

Câu 1: (2,5 điểm)

- a) Rút gọn biểu thức $P = 3\sqrt{5} + \sqrt{20}$
- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$
- c) Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + m$ đi qua điểm $A(0;3)$

Câu 2: (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - mx + m - 4 = 0$ (1), (x là ẩn số và m là tham số).

- a) Giải phương trình (1) khi $m=8$.
- b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .
Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của m để $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) < 0$.

Câu 3: (1,5 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một hình chữ nhật có chu vi bằng 28 cm. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật, biết rằng nếu tăng chiều dài thêm 1 cm và tăng chiều rộng thêm 2 cm thì diện tích của hình chữ nhật đó tăng thêm 25 cm^2 .

Câu 4: (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và đường cao AK . Vẽ đường tròn tâm (O) đường kính BC . Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm; M và B nằm trên cùng nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AO). Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng MN và AK . Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.
- b) KA là tia phân giác của góc MKN .
- c) $AN^2 = AK \cdot AH$
- d) H là trực tâm của tam giác ABC .

Câu 5: (0,5 điểm)

Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a + b \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{25}{ab} + ab$$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN TUYENSINH247.COM

Câu 1:

Phương pháp:

+) Sử dụng công thức: $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$.

+) Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số.

+) Thay tọa độ của điểm A vào công thức hàm số sau đó giải phương trình tìm m.

Cách giải:

a) Rút gọn biểu thức: $P = 3\sqrt{5} + \sqrt{20}$.

$$P = 3\sqrt{5} + \sqrt{20} = 3\sqrt{5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } P = 5\sqrt{5}.$$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x, y) = (3; 1)$.

c) Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + m$ đi qua điểm $A(0; 3)$.

Đồ thị hàm số $y = x + m$ đi qua điểm $A(0; 3)$ nên ta có:

$$3 = 0 + m \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 3$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 2:

Phương pháp:

+) Thay $m = 8$ vào phương trình (1) sau đó dùng công thức nghiệm để giải phương trình hoặc đưa phương trình về dạng phương trình tích.

+) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \Leftrightarrow \Delta > 0 \quad \forall m$.

+) Áp dụng hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ và bất đẳng thức bài cho để tìm điều kiện của m .

+) Kết hợp với điều kiện $m \neq Z^+$ để kết luận giá trị của m .

Cách giải:

Cho phương trình $x^2 - mx + m - 4 = 0$ (1), (x là ẩn số và m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 8$.

Thay $m = 8$ vào phương trình ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0.$$

$$\text{Có: } \Delta' = 4^2 - 4 = 12 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt: } \begin{cases} x_1 = 4 + 2\sqrt{3} \\ x_2 = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy với $m = 8$ thì phương trình có tập nghiệm $S = \{4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}\}$.

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với mọi m . Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của m để $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) < 0$.

$$x^2 - mx + m - 4 = 0 \quad (1),$$

$$\text{Ta có: } \Delta = m^2 - 4(m - 4) = m^2 - 4m + 16 = (m - 2)^2 + 12 > 0 \quad \forall m.$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 4 \end{cases}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } (5x_1 - 1)(5x_2 - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 25x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 25(m-4) - 5m + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 20m < 99$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{99}{20} = 4,95.$$

Vậy $m \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn bài toán là: $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Câu 3:

Phương pháp:

Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

- +) Gọi ẩn và đặt điều kiện cho ẩn.
- +) Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và đại lượng đã biết.
- +) Dựa vào giả thiết của bài toán để lập phương trình hoặc hệ phương trình.
- +) Giải phương trình hoặc hệ phương trình vừa lập để tìm ẩn và đối chiếu với điều kiện của ẩn rồi kết luận.

Cách giải:

Một hình chữ nhật có chu vi bằng 28 cm. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật, biết rằng nếu tăng chiều dài thêm 1 cm và tăng chiều rộng thêm 2 cm thì diện tích của hình chữ nhật đó tăng thêm 25 cm².

Gọi chiều dài của hình chữ nhật là x (cm), chiều rộng của hình chữ nhật là y (cm), ($0 < y < x < 14$).

Nửa chu vi của hình chữ nhật là: $x + y = 28 : 2 \Leftrightarrow x + y = 14$ (1).

Diện tích của hình chữ nhật ban đầu là: $xy \text{ (cm}^2\text{)}$.

Chiều dài mới của hình chữ nhật sau khi tăng thêm 1 cm là $x+1 \text{ (cm)}$.

Chiều rộng mới của hình chữ nhật sau khi tăng thêm 2 cm là $y+2 \text{ (cm)}$.

Diện tích của hình chữ nhật sau khi tăng chiều dài và chiều rộng là: $(x+1)(y+2) = xy + 2x + y + 2 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Theo đề bài ta có phương trình: $xy + 2x + y + 2 = xy + 25 \Leftrightarrow 2x + y = 23 \text{ (2)}$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 2x + y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 14 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \text{ (m)} \\ y = 5 \text{ (m)} \end{cases}$$

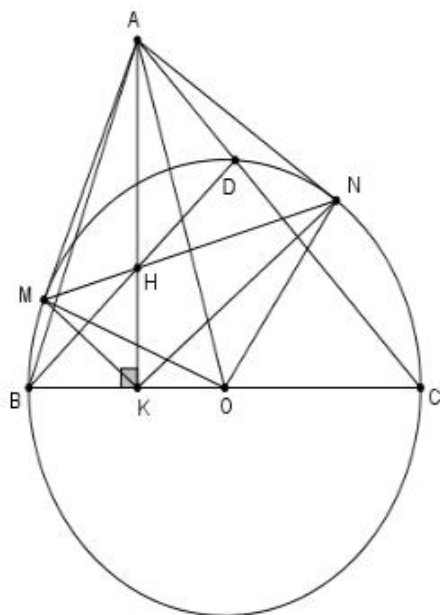
Vậy chiều dài hình chữ nhật ban đầu là 9 cm , chiều rộng là 5 cm .

Câu 4.

Phương pháp :

- a) Chứng minh tứ giác AMKO có hai đỉnh M, K cùng nhìn AO dưới các góc bằng nhau.
- b) Chứng minh tứ giác ANOK nội tiếp, dựa vào tính chất hai góc nội tiếp cùng chắn 1 cung bằng nhau chứng minh $\widehat{AKM} = \widehat{AKN}$.
- c) Chứng minh $\triangle AMH \simeq \triangle AKM$ và sử dụng tính chất $AM = AN$.
- d)

Cách giải:



a) Tứ giác AMKO nội tiếp đường tròn.

Ta có : $\widehat{AMO} = 90^\circ$ (Do AM là tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại M)

Ta có $\widehat{AMO} = \widehat{AKO} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow$ Tứ giác AMKO có hai đỉnh M, K kề nhau cùng nhìn cạnh AO dưới 1 góc 90°

$\Rightarrow$ Tứ giác AMKO là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn 1 cạnh dưới các góc bằng nhau).

b) KA là tia phân giác của góc MKN.

Ta có : $\widehat{ANO} = 90^\circ$ (Do AN là tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại N)

Xét tứ giác ANOK có $\widehat{ANO} + \widehat{AKO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác ANOK là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°)

Tứ giác AMKO nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{AOM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Tứ giác ANOK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{AON}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

Mà $\widehat{AOM} = \widehat{AON}$ (tính chất hai tiếp tuyến AM và AN cắt nhau tại A).

$\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{AKN} \Rightarrow KA$ là phân giác của góc MKN.

c) $AN^2 = AK \cdot AH$

Ta có $AM = AN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow A$ thuộc trung trực của MN.

$OM = ON (=R) \Rightarrow O$ thuộc trung trực của MN.

$\Rightarrow OA$ là trung trực của MN $\Rightarrow OA \perp MN$.

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AOM}$ (cùng phụ với góc OAM).

Mà $\widehat{AKM} = \widehat{AOM}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{AMN} = \widehat{AMH}$

Xét tam giác AMH và tam giác AKM có :

$\widehat{MAK}$ chung ;

$$\widehat{AKM} = \widehat{AMH} \text{ (cmt) ;}$$

$$\Rightarrow \triangle AMH \sim \triangle AKM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AK}{AM} \Rightarrow AM^2 = AH \cdot AK$$

$$\text{Mà } AM = AN \text{ (cmt)} \Rightarrow AN^2 = AH \cdot AK$$

d) H là trực tâm tam giác ABC.

Bài 5 (VDC) (0,5 điểm)

Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a + b \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{25}{ab} + ab$

Câu 5.

Cách giải :

$$\text{Áp dụng BĐT : } (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{25}{ab} + ab$$

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{49}{2ab} + ab$$

$$S \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} + \frac{49}{2ab} + ab$$

$$S \geq \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{17}{2ab} + \frac{16}{ab} + ab$$

$$\text{Ta có } 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq 4 \Rightarrow \frac{4}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{4} + \frac{17}{2.4} + 2\sqrt{\frac{16}{ab} \cdot ab} = \frac{83}{8}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a=b \\ ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2.$$

$$\text{Vậy } S_{\min} = \frac{83}{8}, \text{ đạt tại } a=b=2.$$

Theo TTHN