

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN CHUYÊN LỚP 10/2018 THPT CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI

Võ Quốc Bá Cẩn – Nguyễn Lê Phước – Nguyễn Mạnh Linh

1. Đề thi

Bài 1. Cho các số thực x, y không âm thỏa mãn điều kiện

$$(x + 1)(y + 1) = 2.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 - \sqrt{2(x^2 + 1)(y^2 + 1)}} + 2 + xy.$$

Bài 2. Cho các số thực không âm x, y, z thay đổi thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = x + y + z.$$

Bài 3.

a) Cho a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Xét biểu thức

$$M = \frac{(a + b)^2}{a^3 + ab^2 - a^2b - b^3}.$$

Chứng minh rằng M không thể nhận giá trị nguyên.

b) Cho a, b là hai số nguyên dương, đặt

$$A = (a + b)^2 - 2a^2, \quad B = (a + b)^2 - 2b^2.$$

Chứng minh rằng A và B không đồng thời là số chính phương.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại D và E . Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với PC . Đường thẳng qua B song song với OP cắt PC tại Q . Chứng minh rằng

a) $PB = PQ$.

b) O là trực tâm của tam giác ADE .

c) $\angle PAO = \angle QAC$.

Bài 5. Có 45 người tham gia một cuộc họp. Quan sát sự quen nhau giữa họ, người ta thấy rằng: nếu hai người có số người quen bằng nhau thì lại không quen nhau. Gọi S là số cặp người quen nhau trong cuộc họp (cặp người quen nhau không kể thứ tự sắp xếp giữa hai người trong cặp).

a) Xây dựng ví dụ để $S = 870$.

b) Chứng minh rằng $S \leq 870$.

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1. Cho các số thực x, y không âm thỏa mãn điều kiện

$$(x + 1)(y + 1) = 2.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 - \sqrt{2(x^2 + 1)(y^2 + 1)}} + 2 + xy.$$

Lời giải. Đặt $S = x + y$ và $T = xy$. Từ giả thiết, ta có $S + T = 1$, suy ra

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \sqrt{2(x^2 + 1)(y^2 + 1)} + 2 &= S^2 - 2T + 2 - \sqrt{2[(1 - T)^2 + S^2]} \\ &= S^2 - 2(1 - S) + 2 - \sqrt{2(S^2 + S^2)} \\ &= S^2. \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$P = S + T = 1.$$

Vậy giá trị của biểu thức P cần tính là 1. □

Bài 2. Cho các số thực không âm x, y, z thay đổi thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = x + y + z.$$

Lời giải. **Giá trị lớn nhất của P :** Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x^2y^2 + 1 \geq 2xy, \quad y^2z^2 + 1 \geq 2yz, \quad z^2x^2 + 1 \geq 2zx.$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại theo vế, sau đó cộng hai vế của bất đẳng thức thu được với $x^2 + y^2 + z^2$, ta được

$$(x + y + z)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3 = 9.$$

Từ đó suy ra

$$Q \leq 3.$$

Mặt khác, dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$ nên ta có kết luận $\max Q = 3$.

Giá trị nhỏ nhất của P : Ta sẽ chứng minh $Q \geq \sqrt{6}$ với dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x = \sqrt{6}$, $y = z = 0$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2xy + x^2y^2 \leq x^2 + y^2 + x^2y^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6,$$

từ đó suy ra

$$xy \leq \sqrt{7} - 1 < 2.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$yz < 2, \quad zx < 2.$$

Do đó, ta có

$$Q^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \geq x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 6,$$

hay

$$Q \geq \sqrt{6}.$$

Vậy $\min Q = \sqrt{6}$. □

Bài 3.

a) Cho a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Xét biểu thức

$$M = \frac{(a+b)^2}{a^3 + ab^2 - a^2b - b^3}.$$

Chứng minh rằng M không thể nhận giá trị nguyên.

b) Cho a, b là hai số nguyên dương, đặt

$$A = (a+b)^2 - 2a^2, \quad B = (a+b)^2 - 2b^2.$$

Chứng minh rằng A và B không đồng thời là số chính phương.

Lời giải. **a)** Ta có biến đổi

$$M = \frac{(a+b)^2}{(a-b)(a^2+b^2)}.$$

Giả sử M là số nguyên, khi đó ta có $(a+b)^2$ chia hết cho a^2+b^2 . Suy ra $2ab$ chia hết cho a^2+b^2 . Điều này vô lý do

$$0 < 2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2 < a^2 + b^2.$$

Vậy M không thể là số nguyên.

b) Giả sử tồn tại các số nguyên dương a, b sao cho $(a+b)^2 - 2a^2$ và $(a+b)^2 - 2b^2$ đều là số chính phương. Trong các cặp số nguyên dương (a, b) như vậy, ta xét cặp sao cho a nhỏ nhất. Đặt

$$(a+b)^2 - 2a^2 = x^2, \quad (a+b)^2 - 2b^2 = y^2$$

với x, y nguyên dương. Ta có

$$(a + b)^2 - x^2 = 2a^2$$

nên $a + b$ và x cùng tính chẵn lẻ, suy ra $(a + b)^2 - x^2$ chia hết cho 4. Từ đó ta có $2a^2$ chia hết cho 4, suy ra a chia hết cho 2.

Chứng minh tương tự, ta cũng có b chia hết cho 2, suy ra x, y chẵn. Từ đó, ta có

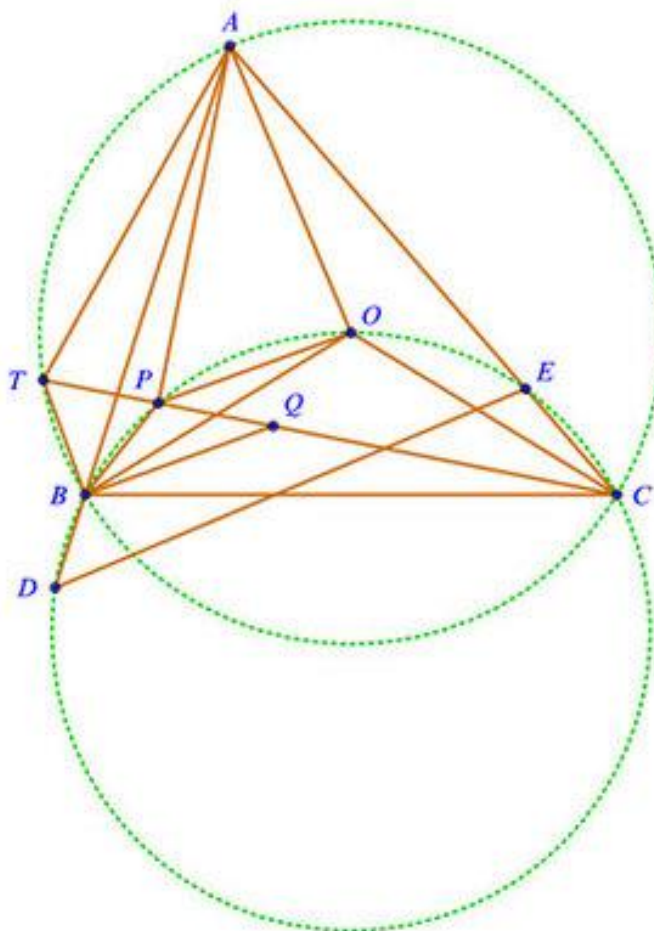
$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

đều là số chính phương. Do đó cặp số $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ cũng thỏa mãn yêu cầu. Điều này mâu thuẫn với cách chọn cặp (a, b) . Vậy với mọi a, b nguyên dương, các số A, B không thể đồng thời là số chính phương. $\square$

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại D và E . Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với PC . Đường thẳng qua B song song với OP cắt PC tại Q . Chứng minh rằng

- a) $PB = PQ$.
- b) O là trực tâm của tam giác ADE .
- c) $\angle PAO = \angle QAC$.

Lời giải. a) Ta có $\angle BPQ = \angle BOC$ và $\angle PQB = \angle OPQ = \angle OBC$ nên các tam giác PBQ và OCB đồng dạng (g-g). Mà $OB = OC$ nên ta có $PB = PQ$.



b) Ta có $\angle OBE = \angle OCE = \angle OAC$, mà $\angle OBA = \angle OAB$ nên $\angle EAB = \angle EBA$. Từ đó suy ra $EA = EB$. Lại có $OA = OB$ nên $OE \perp AB$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $OD \perp AC$ nên O là trực tâm của tam giác ADE .

c) Gọi T là giao điểm thứ hai của CP và (O) . Ta có $\angle BPC = \angle BOC = 2\angle BTC$ nên $PT = PB$. Mà $PB = PQ$ nên $PT = PQ$. Mà $\angle APQ = 90^\circ$ nên

$$\angle PAQ = \angle PAT = 90^\circ - \angle ATP = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = \angle OAC.$$

Từ đó, ta có $\angle PAO = \angle QAC$. □

Bài 5. Có 45 người tham gia một cuộc họp. Quan sát sự quen nhau giữa họ, người ta thấy rằng: nếu hai người có số người quen bằng nhau thì lại không quen nhau. Gọi S là số cặp người quen nhau trong cuộc họp (cặp người quen nhau không kể thứ tự sắp xếp giữa hai người trong cặp).

a) Xây dựng ví dụ để $S = 870$.

b) Chứng minh rằng $S \leq 870$.

Lời giải. **a)** Chia 45 người thành 9 nhóm, nhóm thứ i có i người ($1 \leq i \leq 9$). Ta xét ví dụ khi mỗi người ở một nhóm đều quen tất cả mọi người ở nhóm khác, nhưng không quen ai ở chính nhóm mình. Nói cách khác, mỗi người ở nhóm i quen đúng $45 - i$ người khác. Khi đó

$$S = \frac{1}{2}(1 \cdot 44 + 2 \cdot 43 + \cdots + 9 \cdot 36) = 870.$$

b) Gọi a_i là số người quen đúng i người khác ($1 \leq i \leq 44$). Nếu một người P quen i người thì anh ta không quen ai trong a_i người này, nghĩa là P quen nhiều nhất $45 - a_i$ người, hay $i \leq 45 - a_i$, suy ra $a_i \leq 45 - i$. Ta có $a_1 + \cdots + a_{44} = 45$ và

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + 44a_{44}) \\ &\leq \frac{1}{2}(36a_1 + 36a_2 + \cdots + 36a_{36} + 37a_{37} + \cdots + 44a_{44}) \\ &= \frac{1}{2}(36(a_1 + a_2 + \cdots + a_{44}) + a_{37} + 2a_{38} + \cdots + 8a_{44}) \\ &\leq \frac{1}{2}(36 \cdot 45 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + \cdots + 8 \cdot 1) \\ &= 870. \end{aligned}$$

Khẳng định được chứng minh. □