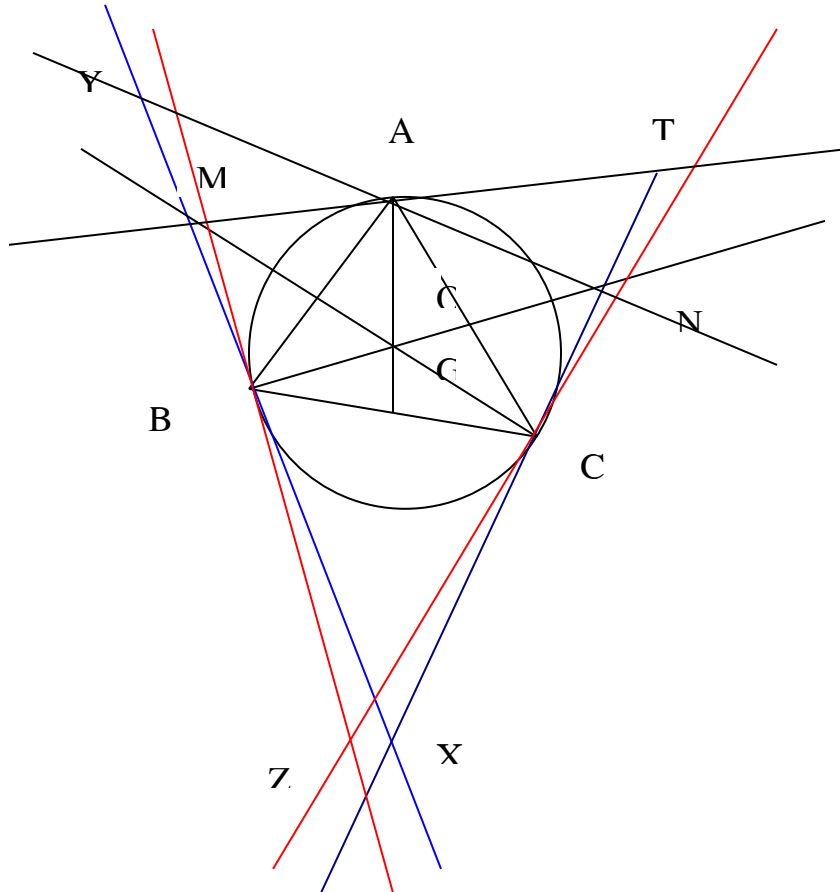
Vậy : góc AHM = 90° . Hay AC vuông góc với MN (đpcm).

Câu 5 (5.00 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, G là trọng tâm. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt CG tại M. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt BG tại N. Gọi X, Y theo thứ tự là giao điểm của CN, AN và đường thẳng qua B song song

với AC; Z,T theo thứ tự là giao điểm của BM,AM và đường thẳng qua C song song với AB. Chứng minh rằng :

a). $AB.CZ = AC.BX$.

b) $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.



Xét tam giác BZC và tam giác ACB ta có :

Góc CBZ = Góc BAC (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tt và dây cùng chắn 1 cung)

Góc BCZ = Góc ABC (so le trong ,AB//CX).

Nên tam giác BZC đồng dạng với tam giác ACB (g-g).

$$\Rightarrow \frac{BZ}{AC} = \frac{CZ}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{BZ}$$

$$\Rightarrow AB.CZ = BC.BC \quad (1)$$

Tương tự tam giác ABC đồng dạng với tam giác CXB (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{CX} = \frac{BC}{BX} = \frac{AC}{CB}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BX} = \frac{AC}{CB}$$

$$AC.BX = BC.CB \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AB.CZ = AC.BX (= BC^2).$$

Câu b.

Mình nhìn không ra nhờ các bạn cùng suy nghĩ và đưa ra lời giải nhé (cảm ơn)

PHÒNG GD-ĐT CAM LỘ

KÌ THI HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA NĂM HỌC 2008-2009

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1:(1 điểm)

Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^4 + 2009x^2 + 2008x + 2009$

Câu 2:(1 điểm)

Giải phương trình sau:

$$\frac{x+2}{13} + \frac{2x+45}{15} = \frac{3x+8}{37} + \frac{4x+69}{9}$$

Câu 3: (2 điểm)

a/ Chứng minh rằng $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq ab^3 + a^3b - a^2b^2$

b/ Cho hai số dương a,b và $a=5-b$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Câu 4:(2 điểm)

a/ Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện :

$$a^{2006} + b^{2006} = a^{2007} + b^{2007} = a^{2008} + b^{2008}$$

Hãy tính tổng: $S = a^{2009} + b^{2009}$

b/ Chứng minh rằng : $A = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ là số nguyên

Câu 5: (1 điểm) Tìm các số nguyên dương x,y thỏa mãn phương trình sau:

$$xy - 2x - 3y + 1 = 0$$

Câu 6: (3điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC > AB$, đường cao AH (H thuộc BC). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh hai tam giác BEC và ADC đồng dạng

b) Chứng minh tam giác ABE cân.

c) Gọi M là trung điểm của BE và vẽ tia AM cắt BC tại G. Chứng minh rằng:

$$\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$$

PHÒNG GD-ĐT CAM LỘ

KÌ THI HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA NĂM HỌC 2008-2009

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN

Câu 1: (1 điểm)

$$\begin{aligned} & x^4 + 2009x^2 + 2008x + 2009 \\ &= (x^4 + x^2 + 1) + 2008(x^2 + x + 1) && 0,25 \text{ đ} \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2008(x^2 + x + 1) && 0,5 \text{ đ} \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2009) && 0,25 \text{ đ} \end{aligned}$$

Câu 2: (1 điểm)

$$\begin{aligned} & \frac{x+2}{13} + \frac{2x+45}{15} = \frac{3x+8}{37} + \frac{4x+69}{9} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x+2}{13} + 1\right) + \left(\frac{2x+45}{15} - 1\right) = \left(\frac{3x+8}{37} + 1\right) + \left(\frac{4x+69}{9} - 1\right) && 0,25 \text{ đ} \\ \Leftrightarrow & \frac{x+15}{13} + \frac{2(x+15)}{15} = \frac{3(x+15)}{37} + \frac{4(x+15)}{9} && 0,25 \text{ đ} \\ \Leftrightarrow & (x+15)\left(\frac{1}{13} + \frac{2}{15} - \frac{3}{37} - \frac{4}{9}\right) = 0 && 0,25 \text{ đ} \\ \Leftrightarrow & x = -15 && 0,25 \text{ đ} \end{aligned}$$

Câu 3: (2 điểm)

a/ (1 điểm)

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq ab^3 + a^3b - a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq 2ab^3 + 2a^3b - 2a^2b^2 \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 - 2ab^3 - 2a^3b + 2a^2b^2 \geq 0 \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$\Leftrightarrow (a^4 - 2a^3b + a^2b^2) + (b^4 - 2ab^3 + a^2b^2) \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - ab)^2 + (b^2 - ab)^2 \geq 0 \quad 0,25 \text{ đ}$$

b/ (1 điểm)

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{5}{ab} \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$P = \frac{20}{4ab} \geq \frac{20}{(a+b)^2} = \frac{4}{5} \quad 0,5 \text{ đ}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{5}$ khi $a=b=\frac{5}{2}$ 0,25 đ

Câu 4 (2 điểm)

a/ (1 điểm)

Ta có: $a^{2008} + b^{2008} = (a^{2007} + b^{2007})(a + b) - ab(a^{2006} + b^{2006}) \quad 0,25 \text{ đ}$

$$\Leftrightarrow 1 = a + b - ab \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$\Leftrightarrow (1-a)(1-b) = 0 \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 1$$

Vậy $S = 1 + 1 = 2$ 0,25 đ

b/ (1 điểm)

$$A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$= \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$= \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$= 1 \in \mathbb{Z} \quad 0,25 \text{ đ}$$

Câu 5 (1 điểm)

$$xy-2x-3y+1=0$$

$$\Rightarrow xy-3y=2x-1$$

$$\Rightarrow y(x-3)=2x-1$$

0,25 đ

Ta thấy $x=3$ không thỏa mãn, với $x \neq 3$ thì

$$y=2+\frac{5}{x-3}$$

0,25 đ

Để y nguyên thì $x-3$ phải là ước của 5

0,25 đ

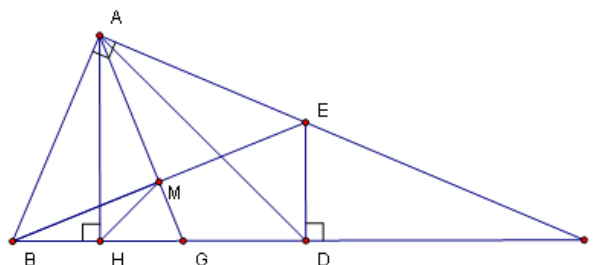
Suy ra: (x,y) là $(4,7)$; $(8,3)$
đ

0,25

Câu 6 (3 điểm)

a) (1đ điểm)

Tam giác ADC và tam giác BEC:



$$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} \text{ (vì hai tam giác$$

CDE và CAB đồng dạng)

Góc C: chung

0,75 đ

Suy ra: Tam giác ADC đồng dạng với tam giác BEC (c-g-c)

0,25 đ

b)(1 điểm) Theo câu ta suy ra: $\angle BEC = \angle ADC$

$$\text{có: } \angle ADC = \angle EDC + \angle ADE = 135^\circ$$

$$\text{Suy ra: } \angle BEC = 135^\circ$$

0,5 đ

$$\text{Suy ra: } \angle AEB = 45^\circ$$

0,25 đ

Do đó: Tam giác ABE cân(tam giác vuông có một góc bằng 45°)

0,25 đ

c)(1 điểm)

Tam giác ABE cân tại E nên AM còn là phân giác của góc BAC

$$\text{Suy ra: } \frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}, \text{ mà } \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC} (\triangle ABC \sim \triangle DEC) = \frac{AH}{HC} (ED \parallel AH) = \frac{HD}{HC}$$

0,5 đ

$$\text{Do đó: } \frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$$

0,5 đ

Môn: **Toán**

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm có: 01 trang

Câu 1: (6 điểm)

a) Cho $M = (1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}) : (\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6})$

1. Rút gọn M

2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

b) Tính giá trị của biểu thức P

$$P = 3x^{2013} + 5x^{2011} + 2006 \text{ với } x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}} - \sqrt{3}}$$

Câu 2: (4 điểm) Giải phương trình

a) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 24$

b) $|2x - x^2 - 1| = 2x - x^2 - 1$

Câu 3: (4 điểm)

a/ Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) \left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

b/ Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{3}{2}$.

Câu 4: (5 điểm)

Cho đường tròn (O; R) và hai đường kính AB và CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R) cắt các đường thẳng BC và BD tại hai điểm tương ứng là E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF.

1. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA.

2. Gọi α là số đo của góc BFE. Hai đường kính AB và CD thỏa mãn điều kiện gì thì biểu thức $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$. Đạt giá trị nhỏ nhất? tìm giá trị nhỏ nhất đó.

3. Chứng minh các hệ thức sau: $CE \cdot DF \cdot EF = CD^3$ và $\frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}$.

Câu 5: (1 điểm)

Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Câu 1: (6 điểm)

a) (4,5đ)

ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ (*)

1) Rút gọn M : Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ (0,5đ)

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$) (*) (2,5đ)

2) $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ (0,75đ)

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3 : \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in U(3)$

$U(3) \in \{\pm 1; \pm 3\}$ Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$

Nên $\sqrt{x}+1 \in \{1; 3\}$ Xảy ra các trường hợp sau: (0,5đ)

. $\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (TMĐK (*))

. $\sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ (không TMĐK (*) loại) (0,25đ)

Vậy $x=0$ thì M nhận giá trị nguyên.

b_

$$x = \sqrt{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}} \cdot -\sqrt{3}}$$

Có $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} = |4-\sqrt{2}| = 4-\sqrt{2}$ (0,5đ)

$$\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4} - \sqrt{2} = \sqrt{2\sqrt{3} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = |\sqrt{3} + 1| \quad (0,25đ)$$

$$x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1} - \sqrt{3} = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}} - \sqrt{3} = \sqrt{6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{6 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}} - \sqrt{3} = \sqrt{6 + 2\sqrt{3} - 1} - \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{3} = |\sqrt{3} + 1| - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1 \quad (0,75đ)$$

Với $x = 1$. Ta có $P = 3.1^{2013} + 5.1^{2011} + 2006 = 3 + 5 + 2006 = 2014$

Vậy với $x = 1$ thì $P = 2014$

Câu 2: (4 điểm)

$$a. (x+3)(x+6)(x+4)(x+5) = 24 \quad 0,25 đ$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 9x + 18)(x^2 + 9x + 20) = 24 \quad (1) \quad 0,25 đ$$

$$\text{Đặt } x^2 + 9x + 19 = y \quad 0,5 đ$$

$$(1) \Leftrightarrow (y+1)(y-1) - 24 = 0 \quad 0,5 đ$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 25 = 0 \quad 0,25 đ$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 9x + 24)(x^2 + 9x + 14) = 0 \quad 0,5 đ$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+7)(x^2 + 9x + 24) = 0 \quad 0,5 đ$$

$$\text{Chúng tỏ } x^2 + 9x + 24 > 0$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình : } x = -2; x = -7$$

$$b. \text{ Ta có } 2x - x^2 - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2 < 0 \quad 0,25 đ$$

$$\text{pt trở thành : } 2x - x^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 \quad 0,25 đ$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad 0,25 đ$$

Câu 3: (4 điểm)

a Cho hai số dương thỏa mãn: $x + y = 1$. 2đ

$$\text{Tìm GTNN của biểu thức: } M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) \left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) \left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 y^2 + 1 + 1 + \frac{1}{x^2 y^2} = \frac{x^4 y^4 + 2x^2 y^2 + 1}{x^2 y^2}$$

$$= \frac{(x^2 y^2 + 1)^2}{x^2 y^2} = \left(\frac{x^2 y^2 + 1}{xy}\right)^2 = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2 \quad 0,5$$

Ta có: $xy + \frac{1}{xy} = \left(xy + \frac{1}{16xy}\right) + \frac{15}{16xy}$

* Ta có: $xy + \frac{1}{16xy} \geq 2\sqrt{xy \cdot \frac{1}{16xy}} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (1) *

$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{16xy} \geq \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{15}{16xy} \geq \frac{15}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \left(xy + \frac{1}{16xy}\right) + \frac{15}{16xy} \geq \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$

Vậy $M = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2 \geq \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{16xy} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{4} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$ (Với $x, y > 0$)

Vậy min $M = \frac{289}{16}$ tại $x = y = \frac{1}{2}$

0,5

0,25

0,25

0,5

b

Cho x, y là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{3}{2}$

2đ

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (với $a, b > 0$)

$\Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

Ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z} = \frac{1}{(2x+y+z) + (x+2y+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} \right)$$

$$\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+y) + (x+z)} + \frac{1}{(x+y) + (y+z)} \right] \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) \right]$$

0,5

0,5

0,75đ.

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{AE}{\frac{1}{2}AB} = \frac{AB}{\frac{1}{2}AF} \Rightarrow \frac{AE}{OA} = \frac{AB}{AQ} \quad 0,75đ.$$

Vậy $\Delta AEO \sim \Delta ABQ$ (c.g.c). Suy ra $ABQ = AEO$ mà $ABQ = P_1$ (góc có các cạnh tương ứng vuông góc) nên $AEO = P_1$, mà hai góc đồng vị $\Rightarrow PH \parallel OE$. 0,25đ

Trong ΔAEO có $PE = PA$ (giả thiết); $PH \parallel OE$ suy ra H là trung điểm của OA .

2. Ta cần:

$$P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 \quad 0,75đ.$$

$$P = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) [\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha] \quad 0,5đ$$

$$P = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

Ta cần:

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 \geq 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Leftrightarrow 1 \geq 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \leq \frac{1}{4} \quad 0,25đ$$

$$\text{Suy ra: } P = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Do } P_{\min} = \frac{1}{4} \text{ khi và chỉ khi: } \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \text{ (với } \alpha \text{ là góc nhọn)} \quad 0,25đ$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ \quad 0,25đ$$

Khi đó CD vuông góc với AB 0,25đ

3. Ta có ΔACB và ΔADB nội tiếp đường tròn (O) có AB là đường kính nên $ACB = ADB = 90^\circ \Rightarrow ADBC$ là hình chữ nhật. 0,25đ

$$\text{Ta có: } CD^2 = AB^2 = AE \cdot AF \Rightarrow CD^4 = AB^4 = AE^2 \cdot AF^2$$

$$= (EC \cdot EB)(DF \cdot BF) = (EC \cdot DF)(EB \cdot BF) = EC \cdot DF \cdot AB \cdot EF \quad 0,25đ$$

$$\Rightarrow AB^3 = CE \cdot DF \cdot EF. \text{ Vậy } CD^3 = CE \cdot DF \cdot EF$$

Ta có:

$$\frac{BE^2}{BF^2} = \frac{EA \cdot EF}{FA \cdot EF} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{BE^4}{BF^4} = \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{CE \cdot BE}{DF \cdot BF} \Rightarrow \frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}$$

Câu 5: Giả sử $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương vì $n^4 + n^3 + 1 > n^4 = (n^2)^2$

$$\rightarrow n^4 + n^3 + 1 = (n^2 + K)^2 = n^4 + 2Kn^2 + K^2 \quad (K \in \mathbb{N}^*)$$

$$\rightarrow n^3 - 2Kn^2 = K^2 - 1 \rightarrow n^2(n - 2K) = K^2 - 1 \geq 0$$

Mà $K^2 - 1 : n^2 \rightarrow K^2 = 1$ hoặc $n^2 \leq K^2 - 1$

Nếu $K^2 = 1 \rightarrow K = 1 \rightarrow n^2(n - 2) = 0 \rightarrow n = 2$

Thử lại $2^4 + 2^3 + 1 = 5^2$ (thỏa mãn)

Khi $K \neq 1 \rightarrow K^2 > K^2 - 1 \geq n^2 \rightarrow K > n$

$\rightarrow n - 2k < 0$ mâu thuẫn với điều kiện $n^2(n - 2K) = K^2 - 1 \geq 0$ (1đ)

Vậy $n = 2$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HẬU GIANG
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
TRUNG HỌC CƠ SỞ NĂM 2017-2018
Môn: TOÁN**

Thời gian: 150 phút (không kể giao đề)

Câu 1 (2,5 điểm)

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{(x^2 - 9)(y^2 - y - 2)}{(x^3 - 6x^2 + 9x)(y + 1)}$ biết $x^2 + 16y^2 - 7xy = xy - |x - 4|$

Câu 2 (5,0 điểm)

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

b) Tìm các số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + 2n + 8$ là số chính phương

Câu 3 (4,5 điểm)

a) Cho $a, b, c > 0$ chứng minh rằng $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2(1 + xy) \\ xy - x + y - 2 = 0 \end{cases}$

Câu 4. (5,5 điểm)

Cho tam giác đều nội tiếp đường tròn $(O; R)$

a) Tính theo R chiều dài cạnh và chiều cao tam giác ABC

b) Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC ($M \neq B; C$). Trên tia đối của tia MB lấy $MD = MC$. Chứng minh $\triangle MCD$ đều

c) Xác định vị trí điểm M sao cho tổng $S = MA + MB + MC$ là lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất của S theo R

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16}{a+b-c}$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HẬU GIANG 2017-2018

Câu 1.

ĐKXD: $y \neq -1; x \neq 0; x \neq 3$

$$\text{Ta có } A = \frac{(x-3)(x+3)(y+1)(y-2)}{x(x-3)^2(y+1)} = \frac{(x+3)(y-2)}{x(x-3)}$$

$$\text{Từ giả thiết } x^2 + 16y^2 - 7xy = xy - |x-4| \Leftrightarrow (x-4y)^2 = -|x-4| \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } A = -\frac{7}{4}$$

Câu 2.

a) Với $x, y \neq 0$ ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+2y-xy=0 \Leftrightarrow x(y-2)-2(y-2)=4 \Leftrightarrow (x-2)(y-2)=4$$

Lập bảng xét các ước của 4 ta có các nghiệm

$$(x; y) \in \{(-2; 1); (1; -2); (3; 6); (4; 4); (6; 3)\}$$

b) Đặt $n^2 + 2n + 8 = a^2 \Leftrightarrow (a-n-1).(a+n+1) = 7$ với a nguyên dương

$$\text{Vì } a+n+1 > a-n-1 \text{ nên } \begin{cases} a+n+1=7 \\ a-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ n=2 \end{cases}$$

Câu 3.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có: $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b^2}{c} + c \geq 2b \quad ; \quad \frac{c^2}{a} + a \geq 2c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b} + b + \frac{b^2}{c} + c + \frac{c^2}{a} + a \geq 2a + 2b + 2c \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

b) Từ phương trình $xy - x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 1 + xy = x - y + 3$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được:

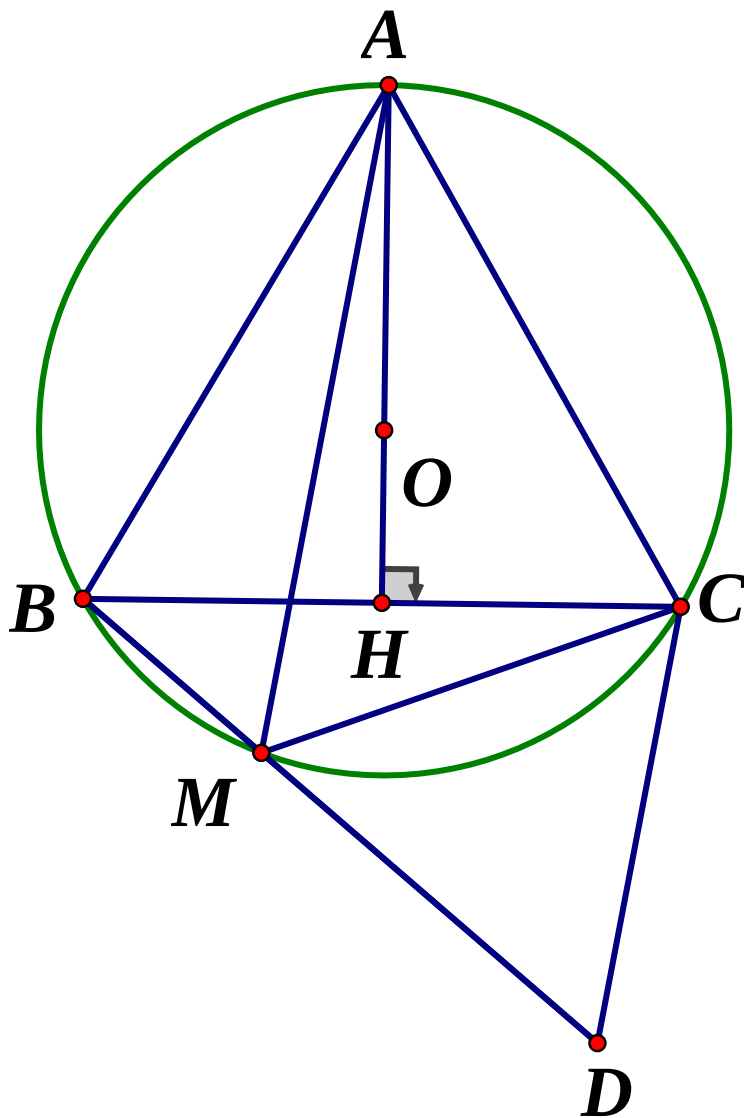
$$x + y = 2(x - y + 3) \Leftrightarrow x + y = 2x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3y - 6$$

$$\text{Thay vào phương trình thứ hai ta được } 3y^2 - 8y + 4 = 0 \Leftrightarrow (3y-2).(y-2) = 0$$

$$\text{Với } y=2 \Rightarrow x=0. \text{ Với } y=\frac{2}{3} \Rightarrow x=-4$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } (x; y) = \left\{ (0; 2); \left(-4; \frac{2}{3}\right) \right\}$$

Câu 4.



- a) Kẻ đường cao AH. Ta có $AH = \frac{3 \cdot AO}{2} = \frac{3R}{2}$; $AB = \frac{AH}{\sin B} = \frac{\frac{3R}{2}}{\sin 60^\circ} = R\sqrt{3}$
- b) Tứ giác ABMC nội tiếp nên $\angle CMD = \angle BAC = 60^\circ$
 $\triangle MCD$ cân có $\angle CMD = 60^\circ$ nên $\triangle MCD$ là tam giác đều
- c) Ta có $\triangle MCD$ đều nên $MC = MD = CD$
 Xét $\triangle AMC$ và $\triangle BDC$ có $AC = BC$; $MC = CD$; $\angle ACM = \angle BCD = 60^\circ + \angle BCM$
 Nên $\triangle AMC = \triangle BDC$ (c.g.c)
 $\Rightarrow MA = BD$. Do đó: $S = MA + MB + MC$
 $= MA + MB + MD = MA + BD = 2MA$ lớn nhất

Vậy S lớn nhất khi MA là đường kính của đường tròn (O) hay M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Câu 5.

$$\text{Đặt } \begin{cases} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=y+z \\ 2b=z+x \\ 2c=z+y \end{cases}$$

Ta có

$$S = \frac{y+z}{2x} + \frac{9(z+x)}{2y} + \frac{16(x+y)}{2z} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{9x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{16x}{z} + \frac{9z}{y} + \frac{16y}{z} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot (2.3 + 2.4 + 2.3.4) = 19$$

Giá trị nhỏ nhất của S là 19. Đạt được khi và chỉ khi $a = \frac{7}{8}; b = \frac{5}{8}; c = \frac{1}{2}$

PHÒNG GD - ĐT CẨM GIÀNG

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP
HUYỆN**

NĂM HỌC 2013 - 2014

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 150 phút

(Đề thi gồm 01 trang)

Ngày thi 16-10-2013

Sưu tầm: Phạm Văn Cát
THCS Cẩm Định Cẩm Giàng
HD

Câu 1 (2 điểm)

a) Cho biểu thức: $A = (x^2 - x - 1)^2 + 2013$

Tính giá trị của A khi $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$

b) Cho $(x + \sqrt{x^2 + 2013}).(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013$. Chứng minh $x^{2013} + y^{2013} = 0$

Câu 2 (2 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + 5x + 1 = (x+5) \sqrt{x^2 + 1}$

b) Chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} > 2$, với $a, b, c > 0$

Câu 3 (2 điểm)

a) Tìm số dư của phép chia đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2013$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

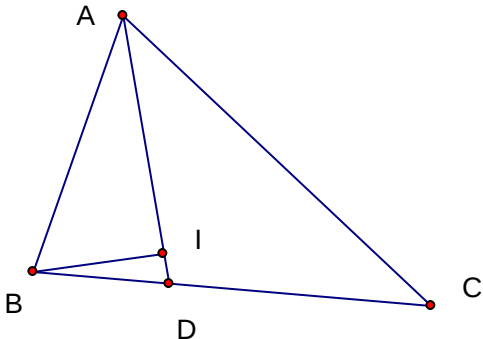
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $3y^2 + x^2 + 2xy + 2x + 6y + 2017$

Câu 4 (3 điểm)

Câu	Nội dung	Biểu điểm
1 a)	$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1) - \sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)}{\sqrt{3}+1-1}$ $= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1 - \sqrt{\sqrt{3}+1}+1)}{\sqrt{3}+1-1} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$ Thay $x = 2$ vào biểu thức A ta có: $A = (2^2 - 2 - 1)^2 + 2013 = 1 + 2013 = 2014$ Vậy khi $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$ thì giá trị của biểu thức A là 2014	0,25

b)	$(x + \sqrt{x^2 + 2013}).(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013$ $(x - \sqrt{x^2 + 2013})(x + \sqrt{x^2 + 2013}).(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013(x - \sqrt{x^2 + 2013})$ $-2013.(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013(x - \sqrt{x^2 + 2013})$ $-y - \sqrt{y^2 + 2013} = x - \sqrt{x^2 + 2013}$ Tương tự: $-x - \sqrt{x^2 + 2013} = y - \sqrt{y^2 + 2013}$ $\Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^{2013} + y^{2013} = 0$	0,25
		0,25
		0,25
		0,25

2	a) $x^2+ 5x +1 = (x+5) \sqrt{x^2+1}$ $x^2+1 + 5x = (x+5) \sqrt{x^2+1}$ $x^2+1 + 5x - x\sqrt{x^2+1} - 5\sqrt{x^2+1}=0$ $\sqrt{x^2+1} (\sqrt{x^2+1}-x) +5(x- \sqrt{x^2+1})=0$ b) $(\sqrt{x^2+1}-x) (\sqrt{x^2+1}- 5) = 0$ $(\sqrt{x^2+1}-x) = 0 \text{ hoặc } (\sqrt{x^2+1}- 5) = 0$ $\sqrt{x^2+1}=x \text{ hoặc } \sqrt{x^2+1} = 5$ $x^2+ 1 = x^2 \text{ (không có } x \text{ thỏa mãn), hoặc } x^2+ 1 = 25$ $x^2 = 24$ $x = \pm\sqrt{24}$ Vậy nghiệm của PT là $x = \pm\sqrt{24}$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25	

	 Vẽ đường phân giác AD của tam giác ABC Ta có $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD+DC}{AB+AC} = \frac{CB}{AB+AC} = \frac{a}{b+c}$ Vẽ $BI \perp AD \Rightarrow BI \leq BD$ Ta có $\sin \frac{\hat{A}}{2} = \frac{BI}{AB} \Rightarrow \sin \frac{\hat{A}}{2} \leq \frac{BD}{AB+AC}$. Vậy $\sin \frac{\hat{A}}{2} \leq \frac{a}{b+c}$	0,25 0,25 0,25 0,25
6	Với $x > 0, y > 0$ ta có $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ $\Rightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \text{ (I)}$ a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên $a+b-c > 0, a+c-b > 0, c+b-a > 0$, Áp dụng bất(I) với các số $x = a+b-c, y = a+c-b$ dương ta có: $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} \geq \frac{4}{a+b-c+a+c-b} = \frac{2}{a}$ Tương tự: $\frac{1}{b+a-c} + \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{4}{c+b-a+a+b-c} = \frac{2}{b}$ $\frac{1}{c+b-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{4}{c+b-a+c+a-b} = \frac{2}{c}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ (đpcm)}$	0,25 0,25 0,25 0,25

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH KIÊN GIANG
ĐỀ CHÍNH THỨC
 (Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2012-2013
MÔN THI: TOÁN
 Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
 Ngày thi: **01/3/2013**

Câu 1. (4 điểm)

- a) Tìm m để hàm số $y = (m^2 - 2m)x + m^2 - 1$ nghịch biến và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 5x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2xy - z - 1$
- c) Cho $x + y = -5$ và $x^2 + y^2 = 11$. Tính $x^3 + y^3$

Câu 2. (4 điểm)

a) Rút gọn : $A = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9-x^2}}{3x - x^2 + (x+2)\sqrt{9-x^2}} : 2\sqrt{1 + \frac{2x}{3-x}}$

b) Cho a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

Tính giá trị biểu thức $Q = (a^{27} + b^{27})(b^{41} + c^{41})(c^{2013} + a^{2013})$

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{17-x} = 3$

b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-3}{y+5}} + \sqrt{\frac{y+5}{2x-3}} = 2 \left(x > \frac{3}{2}; y > -5 \right) \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$$

Câu 4. (4 điểm)

Cho hình thang ABCD có đáy lớn là CD. Qua A vẽ AK // BC ($K \in CD$) và qua B kẻ BI // AD ($I \in CD$); BI cắt AC tại F, AK cắt BD tại E

a) Chứng minh $KD = CI$ và $EF // AB$

b) Chứng minh $AB^2 = CD \cdot EF$

Câu 5. (4 điểm)

Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn (O;R). M là một điểm di động trên cung BC của đường tròn đó

a) Chứng minh : $MB + MC = MA$

b) Xác định vị trí của điểm M để tổng $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất

c) Gọi H, K, Q lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, AC; đặt diện tích tam

giác ABC là S và diện tích S' . CMR : $MH + MK + MQ = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$ khi M di

động trên cung BC

ĐÁP ÁN HỌC SINH GIỎI 9 KIÊN GIANG 2012-2013

Câu 1.

1.a) Hàm số $y = (m^2 - 2m)x + m^2 - 1$ nghịch biến $\Leftrightarrow m^2 - 2m < 0 \Leftrightarrow m(m - 2) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}$$

Cắt trục tung: $m^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow m = \pm 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m \in \emptyset$

Câu 1b. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 5x^2 + y^2 + z^2 - z - 4x - 2xy - 1$

$$M = x^2 - 2xy + y^2 + 4x^2 - 4x + 1 + z^2 - z + \frac{1}{4} - \frac{9}{4}$$

$$= (x-y)^2 + (2x-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}$$

Giá trị nhỏ nhất của $M = -\frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-1=0 \\ z-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$$

Câu 1c. Cho $x+y = -5$ và $x^2 + y^2 = 11$. Tính $x^3 + y^3$

Ta có: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = -5(11 - xy) \quad (1)$

Mà $x+y = -5 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 25 \Rightarrow 11 + 2xy = 25 \Leftrightarrow xy = 7 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x^3 + y^3 = -5 \cdot (11 - 7) = -20$

Câu 2

2a. Rút gọn: $A = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9-x^2}}{3x - x^2 + (x+2)\sqrt{9-x^2}} : 2\sqrt{1 + \frac{2x}{3-x}}$

ĐK: $-3 < x < 3$

$$A = \frac{(x+3)(x+2) + x\sqrt{3+x}\sqrt{3-x}}{x(3-x) + (x+2)\sqrt{3+x}\sqrt{3-x}} : 2\sqrt{\frac{3-x}{3-x} + \frac{2x}{3-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{3+x}[(x+2)\sqrt{3+x} + x\sqrt{3-x}]}{\sqrt{3-x}[x\sqrt{3-x} + (x+2)\sqrt{3+x}]} : 2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}} : 2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$$

$$\Rightarrow (a+b)c(a+b+c) = -ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)[c(a+b+c)+ab] = 0$$

Câu 2b. Ta có : $\Leftrightarrow (a+b)[c(a+c)+bc+ab] = 0 \Leftrightarrow (a+b)[c(a+c)+b(a+c)] = 0$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{cases}$$

Thế vào tính được $Q = 0$

Câu 3

3a. Gpt: $\sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{17-x} = 3$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{17-x} \right)^3 = 3^3$$

$$x+10+17-x+3\sqrt[3]{(x+10)(17-x)}.3 = 27$$

$$\Leftrightarrow (x+10)(17-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x = 17 \end{cases}$$

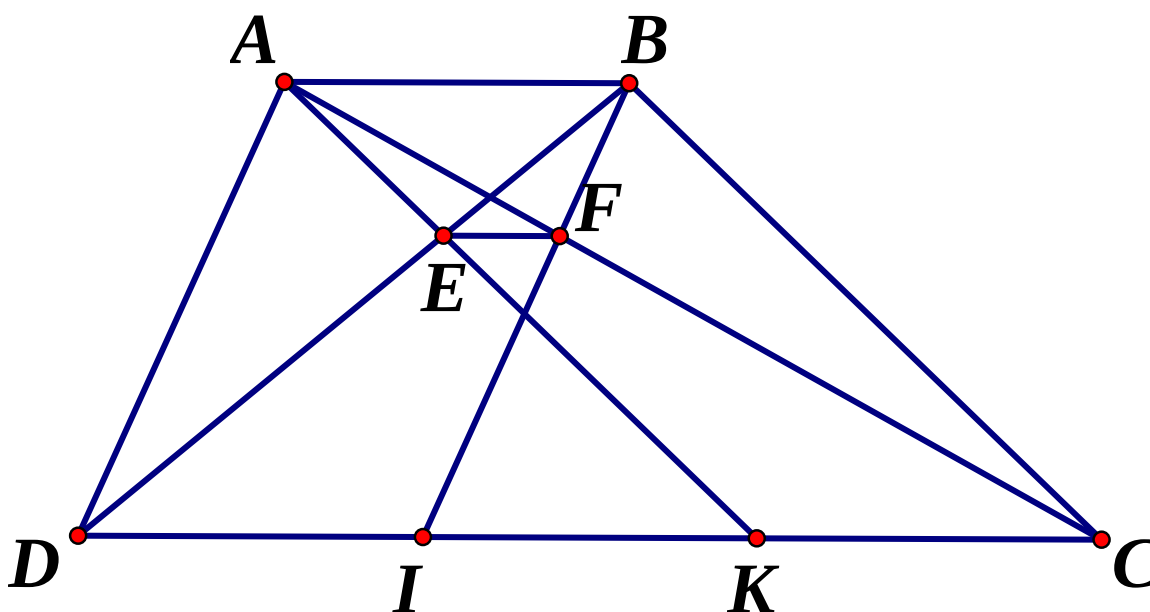
$$3b. \begin{cases} \sqrt{\frac{2x-3}{y+5}} + \sqrt{\frac{y+5}{2x-3}} = 2 \\ 3x+2y=19 \end{cases} \left(x > \frac{3}{2}; y > -5 \right)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{2x-3}{y+5}} = m > 0 \Rightarrow m + \frac{1}{m} = 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (chọn)}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{y+5} = 1 \Leftrightarrow 2x-3 = y+5 \Leftrightarrow 2x-y = 8$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} 2x-y=8 \\ 3x+2y=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y=16 \\ 3x+2y=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$$

Câu 4.



a) Chứng minh $KD = CI$ và $EF \parallel AB$

Chứng minh $ABID$, $ABCK$ là hình bình hành

$\Rightarrow DI = CK$ (cùng bằng AB)

$\Rightarrow DI + IK = CK + IK \Rightarrow DK = CI$

Vì $\triangle AEB$ đồng dạng $\triangle KED$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{AB}{KD}$

$\triangle AFB$ đồng dạng $\triangle CFI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AB}{CI}$

Mà $KD = CI \Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF \parallel KC$ (Định lý Ta let đảo trong $\triangle AKC$)

b) Chứng minh $AB^2 = CD \cdot EF$

Ta có : $\triangle KED$ đồng dạng $\triangle AEB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DK}{AB} = \frac{DE}{EB} \Rightarrow \frac{DK + AB}{AB} = \frac{DE + EB}{EB} \quad (\text{Vì } ABCK \text{ là hình bình hành})$$

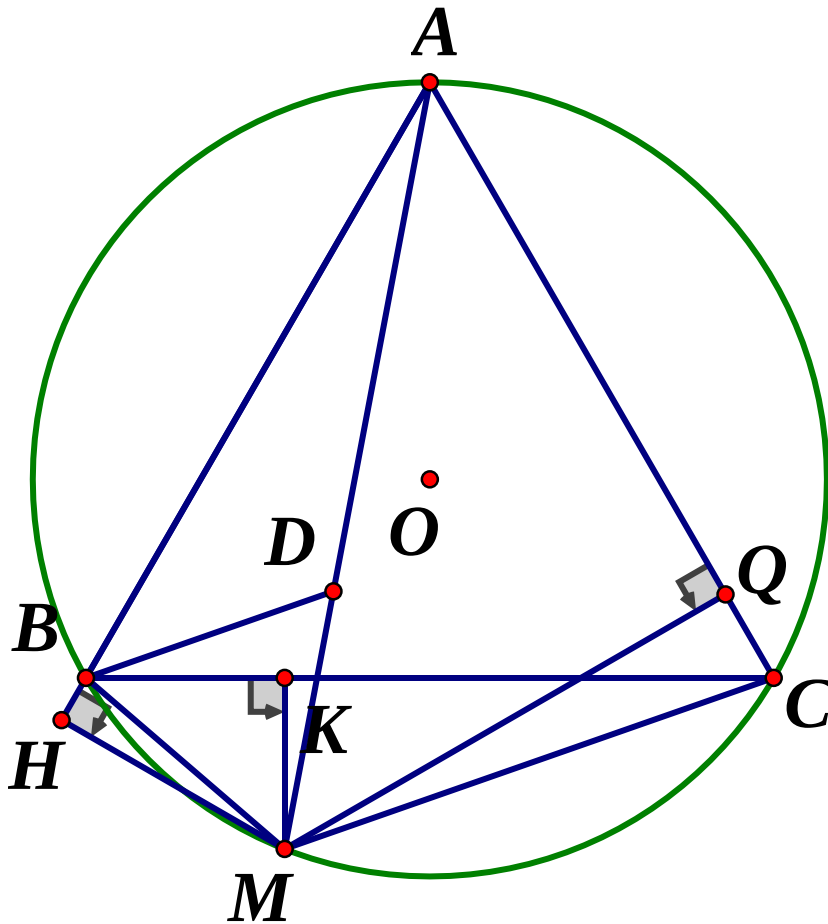
$$\Rightarrow \frac{DK + KC}{AB} = \frac{DB}{EB} \Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{DB}{EB} \quad (1)$$

Do $EF \parallel DI$ (theo cmt : $EF \parallel KC$ và $I \in KC$)

$$\Rightarrow \frac{DB}{EB} = \frac{DI}{EF} \Rightarrow \frac{DB}{EB} = \frac{AB}{EF} \quad (2) \quad (\text{Vì } DI = AB)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{AB}{EF} \Rightarrow AB^2 = DC \cdot EF$$

Câu 5.



a) Chứng minh $MC + MB = MA$

Trên MA lấy D sao cho $MD = MB \Rightarrow \triangle MBD$ cân tại M

Góc BMD = góc BCA = 60° (cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \triangle MBD$ đều

Xét $\triangle MBC$ và $\triangle DBA$ có

$MB = BD$ (vì $\triangle MBD$ đều)

$BC = AB$ (vì $\triangle ABC$ đều)

Góc MBC = góc DBA (cùng cộng DBC bằng 60°)

$$\Rightarrow \Delta MBC = \Delta DBA (c - g - c) \Rightarrow MC = DA$$

$$\text{Mà } MB = MD (gt) \Rightarrow MC + MB = MA$$

b) Xác định vị trí của M để tổng $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất

$$\text{Ta có } MA \text{ là dây cung của } (O; R) \Rightarrow MA \leq 2R$$

$$\Rightarrow MA + MB + MC \leq 4R \text{ (không đổi)}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow MA$ là đường kính $\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung BC

c) **CMR:** $MH + MK + MQ = \frac{2\sqrt{3} \cdot (S + 2S')}{3R}$

$$\text{Ta có : } \frac{MH \cdot AB}{2} + \frac{MK \cdot BC}{2} + \frac{MQ \cdot AC}{2} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}$$

$$\Rightarrow AB \cdot (MH + MK + MQ) = 2(S + 2S')$$

Vì AB là cạnh tam giác đều nội tiếp (O;R)

$$\Rightarrow AB = R\sqrt{3} \Rightarrow MH + MK + MQ = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2016--2017**

PHẦN THI CÁ NHÂN

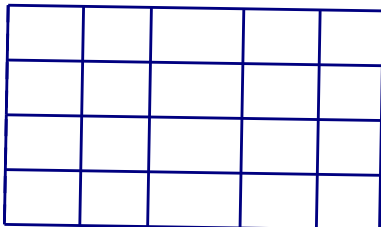
Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ

Câu 1. Có bao nhiêu hình chữ nhật trong hình vẽ sau:



Câu 2. Tìm số hạng thứ 7 của dãy số sau đây: 1; 1; 2; 5; 29;.....

Câu 3. Có 5 đôi giày màu xanh và 10 đôi giày màu đỏ bỏ chung trong cái hộp. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu chiếc giày (mà không nhìn vào trong hộp) để chắc chắn có một đôi cùng màu và đi được .

Câu 4. Có một nhóm bạn rủ nhau đi câu cá, bạn câu được ít nhất câu được $\frac{1}{9}$ tổng

số cá câu được, bạn câu được nhiều cá nhất câu được $\frac{1}{7}$ tổng số cá câu được. Biết rằng số cá câu được của mỗi bạn là khác nhau. Hỏi nhóm bạn có bao nhiêu người

Câu 5. Tìm các số hữu tỷ x, y thỏa mãn đẳng thức: $\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Câu 6. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{x-4} = \sqrt[3]{2}$

Câu 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(x + \sqrt{2x + y}) = 3 - y \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2 \end{cases}$$

Câu 8. Cho các số $x, y > 0$ thỏa mãn $x + \frac{4}{y} \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{(x + 2y)(y + 2x)}{x^2 + y^2}$$

Câu 9. Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh AC và các đường thẳng AD, BM, CE đồng quy tại K nằm trong tam giác ($D \in BC; E \in AB$). Biết $\triangle AKE$ và $\triangle BKE$ có diện tích lần lượt là 10cm^2 và 20cm^2 . Tính diện tích tam giác ABC

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết đường cao AH, tung tuyến BM và phân giác trong CD đồng quy. Tính $\frac{AB}{AC}$

PHẦN II. TỰ LUẬN

Câu 11. Tìm số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ thỏa mãn $\sqrt{a+b} = \frac{\overline{ab}}{a+b}$

Câu 12. Cho tứ giác ABCD nội tiếp được đường tròn và có các cạnh đối không song song. Gọi F là giao điểm của AB và CD, E là giao điểm của AD và BC; H, G theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD. Đường phân giác góc BED cắt GH tại điểm I

a) Chứng minh rằng $IH \cdot BD = IG \cdot AC$

b) Cho độ dài $CD = 2 \cdot AB$. Tìm tỉ số diện tích $\frac{S_{IAB}}{S_{ICD}}$

Câu 13. Cho hình tròn (C) có bán kính bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương k sao cho với mọi cách vẽ k điểm bất kỳ và phân biệt thuộc hình tròn (C) thì luôn tồn tại hai điểm trong k điểm đó thỏa mãn khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

---HẾT---

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI 9 HÀ TĨNH NĂM 2016-2017

Câu 1. Số hình chữ nhật là $(1+2+3+4+5) \cdot (1+2+3+4) = 150$

Cách tính: Xét các hình chữ nhật kích thước $m \cdot n$

Câu 2. Đáp số: 750797

Quy luật $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n^2$ ($n \geq 1; n \in \mathbb{N}$)

Suy ra $a_7 = a_6^2 + a_5^2 = (a_5^2 + a_4^2)^2 + a_5^2 = 750797$

Câu 3. Đáp số 16

Câu 4. Đáp số 8. Giả sử có n bạn và số cá của các bạn là $a_1 > a_2 > \dots > a_n$

Ta có $9a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 7a_1 \Rightarrow 9a_n > na_n; 7a_1 < na_1 \Rightarrow n = 8$

Câu 5. Đáp số $x=6; y=\frac{1}{2}$

Câu 6. Đáp số $x=2; x=4$. Cách giải: đặt ẩn phụ

Câu 7. Đáp số $(x;y) = \{(1;-1); (-3;7)\}$

Đặt $t = \sqrt{2x+y} \geq 0$. Ta có phương trình $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Câu 8. Đáp số $P_{\max} = \frac{594}{257}$

$$1 \geq x + \frac{4}{y} \geq 4\sqrt{\frac{x}{y}} \Rightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{1}{16}; P = \frac{2x^2 + 2y^2 + 5xy}{x^2 + y^2} = 2 + \frac{5}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{256x} + \frac{255y}{256x} \geq 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{255}{256} = \frac{257}{16} \Rightarrow P \leq 2 + \frac{5 \cdot 16}{257} = \frac{594}{257}$$

Câu 9. Đáp số $S_{BAC} = 75m^2$

Ta có $\frac{S_{AKE}}{S_{BKE}} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2}$, suy ra $S_{BCE} = 2S_{ACE}$

M là trung điểm AC nên $S_{ABM} = S_{CBM}; S_{AKM} = S_{CKM} \Rightarrow S_{BCK} = 30 \Rightarrow S_{ACE} = 25$

Vậy $S_{ABC} = 75m^2$

Câu 10. Đáp số $\frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Sử dụng định lý Ceva và hệ thức lượng trong tam giác

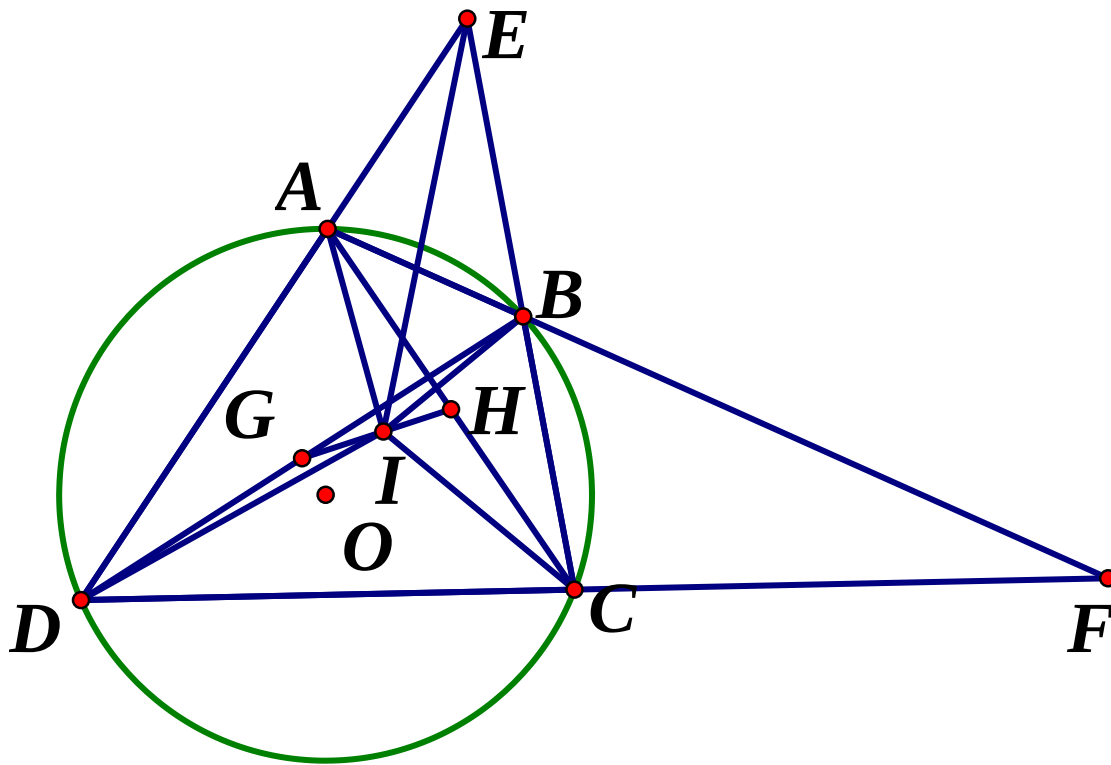
Câu 11. Do $\frac{ab}{a+b}$ là số hữu tỉ và $a+b$ là số nguyên dương nên từ $\sqrt{a+b} = \frac{\overline{ab}}{a+b}$

Suy ra $a+b$ là số chính phương

Do $a+b \leq 18 \Rightarrow a+b = 1; 4; 9; 16$

Thử lại các trường hợp ta có $a=2; b=7$ Suy ra số cần tìm là 27

Câu 12



- a) Ta có $\triangle EBD$ và $\triangle EAC$ đồng dạng nên các đường trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng. Suy ra $\frac{EG}{EH} = \frac{BD}{AC} = \frac{DG}{CH} = \frac{DE}{EC}$

Ta có $\angle EDG = \angle ECH$ (cùng nhìn cung AB) $\Rightarrow \triangle EDG$ đồng dạng với $\triangle ECH$

Kéo theo $\angle DEG = \angle CEH$, suy ra EI là phân giác $\angle GEH$

Do đó $\frac{BD}{AC} = \frac{EG}{EH} = \frac{GI}{HI} \Rightarrow IH \cdot BD = IG \cdot AC$ (dpcm)

- b) Ta có $\triangle FBD$ và $\triangle FCA$ đồng dạng

$\Rightarrow \triangle FGD$ và $\triangle FHA$ đồng dạng $\Rightarrow \angle GFD = \angle HFA$

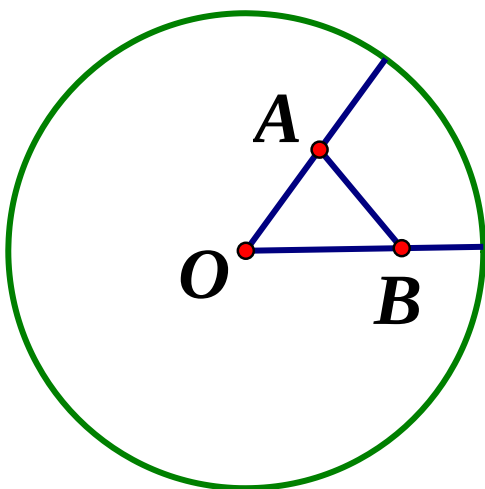
$\frac{FG}{FH} = \frac{GD}{HA} = \frac{BD}{AC} = \frac{IG}{IH} \Rightarrow FI$ là phân giác $\angle GFH$

Suy ra FI là phân giác góc AFD

Gọi M, N là chân đường vuông góc hạ từ I lên các đường thẳng AB, CD. Khi đó $IM = IN$

$$\text{Ta có } \frac{S_{\triangle IAB}}{S_{\triangle ICD}} = \frac{\frac{1}{2}IM \cdot AB}{\frac{1}{2}IN \cdot CD} = \frac{1}{2}$$

Câu 13.



Xét $k = 7$, vẽ 7 điểm gồm 1 điểm ở tâm và 6 điểm trên cùng đường tròn tạo thành lục giác đều. Lúc đó khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ bằng 1. Suy ra $k \geq 8$

Với $k=8$, luôn tồn tại ít nhất 7 điểm không trùng tâm đường tròn. Ta kẻ các bán kính đi qua 7 điểm đó.

Khả năng 1: Nếu có 2 điểm thuộc cùng 1 bán kính thì khoảng cách giữa hai điểm đó nhỏ hơn 1 (vì không có điểm nào trùng tâm)

Khả năng 2: Không có 2 điểm nào cùng thuộc một bán kính, lúc đó có 7 bán kính, suy ra hai bán kính tạo với nhau 1 góc nhỏ hơn 60° .

Giả sử hai bán kính đó chứa A và B. Vì góc AOB không là góc lớn nhất của tam giác OAB nên $AB < \max\{OA; OB\} \leq 1$

Vậy trường hợp $k=8$ thỏa mãn

Suy ra giá trị nhỏ nhất của k là 8

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH LỚP 9 THCS
TỈNH KIÊN GIANG NĂM HỌC 2011-2012
ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi : 01/03/2012

Câu 1. (4 điểm)

a) Cho $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{96} + 3^{97} + 3^{98} + 3^{99}$

Chứng minh S chia hết cho 40

b) Rút gọn phân thức
$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}$$

Câu 2 (4 điểm)

a) Thực hiện phép tính : $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

b) Cho $a+b+c=0$; $a, b, c \neq 0$. Chứng minh đẳng thức

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$$

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $2x^2 + 2x + 1 = \sqrt{4x+1}$

b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} |x-2| + 2|y-1| = 9 \\ x + |y-1| = -1 \end{cases}$$

Câu 4. (5 điểm)

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O;R) có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại I (I khác O). Vẽ đường kính CE.

a) Chứng minh ABDE là hình thang cân

b) Chứng minh $\sqrt{AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2} = 2R\sqrt{2}$

c) Từ A và B vẽ các đường thẳng vuông góc đến CD lần lượt cắt BD tại F, cắt AC tại K. Chứng minh A, B, K, F là bốn đỉnh của một tứ giác đặc biệt

Câu 5. (3 điểm)

Cho hai điểm A, B cố định và điểm M di động sao cho MAB là tam giác có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB và K là chân đường cao vẽ từ M của tam giác MAB. Tính giá trị lớn nhất của tích KH.KM

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 KIÊN GIANG NĂM 2011-2012
Câu 1.

1a.

$$S = (1 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + \dots + (3^{96} + 3^{97} + 3^{98} + 3^{99})$$

$$S = (1 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{96} \cdot (1 + 3^1 + 3^2 + 3^3)$$

$$S = (1 + 3^1 + 3^2 + 3^3) \cdot (1 + 3^4 + 3^8 + \dots + 3^{96})$$

$$S = 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8 + \dots + 3^{96})$$

Vậy S chia hết cho 40.

1b.

$$\text{Tử thức} = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$$

$$(a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc$$

$$= (a + b + c) \left[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 \right] - 3ab(a + b + c)$$

$$= (a + b + c) \cdot (a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$$

$$= (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Mẫu thức

$$= a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$\text{Kết quả} = \frac{a + b + c}{2} \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \neq 0$$

Câu 2.**2a.** Nhân số bị chia và số chia với $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2} \cdot (2 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2} \cdot (2 - \sqrt{3})}{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\sqrt{2} \cdot (2 + \sqrt{3})}{2 + (\sqrt{3} + 1)} + \frac{\sqrt{2} \cdot (2 - \sqrt{3})}{2 - (\sqrt{3} - 1)} \\
&= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{(2 + \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})}{6} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Câu 2b.

Ta có:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \right) \\
&= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{c + b + a}{abc} \right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\
\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|
\end{aligned}$$

Câu 3a. DK : $4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4}$

$$2x^2 + 2x + 1 = \sqrt{4x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 2 = 2\sqrt{4x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + (\sqrt{4x + 1} - 1)^2 = 0 \quad (\text{thỏa})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2 = 0 \\ \sqrt{4x + 1} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\textbf{Câu 3b.} \begin{cases} |x - 2| + 2|y - 1| = 9 \quad (1) \\ x + |y - 1| = -1 \quad (2) \end{cases}$$

$$- \text{ Từ pt (2)} \Rightarrow |y - 1| = -1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq -1$$

- Thế vào phương trình (1) ta có

$$|x - 2| + 2(-1 - x) = 9$$

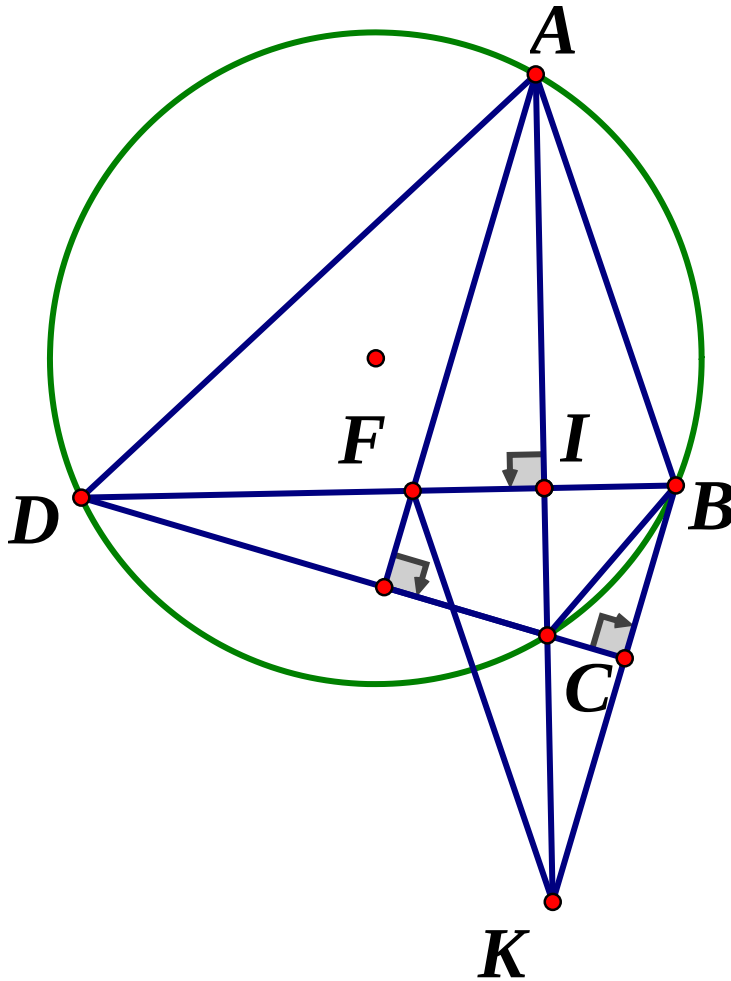
$$- \quad |x - 2| - 2x = 11 \quad (\text{vì } x \leq -1)$$

$$\Rightarrow 2 - x - 2x = 9$$

$$x = -3$$

- Thế $x = -3$ vào pt (2) : $|y - 1| = -1 + 3 = 2 \Rightarrow y - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$
- Vậy nghiệm của hệ là $(-3 ; 3); (-3; -1)$

Câu 4



- a) Ta có góc $EAC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AE \perp AC$
 Mà $BD \perp AC$ (gt) $\Rightarrow AE \parallel BD \Rightarrow ABDE$ là hình thang
 Mà $ABDE$ nội tiếp đường tròn (O) nên $ABDE$ là hình thang cân
- b) Ta có góc $EDC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\Rightarrow \triangle DEC$ vuông ở D
 $\Rightarrow ED^2 + CD^2 = EC^2 = (2R)^2 = 4R^2$
 Mà $AB = ED$ (vì $ABDE$ là hình thang cân) $\Rightarrow AB^2 + CD^2 = 4R^2$
 Chứng minh tương tự $\Rightarrow BC^2 + DA^2 = 4R^2$

$$\Rightarrow AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2 = 8R^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2} = 2R\sqrt{2}$$

c) Ta có : góc BAC = góc BDC (cùng chắn cung BC)

Góc IAF = góc BDC (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

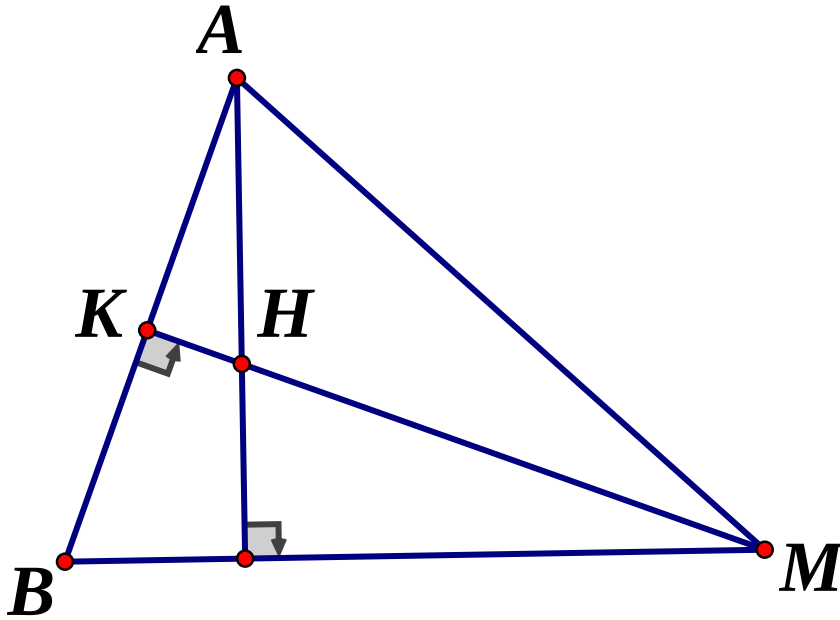
Suy ra góc BAC = góc IAF $\Rightarrow \triangle ABF$ cân tại A

Mà AI là đường cao , nên AI là đường trung tuyến $\Rightarrow IB = IF$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow IA = IK \Rightarrow ABKF$ là hình bình hành

Mà $AK \perp BF$ nên $ABKF$ là hình thoi

Câu 5.



- Xét $\triangle KAH$ và $\triangle KMB$ ta có:

Góc AKH = góc MKB = 90°

Góc KAH = góc KMB (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$$\Rightarrow \triangle KAH \text{ và } \triangle KMB \text{ đồng dạng} \Rightarrow \frac{KH}{KB} = \frac{AK}{KM} \Rightarrow KH.KM = AK.KB$$

Áp dụng bất đẳng thức cosin cho hai số dương

$$\text{Ta có: } \sqrt{AK.KB} \leq \frac{AK + KB}{2} \Leftrightarrow AK.KB \leq \frac{AB^2}{4}$$

Do đó $KH.KM \leq \frac{AB^2}{4}$ (không đổi)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow AK = KB$

Vậy giá trị lớn nhất của $KH.KM$ là $\frac{AB^2}{4}$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG NAI
ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2013-2014**

Môn : Toán

Thời gian làm bài : 150 phút

Ngày thi: 04/4/2014

Câu 1. (4 điểm)

Tìm các số thực x thỏa $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$

Câu 2. (4 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 2y = 1 \\ y^3 + 2x = -1 \end{cases}$$

Câu 3. (4 điểm)

Cho m và n là hai số nguyên dương lẻ thỏa
$$\begin{cases} (m^2 + 2) : n \\ (n^2 + 2) : m \end{cases}$$

- 1) Hãy tìm một cặp gồm hai số nguyên dương lẻ $(m; n)$ thỏa các điều kiện đã cho với $m > 1$ và $n > 1$
- 2) Chứng minh $(m^2 + n^2 + 2) : 4mn$

Câu 4. (4 điểm)

- 1) Tính số các ước dương của số 1000
- 2) Tính số các ước dương chẵn của số 1000

Câu 5. (4 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc CAB, ABC, BCA đều là góc nhọn. Gọi (O) là đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với hai cạnh AB, AC lần lượt tại D, E . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng OB và DE , gọi N là giao điểm của hai đường thẳng OC và DE .

Chứng minh bốn điểm B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI 9 ĐỒNG NAI 2013-2014

Câu 1.

Chia 2 vế cho x^2 ta được:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -1 - \sqrt{2} \quad (1) \text{ hoặc } x + \frac{1}{x} = -1 + \sqrt{2} \quad (2)$$

Giải (1) ta được

$$x = \frac{-1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-1 - \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \quad (3)$$

Giải (2) vô nghiệm

Vậy chỉ có hai giá trị của x ở (3) thỏa bài toán

Câu 2

$$\begin{cases} x^3 + 2y = 1 \\ y^3 + 2x = -1 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 + 2x + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 + y^2 - xy + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -x \quad (1) \text{ hoặc } x^2 + y^2 - xy + 2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Với } y = -x. \text{ Khi đó } x^3 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1) \cdot (x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x^2 - x - 1 = 0 \quad (3)$$

Khi $x = -1$ thì $y = 1$

$$\text{Giải (3) ta được } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Với } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Với } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 = 0 \quad (\text{vô nghiệm})$$

Hệ đã cho có 3 nghiệm như trên

Câu 3

3.1 Với $m = 11$ và $n = 41$ thỏa các điều kiện của bài toán

Vì khi đó $m^2 + 2 = 123 : 41$ và $n^2 + 2 = 1683 : 11$

3.2 Vì $m^2 + 2 : n$ mà $n^2 : n$ nên $(m^2 + n^2 + 2) : n$ (1)

Tương tự $(m^2 + n^2 + 2) : m$ (2)

Gọi d là ước chung lớn nhất của m và $n \Rightarrow m^2 + n^2 : d$

Theo chứng minh trên $(m^2 + n^2 + 2) : m \Rightarrow (m^2 + n^2 + 2) : d \Rightarrow 2 : d$

$\Rightarrow d = 1$ (3) ; nếu d lớn hơn 1 thì $d = 2$ mâu thuẫn với m và n lẻ

Từ (1), (2) , (3) suy ra $(m^2 + n^2 + 2) : mn$

Cuối cùng vì m lẻ nên $m = 2k + 1$ (với $k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow m^2 = 4k(k + 1) + 1$

Tương tự $n^2 = 4l(l + 1) + 1$ (với $l \in \mathbb{N}$)

Suy ra $(m^2 + n^2 + 2) : 4$. Từ đó có điều phải chứng minh

Câu 4.

4.1 Ta có $1000 = 2^3 \cdot 5^3$

Gọi k là một ước dương của 1000. Suy ra $k = 2^n \cdot 5^m$ với $n, m \in \mathbb{N}$ thỏa $n \leq 3$ và $m \leq 3$

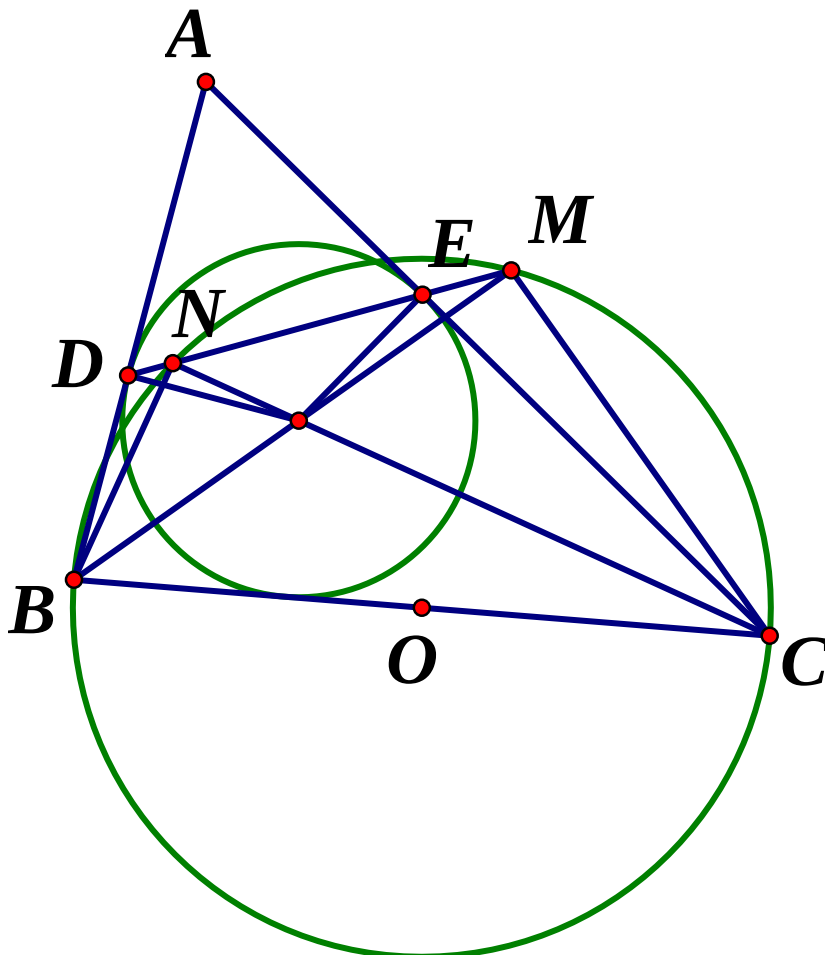
Vậy số ước dương của 1000 là $4 \cdot 4 = 16$

4.2 Gọi k là một ước dương chẵn của 1000. Suy ra $k = 2^n \cdot 5^m$ với $n, m \in \mathbb{N}$ thỏa

$1 \leq n \leq 3$ và $m \leq 3$

Vậy số ước dương chẵn của 1000 là $3 \cdot 4 = 12$.

Câu 5.



Theo giả thiết $AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow \angle CEM = \angle AED = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$

Mà $\angle COM = \angle OBC + \angle OCB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$

Vậy $\angle CEM = \angle COM \Rightarrow COEM$ là tứ giác nội tiếp

Theo giả thiết $OE \perp AC$. từ đó $BM \perp CM$

Tương tự $CN \perp BN \Rightarrow BCMN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BC

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÒA BÌNH
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2010-2011**

Đề thi môn: TOÁN

Ngày thi: 22 tháng 3 năm 2011

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1 (4đ)

1. Phân tích thành nhân tử các biểu thức sau

a) $A = x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 12y^3$

b) $B = x^3 + 4y^2 - 2xy + x^2 + 8y^3$

2. Cho $a = \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng a là một số nguyên

Bài 2 (6đ)

1. Giải phương trình $\frac{12}{x^2+x+4} - \frac{3}{x^2+x+2} = 1$
2. Cho hàm số $y = (m-1)x + m^2 - 1$ (m là tham số). Tìm m để đồ thị hàm số là đường thẳng cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB cân
3. Tìm x để biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ đạt giá trị lớn nhất

Bài 3 (4đ)

1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O , có bán kính bằng 2. Biết $\angle BAC = 60^\circ$, đường cao AH . Tính diện tích tam giác ABC
2. Đội cờ vua của trường A thi đấu với đội cờ vua của trường B , mỗi đấu thủ của trường này thi đấu với một đấu thủ của trường kia một trận. Biết rằng tổng số trận đấu bằng 4 lần tổng số cầu thủ của cả hai đội và số cầu thủ của trường B là số lẻ. Tìm số cầu thủ của mỗi đội

Bài 4 (5đ) Cho nửa đường tròn tâm O bán kính R , đường kính AB . Hai điểm E, F thay đổi trên nửa đường tròn sao cho số đo cung AE khác 0 và nhỏ hơn số đo cung AF , biết $EF=R$. Giả sử AF cắt BE tại H , AE cắt BF tại I

1. Chứng minh rằng tứ giác $IEHF$ nội tiếp được trong 1 đường tròn
2. Gọi EG và FQ là các đường cao của tam giác IEF , chứng minh rằng độ dài QG không đổi
3. Chứng minh rằng QG song song với AB

Bài 5. (1 điểm) Giải phương trình : $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7} + 1$

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI 9 HÒA BÌNH NĂM 2010-2011

Bài 1

a) $A = (x+3y)(x-2y)(x+2y)$

1.

$$B = (x+2y+1)(x^2-2xy+4y^2)$$

2. $a = \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = 6$

Bài 2.

1. Học sinh lập luận được x^2+x+4 và x^2+x+2 khác 0 rồi quy đồng đưa về phương trình dạng $9(x^2+x)+12 = (x^2+x+4)(x^2+x+2)$

Biến đổi được về dạng $(x^2+x-4)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

2. Lập luận được để đồ thị hàm số là đường thẳng cắt hai trục tọa độ tại điểm A và B sao cho tam giác OAB cân thì đồ thị hàm số đã cho song song với đường thẳng $y = x$ (hoặc $y = -x$)

Từ đó dẫn đến $\begin{cases} m-1=1 \\ m^2-1 \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m-1=-1 \\ m^2-1 \neq 0 \end{cases}$. Giải hệ hai phương trình ta tìm được $m=2$ hoặc $m=0$ thỏa mãn

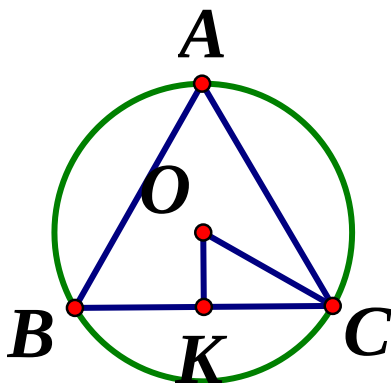
3. Ta viết được $A = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$

$$\text{Ta có } \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \geq 1-2 = -1$$

Vậy Min $A = -1$ khi $x=0$

Bài 3.

1.



Gọi K là trung điểm của BC, để có $\angle KOC = 60^\circ$

Xét tam giác vuông OKC có $OC = 2$. Tính được $KC = OC \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$

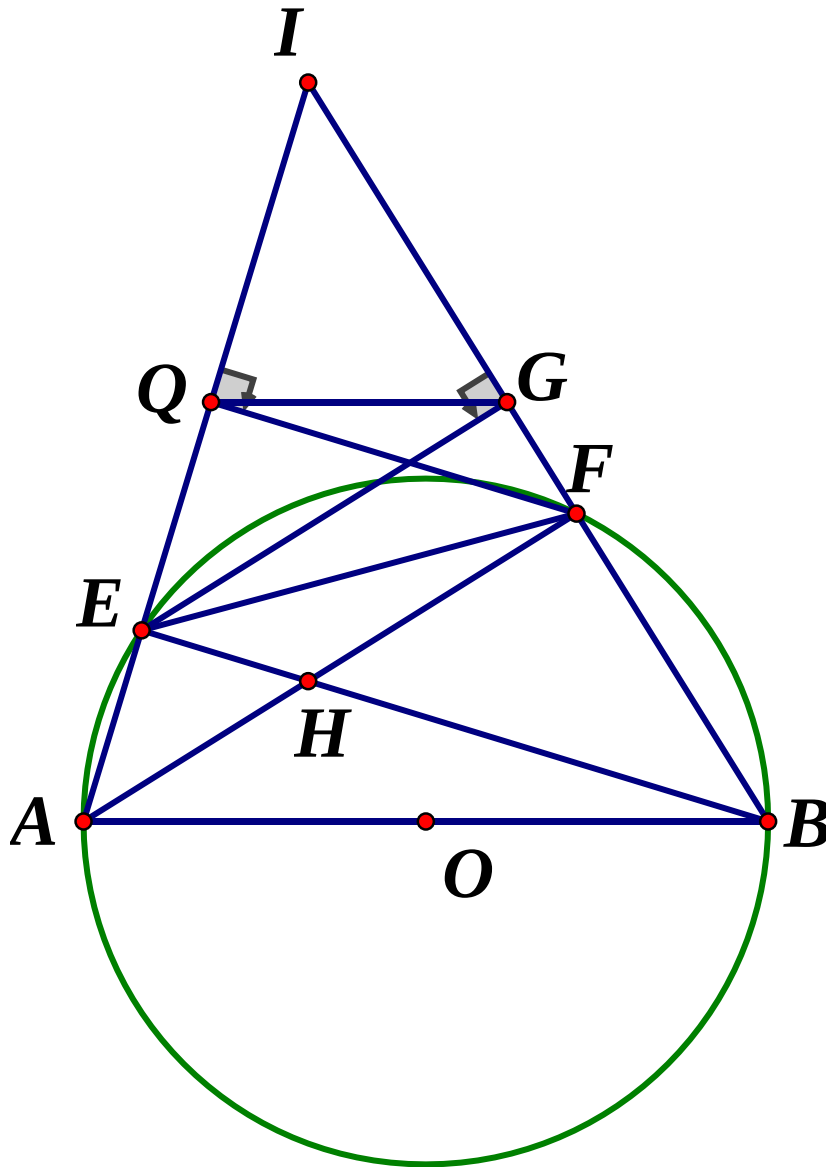
Tính được $BC = 2\sqrt{3}$, suy ra diện tích tam giác ABC là $S = 3\sqrt{3}$

2. Gọi số cầu thủ đội trường A là x, số cầu thủ đội trường B là y

Ta có phương trình $xy = 4(x + y) \Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 16$

Ta lập luận và tìm được $x = 20$; $y = 5$

Bài 4.



1. Vì $\angle IEH = \angle IFH = 90^\circ$ nên IHEF nội tiếp đường tròn

2. Ta dễ dàng chứng minh được $\triangle IQG$ đồng dạng với $\triangle IFE$ (góc – góc)

$$\text{Từ đó có } \frac{QG}{EF} = \frac{IG}{IE} = \frac{1}{2}; QG = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}R \text{ (dpcm)}$$

3. Chứng minh được ΔIAB đồng dạng ΔIEF (g.g) kết hợp với câu 2 ta có

$$\Delta IQG \sim \Delta IAB \text{ suy ra } \frac{IQ}{IA} = \frac{IG}{IB} \text{ dẫn đến } QG \text{ song song với } AB$$

Bài 5. Học sinh tìm được ĐK $1 \leq x \leq 7$ và biến đổi phương trình về dạng tích $(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})=0$ Học sinh giải phương trình tích tìm được $x=5$ hoặc $x=4$ đều thỏa mãn.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2015-2016
MÔN THI : TOÁN**

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $M = \frac{3a + \sqrt{9a-3}}{a + \sqrt{a-2}} - \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+2}} + \frac{\sqrt{a-2}}{1-\sqrt{a}}$ với $a \geq 0; a \neq 1$

- Rút gọn biểu thức M
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để biểu thức M nhận giá trị nguyên.

Bài 2 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}} = 9$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = 48 \\ xy + y^2 + yz = 12 \\ xz + yz + z^2 = 84 \end{cases}$$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Cho $a = \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \dots \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_{2016 \text{ thừa số } \sqrt{2}}$ và $b = \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \dots \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_{3016 \text{ thừa số } \sqrt{2}}$ Chứng minh rằng a và b có cùng chữ số hàng đơn vị

b) Cho hàm số $y = ax + a + 1$ với a là tham số, $a \neq 0$ và $a \neq -1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đồ thị của hàm số đạt giá trị lớn nhất

Bài 4. (3,5 điểm) Cho trước tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M tùy ý. Đường tròn (M;MB) cắt đoạn thẳng AM tại D.

- Chứng minh rằng tam giác BDM là tam giác đều
- Chứng minh rằng $MA = MB + MC$
- Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cung nhỏ BC thì điểm D luôn luôn nằm trên một đường tròn cố định có tâm thuộc đường tròn (O).

Bài 5. (1,0 điểm) Cho $x+y+z=0$ và $xyz \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{1}{z^2 + x^2 - y^2}$$

---HẾT----

ĐÁP ÁN HỌC SINH GIỎI 9 ĐÀ NẴNG 2015-2016

Câu 1.

$$M = \frac{3a+3\sqrt{a}-3}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} - \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} + \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)}{(1-\sqrt{a})(\sqrt{a}+2)}$$

$$M = \frac{3a+3\sqrt{a}-3-(a-1)-(a-4)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} = \frac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)}$$

Ta có:

$$M = \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)} = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$$

$$M = \frac{\sqrt{a}-1+2}{\sqrt{a}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a}-1}$$

M nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{a}-1}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{a}-1$ là ước của 2

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}-1 \in \{-1; 1; 2\} \Leftrightarrow a \in \{0; 4; 9\} \text{ (do } \sqrt{a} \geq 0 \text{)}$$

Câu 2

2a.

Phương trình

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1+4\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{x-1+6\sqrt{x-1}+9} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+3)^2} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+2 + \sqrt{x-1}+3 = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$$

2b

Cộng 3 phương trình của hệ ta được $(x+y+z)^2 = 144 \Leftrightarrow x+y+z = \pm 12$

$$\text{Mặt khác hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y+z) = 48 \\ y(x+y+z) = 12 \\ z(x+y+z) = 84 \end{cases} \text{ kết hợp với trên ta có hai trường hợp sau}$$

*) Với $x+y+z = -12$ hệ có nghiệm $(x; y; z) = (-4; -1; -7)$

*) Với $x+y+z = 12$ hệ có nghiệm $(x; y; z) = (4; 1; 7)$

Câu 3

3a. Nhận xét $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 16$ (8 thừa số $\sqrt{2}$)

2016 chia hết cho 8 được 252 như vậy có thể phân số a thành 252 nhóm, mỗi nhóm có giá trị bằng 16 (có hàng đơn vị là 6) nên tích của 252 nhóm này cũng có hàng đơn vị là 6

Suy ra điều phải chứng minh

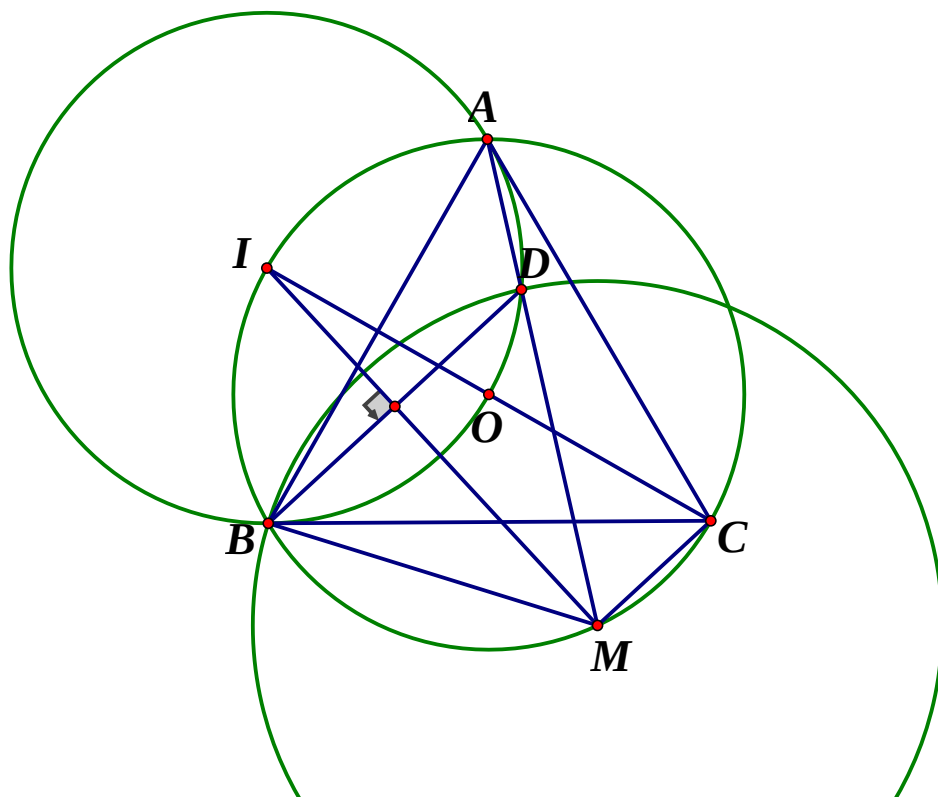
Tam giác vuông OAB tại O nên nếu gọi h là khoảng cách từ O đến đồ thị hàm số

thì

$$\Rightarrow h^2 = \frac{a^2 + 2a + 1}{1 + a^2} = 1 + \frac{2a}{1 + a^2} \leq 1 + \frac{2|a|}{1 + a^2} \leq 2.$$

là lớn nhất.

Câu 4.



- a) $MB = MD$ (bán kính đường tròn (M))

$BMD = BCA = 60^0$ (cùng chẵn cung AB)

Nên tam giác BMD đều

- b) Hai tam giác ABD và CBM bằng nhau vì $AB = CB$; $BD = BM$

$$\text{Và } \angle ABD = 60^\circ - \angle DBC = \angle CBM \Rightarrow DA = MC$$

$$\Rightarrow \mathbf{MA} = \mathbf{MD} + \mathbf{DA}$$

Mà $MD=MB$ vậy $MA=MB+MC$

- c) Gọi I là giao điểm của (O) với phân giác CO (trong tam giác đều ABC)
 $\Rightarrow$ I là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và I là điểm cố định thuộc (O)
 Nên MI là phân giác BMD (góc nội tiếp chắn cung AB của đường tròn (O))
 Nên MI là trung trực đoạn thẳng BD vì BDM là tam giác đều
 Suy ra ID=IB
 Do đó D luôn thuộc đường tròn (I;IB) cố định có tâm thuộc (O)

Câu 5.

Ta có : $x+y+z=0 \Rightarrow x=-(y+z); y=-(z+x); z=-(x+y)$

$$\Rightarrow x^2 = (y+z)^2; y^2 = (z+x)^2; z^2 = (x+y)^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{x^2 + y^2 - (x+y)^2} + \frac{1}{y^2 + z^2 - (y+z)^2} + \frac{1}{z^2 + x^2 - (x+z)^2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{-2xy} + \frac{1}{-2yz} + \frac{1}{-2xz} \Rightarrow P = \frac{x+y+z}{-2xyz} = 0$$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
AN GIANG
ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS
Năm học 2013-2014
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài : 150 phút
Ngày thi: 15/3/2014**

Bài 1 (3đ) Tính

$$T = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

Bài 2 (4đ) Cho đa thức $P(x) = x^5 - x; g(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)x$

- Hãy phân tích đa thức $P(x) - g(x)$ thành tích các nhân tử
- Chứng tỏ rằng nếu x là số nguyên thì P(x) luôn chia hết cho 5

Bài 3 (4,0 đ)

Cho $x_1; x_2 \in [0;1]$

- Chứng minh rằng $(1+x_1)^2 \geq 4x_1^2$
- Chứng minh rằng : $(1+x_1+x_2)^2 \geq 4(x_1^2+x_2^2)$

Bài 4(4,0 đ)

Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{5}x - \sqrt{3}y = \sqrt{5} + \sqrt{3} \\ (\sqrt{3}-1)x - \sqrt{5}y = \sqrt{5} - 3 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình
- Tìm một phương trình bậc nhất hai ẩn x; y nhận 1 nghiệm là nghiệm của hệ phương trình đã cho và một nghiệm là (0;0)

Bài 5 (5,0 đ)

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 4$ cm. Lấy một điểm M trên đường tròn sao cho $\widehat{BAM} = 30^\circ$. Tiếp tuyến với đường tròn tại điểm A và điểm M cắt nhau tại C. CM cắt AB tại D.

- a) Chứng minh rằng BM song song với OC
- b) Tính diện tích tam giác ACD

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI AN GIANG NĂM 2013-2014

Bài 1.

$$T = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{n-n-1} = -(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$$

$$\begin{aligned} T &= -(\sqrt{1}+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) - (\sqrt{3}+\sqrt{4}) + (\sqrt{4}+\sqrt{5}) - \dots - (\sqrt{99}+\sqrt{100}) \\ &= -1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{5} - \dots - \sqrt{99} - \sqrt{100} \\ &= -1 - \sqrt{100} = -11 \end{aligned}$$

Bài 2

2a.

$$P(x) = x^5 - x; g(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^2 - 1)x$$

$$P(x) - g(x) = x^5 - x - (x^2 - 4) \cdot (x^2 - 1)x$$

$$= x^5 - x - (x^4 - 5x^2 + 4)x$$

$$= x^5 - x - (x^5 - 5x^3 + 4x) = 5x^3 - 5x$$

$$= 5x(x^2 - 1) = 5x(x-1)(x+1)$$

$$\text{Vậy } P(x) = g(x) + 5x(x-1)(x+1)$$

2b.

Theo trên $P(x) - g(x) = 5x(x-1)(x+1)$ luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên x

Mặt khác $g(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)x = (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ nên $g(x)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow g(x)$ chia hết cho 5

Vậy $P(x) = g(x) + 5x(x-1)(x+1)$ luôn chia hết cho 5

Câu 3

$$\text{3a. Xét } 4x_1^2 - (1+x_1)^2 = (2x_1 - 1 - x_1)(2x_1 + 1 + x_1) = (x_1 - 1)(3x_1 + 1)$$

$$\text{Do } x_1 \in [0;1] \Rightarrow (x_1 - 1) \leq 0; (3x_1 + 1) > 0$$

$$\text{Vậy } 4x_1^2 - (1+x_1)^2 = (x_1 - 1)(3x_1 + 1) \leq 0$$

Hay $(1+x_1)^2 \geq 4x_1^2$ dấu bằng xảy ra khi $x_1 = 1$

3b.

$$\text{Do } (1+x_1+x_2)^2 \geq 4(x_1^2+x_2^2) \quad \text{Ta được } x_1^2+x_2^2 \leq x_1+x_2$$

$$x_1, x_2 \in [0;1] \Rightarrow x_1^2 \leq x_1; x_2^2 \leq x_2$$

Xét

$$(1+x_1+x_2)^2 - 4(x_1^2+x_2^2) \geq (1+x_1+x_2)^2 - 4(x_1+x_2)$$

$$\geq 1+2(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2 - 4(x_1+x_2)$$

$$\geq 1-2(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2 = (1-x_1-x_2)^2 \geq 0$$

$$\text{Vậy } (1+x_1+x_2)^2 \geq 4(x_1^2+x_2^2)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} x_1^2 = x_1 \\ x_2^2 = x_2 \\ 1-x_1-x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 1 \text{ hoặc } x_1 = 1; x_2 = 0$$

Câu 4

4a.

$$\begin{cases} \sqrt{5}x - \sqrt{3}y = \sqrt{5} + \sqrt{3} \\ (\sqrt{3}-1)x - \sqrt{5}y = \sqrt{5} - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \sqrt{15}y = 5 + \sqrt{15} \\ (3-\sqrt{3})x - \sqrt{15}y = \sqrt{15} - 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \sqrt{15}y = 5 + \sqrt{15} \\ (5-3+\sqrt{3})x = 5 + 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \sqrt{15}y = 5 + \sqrt{15} \\ x = \frac{5+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ 5(1+\sqrt{3}) - \sqrt{15}y = 5 + \sqrt{15} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ y = -1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

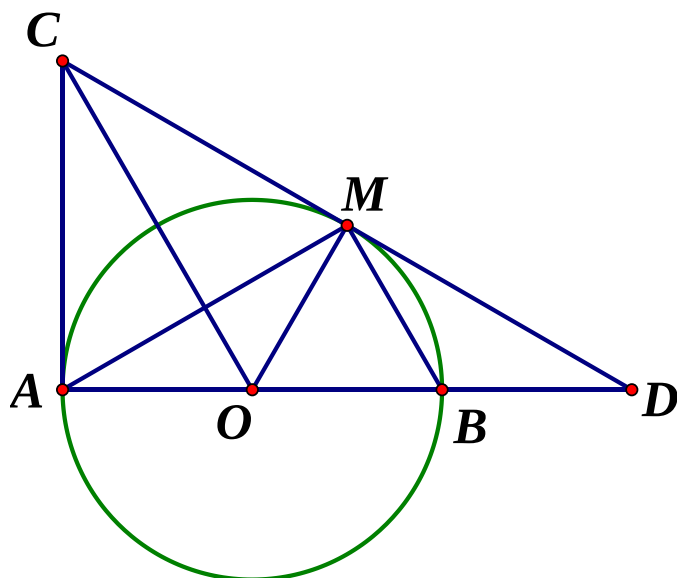
4b. Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $ax + by = c$

Phương trình có nghiệm $(0;0)$ suy ra $c = 0$

$$\text{Phương trình có nghiệm } (1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{5}) \Rightarrow a(1+\sqrt{3}) + b(-1+\sqrt{5}) = 0$$

Ta có nhiều phương trình như thế nên có thể chọn $a = 1-\sqrt{5}; b = 1+\sqrt{3}$ vậy một phương trình thỏa đề bài đó là: $(1-\sqrt{5})x + (1+\sqrt{3})y = 0$

Câu 5



5a

Theo đề bài ta có $\angle BAM = 30^\circ$, tam giác AMB vuông tại M (do góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle MBO = 60^\circ (*)$

Tam giác MOB cân có $\angle B = 60^\circ$ nên tam giác MOB đều $\Rightarrow \angle AOM = 120^\circ$

CA, CM là hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ điểm C nên CO là đường phân giác của góc ACM, hay CO là phân giác của góc AOM $\Rightarrow \angle COA = 60^\circ (**)$

Từ (*) và (**) suy ra BM song song OC (góc đồng vị)

5b

Nhận xét: Ba tam giác OAC, OMC và OMB là ba tam giác vuông bằng nhau do có một cạnh góc vuông bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau vậy $S_{ACD} = 3S_{ACO}$

Tam giác ACO vuông có cạnh góc vuông $OA = 2 \text{ cm}$;

$$\angle AOC = 60^\circ \Rightarrow AC = OA \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{ACO} = \frac{1}{2} AO \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Vậy diện tích tam giác ACD là $S_{ACD} = 6\sqrt{3} (\text{cm}^2)$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NAM
ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH BẬC THCS

Năm học : 2017-2018

Môn thi : TOÁN

Thời gian: 150 phút

Ngày thi : 17/4/2018

Câu 1. (5,0 điểm)

a). Cho biểu thức $A = \frac{x+8}{x\sqrt{x}+8} + \frac{1}{x-2\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x+4}-4\sqrt{x}}{x-4}$

Rút gọn biểu thức A. Tìm các số nguyên x để A là số nguyên

b) Cho ba số thực a, b, c sao cho $1 \leq a \leq 2; 1 \leq b \leq 2; 1 \leq c \leq 2$

Chứng minh $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \leq 7$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 - 2x + 3 - 2m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ trong đó có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại

b) Giải phương trình : $2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2} = 3-x$

Câu 3 (4,0 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ thì $(n+2)(n+1)(n+8)$ không thể là lập phương của một số tự nhiên

b) Cho số nguyên tố $p(p > 3)$ và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$. Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p+a+1)$ là số chính phương.

Câu 4 (3,5 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4 cm. E là điểm nằm trên cạnh BC (E khác B và C). Đường thẳng qua B, vuông góc với đường thẳng DE tại H và cắt đường thẳng CD tại F, Gọi K là giao điểm của AH và BD.

a) Chứng minh tứ giác KDCE nội tiếp trong đường tròn và ba điểm K, E, F thẳng hàng

b) Khi E là trung điểm cạnh BC, tính diện tích tứ giác BKEH

Câu 5. (3,5đ)

Cho hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Tiếp tuyến tại A của (C_2) cắt (C_1) tại M (M khác A). Tiếp tuyến tại A của (C_1) cắt (C_2) tại điểm N (N khác A). Đường thẳng MB cắt (C_2) tại P (P khác B). Đường thẳng NB cắt (C_1) tại Q (Q khác B)

a) Chứng minh tam giác AMP, AQN đồng dạng

b) Chứng minh $MB \cdot NA^2 = NB \cdot MA^2$

---Hết---

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẢNG NAM NĂM 2017-2018

Câu 1

1a)

$$A = \frac{x+8}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{1}{x-2\sqrt{x}+4} + \frac{|x-2|}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$$
$$= \frac{3\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)} = \frac{3}{x-2\sqrt{x}+4}$$

$\Rightarrow x-2\sqrt{x}+4$ là ước của 3; chỉ có $x-2\sqrt{x}+4=3$ có nghiệm $x=1$ thỏa mãn ĐK

1b) Khử mẫu ta được $a^2c+ab^2+bc^2+a^2b+ac^2+b^2c \leq 7abc$

Giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow (b-a)(b-c) \leq 0 \Leftrightarrow b^2+ac \leq ba+bc$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2a+a^2c \leq abc+a^2b \\ b^2c+ac^2 \leq abc+bc^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2c+ab^2+ac+b^2c \leq 2abc+a^2b+bc^2$$

$$\Rightarrow a^2c+ab^2+bc^2+a^2b+ac^2+b^2c \leq 2abc+2a^2b+2bc^2$$

$$\text{Chứng minh } 2abc+2a^2b+2bc^2 \leq 7abc \Leftrightarrow 2a^2b+2bc^2 \leq 5abc \Leftrightarrow 2a^2+2c^2 \leq 5ac$$

$$\Leftrightarrow (2a-c)(c-2a) \leq 0$$

Câu 2

2a) ĐK có hai nghiệm phân biệt $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m-2 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

$$\text{Khi } m > 1 \text{ ta có } \begin{cases} x_1 = x_2^2 & (1) \\ x_1x_2 = 3-2m & (2) \\ x_1+x_2 = 2 & (3) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2): $x_2^2+x_2-2=0 \Leftrightarrow x_2=1; x_2=-2$

$\Rightarrow x_2=1 \Rightarrow x_2=1 \Rightarrow 3-2m=1 \Leftrightarrow m=1$ (loại)

$\Rightarrow x_2=-2 \Rightarrow x_1=4 \Rightarrow -8=3-2m \Leftrightarrow m=11/2$ (chọn)

2b) $2\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x^2}=3-x$. ĐK: $|x| \leq 1$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}-(2-x)+\sqrt{1-x^2}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)-(4-4x+x^2)}{2\sqrt{x-1}+(2-x)} + \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2}{2\sqrt{x-1}+(2-x)} + \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}+2-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1} \right) = 0$$

Vì $|x| \leq 1$ nên trong ngoặc dương. Do đó phương trình có nghiệm $x=0$

Câu 3

3a. $A = (n+1)(n+2)(n+8)$

+) Khi $n=1 \Rightarrow A=54$ không lập phương

+) Khi $n=2 \Rightarrow A=120$ không lập phương

+) Khi $n > 2$. ta chứng minh A cũng không lập phương

$$A = (n+1)(n+2)(n+8) = n^3 + 11n^2 + 26n + 16 < n^3 + 12n^2 + 48n + 64 = (n+4)^3$$

$$A > (n+3)^2 \Leftrightarrow n^3 + 11n^2 + 26n + 16 > n^3 + 9n^2 + 27n + 27 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 11 > 0$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1+\sqrt{89}}{4} \approx 2,6 \text{ hoặc } n < \frac{1-\sqrt{89}}{4} \approx n = -2,1$$

Suy ra khi $n > 2$ $(n+3)^3 < A < (n+4)^3$ Vậy A không thể là lập phương

3b. $p^2 = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

$\Rightarrow b-a$ và $b+a$ là ước của $p^2 \Rightarrow b-a$ và $b+a$ là ước của p vì p nguyên tố

Vì $b-a < b+a$ nên $b-a=1 \Rightarrow b+a=p^2 \Rightarrow 2a+1=p^2$

Cộng vào hai vế cho $2p+1$ ta có: $2a+2p+2=(p+1)^2 \Rightarrow 2(a+p+1)=(p+1)^2$

Chứng minh a chia hết cho 12

+) Chứng minh a chia hết cho 3

Vì $2a+1=p^2 \Rightarrow 2a=p^2-1$ vì p nguyên tố >3 nên p^2 chia 3 dư 1 $\Rightarrow 2a:3 \Rightarrow a:3$

+) Chứng minh a chia hết cho 4

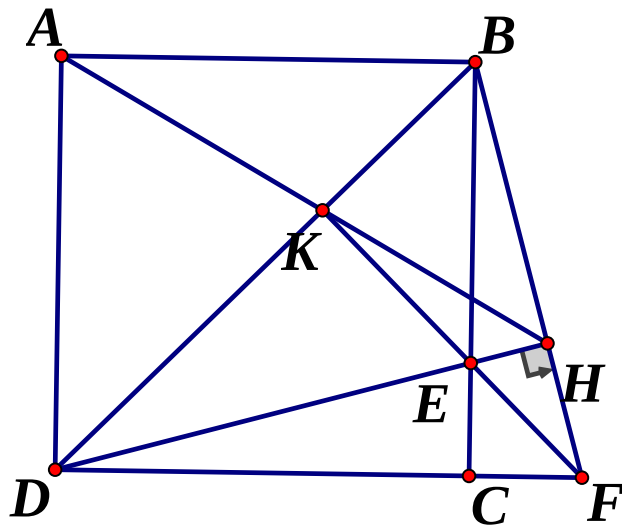
Vì $2a+1=p^2 \Rightarrow 2a=p^2-1$ vì p nguyên tố >3 nên p chia 4 dư 1 hoặc dư 3

*) $p=4k+1 \Rightarrow 2a=16k^2+8k:8 \Rightarrow a:4$

*) $p=4k+3 \Rightarrow 2a=16k^2+24k+8:8 \Rightarrow a:4$

Do đó a chia hết cho 12

Câu 4



a) Chứng minh KDCE nội tiếp

Ta có $\angle BHD = \angle BCD = 90^\circ \Rightarrow BHCD$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle CHF = \angle BDC = 45^\circ$

$\angle ECFH$ nội tiếp $\Rightarrow 45^\circ = \angle CHF = \angle CEF = \angle KDC \Rightarrow KDCE$ nội tiếp

Chứng minh K, E, F thẳng hàng

BC; DH là 2 đường cao $\triangle BDF \Rightarrow FE \perp BD$

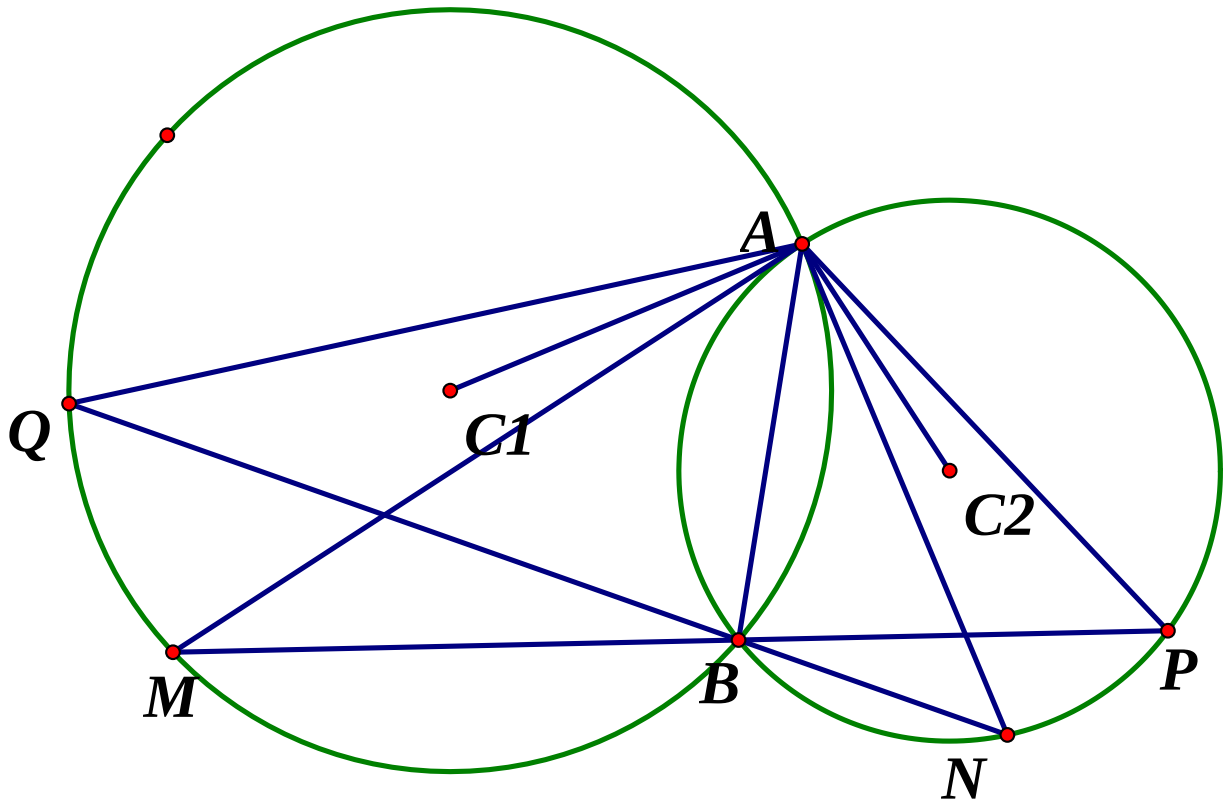
Mà KDCE nội tiếp $\Rightarrow \angle EKD = \angle ECD = 90^\circ \Rightarrow EK \perp BD \Rightarrow K, E, F$ thẳng hàng.

$$b) \triangle BKE \sim \triangle BCD \Rightarrow \frac{S_{BKE}}{S_{BCD}} = \left(\frac{BE}{BD} \right)^2 = \left(\frac{2}{4\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow S_{BKE} = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$$

$$\triangle DCE \sim \triangle BHE \Rightarrow \frac{S_{DCE}}{S_{BHE}} = \left(\frac{DE}{BE} \right)^2 = 6 \Rightarrow S_{BHE} = \frac{1}{5} \cdot S_{DCE} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow S_{BKEH} = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

Câu 5



5a) Chứng minh tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQN

Ta có: $\angle AMP = \angle AQN$ (cùng chắn cung AB)

$\angle APM = \angle ANQ$ (cùng chắn cung AB)

Suy ra tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQN (g-g)

$$\mathbf{5b)} \quad \Delta AMP \sim \Delta AQN \text{ nên } \frac{AB}{NB} = \frac{AM}{NA} = \frac{BM}{AB}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MB.NA = AB.AM \\ NB.MA = AB.NA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MB.NA^2 = AB.AM.NA \\ NB.MA^2 = AB.NA.MA \end{cases}$$

$$\Rightarrow MB.NA^2 = NB.MA^2$$

