

ĐỀ PHÁT TRIỂN TỪ ĐỀ
MINH HỌA
SỞ GD & ĐT TỈNH NINH BÌNH

KỶ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2024-LẦN 3
Bài thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

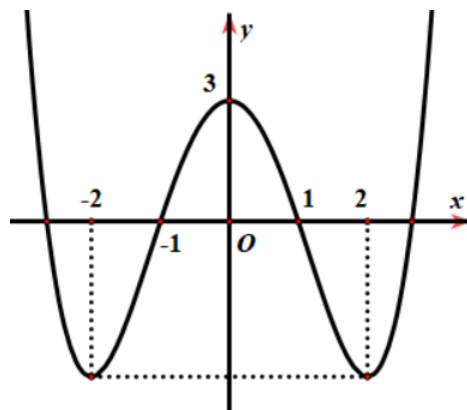
Câu 1. [Mức độ 1] Có bao nhiêu cách chọn ra 1 bạn nam và 1 bạn nữ từ một nhóm gồm 5 bạn nam và 7 bạn nữ?

A. 12. B. 5. C. 35. D. 7.

Câu 2. [Mức độ 1] Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{6}$. Tính u_3 .

A. $u_3 = \frac{2}{3}$. B. $u_3 = \frac{-1}{6}$. C. $u_3 = \frac{1}{18}$. D. $u_3 = \frac{1}{12}$.

Câu 3. [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (với $a \neq 0$) có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 3)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 4. [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-4	$+\infty$	

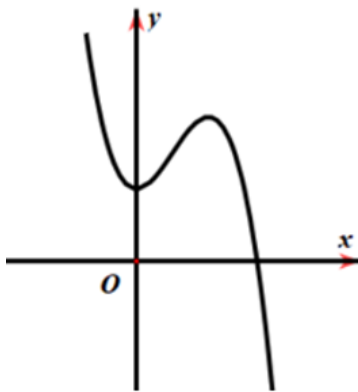
Điểm cực tiểu của hàm số là

A. $x = 0$. B. $y = -4$. C. $x = -2$. D. $y = 1$.

Câu 5. [Mức độ 1] Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{2-x}$ nhận đường thẳng nào sau đây là tiệm cận ngang?

A. $x = 1$. B. $y = -2$. C. $y = 1$. D. $x = 2$.

Câu 6. [Mức độ 1] Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A.** $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$. **B.** $y = -2x^3 - 3x + 1$. **C.** $y = -2x^4 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Câu 7. [Mức độ 1] Đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 8. [Mức độ 1] Với số thực dương x tùy ý, $x\sqrt{x}$ bằng

- A.** $x^{\frac{3}{2}}$. **B.** $x^{\frac{1}{2}}$. **C.** $x^{\frac{5}{2}}$. **D.** $x^{\frac{7}{2}}$.

Câu 9. [Mức độ 1] Tập xác định của hàm số $y = (1-x)^{-3}$ là

- A.** $(-\infty; 1)$. **B.** $\sim$. **C.** $\sim \setminus \{1\}$. **D.** $(1; +\infty)$.

Câu 10. [Mức độ 1] Hàm số $F(x) = \cos 3x$ là một nguyên hàm của hàm số

- A.** $f_1(x) = -\frac{1}{3} \sin 3x$. **B.** $f_2(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$. **C.** $f_3(x) = -3 \sin 3x$. **D.** $f_4(x) = 3 \sin 3x$.

Câu 11. [Mức độ 1] Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $\int \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + C$. **B.** $\int \frac{1}{3x-2} dx = -\frac{1}{3} \ln|3x-2| + C$.

- C.** $\int \frac{1}{3x-2} dx = 3 \ln|3x-2| + C$. **D.** $\int \frac{1}{3x-2} dx = -3 \ln|3x-2| + C$.

Câu 12. [Mức độ 1] Cho $\int_0^2 f(x) dx = 2$ và $\int_0^2 g(x) dx = 5$, khi đó $\int_0^2 [f(x) - 2g(x) - 1] dx$ bằng

- A.** -6. **B.** -9. **C.** -10. **D.** -8.

Câu 13. [Mức độ 1] Cho $\int_1^2 f'(x) dx = 3, f(2) = 10$. Tính $f(1)$.

- A.** -7. **B.** 13. **C.** 7. **D.** -13.

Câu 14. [Mức độ 1] Số phức $z = 3i - 5$ có phần thực là

- A.** $3i$. **B.** 3. **C.** -5. **D.** 5.

Câu 15. [Mức độ 1] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm $M(1; -3)$ biểu diễn số phức nào dưới đây?

- A.** $-3 + i$. **B.** $-3 - i$. **C.** $1 - 3i$. **D.** $1 + 3i$.

Câu 16. [Mức độ 1] Cho số phức $z = -2 + i$. Số phức $2\bar{z}$ bằng

- A.** $-4 + 2i$. **B.** $4 - 2i$. **C.** $-4 - 2i$. **D.** $4 + 2i$.

Câu 17. [Mức độ 1] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 10$ và tam giác ABC có diện tích bằng 6. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $V = 10$. B. $V = 20$. C. $V = 60$. D. $V = 30$.

Câu 18. [Mức độ 1] Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 5$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có các kích thước bằng 4 và 3. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $V = 10$. B. $V = 30$. C. $V = 20$. D. $V = 60$.

Câu 19. [Mức độ 1] Diện tích của mặt cầu có đường kính bằng 8 là

- A. $S = \frac{256\pi}{3}$. B. $S = \frac{64\pi}{3}$. C. $S = 64\pi$. D. $S = 256\pi$.

Câu 20. [Mức độ 1] Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao gấp đôi bán kính đáy là

- A. $V = 18\pi$. B. $V = 36\pi$. C. $V = 54\pi$. D. $V = 81\pi$.

Câu 21. [Mức độ 1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -5; 3)$. Điểm đối xứng của M qua trục hoành có tọa độ là

- A. $(1; 5; -3)$. B. $(-1; -5; 3)$. C. $(-1; -5; -3)$. D. $(-1; 5; 3)$.

Câu 22. [Mức độ 1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z + 1 = 0. \text{ Mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I \text{ và bán kính } R \text{ là}$$

- A. $I(1; 3; -4), R = 5$. B. $I(-1; -3; 4), R = 5$.
C. $I(1; 3; -4), R = \sqrt{26}$. D. $I(-1; -3; 4), R = \sqrt{26}$.

Câu 23. [Mức độ 1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x - 3z + 1 = 0$ có một véc tơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n}_1(2; 0; 3)$. B. $\vec{n}_2(2; -3; 1)$. C. $\vec{n}_3(2; 3; 1)$. D. $\vec{n}_4(2; 0; -3)$.

Câu 24. [Mức độ 1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 3; 2), B(2; 1; 4)$.

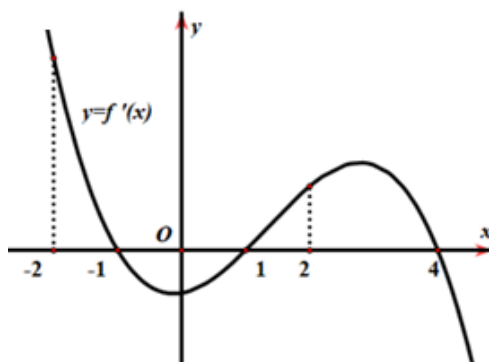
Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B có phương trình là

- A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}$. B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{2}$.
C. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{2}$.

Câu 25. [Mức độ 2+] Gieo một đồng xu cân đối, đồng chất 5 lần liên tiếp. Xác suất để trong 5 lần gieo đó có 2 lần xuất hiện mặt ngửa và 3 lần xuất hiện mặt sấp là

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{5}{16}$. D. $\frac{5}{8}$.

Câu 26. [Mức độ 2] Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (với $a \neq 0$) có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $f(-1) < f(0)$. B. $f(0) > f(1)$. C. $f(1) > f(2)$. D. $f(-2) > f(-1)$.

Câu 27. [Mức độ 2] Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + (a-6)x + b$ có một điểm cực trị là $A(3; -1)$. Tính $f(-1)$?

- A. 16. B. 31. C. 23. D. -39.

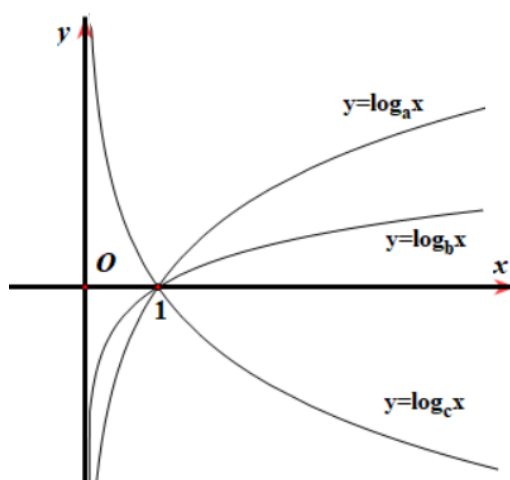
Câu 28. [Mức độ 2] Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + m$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 5]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m thỏa mãn $M \leq 20$?

- A. 45. B. 25. C. 24. D. 52.

Câu 29. [Mức độ 2] Khẳng định nào sau đây luôn đúng với mọi số thực dương a, b thỏa mãn $a^2 = 4b$?

- A. $2\log_2 a = 4 + \log_2 b$. B. $\log_2 a = 4\log_2 b$.
C. $2\log_2 a + \log_2 b = 4$. D. $2\log_2 a - \log_2 b = 2$.

Câu 30. [Mức độ 2] Đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ là các đường cong như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $c < b < a$. B. $c > a > b$. C. $c < a < b$. D. $c > b > a$.

Câu 31. [Mức độ 2] Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 + 2) = \log_2(3x + 6)$ là

- A. $\{4\}$. B. $\{1\}$. C. $\{-1; 4\}$. D. $\{-4; 1\}$.

Câu 32. [Mức độ 2] Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2$ là

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 33. [Mức độ 2] Cho $\int_1^3 \left[f(3x+2) + \frac{1}{x^2} \right] dx = 5$. Tính $I = \int_5^{11} f(x) dx$.

- A. $I = 17$. B. $I = 13$. C. $I = \frac{13}{3}$. D. $I = 15 - 6 \ln 2$.

Câu 34. [Mức độ 2+] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $AA' = 2a$, $AB = a$. Tang của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. C. 2 . D. $\frac{1}{2}$.

Câu 35. [Mức độ 2] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $2a\sqrt{3}$.

Câu 36. [Mức độ 2] Cho hai số phức $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = -1 + 2i$. Mô-đun của số phức $\frac{z_2}{z_1}$ bằng

- A. 7 . B. $\frac{1}{7}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 37. [Mức độ 2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1; 3; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình là

- A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$. B. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 4$.

- C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 4$. D. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 1$.

Câu 38. [Mức độ 2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - y + 2z - 1 = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) , vuông góc đồng thời cắt trục tung có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$.

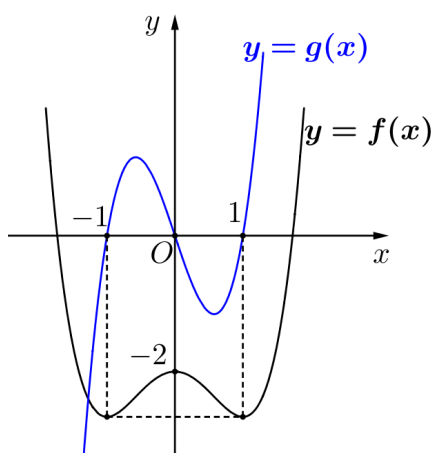
Câu 39. [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x - m - 4}{x^2 - 4x - m}$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$?

A. 19. B. 20. C. 15. D. 16.

Câu 40. [Mức độ 3] Cho các số thực $a; b$ thoả mãn $1 < a < b$ và $[2\log_a^2(a^2b) + 15] \cdot \log_{ab} b = 3\log_{ab} a + 15\log_a b$. Tính giá trị biểu thức $F = \log_{b^2}(ab)$.

A. $F = \frac{3}{2}$. B. $F = \frac{7}{6}$. C. $F = \frac{5}{3}$. D. $F = \frac{5}{6}$.

Câu 41. [Mức độ 3] Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ và hàm số bậc ba $y = g(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(x)$ với trục hoành bằng $\frac{3}{2}$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành bằng $\frac{4}{3}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$.

A. $\frac{227}{20}$. B. $\frac{247}{20}$. C. $\frac{239}{20}$. D. $\frac{243}{20}$.

Câu 42. [Mức độ 3] Cho hai số phức z, w thoả mãn $|z + w| = 4|z| = 4$. Khi w có mô-đun nhỏ nhất, tính $|z - 2w|$.

A. $|z - 2w| = 3$. B. $|z - 2w| = 1$. C. $|z - 2w| = 5$. D. $|z - 2w| = 7$.

Câu 43. [Mức độ 3] Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh $4a$, $\angle BAD = 120^\circ$. Biết khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $a\sqrt{3}$, thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = \frac{8\sqrt{3}a^3}{3}$. B. $V = \frac{32\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $V = \frac{16\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $V = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 44. [Mức độ 3] Hai quả cầu được đặt trên mặt bàn nằm ngang và tiếp xúc ngoài với nhau. Biết quả cầu nhỏ có bán kính bằng 12cm và điểm tiếp xúc của hai quả cầu cách mặt bàn một khoảng bằng 14,4cm. Thể tích của quả cầu lớn gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 24,44 (dm³). B. 24,41 (dm³). C. 24,43 (dm³). D. 24,42 (dm³).

Câu 45. [Mức độ 3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 26$, mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 3y - 2z - 15 = 0$ và điểm $A(2;3;-1)$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) và M là một điểm di động trên đường tròn (C) . Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AM bằng $a + \sqrt{b}$ ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$). Tính $T = 2a + b$.

- A. $T = 16$. B. $T = 29$. C. $T = 35$. D. $T = 19$.

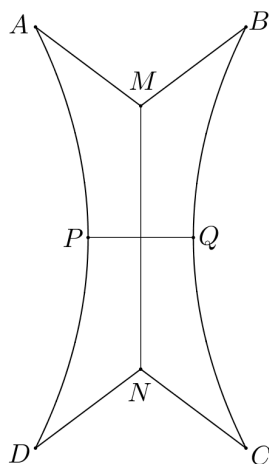
Câu 46. [Mức độ 4] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)[5x^2 - (m + 45)x - 3m]$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ có đúng 12 điểm cực trị thuộc khoảng $(-2;3)$ là

- A. 54. B. 53. C. 52. D. 50.

Câu 47. [Mức độ 4] Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với mỗi giá trị của y luôn tồn tại đúng hai số thực dương x thỏa mãn $\log_2(x^2 + y^2 + 2x) + \log_3(6x) = \log_3(x^2 + y^2) + \log_2 x + 3$?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 48. [Mức độ 4] Một mô hình khối tròn xoay có trục là đường thẳng MN , khi ta cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng đi qua trục của khối tròn xoay thì ta được mặt cắt có dạng như hình vẽ dưới đây



Biết $MN = 20\text{cm}$, $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 16\text{cm}$, $AD = 32\text{cm}$, hai cung APD và BQC là một phần của các đường parabol với đỉnh lần lượt là P, Q và $PQ = 8\text{cm}$. Tính thể tích của mô hình đó.

- A. $\frac{12416}{15}\pi\text{cm}^3$. B. $\frac{10496}{15}\pi\text{cm}^3$. C. $\frac{12896}{15}\pi\text{cm}^3$. D. $\frac{11456}{15}\pi\text{cm}^3$.

Câu 49. [Mức độ 4] Cho hai số phức z và w thỏa mãn $|z^2 + zw + 1| = |z| = 1$. Biết tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức w tạo thành một hình phẳng (H) trong mặt phẳng phức. Chu vi của (H) bằng

- A. $\pi + 12$. B. $\pi + 8$. C. $2\pi + 8$. D. $2\pi + 12$.

Câu 50. [Mức độ 4] Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 3), B(3; 4; 1), C(-5; 2; 1)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa trục hoành sao cho A, B, C nằm về cùng phía đối với mặt phẳng (α) và d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α). Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3$ bằng $a\sqrt{b}$ (với $a \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố). Tính $S = 3a + 2b$.

- A. 25. B. 38. C. 28. D. 47.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. [Mức độ 1] Có bao nhiêu cách chọn ra 1 bạn nam và 1 bạn nữ từ một nhóm gồm 5 bạn nam và 7 bạn nữ?

- A. 12. B. 5. C. 35. D. 7.

Lời giải

Có 5 cách chọn ra 1 bạn nam và 7 cách chọn ra 1 bạn nữ. Theo quy tắc nhân, có $5 \cdot 7 = 35$ cách chọn chọn ra 1 bạn nam và 1 bạn nữ từ một nhóm gồm 5 bạn nam và 7 bạn nữ.

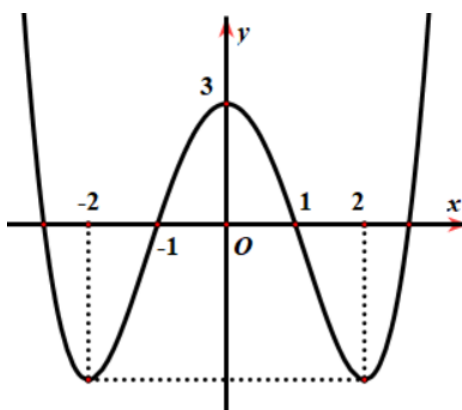
Câu 2. [Mức độ 1] Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{6}$. Tính u_3 .

- A. $u_3 = \frac{2}{3}$. B. $u_3 = \frac{-1}{6}$. C. $u_3 = \frac{1}{18}$. D. $u_3 = \frac{1}{12}$.

Lời giải

$$q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{3}; u_3 = u_2 \cdot q = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}.$$

Câu 3. [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (với $a \neq 0$) có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 3)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị hàm số ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

Câu 4. [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-4	$+\infty$	

Điểm cực tiểu của hàm số là

- A. $x = 0$. B. $y = -4$. C. $x = -2$. D. $y = 1$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x = 0$.

Câu 5. [Mức độ 1] Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{2-x}$ nhận đường thẳng nào sau đây là tiệm cận ngang?

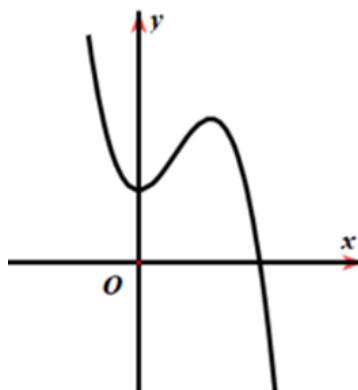
- A. $x = 1$. B. $y = -2$. C. $y = 1$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{2-x} = -2$ do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = -2$.

Câu 6. [Mức độ 1] Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$. B. $y = -2x^3 - 3x + 1$. C. $y = -2x^4 - 3x^2 + 1$. D. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có dạng đồ thị hàm bậc ba và có hai cực trị nên chỉ có đáp án $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$ thỏa yêu cầu.

Câu 7. [Mức độ 1] Đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = x^3 + 3x - 1$ là hàm bậc ba đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình luôn có duy nhất một nghiệm.

Câu 8. [Mức độ 1] Với số thực dương x tùy ý, $x\sqrt{x}$ bằng

- A. $x^{\frac{3}{2}}$. B. $x^{\frac{1}{2}}$. C. $x^{\frac{5}{2}}$. D. $x^{\frac{7}{2}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$.

Câu 9. [Mức độ 1] Tập xác định của hàm số $y = (1-x)^{-3}$ là

- A. $(-\infty; 1)$. B. $\mathbb{R}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có tập xác định của hàm số $y = (1-x)^{-3}$ là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 10. [Mức độ 1] Hàm số $F(x) = \cos 3x$ là một nguyên hàm của hàm số

- A. $f_1(x) = -\frac{1}{3}\sin 3x$. B. $f_2(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$. C. $f_3(x) = -3\sin 3x$. D. $f_4(x) = 3\sin 3x$.

Lời giải

Ta có: $F'(x) = (\cos 3x)' = -3\sin 3x$. Do đó, hàm số $F(x) = \cos 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f_3(x) = -3\sin 3x$.

Câu 11. [Mức độ 1] Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\int \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + C$. B. $\int \frac{1}{3x-2} dx = -\frac{1}{3} \ln|3x-2| + C$.
C. $\int \frac{1}{3x-2} dx = 3 \ln|3x-2| + C$. D. $\int \frac{1}{3x-2} dx = -3 \ln|3x-2| + C$.

Lời giải

Ta có: $\int \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + C$.

Câu 12. [Mức độ 1] Cho $\int_0^2 f(x) dx = 2$ và $\int_0^2 g(x) dx = 5$, khi đó $\int_0^2 [f(x) - 2g(x) - 1] dx$ bằng

- A. -6. B. -9. C. -10. D. -8.

Lời giải

Ta có $\int_0^2 [f(x) - 2g(x) - 1] dx = \int_0^2 f(x) dx - 2 \int_0^2 g(x) dx - \int_0^2 1 dx = 2 - 2.5 - x \Big|_0^2 = -10$.

Câu 13. [Mức độ 1] Cho $\int_1^2 f'(x) dx = 3, f(2) = 10$. Tính $f(1)$.

- A. -7. B. 13. C. 7. D. -13.

Lời giải

Ta có $\int_1^2 f'(x) dx = 3 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 3 \Leftrightarrow 10 - f(1) = 3 \Leftrightarrow f(1) = 7$.

Câu 14. [Mức độ 1] Số phức $z = 3i - 5$ có phần thực là

- A. $3i$. B. 3. C. -5. D. 5.

Lời giải

Số phức $z = -5 + 3i$ có phần thực là -5.

Câu 15. [Mức độ 1] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm $M(1; -3)$ biểu diễn số phức nào dưới đây?

- A. $-3 + i$. B. $-3 - i$. C. $1 - 3i$. D. $1 + 3i$.

Lời giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm $M(1; -3)$ biểu diễn số phức $1 - 3i$.

Câu 16. [Mức độ 1] Cho số phức $z = -2 + i$. Số phức $2\bar{z}$ bằng

- A. $-4 + 2i$. B. $4 - 2i$. C. $-4 - 2i$. D. $4 + 2i$.

Lời giải

$$2\bar{z} = 2(-2 - i) = -4 - 2i.$$

Câu 17. [Mức độ 1] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 10$ và tam giác ABC có diện tích bằng 6. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $V = 10$. B. $V = 20$. C. $V = 60$. D. $V = 30$.

Lời giải

$$V = Bh = 6.10 = 60.$$

Câu 18. [Mức độ 1] Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 5$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có các kích thước bằng 4 và 3. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $V = 10$. B. $V = 30$. C. $V = 20$. D. $V = 60$.

Lời giải

$$V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} . 4 . 3 . 5 = 20.$$

Câu 19. [Mức độ 1] Diện tích của mặt cầu có đường kính bằng 8 là

- A. $S = \frac{256\pi}{3}$. B. $S = \frac{64\pi}{3}$. C. $S = 64\pi$. D. $S = 256\pi$.

Lời giải

$$S = 4\pi \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 64\pi.$$

Câu 20. [Mức độ 1] Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao gấp đôi bán kính đáy là

A. $V = 18\pi$.

B. $V = 36\pi$.

C. $V = 54\pi$.

D. $V = 81\pi$.

Lời giải

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 3) = 54\pi.$$

Câu 21. [Mức độ 1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -5; 3)$. Điểm đối xứng của M qua trục hoành có tọa độ là

A. $(1; 5; -3)$.

B. $(-1; -5; 3)$.

C. $(-1; -5; -3)$.

D. $(-1; 5; 3)$.

Lời giải

Điểm đối xứng của M qua trục hoành có tọa độ là $(1; 5; -3)$.

Câu 22. [Mức độ 1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z + 1 = 0. \text{ Mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I \text{ và bán kính } R \text{ là}$$

A. $I(1; 3; -4), R = 5$.

B. $I(-1; -3; 4), R = 5$.

C. $I(1; 3; -4), R = \sqrt{26}$.

D. $I(-1; -3; 4), R = \sqrt{26}$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; -4)$ và có bán kính $R = 5$.

Câu 23. [Mức độ 1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x - 3z + 1 = 0$ có một véc tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1(2; 0; 3)$.

B. $\vec{n}_2(2; -3; 1)$.

C. $\vec{n}_3(2; 3; 1)$.

D. $\vec{n}_4(2; 0; -3)$.

Lời giải

(P) có phương trình $2x - 3z + 1 = 0$ có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_4(2; 0; -3)$

Câu 24. [Mức độ 1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 3; 2), B(2; 1; 4)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}$.

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{2}$.

C. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{2}$.

Lời giải

Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}(3;-2;2)$ và đi qua $A(-1;3;2)$ nên có phương trình là $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}$.

Câu 25. [Mức độ 2⁺] Gieo một đồng xu cân đối, đồng chất 5 lần liên tiếp. Xác suất để trong 5 lần gieo đó có 2 lần xuất hiện mặt ngửa và 3 lần xuất hiện mặt sấp là

A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{5}{16}$.

D. $\frac{5}{8}$.

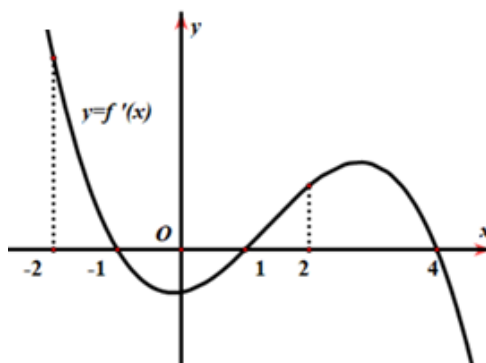
Lời giải

Phép thử: Gieo một đồng xu cân đối, đồng chất 5 lần liên tiếp. Ta có $n(\Omega) = 2^5 = 32$.

Biến cố A: “Trong 5 lần gieo đó có 2 lần xuất hiện mặt ngửa và 3 lần xuất hiện mặt sấp”.

Ta có $n(A) = C_5^2 = 10$. Vậy $P(A) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$.

Câu 26. [Mức độ 2] Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (với $a \neq 0$) có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(-1) < f(0)$.

B. $f(0) > f(1)$.

C. $f(1) > f(2)$.

D. $f(-2) > f(-1)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(1;4)$; nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Ta có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(4)$	$-\infty$

Do đó khẳng định đúng là $f(0) > f(1)$.

Câu 27. [Mức độ 2] Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + (a-6)x + b$ có một điểm cực trị là $A(3; -1)$. Tính $f(-1)$?

A. 16.

B. 31.

C. 23.

D. -39.

Lời giải

Chọn B

Vì đồ thị hàm số nhận điểm $A(3; -1)$ là một điểm cực trị nên ta có:

$$\begin{cases} f(3) = -1 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ 12a + b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 26 \end{cases}$$

Do đó $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 26$. Vậy $f(-1) = 31$.

Câu 28. [Mức độ 2] Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + m$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 5]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m thỏa mãn $M \leq 20$?

A. 45.

B. 25.

C. 24.

D. 52.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 12x$. Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (L) \\ x = 4 (tm) \end{cases}$

Mặt khác có $f(1) = m - 5; f(5) = m - 25; f(4) = m - 32$. Vậy $\max_{[1;5]} f(x) = m - 5$

Do đó ta có $m - 5 \leq 20 \Leftrightarrow m \leq 25$. Vậy có 25 giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 29. [Mức độ 2] Khẳng định nào sau đây luôn đúng với mọi số thực dương a, b thỏa mãn $a^2 = 4b$?

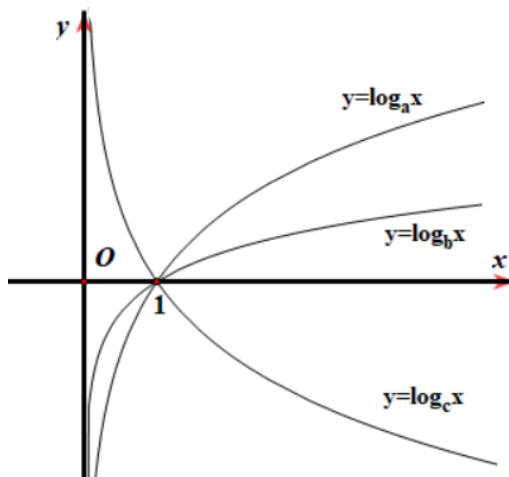
A. $2\log_2 a = 4 + \log_2 b$.B. $\log_2 a = 4\log_2 b$.C. $2\log_2 a + \log_2 b = 4$.D. $2\log_2 a - \log_2 b = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a^2 = 4b \Leftrightarrow 2\log_2 a - \log_2 b = 4$.

Câu 30. [Mức độ 2] Đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ là các đường cong như hình vẽ dưới đây



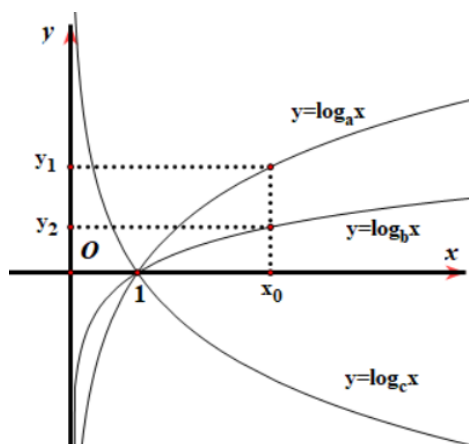
Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $c < b < a$. B. $c > a > b$. C. $c < a < b$. D. $c > b > a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y = \log_c x$ có hướng đi xuống từ trái qua phải do đó $0 < c < 1$.



Tương tự ta có $a > 1; b > 1$

Xét điểm có hoành độ $x_0 > 1$ khi đó với hàm $y = \log_a x$ ta có $y_1 = \log_a x_0 \Leftrightarrow x_0 = a^{y_1}$ và với hàm số $y = \log_b x$ ta có $y_2 = \log_b x_0 \Leftrightarrow x_0 = b^{y_2}$. Do $y_1 > y_2$ nên có $a > b > 1$.

Cách 2: Kẻ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ lần lượt tại các điểm có hoành độ bằng a, b, c . Quan sát trên đồ thị ta có $c < a < b$.

Câu 31. [Mức độ 2] Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 + 2) = \log_2(3x + 6)$ là

- A. $\{4\}$. B. $\{1\}$. C. $\{-1; 4\}$. D. $\{-4; 1\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_2(x^2 + 2) = \log_2(3x + 6) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 > 0 \\ x^2 + 2 = 3x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-1; 4\}$.

Câu 32. [Mức độ 2] Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2$ là

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -1)$.

Câu 33. [Mức độ 2] Cho $\int_1^3 \left[f(3x+2) + \frac{1}{x^2} \right] dx = 5$. Tính $I = \int_5^{11} f(x) dx$.

- A. $I = 17$. B. $I = 13$. C. $I = \frac{13}{3}$. D. $I = 15 - 6 \ln 2$.

Lời giải

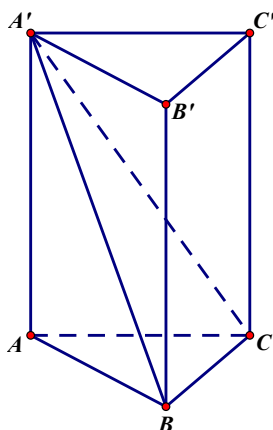
Ta có $\int_1^3 \left[f(3x+2) + \frac{1}{x^2} \right] dx = 5 \Leftrightarrow \int_1^3 f(3x+2) dx - \frac{1}{x} \Big|_1^3 = 5$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_5^{11} f(x) dx + \frac{2}{3} = 5 \Leftrightarrow \int_5^{11} f(x) dx = 13$.

Câu 34. [Mức độ 2+] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $AA' = 2a$, $AB = a$. Tang của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. C. 2 . D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải



$(A'AB) \perp BC$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là $A'BA$.

Ta có $\tan A'BA = \frac{AA'}{AB} = \frac{2a}{a} = 2$.

Câu 35. [Mức độ 2] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh

$2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

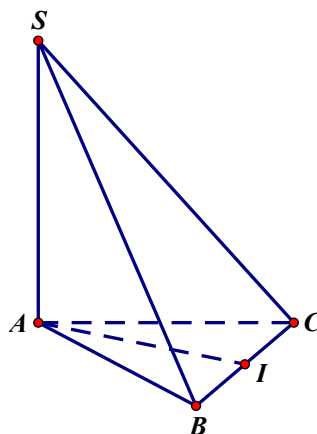
A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $2a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm BC thì AI là đoạn vuông góc chung của SA và BC .

$$\text{Do đó } d(SA, BC) = AI = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Câu 36. [Mức độ 2] Cho hai số phức $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = -1 + 2i$. Mô-đun của số phức $\frac{z_2}{z_1}$ bằng

A. 7.

B. $\frac{1}{7}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

$$\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 37. [Mức độ 2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1; 3; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$.

B. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 4$.

C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 4$.

D. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 1$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên có bán kính là

$$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot (-1) - 3 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 2.$$

Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 38. [Mức độ 2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - y + 2z - 1 = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) , vuông góc đồng thời cắt trục tung có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(1; -1; 2)$, trục tung có một véc tơ chỉ phương là $\vec{j}(0; 1; 0)$.

Đường thẳng Δ có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{j}] \Rightarrow \vec{u} = (-2; 0; 1)$.

Đường thẳng đi qua $M(0; -1; 0)$ là giao điểm của trục tung và mặt phẳng (P) .

Phương trình của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$

Câu 39. [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x - m - 4}{x^2 - 4x - m}$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$?

A. 19.

B. 20.

C. 15.

D. 16.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x^2 - 4x - m \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x \neq m$.

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 4x$; $x \in (0; 3)$ ta có bảng biến thiên:

x	0	2	3
$h'(x)$		-	0
$h(x)$	0		-3
		-4	

Do đó có $h(x) \in [-4; 0)$ nên có $m \notin [-4; 0) \Rightarrow m \in (-\infty; -4) \cup [0; +\infty)$

Ta có $f'(x) = \frac{-x^2 + 8x - m - 16}{(x^2 - 4x - m)^2} \leq 0 \Rightarrow -x^2 + 8x - m - 16 \leq 0$

Xét hàm số $g(x) = -x^2 + 8x - m - 16$ với $x \in (0; 3)$ ta có bảng biến thiên:

x	0	3
$g(x)$	$-m-16$	$-m-1$

Từ bảng biến thiên ta có $-m-1 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $m \in [0; +\infty)$.

Do đó có 20 giá trị nguyên $m \in (-20; 20)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 40. [Mức độ 3] Cho các số thực $a; b$ thỏa mãn $1 < a < b$ và $[2\log_a^2(a^2b) + 15] \cdot \log_{ab} b = 3\log_{ab} a + 15\log_a b$. Tính giá trị biểu thức $F = \log_{b^2}(ab)$.

A. $F = \frac{3}{2}$.

B. $F = \frac{7}{6}$.

C. $F = \frac{5}{3}$.

D. $F = \frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $[2\log_a^2(a^2b) + 15] \cdot \log_{ab} b = 3\log_{ab} a + 15\log_a b$

$$\Leftrightarrow \frac{[2\log_a^2(a^2b) + 15] \cdot \log_a b}{\log_a ab} = \frac{3}{\log_a ab} + 15\log_a b$$

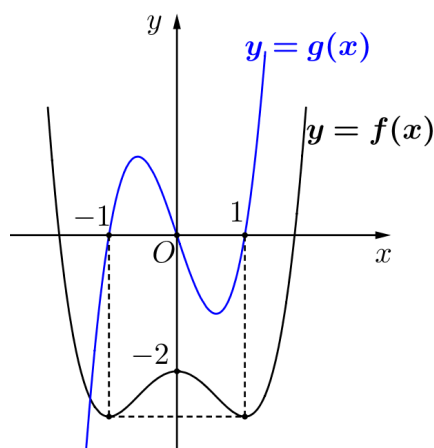
$$\Leftrightarrow [2\log_a^2 b + 8\log_a b + 23] \cdot \log_a b = 3 + 15(\log_a^2 b + \log_a b)$$

$$\Leftrightarrow 2\log_a^3 b - 7\log_a^2 b + 8\log_a b - 3 = 0 \Leftrightarrow (\log_a b - 1)^2 (2\log_a b - 3) = 0 \Rightarrow \log_a b = \frac{3}{2}$$

(do $1 < a < b$).

$$\text{Ta có } F = \log_{b^2}(ab) = \frac{1 + \log_a b}{2\log_a b} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{3} = \frac{5}{6}.$$

Câu 41. [Mức độ 3] Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ và hàm số bậc ba $y = g(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(x)$ với trục hoành bằng $\frac{3}{2}$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành bằng $\frac{4}{3}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$.

A. $\frac{227}{20}$.

B. $\frac{247}{20}$.

C. $\frac{239}{20}$.

D. $\frac{243}{20}$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số bậc ba $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là $-1; 0; 1$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ nên $g(x) = ax(x-1)(x+1) = a(x^3 - x)$, $a > 0$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(x)$ với trục hoành bằng $\frac{3}{2}$ nên ta có

$$\int_{-1}^1 |g(x)| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a \int_{-1}^1 |x^3 - x| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}a = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow g(x) = 3x^3 - 3x.$$

Lại có, hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x = -1, x = 0, x = 1$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ nên $f'(x) = bg(x) = 3b(x^3 - x)$, $b > 0$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành bằng $\frac{4}{3}$ nên

$$\int_{-1}^1 |f'(x)| = \frac{4}{3} \Leftrightarrow b \int_{-1}^1 |g(x)| = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2}b = \frac{4}{3} \Leftrightarrow b = \frac{8}{9} \Rightarrow f'(x) = \frac{8}{3}(x^3 - x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + c. \text{ Mà } f(0) = -2 \Rightarrow c = -2. \text{ Vậy } f(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^2 - 2.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$ là $S = \int_{-1}^2 \left| \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^2 - 2 - 3x^3 + 3x \right| dx = \frac{247}{20}$.

Câu 42. [Mức độ 3] Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + w| = 4|z| = 4$. Khi w có mô-đun nhỏ nhất, tính $|z - 2w|$.

A. $|z - 2w| = 3$.

B. $|z - 2w| = 1$.

C. $|z - 2w| = 5$.

D. $|z - 2w| = 7$.

Lời giải

$$|z| + |w| \geq |z + w| \Rightarrow |w| \geq 3. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } |z| = 1 \text{ và } w = 3z.$$

$$\text{Khi đó } |z - 2w| = |z - 2.3z| = 5|z| = 5.$$

Câu 43. [Mức độ 3] Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh $4a$, $\angle BAD = 120^\circ$. Biết khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $a\sqrt{3}$, thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

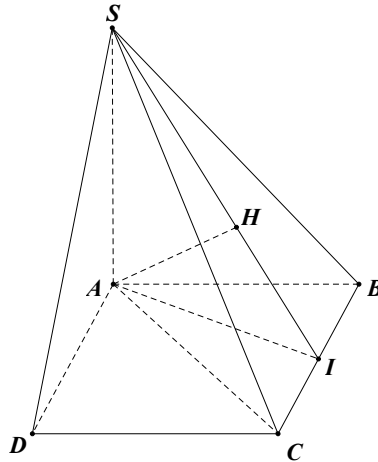
A. $V = \frac{8\sqrt{3}a^3}{3}$.

B. $V = \frac{32\sqrt{3}a^3}{3}$.

C. $V = \frac{16\sqrt{3}a^3}{3}$.

D. $V = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải



$\angle BAD = 120^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều.

Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A lên SI thì $d(A, (SBC)) = AH = a\sqrt{3}$.

$$AI = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3} \text{ và } S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{(4a)^2 \sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}a^2.$$

$$\frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{3a^2} - \frac{1}{12a^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow SA = 2a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 8\sqrt{3}a^2 = \frac{16\sqrt{3}a^3}{3}.$$

Câu 44. [Mức độ 3] Hai quả cầu được đặt trên mặt bàn nằm ngang và tiếp xúc ngoài với nhau. Biết quả cầu nhỏ có bán kính bằng 12cm và điểm tiếp xúc của hai quả cầu cách mặt bàn một khoảng bằng 14,4cm. Thể tích của quả cầu lớn gần nhất với giá trị nào dưới đây?

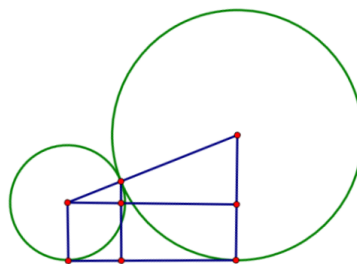
A. 24,44 (dm³).

B. 24,41 (dm³).

C. 24,43 (dm³).

D. 24,42 (dm³).

Lời giải



Gọi r là bán kính của quả cầu lớn.

Sử dụng các tam giác đồng dạng trên hình, ta có $\frac{2,4}{r-12} = \frac{12}{r+12} \Leftrightarrow r = 18 \text{ (cm)}$.

Vậy thể tích quả cầu lớn là $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 18^3 = 7776\pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 24,43 \text{ (dm}^3\text{)}$.

Câu 45. [Mức độ 3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 26$, mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 3y - 2z - 15 = 0$ và điểm $A(2;3;-1)$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) và M là một điểm di động trên đường tròn (C) . Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AM bằng $a + \sqrt{b}$ ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$). Tính $T = 2a + b$.

A. $T = 16$.

B. $T = 29$.

C. $T = 35$.

D. $T = 19$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{26}$.

$$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 - 15|}{\sqrt{4 + 9 + 4}} = \sqrt{17} < R.$$

Do đó, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (T) có tâm H , bán kính r .

Với H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) , $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{26 - 17} = 3$.

Ta có $A(2; 3; -1) \in (P)$, $IH \perp (P)$, $AH \subset (P) \Rightarrow IH \perp AH$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{AI^2 - IH^2} = \sqrt{30 - 17} = \sqrt{13}$$

Ta có $A(2; 3; -1) \in (P)$, $AH = \sqrt{13}$, $M \in (T)$ nên độ dài đoạn thẳng AM lớn nhất bằng $AH + r = \sqrt{13} + 3$. Vậy $a = 3, b = 13 \Rightarrow 2a + b = 19$.

Câu 46. [Mức độ 4] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)[5x^2 - (m + 45)x - 3m]$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ có đúng 12 điểm cực trị thuộc khoảng $(-2; 3)$ là

A. 54.

B. 53.

C. 52.

D. 50.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = x^3 - 3x$ với $x \in (-2; 3)$. Khi đó ta có bảng biến thiên:

x	-2	-1	1	3	
u'	+	0	-	0	+
u	-2	2	-2	18	

Ta có $g(x) = f(u)$ nên $g'(x) = f'(u) \cdot u'(1)$.

Dựa bảng biến thiên có:

+ Nếu $u_0 \in (-2; 2)$ thì phương trình $u = u_0$ cho 3 nghiệm x phân biệt.

+ Nếu $u_0 \in [2; 18)$ thì phương trình $u = u_0$ cho 1 nghiệm x hoặc 2 nghiệm (trong đó có một nghiệm bội chẵn).

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(u) \cdot u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(u) = 0 \\ u' = 0 \end{cases}.$$

Với $u' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$$\text{Xét } f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = -1 \\ 5u^2 - (m + 45)u - 3m = 0(*) \end{cases}.$$

Với $u = 1$ và $u = -1$ mỗi phương trình cho 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x \neq \pm 1$ và $x \in (-2; 3)$.

Xét (*) ta có: $5u^2 - (m + 45)u - 3m = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{5} = \frac{u^2 - 9u}{u + 3}$. Với $x \in (-2; 3)$ thì $u \in (-2; 18)$

Xét hàm số $g(u) = \frac{u^2 - 9u}{u + 3}$ với $u \in (-2; 18)$ ta có bảng biến thiên:

u	-2	2	3	18
$g'(u)$	-	-	0	+
$g(u)$	22	$-\frac{14}{5}$	-3	$\frac{54}{7}$

Do đó để hàm số đã cho có đúng 12 điểm cực trị thì phương trình $g(u) = \frac{m}{5}$ phải có hai

$$\text{nghiệm phân biệt thỏa mãn } \begin{cases} u_1 \in (-2; 2) \\ u_1 \neq \pm 1 \\ u_2 \in (2; 18) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{14}{5} < \frac{m}{5} < 22 \\ \frac{m}{5} \neq -2; \frac{m}{5} \neq 5 \\ -3 < \frac{m}{5} < \frac{54}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14 < m < \frac{270}{7} \\ m \neq -10; m \neq 25 \end{cases}.$$

Do đó số giá trị nguyên của m là 50.

Câu 47. [Mức độ 4] Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với mỗi giá trị của y luôn tồn tại đúng hai số thực dương x thỏa mãn $\log_2(x^2 + y^2 + 2x) + \log_3(6x) = \log_3(x^2 + y^2) + \log_2 x + 3$?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có

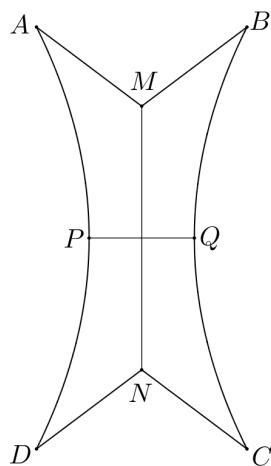
$$\log_2(x^2 + y^2 + 2x) + \log_3 6x = \log_3(x^2 + y^2) + \log_2 x + 3 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2 + y^2}{2x} + 1\right) = \log_3 \frac{x^2 + y^2}{2x} + 1$$

Đặt $\frac{x^2 + y^2}{2x} = t > 0$ ta có phương trình $\log_2(t+1) = \log_3 t + 1$.

Phương trình ẩn t có hai nghiệm $t=1; t=3$ nên có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

Vẽ trên hệ tọa độ hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x = 0; (C_2): x^2 + y^2 - 6x = 0$ với $x > 0$ ta thấy có 3 giá trị nguyên của y ($y \in \{-2; 0; 2\}$) để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm x dương.

Câu 48. [Mức độ 4] Một mô hình khối tròn xoay có trục là đường thẳng MN , khi ta cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng đi qua trục của khối tròn xoay thì ta được mặt cắt có dạng như hình vẽ dưới đây



Biết $MN = 20\text{cm}$, $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 16\text{cm}$, $AD = 32\text{cm}$, hai cung APD và BQC là một phần của các đường parabol với đỉnh lần lượt là P, Q và $PQ = 8\text{cm}$. Tính thể tích của mô hình đó.

A. $\frac{12416}{15}\pi\text{cm}^3$.

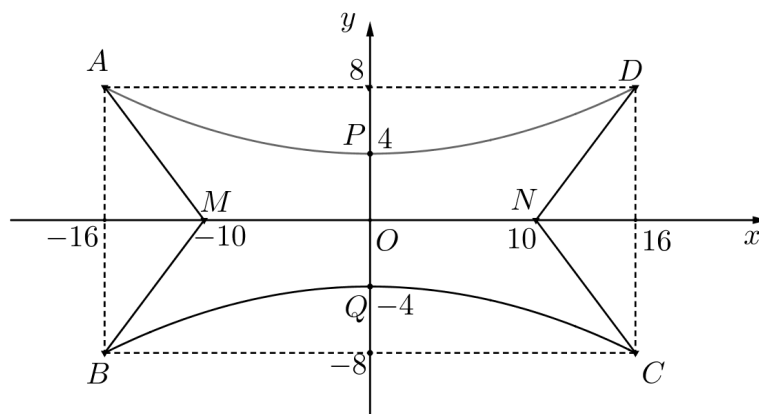
B. $\frac{10496}{15}\pi\text{cm}^3$.

C. $\frac{12896}{15}\pi\text{cm}^3$.

D. $\frac{11456}{15}\pi\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ dưới đây



Khi đó, cung APD là một phần của đường parabol đỉnh $P(0;4)$ và bề lõm quay lên nên có phương trình dạng $y = ax^2 + 4, a > 0$.

Parabol đi qua $D(16;8)$ nên ta có $8 = 256a + 4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{64} \Rightarrow y = \frac{1}{64}x^2 + 4$.

Tương tự, ta có cung BQC là một phần của đường parabol có phương trình là $y = -\frac{1}{64}x^2 - 4$.

Thể tích của khối tròn xoay cần tìm là $V = V_1 - 2V_2$.

V_1 là thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{1}{64}x^2 + 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -16, x = 16$ quay quanh Ox nên

$$V_1 = \pi \int_{-16}^{16} \left(\frac{1}{64}x^2 + 4 \right)^2 dx = \frac{14336}{15} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

V_2 là thể tích của khối nón có bán kính đáy bằng 8 và chiều cao bằng 6 nên

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 6 = 128\pi \text{ (cm}^3\text{)}. \text{ Do đó } V = \frac{14336}{15} \pi - 2 \cdot 128\pi = \frac{10496}{15} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 49. [Mức độ 4] Cho hai số phức z và w thỏa mãn $|z^2 + zw + 1| = |z| = 1$. Biết tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức w tạo thành một hình phẳng (H) trong mặt phẳng phức. Chu vi của (H) bằng

A. $\pi + 12$.

B. $\pi + 8$.

C. $2\pi + 8$.

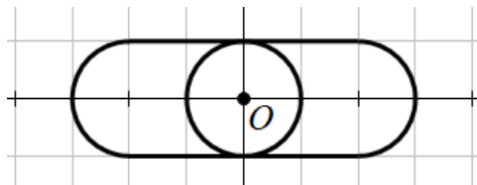
D. $2\pi + 12$.

Lời giải

Đặt $z = x + yi$. Ta có $|z| = 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2x \leq 2$.

$$|z^2 + zw + 1| = |z^2 + zw + z\bar{z}| = |z + w + \bar{z}| = |w + 2x| \Rightarrow |w + 2x| = 1.$$

Đặt $w + 2x = t$ thì $w = t - 2x$ với $|t| = 1$. Mà $-2 \leq -2x \leq 2$ nên (H) chính là “vết” của đường tròn đơn vị khi tịnh tiến trên trục hoành sang trái 2 đơn vị, sang phải 2 đơn vị hay (H) là hình gồm một hình chữ nhật 4×2 hợp với 2 nửa hình tròn đơn vị.



Do đó chu vi của (H) bằng $2\pi + 8$.

Câu 50. [Mức độ 4] Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3), B(3;4;1), C(-5;2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa trục hoành sao cho A, B, C nằm về cùng phía đối với mặt phẳng (α) và d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α) . Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3$ bằng $a\sqrt{b}$ (với $a \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố). Tính $S = 3a + 2b$.

A. 25.

B. 38.

C. 28.

D. 47.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AB, BC \Rightarrow M(2;1;2), N(-1;3;1)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác $MNC \Rightarrow G\left(-\frac{4}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$

Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên (α) ; H, K lần lượt là hình chiếu của M, N trên (α) .

Ta có $ABB'A'$ là hình thang, M là trung điểm AB nên H là trung điểm của $A'B'$ nên $MH = \frac{AA' + BB'}{2} \Rightarrow d_1 + d_2 = AA' + BB' = 2MH = 2d(M, (\alpha))$;

Ta có $BCC'B'$ là hình thang, N là trung điểm BC nên K là trung điểm của $B'C'$ nên $NK = \frac{BB' + CC'}{2} \Rightarrow d_2 + d_3 = BB' + CC' = 2NK = 2d(N, (\alpha))$.

Gọi G' là hình chiếu của G trên mặt phẳng (α) . Do tam giác HKC' là hình chiếu của tam giác MNC trên mặt phẳng (α) nên G' là trọng tâm của tam giác HKC' . Tương tự, ta chứng minh được

$$\begin{aligned} T &= d_1 + 2d_2 + 3d_3 = (d_1 + d_2) + (d_2 + d_3) + 2d_3 = 2[d(M, (\alpha)) + d(N, (\alpha)) + d(C, (\alpha))] \\ &= 2.3d(G, (\alpha)) = 6d(G, (\alpha)) \leq 6d(G, Ox) = 6 \cdot \frac{2\sqrt{13}}{3} = 4\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi hình chiếu của G lên mặt phẳng (α) trùng với hình chiếu của G trên trục hoành.

$$\text{Vậy } \max T = 4\sqrt{13} \Rightarrow a = 4, b = 13 \Rightarrow S = 3a + 2b = 38.$$

Lưu ý, ta có thể tìm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, từ đó có $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3 = 6d(G, (P))$