

Sai lầm khi tìm cực trị của hàm số

[Bài giảng](#) hôm nay thầy muốn gửi tới các bạn một chú ý nho nhỏ nhưng cũng có thể là to to trong quá trình đi giải toán tìm cực trị. Đó là một trong những **sai lầm khi tìm cực trị** của nhiều thầy cô cũng như học sinh khi làm về dạng toán tìm tham số m để hàm số có cực tiểu hay cực đại tại một điểm x_0 nào đó. Trước khi vào bài tập chính trong bài giảng này chúng ta cùng nhau xem lại 2 định lý sau:

1. "Nếu hàm số có đạo hàm và đạt cực trị tại x_0 thì $y'(x_0) = 0$."
2. "Nếu $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực đại " và "Nếu $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực tiểu"

Bây giờ chúng ta sẽ đi giải bài toán sau:

Cho hàm số $y = x^4 + mx$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

1. Lời giải sai lầm khi tìm cực trị

Khi gặp bài toán dạng này nhiều bạn học sinh đã thực hiện cách giải như sau:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 + m; y'' = 12x^2$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) > 0 \end{cases} (*)$

Bạn đó tính được:

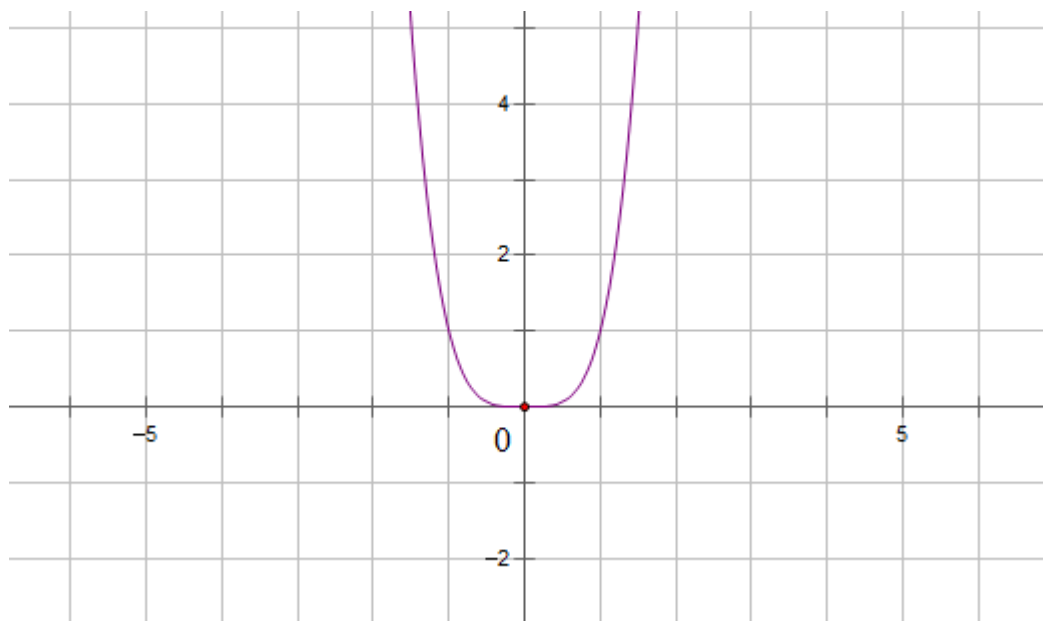
$$1. y'(0) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 0 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

$$2. y''(0) = 0$$

Bạn đó thấy điều kiện (2) không thỏa mãn hệ $(*)$ vì $y''(0) = 0$ trong khi yêu cầu của hệ là $y''(0) > 0$

Kết luận: Vậy hàm số trên không có cực tiểu tại $x = 0$.

Nhưng thực chất khi $m = 0$ thì hàm số trên vẫn có cực tiểu tại $x = 0$. Các bạn có thể giải cụ thể bài toán trên với $m = 0$ và xem thêm đồ thị ở hình dưới sẽ rõ.



Vậy trong lời giải trên đã có sai sót ở chỗ nào? Và cách giải quyết ra sao để bài toán có lời giải đúng? Các bạn hãy cùng nhau theo dõi tiếp.

2. Phân tích sai lầm

Trong lời giải trên bạn học sinh đó đã sử dụng tính chất này: $x = 0$ là điểm cực tiểu suy

ra $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) > 0 \end{cases}$ và coi nó là đúng. (Đây chính là hệ (*) mà bạn đó lập ở trên)

Nhưng thực tế có phải là đúng và được áp dụng như vậy hay không? Thưa các bạn rằng việc các bạn coi mệnh đề trên là đúng và áp dụng vào việc tìm cực trị là một sai lầm nghiêm trọng. Một cách tổng quát thì:

Bạn đó đã sai ở chỗ, bạn đã thừa nhận mệnh đề: "Hàm số có điểm cực tiểu tại $x = x_0$ khi và

chỉ khi $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$ là đúng "

Điều gì khiến bạn dễ mắc sai lầm trên? Nguyên nhân là nằm ở 2 định lý mà thầy đã nói trong phần đầu của bài giảng về cực trị của hàm số. Các bạn chú ý vào định lý thứ 2 nhé, điều mà bạn học sinh trên đã nhầm lẫn.

Định lý thứ hai không sử dụng "khi và chỉ chi" mà chỉ sử dụng "nếu ...thì" trong mệnh đề. Tức là mệnh đề trên chỉ đúng với chiều thuận, còn ngược lại tức là "mệnh đề đảo" của nó thì không khẳng định được nó đúng. Theo như vậy thì bạn học sinh trên đã hiển nhiên coi mệnh

đề đảo của mệnh đề trên là đúng và áp dụng bình thường. Chính vì vậy mà đã dẫn tới sai lầm đáng tiếc khi tìm điều kiện của tham số m trong bài toán cực trị.

Vậy chúng ta có thể đưa ra một khẳng định như sau: **Không được sử dụng** mệnh đề sau (mệnh đề đảo của mệnh đề 2) vào tìm cực trị.

Nếu x_0 là điểm cực đại thì $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$

Nếu x_0 là điểm cực tiểu thì $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$

Vậy giải bài toán trên như thế nào thì sẽ đúng?

Bài giảng bạn nên xem:

[1. Sai lầm thường gặp khi tính tích phân](#)

[2. Sai lầm thường gặp khi viết phương trình tiếp tuyến](#)

3. Lời giải đúng

Ta có hai cách để giải bài toán dạng như này:

Cách 1: Sử dụng bảng biến thiên

Cách 2: Tìm tham số m thỏa mãn hai điều kiện nói trên

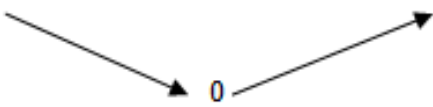
Sau đây thầy sẽ trình bày với chúng ta cách sử dụng bảng biến thiên.

Bước 1: Tính $y' = 4x^3 + m$

Bước 2: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Rightarrow y'(0) = 0 \Leftrightarrow 4.0 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Bước 3: Với $m = 0$ ta có $y' = 4x^3; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$; $y_{(ct)} = 0$.

Kết luận: Vậy với $m = 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Đây là một bài toán đặc biệt nên thầy hướng dẫn chúng ta sử dụng bảng biến thiên. Với cách thứ hai thì các em có thể xem 2 video bài giảng bên dưới đây sẽ rõ hơn. Trong hai video bài giảng này thầy trình bày cụ thể cách tìm điều kiện cho tham số m để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 bất kỳ.

Xem thêm:

[1. Tìm m để hàm số có cực trị p1](#)

[2. Tìm m để hàm số có cực trị p2](#)

3. Lời kết

Qua bài giảng trên mong rằng sau này các bạn sẽ không mắc phải những sai lầm khi tìm cực trị của hàm số nữa. Hãy chỉ cho bạn mình biết nếu họ chưa biết tới sai lầm này. Nếu các bạn có thêm những điều cần chú ý trong giải toán thì hãy chia sẻ cho mọi người trong hộp bình luận bên dưới nhé.

Bài tập về nhà:

Bài 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1)$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

Bài 2: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = 2$