

Chủ đề 1.1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

Chú ý.

- Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết “Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in K$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.
- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến trên khoảng K (hoặc nghịch biến trên khoảng K).

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. Lập bảng xét dấu của một biểu thức $P(x)$

Bước 1. Tìm nghiệm của biểu thức $P(x)$, hoặc giá trị của x làm biểu thức $P(x)$ không xác định.

Bước 2. Sắp xếp các giá trị của x tìm được theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Bước 3. Sử dụng máy tính tìm dấu của $P(x)$ trên từng khoảng của bảng xét dấu.

2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định

Bước 1. Tìm tập xác định D .

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3. Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4. Lập bảng biến thiên.

Bước 5. Kết luận.

3. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = f(x)$ đồng biến, nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ cho trước.

Cho hàm số $y = f(x, m)$ có tập xác định D , khoảng $(a; b) \subset D$:

- Hàm số nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (a; b)$
- Hàm số đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (a; b)$

➤ **Chú ý:** Riêng hàm số đa thức thì :

- Hàm số nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a; b)$
- Hàm số đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a; b)$

* Nhắc lại một số kiến thức liên quan:

Cho tam thức $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$$\begin{array}{ll} \text{a) } g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} & \text{b) } g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \\ \text{c) } g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} & \text{d) } g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \end{array}$$

➤ **Chú ý:** Nếu gặp bài toán tìm m để hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a; b)$:

- ✓ **Bước 1:** Đưa bất phương trình $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$), $\forall x \in (a; b)$ về dạng $g(x) > h(m)$ (hoặc $g(x) < h(m)$), $\forall x \in (a; b)$.
- ✓ **Bước 2:** Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(a; b)$.
- ✓ **Bước 3:** Từ bảng biến thiên và các điều kiện thích hợp ta suy ra các giá trị cần tìm của tham số m .

4. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình, hệ phương trình và bất phương trình:

Đưa phương trình, hoặc bất phương trình về dạng $f(x) = m$ hoặc $f(x) \geq g(m)$, lập bảng biến thiên của $f(x)$, dựa vào BBT suy ra kết luận.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- C.** Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1), (1; +\infty)$.
- D.** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1), (1; +\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B.** Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1), (1; +\infty)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- D.** Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 10$ và các khoảng sau:

(I): $(-\infty; -\sqrt{2})$; (II): $(-\sqrt{2}; 0)$; (III): $(0; \sqrt{2})$;

Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

- A.** Chỉ (I).
- B.** (I) và (II).
- C.** (II) và (III).
- D.** (I) và (III).

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{-4+2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B.** Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- C.** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2), (2; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2), (-2; +\infty)$.

Câu 5. Hỏi hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

B. $g(x) = x^3 + 3x^2 + 10x + 1$.

C. $f(x) = -\frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x$.

D. $k(x) = x^3 + 10x - \cos^2 x$.

Câu 6. Hỏi hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng nào?

A. $(-\infty; -4), (2; +\infty)$.

B. $(-4; 2)$.

C. $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$.

D. $(-4; -1)$ và $(-1; 2)$.

Câu 7. Hỏi hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(5; +\infty)$

B. $(2; 3)$

C. $(-\infty; 1)$

D. $(1; 5)$

Câu 8. Hỏi hàm số $y = \frac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0), (1; 3)$.

B. $(1; 3)$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $(-\infty; 1)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-9; -5)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0); (2; 3)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0); (2; 3)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x, x \in [0; \pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$.

B. $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$.

C. $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$.

D. $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x + \cos^2 x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

D. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 14. Cho các hàm số sau:

(I): $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4$;

(II): $y = \frac{x-1}{x+1}$;

(III): $y = \sqrt{x^2 + 4}$

(IV): $y = x^3 + 4x - \sin x$;

(V): $y = x^4 + x^2 + 2$.

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Câu 15. Cho các hàm số sau:

(I): $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$;

(II): $y = \sin x - 2x$;

(III): $y = -\sqrt{x^3 + 2}$;

(IV): $y = \frac{x-2}{1-x}$

Hỏi hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. (I), (II).

B. (I), (II) và (III).

C. (I), (II) và (IV).

D. (II), (III).

Câu 16. Xét các mệnh đề sau:

(I). Hàm số $y = -(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Hàm số $y = \ln(x-1) - \frac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 17. Cho hàm số $y = |x+1|(x-2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \cos 2x + \sin 2x \cdot \tan x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số tăng trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định ?

A. $m > 3$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \leq 1$.

D. $m < 1$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số sau luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

$$y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$$

A. $-3 \leq m \leq 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $-3 < m < 1$.

D. $m \leq -3; m \geq 1$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m > 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m < 2$.

D. $m \geq 1$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = x + m \cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m| \leq 1$.

B. $m > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $|m| \geq 1$.

D. $m < \frac{1}{2}$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4 \leq m \leq \frac{2}{3}$.

B. $m \geq 2$.

C. $\begin{cases} m > 3 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

D. $m \leq 2$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số sau luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

$$y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x - 3m + 5$$

A. $m = 0$.

B. $m = -1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 - mx - m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m = -5$.

B. $m = 0$.

C. $m = -1$.

D. $m = -6$.

- Câu 27.** Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y = \frac{(m+3)x-2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?
A. $m = -1$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 0$. **D.** Không có m .
- Câu 28.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty; 1)$?
A. $-2 < m < 2$. **B.** $-2 \leq m \leq -1$. **C.** $-2 < m \leq -1$. **D.** $-2 \leq m \leq 2$.
- Câu 29.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
A. $m \leq 0$. **B.** $m \leq 12$. **C.** $m \geq 0$. **D.** $m \geq 12$.
- Câu 30.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?
A. $m \in [-5; 2)$. **B.** $m \in (-\infty; 2]$. **C.** $m \in (2; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -5)$.
- Câu 31.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài đúng bằng 3?
A. $m = -1; m = 9$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 9$. **D.** $m = 1; m = -9$.
- Câu 32.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$?
A. $1 \leq m < 2$. **B.** $m \leq 0; 1 \leq m < 2$. **C.** $m \geq 2$. **D.** $m \leq 0$.
- Câu 33.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?
A. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$. **B.** $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$. **D.** $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$.
- Câu 34.** Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là $\left(-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p+q$ là?
A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.
- Câu 35.** Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?
A. Hai. **B.** Bốn. **C.** Vô số. **D.** Không có.
- Câu 36.** Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

- Câu 37.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số α và β sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{1}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)x^2 - \frac{3}{2}x \sin \alpha \cos \alpha - \sqrt{\beta - 2}$ luôn giảm trên $\mathbb{R}$?
- A. $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\beta \geq 2$.
 B. $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\beta \geq 2$.
 C. $\alpha \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\beta \geq 2$.
 D. $\alpha \geq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\beta \geq 2$.
- Câu 38.** Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x) = 2x + a \sin x + b \cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?
- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. B. $a + 2b = 2\sqrt{3}$. C. $a^2 + b^2 \leq 4$. D. $a + 2b \geq \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$.
- Câu 39.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x - m = 0$ có đúng 1 nghiệm?
- A. $-27 \leq m \leq 5$. B. $m < -5$ hoặc $m > 27$.
 C. $m < -27$ hoặc $m > 5$. D. $-5 \leq m \leq 27$.
- Câu 40.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm thực?
- A. $m \geq 2$. B. $m \leq 2$. C. $m \geq 3$. D. $m \leq 3$.
- Câu 41.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = m + 4x - x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?
- A. $1 \leq m \leq 3$. B. $-3 < m < \sqrt{5}$. C. $-\sqrt{5} < m < 3$. D. $-3 \leq m < 3$.
- Câu 42.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m+1 \geq 0$?
- A. $m \leq -1$. B. $m \leq -\frac{4}{7}$. C. $m \geq -\frac{3}{7}$. D. $m \geq -1$.
- Câu 43.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$?
- A. $-1 \leq m \leq 3$. B. $0 \leq m \leq 2$. C. $0 \leq m \leq 3$. D. $-1 \leq m \leq 2$.
- Câu 44.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực?
- A. $m \geq -\frac{7}{2}$. B. $m \geq \frac{3}{2}$. C. $m \geq \frac{9}{2}$. D. $\forall m \in \mathbb{R}$.
- Câu 45.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có hai nghiệm thực?

- A. $\frac{1}{3} \leq m < 1$. B. $-1 \leq m \leq \frac{1}{4}$. C. $-2 < m \leq \frac{1}{3}$. D. $0 \leq m < \frac{1}{3}$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$$\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + 2x^2 - 5x - 3 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right]?$$

- A. $m > 1$. B. $m > 0$. C. $m < 1$. D. $m < 0$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$$3(\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}) - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \geq m \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [-1; 3]?$$

- A. $m \leq 6$. B. $m \geq 6$. C. $m \geq 6\sqrt{2} - 4$. D. $m \leq 6\sqrt{2} - 4$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1 \text{ nghiệm đúng } \forall x \in [-3, 6]?$$

- A. $m \geq -1$. B. $-1 \leq m \leq 0$.
C. $0 \leq m \leq 2$. D. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m \cdot 4^x + (m-1) \cdot 2^{x+2} + m - 1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $m \leq 3$. B. $m \geq 1$. C. $-1 \leq m \leq 4$. D. $m \geq 0$.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3 + 3mx - 2 < -\frac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x \geq 1$?

- A. $m < \frac{2}{3}$. B. $m \geq \frac{2}{3}$. C. $m \geq \frac{3}{2}$. D. $-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 51. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $2^{\cos^2 x} + 3^{\sin^2 x} \geq m \cdot 3^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

- A. $m = 4$. B. $m = 8$. C. $m = 12$. D. $m = 16$.

Câu 52. Bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a; b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. -2 . B. 4 . C. 5 . D. 3 .

Câu 53. Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a; b]$. Hỏi hiệu $b-a$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. **1**. B. 2 . C. 3 . D. -1 .

D. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	D	B	C	D	D	B	A	B	B	A	A	C	A	A	B	C	C	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	B	A	A	A	C	D	C	D	B	A	B	B	C	C	D	B	C	C	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53							
B	C	B	C	D	D	D	D	B	A	A	C	A							

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn **D**.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y' = \frac{2}{(1-x)^2} > 0, \forall x \neq 1$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

Câu 2. Chọn **A**.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 3. Chọn **D**.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. $y' = -4x^3 + 8x = 4x(2-x^2)$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.

Câu 4. Chọn **B**.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ta có $y' = -\frac{10}{(-4+2x)^2} < 0, \forall x \in D$.

Câu 5. Chọn **C**.

Ta có: $f'(x) = -4x^4 + 4x^2 - 1 = -(2x^2 - 1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 6. Chọn **D**.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $y' = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$. Giải $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$

y' không xác định khi $x = -1$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-11	$+\infty$	1	$+\infty$	

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4; -1)$ và $(-1; 2)$

Câu 7. Chọn **D**.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. $y' = x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

Trên khoảng $(1;5)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến

Câu 8. Chọn **B.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. $y' = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 = 3x^2(x-2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 9. Chọn **A.**

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$$

Câu 10. Chọn **B.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$ nên hàm số **không** đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 11. Chọn **B.**

HSXD: $3x^2 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ suy ra $D = (-\infty; 3]$. $y' = \frac{6x - 3x^2}{2\sqrt{3x^2 - x^3}}, \forall x \in (-\infty; 3)$.

Giải $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. y' không xác định khi $\begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		3
y'		-		+	0	-	
y	$+\infty$				2		
			0			0	

Hàm số nghịch biến $(-\infty; 0)$ và $(2; 3)$. Hàm số đồng biến $(0; 2)$

Câu 12. Chọn **A.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. $y' = \frac{1}{2} + \sin 2x$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên có 2 giá trị $x = \frac{7\pi}{12}$ và $x = \frac{11\pi}{12}$ thỏa mãn điều kiện.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
y'		+	0	-	0	+	
y							

Hàm số đồng biến $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$

Câu 13. Chọn **A.**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $y' = 1 - \sin 2x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Câu 14. Chọn **C.**

(I): $y' = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{(II): } y' &= \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1 & \text{(III): } y' &= \left(\sqrt{x^2+4} \right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \\ \text{(IV): } y' &= 3x^2 + 4 - \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R} & \text{(V): } y' &= 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1) \end{aligned}$$

Câu 15. Chọn **A**.

$$\text{(I): } y' = (-x^3 + 3x^2 - 3x + 1)' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\text{(II): } y' = (\sin x - 2x)' = \cos x - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\text{(III): } y' = -\left(\sqrt{x^3+2} \right)' = -\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}} \leq 0, \forall x \in \left(-\sqrt[3]{2}; +\infty \right);$$

$$\text{(IV): } y' = \left(\frac{x-2}{1-x} \right)' = \left(\frac{x-2}{-x+1} \right)' = -\frac{1}{(1-x)^2} < 0, \forall x \neq 1$$

Câu 16. Chọn **A**.

$$\text{(I): } y' = \left(-(x-1)^3 \right)' = -3(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{(II): } y' = \left(\ln(x-1) - \frac{x}{x-1} \right)' = \frac{x}{(x-1)^2} > 0, \forall x > 1$$

$$\text{(III): } y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \left(\sqrt{x^2+1} \right)'}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 17. Chọn **B**.

$$y' = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq -1 \\ -2x+1 & \text{khi } x < -1 \end{cases}; y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	$ $	$-$	0	$+$	
y							

Câu 18. Chọn **C**.

$$\text{TXĐ: } D = (-\infty; 2]. \text{ Ta có } y' = \frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{2-x}}, \forall x \in (-\infty; 2).$$

$$\text{Giải } y' = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Rightarrow x = 1; y' \text{ không xác định khi } x = 2$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2		
y'		$+$	0	$-$	$ $
y					

Câu 19. Chọn **C**.

Xét trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $y = \cos 2x + \sin 2x \cdot \tan x = \frac{\cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow y' = 0$

Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 20. Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \frac{m-1}{(x+1)^2}$

Để hàm số giảm trên các khoảng mà nó xác định $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow m < 1$

Câu 21. Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$. Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \text{ (hn)} \\ m^2 + 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$$

Câu 22. Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - m + 1}{(x-m)^2}$

Để hàm số tăng trên từng khoảng xác định của nó

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 0 \text{ (hn)} \\ m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

Câu 23. Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 1 - m \sin x$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m = 0$ ta có $0 \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Trường hợp 2: $m > 0$ ta có $\sin x \leq \frac{1}{m}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{m} \geq 1 \Leftrightarrow m \leq 1$

Trường hợp 3: $m < 0$ ta có $\sin x \geq \frac{1}{m}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{m} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq -1$

Vậy $|m| \leq 1$

Câu 24. Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = m - 3 + (2m + 1) \sin x$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2m + 1) \sin x \leq 3 - m, \forall x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m = -\frac{1}{2}$ ta có $0 \leq \frac{7}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m < -\frac{1}{2}$ ta có $\sin x \geq \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \leq -1$
 $\Leftrightarrow 3 - m \geq -2m - 1 \Leftrightarrow m \geq -4$

Trường hợp 3: $m > -\frac{1}{2}$ ta có:

$$\sin x \leq \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \geq 1 \Leftrightarrow 3-m \geq 2m+1 \Leftrightarrow m \leq \frac{2}{3}. \text{ Vậy } m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$$

Câu 25. Chọn **A**.

$$\text{Tính nhanh, ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6(m+2)x + 6(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = m+1 \end{cases}$$

Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm kép khi $m = 0$, suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp $m \neq 0$, phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt (không thỏa yêu cầu bài toán).

Câu 26. Chọn **C**.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 + 2mx - m$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \text{ (hn)} \\ m^2 + m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $m = -1$

Câu 27. Chọn **D**.

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}. \text{ Ta có } y' = \frac{m^2 + 3m + 2}{(x+m)^2}$$

$$\text{Yêu cầu đề bài} \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < -1$$

Vậy không có số nguyên m nào thuộc khoảng $(-2; -1)$.

Câu 28. Chọn **C**

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}. \text{ Ta có } y' = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2}. \text{ Để hàm số giảm trên khoảng } (-\infty; 1)$$

$$\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ 1 \leq -m \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$$

Câu 29. Chọn **D**.

Cách 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + m$

- Trường hợp 1:

$$\text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \text{ (hn)} \\ 36 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 12$$

- Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \leq 0$ (*)

✓ Trường hợp 2.1: $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ suy ra $m = 0$. Nghiệm còn lại của $y' = 0$ là $x = 4$ (không thỏa (*))

✓ Trường hợp 2.2: $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 3m > 0 \\ 4 < 0 \text{ (vl)} \\ \frac{m}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{không có } m. \text{ Vậy } m \geq 12$$

Cách 2: Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq 12x - 3x^2 = g(x), \forall x \in (0; +\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty)$.

x	0	2	$+\infty$
g'		+	0 -
g	0	12	$\rightarrow \infty$

Câu 30. Chọn **B**.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

Hàm số đồng biến trên $(1; 3) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 1 \geq m, \forall x \in (1; 3)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1; 3)$.

x	1	3	
g'		+	0
g	2		
			10

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \leq \min g(x) \Leftrightarrow m \leq 2$.

Câu 31. Chọn **A**.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - mx + 2m$

Ta không xét trường hợp $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \text{ hay } m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 9 \end{cases}$$

Câu 32. Chọn **B**.

+) Điều kiện $\tan x \neq m$. Điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ là $m \notin (0; 1)$

$$+) y' = \frac{2-m}{\cos^2 x (\tan x - m)^2}.$$

$$+) \text{ Ta thấy: } \frac{1}{\cos^2 x (\tan x - m)^2} > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right); m \notin (0; 1)$$

$$+) \text{ Để hs đồng biến trên } \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ m \leq 0; m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \text{ hoặc } 1 \leq m < 2$$

Câu 33. Chọn **B**.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$mx^2 + 14mx + 14 \leq 0, \forall x \geq 1, \text{ tương đương với } g(x) = \frac{-14}{x^2 + 14x} \geq m \quad (1)$$

Để dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x \in [1; +\infty)$, suy ra $\min_{x \geq 1} g(x) = g(1) = -\frac{14}{15}$

Kết luận: $(1) \Leftrightarrow \min_{x \geq 1} g(x) \geq m \Leftrightarrow -\frac{14}{15} \geq m$

Câu 34. Chọn **C**.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -4x^3 + 2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1; 2) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq x^2 + \frac{3}{2} = g(x), \forall x \in (1; 2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1; 2)$. $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	1	2
g'	+	0
g	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \leq \min g(x) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$. Vậy $p+q=5+2=7$.

Câu 35. Chọn **C**.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \frac{x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 2}{(x-m)^2} = \frac{g(x)}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $g(x) \geq 0, \forall x \in D$.

Điều kiện tương đương là $\Delta_{g(x)} = -m^2 + m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$

Kết luận: Có vô số giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 36. Chọn **D**.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2} = \frac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $g(x) \geq 0, \forall x > 1$ và $m \leq 1$ (1)

Vì $\Delta_g' = 2(m+1)^2 \geq 0, \forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm thỏa $x_1 \leq x_2 \leq 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1) = 2(m^2 - 6m + 1) \geq 0 \\ \frac{5}{2} = m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 37. Chọn **B**.

Điều kiện xác định: $\beta \geq 2$

Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình $\frac{1}{2} \leq \sin 2\alpha \leq 1$

Kết luận: $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\beta \geq 2$.

Câu 38. Chọn **C**.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 2 + a\cos x - b\sin x$

Áp dụng bất đẳng thức Schwartz ta có $2 - \sqrt{a^2 + b^2} \leq y' \leq 2 + \sqrt{a^2 + b^2}$

Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$y' \geq 0, \forall x \Leftrightarrow 2 - \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4.$$

Câu 39. Chọn **C**.

(1) $\Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 9x = f(x)$. Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		5		-27		$+\infty$

Từ đó suy ra pt có đúng 1 nghiệm khi $m < -27$ hoặc $m > 5$

Câu 40. Chọn **B**.

Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$. Phương trình thành: $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \geq 0; f'(t) = -2t + 2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0	1	$+\infty$		
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	1		2		$-\infty$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m \leq 2$.

Câu 41. Chọn **B**

Đặt $t = f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. Ta có $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Xét $x > 0$ ta có bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\sqrt{5}$		1		$+\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m = t^2 + t - 5 \Leftrightarrow t^2 + t - 5 - m = 0$ (I).

Nếu phương trình (I) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1 + t_2 = -1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \geq 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in (1; \sqrt{5})$. Đặt $g(t) = t^2 + t - 5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t) = m$ có đúng 1 nghiệm $t \in (1; \sqrt{5})$. Ta có $g'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in (1; \sqrt{5})$.

Bảng biến thiên:

t	1	$\sqrt{5}$
$g'(t)$	+	
$g(t)$	-3	$\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $-3 < m < \sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 42. Chọn C.

Bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m(x^2 + x + 1) \geq -x - 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{-x-2}{x^2+x+1}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1 \leq x \leq 2$. Có $f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2} > 0, \forall x \in [1;2]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max_{[1;2]} f(x) \Leftrightarrow m \geq -\frac{4}{7}$

Câu 43. Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$. Điều kiện: $t \geq 1$.

Phương trình thành: $t^2 + t - 2m - 2 = 0$ (*). Khi $x \in [1; 3^{\sqrt{3}}] \Rightarrow t \in [1; 2]$

(*) $\Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2+t-2}{2} = m$. Bảng biến thiên:

t	1	2
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	2

Từ bảng biến thiên ta có: $0 \leq m \leq 2$

Câu 44. Chọn C

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$

Phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 1 = mx$ (*)

Vì $x = 0$ không là nghiệm nên (*) $\Leftrightarrow m = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x}$

Xét $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x}$. Ta có $f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2} > 0 \forall x \geq -\frac{1}{2}; x \neq 0$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m \geq \frac{9}{2}$.

Câu 45. Chọn D.

Điều kiện: $x \geq 1$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 3\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + m = 2\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$$

$t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ với $x \geq 1$ ta có $0 \leq t < 1$. Thay vào phương trình ta được $m = 2t - 3t^2 = f(t)$

Ta có: $f'(t) = 2 - 6t$ ta có: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{1}{3}$	-1

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm khi $0 \leq m < \frac{1}{3}$

Câu 46. Chọn **D**.

Đặt $t = \sqrt{(1+2x)(3-x)}$ khi $x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right] \Rightarrow t \in \left[0; \frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

Thay vào bất phương trình ta được $f(t) = t^2 + t > m$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{7\sqrt{2}}{4}$
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	$\frac{49+14\sqrt{2}}{8}$

Từ bảng biến thiên ta có: $m < 0$

Câu 47. Chọn **D**.

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)} = t^2 - 4$

Với $x \in [-1; 3] \Rightarrow t \in [2; 2\sqrt{2}]$. Thay vào bất phương trình ta được: $m \leq -t^2 + 3t + 4$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 3t + 4$; $f'(t) = -2t + 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} < 2$

t	2	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		-
$f(t)$	6	$6\sqrt{2} - 4$

Từ bảng biến thiên ta có $m \leq 6\sqrt{2} - 4$ thỏa đề bài

Câu 48. Chọn **D**.

Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} > 0 \Rightarrow t^2 = (\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x})^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}$
 $\Rightarrow 9 \leq t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \leq 9 + (3+x) + (6-x) = 18$

$$\Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2} = \sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{1}{2}(t^2-9); t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

$$\text{Xét } f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{9}{2}; f'(t) = 1-t < 0; \forall t \in [3; 3\sqrt{2}] \Rightarrow \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = f(3) = 3$$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = 3 \leq m^2 - m + 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1 \text{ hoặc } m \geq 2$$

Câu 49. Chọn B

Đặt $t = 2^x > 0$ thì $m \cdot 4^x + (m-1) \cdot 2^{x+2} + m-1 > 0$, đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m \cdot t^2 + 4(m-1) \cdot t + (m-1) > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow m(t^2 + 4t + 1) > 4t + 1, \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow g(t) = \frac{4t+1}{t^2+4t+1} < m, \forall t > 0.$$

$$\text{Ta có } g'(t) = \frac{-4t^2 - 2t}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0 \text{ nên } g(t) \text{ nghịch biến trên } [0; +\infty)$$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \max_{t \geq 0} g(t) = g(0) = 1 \leq m$$

Câu 50. Chọn A.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow 3mx < x^3 - \frac{1}{x^3} + 2, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow 3m < x^2 - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x} = f(x), \forall x \geq 1.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 2x + \frac{4}{x^5} - \frac{2}{x^2} \geq 2\sqrt{2x\left(\frac{4}{x^5}\right)} - \frac{2}{x^2} = \frac{4\sqrt{2}-2}{x^2} > 0 \text{ suy ra } f(x) \text{ tăng.}$$

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow f(x) > 3m, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \min_{x \geq 1} f(x) = f(1) = 2 > 3m \Leftrightarrow \frac{2}{3} > m$$

Câu 51. Chọn A.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos^2 x} + 3\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos^2 x} \geq m. \text{ Đặt } t = \cos^2 x, 0 \leq t \leq 1$$

$$(1) \text{ trở thành } \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t \geq m \quad (2). \text{ Đặt } f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t.$$

$$\text{Ta có (1) có nghiệm} \Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t \in [0; 1] \Leftrightarrow m \leq \max_{t \in [0; 1]} f(t) \Leftrightarrow m \leq 4$$

Câu 52. Chọn C

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$. Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2; 4]$.

$$\text{Có } f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0, \forall x \in (-2; 4).$$

$$\text{Do đó hàm số đồng biến trên } [-2; 4], \text{ bpt} \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\text{So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là } S = [1; 4] \Rightarrow a+b=5.$$

Câu 53. Chọn A.

$$\text{Điều kiện: } 1 \leq x \leq 3; \text{ bpt} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(3-x)^2 + 2} + \sqrt{3-x}$$

$$\text{Xét } f(t) = \sqrt{t^2 + 2} + \sqrt{t} \text{ với } t \geq 0. \text{ Có } f'(t) = \frac{t}{2\sqrt{t^2 + 2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0.$$

$$\text{Do đó hàm số đồng biến trên } [0; +\infty). (1) \Leftrightarrow f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là } S = (2; 3]$$