



# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

**5** 2018  
Số 491

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>



The School of Athens





# TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

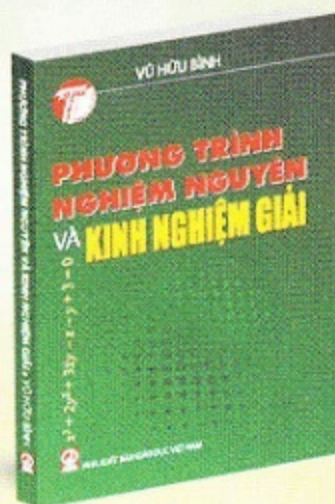
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

## Cuốn sách

## PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lý lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

**Chương I** giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

**Chương II** giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

**Chương III** giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

**Chương IV** giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

**Chương V** giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh *Bổ đề cơ bản trong Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ để giải quyết hơn, cách "đưa

khó về dễ, đưa lạ về quen", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ... tất cả những điều đó đều là những kỹ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Buu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến [www.sachtoan24h.com](http://www.sachtoan24h.com) (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

● Điện thoại biên tập: 024.35121607

● Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606

● Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.



## ĐIỀU THỨ VỊ TỪ "GIAO ĐIỂM BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC" ÁP DỤNG TRONG MỘT SỐ BÀI TẬP VỀ ĐƯỜNG TRÒN

NGÔ VĂN ĐIỀM

(GV THCS Lê Ninh, Kinh Môn, Hải Dương)

Trong chương trình môn Toán lớp 9, kiến thức về đường tròn được nhắc đến nhiều trong các đề thi. Bài viết này, xin chia sẻ cùng bạn đọc Điều thứ vị từ giao điểm ba đường phân giác của tam giác, áp dụng trong một số bài tập về đường tròn. Ta xét bài toán gốc: Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ; tia phân giác của góc  $BAC$  cắt cạnh  $BC$  tại  $E$ , cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$  ( $D \neq A$ ), điểm  $I$  trên đoạn  $AE$ . Chứng minh rằng  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $DB = DC = DI$ .

### Hướng dẫn giải

Ta có  $AD$  là tia phân giác của góc  $BAC \Leftrightarrow DB = DC$

$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$  (góc nội tiếp cùng chắn  $\widehat{DC}$ );

$$\widehat{BID} = \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{ABI}$$

(góc ngoài của  $\triangle ABI$ );

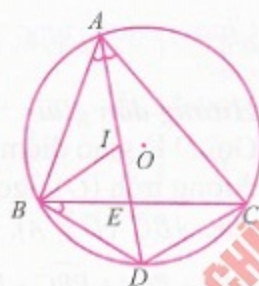
$$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD} = \widehat{IBC} + \frac{\widehat{A}}{2}$$

$$DB = DI \Leftrightarrow \triangle DBI \text{ cân tại } D \Leftrightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{ABI} = \widehat{IBC} + \frac{\widehat{A}}{2}$$

$\Leftrightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBC} \Leftrightarrow BI$  là phân giác của  $\widehat{ABC} \Leftrightarrow I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .

**Nhận xét.** Điều thứ vị từ tính chất trên là " $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $DB = DC = DI$ " được vận dụng trong một số bài tập về đường tròn, nếu không để ý đến sẽ khó khăn cho việc phân tích, tìm tòi lời giải của bài toán. Sau đây, ta sẽ vận dụng tính chất này để giải một số bài tập sau:

**Bài tập 1.** Gọi  $I, O$  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn  $ABC$ . Tia  $AI$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $K$  ( $K \neq A$ ), gọi  $J$  là điểm đối xứng của  $I$  qua  $K$ . Chứng minh rằng: tam giác  $IJB$  vuông tại  $B$ .



(Trích câu 4-Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên KHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh năm học 2004-2005).

### Hướng dẫn giải

Vì  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC \Rightarrow KB = KI = KC$

(theo bài toán gốc). Xét  $\triangle IBJ$  có

$$KB = KI = KJ = \frac{1}{2} IJ,$$

suy ra  $\triangle IBJ$  vuông tại  $B$ .

**Nhận xét.** Trong lời giải trên ta đã nhờ vào tính chất " $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  suy ra  $KB = KC = KI$ " (theo bài toán gốc).

Tiếp tục ta vận dụng tính chất trên để giải bài toán "hay" và khó hơn sau:

**Bài tập 2.** Cho  $BC$  là dây cung cố định của đường tròn  $(O; R)$  ( $BC$  không đi qua tâm  $O$ ),  $A$  là điểm chuyển động trên cung lớn  $BC$ ;  $D, E$  lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ  $BA, CA$ ;  $I$  là giao điểm của  $BE$  và  $CD$ . Chứng minh rằng:

a)  $I$  nằm trên một đường tròn cố định.

b) Xác định vị trí của  $A$  để  $AI$  có độ dài lớn nhất.

**Hướng dẫn giải.** a) Ta có

$\widehat{ABE} = \widehat{CBE}$  (hai góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau),

$\Rightarrow BE$  là tia phân giác  $\widehat{ABC}$ .

Tương tự  $CD$  là tia phân giác

$\widehat{ACB}$ . Gọi giao điểm của  $AI$

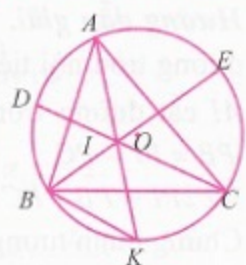
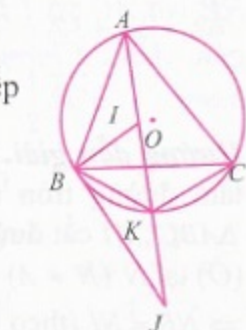
với đường tròn  $(O)$  là  $K$

( $K \neq A$ ), vì  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  suy ra  $AK$  là tia phân giác của  $\widehat{BAC}$  suy ra  $K$  cố định.

Mặt khác  $KB = KI = KC$  (theo bài toán gốc) mà  $K$  cố định,  $B$  cố định nên độ dài đoạn  $KB$  không đổi. Vậy  $I$  chuyển động trên đường tròn  $(K; KB)$  cố định.

b) Ta có  $AI = AK - KI = AK - KB$  mà  $KB$  không đổi nên để  $AI$  max  $\Leftrightarrow AK$  max  $\Leftrightarrow AK$  là đường kính  $\Leftrightarrow A$  là điểm đối xứng với  $K$  qua  $O$ .

**Nhận xét.** Đến đây bước đầu ta đã thấy được "điều



thứ vị" từ tính chất của giao điểm ba đường phân giác của tam giác, áp dụng trong một số bài tập về đường tròn. Sau đây, chúng ta sẽ tìm hiểu sự thú vị của tính chất trên ở một số bài tập ở mức độ khó hơn:

**Bài tập 3.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là các điểm chính giữa của các cung  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ ;  $E$  là giao điểm của  $MN$  với  $AB$ ,  $F$  là giao điểm của  $NP$  với  $AC$  và  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Chứng minh ba điểm  $E, I, F$  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải.** Vì  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ ,  $AI$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $N$  ( $N \neq A$ )

$\Rightarrow NB = NI$  (theo bài toán gốc).

Chứng minh tương tự:

$$MB = MI$$

Suy ra  $MN$  là đường trung trực của  $BI \Rightarrow EB = EI$   
 $\Rightarrow \widehat{EIB} = \widehat{ABP} = \widehat{CBP} \Rightarrow IE \parallel BC$ . Chứng minh tương tự có  $IF \parallel BC$ . Suy ra ba điểm  $E, I, F$  thẳng hàng.

**Bài tập 4.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ , gọi  $P, Q, R$  lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ  $BC, CA, AB$ ,  $I$  là giao điểm của  $BQ$  và  $CR$ . Chứng minh rằng:

$$AP + BQ + CR > AB + BC + CA.$$

**Hướng dẫn giải.** Vì  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ , tia  $AI$  cắt đường tròn tại  $P$  nên  $PB = PI = PC$

$$\Rightarrow 2PI = PB + PC > BC.$$

Chứng minh tương tự:

$$2QI = QA + QC > AC$$

$$2RI = RA + RB > AB$$

$$\Rightarrow PI + QI + RI > \frac{BC + AC + AB}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} AP + BQ + CR &= AI + IP + BI + IQ + CI + IR \\ &= (PI + QI + RI) + \frac{AI + IC}{2} + \frac{AI + IB}{2} + \frac{IB + IC}{2} \\ &> \frac{BC + AC + AB}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } AP + BQ + CR > AB + BC + CA. \quad (\text{đpcm})$$

**Bài tập 5.** Gọi  $I$  và  $O$  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác  $ABC$  không đều.

Chứng minh rằng:  $\widehat{AIO} \leq 90^\circ \Leftrightarrow 2BC \leq AB + CA$ .

**Hướng dẫn giải.**

Kéo dài  $AI$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$ . Ta chứng minh được:  $DB = DI = DC$  (theo bài toán gốc).

Áp dụng Định lý Ptolemy cho tứ giác  $ABDC$  nội tiếp ta được:

$$AB \cdot DC + AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

$$\Rightarrow DI(AB + AC) = AD \cdot BC$$

Ta có  $\widehat{AIO} \leq 90^\circ \Leftrightarrow AI \geq ID \Leftrightarrow (AD - ID) \geq ID$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{AD}{DI} = \frac{AB + AC}{BC} \Leftrightarrow 2BC \leq AB + AC. \quad (\text{đpcm})$$

**Bài tập 5.** (IMO 2006). Cho tam giác  $ABC$  ngoại tiếp đường tròn tâm  $I$ ; Gọi  $P$  là một điểm trong tam giác nhọn  $ABC$  thỏa mãn:

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB} \quad (*).$$

Chứng minh rằng:  $AP \geq AI$ , đẳng thức xảy ra khi nào?

**Hướng dẫn giải**

Gọi  $D$  là giao điểm của  $AI$  với đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$  ( $D \neq A$ ). Ta có:

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \widehat{B} + \widehat{C},$$

$$\text{hay } 2(\widehat{PBC} + \widehat{PCB}) = \widehat{B} + \widehat{C}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{BPC} &= 180^\circ - (\widehat{PBC} + \widehat{PCB}) \\ &= 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}. \end{aligned}$$

Mặt khác  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$  nên  $\widehat{BPC} = \widehat{BIC}$ , suy ra

$B, P, I, C$  cùng nằm trên một đường tròn. (1)

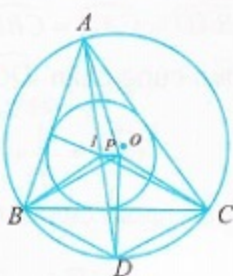
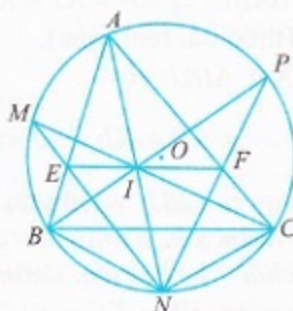
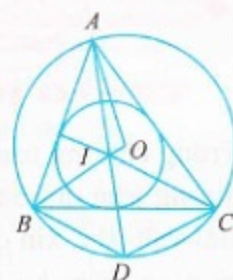
Mà  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ , tia  $AI$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D \Rightarrow DB = DC = DI$ . (2) (theo bài toán gốc).

Từ (1) và (2) suy ra  $D$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $BIPC \Rightarrow DI = DP$ . Ta có:

$$AP + PD \geq AD = AI + ID$$

$$\Rightarrow AP \geq AI, \text{ đẳng thức xảy ra khi } P = I.$$

Mời các bạn tiếp tục khai thác "Điều thú vị từ giao điểm ba đường phân giác của tam giác, áp dụng trong một số bài tập về đường tròn" để thấy được cái hay, cái đẹp trong toán học.



# Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10

## THPT CHUYÊN BÌNH LONG, BÌNH PHƯỚC NĂM HỌC 2017-2018

### VÒNG 1

**Câu 1.** 1.  $A = \sqrt{16} - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1.$

$$B = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4.$$

2. a) 
$$V = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}-2}.$$

b)  $V = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 64$  (thỏa mãn).

**Câu 2.** 1. a) Bảng giá trị

|            |    |    |   |   |   |
|------------|----|----|---|---|---|
| $x$        | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y = 2x^2$ | 8  | 2  | 0 | 2 | 8 |

|           |   |    |
|-----------|---|----|
| $x$       | 0 | -1 |
| $y = x+1$ | 1 | 0  |

b) Vì  $d_1 \parallel d$  nên phương trình đường thẳng  $d_1$  có dạng:  $y = x + b$  ( $b \neq 1$ ). Mà  $d_1$  đi qua  $A(-1; 2)$  nên ta có  $-1 + b = 2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow d_1: y = x + 3.$

2. 
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là  $(3; 2).$

**Câu 3.** 1. a) Với  $m = 2$ , ta có  $2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  khi và chỉ khi  $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$ . Theo Viet, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 - 2}{2} & (2) \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:  $A = |2x_1x_2 - x_1 - x_2 - 4|$ 
$$= |m^2 - 2 - m - 4| = |(m-3)(m+2)|.$$

Do  $-2 \leq m \leq 2$  nên  $m+2 \geq 0, m-3 \leq 0$ . Suy ra

$$A = (m+2)(-m+3) = -m^2 + m + 6$$

$$= -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}.$$

Vậy  $\text{Max } A = \frac{25}{4}$  khi  $m = \frac{1}{2}.$

2. Gọi  $x$  (m) là chiều rộng của vườn hoa,  $x > 0$ . Chiều dài của vườn hoa là  $x + 6$  (m). Theo đề bài ta có:  $x(x+6) = 91 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 91 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-7)(x+13) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 & (\text{nhận}) \\ x = -13 & (\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy chu vi vườn hoa hình chữ nhật là 40m.

**Câu 4.** a) Xét  $\triangle ABC$  có:

$$\hat{A} = 90^\circ, AH \perp BC$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{BH \cdot CH}$$

$$= \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \text{ cm.}$$

$$\triangle ABH: \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{6}{4} \Rightarrow \hat{B} \approx 56,3^\circ.$$

b) Xét  $\triangle ABC$  có:

$$\hat{A} = 90^\circ, MB = MC \Rightarrow AM = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 13 = 6,5 \text{ cm.}$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle AHM} = \frac{1}{2} MH \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 6 = 7,5 \text{ cm}^2.$$

**Câu 5.** a) Ta có:  $\widehat{CAB} = 90^\circ$ ,  
 $\widehat{OHC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} + \widehat{OHC} = 180^\circ$ .  
Vậy tứ giác  $AOHC$  nội tiếp.

b)  $\widehat{CAD} = \widehat{AEC}$  và  $\widehat{ACE}$  chung  
 $\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ECA$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CA}{CE} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AC \cdot AE = AD \cdot CE.$$

c) Từ  $E$  vẽ đường thẳng song song với  $MN$  cắt cạnh  $AB$  tại  $I$

và cắt cạnh  $BD$  tại  $F \Rightarrow \widehat{HEI} = \widehat{HCO}$ .

Vì tứ giác  $AOHC$  nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{HAO} = \widehat{HCO} = \widehat{HEI} \Rightarrow \text{tứ giác } AHIE \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{IHE} = \widehat{IAE} = \widehat{BDE} \Rightarrow HI \parallel BD.$$

Mà  $H$  là trung điểm của  $DE$  suy ra  $I$  là trung điểm của  $EF$ . Lại có  $EF \parallel MN$  và  $IE = IF$

$\Rightarrow O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ . Từ đó tứ giác  $AMBN$  là hình bình hành. Vậy  $AM \parallel BN$ .

## VÒNG 2

**Câu 1. a)** Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{-x+x\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - x + x\sqrt{x} + 6 - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{-x+x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(x-4)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \sqrt{x}-2. \end{aligned}$$

b) Với  $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$ , ta có

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(x+27).P}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+27}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9+36}{\sqrt{x}+3} \\ &= \sqrt{x}-3 + \frac{36}{\sqrt{x}+3} \\ &= -6 + (\sqrt{x}+3) + \frac{36}{\sqrt{x}+3} \geq -6 + 12 = 6. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\sqrt{x}+3 = \frac{36}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow x=9$ .

**Câu 2.** Phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m+4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$ . (1)

Theo hệ thức Vi-ét ta có:  $\begin{cases} x_1+x_2=2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2-3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Mà } x_1^2+4x_1+2x_2-2mx_1 &= 1 \\ \Leftrightarrow x_1(x_1-2m+2)+2(x_1+x_2) &= 1 \\ \Leftrightarrow -x_1 \cdot x_2 + 2(x_1+x_2) &= 1 \Leftrightarrow -m^2+3+4(m-1) = 1 \\ \Leftrightarrow m^2-4m+2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2+\sqrt{2} \\ m=2-\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $m=2-\sqrt{2}$ .

**Câu 3. a)** ĐK:  $1 \leq x \leq 7$ . Ta có

$$\begin{aligned} x+2\sqrt{7-x} &= 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7}+1 \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1}) &+ (x-1) - \sqrt{(x-1)(7-x)} = 0 \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1}) &+ \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}) = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1})(2-\sqrt{x-1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{x-1}=\sqrt{7-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x=4; x=5$ .

b) ĐK:  $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-xy^2+1 \geq 0 \end{cases}$ , kết hợp với PT (1), ta có

$y > 0$ . Từ (1), ta có  $4\sqrt{x+1} - xy\sqrt{y^2+4} = 0$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = xy\sqrt{y^2+4} \Leftrightarrow 16(x+1) = x^2y^2(y^2+4)$$

$$\Leftrightarrow (y^4+4y^2)x^2 - 16x - 16 = 0.$$

Giải phương trình theo ẩn  $x$  ta được

$$x = \frac{4}{y^2} \text{ hoặc } x = \frac{-4}{y^2+4} < 0 \text{ (loại).}$$

Với  $x = \frac{4}{y^2} \Leftrightarrow xy^2 = 4$  thế vào phương trình (2) ta

$$\text{được: } \sqrt{x^2-3} + 3\sqrt{x-1} = 4. \quad (*)$$

Giải (\*) với ĐK:  $x \geq \sqrt{3}$ , ta có:

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-3}-1) + 3(\sqrt{x-1}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left( \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3}{\sqrt{x-1}+1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ vì } \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3}{\sqrt{x-1}+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow x=2.$$

Với  $x=2 \Rightarrow \begin{cases} y^2=2 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\sqrt{2}$ . Kết hợp với điều

kiện trên, hệ phương trình có nghiệm  $(2; \sqrt{2})$ .

**Câu 4. a)** Ta có:

$\widehat{AIE} = \widehat{AJE} = 90^\circ \Rightarrow AIEJ$   
là tứ giác nội tiếp.

$\widehat{EMC} = \widehat{EJC} = 90^\circ \Rightarrow CMJE$   
là tứ giác nội tiếp.

Xét  $\triangle AEC$ , và  $\triangle IEM$  có:

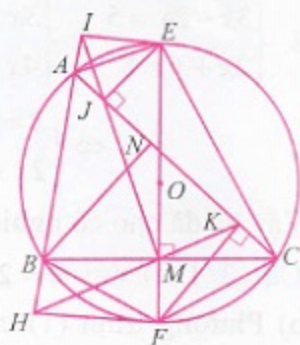
•  $\widehat{ACE} = \widehat{EMI}$  (cùng chắn cung  $\widehat{JE}$  của đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $CMJE$ ).

•  $\widehat{EAC} = \widehat{EIM}$  (cùng chắn cung  $\widehat{JE}$  của đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $AIEJ$ ). Do đó:

$$\triangle AEC \sim \triangle IEM \Rightarrow \frac{AE}{EI} = \frac{EC}{EM} \Rightarrow EA \cdot EM = EC \cdot EI.$$

b) Ta có  $\widehat{IEM} = \widehat{AEC} \Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{CEM}$ . Mặt khác  $\widehat{AEI} = \widehat{AJI}$  (cùng chắn cung  $\widehat{AI}$ ),  $\widehat{CEM} = \widehat{CJM}$

(Xem tiếp trang 6)



**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN THÁI BÌNH  
NĂM HỌC 2017 – 2018**

**VÒNG 1**

*(Dành cho tất cả thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)*

**Câu 1 (2 điểm).** Cho

$$A = \left( \frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} \right) \left[ \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right] \text{ với } x > 0; x \neq 0.$$

a) Rút gọn biểu thức  $A$ .

b) Đặt  $B = (x - \sqrt{x} + 1)A$ . Chứng minh  $B > 1$  với  $x > 0, x \neq 1$ .

**Câu 2 (2 điểm).**

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 2mx + 2m + 8$  (với  $m$  là tham số)

a) Khi  $m = -4$ , tìm tọa độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$ .

b) Chứng minh rằng đường thẳng  $(d)$  và parabol  $(P)$  luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$ . Tìm  $m$  để  $x_1 + 2x_2 = 2$ .

**Câu 3 (1 điểm).** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy^2 + y^2 - 2 = x^2 + 3x \\ x + y - 4\sqrt{y-1} = 0 \end{cases}$$

**Câu 4 (1 điểm).** Cho quãng đường  $AB$  dài 300km. Cùng một lúc xe ô tô thứ nhất xuất phát từ  $A$  đến  $B$ , xe ô tô thứ hai đi từ  $B$  về  $A$ . Sau khi xuất phát

được 3 giờ hai xe gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe, biết thời gian đi cả quãng đường  $AB$  của xe thứ nhất nhiều hơn xe thứ hai là 2 giờ 30 phút.

**Câu 5 (3.5 điểm).** Cho đường tròn  $(O; R)$  có đường kính  $AB$ . Điểm  $C$  là điểm bất kỳ trên  $(O)$  ( $C$  không trùng với  $A, B$ ). Tiếp tuyến tại  $C$  của  $(O; R)$  cắt tiếp tuyến tại  $A, B$  của  $(O; R)$  lần lượt tại  $P, Q$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $OP$  với  $AC$ ,  $N$  là giao điểm của  $OQ$  với  $BC$ .

a) Chứng minh rằng tứ giác  $CMON$  là hình chữ nhật và  $AP \cdot BQ = MN^2$ .

b) Chứng minh  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $PQ$ .

c) Chứng minh  $PMNQ$  là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí điểm  $C$  để đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $PMNQ$  có bán kính nhỏ nhất.

**Câu 6 (0.5 điểm).** Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn:  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y^2 z^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{z^2 x^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{x^2 y^2}{z(x^2 + y^2)}$$

**VÒNG 2**

*(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán; Thời gian làm bài: 150 phút)*

**Câu 1 (2 điểm).**

1) Cho  $a, b$  là hai số thực bất kỳ, chứng minh có ít nhất một trong hai phương trình ẩn  $x$  sau vô nghiệm:

$$x^2 + 2ax + 2a^2 - b^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 2bx + 3a^2 - ab = 0 \quad (2)$$

2) Cho 3 số thực  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện:  $x + y + z = 0$  và  $xyz \neq 0$ . Tính giá trị của biểu

thức: 
$$P = \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$$

**Câu 2 (2.5 điểm).**

1) Giải phương trình:  $\sqrt{x^2 + 4x + 12} = 2x - 4 + \sqrt{x + 1}$ .

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4xy \left( \frac{2}{x-y} - 1 \right) = 4(4 + xy) \\ \sqrt{x-y} + 3\sqrt{2y^2 - y + 1} = 2y^2 - x + 3 \end{cases}$$

**Câu 3 (1 điểm).** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn phương trình:  $x^3 - y^3 = 6xy + 3$ .

**Câu 4 (3 điểm).** Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  và có hai tia  $BA$  và  $CD$  cắt nhau tại  $E$ , hai tia  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại  $F$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ . Các đường phân giác trong của các góc  $\widehat{BEC}$  và  $\widehat{BFA}$  cắt nhau tại  $K$ . Chứng minh rằng:

1)  $\widehat{DEF} + \widehat{DFE} = \widehat{ABC}$  và  $\triangle EKF$  là tam giác vuông.

2)  $EM \cdot BD = EN \cdot AC$ .

☞ 3) Ba điểm  $K, M, N$  thẳng hàng.

**Câu 5 (1.5 điểm).** 1) Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a\sqrt{3a+2b}} + \frac{1}{b\sqrt{3b+2c}} + \frac{1}{c\sqrt{3c+2a}} \geq \frac{3}{\sqrt{5abc}}$$

## HƯỚNG DẪN GIẢI ...

(Tiếp theo trang 4)

(cùng chắn cung  $\widehat{CM}$ ). Suy ra  $\widehat{CJM} = \widehat{AJI}$ .  
Mà  $I, M$  nằm hai phía của đường thẳng  $AC$  nên  
 $\widehat{CJM} = \widehat{AJI}$  đối đỉnh suy ra  $I, J, M$  thẳng hàng.

Tương tự, ta chứng minh được  $H, M, K$  thẳng hàng.

Do tứ giác  $CFMK$  nội tiếp nên  $\widehat{CFK} = \widehat{CMK}$ .

Do tứ giác  $CMJE$  nội tiếp nên  $\widehat{JME} = \widehat{JCE}$ .

Mặt khác  $\widehat{ECF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CFK} = \widehat{JCE}$  (vì cùng phụ với  $\widehat{ACF}$ ). Do đó:

$\widehat{CMK} = \widehat{JME} \Rightarrow \widehat{JMK} = \widehat{EMC} = 90^\circ$  hay  $IJ \perp HK$ .

c) Kẻ  $BN \perp AC$  ( $N \in AC$ ). Vì  $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABN} = 30^\circ$ .

$$\Rightarrow AN = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2} \Rightarrow BN^2 = AB^2 - AN^2 = \frac{3c^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = BN^2 + CN^2 = \frac{3c^2}{4} + \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + c^2 - bc \Rightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}.$$

Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ ,  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Xét  $\triangle BCE$  đều ta có:

$$R = OE = \frac{2}{3}EM = \frac{2BC\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3(b^2 + c^2 - bc)}.$$

**Câu 5.** Ta có:

$$\begin{aligned} S &= n(n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 5n - 6) \\ &= n[(n^2 - 1)(n^2 + 6) + 5n(n^2 - 1)] \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 5n + 6) = n(n-1)(n+1)(n+2)(n+3) \\ &= (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

Ta có  $S$  là tích của 5 số nguyên tự nhiên liên tiếp chia hết cho  $5!$  nên chia hết cho 120.

**Câu 6.** a) Từ giả thiết  $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$ , ta có

$$a^4 \leq a^2, b^6 \leq b^2, c^8 \leq c^2.$$

2) Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kì trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại. Chứng minh rằng tất cả 5 số đó đều không nhỏ hơn 5.

**TRẦN NGỌC ĐẠI**

(GV THCS Thụy Thanh, Thái Thụy, Thái Bình) giới thiệu

Từ đó  $a^4 + b^6 + c^8 \leq a^2 + b^2 + c^2$ . Lại có

$$(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0 \text{ và } (a+1)(b+1)(c+1) \geq 0.$$

nên  $(a+1)(b+1)(c+1) - (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -2(ab + bc + ca) \leq 2.$$

Hơn nữa

$$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca) \leq 2.$$

Vậy  $a^4 + b^6 + c^8 \leq 2$ .

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } T &= \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)} \\ &= \frac{x^2(x-1) + y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}. \end{aligned}$$

Do  $x > 1, y > 1$  nên  $x-1 > 0, y-1 > 0$ . Áp dụng

BĐT Cauchy cho 2 số dương  $\frac{x^2}{y-1}, \frac{y^2}{x-1}$ , ta có:

$$(x-1) + 1 \geq 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$$

$$(y-1) + 1 \geq 2\sqrt{y-1} \Leftrightarrow (\sqrt{y-1} - 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y - 2\sqrt{y-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y-1}} \geq 2$$

$$\text{Do đó } T = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq \frac{2xy}{\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}} \geq 8.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{y-1} = \frac{y^2}{x-1} \\ x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = 8$  khi  $x = y = 2$ .

**MAI VINH PHÚ**

(GV THCS-THPT Tân Tiến, Bù Đốp, Bình Phước) giới thiệu



# 15<sup>th</sup> HANOI OPEN MATHEMATICS COMPETITION, VIETNAM 2018

## INDIVIDUAL CONTEST - JUNIOR SECTION

NGUYỄN MINH TUẤN  
NGUYỄN HỮU ĐIỀN  
(Hội Toán học Hà Nội) giới thiệu

### ANSWER KEY (Time limit: 120 minutes)

#### JUNIOR SECTION

##### 1. QUESTION

###### Instructions:

- Write down your name, your contestant number and your team's name on the first page.
- Answer all 15 questions. In Section A, each question is worth 5 points. In Section B, each question is worth 10 points. In Section C, each question is worth 15 points. The total is 150 points. There is no penalty for a wrong answer.
- For questions 1-5, circle the correct answer A, B, C, D or E. For questions 6-10, fill your answer in the space provided at the end of each question. For questions 11-15, write your detailed solution in the space provided at the end of each question.
- Diagrams shown may not be drawn to scale.
- No calculators, protractors or electronic devices are allowed to use.
- Answers must be in pencil, blue or black ball-point pen.
- All papers shall be collected at the end of the test.

#### JUNIOR SECTION 1. QUESTION

**Section A. There are 5 questions. Select and circle the right solution.**

**Q1.** Let  $x$  and  $y$  be real numbers satisfying the conditions  $x + y = 4$  and  $xy = 3$ . Compute the value of  $(x - y)^2$ .

A. 0. B. 1. C. 4. D. 9. E. None of above.

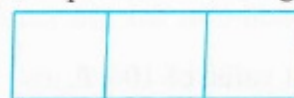
**Q2.** Let  $f(x)$  be a polynomial such that

$$2f(x) + f(2 - x) = 5 + x$$

for any real number  $x$ . Find the value of  $f(0) + f(2)$ .

A. 4. B. 0. C. 2. D. 3. E. 1.

**Q3.** There are 3 unit squares in a row as shown in the figure below. Each side of this figure is painted by one of three colors: Blue, Green or Red. It is known that for any square, all the three colors are used and no two adjacent sides have the same color. Find the number of possible colorings.



A. 48. B. 96. C. 108. D. 192. E. 216.

**Q4.** Find the number of distinct real roots of the following equation  $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 40$ .

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3. E. 4.

**Q5.** Let  $ABC$  be an acute triangle:  $AB = 3$  and  $AC = 4$ . Suppose that  $AH$ ,  $AO$  and  $AM$  are the altitude, the bisector and the median derived from  $A$ , respectively. If  $HO = 3 \times OM$ , then the length of  $BC$  is



A. 3. B.  $\frac{7}{2}$ . C. 4. D.  $\frac{9}{2}$ . E. 5.

**Section B. There are 5 questions. Find in your answer in the space provided at the end of each question.**

**Q6.** Nam spent 20 dollars for 20 stationery items consisting of books, pens and pencils. Each book, pen, and pencil costs 3 dollars, 1.5 dollars and 0.5 dollar, respectively. How many dollars did Nam spend for books?

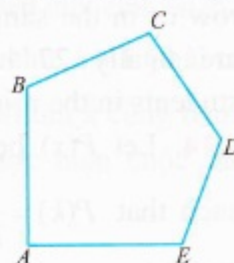
Answer:.....

**Q7.** Suppose that  $ABCDE$  is a convex pentagon with

$\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 105^\circ$ ,  $\hat{C} = 90^\circ$ , and

$AB = 2$ ,  $BC = CD = DE = \sqrt{2}$ . If

the length of  $AE$  is  $\sqrt{a} - b$  where  $a$ ,  $b$  are integers, what is the



value of  $a + b$ ?

**Answer:**.....

**Q8.** Let  $m$  be a positive integer such that

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{13} = \frac{m}{13!}.$$

Find the remainder when  $m$  is divided by 7.

**Answer:**.....

**Q9.** There are three polygons and the area of each one is 3. They are drawn inside a square of area 6.

Find the greatest value of  $a$  such that among those three polygons, we can always find two polygons so that the area of their overlap is not less than  $a$ .

**Answer:**.....

**Q10.** Let  $T = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}y^2 + \frac{1}{6}z^2$ , where  $x, y, z$  are real numbers such that  $1 \leq x, y, z \leq 4$  and  $x - y + z = 4$ .

Find the smallest value of  $10 \times T$ .

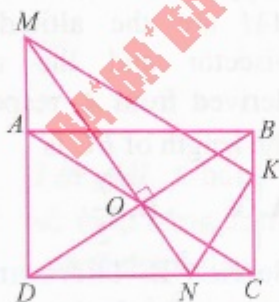
**Answer:**.....

**Section C. Answer the following 5 questions. Present your detailed solution in the space provided.**

**Q11.** Find all pairs of nonnegative integers  $(x; y)$  for which  $(xy + 2)^2 = x^2 + y^2$ .

**Q12.** Let  $ABCD$  be a rectangle with  $45^\circ < \widehat{ADB} < 60^\circ$ . The diagonals  $AC$  and  $BD$  intersect at  $O$ . A line passing through  $O$  and perpendicular to  $BD$  meets  $AD$  and  $CD$  at  $M, N$  respectively. Let  $K$  be a point on side  $BC$  such that

$MN \parallel AC$ . Show that  $\widehat{MKN} = 90^\circ$ .



$MN \parallel AC$ . Show that  $\widehat{MKN} = 90^\circ$ .

**Q13.** A competition room of HOMC has  $m \times n$  students where  $m, n$  are integers larger than 2. Their seats are arranged in  $m$  rows and  $n$  columns. Before starting the test, every student takes a handshake with each of his/her adjacent students (in the same row or in the same column). It is known that, there are totally 27 handshakes. Find the number of students in the room.

**Q14.** Let  $P(x)$  be a polynomial with degree 2017 such that  $P(k) = \frac{k}{k+1}, \forall k = 0, 1, 2, \dots, 2017$ . Calculate  $P(2018)$ .

**Q15.** Find all pairs of prime numbers  $(p; q)$  there is a positive integer  $m$  satisfying  $\frac{pq}{p+q} = \frac{m^2+6}{m+1}$ .

## 2. JUNIOR SECTION'S ANSWERS AND SOLUTION

**Q1.** We have  $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 16 - 12 = 4$ . The answer is C.

**Q2.** We have  $\bullet x = 0 \Rightarrow 2f(0) + f(2) = 5$  (1)

$\bullet x = 2 \Rightarrow 2f(2) + f(0) = 7$  (2)

Then (1) + (2) gives:  $f(0) + f(2) = \frac{5+7}{3} = 4$ .

The answer is A.

**Q3.** There are 2 ways to choose the 2 sides which have the same color in the first square. So the first square has  $2 \cdot 3! = 12$  colorings. For the second square: the color of the left side is fixed, if the left side and the right side have the same color then there are  $2! = 2$  colorings for the remaining sides; if the upper side and the lower side have the same color, one also has  $2! = 2$  colorings for the remaining sides. So the second square has 4 colorings. The argument is similar for the next square. Answer:  $12 \times 4 \times 4 = 192$ . The answer is D.

**Q4.**  $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 40 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + 6 \frac{x^2}{x+3} = 40$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + 6 \frac{x^2}{x+3} - 40 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + 6t - 40 = 0 \left(t = \frac{x^2}{x+3}\right) \Rightarrow (t-4)(t+10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases} \\ t = -10 \Rightarrow \text{no real root} \end{cases}$$

So, the equation has 2 real root. The answer is C.

**Q5.** Let  $CH = x, BC = a$ .

By Pythagoras' theorem,

$$\begin{cases} x^2 + AH^2 = 16 \\ (a-x)^2 + AH^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2ax - a^2 = 7 \Rightarrow x = \frac{a^2 + 7}{2a}.$$



$$\text{So } HM = CH - CM = \frac{a^2 + 7}{2a} - \frac{a}{2} = \frac{7}{2a}.$$

By a property of the bisector  $AO$ , one has  $\frac{CO}{BO} = \frac{4}{3}$ ,

then  $CO = \frac{4a}{7}$ , hence

$$OM = CO - CM = \frac{4a}{7} - \frac{a}{2} = \frac{a}{14}.$$

Since  $HM = 4 \times OM$ , one has  $\frac{7}{2a} = \frac{4a}{14} = \frac{2a}{7}$ , hence  $a = \frac{7}{2}$ . The answer is B.

**Q6.** Let  $a, b, c$  the number of books, pens and pencils respectively. Then  $a + b + c = 20$  and  $3a + 1.5b + 0.5c = 20$ .

$$\Rightarrow 5a + 2b = 20 \Rightarrow b:5, 0 < b < 10 \Rightarrow a = 2; b = 5; c = 13.$$

The answer is  $2 \times 3 = 6$ .

**Q7.** Draw  $DH \perp AB, EK \perp DH$  ( $H \in AB, K \in DH$ ).

Since  $BCD$  is a right-angled isosceles triangle, one has  $BD = 2$ . Also  $\widehat{ABD} = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$ , so  $ABD$  is equilateral triangle with the side length is 2, hence

$DH = \sqrt{3}$ . Now  $AHKE$  is a rectangle, then  $EK = HA = 1$ .

In triangle  $DKE$ ,  $\widehat{DKE} = 90^\circ$ ,

$DE = \sqrt{2}, EK = 1$ , these implies that  $KD = 1$ . So

$$AE = HD - KD = \sqrt{3} - 1.$$

The answer is  $3 + 1 = 4$ .

**Q8.** We have  $m = 13! + \frac{13!}{2} + \dots + \frac{13!}{12} + \frac{13!}{13}$

$$\Rightarrow m \equiv \frac{13!}{7} \equiv 1.2.3 \dots 6.8 \dots 13 \equiv (1.2.3 \dots 6)^2 \pmod{7}$$

$$\equiv 720^2 \pmod{7}$$

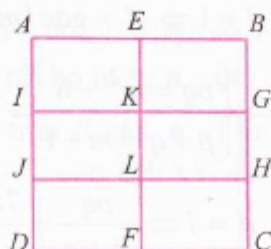
$$\equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{7}$$

The answer is 1.

**Q9.** Denote by  $S_i$  the area of the polygon  $i$  with  $i = \overline{1, 3}$ ;

$S_{ij}$  the area of the overlap of polygons  $i$  and  $j$  with  $1 \leq i < j \leq 3$ ;

$S_{123}$  the area of the overlap



of these 3 polygons;  $S$  the covering area of these 3 polygons. Then

$$\begin{aligned} 6 &\geq S = S_1 + S_2 + S_3 - S_{12} - S_{13} - S_{23} + S_{123} \\ &= 9 + S_{123} - (S_{12} + S_{13} + S_{23}) \\ &\geq 9 - (S_{12} + S_{13} + S_{23}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{12} + S_{23} + S_{13} \geq 3.$$

There exists  $S_{ij} \geq 1$ . Otherwise, we have the following example, where

$$S_{ABGKLJ} = S_{IKLHCD} = S_{EBCF} = 3 \text{ and } S_{12} = S_{13} = S_{23} = 1.$$

The greatest value of  $a$  is 1.

**Q10.** We have  $(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4x - 4$

$$(y-1)(4-y) \geq 0 \Rightarrow -y^2 \geq -5y + 4$$

$$(z-3)^2 \geq 0 \Rightarrow z^2 \geq 6z - 9$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}y^2 + \frac{1}{6}z^2 \geq \frac{1}{4}(4x-4) + \frac{1}{5}(-5y+4)$$

$$+ \frac{1}{6}(6z-9) = x - y + z - \frac{17}{10} = \frac{23}{10}$$

$$\Rightarrow 10 \times T \geq 23 \Rightarrow \min(10 \times T) = 23, \text{ when } x=2, y=1, z=3.$$

**Q11.**  $(xy+2)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (xy+3)^2 - 5 = (x+y)^2$

$$\Leftrightarrow (xy+3)^2 - (x+y)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (xy+x+y+3)(xy-x-y+3) = 5.$$

Since  $x$  and  $y$  are nonnegative integers then

$$xy+x+y+3 \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} xy+x+y+3=5 \\ xy-x-y+3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \{(0, 2); (2, 0)\}.$$

**Q12. Solution 1**

Let  $AB \cap MK = \{X\}$ . By symmetry,  $\widehat{MBN} = \widehat{MDN} = 90^\circ$ .

So  $\widehat{MBA} = \widehat{NBC}$  then

$$\Delta BAM \sim \Delta BCN.$$

Therefore

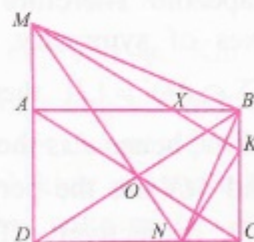
$$\frac{CN}{AM} = \frac{BC}{BA} = \frac{KC}{XA}$$

(since  $XK \parallel AC$ ). Hence

$\Delta KCN \sim \Delta XAM \sim \Delta XBK$ . This implies that

$\widehat{XKB} = \widehat{KNC}$ . But  $\widehat{KNC} + \widehat{CKN} = 90^\circ$  then

$$\widehat{XKB} + \widehat{CKN} = 90^\circ \text{ thus } \widehat{XKN} = 90^\circ.$$



### Solution 2

Let  $MK \cap CD = \{L\}$ ,

$MK \cap AB = \{X\}$ ,

$MN \cap BC = \{P\}$ . One has

$AMKC$ ,  $AMCP$ ,  $AXLC$  are parallelograms, hence

$$CK = AM = CP, AX = CL.$$

By Thales' theorem,

$$\frac{CL}{CP} = \frac{AX}{CK} = \frac{AB}{BC} = \frac{CD}{BC}.$$

Therefore  $LP \parallel BD$ , but  $MN \perp BD$  then  $\widehat{NPL} = 90^\circ$ .

Since  $CK = CP$ , the points  $K$  and  $P$  are symmetric

about  $NL$ . This implies that  $\widehat{NKL} = \widehat{NPL} = 90^\circ$  or  $\widehat{MKN} = 90^\circ$ .

**Solution 3.** Let  $MK \cap AB = \{X\}$ ,  $OK \cap AD = \{H\}$ ,

$MO \cap AB = \{Y\}$ . One has  $HYKN$ ,  $DHBK$  are parallelograms, hence

$$HY \parallel NK, BK = DH.$$

Since  $MK \parallel AC$  and

$$\frac{XB}{AB} = \frac{BK}{BC} = \frac{DH}{AD}.$$

Then  $HX \parallel BD$ , but

$MN \perp BD$  then  $MN \perp HX$ .

In triangle  $MHX$ ,  $XA \perp HM$ ,  $MO \perp HX$ , so  $Y$  is the orthocenter. This implies that  $HY \perp MX$ ,  $NK \perp MK$ .

**Solution 4.** Let  $DB \cap MK = \{I\}$ .

Let  $T$ ,  $S$  be the midpoint of  $MD$ ,  $BK$ , respectively. Since

$MK \parallel AC$ , one has  $\widehat{IKB} = \widehat{OCB} = \widehat{IBK} = \widehat{IDM} = \widehat{IMD}$ .

So  $MBKD$  is an isosceles trapezoid. Therefore  $S, I, T$  are collinear,  $ST$  is the axes of symmetry of  $MBKD$  and  $TS \parallel CD$ . Let

$TS \cap MN = \{J\}$  then  $IJ$  is the mid-line of triangle

$MDN$ , hence  $J$  is the midpoint of  $MN$ . Note that  $TS$  and  $MN$  are the perpendicular bisectors of  $BK$  and  $BD$ , respectively. Therefore  $JK = JB = JD$ . Since

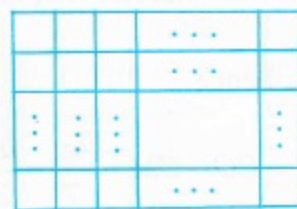
$\widehat{MDN} = 90^\circ$ , one has  $JD = \frac{MN}{2}$ , then  $KJ = \frac{MN}{2}$

and it follows that  $\widehat{MKN} = 90^\circ$ .

**Solution 5.** (Use inscribed quadrilateral) It is similar to solution 1, one has  $\widehat{MBN} = \widehat{MDN} = 90^\circ$ . Hence the quadrilateral  $MBND$  is cyclic. It similar to solution 4,  $MBKD$  is an isosceles trapezoid, so the

quadrilateral  $MBKD$  is cyclic. Therefore  $M, B, K, N, D$  are concyclic. Then  $\widehat{MKN} = \widehat{MBN} = 90^\circ$ .

### Q13.



Consider a  $m \times n$  grid of  $mn$  points, each point is a student. Each handshake of two students can be treated as a segment joining two corresponding points. Hence the number of segments is

$$27 = (m-1) \times n + (n-1) \times m \text{ or } 2mn - m - n = 27.$$

Therefore  $4mn - 2m - 2n + 1 = 55$  then

$$(2m-1)(2n-1) = 55 = 5 \times 11.$$

This implies that  $(m, n)$  is a permutation of  $(3, 6)$ . So the number of student is  $3 \times 6 = 18$ .

**Q14.** Let  $Q(x) = (x+1)P(x) - x \Rightarrow \deg Q = 2018$  and

$$Q(0) = Q(1) = Q(2) = \dots = Q(2017) = 0.$$

$$\Rightarrow Q(x) = (x+1)P(x) - x = kx(x-1)(x-2) \times \dots \times (x-2017).$$

$$\bullet x = -1 \Rightarrow 1 = k \times 2018! \Rightarrow k = \frac{1}{2018!}.$$

$$\bullet x = 2018 \Rightarrow 2019P(2018) - 2018$$

$$= \frac{1}{2018!} \times 2018 \times 2017 \times \dots \times 1 = 1 \Rightarrow P(2018) = 1.$$

$$\text{Q15. } \frac{pq}{p+q} = \frac{(m+1)(m-1)+7}{m+1} = m-1 + \frac{7}{m+1}.$$

$$\text{Case 1. If } p = q, \text{ we have } p = 2(m-1) + \frac{14}{m+1}.$$

So, we find a positive integer  $m$  such that  $p$  is an integer and from that to obtain  $p$  as prime number  $\Rightarrow m = 1$  and  $p = q = 7$ .

Case 2. If  $p \neq q \Rightarrow \gcd(pq; p+q) = 1$ . Let

$$d = \gcd(m^2 + 6; m+1) \Rightarrow d \in \{1; 7\}$$

$$\bullet d = 1 \Rightarrow d = \gcd(m^2 + 6; m+1) = \gcd(pq; p+q) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} pq = m^2 + 6 \\ p + q = m + 1 \end{cases} \Rightarrow (m+1)^2 \geq 4(m^2 + 6) \Rightarrow m \in \emptyset.$$

$$\bullet d = 7 \Rightarrow \frac{pq}{p+q} = \frac{7k^2 - 2k + 1}{k}, k \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow k^2 \geq 4(7k^2 - 2k + 1) \Rightarrow k \in \emptyset.$$

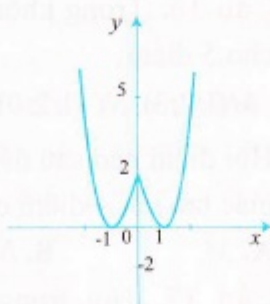
The answer is  $(p; q) = (7; 7)$ .

# THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2018

## ĐỀ SỐ 8

(Thời gian làm bài: 90 phút)

**Câu 1.** Đồ thị bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A.  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ .

B.  $y = 2(x^2 - 1)^2$ .

C.  $y = |x^3| - 3|x| + 2$ .

D.  $y = x^2 - 2|x|^2 + 2$ .

**Câu 2.** Cho 2 mặt phẳng phân biệt  $\alpha$  và  $\beta$  và đường thẳng  $a$ . Xét các mệnh đề sau đây:

I)  $\begin{cases} \alpha \perp a \\ \beta \perp a \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ ;

II)  $\begin{cases} \alpha \parallel a \\ \beta \parallel a \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ ;

III)  $\begin{cases} \alpha \perp \beta \\ \alpha \perp a \end{cases} \Rightarrow a \parallel \alpha$ ;

IV)  $\begin{cases} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \perp a \end{cases} \Rightarrow a \perp \beta$ .

Hỏi trong 4 mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

**Câu 3.** Cho hai số thực  $a, b$  khác 0 và hàm số  $y = \ln(2018 + ax) + \ln(2018 + bx)$ . Tính  $p = ab$ , biết  $y'(1) = 1$ .

A.  $p = 1$ .

B.  $p = 2018$ .

C.  $p = \frac{1}{2018}$ .

D.  $p = 2018^2$ .

**Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ . Mặt phẳng  $(xOy)$  cắt mặt cầu  $(S)$  một thiết diện là đường tròn có phương trình nào sau đây?

A.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ .      B.  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11 \\ z = 0 \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 16 \\ z = 0 \end{cases}$

**Câu 5.** Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $y = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x$ .  $F(x)$  là hàm số nào dưới đây?

A.  $F(x) = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{4} + C$ .

B.  $F(x) = \sin^3 x \cos x + C$ .

C.  $F(x) = -\sin x \cos^3 x + C$ .

D.  $F(x) = \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$ .

**Câu 6.** Tính số phức  $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2018} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$  có

kết quả là:

A.  $z = 2$ .      B.  $z = -2$ .      C.  $z = 2i$ .      D.  $z = 1 + i$ .

**Câu 7.** Cho ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì ba giao tuyến của chúng sẽ có mấy vị trí tương đối xảy ra?

A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

**Câu 8.** Cho  $S_1 = (2 + \sqrt{3})^{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 2018^2}$ ;

$$S_2 = (2 - \sqrt{3})^{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 2017^2}.$$

Kết quả  $\log_{(26+15\sqrt{3})}(S_1 S_2)$  bằng:

A. 679057.      B. 579067.      C. 679047      D. 470071.

**Câu 9.** Cho hình nón có đường sinh gấp 3 lần bán kính đường tròn đáy thì tỷ số  $k$  giữa đường cao và đường sinh của nó là:

A.  $k = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

B.  $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

C.  $k = \frac{1}{3}$ .

D.  $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 10.** Xét các kết quả giới hạn sau:

I.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = 1$ ;      II.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = -1$ ;

III.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x - 1} = -1$ ;      IV.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x - 1} = 1$ .

Kết quả nào sau đây đúng?

A. I và III.

B. II và III.

C. II và IV.

D. I và IV.

**Câu 11.** Cho  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$ . Khẳng định

đúng là:

A.  $I \in (-1; 3)$ .

B.  $I \in (-2; 0)$ .

C.  $I \in (-7; -5)$ .

D.  $I \in [3; 8]$ .

**Câu 12.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $z_1, z_2 \neq 0$  và  $z_2^2 - 2z_1 z_2 + 2z_1^2 = 0$ .

Tính  $\left| \frac{z_2}{z_1} \right|$ .

A.  $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{3}$ .

B.  $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = 2\sqrt{2}$ .

C.  $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

D.  $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{2}$ .

**Câu 13.** Để giải phương trình:  $2^x(3x^2 - 2) = 2x$  bạn Việt tiến hành giải 4 bước sau:

Bước 1. Ta nhận thấy phương trình không có nghiệm  $x=0$  nên phương trình tương đương

$$\frac{3x^2 - 2}{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Bước 2. Ta nhận thấy phương trình có nghiệm  $x=1$ , vì thế  $x=1$  vào phương trình ta có

$$\frac{3 \cdot 1^2 - 2}{2 \cdot 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \text{ đúng.}$$

Bước 3. Ta có vế phải  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  là hàm số nghịch

biến trên  $\mathbb{R}$  (vì cơ số  $\frac{1}{2} < 1$ ); vế trái  $y = \frac{3x^2 - 2}{2x}$  có

$$y' = \frac{3}{2} + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \neq 0, \text{ nên vế trái là hàm số đồng}$$

biến trên  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Bước 4. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất  $x=1$ .

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Bạn Việt giải hoàn toàn đúng.

B. Bạn Việt giải sai từ bước 2.

C. Bạn Việt giải sai từ bước 3.

D. Bạn Việt giải sai từ bước 4.

**Câu 14.** Có bao nhiêu số thực  $a$  để  $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx = 1$ ?

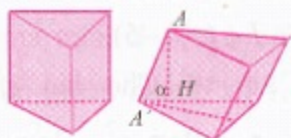
A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 15.** Cho một lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều. Người ta ấn (đẩy) lăng trụ đó trở thành một lăng trụ xiên (vẫn giữ nguyên đáy như hình vẽ) để thể tích của nó giảm đi một nửa lúc ban đầu. Hỏi cạnh bên của lăng trụ xiên lúc này tạo với đáy một góc  $\alpha$



bằng bao nhiêu?

A.  $\alpha = 60^\circ$ .

B.  $\alpha = 30^\circ$ .

C.  $\alpha = 45^\circ$ .

D.  $\alpha = 40^\circ$ .

**Câu 16.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho 5 điểm

$$M(1; 2; 3), N(-1; 2; 0), P(-1; 4; 3), Q(0; 0; 6), R(0; 2; 4).$$

Hỏi điểm nào sau đây không thuộc mặt phẳng của tứ giác tạo bởi 4 điểm còn lại?

A.  $M$ .

B.  $N$ .

C.  $P$ .

D.  $R$ .

**Câu 17.** Hỏi trong khoảng  $(0; 3\pi)$  có bao nhiêu điểm để hàm số  $y = \cos x + \sin x$  đạt cực đại?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 18.** Số nghiệm của phương trình  $\log_{2018}|x| + x^2 = 2017$  là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 19.** Cho số thực  $a$  và hàm số

$$y = \sqrt{ax^2 + 2018x + 2019} - \sqrt{ax^2 + 2017x + 2018}.$$

Số tiệm cận nhiều nhất (nếu có) của đồ thị hàm số trên là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 20.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(3; 4; 1)$ ,  $B(-3; -2; -2)$ . Đường thẳng qua  $A$  và  $B$  cắt mặt phẳng  $(xOy)$  tại  $M$ . Điểm  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỷ số  $k$  bằng:

A.  $k = -\frac{1}{2}$ .

B.  $k = 2$ .

C.  $k = -2$ .

D.  $k = \frac{1}{2}$ .

**Câu 21.** Cho góc tù  $x$  thỏa mãn:  $14\cos^2 x + \sin 2x = 2$ . Khi đó  $\cos x$  bằng:

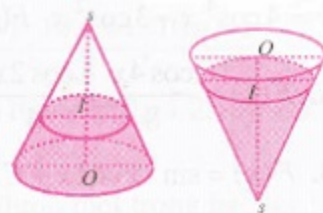
A.  $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

B.  $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

C.  $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

D.  $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ .

**Câu 22.** Cho cái phễu đựng nước hình nón có trục  $SO$  như hình vẽ. Cho trục  $SO$  thẳng đứng, từ nắp đỉnh  $S$  ta đổ một lượng nước vào phễu để nước dâng lên vị trí  $I$  thuộc trục  $SO$  và giả sử rằng khi ta lật ngược phễu lại nhưng luôn vẫn giữ nguyên trục  $SO$  thẳng đứng thì mực nước vẫn ở vị trí ban đầu



$I$  của nó. Tính tỉ số  $k = \frac{SI}{SO}$ .

- A.  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . B.  $k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ . C.  $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . D.  $k = \frac{1}{2}$ .

**Câu 23.** Cho  $f(x)$  là một hàm số chẵn liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_{-2}^0 f(x)dx = 2018$ ,  $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2017$ . Giá trị của  $I = \int_{-1}^0 f(x)dx$  bằng:

- A.  $I = 2$ . B.  $I = 1$ . C.  $I = 0$ . D.  $I = -1$ .

**Câu 24.** Cho 3 số thực  $a, b, c$  đều lớn hơn 1 thỏa mãn:  $\log_a b \cdot \log_a c < \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$ . Tập nghiệm của bất phương trình:  $\log_a x + \log_b x > \log_c x$  là:

- A.  $x < 1$ . B.  $x > 0$ . C.  $\begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$ . D.  $0 < x < 1$ .

**Câu 25.** Tập hợp nào dưới đây chứa số thực  $a$  để

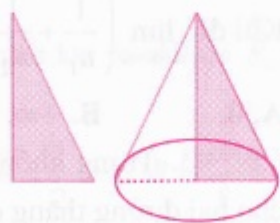
$$I = \int_0^1 \frac{x}{\cos^2(ax)} dx = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi^2} \ln 2 ?$$

- A.  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ . B.  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ . C.  $(-1; 0)$ . D.  $(0; 1)$ .

**Câu 26.** Lấy ngẫu nhiên một số có 4 chữ số đôi một phân biệt. Tính xác suất  $p$  để số được lấy không lớn hơn 2018.

- A.  $p = \frac{85}{756}$ . B.  $p = \frac{510}{1134}$ . C.  $p = \frac{509}{4536}$ . D.  $p = \frac{84}{756}$ .

**Câu 27.** Gọi  $T$  là tập hợp các tấm bìa có hình dạng tam giác vuông có cạnh huyền không đổi bằng  $a$ . Lấy một tấm bìa tùy ý trong  $T$  chọn một cạnh bên làm trục rồi quay chung quanh tấm bìa đó với trục đã chọn tạo thành một hình nón (như hình vẽ bên). Thể tích lớn nhất  $V_{\max}$  theo  $a$  của hình nón tạo thành bằng:

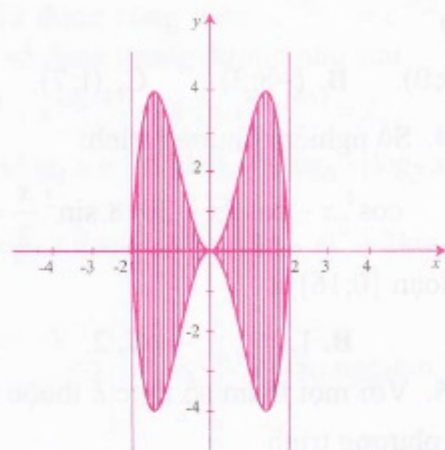


- A.  $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} a^3$ . B.  $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} a^3$ .

- C.  $V_{\max} = \frac{\sqrt{3}\pi}{27} a^3$ . D.  $V_{\max} = \frac{2\pi}{9} a^3$ .

**Câu 28.** Ông Rich muốn gắn những viên kim cương nhỏ vào một mô hình như cánh bướm theo hình vẽ

bên dưới. Để tính diện tích mô hình đó ông áp nó vào một hệ trục tọa độ như hình vẽ thì nhận thấy rằng diện tích mô hình đó là phần giao (tô bóng) giữa hai hàm số trùng phương  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  đối xứng nhau qua trục  $Ox$ . Hỏi ông Rich đã gắn bao nhiêu viên kim cương trên mô hình đó biết rằng mỗi đơn vị vuông trên mô hình đó mất 15 viên kim cương?



- A. 256. B. 128. C. 64. D. 265.

**Câu 29.** Cho  $a, b$  là các số thực thỏa mãn

$$\int_0^1 \left( \frac{2abx + a + b}{(1+ax)(1+bx)} \right) dx = 0.$$

Giá trị của  $S = ab + a + b$  bằng:

- A.  $S = 0, S = 1$ . B.  $S = -2, S = 0$ .  
C.  $S = 1, S = -2$ . D.  $S = -2, S = 1$ .

**Câu 30.** Cho hàm số  $f(x) = \log_{2017} \left( \frac{x}{1-x} \right)$ . Tổng

$S = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$  bằng:

- A.  $S = 1008$ . B.  $S = 1$ . C.  $S = 0$ . D.  $S = 1009$ .

**Câu 31.** Cho dãy số  $(x_n)$  thỏa mãn điều kiện

$$x_1 = 1, x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Số hạng  $x_{2018}$  bằng:

- A.  $x_{2018} = \frac{4036}{2018}$ . B.  $x_{2018} = \frac{4035}{2018}$ .  
C.  $x_{2018} = \frac{4037}{2018}$ . D.  $x_{2018} = \frac{4034}{2018}$ .

**Câu 32.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; 3), B(0; 1; 0), C(1; 0; -2)$ . Tìm trên mặt phẳng  $(P): x + y + z + 2 = 0$  điểm  $M$  sao cho tổng  $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$  có giá trị nhỏ nhất?

A.  $M\left(-\frac{5}{18}; -\frac{13}{9}; -\frac{5}{18}\right)$ . B.  $M\left(-\frac{5}{18}; -\frac{5}{18}; -\frac{13}{9}\right)$ .  
C.  $M\left(-\frac{13}{9}; -\frac{5}{18}; -\frac{5}{18}\right)$ . D.  $M\left(-\frac{1}{9}; -\frac{1}{9}; -\frac{16}{9}\right)$ .

**Câu 33.** Tập nào dưới đây có chứa số thực  $m$  để diện tích giới hạn bởi đường cong  $(C): y = x^3 - 3x$  và đường thẳng  $(d): y = mx$  có diện tích bằng 8 (đvdt)?

A.  $(-8; 0)$ . B.  $(-8; 3)$ . C.  $(1; 7)$ . D.  $(-3; 0)$ .

**Câu 34.** Số nghiệm phương trình:

$$\cos^4 x - \cos 2x + 2018 \cdot \sin^2 \frac{x}{3} = 0$$

trong đoạn  $[0; 16]$  là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 35.** Với mọi tham số thực  $k$  thuộc tập nào dưới đây để phương trình

$$\log_2^2 \left( \cos^2 \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right) - 4 \log_2 (\cos x + \sin x) - 2 - 4k = 0$$

có nghiệm?

A.  $\left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$ . B.  $(-\infty; -1]$ .

C.  $(-2; 0)$ . D.  $(0; 2018)$ .

**Câu 36.** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện:

$$|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}. \text{ Khi đó số phức } w = z + 1 + i \text{ có}$$

môđun lớn nhất  $|w|_{\max}$  bằng:

A.  $|w|_{\max} = 20$ . B.  $|w|_{\max} = 2\sqrt{5}$ .

C.  $|w|_{\max} = \sqrt{5}$ . D.  $|w|_{\max} = 5\sqrt{2}$ .

**Câu 37.** Cho hình chóp tứ giác  $SABCD$ , đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và vuông góc với đáy  $ABCD$ . Tính thể tích khối nón có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác  $SAB$  và đỉnh của khối nón nằm trên mặt phẳng  $(SDC)$ .

A.  $V = \frac{2a^3}{21}$ . B.  $V = \frac{2\pi a^3}{27}$ .

C.  $V = \frac{\pi a^3}{21}$ . D.  $V = \frac{2\pi a^3}{9}$ .

**Câu 38.** Hỏi trong khoảng  $(0; 2018)$  phương trình:

$$\tan x = 2018^{\cos 2x}$$
 có bao nhiêu nghiệm?

A. 322. B. 642. C. 323. D. 643.

**Câu 39.** Cho hàm số  $y = x^3 - x^2 + 2$  có đồ thị  $(C)$ .

Hỏi trên đường thẳng  $x = 1$  tồn tại mấy điểm để tại đó kẻ đến  $(C)$  có đúng hai tiếp tuyến phân biệt?

A. 0. B. 1. C. 2. D. vô số.

**Câu 40.** Một đề thi trắc nghiệm môn toán có 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án chọn, trong đó có 1 phương án đúng, chọn phương án đúng thì câu đó được 0,2 điểm. Trong thời gian cho phép 90 phút bạn *Lân* đã làm bài chắc chắn đúng 40 câu, 10 câu còn lại bạn *Lân* chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất  $p$  để bạn *Lân* có đúng 9 điểm.

A.  $p = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot C_{10}^5$ . B.  $p = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$ .

C.  $p = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot C_{10}^5$ . D.  $p = \frac{1}{4} \cdot C_{10}^5$ .

**Câu 41.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , lập phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  qua hai điểm  $M(1; -1; 1)$ ,  $N(0; -1; 0)$  và cắt hình cầu

$$(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

theo thiết diện là một hình tròn có diện tích  $S = \pi$ .

A.  $2x + y - 2z + 1 = 0$ ,  $3x + y - 3z + 1 = 0$ .

B.  $3x - y - 3z - 1 = 0$ ,  $2x - y - 2z - 1 = 0$ .

C.  $2x + y - 2z + 1 = 0$ ,  $2x - y - 2z - 1 = 0$ .

D.  $3x + y - 3z + 1 = 0$ ,  $3x - y - 3z - 1 = 0$ .

**Câu 41.** Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2(n+1) \end{cases} \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

Khi đó  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right)$  bằng:

A. 0. B.  $+\infty$ . C. 2. D. 1.

**Câu 43.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng chéo nhau

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} \text{ và } (d_2): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

Lập phương trình mặt phẳng  $(P)$  sao cho khoảng cách từ  $(d_1)$  đến  $(P)$  gấp hai lần khoảng cách từ  $(d_2)$  đến  $(P)$ .

A.  $x - 2y + z + 4 = 0$ ,  $x + 2y + z + \frac{4}{3} = 0$ .

B.  $x + 2y + z + 4 = 0, x + 2y + z + \frac{4}{3} = 0.$

C.  $x - 2y + z + 4 = 0, x - 2y + z + \frac{4}{3} = 0.$

D.  $x + 2y + z + 4 = 0, x - 2y + z + \frac{4}{3} = 0.$

**Câu 44.** Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m$ .

Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số và hai trục  $Ox, Oy$  có diện tích không lớn hơn 1 (đvdt).

A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

**Câu 45.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  đồng thời thỏa mãn hai điều kiện

$$|z-1| = \sqrt{34}, \quad |z+1+mi| = |z+m+2i|$$

(trong đó  $m \in \mathbb{R}$ ) và sao cho  $|z_1 - z_2|$  là lớn nhất.

Khi đó giá trị của  $|z_1 + z_2|$  bằng:

A.  $\sqrt{2}$ . B.  $\sqrt{130}$ . C. 2. D. 10.

**Câu 46.** Cho hàm số

$y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$

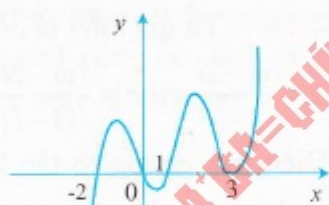
có đạo hàm liên tục trên

$\mathbb{R}$  và  $y = f'(x)$  có đồ

thị như vẽ. Số nghiệm

nhiều nhất của phương

trình



$$f(x^2) = m$$

(với  $m$  là số thực) là

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

**Câu 47.** Cho số thực  $x > 0$ . Tìm hệ số của số hạng không chứa  $x$  trong khai triển nhị thức Newton của

biểu thức  $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^n$  biết rằng

$$C_n^{k-2} + 2C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{2018C_{n+1}^{k-1}}{k}$$

với  $k, n$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $2 \leq k \leq n$ .

A.  $C_{2016}^{1008}$ . B.  $C_{2018}^{1009} \cdot 2^{1009}$ .

C.  $C_{2016}^{1008} \cdot 2^{1008}$ . D.  $C_{2014}^{1007} \cdot 2^{1007}$ .

**Câu 48.** Mồng 3 tết Mậu Tuất vừa rồi ông Đại Gia đến chúc tết và lì xì cho 3 anh em Tôi. Trong ví của ông Đại Gia chỉ còn có 4 tờ mệnh giá 200000 đồng và 5 tờ mệnh giá 100000 đồng được sắp xếp một cách lộn xộn trong ví. Ông gọi ba anh em tôi đứng xếp hàng có thứ tự, anh Cả đứng trước lì xì trước, anh Hai đứng sau lì xì sau và Tôi là thằng Út đứng sau cùng nên lì xì sau cùng. Hỏi xác suất  $p$  bằng bao nhiêu để Tôi nhận tiền lì xì có mệnh giá lớn nhất, biết rằng ông Đại Gia lì xì bằng cách rút ngẫu nhiên cho anh em Tôi mỗi người chỉ một tờ giấy tiền trong túi của ông?

A.  $p = \frac{4}{9}$ . B.  $p = \frac{25}{63}$ . C.  $p = \frac{1}{9}$ . D.  $p = \frac{1}{21}$ .

**Câu 49.** Cho hai số thực dương  $a, b$  thay đổi và

thỏa mãn điều kiện:  $\ln a(1 - \ln b) = \ln b \cdot \sqrt{4 - \ln^2 a}$ .

Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của  $\log_b a$ . Giá trị của  $M + m$  bằng:

A.  $2(\sqrt{2} - 1)$ . B.  $2(\sqrt{2} + 1)$ .

C.  $2(1 - \sqrt{2})$ . D.  $\sqrt{2} - 1$ .

**Câu 50.** Cho họ đường cong

$$(C_m): y = (m+1)x^3 - (3m-1)x^2 - x + 3m,$$

với mọi tham số thực  $m$  tùy ý, xét các khẳng định sau đây:

I.  $(C_m)$  luôn không đi qua điểm cố định nào.

II.  $(C_m)$  luôn đi qua 1 điểm cố định nằm trên parabol:  $y = 4x^2 - x - 3$ .

III.  $(C_m)$  luôn đi qua 2 điểm cố định nằm trên đường cong:  $y = 2x^3 - 2x^2 - x - 3$ .

IV.  $(C_m)$  luôn đi qua 3 điểm cố định là ba đỉnh của tam giác nhận  $G(1; 8)$  làm trọng tâm.

Hỏi trong bốn khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1C  | 2D  | 3B  | 4A  | 5A  | 6C  | 7A  | 8D  | 9B  | 10D |
| 11B | 12A | 13B | 14A | 15C | 16C | 17C | 18C | 19A | 20C |
| 21D | 22A | 23A | 24D | 25A | 26B | 27C | 28A | 29A | 30D |
| 31D | 32C | 33C | 34D | 35C | 36C | 37A | 38D | 39B | 40B |
| 41B | 42C | 43B | 44B | 45D | 46D | 47D | 48D | 49B | 50C |

**Câu 1.** Ký hiệu  $S$  là tổng đã cho, thế thì

$$S = \sum_{i=0}^{10} \frac{x^{10-i}}{(10-i)!} \cdot \frac{(1-x)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{10} \frac{1}{10!} C_{10}^i x^{10-i} (1-x)^i$$

$$= \frac{1}{10!} [x + (1-x)]^{10} = \frac{1}{10!}.$$

**Câu 2.** Ta có  $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$ .

Xét dấu  $y'$ , suy ra hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 0$  và đạt cực đại tại  $x = 2$ .

**Câu 3.** Từ PT đã cho suy ra  $m \geq 0$ , bình phương hai vế ta được

$$2 + \sin x + \cos x + 2\sqrt{1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x} = m^2.$$

Đặt  $\sin x + \cos x = t$  ( $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ ) thì  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ .

PT đã cho trở thành  $2 + t + \sqrt{2t^2 + 4t + 2} = m^2$ .

Xét hàm

$$f(t) = 2 + t + \sqrt{2t^2 + 4t + 2} = 2 + t + \sqrt{2} |t + 1|$$

$$= \begin{cases} (1 - \sqrt{2})t + (2 - \sqrt{2}) & \text{nếu } -\sqrt{2} \leq t \leq -1, \\ (1 + \sqrt{2})t + (2 + \sqrt{2}) & \text{nếu } -1 \leq t \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Do các nhánh của hàm  $f(t)$  chỉ là những hàm tuyến tính bậc nhất nên

• Với  $-\sqrt{2} \leq t \leq -1$  thì  $f(-1) \leq f(t) \leq f(-\sqrt{2})$  hay

$$1 \leq f(t) \leq 4 - 2\sqrt{2}.$$

• Với  $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$  thì  $f(-1) \leq f(t) \leq f(\sqrt{2})$  hay

$$1 \leq f(t) \leq 4 + 2\sqrt{2}.$$

Từ đó suy ra  $1 \leq f(t) \leq 4 + 2\sqrt{2}, \forall t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ .

Vậy PT đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow 1 \leq m \leq \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ .

**Câu 4.** Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $d$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  thỏa mãn yêu cầu đề bài sẽ nhận  $\overrightarrow{AH}$  làm vector pháp tuyến.

$$H \in d \Rightarrow H(2-t, -1+t, 1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1-t, 2t, 1+t)$$

$d$  có một vector chỉ phương là  $\vec{u} = (-1; 2; 1)$ . Do

$$AH \perp d \text{ nên } \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}. \text{ Khi đó}$$

$$\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(1; 1; -1)$$

Vậy  $(\alpha): x + y - z = 0$ .

**Câu 5.** Điều kiện cần để có  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 3$  là

$x^2 + ax + b$  chia hết cho  $x - 3$ , hay  $x = 3$  là một nghiệm của  $f(x) = x^2 + ax + b$ . Từ đó  $9 + 3a + b = 0$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + ax - 3a - 9 = (x - 3)(x + a + 3).$$

Khi đó ta có

$$3 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + a + 3) = a + 6 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \end{cases}.$$

**Câu 6.** Từ giả thiết bài toán ta có:

$$x_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})$$

$$= \frac{3n(n+3)}{2} - \frac{3(n-1)(n+2)}{2} = 3(n+1).$$

Từ đó suy ra  $x_{n-1} = 3n$  và  $x_n - x_{n-1} = 3$ . Điều này chứng tỏ  $(x_n)$  là một cấp số cộng với công sai bằng 3.

**Câu 7.** Từ giả thiết ta có:

$$\bar{z} = \frac{\omega - 2i}{1 - i} \Rightarrow |\bar{z}| = \frac{|\omega - 2i|}{|1 - i|} = \frac{|\omega - 2i|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\omega - 2i| = 2\sqrt{2}.$$

Điều này chứng tỏ tập hợp điểm biểu diễn số phức  $\omega$  là tâm đường tròn tâm  $2i$  bán kính  $2\sqrt{2}$ .

**Câu 8.** Thể tích khối tứ diện có đáy là  $\Delta MNP$  và đỉnh là một điểm bất kì thuộc mp( $ABC$ ) bằng

$$V_{SMNP}. \text{ Mà } \frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{SMNP} = \frac{V}{8}.$$

**Câu 9.** Ta có  $f'(x) = mx^2 - 2(m-2)x + 1$ . Điều kiện cần và đủ để  $f'(x)$  bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 5m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}.$$

**Câu 10.** Gọi  $G$  là trọng tâm  $\Delta ABC$  thì  $G(1; 3; -1)$ .

Khi đó  $MA^2 + MB^2 + MC^2$

$$= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Từ đây suy ra  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $MG$  nhỏ nhất. Mà  $M$  thuộc mp( $Oxy$ ) nên  $M$

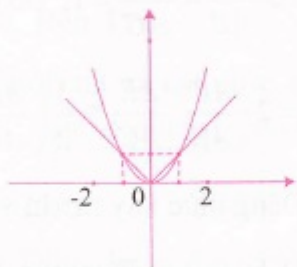
chính là hình chiếu vuông góc của  $G$  trên  $(Oxy)$ . Vậy  $M(1;3;0)$ .

**Câu 11.** Kí hiệu các lá thư  $a, b, c$  tương ứng với các phong bì  $A, B, C$ . Số cách bỏ ngẫu nhiên ba lá thư vào ba chiếc phong bì là  $3! = 6$ . Để xảy ra tình huống không có lá thư nào được bỏ đúng phong bì thì  $a$  có hai lựa chọn (vào  $B$  hoặc  $C$ ) và hai lá thư còn lại chỉ có một cách bố trí. Do vậy xác suất để không có lá thư nào được bỏ đúng phong bì là  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . Từ đó suy ra xác suất để có ít nhất một lá

thư được bỏ đúng phong bì là  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ .

**Câu 12.** Gọi  $V$  là thể tích vật thể cần tính. Từ hình vẽ ta có:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (y - y^2) dy \\ &= \pi \left( \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$



**Câu 13.** Trước hết ta có nhận xét như sau: ba số nguyên có tổng chia hết cho 3 khi và chỉ khi ba số đó có cùng số dư hoặc có số dư đôi một khác nhau khi chia cho 3. Ta chia tập  $\{1, 2, \dots, 10\}$  thành 3 tập con rời nhau  $A_0 = \{3, 6, 9\}$ ,  $A_1 = \{1, 4, 7, 10\}$ ,  $A_2 = \{2, 5, 8\}$ . Số cách chọn ba số thuộc cùng một tập  $A_i (i = 0, 1, 2)$  là  $C_3^3 + C_4^3 + C_3^3$ . Số cách chọn ba số mà mỗi số ở mỗi tập khác nhau là  $C_3^1 C_3^1 C_4^1$ . Do đó xác suất để rút được ba thẻ có tổng số chia hết cho 3 bằng  $\frac{2C_3^3 + C_4^3 + C_3^1 C_3^1 C_4^1}{C_{10}^3}$ .

**Câu 14.** Áp dụng công thức Leibniz: nếu

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \text{ thì } g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

$$\text{ta được } g'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

**Câu 15.** Chú ý là hai nhánh của đồ thị hàm số đã cho nằm ở bên trái và bên phải đường tiệm cận đứng  $x = 2$  nên ta có thể giả sử

$$A\left(2-a, 1-\frac{2}{a}\right), B\left(2+b, 1+\frac{2}{b}\right) \text{ với } a > 0 \text{ và } b > 0.$$

Khi đó

$$AB = \sqrt{(a+b)^2 + 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + 4\left(\frac{4}{a+b}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(a+b)^2 + \frac{64}{(a+b)^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{64}} = 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = \sqrt{2}$ .

**Câu 16.** Theo một kết quả cơ bản của cực trị hàm phân thức, chúng ta đã biết rằng đường thẳng nối hai điểm cực trị (nếu có) của hàm số  $y = \frac{-x^2 + mx + 1}{x-1}$  là

$$y = \frac{(-x^2 + mx + 1)'}{(x-1)'} = -2x + m.$$

Đường thẳng này đi qua hai điểm  $A(-1, 1)$  khi và chỉ khi  $2 + m = 1 \Leftrightarrow m = -1$ . Thử lại với giá trị  $m = -1$  thì hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

**Câu 17.** Lấy điểm  $A(1+a, -2-a, 3+2a) \in d_1$  và điểm  $B(-1+2b, 4-b, -2+2b) \in d_2$ . Khi đó

$$\overrightarrow{AB} = (-2-a+2b, 6+a-b, -5-2a+3b),$$

$$\overrightarrow{AM} = (-1-a, 1+a, -1-2a).$$

Ba điểm  $A, M, B$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AM}$ . Điều này tương đương với

$$\begin{cases} -2-a+2b = k(-1-a) \\ 6+a-b = k(1+a) \\ -5-2a+3b = k(-1-2a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ a = \frac{7}{2} \\ b = -4 \end{cases}.$$

Vậy  $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{27}{2}, \frac{27}{2}, -24\right) = -\frac{3}{2}(9, -9, 16)$  và PT

đường thẳng  $AB$  là  $\frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$ .

**Câu 18.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{mx^2 - 2x + 1}{2x + 1}$  có tiệm cận đứng và xiên (hoặc ngang) khi và chỉ khi  $mx^2 - 2x + 1$  không chia hết cho  $2x + 1$ . Nói cách khác  $f(x) = mx^2 - 2x + 1$  không có nghiệm  $x = -\frac{1}{2}$ ,

tức là  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{m}{4} + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -8$ .

**Câu 19.** Xếp hai học sinh  $A$  và  $B$  vào hai vị trí liên tiếp trong 10 vị trí thì có  $9 \times 2 = 18$  cách. 8 bạn còn lại thì có  $8!$  cách xếp. Vậy xác suất để hai bạn  $A$  và  $B$  đứng cạnh nhau là  $\frac{18 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{5}$ .

**Nhận xét.** Có thể làm theo cách khác như sau: Trước tiên ta xếp vị trí cho 8 học sinh kia (không gồm  $A, B$ ) thì có  $8!$  cách. Giữa họ có 7 vị trí xen kẽ và 2 vị trí đầu cuối. Tiếp theo xếp  $A, B$  vào 2 trong 9 vị trí đó thì có  $A_9^2$  cách. Vậy xác suất để  $A$  và  $B$  không

đứng cạnh nhau là  $\frac{8!A_9^2}{10!} = \frac{4}{5}$ . Từ đó suy ra xác suất

để  $A$  và  $B$  đứng cạnh nhau là  $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ .

**Câu 20.** Bất PT đã cho tương đương với

$$x < \left( \sqrt{x-1} + \frac{1}{100} \right)^2 = x + \frac{\sqrt{x-1}}{50} - \frac{9999}{10000}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9999}{10000} < \frac{\sqrt{x-1}}{50} \Leftrightarrow x > 1 + \left( 5 \cdot \frac{9999}{10000} \right)^2 \approx 2500,5.$$

**Câu 21.** Hàm số đã cho có tập xác định là  $[-2, 2]$ .

Ta có  $y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{x + \sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$ .

Xét  $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 4-x^2 = (-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}.$

$$f(-2) = -2, f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}, f(2) = 2.$$

Vậy  $\min_{[-2,2]} f(x) = -2\sqrt{2}, \max_{[-2,2]} f(x) = 2.$

Do đó  $M - m = 2(\sqrt{2} + 1).$

**Câu 22.** Kí hiệu  $I$  là tích phân cần tính. Ta thực hiện phép đổi biến  $x = 100 - u$  thì  $dx = -du$  và khi  $x = 0$  thì  $u = 100$ , khi  $x = 100$  thì  $u = 0$ . Do đó

$$\begin{aligned} I &= - \int_{100}^0 (100-u)(99-u) \dots (-u) du \\ &= - \int_0^{100} (u-100)(u-99) \dots u du = -I \Rightarrow I = 0. \end{aligned}$$

**Câu 24.** Chú ý rằng hàm số đa thức bậc ba có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu khi đồ thị của nó cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. Điều này tương đương với đồ thị  $y = f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + 1$  cắt

đường thẳng  $y = m$  tại ba điểm phân biệt. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2).$$

Từ bảng biến thiên của hàm  $y = f(x)$  ta suy ra

$$f(2) < m < f\left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow -5 < m < \frac{73}{54}$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của  $m$  ( $m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ ) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 25.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  nên đồ thị

hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \text{ nên đồ thị hàm số}$$

có hai đường tiệm cận đứng.

**Câu 26.** Theo định lí khai triển nhị thức Newton, ta

$$\begin{aligned} \text{có } (2x+1)^6 \left( x^2 + x + \frac{1}{4} \right)^4 &= (2x+1)^6 \left( x + \frac{1}{2} \right)^8 \\ &= 2^6 \left( x + \frac{1}{2} \right)^{14} = 2^6 \sum_{i=0}^{14} C_{14}^i \left( \frac{1}{2} \right)^{14-i} x^i. \end{aligned}$$

Vậy hệ số của  $x^6$  (ứng với  $i = 6$ ) là  $\frac{1}{4} C_{14}^6$ .

**Câu 27.** Theo tính chất của các đường thẳng song song ta có

$$\begin{aligned} \frac{ED}{AB} &= \frac{CD}{CB}, \frac{FD}{AC} = \frac{BD}{BC} \\ \Rightarrow \frac{AF}{AB} + \frac{AE}{AC} &= 1. \text{ Do đó } \frac{S_{AEDF}}{S_{ABC}} = \frac{2S_{AEF}}{S_{ABC}} \\ &= 2 \cdot \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{AF}{AB} + \frac{AE}{AC} \right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$ , tức  $D$  là trung điểm của  $BC$ . Vậy diện tích hình bình hành lớn nhất bằng một nửa diện tích tam giác  $ABC$ .

**Câu 28.** Từ giả thiết ta tính được  $BC = a, CA = a\sqrt{3}, AB = a\sqrt{2}$ . Nhận thấy  $AB^2 + BC^2 = CA^2$  nên  $\triangle ABC$

vuông tại  $B$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $AC$  thế thì  $HA = HB = HC$ . Theo giả thiết lại có  $SA = SB = SC$ , suy ra  $SH$  là trục đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

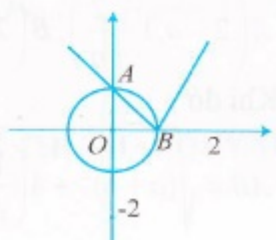
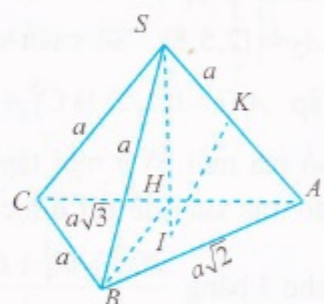
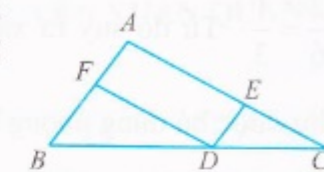
Dựng trung trực của  $SA$  cắt  $SH$  tại  $I$  thì  $I$  chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp  $SABC$ , mặt cầu này có bán kính bằng  $IS$ . Ta có  $\triangle SIK \sim \triangle SAH$  ( $K$  là trung điểm của  $SA$ ). Do đó:

$$\frac{SI}{SA} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SI = \frac{SA \cdot SK}{SH} = a.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $SABC$  bằng  $4\pi a^2$ .

**Câu 29.** Kí hiệu  $(C)$  là hình tròn tâm  $O$  bán kính 1 và  $S$  là diện tích cần tính. Thế thì

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} S_{(C)} - S_{\triangle AOB} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



**Câu 30.** Kí hiệu  $a_n$  và  $b_n$  lần lượt là giá tiền mét khoan thứ  $n$  của cơ sở  $A$  và  $B$ . Theo đề bài ta có:

$$a_1 = 8000, a_{n+1} = a_n + 500;$$

$$b_1 = 6000, b_{n+1} = b_n + 0,07b_n = 1,07b_n.$$

Điều này cho thấy  $(a_n)$  là cấp số cộng với công sai bằng 500 còn  $(b_n)$  là cấp số nhân với công bội bằng 1,07. Do đó

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n[2a_1 + 500(n-1)]}{2} = (250n + 7750)n,$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{b_1(1,07^n - 1)}{0,07} = \frac{600000}{7}(1,07^n - 1).$$

Từ đó

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 255000; a_1 + a_2 + \dots + a_{25} = 350000,$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{20} \approx 245972,95; b_1 + b_2 + \dots + b_{25} \approx 379494,23.$$

Vậy giếng 20 mét thì nên chọn cơ sở  $B$  còn giếng 25 mét thì nên chọn cơ sở  $A$ .

**Câu 31.** Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Kẻ  $AC' \perp SC$ ,  $AC'$  cắt  $SO$  tại  $G$ . Qua  $G$  kẻ một đường thẳng song song với  $BD$  cắt  $SB$ ,  $SD$  tương ứng tại  $B'$ ,  $D'$ . Do  $BD \perp (SAC)$  nên

$$B'D' \perp (SAC) \Rightarrow B'D' \perp SC.$$

Như vậy

$$SC \perp (AB'C'D').$$

Chú ý rằng  $\Delta SAC$

vuông cân tại  $A$  nên  $C'$  là trung điểm của  $SC$  và  $G$  chính là trọng tâm. Ta có

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SG}{SO} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra

$$V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ABC} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Tương tự } V_{S.AD'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ADC} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}.$$

Từ đó

$$V_{S.AB'D'C'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}.$$

**Câu 32.** Ta có

$$f'(x) = f(x) \left[ \frac{1}{1+x} + \frac{1+\frac{x}{2}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} + \dots + \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \right].$$

$$\text{Từ đó } f'(0) = f(0) \left( \underbrace{1+1+\dots+1}_n \right) = n.$$

**Câu 33.** Phương trình  $\log_3 x(x+2) = 1$  tương

$$\text{đương với } x(x+2) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Tập nghiệm của phương trình này là  $A = \{-3, 1\}$ .

Phương trình  $\log_3 x + \log_x(x+2) = 1$  có ĐKXĐ là  $x > 0$ , do đó tập nghiệm là  $B = \{1\}$ . Vậy  $B \subset A$ .

**Câu 34.** BPT đã cho tương đương với

$$\log_2 \frac{3x-1}{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq 3 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của BPT là  $(-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$ .

**Câu 35.** Bốn bạn thuộc cả ba lớp trong các trường hợp sau

- hai bạn lớp  $A$ , một bạn lớp  $B$ , một bạn lớp  $C$ ;
  - hai bạn lớp  $B$ , một bạn lớp  $C$ , một bạn lớp  $A$ ;
  - hai bạn lớp  $C$ , một bạn lớp  $A$ , một bạn lớp  $B$ ;
- Do đó xác suất để chọn được 4 bạn thuộc cả ba lớp

$$\text{là } \frac{C_a^2 C_b^1 C_c^1 + C_b^2 C_c^1 C_a^1 + C_c^2 C_a^1 C_b^1}{C_{a+b+c}^4}.$$

**Câu 36.** Gọi  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $O$ . Khi đó  $BN \parallel OM \Rightarrow OM \parallel (ABN)$ . Do đó

$$d(OM, AB) = d(O, (ABN)).$$

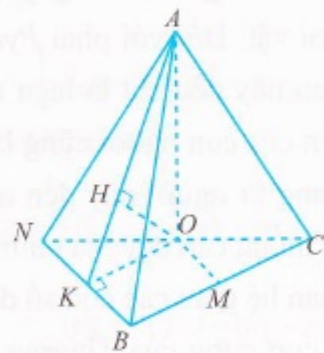
Kẻ  $OK \perp BN$  và  $OH \perp AK$ . Dễ dàng chứng minh được  $OH \perp (ABN)$ . Vì vậy  $d(O, (ABN)) = OH$ . Dễ thấy tứ giác  $OMBK$  là hình chữ nhật nên

$$OK = BM = \frac{BC}{2}. \text{ Áp dụng hệ thức lượng trong}$$

$\Delta AOK$  vuông tại  $O$  ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} \\ &= \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{BC^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{3}{a^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } OH = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



**Câu 38.** Đồ thị hàm số  $y = 2x + m - \frac{1}{2x+1}$  có tiệm

cận đứng là  $x = -\frac{1}{2}$  và tiệm cận xiên là  $y = 2x + m$ .

Giao của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên là điểm  $\left(-\frac{1}{2}, m-1\right)$  và điểm này chính là tâm đối xứng của đồ thị.

**Câu 39.** Chú ý rằng với mọi số phức  $z_1, z_2$  chúng ta có đồng nhất thức

(Xem tiếp trang 35)



## CƯỚC KỰNG HOẢNG CƠ SỞ TOÁN HỌC CỔ HY LẠP

NGUYỄN THỦY THANH

(Trường Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Những tư liệu ít ỏi về cuộc đời và học thuyết của *Pythagoras* (nửa cuối thế kỷ VI tr.CN) khó mà tách khỏi các huyền thoại về Ông – một nhà toán học và nhà triết học của Hy Lạp cổ đại. Sử gia Hy Lạp *Herodotus* (485 – 425 tr. CN) đánh giá ông như một triết gia giỏi nhất của người Hy Lạp. Trong toán học người ta cho rằng *Pythagoras* là người đầu tiên đưa phương pháp luận giải bằng chứng minh vào toán học và do đó Toán học (đặc biệt là hình học) đã trở thành khoa học suy diễn.

Là một nhà triết gia, Ông đặc biệt quan tâm đến bản chất và khởi nguyên của thế giới. Là một nhà toán học, *Pythagoras* đi tìm bản chất và khởi nguyên đó ở các con số – số tự nhiên và số hữu tỷ, xem chúng là khởi nguyên và bản chất chủ yếu của mọi vật. Đối với phái *Pythagoras* mọi thứ trên thế gian này đều chỉ là hiện thân của các con số. Linh hồn của con người cũng là con số, nó bất tử và lang thang từ người này đến người khác. Vũ trụ là một hệ thống cân đối của những con số cùng những mối quan hệ giữa các con số đó, và họ coi những con số là con cưng của Thượng đế. Điều đó đã thấm sâu vào lời cầu nguyện của các học trò của *Pythagoras* trước lúc nghe giảng: “*Hãy ban ơn cho chúng con những con số thần linh đã sáng tạo ra loài người*”

Trường phái *Pythagoras* đã tồn tại suốt hơn hai thế kỷ với đông đảo các môn sinh. Bình luận gia *Proclus* (410-485) của Hy Lạp viết rằng: “*Pythagoras đã cải tạo nền toán học sau khi mang lại cho nó dáng vẻ một nền học vấn phóng khoáng. Ông nghiên cứu khoa học này xuất phát từ những*

*cơ sở đầu tiên của nó và nỗ lực thu được những định lý bằng tư duy logic thuần túy ...*”

Trong hình học, hai đoạn thẳng là thông ước hoặc vô ước với nhau tùy thuộc ở chỗ chúng có hay không có phân ước chung được chứa trong mỗi đoạn thẳng đó đúng số nguyên lần. Thông thường người ta lấy một trong hai đoạn thẳng là đoạn thẳng đơn vị.

Thoạt đầu các môn sinh của *Pythagoras* đều cho rằng hai đoạn thẳng bất kỳ đều thông ước với nhau. Vì vậy tỷ số của chúng biểu thị được bởi tỷ số của các số tự nhiên, tức là số hữu tỷ. Bằng phép dựng hình, mỗi số hữu tỷ đều tương ứng với một điều kiện xác định gọi là điểm hữu tỷ và các điểm hữu tỷ trù mật khắp nơi trên đường thẳng số, nghĩa là trong bất cứ khoảng  $(a, b)$  nào dù bé bao nhiêu đi nữa cũng có vô số điểm hữu tỷ.

Từ cái “vô số” và “trù mật khắp nơi” phái *Pythagoras* cứ ngỡ rằng tập hợp các điểm hữu tỷ là choán hết toàn bộ đường thẳng số và do vậy mọi đoạn thẳng đều thông ước với đoạn thẳng đơn vị. Nhưng cũng có môn sinh *Pythagoras* lại cho rằng không phải mọi điểm của đường thẳng số đều tương ứng với một số hữu tỷ. Điều đó cũng có nghĩa là tồn tại đoạn thẳng vô ước với đoạn thẳng đơn vị và từ đó trên đường thẳng số còn có những điểm không hữu tỷ (gọi là điểm vô tỷ). Chẳng hạn, một điểm cách gốc tọa độ một đoạn bằng đường chéo một hình vuông với cạnh bằng độ dài đoạn tỷ xích (tức là đoạn thẳng đơn vị) là điểm như vậy. Độ dài đoạn thẳng này không biểu thị được bằng bất cứ số hữu tỷ nào vì nó không thông ước với

đoạn thẳng đơn vị. Về sau người ta xem nó được biểu thị bởi một số mới gọi là *số vô tỷ*.

Trong lịch sử văn minh của nhân loại, sự phát hiện ra tình huống *tồn tại đoạn thẳng vô ước với đoạn thẳng đơn vị có độ dài biểu thị bởi số vô tỷ là một trong những phát minh tinh vi nhất, chói lọi nhất* của trường phái *Pythagoras* trong nền toán học Hy Lạp ngay từ thời Cổ đại. Nói phát minh đó là tinh vi nhất và chói lọi nhất vì mãi đến cuối thế kỷ XIX người ta mới khám phá được rằng tập hợp các số hữu tỷ không có tính chất liên tục!

Lịch sử toán học không để lại tư liệu chính xác là *khi nào và ai* đã chứng minh Định lý về tính vô ước của đường chéo hình vuông với cạnh của nó. Nhưng, dựa vào các tác phẩm của triết gia Hy Lạp *Aristoteles* (384-322 tr.CN) có thể nói một cách khá chắc chắn là điều đó xảy ra vào hai thập kỷ cuối thế kỷ V tr.CN.

Về ý nghĩa của phát minh này, các nhà nghiên cứu lịch sử khoa học cho rằng chỉ có phát minh ra *Hình học phi Euclide* ở thế kỷ XIX hay *Lý thuyết tương đối* đầu thế kỷ XX mới có thể so sánh được với phát minh sáng chói này.

Theo triết gia *Aristoteles*, sau phát minh ra tính vô tỷ các nhà toán học *Pythagoras* đã từ trạng thái ngỡ ngàng, bối rối rơi vào tình trạng kinh hoàng: *tồn tại những con số không thể nào đưa về số nguyên hoặc phân số được*. Người Hy Lạp đã xem những con số này là *phi lý* vì họ không thể tưởng tượng được lại có những con số chẳng phải số nguyên và cũng chẳng hữu tỷ. Ngay *M. Stifel* (1487-1567), người đã đặt tên cho các số này là *số vô tỷ* (1544) cũng đã khuyên độc giả của “*Số học đầy đủ*” (1544) của ông là “*đừng nên xem đó là những số chân chính*”(!)

*Aristoteles* cũng viết rằng “*nếu đường chéo và cạnh của hình vuông là thông ước với nhau thì số lẻ sẽ bằng số chẵn*”. Suy từ câu nói này, người ta cho rằng các môn đệ của phái *Pythagoras* đã chứng minh tính vô ước bằng phương pháp phản chứng:

phép chứng minh này chỉ dựa vào tính chẵn lẻ của các số. Có đầy đủ cơ sở để phỏng đoán rằng đó là chứng minh cổ xưa của *Pythagoras*. Sau đây là chứng minh đó:

Giả sử đường chéo  $AC$  của hình vuông  $ABCD$  là thông ước với cạnh  $AB$  của nó, tức là tỷ số của chúng bằng tỷ số hai số nguyên  $AC : AB = m : n$ . Giả sử các số  $m$  và  $n$  không đồng thời chẵn vì nếu không thế thì phân số có thể giản ước cho 2. Từ hệ thức trên suy rằng  $AC^2 : AB^2 = m^2 : n^2$ . Theo định lý *Pythagoras*  $AC^2 = 2AB^2$  nên  $m^2 = 2n^2$  và  $m^2$  là số chẵn. Từ đó  $m$  là số chẵn (vì bình phương của số lẻ bất kỳ là số lẻ:  $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$  là số lẻ). Nhưng khi đó  $n$  là số lẻ.

Vì  $m$  là số chẵn nên  $m = 2l$  và khi đó  $4l^2 = 2n^2$  hay  $n^2 = 2l^2$ , tức là  $n^2$  là số chẵn và  $n$  cũng là số chẵn. Như vậy  $n$  vừa chẵn vừa lẻ. Mâu thuẫn.

Khi các nhà toán học phái *Pythagoras* đã tin chắc rằng phép chứng minh sự tồn tại các đoạn thẳng vô ước chính xác và hoàn hảo thì họ mới vỡ lẽ rằng giáo điều mà họ tôn thờ một cách thiêng liêng “*con số tạo nên cả vũ trụ*” đã hoàn toàn tiêu tan sụp đổ. Bên cạnh cái vô số các số hữu tỷ mà họ tôn thờ còn có cái vô số khác nhiều hơn gồm các số vô tỷ tồn tại một cách khách quan không thể tránh khỏi phải đưa vào. Và, tất cả hai cái vô số này hợp lại thành đường thẳng số.

Truyền thuyết kể rằng việc khám phá ra tính vô ước là thuộc về môn sinh *Hippasus* của phái *Pythagoras* (thế kỷ V tr.CN). Vào thời điểm khi phát hiện ra *Hippasus* đã đến với khám phá này, các nhà toán học phái *Pythagoras* đang lênh đênh ở ngoài biển khơi. Họ đã ném *Hippasus* xuống biển bởi họ cho nhà toán học này là phản đồ, đã gieo vào vũ trụ phần tử đối nghịch với giáo điều của họ. Đồng thời với sự khám phá ra các đại lượng vô ước trong nền toán học Hy Lạp, một khái niệm khác

là khái niệm vô hạn cũng thâm nhập vào. Trong các tìm tòi phân ước chung đối với mỗi đại lượng, các nhà hình học Hy Lạp đã có thể xét các đại lượng chia được vô hạn định nhưng ý niệm vô hạn cũng đã đưa họ chìm sâu vào lúng túng. Việc phát hiện ra những khó khăn thực sự trong các khái niệm liên tục và vô hạn được đời sau cho là thuộc về nhà triết học Zenon (490-430 tr.CN) của Hy Lạp cổ đại. Zenon đã mang lại cho các lập luận của mình thêm phần khéo léo và sắc sảo bởi các *aporia* (tiếng Hy Lạp có nghĩa là nghịch lý, khó lý giải, không có lối thoát) mà đã hơn 25 thế kỷ rồi, chúng vẫn không ngừng lôi cuốn các nhà toán học và triết học. Các *aporia* này đến được với chúng ta là nhờ triết gia Aristoteles. Nổi tiếng hơn cả là các *aporia*: phép lưỡng phân (chia đôi đoạn thẳng), Asin và Rùa, Mũi tên bay. Người ta cho rằng các *aporia* của Zenon có hàm chứa khuynh hướng chống lại học thuyết Pythagoras.

Bằng các nghịch lý, Zenon và các nhà triết học khác cố chứng minh rằng các đại lượng hữu hạn không cấu thành được từ các phân tử vô cùng bé. Và, như Nicolas Bourbaki nhận xét: “Các nhà toán học và triết học không đủ sức giải quyết được nghịch lý là làm thế nào mà một đại lượng hữu hạn có thể được tạo nên từ một số vô hạn điểm không có kích thước”.

Chẳng hạn, cần lý giải thế nào về tuyên bố của phái Pythagoras rằng đường thẳng được “cấu thành” từ các điểm? hay không gian là tổng các điểm “điểm là đơn vị của vị trí”?

Cho đến tận ngày nay các nhà toán học và triết học vẫn còn bình luận nhiều về các *aporia* của Zenon và có người cho rằng đó “vẫn là một đề tài bỏ ngỏ đầy cuốn hút” mà mỗi thời đại đều có cách lý giải của mình đối với cái nghịch lý đó.

Chẳng hạn ta xét *aporia* “lưỡng phân”. Qua *aporia* này Zenon muốn chứng tỏ rằng vật thể chuyển động không bao giờ cán đích vì đầu tiên nó phải đến trung điểm  $M$  của quãng đường, sau đó nó phải đến trung điểm phần đường còn lại ...

Giả sử  $AB$  là đoạn thẳng có chiều dài 1 và điểm  $M$  chuyển động từ  $A$  đến  $B$ . Trước khi đến được điểm  $B$  nó phải “đếm xong” tập hợp “các trung điểm”  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  nghĩa là không bao giờ cán đích  $B$ .

Nói chung, *aporia* này không giải quyết được bởi

lý lẽ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ .  $G. Weyl$  (1885-1955) – nhà toán

học Hoa Kỳ – đã chỉ rõ chỗ khó khăn khi lý giải *aporia* “lưỡng phân” bởi lý lẽ sau đây. Ta hãy tưởng tượng có một máy tính hoàn thành phép tính

thứ nhất trong  $\frac{1}{2}$  phút, phép tính thứ hai trong  $\frac{1}{4}$

phút, thứ ba trong  $\frac{1}{8}, \dots$  Do  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$  nên đến

cuối phút thứ nhất máy tính đó đã “đếm hết” dãy các số tự nhiên ... Và,  $G. Weyl$  cho rằng việc sáng tạo nên cấu trúc của một máy như vậy là công việc vô vọng.

Những khó khăn tiềm ẩn trong các khái niệm vô hạn và liên tục đã đưa đến một cuộc khủng hoảng sâu sắc cơ sở toán học cổ đại – cơn bão tố nặng nề đầu tiên làm rung chuyển tòa lâu đài khoa học còn chưa được vững chắc. Tình cảnh đã từng hình thành vào thế kỷ V tr.CN ở Hy Lạp cũng giống như tình cảnh đã xảy ra trong toán học hiện đại cuối thế kỷ XIX đầu thế kỷ XX. Và, ở đây cũng như ở đây cuộc khủng hoảng cơ sở đã được kích thích bởi vấn đề nan giải về số thực (đó là tên gọi mới của vấn đề vô ước khó khăn xưa kia) cũng như độ đo, và bởi việc vận dụng thiếu cân nhắc lý thuyết các tập hợp vô hạn. Tại Hy Lạp cổ đại cuộc khủng hoảng này đã nhanh chóng vượt ra khỏi giới hạn một nhóm nhỏ các nhà toán học. Bên cạnh các nhà toán học vĩ đại còn có những bộ óc tuyệt vời của các nhà triết học đủ mọi trường phái và xu hướng ... của xứ sở thần thoại cùng tham gia tìm lối thoát. Có lẽ, người đầu tiên lên tiếng sau cơn bão tố yên ắng là triết gia Platon (429-348 tr.CN) – thầy học của Aristoteles. Trong bộ “Luật pháp” của mình ông kêu gọi, trước hết cần có một sự nhận thức đối

với đại lượng vô ước. Còn các nhà toán học *Pythagoras* thì sao? Họ đã hình dung ra một số khả năng thoát khỏi cuộc khủng hoảng. Đó là:

- 1) mở rộng khái niệm số bằng cách đưa vào những số mới;
- 2) xây dựng toán học không phải trên cơ sở số học mà là trên cơ sở hình học;
- 3) từ bỏ việc xây dựng lý thuyết lôgic chặt chẽ về các đại lượng vô ước.

Con đường thứ ba là không thể chấp nhận đối với người Hy Lạp vì nó chính là từ bỏ tư tưởng cơ bản về xây dựng toán học bằng phương pháp suy diễn. Khác với cư dân *Babylon* cổ đại biết sử dụng số vô tỷ dạng lục thập phân gần đúng, người Hy Lạp cổ đại đã hoàn toàn không hài lòng với những đại lượng gần đúng: đối với họ toán học là khoa học chính xác! Do đó khi việc mở rộng tập hợp số là mù mịt thì trên thực tế con đường thứ nhất xem như đã đóng cửa. Và, họ đã đi theo con đường thứ hai là xây dựng toán học trên cơ sở hình học. Các nhà toán học *Pythagoras* và tiếp sau họ là phần lớn các nhà toán học cổ Hy Lạp cho đến tận *Archimedes* (287-212 tr.CN) và *Apollonius* (260-170 tr.CN) đã xây dựng đại số trên cơ sở hình học gọi là Đại số – Hình học.

Nền toán học cổ Hy Lạp thoát khỏi cuộc khủng hoảng cơ sở luận lý chủ yếu nhờ các thành tựu khoa học tuyệt vời của các nhà toán học lớn thời bấy giờ như *Architas* (428-365 tr.CN), *Theaetetus* (410?-369 tr.CN) và *Eudoxus* (408-355 tr.CN). Khác với trường phái *Pythagoras*, ba nhà toán học lớn này đã nhận thức đúng căn nguyên của vấn đề: sự tồn tại các số vô tỷ là một khách quan. Do đó *Architas* và *Theaetetus* đã có công trong lớn trong việc sáng tạo ra Lý thuyết vô tỷ và phân loại chúng. Tên tuổi của *Eudoxus* gắn liền với lý thuyết tổng quát về tỷ số do ông sáng tạo ra. Đó là lý thuyết mà toàn bộ chiều sâu của cách xây dựng nó chỉ có thể hiểu được sau gần 15 thế kỷ nhờ các công trình của *R. Dedekind* (1831-1916) nửa sau của thế kỷ XIX. Giữa lý thuyết của *Eudoxus* (thời cổ đại!) và lý thuyết số thực của *Dedekind* (cuối thế kỷ XIX) có một sự giống nhau đến mức mà trong một bức thư *R. Lipschitz* (1832-1903) đã từng hỏi *Dedekind*

rằng: “*cái ông thu được có gì mới lạ so với kết quả thời cổ đại*”. Nhờ sử dụng phương pháp toán học hiện đại *K. Weierstrass* (1815-1897), *R. Dedekind* và *G. Cantor* (1845- 1918) đã tiếp bước *Eudoxus* hoàn thiện lý thuyết vô tỷ. Chẳng hạn, nhờ các công trình của họ mà, cuối cùng, người ta đã chứng minh được rằng  $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$ .

Đồng thời với đó, *Eudoxus* còn phát minh ra “*phương pháp vét kiệt*” dựa trên cơ sở hình học cho phép tính chuẩn xác diện tích và thể tích, trong đó thuật ngữ “*phương pháp vét kiệt*” là do nhà toán học Bỉ *Gregorius* (1584-1667) đặt ra từ năm 1647. Các thuyết mà ba nhà toán học Hy Lạp cổ đại xây dựng đã tạo nên bộ khung vững chắc cho tòa lâu đài toán học Hy Lạp cổ đại mà nền móng của nó là hình học. Như vậy những khó khăn do sự xuất hiện đại lượng vô ước đã được vượt qua.

Để khắc phục và thoát ra khỏi các khó khăn trong luận chứng cơ sở toán học liên quan đến các nghịch lý *Zenon*, phần lớn các nhà toán học cổ Hy Lạp đều cho rằng đơn giản hơn cả là phải từ bỏ việc sử dụng những khái niệm có bao hàm ý niệm về vô hạn và chuyển động trong toán học hoặc quy việc sử dụng đến mức tối thiểu. Họ đều cho rằng mức tối thiểu có thể chấp nhận là tính chia được vô hạn định các đại lượng hình học.

Khi nói về mục tiêu mà *Euclide* đặt ra khi viết “*Các nguyên lý*”, nhà viết lịch sử khoa học Hà Lan *D. Struik* cho rằng: “*Ông (Euclide) viết bộ sách “Các nguyên lý” nhằm trình bày chung trong một tác phẩm ba khám phá vĩ đại của quá khứ chưa lâu: lý thuyết tỷ số của Eudoxus, lý thuyết vô tỷ của Theaetetus và lý thuyết năm cổ thể đều chiếm vị trí đặc sắc trong vũ trụ học của Platon. Đó là ba thành tựu điển hình của Hy Lạp*”.

Trong tác phẩm tuyệt vời này *Euclide* đã tổng kết những thành tựu trước, trong và sau cuộc khủng hoảng cơ sở toán học ở Hy Lạp cổ đại.

Không dễ gì trả lời câu hỏi rằng cái gì đã đưa người Hy Lạp đến với những phát minh sáng chói của mình? Và, làm sao mà ngay từ thế kỷ VI – V tr.CN ở xứ Hy Lạp huyền thoại lại có thể diễn ra sự phát triển nhảy vọt về tư duy và trí tuệ của nhân loại đến vậy?



## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/491 (Lớp 6).** Cho  $x, y$  là các số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn  $x^{2017} = y^{2018}$ . Hãy tìm số tự nhiên  $x$ , biết  $y$  là số tự nhiên nhỏ nhất.

NGUYỄN HÀM THÀNH

(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

**Bài T2/491 (Lớp 7).** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $\widehat{A} = 108^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ . Về phía ngoài tam giác  $ABC$  vẽ tam giác  $ABD$  cân tại  $A$  có  $\widehat{BAD} = 36^\circ$ . Tính chu vi tam giác  $ABD$  theo  $a$  và  $b$ .

NGUYỄN ĐỨC TÂN

(TP. Hồ Chí Minh)

**Bài T3/491.** Tìm các số nguyên dương  $n$  thỏa mãn điều kiện với mọi số nguyên dương  $a$  là ước của  $n$  thì  $a + 2$  là ước của  $n + 2$ .

NGUYỄN TIẾN LÂM

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

**Bài T4/491.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  đường kính  $AC$ . Vẽ đường thẳng vuông góc với  $AC$  tại  $A$  và cắt đường thẳng  $BC$  tại  $K$ . Lấy điểm  $T$  trên cung nhỏ  $AB$  ( $T$  khác  $A$  và  $B$ ). Đường thẳng  $KT$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $P$ . Trên tiếp tuyến tại  $T$  của đường tròn  $(O)$  lấy hai điểm  $I, J$  sao cho  $KIA, KAJ$  là các tam giác cân tại  $K$ . Chứng minh rằng:

a)  $\widehat{TIP} = \widehat{TKJ}$ .

b) Đường tròn  $(O)$  và đường tròn ngoại tiếp tam giác  $KPJ$  tiếp xúc với nhau.

TRẦN ANH TUẤN

(GV THCS Nhân Hậu, Lý Nhân, Hà Nam)

**Bài T5/491.** Tìm các cặp nghiệm nguyên  $(x, y)$

thỏa mãn:  $y^2 + 2y = 4x^2y + 8x + 7$ .

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/491.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = 3 \\ \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{z^2 + 4} = \sqrt{2}(x + y + z) \end{cases}$$

NGUYỄN DUY LIÊN

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

**Bài T7/491.** Chứng minh rằng:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1+n}}}}} = 3.$$

TRẦN VĂN CƯỜNG

(SV K52 A1T, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

**Bài T8/491.** Cho  $m_a, m_b, m_c$  là độ dài các đường trung tuyến của một tam giác có chu vi bằng 2 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng  $r$ . Chứng minh

rằng:  $\max\{1; 3\sqrt[3]{r}\} \leq m_a + m_b + m_c < \frac{3}{\sqrt{2}}$ .

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

**Bài T9/491.** Cho  $a, b, c$  là ba số không âm thỏa mãn:  $a + b + c = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = a\sqrt{b^3 + 1} + b\sqrt{c^3 + 1} + c\sqrt{a^3 + 1}.$$

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

## TIỀN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T10/491.** Cho dãy số  $(F_n)$  xác định bởi công thức:  $F_n = 2^{2^n} + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

a) Với mỗi  $n \in \mathbb{N}$ , gọi  $q$  là một ước nguyên tố của  $F_n$ , chứng minh rằng:  $(q-1):2^{n+1}$ .

b) Với mỗi  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , gọi  $q$  là một ước nguyên tố của  $F_n$ , chứng minh rằng:  $(q-1):2^{n+2}$ .

HỒ SỸ HÙNG

(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nghệ An)

**Bài T11/491.** Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn:

$$f(x)f(y) + f(xy) + f(x) + f(y) = f(x+y) + 2xy$$

với mọi  $x, y \in \mathbb{R}$ .

TRẦN VĂN THƯƠNG

(GV THPT Phú Mỹ, Tân Thành, Bà Rịa - Vũng Tàu)

**Bài T12/491.** Cho lục giác lồi  $ABCDEF$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Biết rằng tâm  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $ACE$ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác  $OAD$ ,  $OBE$  và  $OCF$  còn có một điểm chung khác điểm  $O$ .

LÊ VIỆT ÂN

(Nhà 15, xóm 2, thôn Ngọc Anh, Phú Thượng,  
Phù Vang, Thừa Thiên Huế)

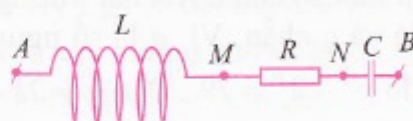
**Bài L1/491.** Một vật dao động điều hoà theo phương trình  $x = A \cos(5\pi t + \varphi)$ . Tại thời điểm  $t$ ,

vật đang đi về phía vị trí cân bằng và tỉ số giữa thế năng và động năng của vật bằng 3  $\left(\frac{W_t}{W_d} = 3\right)$ . Sau

đó  $\frac{1}{60}$  s thì tỉ số đó bằng bao nhiêu?

THANH LÂM (Hà Nội)

**Bài L2/491.** Đặt điện áp  $u = U_0 \cos 2\pi ft$  ( $U_0$  không đổi,  $f$  thay đổi được) vào hai đầu đoạn mạch như hình vẽ. Khi  $f = f_1$  và  $f = f_2 = 2f_1$  thì công suất tiêu thụ là  $\mathcal{P}$  và điện áp tức thời  $u_{AN}$  vuông pha với  $u_{MB}$ . Khi  $f = f_3$  thì điện áp hiệu dụng giữa hai đầu cuộn cảm thuần đạt giá trị cực đại và công suất tiêu thụ của đoạn mạch là 140W. Giá trị công suất  $\mathcal{P}$  là bao nhiêu?



VIỆT CƯỜNG (Hà Nội)

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/491 (For 6<sup>th</sup> grade).** Consider all pairs of integers  $x, y$  which are greater than 1 and satisfy  $x^{2017} = y^{2018}$ . Find the pair with the smallest possible value for  $y$ .

**Problem T2/491 (For 7<sup>th</sup> grade).** Given an isosceles triangle  $ABC$  with the apex  $A$ . Suppose that  $\hat{A} = 108^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ . Outside  $ABC$ , construct the isosceles triangle  $ABD$  with the apex  $A$  and  $\widehat{BAD} = 36^\circ$ . Find the perimeter of the triangle  $ABD$  in terms of  $a$  and  $b$ .

**Problem T3/491.** Find positive integers  $n$  such that if the positive integer  $a$  is a divisor of  $n$  then  $a + 2$  is also a divisor of  $n + 2$ .

**Problem T4/491.** Given a triangle  $ABC$  inscribed the circle  $(O)$  with diameter  $AC$ . Draw a line which is perpendicular to  $AC$  at  $A$  and intersects  $BC$  at  $K$ . Choose a point  $T$  on the minor  $AB$  ( $T$  is different from  $A$  and  $B$ ). The line  $KT$  intersects  $(O)$  at the second point  $P$ . On the tangent line to the circle  $(O)$  at the point  $T$  choose two points  $I$

and  $J$  such that  $KIA$  and  $KAJ$  are isosceles triangles with the apex  $K$ . Show that

a)  $\widehat{TIK} = \widehat{TKJ}$ .

b) The circle  $(O)$  and the circumcircle of the triangle  $KPJ$  are tangent to each other.

**Problem T5/491.** Find integral solutions of the equation  $y^2 + 2y = 4x^2y + 8x + 7$ .

### FOR HIGH SCHOOL

**Problem T6/491.** Solve the system of equations

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = 3 \\ \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{z^2 + 4} = \sqrt{2}(x + y + z) \end{cases}$$

**Problem T7/491.** Show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1 + n}}}}} = 3.$$

**Problem T8/491.** Let  $m_a, m_b, m_c$  be the lengths of the medians of the triangle with the perimeter 2.

Show that  $\max\{1; 3\sqrt[3]{r}\} \leq m_a + m_b + m_c < \frac{3}{\sqrt{2}}$ ,

where  $r$  is the inradius of the triangle.

(Xem tiếp trang 44)



**Bài T1/487.** Tìm tất cả các cặp số nguyên tố  $(p; q)$  thỏa mãn phương trình:  $p^q - q^p = 79$ .

**Lời giải.** Vì 79 là số lẻ nên trong hai số  $p, q$  có một số lẻ và một số chẵn. Xét hai trường hợp.

• TH1:  $p$  lẻ và  $q$  chẵn. Vì  $q$  là số nguyên tố nên  $q = 2$ , lúc đó  $p^2 - 2^p = 79$ . Đặt  $p = 2k + 1 \geq 3$  thì  $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1$ , còn  $2^p$  chia hết cho 4, suy ra  $p^2 - 2^p$  chia cho 4 dư 1, nhưng 79 chia cho 4 dư 3, do đó không tồn tại cặp số  $p, q$  thỏa mãn đề bài.

• TH2:  $q$  lẻ và  $p$  chẵn. Vì  $p$  là số nguyên tố nên  $p = 2$ , lúc đó  $2^q - q^2 = 79$ . Do  $2^q > 79$  thì  $q \geq 7$ .

Với  $q = 7$  thì  $2^7 - 7^2 = 79$ , thỏa mãn.

Với  $q \geq 11$  đặt  $q = 2n + 1 \geq 11$  thì  $n \geq 5$ . Xét

$$\begin{aligned} 2^q - q^2 &> 2^{q-1} - q^2 = 2^{2n} - q^2 = (2^n + q)(2^n - q) \\ &> (2^n + q)(2^n - 2n - 2) = 2(2^n + q)(2^{n-1} - n - 1) \\ &\geq 2(2^5 + 11)(2^{n-1} - n - 1) = 86(2^{n-1} - n - 1) \quad (*) \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng  $2^m > m + 2$  với số nguyên  $m \geq 3$ . Thực vậy, với  $m = 3$  thì  $2^3 = 8 > 3 + 2 = 5$ , khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với số  $r$  ( $r \geq 3$ ), tức là có  $2^r > r + 2$ , xét số  $r + 1$  ta có

$$2^{r+1} = 2^r + 2^r > (r + 2) + (r + 2) = r + 4 + r > (r + 1) + 2,$$

khẳng định đúng với  $r + 1$ . Vậy  $2^m > m + 2$  với số nguyên  $m \geq 3$  bất kì. Đặt  $m = n - 1 \geq 3$  có

$$2^{n-1} > n + 2 \text{ hay là } 2^{n-1} - n - 1 > 1. \text{ Lúc đó từ } (*) \text{ có}$$

$$2^q - q^2 > 86(2^{n-1} - n - 1) > 86 > 79, \text{ nên không có}$$

số  $q \geq 11$  thỏa mãn đề bài. Vậy chỉ có một cặp số nguyên tố  $(p; q) = (2; 7)$  thỏa mãn phương trình

$$p^q - q^p = 79. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Trong TH1) có thể giải bằng cách xét phép chia cho 3. Bài này cũng có thể giải ngắn gọn bằng cách dùng định lý nhỏ Fermat. Các bạn sau có lời giải đúng, tuyên dương cả các bạn lớp 7 vì bài hơi khó. **Vĩnh Phúc:** Tạ Kim Nam Tuấn, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** Lê Ngọc Tùng, 6A2, THCS Nguyễn Trục, Thanh Oai; **Nghệ An:** Hoàng Bảo Nguyên, 6C, Trần Thiên Ngân, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; Nguyễn Đình Thủy, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Gia Lai:** Nguyễn Lê Việt Hưng, 6/10, THCS Nguyễn Du, TP. Pleiku; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Hoàng Hưng, 6A, Đỗ Thị Như Nguyệt, 7D, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; Mai Thành Nguyên, 6A, THCS TTr. Sông Vệ, Võ Thị Hồng Thu, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

## VIỆT HẢI

**Bài T2/487.** Tìm các số nguyên  $a, b, c, d$  thỏa mãn

$$\sqrt[3]{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a + b + c} = d.$$

**Lời giải.** Ta có  $a + b + c, d$  là các số tự nhiên,  $a^2 + b^2 + c^2 = d^3, a + b + c = d^2$ . Từ

$$\begin{aligned} (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } 3d^3 \geq d^4 \Rightarrow d \leq 3 \Rightarrow d \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

• Xét  $d = 0$  ta có:  $a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$  (thỏa mãn).

• Xét  $d = 1$  ta có:  $a^2 + b^2 + c^2 = 1, a + b + c = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0; b = 0; c = 1 & (\text{thỏa mãn}) \\ a = 0; b = 1; c = 0 & (\text{thỏa mãn}) \\ a = 1; b = 0; c = 0 & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

• Xét  $d = 2$  ta có:  $a^2 + b^2 + c^2 = 8, a + b + c = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0; b = 2; c = 2 & (\text{thỏa mãn}) \\ a = 2; b = 0; c = 2 & (\text{thỏa mãn}) \\ a = 2; b = 2; c = 0 & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

• Xét  $d = 3$  ta có:  $a^2 + b^2 + c^2 = 27, a + b + c = 9$ .  
 $\Rightarrow a = b = c = 3$  (thỏa mãn). Vậy các bộ số nguyên  $(a; b; c; d)$  cần tìm là:  $(0; 0; 0; 0), (0; 0; 1; 1), (0; 1; 0; 1), (1; 0; 0; 1), (0; 2; 2; 2), (2; 0; 2; 2), (2; 2; 0; 2), (3; 3; 3; 3)$ .  
□

► **Nhận xét.** Số bài giải gửi về Tòa Soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Hoàng Lê Bích Ngọc, 7A, THCS Thái Thịnh, Đống Đa, Lê Ngọc Tùng, 6A2, THCS Nguyễn Trục, Thanh Oai; **Vĩnh**

**Phúc:** Tạ Kim Nam Tuấn, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Thanh Hóa:** Trịnh Đức Tuấn, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn.

### NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

**Bài T3/487.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{21}{1 + 36abc}.$$

**Lời giải.** BĐT đã cho tương đương với

$$(1 + 36abc) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 21$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 36(ab + bc + ca) \geq 21$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 36(ab + bc + ca) \geq 21$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left( \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + 36(ab + bc + ca) \geq 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} + 36(ab + bc + ca) \geq 24.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + 36ab \geq 2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{ab} \cdot 36ab} = 12(a+b)$$

$$\frac{(b+c)^2}{bc} + 36bc \geq 2\sqrt{\frac{(b+c)^2}{bc} \cdot 36bc} = 12(b+c)$$

$$\frac{(c+a)^2}{ca} + 36ca \geq 2\sqrt{\frac{(c+a)^2}{ca} \cdot 36ca} = 12(c+a).$$

Cộng các BĐT trên ta thu được:

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} + 36(ab + bc + ca) \geq 24(a+b+c) = 24.$$

BĐT đã cho được chứng minh.  $\square$

➤**Nhận xét.** Bài toán không khó nhưng không nhiều bạn tham gia giải bài này. Các bạn sau có lời giải tốt:

**Hà Nội:** Lê Tuấn Tú, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh. **Thanh Hóa:** Nguyễn Anh Quân, Nguyễn Hữu Quyền, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Anh, TP. Thanh Hóa.

### TRẦN HỮU NAM

**Bài T4/487.** Cho tam giác  $ABC$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Các cạnh  $AB, BC, CA$  lần lượt tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  tại  $D, E, F$  sao cho

$EC = 2EB$ . Kẻ đường kính  $EI$  của đường tròn  $(O)$ . Qua  $D$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$ , đường thẳng này cắt đoạn thẳng  $EF$  tại  $K$ . Chứng minh rằng  $A, I, K$  thẳng hàng.

**Lời giải.** Qua  $I$  kẻ tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ , cắt  $AB$  và  $AC$  thứ tự tại  $P$  và  $Q$ , dễ thấy  $PQ \parallel BC$ . Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có

$$\widehat{QOC} = \widehat{QOF} + \widehat{FOC} = \frac{1}{2}(\widehat{IOF} + \widehat{FOE}) = 90^\circ.$$

Suy ra  $QI \cdot CE = QF \cdot CF = OF^2$ .

Tương tự,  $PI \cdot BE = PD \cdot DB = OD^2 = OF^2$ .

Do đó  $PI \cdot BE = QI \cdot CE$  (1)

Gọi  $M$  là trung điểm  $EC$ , từ giả thiết suy ra

$$BM = CE \text{ và } BE = CM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{PI}{BM} = \frac{QI}{CM}$ . Theo hệ quả của

định lý Thales suy ra ba điểm  $A, I, M$  thẳng hàng. (3)

Qua  $A$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt đường thẳng  $EF$  tại  $S$ . Gọi  $N$  là giao điểm của  $DK$  và  $AE$ .

Ta có  $\widehat{ASF} = \widehat{FEC} = \widehat{EFC} = \widehat{AFS}$ .

Suy ra  $\triangle AFS$  cân tại  $A$ , nên  $AS = AF = AD$ . Áp dụng định lý Thales cho các tam giác  $AES$  và  $ABE$

$$\text{ta có } \frac{NK}{AS} = \frac{NE}{AE} = \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{AB} = \frac{DN}{DA}.$$

$$\text{Suy ra } NK = ND. \text{ Vậy } \frac{ND}{NK} = \frac{EB}{EM}.$$

Theo hệ quả của định lý Thales suy ra  $A, K, M$  thẳng hàng. (4)

Từ (3) và (4) suy ra ba điểm  $A, I, K$  thẳng hàng.  $\square$

◀**Nhận xét.** Chỉ có ba bạn sau có lời giải tốt: **Thanh**

**Hóa:** Đỗ Cao Bách Tùng, Phạm Anh Đức, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Phú Thọ:** Nguyễn Đăng Khoa, 9A3, THCS Lâm Thao.

### NGUYỄN THANH HỒNG

**Bài T5/487.** Tìm số  $M$  lớn nhất sao cho ta có bất đẳng thức  $x^2 \geq M \cdot [x] \cdot \{x\}$  thỏa mãn với mọi số thực  $x$  (trong đó  $[x], \{x\}$  tương ứng ký hiệu phần nguyên và phần phân của  $x$ ).

**Lời giải.** Do BĐT đúng với mọi  $x$  nên ta xét  $x = 1 + a$  ( $0 < a < 1$ ). Khi đó  $[x] = 1, \{x\} = a$ .

Thay vào BĐT ta có:

$$(1 + a)^2 \geq M \cdot 1 \cdot a$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (2-M)a + 1 \geq 0, \forall 0 < a < 1$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (2-M)^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow M^2 - 4M \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq M \leq 4.$$

Vậy số  $M$  lớn nhất là 4. Ngược lại, khi  $M = 4$  ta

$$\text{xét: } x^2 \geq M.[x].\{x\} \Leftrightarrow ([x] + x)^2 \geq 4.[x].\{x\}$$

$$\Leftrightarrow ([x] - x)^2 \geq 0: \text{luôn đúng.}$$

Vậy  $M = 4$  thỏa mãn yêu cầu của bài toán.  $\square$

➤**Nhận xét.** Có hai bạn giải đúng bài này là: **Hà Nội:** Lê Tuấn Tú, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh. **Thanh Hóa:** Đỗ Cao Bách Tùng, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

**NHU' HOÀNG**

**Bài T6/487. Giải phương trình:**

$$x^3 + x + 6 = 2(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}. \quad (1)$$

**Lời giải.** ĐK:  $3+2x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$ .

**Cách 1.**

$$(1) \Leftrightarrow (x^3 - 3x + 2) + (4x + 4) - 2(x+1)\sqrt{3+2x-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) + 2(x+1)(2 - \sqrt{3+2x-x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) + 2(x+1) \cdot \frac{(x-1)^2}{2 + \sqrt{3+2x-x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \left( x+2 + \frac{2(x+1)}{2 + \sqrt{3+2x-x^2}} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Với } -1 \leq x \leq 3, \text{ ta có } x+2 + \frac{2(x+1)}{2 + \sqrt{3+2x-x^2}} > 0,$$

do đó (2)  $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (thỏa mãn ĐK).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .

**Cách 2.** Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$2\sqrt{3+2x-x^2} = 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \leq x+1+3-x = 4.$$

Kết hợp với (1) và  $(x+1) \geq 0$ , suy ra

$$x^3 + x + 6 \leq 4(x+1). \quad (3)$$

Mặt khác

$$x^3 + x + 6 - 4(x+1) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \geq 0$$

(do  $x \geq -1$  nên  $x+2 > 0$ ;  $(x-1)^2 \geq 0$ ). Do đó

$$x^3 + x + 6 \geq 4(x+1). \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra  $(x-1)^2(x+2) = 0$ , do  $x+2 > 0$

nên suy ra  $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ . (thỏa mãn ĐK)  $\square$

➤**Nhận xét.** Đây là bài toán giải phương trình có chứa căn thức, ta có thể biến đổi nhân biểu thức căn liên hợp để xuất hiện nhân tử chung rồi đưa về dạng phương trình tích (cách 1) hoặc vận dụng bất đẳng thức để đánh giá (cách 2). Ngoài cách 2, ta có thể biến đổi phương trình về dạng

$$(x+1 - \sqrt{3+2x-x^2})^2 + (x+2)(x-1)^2 = 0,$$

rồi đánh giá vế phải luôn không âm. Rất nhiều bạn tham gia gửi bài và đều làm theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Hoàng Tùng, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Bùi Anh Vũ, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** Phạm Ngọc Ánh, 11A1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** Đoàn Phú Thành, Lương Thị Phương Hoa, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Lê Thị Ngọc Ánh, 10A1, THPT Hoàng Hóa IV, Lê Tiến Đạt, 11A1, THPT Nông Công 1; **Quảng Bình:** Hoàng Xuân Lộc, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Lào Cai:** Bùi Phương Anh, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Thừa Thiên Huế:** Thái Đăng Trần Công, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** Phạm Hiếu, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Vĩnh Long:** Trần Linh, 11T, Châu Minh Khánh, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Đồng Nai:** Quách Minh Tuấn, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Quảng Nam:** Lê Đào Văn Trung, Nguyễn Lê Thanh Hằng, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Lâm Đồng:** Nguyễn Trọng Đức Huy, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Lê Tuấn Anh, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đắk Lắk:** Lê Ngọc Đức, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột.

**PHẠM THỊ BẠCH NGỌC**

**Bài T7/487. Giải hệ phương trình:**

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 3 \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = 4\sqrt{\frac{x^4+y^4}{2}} + 4\sqrt{\frac{y^4+z^4}{2}} + 4\sqrt{\frac{z^4+x^4}{2}} \end{cases}$$

**Lời giải.** ĐK:  $x > 0, y > 0, z > 0$ . Ta có:

$$\frac{x^2}{y} - 2x + y = \frac{(x-y)^2}{y} \geq 0,$$

$$\frac{x^2}{y} - x + 2y - 2\sqrt{x^2 - xy + y^2}$$

$$= \frac{x^2 - xy + y^2}{y} + y - 2\sqrt{x^2 - xy + y^2} = \frac{(\sqrt{x^2 - xy + y^2} - y)^2}{y} \geq 0$$

$$\text{Suy ra } \frac{2x^2}{y} - 3x + 3y \geq 2\sqrt{x^2 - xy + y^2}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{2y^2}{z} - 3y + 3z \geq 2\sqrt{y^2 - yz + z^2},$$

$$\frac{2z^2}{x} - 3z + 3x \geq 2\sqrt{z^2 - zx + x^2}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} + \sqrt{z^2 - zx + x^2}. \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } 2(x^2 - xy + y^2)^2 - (x^4 + y^4)$$

$$= 2(x^4 + x^2y^2 + y^4 - 2x^3y - 2xy^3 + 2x^2y^2) - (x^4 + y^4)$$

$$= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 = (x - y)^4 \geq 0.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{x^2 - xy + y^2} \geq \sqrt{\frac{x^4 + y^4}{2}}. \text{ Tương tự}$$

$$\sqrt{y^2 - yz + z^2} \geq \sqrt{\frac{y^4 + z^4}{2}}, \quad \sqrt{z^2 - zx + x^2} \geq \sqrt{\frac{z^4 + x^4}{2}}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \sqrt{\frac{x^4 + y^4}{2}} + \sqrt{\frac{y^4 + z^4}{2}} + \sqrt{\frac{z^4 + x^4}{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z$ .

Như vậy từ PT thứ hai thay vào PT thứ nhất ta có kết luận  $x = y = z = 1$  là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.  $\square$

► **Nhận xét.** Hệ PT trên thuộc dạng cơ bản. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hưng Yên:** Bùi Văn Quyển, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** Tạ Nam Khánh, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** Đặng Minh Đức, 10 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Quảng Bình:** Hoàng Kim Cà, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long:** Lê Hoàng Huy, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Đồng Tháp:** Nguyễn Phúc Tăng, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN MINH ĐỨC

**Bài T8/487.** Cho tam giác  $ABC$  có bán kính các đường tròn bàng tiếp là  $r_a, r_b, r_c$ ; độ dài các

đường trung tuyến là  $m_a, m_b, m_c$  và có diện tích là  $S$ . Chứng minh rằng:

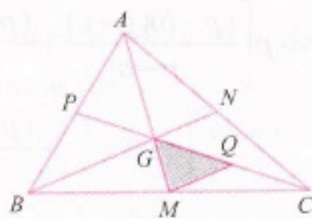
$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq 3\sqrt{3}S + (m_a - m_b)^2 + (m_b - m_c)^2 + (m_c - m_a)^2.$$

**Lời giải.** Đặt

$$BC = a, AC = b, AB = c;$$

$$p = \frac{a + b + c}{2};$$

$$x = p - a, y = p - b, z = p - c.$$



**Bổ đề.** (Bất đẳng thức Finsler-Hadwiger) Cho tam giác  $ABC$  ( $BC = a, AC = b, AB = c$ ) có diện tích là  $S$  thì ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \quad (1)$$

**Chứng minh.** Ta có (1) tương đương với

$$[a^2 - (b - c)^2] + [b^2 - (c - a)^2] + [c^2 - (a - b)^2] \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow (p - b)(p - c) + (p - c)(p - a) + (p - a)(p - b) \geq \sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x + y + z)}$$

$$\Leftrightarrow (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (xy - xz)^2 \geq 0, \text{ bất đẳng thức này đúng, suy ra BĐT (1) đúng.}$$

Trở lại bài toán, gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, AC, AB$ ; còn  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ ,  $Q$  là trung điểm của  $GC$ . Khi đó  $\triangle GMQ$  có độ dài

$$\text{ba cạnh là } \frac{1}{3}m_a, \frac{1}{3}m_b, \frac{1}{3}m_c \text{ và}$$

$$S_{GMQ} = \frac{1}{2}S_{GMC} = \frac{1}{4}S_{GBC} = \frac{1}{12}S.$$

Sử dụng bổ đề trên cho  $\triangle GMQ$  ta có:

$$\left(\frac{1}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{1}{3}m_c\right)^2 \geq 4\sqrt{3}S_{GMQ} + \frac{1}{9}(m_a - m_b)^2 + \frac{1}{9}(m_b - m_c)^2 + \frac{1}{9}(m_c - m_a)^2$$

$$\Leftrightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt{3}S + (m_a - m_b)^2 + (m_b - m_c)^2 + (m_c - m_a)^2.$$

BĐT ở đề bài được chứng minh nếu ta chứng minh được:  $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ .  $(2)$

Thật vậy, sử dụng các công thức:

$$S = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c;$$

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}; \quad m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4};$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \text{ ta thấy}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{S}{p-a}\right)^2 + \left(\frac{S}{p-b}\right)^2 + \left(\frac{S}{p-c}\right)^2 \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow p \left[ \frac{(p-b)(p-c)}{p-a} + \frac{(p-c)(p-a)}{p-b} + \frac{(p-a)(p-b)}{p-c} \right] \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z) \left( \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \right) \geq \frac{3}{4} \left[ (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \right] \quad (3)$$

VT(3) bằng

$$\begin{aligned} & x^2 \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + y^2 \left( \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + z^2 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + xy + yz + zx \\ & \geq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy + yz + zx \\ & \geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) = \frac{3}{4} \left[ (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \right] \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\triangle ABC$  đều.  $\square$

► **Nhận xét.** Số bài giải gửi về Tòa Soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** Hoàng Tùng, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Tạ Nam Khánh, Lê Ngọc Hoa, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Trung Kiên, 12 Toán, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** Nguyễn Văn Cảnh, 12A8, THPT An Thái, Mỏ Cày Nam.

**HỒ QUANG VINH**

**Bài T9/487.** Cho số nguyên dương  $n$  và các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Tìm số thực  $\lambda$  sao cho:

$$a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \geq n + \lambda x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc  $e^x \geq x+1$  cho mọi số thực  $x$  và đẳng thức chỉ xảy ra khi  $x=0$ . Bạn nào chưa biết bất đẳng thức này thì chỉ cần khảo sát hàm số qua đạo hàm bậc nhất là thấy ngay hàm số  $f(x) = e^x - x - 1$  có cực tiểu bằng 0 tại  $x=0$ . Như vậy, ta có

$$a_1^x + \dots + a_n^x = e^{\ln a_1^x} + \dots + e^{\ln a_n^x}$$

$$\geq (1 + \ln a_1^x) + \dots + (1 + \ln a_n^x) = n + x \ln(a_1 a_2 \dots a_n), \forall x \in \mathbb{R}$$

Như vậy giá trị  $\lambda = \ln(a_1 a_2 \dots a_n)$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có thể thấy giá trị

$\lambda = \ln(a_1 a_2 \dots a_n)$  là giá trị duy nhất làm bất đẳng thức của đầu bài thỏa mãn bằng cách xét giới hạn một phía khi  $x \rightarrow +0$  và  $x \rightarrow -0$  của hàm số

$$f(x) = \frac{a_1^x + \dots + a_n^x - n}{x}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Rất ít bạn giải bài toán này, có hai bạn quên không ghi tên và địa chỉ. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Thừa Thiên Huế:** Lê Cẩm Thanh Hà, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Bình:** Hồ Anh, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

**VŨ ĐÌNH HÒA**

**Bài T10/487.** a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$  thì phương trình  $2012^x(x^2 - n^2) = 1$  có một nghiệm duy nhất. Ký hiệu nghiệm đó là  $x_n$ .

b) Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$ .

**Lời giải.** (Theo ý tưởng của đa số các bạn).

a) Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$2012^x(x^2 - n^2) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2012^x} - x^2 + n^2 = 0. \quad (1)$$

Xét hàm số  $f_n(x) = \frac{1}{2012^x} - x^2 + n^2$ , ta thấy

$$f_n'(x) = -\frac{\ln 2012}{2012^x} - 2x < 0 \text{ với } x \in (0, +\infty),$$

nên  $f_n(x)$  là hàm nghịch biến trong  $(0, +\infty)$ . Mặt

khác,  $f_n(n) = \frac{1}{2012^n} > 0$  và

$$f_n(n+1) = \frac{1}{2012^{n+1}} - 2n - 1 < 0$$

nên phương trình (1) có một nghiệm duy nhất  $x_n \in (n, n+1)$ .

b) Ứng với mỗi  $n \in \mathbb{N}^*$  ta thấy  $x_n > n$  và

$$x_n^2 - n^2 = \frac{1}{2012^n}. \text{ Suy ra}$$

$$0 < x_n - n = \frac{1}{(x_n + n)2012^n} < \frac{1}{2n \cdot 2012^n}.$$

Vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n \cdot 2012^n} = 0$  nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n) = 0$ . Do đó

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{[(x_{n+1} - (n+1)) - (x_n - n)] + 1\} \\ &= 1. \end{aligned} \quad \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng. **Bến Tre:** Nguyễn Văn Cảnh, 12A8, THPT An Thái, Mỏ Cày Nam; **Đồng Nai:** Quách Minh Tuấn, 11T,

THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Trung Kiên, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Phúc:** Vũ Ngọc Duy, Vương Tùng Dương, Đỗ Minh Hiệp, Bùi Anh Vũ, 11A1, Tạ Nam Khánh, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

**Bài T11/487.** Gọi  $T$  là tập hợp tất cả các ước số nguyên dương của  $n = 2004^{2010}$ . Giả sử  $S$  là một tập con khác rỗng bất kì của  $T$  thỏa mãn điều kiện: với mọi  $a, b$  thuộc  $S$  mà  $a > b$  thì  $a$  không chia hết cho  $b$ . Tìm số phần tử lớn nhất của tập  $S$ .

**Lời giải.** (Dựa trên ý của bạn Nguyễn Văn Cảnh, Thành Thới A, Mỏ Cày Nam, Bến Tre).

Vì  $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$  nên tập hợp tất cả các ước số nguyên dương của  $2004^{2010} = 2^{4020} \cdot 3^{2010} \cdot 167^{2010}$

$$T = \{2^a \cdot 3^b \cdot 167^c, 0 \leq a \leq 4020, 0 \leq b, c \leq 2010\}$$

Giả sử  $S$  là một tập con của  $T$  thỏa mãn điều kiện đề bài. Xét ánh xạ  $f: S \rightarrow S$  như sau với mỗi  $x = 2^a \cdot 3^b \cdot 167^c$  thì  $f(x) = 2^{4020-b-c} \cdot 3^b \cdot 167^c$ . Ta chứng minh  $f$  là một đơn ánh. Thật vậy giả sử tồn tại  $x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$  mà  $f(x_1) = f(x_2)$ . Giả sử

$$x_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 167^{c_1} \text{ và } x_2 = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 167^{c_2}$$

Vì  $x_1 \neq x_2$  nên  $(a_1, b_1, c_1) \neq (a_2, b_2, c_2)$ . Do

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4020 - b_1 - c_1 = 4020 - b_2 - c_2 \\ b_1 = b_2 \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \\ c_1 = c_2 \end{cases}$$

Suy ra hoặc  $x_1 | x_2$  hoặc  $x_2 | x_1$  (trái giả thiết). Vậy  $f$  là một đơn ánh từ  $S$  vào  $S_0$ , trong đó

$$S_0 = \{x: x = 2^{4020-b-c} \cdot 3^b \cdot 167^c, 0 \leq b, c \leq 2010\}$$

Thành thử  $|S| \leq |S_0| = 2011^2$ . Vậy  $\max |S| = 2011^2$

□

➤ **Nhận xét.** Bài này không có nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** Vương Tùng Dương, 11A1, Chu Thị Thanh, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Quảng Bình:** Hồ Anh, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**Bài T12/487.** Cho tam giác  $ABC$  có đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc với  $BC$  tại  $D$ .  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ .  $N$  là trung điểm của  $AH$ . Đường thẳng qua  $D$ ,  $N$  cắt  $CA, AB$  lần lượt tại  $J, S$ ;  $BJ$  cắt  $CS$  tại  $P$ .  $DA, DP$  lần lượt cắt  $(I)$  tại  $G, L$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $B, C, G, L$  cùng nằm trên một đường tròn.

**Lời giải.** Trong lời giải này kí hiệu  $ZZ$  chỉ tiếp tuyến với  $(I)$  tại điểm  $Z$  thuộc  $(I)$ . Gọi  $X, X', Q$  theo thứ tự là giao điểm của  $BC$  với  $EF, AP, GL$  và  $K, T$  theo thứ tự là giao điểm thứ hai của  $DI, DN$  và  $(I)$ . Dễ thấy  $AD, BE, CF$  đồng quy nên  $(BCDX) = -1$ . Vì  $JD, BA, CP$  đồng quy (tại  $S$ ) nên  $(BCDX') = -1$ . Vậy  $(BCDX) = (BCDX')$ . Điều đó có nghĩa là  $X \equiv X'$ . Vì  $DG, EE, FF$  đồng quy (tại  $A$ ) nên tứ giác  $DEGF$  điều hòa. Do đó  $EF, DD, GG$  đồng quy (tại  $X$ ). Nói cách khác  $GX$  tiếp xúc với  $(I)$ . (1)

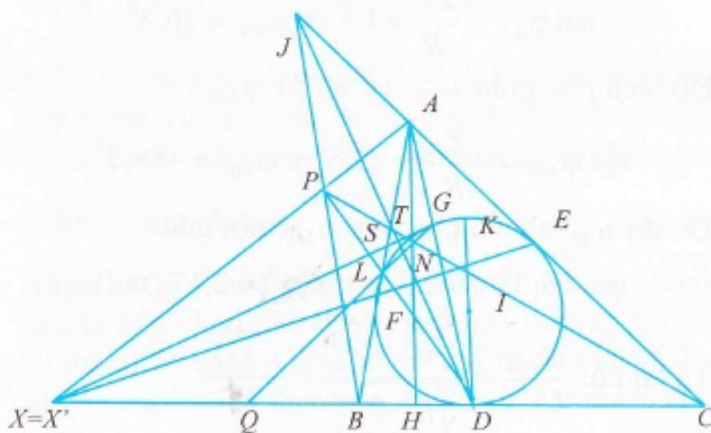
Vì  $N$  là trung điểm của  $AH$  và  $DK \parallel AH$  nên

$$D(GDTK) = D(AHKN) = -1. \text{ Do đó } DTGK \text{ là tứ giác điều hòa.} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $KT$  đi qua  $X$ . Dễ thấy

$$\begin{aligned} D(GLTD) &= D(APJB) = A(DPJB) \\ &= A(DXCB) = (DXCB) = -1. \end{aligned}$$

Do đó  $DGTL$  là tứ giác điều hòa. Điều đó có nghĩa là  $TQ$  tiếp xúc với  $(I)$ . Vậy  $QD = QT$ . Kết hợp với  $\widehat{XTD} = 180^\circ - \widehat{KTD} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , suy ra  $QD = QX$ . Từ đó, theo hệ thức Newton, suy ra  $\overline{QB} \cdot \overline{QC} = \overline{QD}^2 = \overline{QL} \cdot \overline{QG}$ . Tóm lại bốn điểm  $B, C, G, L$  cùng thuộc một đường tròn. □



► **Nhận xét.** 1) Bài toán này không khó nhưng chỉ số bạn tham gia giải không nhiều.

2) Lời giải trên tương tự lời giải của bạn **Võ Minh Quân**, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng**.

3) Xin nêu tên các bạn còn lại: **Vĩnh Phúc:** Tạ Nam Khánh, 10A1, Vương Tùng Dương, Bùi Anh Vũ, Vũ Ngọc Duy, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP Vĩnh Yên; **Bắc Ninh:** Nguyễn Ngọc Khánh, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh; **TP. Hồ Chí Minh:** Trần Vũ Duy, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đồng Tháp:** Võ Huy Hoàng, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

### NGUYỄN MINH HÀ

**Bài L1/487.** Đoạn mạch điện  $AB$  mắc nối tiếp theo thứ tự lần lượt gồm cuộn dây thuần cảm, biến trở và tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi và tần số góc  $\omega$  (với  $5\omega^2 LC = 3$ ). Khi  $R = R_0$  thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt cực đại. Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là điểm nối giữa cuộn cảm thuần với biến trở và biến trở với tụ điện. Biết điện áp ở hai đầu

$MB$  có biểu thức là  $u_{MB} = 290\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$  (V).

Viết biểu thức điện áp ở hai đầu đoạn mạch.

**Lời giải.** Theo bài ra:  $5\omega^2 LC = 3$  suy ra

$$Z_L = \frac{3}{5} Z_C \quad (1)$$

Khi công suất tiêu thụ trên đoạn mạch  $AB$  cực đại thì:  $R = Z_C - Z_L$  (2)

Từ (1) và (2) ta có:  $Z_C = 2,5R$  và  $Z_L = 1,5R$  (3)

Độ lệch pha giữa  $u_{AN}$  và  $u_R$  là  $\varphi_{AN}$ :

$$\tan \varphi_{AN} = \frac{Z_L}{R} = 1,5 \Rightarrow \varphi_{AN} \approx 56,3^\circ$$

Độ lệch pha giữa  $u_{MB}$  và  $u_R$  là  $\varphi_{MB}$ :

$$\tan \varphi_{MB} = \frac{-Z_C}{R} = -2,5 \Rightarrow \varphi_{MB} \approx -68,2^\circ$$

Do đó  $u_{AN}$  nhanh pha hơn  $u_{MB}$  một góc

$$\varphi = 56,3^\circ + 68,2^\circ = 124,5^\circ \approx 2,17 \text{ (rad)}.$$

Ta lại có: 
$$\frac{U_{AN}}{U_{MB}} = \frac{\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} = \frac{\sqrt{337}}{29}$$

Suy ra:  $U_{OAN} = U_{OMB} \frac{\sqrt{337}}{29} \approx 259,6 \text{ (V)}$ . Do đó:

$$u_{AN} = 259,6 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4} + 2,17\right) = 259,6 \cos(\omega t + 1,38) \text{ (V)}$$

□

► **Nhận xét.** Rất tiếc không có bạn nào giải đúng bài Vật lý này.

### NGUYỄN XUÂN QUANG

**Bài L2/487.** Tại  $O$  trên mặt nước có một nguồn phát sóng với tần số  $f = 80 \text{ Hz}$ , tốc độ truyền sóng là  $1,6 \text{ m/s}$ . Ba điểm  $A, B, O$  nằm trên mặt nước tạo thành tam giác vuông tại  $O$ . Biết  $OA = 9 \text{ cm}$ ;  $OB = 12 \text{ cm}$ . Xác định số điểm dao động cùng pha với  $A$  trên đoạn  $BA$ .

**Lời giải.**  $\lambda = \frac{160}{80} = 2 \text{ cm}$

Đường cao của tam giác hạ từ  $O$ :  $OH = 7,2 \text{ cm}$ .

Có  $OA = 9 \text{ cm} = 4,5\lambda$

nên  $A$  dao động ngược pha với  $O$ . Gọi  $P$  là điểm thuộc  $AB$  thỏa mãn  $P$  dao động cùng pha với  $A$  thì

$P$  dao động ngược pha với  $O \Rightarrow OP = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$ .

Xét trên  $AH$ :  $OH < OP < OA$

$$\Leftrightarrow 7,2 < \left(k + \frac{1}{2}\right)2 < 9,$$

$\Rightarrow$  không có giá trị nào của  $k$  thỏa mãn.

Xét trên  $HB$ :  $OH < OP \leq OB$

$$\Leftrightarrow 7,2 < \left(k + \frac{1}{2}\right)2 \leq 12$$

$$\Rightarrow 3,1 < k \leq 5,5,$$

$\Rightarrow$  có 2 giá trị của  $k$  thỏa mãn. □

► **Nhận xét.** Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: **Thừa Thiên Huế:** Cao Thị Linh, 12 Toán 1, Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ, 12 Toán 2, THPT Quốc học Huế; **Nam Định:** Lê Phương Thanh, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

### ĐINH THỊ THÁI QUỲNH



# TÍNH ĐỐI XỨNG TRONG CẤU TRÚC CỦA THƠ ĐƯỜNG LUẬT

VŨ HOÀNG LÂM (Hải Phòng)

Sưu tầm và biên soạn

Gần đây nhiều bạn muốn làm thơ theo thể thơ Đường Luật, và muốn tìm hiểu cấu trúc của thể thơ đó. Tôi xin tóm tắt cấu trúc đó như sau qua thể thơ *Thất ngôn tứ tuyệt*, từ đó ta sẽ chuyển sang các thể thơ Đường luật khác. Bài dẫn chứng:

## NGUYÊN TIÊU

*Kim dạ nguyên tiêu nguyệt chính viên  
Xuân giang xuân thủy tiếp xuân thiên  
Yên ba giang thượng đàm quân sự  
Dạ bán qui lai nguyệt mãn thuyền.*

HỒ CHÍ MINH

**Nguyên tắc 1.** Nói về chữ thứ bảy trong câu, gọi là **Vần**. Chữ thứ bảy của các **câu 1, 2, 4** cùng một âm **vần** (**viên, thiên, thuyền**). Các nguyên tắc sau chỉ nói về 6 chữ còn lại của từng câu.

**Nguyên tắc 2.** Âm **bằng, trắc** ở 6 chữ còn lại gọi là **luật**: *Nhất tam ngũ bất luận, nhị tứ lục phân minh*. Nghĩa là:

- không xét đến chữ thứ nhất, thứ ba, thứ năm;
- các chữ **thứ hai, thứ tư, thứ sáu** phải đúng qui định (luật).

**Nguyên tắc 3.** Nguyên tắc đối xứng các chữ trong một câu: Chữ thứ **hai** và chữ thứ **sáu** đối xứng qua chữ thứ **tư**. Nếu chữ thứ tư là âm **trắc** thì chữ thứ hai và chữ thứ sáu thuộc âm **bằng** và ngược lại.

|   |           |   |          |   |          |   |
|---|-----------|---|----------|---|----------|---|
| 1 | 2         | 3 | 4        | 5 | 6        | 7 |
|   | <b>B*</b> |   | <b>T</b> |   | <b>B</b> |   |

hoặc:

|   |          |   |          |   |          |   |
|---|----------|---|----------|---|----------|---|
| 1 | 2        | 3 | 4        | 5 | 6        | 7 |
|   | <b>T</b> |   | <b>B</b> |   | <b>T</b> |   |

**Nguyên tắc 4.** Nguyên tắc đối xứng giữa các câu trong một bài gọi là **niêm**. Hãy hình dung giữa câu 2 và câu 3 có một trục đối xứng thì

- Câu 1 và câu 4 đối xứng nhau qua trục đó;
- Câu 2 và câu 3 đối xứng nhau cũng qua trục đó.

|       |     |     |        |      |        |       |        |
|-------|-----|-----|--------|------|--------|-------|--------|
|       | 1   | 2   | 3      | 4    | 5      | 6     | 7      |
| Câu 1 | Kim | dạ  | nguyên | tiêu | nguyệt | chính | viên   |
| Câu 2 |     |     |        |      |        |       |        |
| Câu 3 |     |     |        |      |        |       |        |
| Câu 4 | Dạ  | bán | qui    | lai  | nguyệt | mãn   | thuyền |

|       |      |       |       |        |      |      |       |
|-------|------|-------|-------|--------|------|------|-------|
|       | 1    | 2     | 3     | 4      | 5    | 6    | 7     |
| Câu 1 |      |       |       |        |      |      |       |
| Câu 2 | Xuân | giang | xuân  | thủy   | tiếp | xuân | thiên |
| Câu 3 | Yên  | ba    | giang | thượng | đàm  | quân | sự    |
| Câu 4 |      |       |       |        |      |      |       |

Chúng ta thấy trong đời sống, nhân dân ta rất thích tính đối xứng, và tính đối xứng đó được bày tỏ trong niêm và luật của thể thơ đường luật.

• Đối với thể *Thất ngôn bát cú* (tám câu bảy chữ), ta hình dung có một trục đối xứng giữa câu thứ tư và thứ năm (câu 1 và câu 8 đối xứng qua trục cũng như cặp câu 2-3 đối xứng với cặp câu 7-6). Đối với thơ ngũ ngôn ta chỉ cần bỏ đi hai chữ đầu của câu thất ngôn hoặc từ bài thơ ngũ ngôn, ta thêm hai chữ vào mỗi câu theo đúng niêm và luật ta được bài thơ thất ngôn. Trong thể thơ Đường luật, ngoài Văn, Luật và Niêm còn qui định về ĐỐI ở câu 3 và 4, câu 5 và 6, và nội dung PHÁ THỪA THỰC LUẬN KẾT của toàn bài. Bài này chỉ xin nói về Văn, Luật và Niêm. Mời các bạn đọc Giai thoại “Thừa và Thiếu” minh họa cho ý 5.

### Giai thoại THỪA VÀ THIẾU.

Ông Nghè đi giữa đường, chú mục đồng không biết ông là ai nên không tránh.

**Ông Nghè:** Sao thấy ta, nhà ngươi không tránh?

**Mục đồng:** Cháu chưa biết cụ là ai nên chưa tránh ạ.

**Ông Nghè:** Ta là ông Nghè.

**Mục đồng:** Thế Ông Nghè có biết làm thơ không ạ?

**Ông Nghè:** Thơ ta hàng bồ...

**Mục đồng:** Cụ cho cháu nghe một bài thơ đi.

Không do dự, **Ông Nghè** đọc:

*Thanh minh thời tiết vũ phân phân.*

*Thượng lộ hành nhân dục đoạn hồn.*

*Tả vắn từu gia hà xứ thị*

*Mục đồng đảo chỉ hạnh hoa thôn.*

Đọc xong **ông Nghè** hỏi: Nhà ngươi thấy thế nào?

**Mục đồng** cười: Thừa cụ, mỗi câu đều thừa hai chữ ạ.

Câu thứ nhất: Trời mưa phùn nhẹ nhẹ, đó là thanh minh rồi.

Câu thứ hai cần gì hai chữ thượng lộ “người đi buồn đứt ruột.”

Câu thứ ba “Quán rượu ở chốn nào?”, cần gì tả vắn.

Còn câu thứ tư, ai trả lời chẳng được!

Thừa cụ, cháu nói thế có phải không ạ?

**Ông Nghè** tỏ vẻ khó chịu: Được ta đọc bài thứ hai cho nhà ngươi nghe.

*Bạch nhật mạc nhàn quá*

*Thanh xuân bất tái lai*

*Song tiền cần khổ học*

*Mã thượng kỳ nhân hỏi.*

**Mục đồng** lại cười rũ rượi.

**Ông Nghè:** Sao nhà ngươi lại cười?

**Mục đồng:** Bài này thừa cụ mỗi câu lại thiếu hai chữ ạ.

**Ông Nghè:** Thiếu là thiếu như thế nào chứ?

**Mục đồng:** Thừa cụ, lời khuyên này, người nào nói và ai là người nghe đều không rõ. Cháu xin phép cụ thêm như thế này:

*Khuyến quân bạch nhật mạc nhàn quá.*

*Thương thiếp thanh xuân bất tái lai*

*Tự cổ song tiền cần khổ học*

*Cảm bào mã thượng kỳ nhân hỏi.*

Thừa cụ đây là lời người vợ khuyên chồng: Khuyên chàng đừng để ngày xanh trôi nhạt nhẽo, hãy thương đến thiếp vì ngày xuân không trở lại. Từ xưa, bên song cửa cần khổ học (bởi) đã mấy ai có áo bào cười ngửa trở về. **Mục đồng** nói tiếp: Cụ làm thơ như thế mà đỗ nghè, cháu mà đi thi, cháu đỗ vua.

Sử dụng từ thật quả là điều quá công phu!



$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Từ đây và giả thiết ta tính được  $|z_1 - z_2| = 1$ .

**Câu 40.** Để thấy  $V$  là thể tích của khối nón có bán kính đáy là  $AC = a$  và chiều cao là  $AB = 2a$ . Do đó

$$V = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot 2a = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

$V'$  là thể tích của hình trụ có bán kính đáy là  $AK$  và chiều cao là  $AH$  nên

$V' = \pi \cdot AK^2 \cdot AH$ . Ta có

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BH}{BA} = \frac{HM}{AC} = t \quad (0 < t < 1).$$

Từ đây suy ra  $BH = 2ta$ ,  $HM = ta \Rightarrow AH = 2(1-t)a$ .

Do đó  $V' = \pi(ta)^2 \cdot 2(1-t)a = 2\pi(1-t)t^2 a^3$ .

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{V'}{V} = 3(1-t)t^2 = \frac{3}{2}(2-2t)t \leq \frac{3}{2} \left( \frac{2-2t+t+t}{3} \right)^3 = \frac{4}{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $2-2t = t \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ .

**Câu 41.** Lấy hai điểm thuộc  $d$  là  $A(-3, 1, -1)$  và  $B(-1, 2, -4)$ . Hình chiếu vuông góc của  $A$  và  $B$  trên mặt phẳng  $(yOz)$  lần lượt là  $A'(0, 1, -1)$  và  $B'(0, 2, -4)$ .

Ta có  $\overline{A'B'} = (0, 1, -3)$ .

**Câu 42.**

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Câu 43.** Rõ ràng  $V_{SOAB}$  lớn nhất khi và chỉ khi  $S_{OAB}$  lớn nhất. Mà

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB} \leq \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{a^2}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \sin \widehat{AOB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$ .

Lúc này  $\max V_{SOAB} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{OAB} = \frac{1}{6} SO \cdot OA \cdot OB = \frac{a^3 \sqrt{3}}{48}$ .

**Câu 44.** Tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$  nên tập hợp tất cả các điểm cách đều ba điểm  $O, A, B$  là đường thẳng đi qua trung điểm  $I$  của  $AB$  và vuông góc với mp( $OAB$ ).

Đường thẳng này nhận  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  làm VTCP.

**Câu 45.** Gọi  $x$  là số câu trả lời đúng thì  $10 - x$  là số câu trả lời sai. Để số điểm không nhỏ hơn 7 thì

$$x - \frac{1}{2}(10 - x) \geq 7 \Leftrightarrow x \geq 8.$$

Nghĩa là thí sinh đó phải làm đúng không dưới 8 câu. Xác suất để điều này xảy ra là:

$$C_{10}^8 \left( \frac{1}{4} \right)^8 \left( \frac{3}{4} \right)^2 + C_{10}^9 \left( \frac{1}{4} \right)^9 \frac{3}{4} + C_{10}^{10} \left( \frac{1}{4} \right)^{10} = \frac{109}{262144}.$$

**Câu 46.** Sử dụng công thức  $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$  ta đưa PT đã cho về dạng tương đương như sau

$$x^{\log_8(4x)} + x^{\log_8(4x)} = 4 \Leftrightarrow x^{\log_8(4x)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_8(4x) \cdot \log_2 x = 1 \Leftrightarrow (\log_8 4 + \log_8 x) \log_2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \log_2 x \right) \log_2 x = 1 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = -3 \\ \log_2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Vậy tập nghiệm là } \left\{ \frac{1}{8}, 2 \right\}.$$

**Câu 47.** Xét hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh đáy  $BC, CA, AB$ . Các trung điểm  $D', E', F'$  được xác định một cách tương tự.  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh bên  $AA', BB', CC'$ . Để thấy các mặt phẳng  $(EE'F'F), (FF'D'D), (DD'E'E)$  và  $(MNP)$  cách đều tất cả các đỉnh của lăng trụ.

**Câu 48.** Ta có  $f'(x) = e^x e^x$ . Từ đó  $f'(1) = ee^e = e^{e+1}$ .

**Câu 49.** Đường thẳng  $x + y = 2m$  là tiếp tuyến của đường cong  $y = -x^3 + 2x + 4$  khi và chỉ khi hệ PT sau có nghiệm

$$\begin{cases} -x^3 + 2x + 4 = -x + 2m \\ -3x^2 + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + 3x + 4 = 2m \\ x^2 = 1 \end{cases}.$$

Với  $x = 1$  thì  $m = 3$ , với  $x = -1$  thì  $m = 1$ .

**Câu 50.** Nhận thấy điểm  $M$  nằm bên trong khối cầu  $(S)$  và tâm của  $(S)$  là gốc tọa độ  $O$ . Gọi  $(\alpha)$  là một mặt phẳng đi qua  $M$  và  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $(\alpha)$ . Để  $(\alpha)$  cắt  $(S)$  theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất thì  $OH$  phải lớn nhất. Mà  $OH \leq OM$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $H$  trùng với  $M$ . Như vậy mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài đi qua  $M$  và nhận  $\overline{OM} = (1, -1, 2)$  làm VTPT, do đó có PT là

$$(x-1) - (y+1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 6 = 0.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQGHN)



# SỬ DỤNG MA TRẬN LIÊN KẾT TRONG GIẢI CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

LÊ KIM CHUNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Tập hợp gồm  $m.n$  số thực xếp thành  $m$  hàng và  $n$  cột được gọi là một ma trận cỡ  $m \times n$ . Phần tử của ma trận cỡ  $m \times n$  nằm ở hàng  $i$  và cột  $j$  kí hiệu là  $a_{ij}$ . Khi đó ma trận được kí hiệu là  $(a_{ij})_{m \times n}$ . Ma trận cỡ  $n \times n$  còn gọi là ma trận vuông cấp  $n$ . Giả sử có hai tập hợp  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  trong đó mỗi phần tử của  $X$  có quan hệ có thể lượng hóa được với các phần tử trong  $Y$ . Với mỗi  $i, j$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) ta kí hiệu  $a_{ij}$  là một số đặc trưng cho mỗi quan hệ giữa  $x_i$  và  $y_j$ . Khi đó ta được ma trận  $A = (a_{ij})$  cỡ  $m \times n$  gọi là ma trận liên kết trong mối quan hệ giữa các phần tử trong  $X$  và trong  $Y$ . Bằng cách xem xét mỗi liên hệ của các phần tử trong ma trận  $A$  ta có thể đi đến lời giải của bài toán tổ hợp.

## 1. Dựa vào mối quan hệ của các số hạng trong ma trận để giải toán

**Bài toán 1** (IMO 2016). Tìm các số tự nhiên  $n$  sao cho trong mỗi ô vuông của bảng  $n \times n$  ô vuông có thể viết đúng một chữ cái trong số ba chữ cái  $I, M, O$  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau.

- 1) Trên mỗi hàng, mỗi cột có đúng  $\frac{1}{3}$  ô viết chữ  $I$ ,  $\frac{1}{3}$  ô viết chữ  $M$  và  $\frac{1}{3}$  ô viết chữ  $O$ .
- 2) Trên mỗi đường chéo mà có số ô chia hết cho 3 cũng có đúng  $\frac{1}{3}$  ô viết chữ  $I$ ,  $\frac{1}{3}$  ô viết chữ  $M$  và  $\frac{1}{3}$  ô viết chữ  $O$ .

**Chú ý:** Nếu kí hiệu  $(i, j)$  là ô vuông của bảng nằm ở hàng  $i$  và cột  $j$ . Khi đó có  $4n - 2$  đường chéo chia thành hai loại: loại 1 gồm các ô  $(i, j)$  có  $i+j$  không đổi và loại hai gồm các ô  $(i, j)$  có  $j-i$  không đổi.

**Lời giải.** Từ giả thiết của bài toán ta suy ra được  $n$  chia hết cho 3. Ta sẽ chứng minh  $n$  chia hết cho 9.

- Nếu  $n = 9k$ . Xếp  $k^2$  bảng sau thành bảng  $n \times n$  thỏa mãn điều kiện bài toán

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | M | O | I | M | O | I | M | O |
| I | M | O | I | M | O | I | M | O |
| I | M | O | I | M | O | I | M | O |
| M | O | I | M | O | I | M | O | I |
| M | O | I | M | O | I | M | O | I |
| M | O | I | M | O | I | M | O | I |
| O | I | M | O | I | M | O | I | M |
| O | I | M | O | I | M | O | I | M |
| O | I | M | O | I | M | O | I | M |

- Giả sử có một cách viết thỏa mãn điều kiện của bài toán. Với mỗi  $1 \leq i, j \leq n$ , đặt  $a_{ij} = 1$  nếu ô  $(i, j)$  viết chữ  $I$ ,  $a_{ij} = -1$  nếu ô  $(i, j)$  viết chữ  $M$  và  $a_{ij} = 0$  nếu ô  $(i, j)$  viết chữ  $O$ . Khi đó ta có ma trận cỡ  $n \times n$  có tổng các phần tử trên mỗi hàng, mỗi cột đều bằng 0. Do  $n = 3m$  nên viết ma trận  $A$  dưới dạng

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

trong đó  $A_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3$  là các ma trận vuông cấp  $m$ . Từ tính chất của ma trận  $A$  ta dễ dàng chứng minh được ma trận  $A_{22}$  có tổng các phần tử bằng 0, hay số chữ  $I$  và chữ  $M$  trong ma trận  $A_{22}$  bằng nhau. Lập luận tương tự (đặt  $a_{ij} = 1$  nếu ô  $(i, j)$  viết chữ  $I$ ,  $a_{ij} = -1$  nếu ô  $(i, j)$  viết chữ  $O$  và  $a_{ij} = 0$  nếu ô  $(i, j)$  viết chữ  $M$ ) ta chứng minh được số chữ  $I, M$ ,

$O$  trong bảng ứng với ma trận  $A_{22}$  bằng nhau. Điều đó chứng tỏ  $m$  chia hết cho 3. Vậy  $n$  chia hết cho 9.

**Bài toán 2** (Chọn đội tuyển PTNK - ĐHQG TP.HCM). Trong một hệ thống máy tính, mỗi máy được kết nối với ít nhất 30% số máy khác của hệ thống. Hệ thống này có một chương trình ngăn chặn và cảnh báo khá tốt, do đó khi một máy tính bị virus, nó chỉ đủ thời gian lây lan cho các máy tính khác có kết nối trực tiếp với máy tính đó. Chứng minh dù vậy, kẻ tấn công luôn có thể chọn ra hai máy tính trong hệ thống mà nếu thả virus vào hai máy tính đó thì có ít nhất 50% máy tính của hệ thống bị nhiễm virus.

**Lời giải.** Không mất tính tổng quát ta giả sử hệ thống có 100 máy tính. Với mỗi  $1 \leq i, j \leq 100$ , đặt  $a_{ij} = 1$  nếu  $i \neq j$  và máy tính  $i$  có kết nối trực tiếp với máy tính  $j$ ,  $a_{ij} = 0$  trong các trường hợp còn lại. Đặt  $A = (a_{ij})$ . Ta có  $A$  là ma trận vuông cấp 100 mà mỗi hàng, mỗi cột của nó ít nhất 30 số 1 và  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $\forall 1 \leq i, j \leq 100$ .

Gọi  $m$  là hàng nhiều số 1 nhất của  $A$  và số số 1 của hàng  $m$  là  $k$ .

- Nếu  $k \geq 50$  thì kết luận của bài toán là hiển nhiên.
- Nếu  $30 \leq k < 50$  thì bằng cách đánh số lại các máy tính ta có thể coi máy tính  $m$  là máy tính thứ  $k+1$  và có kết nối với các máy tính từ 1 đến  $k$ . Khi đó ma trận  $A$  có dạng

$$A = \begin{pmatrix} & 1 & & & & \\ B & 1 & C & & & \\ & \dots & & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & 1 \dots 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & \\ & 0 & & & & \\ E & \dots & D & & & \\ & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

trong đó  $B, C, D, E$  là các ma trận có cỡ lần lượt là  $k \times k, k \times (99 - k), (99 - k) \times (99 - k), (99 - k) \times k$ .

- Nếu trong ma trận  $D$  có một cột  $j$  có không ít hơn  $50 - k$  số 1 thì thả virus vào các máy  $j$  và  $k+1$ .
- Nếu tất cả các cột trong  $D$  đều có số số 1 ít hơn  $50 - k$ , khi đó số số 1 trong  $C$  lớn hơn  $(99 - k)(k - 20)$  và như vậy phải có ít nhất một hàng  $i$  của  $C$  có số số 1 không ít hơn

$$\left[ \frac{(99 - k)(k - 20)}{k} \right] + 1. \text{ Dễ dàng chứng minh được } \frac{(99 - k)(k - 20)}{k} + 1 \geq 50 - k, \forall 30 \leq k < 50. \text{ Khi đó}$$

thả hai con virus vào máy  $k+1$  và  $i$  ta sẽ được kết luận của bài toán.

**Bài toán 3** (chọn đội tuyển Bà Rịa-Vũng Tàu). Cho  $n$  là số nguyên dương. Tìm số các hoán vị  $f$  của tập

hợp  $\{1; 2; 3; \dots; n\}$  sao cho  $T = \sum_{i=1}^n |f(i) - i|$  lớn nhất.

**Lời giải.** Với mỗi  $1 \leq i, j \leq n$ , đặt  $a_{ij} = |f(i) - i|$  với  $f(i) = j$ . Xét ma trận

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & n-4 & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bài toán trở thành: Tìm số cách chọn  $n$  phần tử của ma trận  $A$  sao cho trên mỗi hàng, mỗi cột của  $A$  có đúng một số được chọn và tổng các số được chọn lớn nhất.

**TH1:**  $n$  là số chẵn. Đặt  $n = 2m$ . Viết ma trận  $A$  dưới dạng  $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$  trong đó

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & m-1 \\ 1 & 0 & \dots & m-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m-1 & m-2 & \dots & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} m & m+1 & \dots & n-1 \\ m-1 & m & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} m & m-1 & \dots & 1 \\ m+1 & m & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-2 & \dots & m \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & m-1 \\ 1 & 0 & \dots & m-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m-1 & m-2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Nhận xét:** Chọn tùy ý  $m$  phần tử của  $C$  (hoặc  $D$ ) sao cho trên mỗi hàng, mỗi cột của  $C$  (hoặc  $D$ ) có đúng một phần tử thì tổng của các phần tử được chọn không đổi và bằng  $m^2$ . Trên các cột của  $A$ , chọn lần lượt các số  $b_1; b_2; \dots; b_n$  tùy ý sao cho trên mỗi hàng của  $A$  có đúng một phần tử. Ta chứng minh  $\sum_{j=1}^n b_j$

lớn nhất khi  $b_1; b_2; \dots; b_m$  được chọn trên  $D$  và  $b_{m+1}; b_{m+2}; \dots; b_n$  được chọn trên  $C$ . Thật vậy, giả sử có  $b_{j_1} = |j_1 - i_1|, 0 \leq i_1, j_1 < m$  được chọn trong  $B$ . Khi đó có một cột  $j_2 \geq m$  mà số được chọn trên đó nằm trong  $E$  hay  $b_{j_2} = |j_2 - i_2|, m \leq i_2, j_2 \leq n$ .

Khi đó tổng của các số được chọn là

$$T' = 2m^2 - (j_2 - i_1) - (i_2 - j_1) + |j_1 - i_1| + |j_2 - i_2|.$$

Dễ dàng kiểm tra được  $T' < 2m^2$ . Vậy  $\sum_{j=1}^n b_j$  lớn

nhất khi  $b_1; b_2; \dots; b_m$  được chọn trên  $D$  và  $b_{m+1}; b_{m+2}; \dots; b_n$  được chọn trên  $C$  hay  $T$  lớn nhất khi và chỉ khi  $f(1), f(2), \dots, f(m)$  là hoán vị của  $\{m+1, m+2, \dots, n\}$  và  $f(m+1), f(m+2), \dots, f(n)$

là hoán vị của  $\{1, 2, \dots, m\}$ . Vậy có  $\left(\frac{n}{2}\right)!$  hoán vị

thỏa mãn bài toán

**TH2:**  $n$  lẻ. Đặt  $n = 2m + 1$ . Lập luận tương tự như trường hợp 1 ta có  $T$  lớn nhất khi và chỉ khi  $f(1), f(2), \dots, f(m)$  là hoán vị của  $\{m+2, m+3, \dots, n\}$  và  $f(m+1), f(m+2), \dots, f(n)$  là hoán vị của  $\{1, 2, \dots, m+1\}$  hoặc  $f(1), f(2), \dots, f(m+1)$  là hoán vị của  $\{m+1, m+2, \dots, n\}$  và  $f(m+2), f(m+3), \dots, f(n)$  là hoán vị của  $\{1; 2; \dots; m\}$ . Số hoán vị thỏa mãn một trong hai điều kiện trên là  $2(m+1)m!$ . Số hoán vị có  $f(m) = m$  là  $(m!)^2$ . Vậy số hoán vị thỏa mãn bài toán là

$$2(m+1)m! - (m!)^2 = (m!)^2(2m+1) = n \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2.$$

**Bài toán 4 (IMO 2005).** Trong một cuộc thi toán có  $n$  thí sinh ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ ) và 6 bài toán được đặt ra.

Biết rằng, với mỗi hai bài toán thì có nhiều hơn  $\frac{2}{5}$  tổng số thí sinh cùng giải được và không có thí sinh nào giải được cả 6 bài toán. Chứng minh rằng có ít nhất hai thí sinh sao cho mỗi người giải được đúng 5 bài toán.

**Lời giải.** Với mỗi  $1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq n$ , đặt  $a_{ij} = 1$  nếu người  $j$  giải được bài  $i$  và  $a_{ij} = 0$  nếu người  $j$  không giải được bài  $i$ . Khi đó ta có ma trận  $A = (a_{ij})$  cỡ  $6 \times n$  mà trên mỗi cột của nó có nhiều nhất 5 số 1, hai hàng bất kì có nhiều hơn  $\frac{2}{5}n$  cột chung (cột

chung là cột mà các phần tử của hai hàng trên mỗi cột đó đều là số 1). Ta chứng minh bài toán bằng phản chứng bằng cách đếm số cặp số 1 trên các cột của  $A$ . Gọi  $T$  là số cặp số 1 như vậy. Giả sử chỉ có nhiều nhất một thí sinh giải được 5 bài toán, còn lại giải được không quá 4 bài. Khi đó  $A$  có nhiều nhất 1 cột có năm số 1 và các cột còn lại có nhiều nhất bốn số 1. Vậy  $T \leq (n-1)C_4^2 + C_5^2 = 6n + 4$ . (1)

Giả sử  $n = 5p + k, k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Do mỗi hai hàng của  $A$  có nhiều hơn  $\frac{2}{5}n$  cặp số 1 chung nên:

– Với  $k = 0$  thì với mỗi hai bài có không ít hơn  $2p + 1$  thí sinh cùng giải được hay  $T \geq 15(2p + 1)$ .

Điều này mâu thuẫn với (1).

– Bằng cách làm tương tự ta cũng có kết quả tương tự cho  $k = 1, 3, 4$ .  $k = 1, 3, 4$

– Với  $k = 2$ . Khi đó ta có  $30p + 15 \leq T \leq 30p + 16$ .

Nếu  $T < 6n + 4$  thì có ít nhất một cột của  $A$  có 3 số 1. Khi đó

$$T \leq (n-2)C_4^2 + C_5^2 + C_3^2 = 6n + 1 = 30p + 13 < 30p + 15.$$

Vô lí. Vậy  $T = 30p + 16$ . Khi đó có 2 bài có  $2p + 2$  thí sinh cùng giải được, còn với mỗi hai bài còn lại có  $2p + 1$  thí sinh cùng giải được. Như vậy, có đúng một người giải được 5 bài và  $n - 1$  người giải được đúng 4 bài. Không mất tính tổng quát ta coi hai bài có cùng  $2p + 2$  thí sinh giải được là bài 1 và 2 và thí sinh giải được 5 bài là thí sinh  $n$ . Gọi  $B$  là ma trận có được từ  $A$  khi bỏ đi cột  $n$ . Ta có mỗi cột của  $B$  có đúng 4 số 1. Ta sẽ tính số số 1 trên mỗi hàng của  $B$ .

**TH1:** Thí sinh  $n$  làm được cả hai bài 1 và 2. Giả sử thí sinh  $n$  không làm được bài 6. Số cặp số 1 chung của mỗi hai hàng  $(1;2), (1;6), (2;6), (3;6), (4;6), (5;6)$  là  $2p + 1$ , số cặp số 1 chung của mỗi hai hàng còn lại bằng  $2p$ . Do mỗi số 1 của hàng 1 trong  $B$  thì có 3 cặp số 1 nằm ở 3 trong số 5 cặp hàng:  $(1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6)$  nên số số 1 của hàng 1 bằng  $\frac{10p+2}{3}$ . Tương tự ta có số số 1 của các hàng 2, 3,

4, 5, 6 lần lượt là

$$\frac{10p+2}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+5}{3}$$

Từ kết quả trên suy ra các số  $10p+1; 10p+2; 10p+5$  cùng chia hết cho 3. Vô lí.

**TH2:** Thí sinh  $n$  không làm được một trong hai bài 1 hoặc 2. Giả sử thí sinh  $n$  không làm được bài 1.

Tương tự trường hợp 1 ta tính được số số 1 trong mỗi hàng của ma trận  $B$  lần lượt là:

$$\frac{10p+6}{3}; \frac{10p+2}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}$$

Suy ra các số  $10p+1; 10p+2; 10p+6$  cùng chia hết cho 3. Vô lí.

## II. Sử dụng ma trận để giải bài toán bằng quy nạp

**Bài toán 5.** (Harvard-MIT Mathematics Tournament 2017). Trong một phòng có 2017 con ếch và 2017 con cóc. Mỗi con ếch là bạn của đúng hai con cóc. Gọi  $N$  là số cách ghép cặp mỗi con ếch với một con cóc là bạn của nó sao cho mỗi con cóc được ghép với không quá một con ếch. Gọi  $D$  là tập hợp các giá trị có thể của  $N$ . Tìm số phần tử của  $D$  và tổng tất cả các phần tử của  $D$ .

**Lời giải.** Ta giải bài toán cho trường hợp tổng quát với  $n$  con ếch và  $n$  con cóc ( $n > 1$ ). Với mỗi  $1 \leq i, j \leq n$ , đặt  $a_{ij} = 1$  nếu con ếch  $i$  và con cóc  $j$  là bạn và  $a_{ij} = 0$  trong trường hợp còn lại. Khi đó ta có ma trận  $A = (a_{ij})$  vuông cấp  $n$  mà trên mỗi cột của nó có đúng hai số 1. Một cách ghép cặp thỏa mãn điều kiện bài toán là một cách chọn ra  $n$  số 1 trong  $A$  sao cho mỗi hàng, mỗi cột của  $A$  có đúng một số 1. Như vậy nếu ma trận  $A$  có một hàng toàn số 0 thì  $N = 0$ . Tiếp theo ta chỉ xét trường hợp  $A$  là ma trận mà mỗi hàng của nó có ít nhất một số 1.

Với mỗi  $n > 1$ , đặt  $D_n$  là tập hợp các giá trị có thể của  $N$ . Ta sẽ chứng minh

$$D_n = \left\{ 0; 2^k, 1 \leq k \leq \frac{n}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (1) \text{ bằng quy nạp.}$$

Rõ ràng (1) đúng với  $n = 2$

Giả sử (1) đúng với mọi  $k < n$ . Ta chứng minh (1) đúng với  $k = n$ .

Xét ma trận  $A$  vuông cấp  $n$  thỏa mãn điều kiện bài toán mà mỗi hàng của nó có ít nhất một số 1. Gọi  $S_n$  là số cách chọn ra  $n$  số 1 trong ma trận  $A$  sao cho mỗi hàng, mỗi cột của  $A$  có đúng một số 1. Không mất tính tổng quát ta coi hàng  $n$  của  $A$  có ít số 1 nhất, khi đó hàng  $n$  hoặc có một số 1 hoặc có 2 số 1.

**TH1:** Hàng  $n$  có một số 1 nằm ở cột  $j$ . Chọn số 1 ở hàng  $n$  là  $a_{nj}$  (có 1 cách chọn) rồi bỏ hàng  $n$ , cột  $j$  ra khỏi ma trận  $A$  ta sẽ được ma trận  $B$  cấp  $n-1$  thỏa mãn điều kiện bài toán với  $n-1$  con ếch và  $n-1$  con cóc. Vì vậy  $S_n = S_{n-1}$ .

**TH2:** Hàng  $n$  có hai số 1. Khi đó mỗi hàng của  $A$  có đúng hai số 1. Giả sử hai số 1 ở hàng  $n$  là  $a_{nj_1}$  và

$a_{nj_2}$  và hai số 1 của cột  $j_1$  nằm ở hàng  $i$  và  $n$ . Chọn số 1 ở hàng  $n$  có hai cách chọn. Mỗi cách chọn ở hàng  $n$  chẳng hạn đó là  $a_{nj_1}$ . Bằng cách bỏ đi hàng  $n$  và cột  $j_1$  khỏi ma trận  $A$  ta được ma trận  $A_1$  cấp  $n-1$  có  $2n-3$  số 1 mà mỗi cột của nó có đúng 2 số 1, hàng  $i$  có một số 1, các hàng còn lại có hai số 1. Lập lại cách làm như ở trường hợp 1 ta được số cách chọn  $n-1$  số 1 còn lại là  $S_{n-2}$ . Vậy  $S_n = 2S_{n-2}$ . Vậy (1) đúng với mọi  $n > 1$ . Với  $n = 2017$  ta có  $D = D_{2017} = \{0; 2; 4; \dots; 2^{1008}\}$ .

**Bài toán 6** (VMO 2015). Có  $m$  học sinh nữ và  $n$  học sinh nam ( $m, n \geq 2$ ) tham gia một liên hoan song ca. Tại liên hoan song ca, mỗi buổi diễn là một chương trình văn nghệ. Mỗi chương trình văn nghệ bao gồm một một số bài hát song ca nam - nữ mà trong đó mỗi đôi nam nữ chỉ hát với nhau không quá một bài và mỗi học sinh đều được hát ít nhất một bài. Hai chương trình được coi là khác nhau nếu có một cặp nam - nữ hát với nhau ở chương trình này nhưng không hát với nhau ở chương trình kia. Liên hoan song ca chỉ kết thúc khi tất cả các chương trình khác nhau có thể có đều được biểu diễn, mỗi chương trình được biểu diễn đúng một lần.

a) Một chương trình được gọi là lệ thuộc vào học sinh  $X$  nếu như hủy tất cả các bài song ca mà  $X$  tham gia thì có ít nhất một học sinh khác không được hát bài nào trong chương trình đó. Chứng minh rằng trong tất cả các chương trình lệ thuộc vào  $X$  thì số chương trình có số lẻ bài hát bằng số chương trình có số chẵn bài hát.

b) Chứng minh rằng ban tổ chức liên hoan có thể sắp xếp các buổi biểu diễn sao cho số các bài hát tại hai buổi biểu diễn liên tiếp bất kỳ không cùng tính chẵn lẻ.

**Lời giải.** Với mỗi hai số nguyên  $i, j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ , đặt  $a_{ij} = 1$  nếu bạn nữ  $i$  song ca với bạn nam  $j$  và  $a_{ij} = 0$  trong trường hợp còn lại. Khi đó mỗi chương trình văn nghệ tương ứng với một ma trận cỡ  $m \times n$  mà mỗi hàng và cột của nó đều có ít nhất một số 1. Hai chương trình khác nhau nếu hai ma trận khác nhau. Số tiết mục song ca của mỗi chương trình chính bằng số số 1 có trong ma trận tương ứng.

a) Gọi  $S$  là tập hợp các chương trình phụ thuộc vào người  $X$ . Không mất tính tổng quát ta coi người  $X$  là người nam 1. Gọi  $E$  là tập hợp các ma trận tương ứng với mỗi chương trình trong  $S$  và  $F$  là tập hợp các ma trận cỡ  $m \times (n-1)$  có các phần tử bằng 0 hoặc 1 sao cho trên mỗi cột có ít nhất một số 1 và có

ít nhất một hàng toàn số 0. Khi đó, nếu ta bỏ cột 1 của ma trận  $A$  trong  $E$  ta sẽ được một ma trận thuộc  $F$  và bằng cách thêm vào mỗi ma trận trong  $F$  một cột làm cột 1 sao cho mỗi hàng của ma trận mới có ít nhất một số 1 ta được một ma trận thuộc  $E$ . Lấy ma trận  $B$  trong  $F$  có  $k$  hàng toàn số 0. Hiển nhiên ta có  $k < m$ . Gọi  $a$  là số số 1 có trong  $B$ . Khi đó mỗi cách thêm vào  $B$  một cột làm cột 1 sao cho cột đó có ít nhất  $k$  số 1 và có đúng  $k$  số 1 ở  $k$  hàng toàn số 0 của  $B$  ta sẽ được một ma trận thuộc  $E$ . Bằng cách làm như vậy ta có thể tạo ra  $C_{m-k}^0$  ma trận có  $a+k$  số 1,  $C_{m-k}^1$  ma trận có  $a+k+1$  số 1, ...,  $C_{m-k}^{m-k}$  ma trận có  $a+m-k$  số 1. Do

$$C_{m-k}^0 - C_{m-k}^1 + C_{m-k}^2 - \dots + (-1)^{m-k} C_{m-k}^0 = 0$$

nên trong số các ma trận tạo ra từ ma trận  $B$  như trên có số ma trận có chẵn số 1 bằng với số ma trận có lẻ số 1. Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

b) Ta chia tập hợp các chương trình thỏa mãn điều kiện bài toán thành hai loại là  $S_1$  những chương trình phụ thuộc vào học sinh nam 1 và  $S_2$  là những chương trình không phụ thuộc vào học sinh nam 1.

+ Theo a) ta có trong  $S_1$  số chương trình có số tiết mục song ca chẵn bằng số chương trình có số tiết mục song ca lẻ.

+ Ta sẽ chứng minh số chương trình có số tiết mục song ca chẵn và số chương trình có số tiết mục song ca lẻ trong  $S_2$  hơn kém nhau 1, bằng quy nạp theo  $n$ .

Rõ ràng khẳng định đó đúng với  $n=2$ . Giả sử khẳng định đó đúng với  $n-1$ . Không mất tính tổng quát ta coi  $n$  là số chẵn. Gọi  $D_{m \times n}$  là tập hợp tất cả các chương trình thỏa mãn bài toán với  $m$  nữ và  $n$  nam.  $M_{m \times n}$  là tập hợp các ma trận tương ứng với mỗi chương trình trong  $D_{m \times n}$ .

**Nhận xét:** Nếu lấy  $B$  là ma trận trong  $M_{m \times (n-1)}$  và thêm vào  $B$  một cột có ít nhất một số 1 và còn lại bằng 0 ta được ma trận thuộc  $M_{m \times n}$  ứng với một chương trình trong  $S_2$ . Lấy một ma trận  $B$  tùy ý trong  $M_{m \times (n-1)}$ . Bằng cách làm tương tự như a) ta có:

- Nếu  $B$  có chẵn số 1, thì số chương trình có số tiết mục song ca chẵn nhiều hơn chương trình có số tiết mục song ca lẻ 1 chương trình.

- Nếu  $B$  có lẻ số 1 thì số chương trình có số tiết mục song ca lẻ nhiều hơn số chương trình có số tiết mục song ca chẵn 1 chương trình. Mặt khác trong  $M_{m \times (n-1)}$  số ma trận có chẵn số 1 hơn kém số ma trận có lẻ số 1 đúng 1 ma trận. Vậy số chương trình

có số tiết mục song ca chẵn và số chương trình có số tiết mục song ca lẻ trong  $S_2$  hơn kém nhau 1.

**Bài toán 7 (VMO 2018).** Với mỗi số nguyên dương  $n$  và  $d$ , gọi  $S_n(d)$  là tập hợp tất cả các bộ số có thứ tự  $(x_1, x_2, \dots, x_d)$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i)  $x_i \in \{1; 2; \dots; n\}, \forall 1 \leq i \leq d$ .

ii)  $x_{i+1} \neq x_i, \forall 1 \leq i \leq d-1$ .

iii) Không tồn tại các số  $1 \leq i < j < k < l \leq d$  sao cho  $x_i = x_k$  và  $x_j = x_l$ .

a) Tìm số phần tử của  $S_3(5)$ .

b) Chứng minh  $S_n(d) \neq \emptyset$  khi và chỉ khi  $d \leq 2n-1$ .

**Lời giải.** Với mỗi  $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n$  đặt  $a_{ij} = 1$  nếu  $x_i = j$  và  $a_{ij} = 0$  trong những trường hợp còn lại.

Khi đó mỗi phần tử của  $S_n(d)$  là ma trận  $A = (a_{ij})$

cỡ  $d \times n$  thỏa mãn:

- Trên mỗi cột của  $A$  có không quá ba số 1 và không có hai số 1 nằm trên hai hàng cạnh nhau, mỗi hàng của  $A$  có đúng một số 1.

- Không tồn tại  $1 \leq i < m < k < p \leq d$  sao cho  $a_{ij} = a_{ik} = 1$  và  $a_{ml} = a_{pl} = 1, \forall 1 \leq j, l \leq n$ .

Ta đồng nhất mỗi phần tử của  $S_n(d)$  với một phần tử của tập hợp  $M_{d \times n}$  các ma trận  $A$  như trên. Lấy  $A$  tùy ý thuộc  $M_{d \times n}$ . Ta có

**TH1:**  $A$  có một cột gồm ba số 1. Bằng cách bỏ đi hai hàng có số 1 nằm trên cột có ba số 1 ta được một ma trận thuộc  $M_{(d-2) \times n}$ .

**TH 2:**  $A$  có một cột có hai số 1. Bằng cách bỏ đi cột đó và hai hàng có số 1 trên cột đó ta được một ma trận của  $M_{(d-2) \times (n-1)}$ .

a) Để đếm được  $S_3(5)$  có 12 phần tử (là các hoán vị giữa các cột của hai ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Để dễ dàng kiểm tra được  $S_n(d) \neq \emptyset, \forall d \leq 2n-1$  và nếu  $S_n(d) = \emptyset$  thì  $S_n(k) = \emptyset, \forall k > d$ . Vì vậy ta chỉ cần chứng minh  $S_n(2n) = \emptyset$ . (1)

Rõ ràng (1) đúng với  $n=1, n=2$ . Giả sử (1) đúng với  $n > 1$  ta sẽ chứng minh (1) đúng với  $n+1$ . Giả

sử  $S_{n+1}(2n+2) \neq \emptyset$ . Khi đó tồn tại ma trận  $A \in M_{(2n+2) \times (n+1)}$ .

– Nếu  $A$  có một cột có hai số 1 thì bỏ cột và hai hàng có số 1 trên cột đó ta được ma trận thuộc  $M_{2n \times n}$ , suy ra  $S_n(2n) \neq \emptyset$ . Vô lí.

– Nếu  $A$  có một cột toàn số không thì bỏ đi cột toàn số 0 ta được một ma trận thuộc  $M_{(2n+2) \times n}$ , suy ra  $S_n(2n+2) \neq \emptyset$ . Vô lí.

– Nếu  $A$  không có cột nào có hai số 1 và không có cột nào toàn số 0, khi đó các cột của  $A$  hoặc có ba số 1 hoặc một số 1. Giả sử  $A$  có  $k$  cột có ba số 1. Bằng cách làm như trường hợp 1 ta chứng minh được:  $n = 2k - 1$ . Mặt khác bằng quy nạp ta chứng minh được với  $k$  cột mà mỗi cột có ba số 1 thì phải có nhiều hơn  $k$  cột có một số 1. Như vậy  $2k = n + 1 \geq 2k + 1$ , vô lí. Vậy  $S_n(2n) = \emptyset$  hay  $S_n(d) = \emptyset, \forall d > 2n - 1$ .

## BÀI TẬP

1. (IMC 2002) Trong một kì thi toán có 2000 thí sinh tham gia. Đề thi có 6 bài toán. Biết rằng mỗi bài toán được giải bởi ít nhất 120 thí sinh. Chứng minh, có ít nhất hai thí sinh sao cho mỗi bài toán được giải bởi ít nhất một trong hai thí sinh.

2. (Olympic toàn Nga 1996) Có 1600 ủy viên tham gia vào 16000 ủy ban. Biết rằng mỗi ủy ban có đúng 80 ủy viên. Chứng minh rằng tồn tại hai ủy ban mà số ủy viên chung của hai ủy ban đó không ít hơn 4.

3. Gọi  $A_1, A_2, \dots, A_7$  là các tập con của tập hợp  $A = \{1; 2; 3; \dots; 7\}$ , thỏa mãn  $|A_i| \geq 3, \forall i = 1, 2, \dots, 7$  và với mọi  $m, n \in A$  thì có duy nhất  $i$  sao cho  $m, n \in A_i$ . Chứng minh rằng

$$|A_i \cap A_j| = 1, \forall i, j = 1, 2, \dots, 7 \text{ và } i \neq j.$$

4. (Switzerland 2010) Trong một ngôi làng có ít nhất một người và một số hiệp hội. Mỗi người trong làng là thành viên của ít nhất  $k$  hiệp hội và với hai hiệp hội bất kì thì có đúng một thành viên chung. Chứng minh rằng có ít nhất  $k$  hiệp hội có số thành viên như nhau.

5. (Iran 2011) Một trường học có  $n$  sinh viên và một số lớp học để sinh viên có thể tham gia. Mỗi sinh viên có thể tham gia một hoặc một số lớp học. Biết rằng, mỗi lớp học có ít nhất 2 sinh viên và nếu hai lớp học có ít nhất một sinh viên chung thì số sinh viên của mỗi lớp là khác nhau. Chứng minh rằng số lớp học không nhiều hơn  $(n-1)^2$ .

6. Gọi  $A_1, A_2, \dots, A_k$  là các tập con của  $\{1; 2; 3; \dots; n\}$  sao cho  $A_i$  không là tập con của  $A_j$  với mọi  $i \neq j$ .

Chứng minh  $k \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

7. (VMO 2003) Với mỗi số nguyên dương  $n \geq 2$  gọi  $s_n$  là số các hoán vị  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  của tập hợp  $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , mà mỗi hoán vị có tính chất  $1 \leq |a_i - i| \leq 2$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$ . Chứng minh rằng với  $n > 6$  ta có  $1,75s_{n-1} < s_n < 2s_{n-1}$ .

8. (VMO 2016) Người ta trồng hai loại cây trên một miếng đất hình chữ nhật kích thước  $m \times n$  ô vuông (mỗi ô một cây). Một cách trồng được gọi là ấn tượng nếu như:

i) Số lượng cây được trồng của hai loại cây bằng nhau.

ii) Số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi hàng không nhỏ hơn một nửa số ô của hàng đó và số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi cột không nhỏ hơn một nửa số ô của cột đó.

a) Hãy chỉ ra một cách trồng cây ấn tượng khi  $m = n = 2016$ .

b) Chứng minh nếu có một cách trồng ấn tượng thì cả  $m$  và  $n$  đều là bội của 4.

9. (Hà Tĩnh 2017) Một lớp chuyên toán có 35 học sinh. Thầy giáo chủ nhiệm muốn tổ chức một cuộc trải nghiệm gồm 4 chuyến đi thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

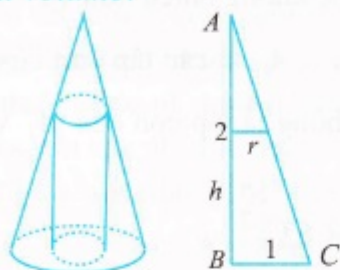
a) Mỗi người trong lớp tham gia ít nhất một chuyến đi.

b) Với mọi  $k \in \{1; 2; 3\}$ , chuyến đi thứ  $k+1$  phải có ít nhất một học sinh tham chuyến đi thứ  $k$  cùng tham gia. Tìm số cách để thầy giáo thực hiện cuộc trải nghiệm đó.

# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

## BÀI SỐ 32

**Problem.** Given a right cone with the height 2 and the radius of the base 1. A right circular cylinder is inscribed in the cone. When does the cylinder have maximal volume?



**Solution.** Let the height of the cylinder be  $h$ . Then the radius of the base of the cylinder will be  $r = 1 - \frac{h}{2}$  (using Thales's theorem, see picture).

Hence the volume of the cylinder is

$$V(h) = h \cdot S_{\text{base}} = h \cdot \pi \left(1 - \frac{h}{2}\right)^2.$$

Since  $h + \left(1 - \frac{h}{2}\right) + \left(1 - \frac{h}{2}\right) = 2 = \text{const}$ , we see that  $V(h)$  obtains its maximal value when

$$h = 1 - \frac{h}{2} \text{ or } h = \frac{2}{3} \text{ (using Cauchy's equality).}$$

**Remark.** We can use derivative test to find the (local) maximal point of the function

$$V(h) = h \cdot \pi \left(1 - \frac{h}{2}\right)^2.$$

### TỪ VỰNG

|                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| <i>Right circular cone:</i>     | khối nón đứng, đáy là hình tròn |
| <i>Right circular cylinder:</i> | khối trụ đứng, đáy là hình tròn |
| <i>Inscribe:</i>                | nội tiếp                        |
| <i>Volume:</i>                  | thể tích                        |
| <i>Derivative:</i>              | đạo hàm                         |
| <i>Local maximal point:</i>     | cực đại địa phương              |



**Bài toán.** Tìm biểu thức tọa độ của phép biến hình  $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'B'C'$  với  $A(1;2)$ ,  $B(2;2)$ ,  $C(1;4)$ ,  $A'(4;3)$ ,  $B'(6;3)$ ,  $C'(4;7)$ .

**Lời giải.** Chúng ta nhận thấy rằng có thể sử dụng phép vị tự tâm  $M$ , tỷ số vị tự bằng 2, trong đó  $M$  là giao điểm của  $AA'$  và  $BB'$  biến tam giác  $ABC$  thành tam giác  $A'B'C'$ . Nhưng do  $M$  khác gốc tọa độ nên không

dễ để tìm biểu thức tọa độ tương ứng. Để tìm được biểu thức tọa độ ở đề bài dễ dàng hơn, ta kết hợp phép vị tự với tâm tại gốc tọa độ và phép tịnh tiến như sau: Phép vị tự tâm tại gốc tọa độ, tỉ số vị tự bằng 2 biến  $\Delta ABC$  thành  $\Delta A''B''C''$  với  $A''(2;4)$ ,  $B''(4;4)$ ,  $C''(2;8)$ . Biểu thức tọa độ của phép vị tự này là

$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$ . Sau đó chúng ta tịnh tiến  $A''B''C''$  thành  $A'B'C'$  với phép tịnh tiến theo vector

$\overrightarrow{B''B'} = (2; -1)$ . Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến này là  $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$ . Do đó biểu thức tọa độ của phép

biến hình biến  $\Delta ABC$  thành  $\Delta A'B'C'$  là  $\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$ . □

► **Nhận xét.** Các bạn sau có bài dịch tương đối tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Hưng Yên:** Đoàn Phú Thành, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Tăng Văn Minh Hùng, 11T1, THPT Đô Lương I, Đô Lương; **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI (Hà Nội)



**BÀI TOÁN 12.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC < BA$ , đường phân giác  $BE$  và đường trung tuyến  $BD$  ( $E, D$  thuộc  $AC$ ). Qua  $C$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BE$  tại  $F$ , cắt  $BD$  tại  $G$ . Chứng minh rằng  $GE \parallel BC$ .

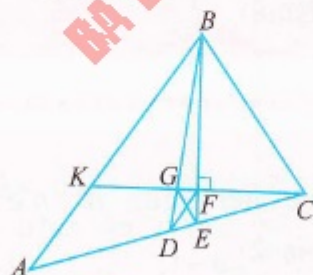
**Phân tích.** Một trong những phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song là sử dụng định lý Thales đảo.

Trong tam giác  $BCD$ :

$$GE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{CE}{ED}.$$

**Định hướng 1.** Sử dụng tính chất đường phân giác trong tam giác và hệ quả của định lý Thales để đánh giá các tỉ số  $\frac{BG}{GD}$  và  $\frac{CE}{ED}$ .

**Cách 1.** Gọi  $K$  là giao điểm của  $CG$  và  $AB$ . Ta có  $\triangle KBC$  có  $BF$  vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên  $\triangle KBC$  cân tại  $B$  suy ra



$$BK = BC \text{ và } FC = FK.$$

Lại có  $D$  là trung điểm  $AC$  nên  $DF$  là đường trung bình của  $\triangle AKC \Rightarrow DF = \frac{1}{2}AK, DF \parallel AK$ . Ta có

$$\frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} \text{ (do } DF \parallel BK) \Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} = \frac{2BK}{AK} \quad (1)$$

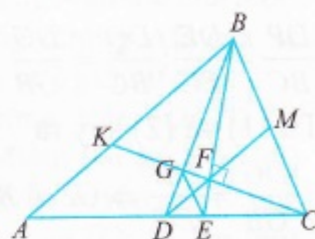
Vì  $BE$  là tia phân giác của  $\widehat{ABC}$  nên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{CE}{AE} &= \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{CE}{AE - CE} = \frac{BC}{BA - BC} \\ &\Rightarrow \frac{CE}{2DE} = \frac{BC}{AK} = \frac{BK}{AK} \Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{2BK}{AK} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow GE \parallel BC$  (theo định lý Thales đảo).

**Định hướng 2.** Sử dụng định lý Ceva.

**Cách 2.** Gọi  $K$  là giao điểm của  $CG$  và  $AB$ . Ta có  $\triangle KBC$  có  $BF$  vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên  $BF$  cũng là trung tuyến suy ra



$FC = FK$ . Lại có  $D$  là trung điểm  $AC$ , nên  $DF$  là đường trung bình của  $\triangle AKC \Rightarrow DF \parallel AK$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $DF$  và  $BC$ .  $\triangle ABC$  có  $DM \parallel AB$  (do  $DF \parallel AK$ ) và  $AD = DC \Rightarrow MB = MC$  (1)

$\triangle ABC$  có  $BE, CG, DM$  đồng quy tại  $F$ , theo định lý Ceva, ta có:  $\frac{BG}{GD} \cdot \frac{DE}{EC} \cdot \frac{CM}{MB} = 1$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{BG}{GD} \cdot \frac{DE}{CE} = 1 \Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow GE \parallel BC$$

(theo định lý Thales đảo).

**Định hướng 3.** Sử dụng hệ quả của định lý Thales để đánh giá các tỉ số  $\frac{BG}{GD}$  và  $\frac{CE}{ED}$ .

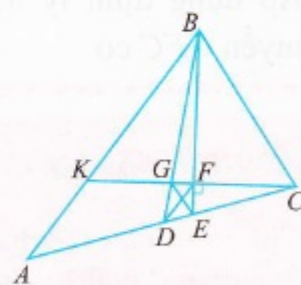
**Cách 3.** Ta có

$$AE = AD + DE$$

$$= CD + DE = CE + 2DE$$

hay  $CE = AE - 2DE$ , suy ra

$$\frac{CE}{DE} = \frac{AE - 2DE}{DE} = \frac{AE}{DE} - 2.$$



Gọi  $K$  là giao điểm của

$CG$  và  $AB$ . Ta có  $\triangle KBC$  có  $BF$  vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên  $BF$  cũng là trung tuyến suy ra  $FC = FK$ . Lại có  $D$  là trung điểm  $AC$  nên  $DF$  là đường trung bình của  $\triangle AKC$ , nên

$$\begin{aligned} DF &\parallel AK, AK = 2.DF \\ \Rightarrow \frac{BG}{GD} &= \frac{BK}{DF} = \frac{2BK}{AK} = \frac{2.(AB - AK)}{AK} \\ &= \frac{2AB}{AK} - 2 = \frac{AB}{DF} - 2 = \frac{AE}{DE} - 2 = \frac{CE}{DE}. \end{aligned}$$

☞ Vậy  $\frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE}$  suy ra  $GE \parallel BC$  (theo định lý Thales đảo).

**Cách 4.** Qua  $D$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $BF$  và  $CF$  theo thứ tự tại  $P$  và  $Q$ . Ta có:

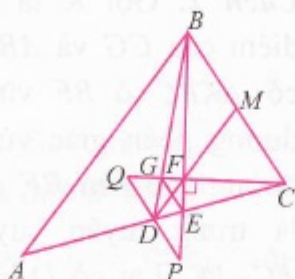
$$\frac{DP}{MB} = \frac{DQ}{MC} \left( = \frac{DF}{FM} \right) \Rightarrow DP = DQ \text{ (do } MC = MB) \quad (1)$$

$$\frac{DP}{BC} = \frac{DE}{EC}; \frac{DQ}{BC} = \frac{DG}{GB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{DG}{GB} = \frac{DE}{EC} \Rightarrow GE \parallel BC$$

(theo định lý Thales đảo).



### ĐẬU CÔNG NHỎ

(GV THCS Cao Xuân Huy, Diên Châu, Nghệ An)

➤ **Nhận xét.** Ngoài 4 cách giải trên của tác giả Đậu Công Nho, Tòa soạn nhận được một cách giải tương tự cách 1 trên của bạn Chu Ngọc Chiến, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, hai cách giải sử dụng định lý Menelaus, sử dụng định lý Ceva tương tự cách 2 của bạn Lê Quốc Bửu, 9B, THCS Mạc Đĩnh Chi, Tây Ninh. Cách giải theo hướng sử dụng định lý Menelaus của bạn Bửu như sau:

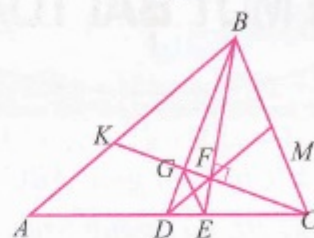
Áp dụng định lý Menelaus cho  $\triangle BDM$  với cát tuyến  $GFC$  có

$$\frac{GB}{GD} \cdot \frac{FD}{FM} \cdot \frac{CM}{CB} = 1 \Rightarrow \frac{GB}{GD} = \frac{2FM}{FD} \quad (1)$$

Tương tự áp dụng định lý Menelaus cho  $\triangle CDM$  với cát tuyến  $EFB$  có:

$$\frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FM} \cdot \frac{BM}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{2FM}{FD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{GB}{GD} = \frac{EC}{ED} \Rightarrow GE \parallel BC$  (theo định lý Thales đảo).



### LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 14 sau đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.6.2018.

**BÀI TOÁN 14.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy  $ABCD$  là hình thang ( $AD \parallel BC$ ) và  $AD = 2BC$ .

Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB$  và  $P$  là giao điểm của  $SC$  với mặt phẳng  $(MND)$ . Tính tỉ số  $\frac{CP}{CS}$ .

### NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bình Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

### PROBLEMS...

(Tiếp theo trang 25)

**Problem T9/491.** Assume that  $a, b, c$  are three non-negative numbers such that  $a + b + c = 3$ . Find the maximum value of the expression

$$P = a\sqrt{b^3 + 1} + b\sqrt{c^3 + 1} + c\sqrt{a^3 + 1}.$$

### TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

**Problem T10/491.** For every  $n \in \mathbb{N}$ , let  $F_n = 2^{2^n} + 1$ . For each  $n \in \mathbb{N}$ , let  $q$  be a prime divisor of  $F_n$ , show that  $2^{n+1} \mid q - 1$ .

Furthermore, if  $n \geq 2$ , show even more that  $2^{n+2} \mid q - 1$ .

**Problem T11/491.** Find all functions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying

$$f(x)f(y) + f(xy) + f(x) + f(y) = f(x+y) + 2xy$$

for all  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Problem T12/491.** Given a convex hexagon  $ABCDEF$  circumscribing a circle  $(O)$ . Assume that  $O$  is the circumcenter of the triangle  $ACE$ . Prove that the circumcircles of the triangles  $OAD$ ,  $OBE$  and  $OCF$  has another common point besides  $O$ .



Trong bài kỳ này là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở Tạp chí TH&TT số 489, T3.2018.

**Bài 20 (USA TST 2003).** *Tim tất cả các bộ ba số nguyên tố  $(p, q, r)$  sao cho*

$$p \mid q^r + 1, q \mid r^p + 1, r \mid p^q + 1.$$

**Lời giải.** Xét hai trường hợp

TH1:  $p, q, r$  khác 2. Khi đó  $p \nmid q^r - 1, q \nmid r^p - 1, r \nmid p^q - 1$ . Vì vậy ta có:

$$\begin{cases} p \mid q^{2r} - 1 \\ q \mid r^{2p} - 1 \\ r \mid p^{2q} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ord}_p(q) \in \{1, 2, 2r\} \mid p-1 \\ \text{ord}_q(r) \in \{1, 2, 2p\} \mid q-1 \\ \text{ord}_r(p) \in \{1, 2, 2q\} \mid r-1 \end{cases}$$

vì  $\text{ord}_p(q) \mid 2r, \text{ord}_p(q) \neq r; \text{ord}_q(r) \mid 2p, \text{ord}_q(r) \neq p;$   
 $\text{ord}_r(p) \mid 2q, \text{ord}_r(p) \neq q$ .

Giả sử  $\text{ord}_p(q), \text{ord}_q(r), \text{ord}_r(p) \in \{1, 2\}$ .

Nếu  $\text{ord}_p(q) = 1 \Rightarrow q \equiv 1 \pmod{p}$ ;

Nếu  $\text{ord}_p(q) = 2 \Rightarrow q^2 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow q \equiv -1 \pmod{p}$ .

Lập luận tương tự cho  $\text{ord}_q(r), \text{ord}_r(p)$ , ta được:

$$\begin{cases} q \equiv \pm 1 \pmod{p} \\ r \equiv \pm 1 \pmod{q} \\ p \equiv \pm 1 \pmod{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q \pm 1 > 2p \\ r \pm 1 > 2q \\ p \pm 1 > 2r \end{cases}$$

do  $q \pm 1 \neq p, r \pm 1 \neq q, p \pm 1 \neq r$  và chúng là lẻ.

Nhưng hệ các BĐT trên không thể xảy ra. Vì vậy không mất tính tổng quát, ta đặt  $\text{ord}_p(q) = 2r$ .

Theo (\*\*) ta có  $2r \mid p-1$ , nhưng do  $p, r$  lẻ nên  $r \mid p-1$ . Tuy nhiên  $r \mid p^q + 1$ , nhưng

$$p^q + 1 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{r}: \text{mâu thuẫn.}$$

TH2: Không mất tính tổng quát giả sử  $p = 2$ . Từ  $p \mid q^r + 1 \Rightarrow q \equiv 1 \pmod{2}$ . Do  $r \mid 2^q + 1 \Rightarrow r$  là số lẻ. Suy ra  $r \nmid 2^{p^q} - 1$  và  $q \nmid r^2 - 1$ . Ta có:

$$\begin{cases} q \mid r^4 - 1 \\ r \mid 2^{2q} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ord}_q(r) \in \{1, 4\} \mid q-1 \\ \text{ord}_r(2) \in \{1, 2, 2q\} \mid r-1 \end{cases} \quad (*)$$

Nếu  $\text{ord}_r(2) = 1$  thì  $2 \equiv 1 \pmod{r}$ : vô lý. Nếu  $\text{ord}_r(2) = 2$  thì  $2^2 \equiv 1 \pmod{r}$  hay  $r = 3$ . Do đó  $q \mid 3^4 - 1 = 80$ . Do  $q \neq 2$  nên thử lại ta thấy  $q = 5$  thỏa mãn (\*). Với  $(p, q, r) = (2, 5, 3)$  ta có:

$$2 \mid 5^3 + 1 = 126, 5 \mid 3^2 + 1 = 10, 3 \mid 2^5 + 1 = 33.$$

Từ đó ta có các nghiệm  $(p, q, r)$  là  $(2, 5, 3), (3, 2, 5), (5, 3, 2)$ .

Xét  $\text{ord}_r(2) = 2q$ , theo (\*\*) ta có  $2q \mid r-1$ . Vì vậy từ  $q \neq 2$  ta có  $r \equiv 1 \pmod{q}$ . Tuy nhiên  $q \mid r^p + 1$ , nhưng  $r^p + 1 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{q}$ , mâu thuẫn.

Vậy các bộ ba số nguyên tố  $(p, q, r)$  cần tìm là:  
 $(2, 5, 3), (3, 2, 5), (5, 3, 2)$ .

**Nhận xét.** 1) Nhắc lại rằng với  $a, m$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì bậc của  $a$  theo modulo  $m$  là số nguyên dương nhỏ nhất  $x$  sao cho  $a^x \equiv 1 \pmod{m}$  và ký hiệu  $\text{ord}_m(a)$ .

Ví dụ:  $\text{ord}_3 5 = 2, \text{ord}_9 2 = 6, \dots$

2) Trong lời giải trên ta đã sử dụng định lý sau:  
 Với các số nguyên dương  $a, m$  nguyên tố cùng nhau thì  $a^n \equiv 1 \pmod{m} \Leftrightarrow \text{ord}_m(a) \mid n$ . (\*\*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.6.2018.

### BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**Bài 22.** Chứng minh rằng với mọi số thực  $a$ , phương trình

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$$

có một nghiệm  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  mà  $x_1, x_2, x_3, x_4$  là các số nguyên đều lớn hơn  $a$ .

NHƯ HOÀNG (Hà Nội)



Trong tạp chí TH&TT Số 490, tháng 04 năm 2018, tại chuyên mục “*Bạn có biết*” có bài viết về một mối liên hệ giữa các đa thức. Theo cảm nhận của tôi thì bài viết rất có ý nghĩa đối với những người yêu thích môn toán. Tôi không phải là người nghiên cứu nhiều về đa thức nhưng định lý Davenport đặc biệt gây ấn tượng mạnh đối với tôi vì nó cho ta một mối quan hệ đẹp về bậc của 2 đa thức nguyên tố cùng nhau.

Theo tôi được biết thì trong rất nhiều tài liệu viết về định lý này, khi chỉ ra dấu bằng, có thể do lịch sử để lại (Davenport đưa ra ví dụ này?), hầu hết các bài viết đều trích dẫn cặp đa thức

$$\begin{cases} f(t) = t^6 + 4t^4 + 10t^2 + 6 \\ g(t) = t^9 + 6t^7 + 21t^5 + 35t^3 + \frac{63}{2}t \end{cases}$$

để làm ví dụ khi bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Tuy nhiên, ví dụ này là khá cồng kềnh và chúng ta có thể thay thế bằng một ví dụ đơn giản hơn.

Nhắc lại Định lý Davenport:

*Giả sử  $f(t)$  và  $g(t)$  là các đa thức nguyên tố cùng nhau có bậc khác 0. Khi đó ta có*

$$\deg(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{2} \deg f + 1.$$



Nhà toán học Anh  
Harold Davenport  
(1907 - 1969)

Nếu chúng ta chọn cặp đa thức  $\begin{cases} f(t) = t^2 + 2 \\ g(t) = t^3 + 3t \end{cases}$

thì khi đó

$$\begin{aligned} f^3 - g^2 &= (t^6 + 6t^4 + 12t^2 + 8) - (t^6 + 6t^4 + 9t^2) \\ &= 3t^2 + 8 \end{aligned}$$

nên

$$\deg(f^3 - g^2) = \frac{1}{2} \deg f + 1 = 2.$$

Ví dụ này là ý kiến chủ quan của riêng tôi nên tôi xin đưa ra để bạn đọc biết và trao đổi.

**PHAN THẾ HẢI**

(GV Cao Đẳng Sư Phạm Bà Rịa – Vũng Tàu)



## GIẢI ĐÁP: KẾT QUẢ NÀO

(Đề đăng trên TH&TT số 487, tháng 1 năm 2018)

**Phân tích.** Tổng của  $n$  số hạng đầu trong cấp số cộng có số hạng đầu tiên  $u_1$  và công sai  $d$  là

$$S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d) = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2u_1 - d}{2}n$$

và là đa thức bậc không quá 2 của biến  $n$ , có số hạng tự do bằng 0. Trong khi đề bài cho  $S_n = 2n^2 - n + 1$  có số hạng tự do bằng 1. Chứng tỏ không có cấp số cộng nào thỏa mãn giả thiết của bài toán. Vậy lời giải của cả ba bạn đều sai.

**Lời giải đúng.** Giả sử tồn tại cấp số cộng  $(u_n)$  có tổng

$n$  số hạng đầu là  $S_n = 2n^2 - n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Ta có

$$u_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 2, u_1 + u_2 = S_2 = 2 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 7,$$

$$u_2 = 7 - u_1 = 7 - 2 = 5, d = u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3.$$

$$\text{Dẫn tới } S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d)$$

$$= \frac{n}{2}(2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 3) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Điều này mâu thuẫn với  $S_n = 2n^2 - n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Vậy không có cấp số cộng nào thỏa mãn giả thiết bài toán, do đó tổng  $u_{10} + u_{11} + \dots + u_{100}$  không tồn tại.

**Nhận xét.** Trong các bài gửi về chỉ có hai bạn phát hiện đúng sai lầm. Tuyên dương hai bạn này là: **Thừa Thiên Huế:** Lê Thị Thu Sương, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

**Bến Tre:** Nguyễn Văn Cảnh, 12A8, THPT An Thới, Mỏ cày Nam, Bến Tre.

KIHI VI

**PHẦN THƯỞNG**  
Được hay không?



Sau khi học xong bài vector trong không gian, thầy giáo cho một bài tập nâng cao cho lớp 11A1 và yêu cầu em nào giải đúng sẽ nhận được một phần thưởng rất đặc biệt từ thầy.

**Bài toán:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành và  $M$  là trung điểm  $SC$ . Mặt phẳng  $(P)$  chứa  $AM$  lần lượt cắt các cạnh  $SB, SD$  tại  $B', D'$  khác  $S$ . Khẳng định sau đúng hay sai?

$$\frac{4}{3} \leq \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \leq \frac{3}{2}.$$

Tiết hình học hôm sau tại lớp 11A1, bạn **Phương Thảo** đã xung phong giải bài toán trên để được nhận thưởng. Dưới đây là lời giải của bạn **Phương Thảo**.

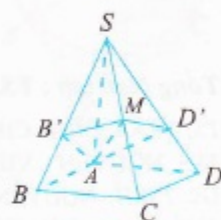
**Lời giải.** Đặt  $\overrightarrow{SB'} = x\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD'} = y\overrightarrow{SD} \quad (0 < x, y \leq 1)$ .

Ta có:  $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$ ,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC},$$

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SA} + x\overrightarrow{SB},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD'} &= \overrightarrow{SD'} - \overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SA} + y\overrightarrow{SD} \\ &= -\overrightarrow{SA} + y(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) \\ &= (y-1)\overrightarrow{SA} - y\overrightarrow{SB} + y\overrightarrow{SC}. \end{aligned}$$



Do  $M \in (P)$  nên tồn tại hai số  $m, n$  sao cho

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= m\overrightarrow{AB'} + n\overrightarrow{AD'} \Leftrightarrow -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} \\ &= (-m + n(y-1))\overrightarrow{SA} + (mx - ny)\overrightarrow{SB} + ny\overrightarrow{SC} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -m + n(y-1) \\ \frac{1}{2} = ny \\ 0 = mx - ny \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2x} \\ n = \frac{1}{2y} \\ -1 = -m + n(y-1) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -1 = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}(y-1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3.$$

Do  $0 < x, y \leq 1$  và  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$ , suy ra

$$y = \frac{x}{3x-1} \text{ với } \frac{1}{3} < x, y \leq 1.$$

$$\text{Do đó: } \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} = x + y = x + \frac{x}{3x-1}$$

$$= \frac{1}{3}(3x-1 + \frac{1}{3x-1}) + \frac{2}{3} \geq \frac{4}{3} \text{ (theo BĐT Cauchy).}$$

Khẳng định  $\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \leq \frac{3}{2}$  là sai, vì khi  $x = \frac{2}{5} > \frac{1}{3}$

$$\text{, ta có } \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} = \frac{12}{5} > \frac{3}{2}.$$

**Theo bạn, bạn Phương Thảo có được nhận thưởng từ thầy giáo không?**

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bình Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)



**BAN CỐ VẤN KHOA HỌC**

**GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG**

**TS. NGUYỄN VĂN VỌNG**

**GS. ĐOÀN QUỲNH**

**PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO**

**CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN**

**Chủ tịch Hội đồng Thành viên**

**NXBGD Việt Nam**

**NGUYỄN ĐỨC THÁI**

**Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam**

**HOÀNG LÊ BÁCH**

**Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập**

**NXBGD Việt Nam**

**PHAN XUÂN THÀNH**

**HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP**

**Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM**

**Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH**

**TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN ĐOÀN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.**

**TRONG SỐ NÀY**

**1 Dành cho Trung học Cơ sở**

**For Lower Secondary School**

**Ngô Văn Điểm** — Điều thú vị từ “giao điểm ba đường phân giác của tam giác, áp dụng trong một số bài tập về đường tròn”.

**3 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Bình Long, Bình Phước, năm học 2017 – 2018.**

**5 Đề thi tuyển sinh lớp 10 trường THPT chuyên Thái Bình năm học 2017-2018.**

**7 HOMC**

**Nguyễn Minh Tuấn, Nguyễn Hữu Điển** – 15<sup>th</sup> Hanoi Open Mathematics Competition, Vietnam 2018.

**11 Thử sức trước kì thi 2018 - Đề số 8.**

**16 Đáp án và hướng dẫn giải đề số 7.**

**20 Lịch sử thế giới**

**Nguyễn Thủy Thanh** – Cuộc khủng hoảng cơ sở Toán học cổ Hy Lạp.

**24 Đề ra kỳ này**

**Problems in This Issue**

**T1/491, ..., T12/491, L1/491, L2/491.**

**26 Giải bài kỳ trước**

**Solutions to Previous Problems**

**33 Bạn có biết**

**Vũ Hoàng Lâm** – Tính đối xứng trong cấu trúc của thơ Đường luật.

**36 Phương pháp giải toán**

**Lê Kim Chung** – Sử dụng ma trận liên kết trong các bài toán tổ hợp.

**42 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 32.**

**Bài dịch số 29** - Tiếng Anh qua các bài toán.

**43 Nhiều cách giải cho một bài toán**

**45 Du lịch thế giới qua các bài toán hay**

**46 Bạn đọc trao đổi**

**47 Sai lầm ở đâu?**

**Nguyễn Anh Vũ** – Phần thưởng được hay không?

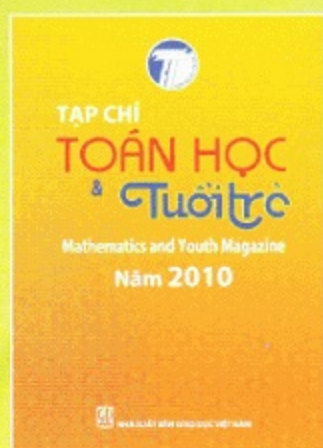


# TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

*Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc*

*Bộ đóng tập*

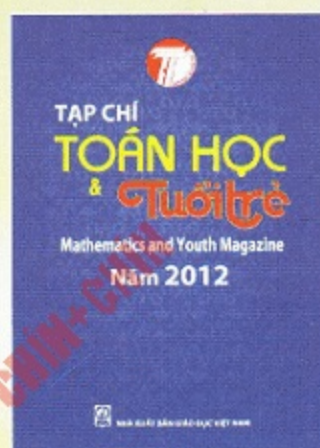
## TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



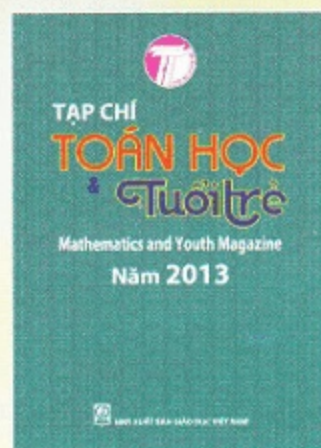
Khổ 19 x 26,5  
Giá bìa: 99.000 đồng



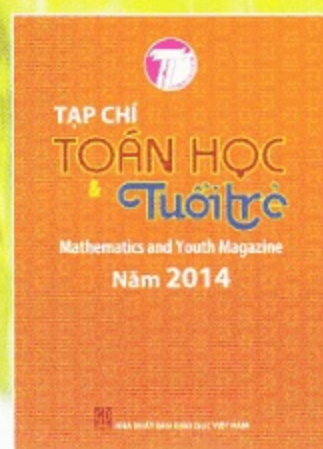
Khổ 19 x 26,5  
Giá bìa: 126.000 đồng



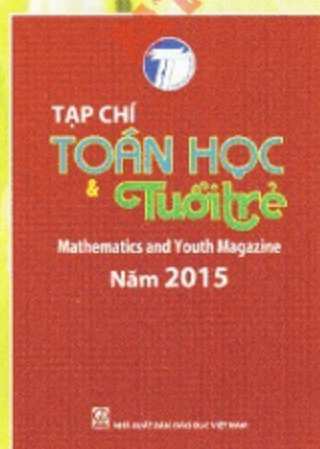
Khổ 19 x 26,5  
Giá bìa: 152.000 đồng



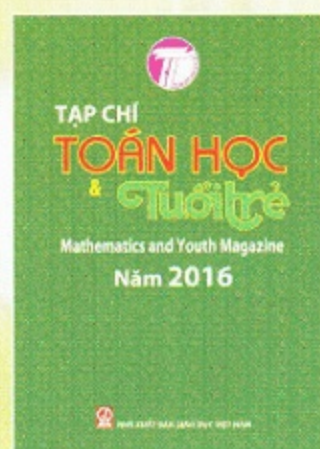
Khổ 19 x 26,5  
Giá bìa: 175.000 đồng



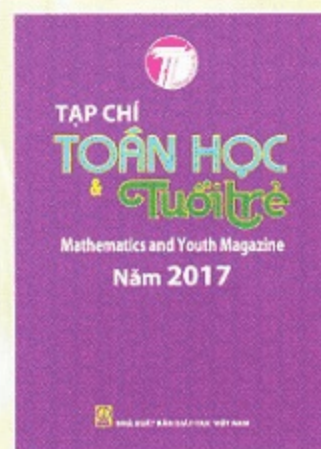
Khổ 19 x 26,5  
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5  
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5  
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5  
Giá bìa: 199.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

• Điện thoại biên tập: (024).35121607

• Điện thoại Fax- phát hành: (024). 35121606

• Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com



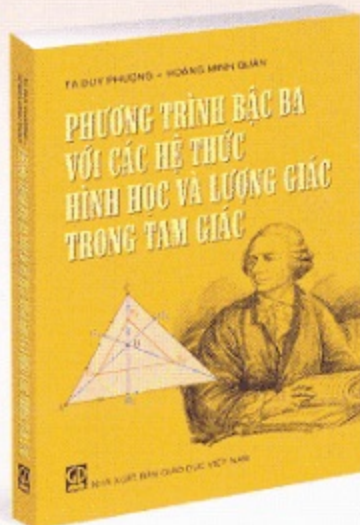
# NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

*Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới*

## PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

của tác giả PGS.TS. TẠ DUY PHƯƠNG và Thầy giáo HOÀNG MINH QUÂN

Sách dày 448 trang, khổ 16x24cm, giá bìa 80.000 đồng.



**N**ội dung cơ bản của cuốn sách dựa trên kết quả: Các yếu tố của tam giác (ba cạnh, ba đường cao, bán kính của ba đường tròn bàng tiếp, các hàm số lượng giác của ba góc,...) có thể được coi là ba nghiệm của một phương trình bậc ba với các hệ số phụ thuộc vào ba yếu tố cơ bản là  $p, R, r$ ; trong đó  $p$  là nửa chu vi, còn  $R$  và  $r$  tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Từ đó, theo tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và vận dụng các bất đẳng thức quen thuộc, sách trình bày khoảng 600 hệ thức có liên quan đến các yếu tố hình học và lượng giác trong tam giác. Qua cuốn sách chúng ta sẽ thấy mối quan hệ hữu cơ giữa Đại số (phương

trình và hàm số bậc ba) với Hình học và Lượng giác (các hệ thức trong tam giác). Đây chính là điểm mới và khác biệt của cuốn sách này so với các sách đã có về hệ thức trong tam giác. Cuốn sách gồm năm chương.

**Chương 1** tập hợp những kiến thức cơ bản về tam giác và các công thức lượng giác, các bất đẳng thức đại số quan trọng cần thiết cho các chương sau.

**Chương 2** trình bày các tính chất của hàm số và phương trình bậc ba, trong đó đặc biệt lưu ý đến tính chất nghiệm của phương trình bậc ba.

**Chương 3** và **Chương 4** chỉ ra rằng, các yếu tố hình học và lượng giác của tam giác (cạnh, đường cao, bán kính đường tròn bàng tiếp, sin, cosin của các góc,...) chính là nghiệm của các phương trình bậc ba với các hệ số chứa ba yếu tố cơ bản của tam giác (tức là ba yếu tố  $p, R, r$ ). Và như là các hệ quả, nhờ sử dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và các bất đẳng thức đại số như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunyakovsky, bất đẳng thức Schwarz, ... các tác giả đã đưa ra và chứng minh khoảng 600 hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác, trong đó có nhiều hệ thức là mới hoặc chỉ mới gặp trên các tạp chí và còn ít được biết đến trong các sách hiện nay.

Ngoài các bất đẳng thức mới hoặc còn ít được phổ biến, nhiều bài thi đại học, thi học sinh giỏi, thi Olympic của các nước, nhiều hệ thức hình học và lượng giác quen biết trong tam giác cũng được chứng minh lại trong Chương 3 và Chương 4 theo cách mới, dựa trên tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, mà ít dùng đến cách biến đổi lượng giác hoặc những cách chứng minh thông thường.

**Chương 5** (Phụ lục) tập hợp một số mục dưới dạng các chuyên đề liên quan đến phương pháp phương trình bậc ba chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Cũng cần lưu ý thêm rằng, từ các hệ thức nêu trong cuốn sách này, ta có thể suy ra khá nhiều hệ thức khác nữa, chưa được khai thác trong cuốn sách. Đây là một gợi ý tốt để bạn đọc có thể tìm cách chứng minh mới cho các hệ thức cũ hoặc tìm ra các hệ thức mới. Ngoài ra, cách chứng minh mới hoặc cải biên những hệ thức đã có còn có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán, các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

**TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

● Điện thoại biên tập: 024.35121607

● Điện thoại Fax - phát hành: 024.35121606

● Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035

Chỉ số: 12884

Mã số: 8BT05M8

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010

In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP

In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2018

Giá: 15.000 đồng

Mười lăm nghìn đồng