



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

1 2017
Số 475

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

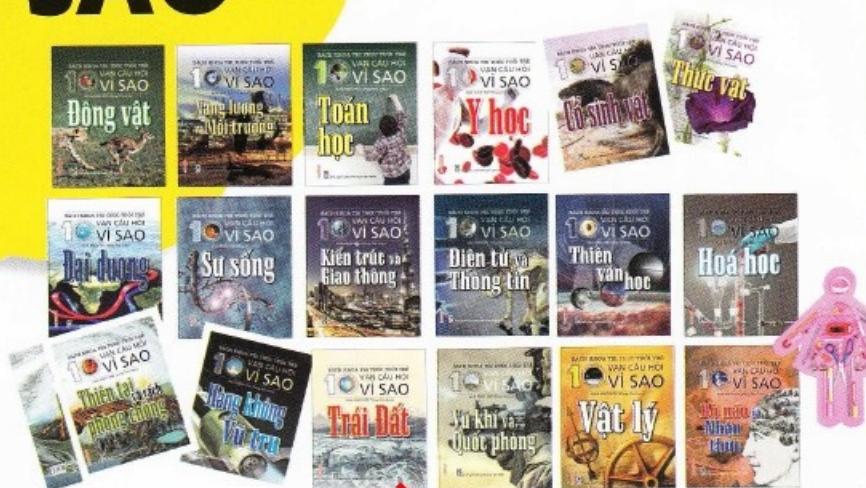
Happy
New Year

2017



Chúc Mừng Năm Mới

BÁCH KHOA TRI THỨC TUỔI TRẺ 10 VẠN CÂU HỎI VÌ SAO



Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trân trọng giới thiệu tới đông đảo bạn đọc cả nước

- Bộ sách Bách khoa tri thức tuổi trẻ - Mười vạn câu hỏi vì sao là bộ sách dịch hoàn toàn mới, ấn bản thứ 6 của bộ sách gốc "10 vạn câu hỏi vì sao" được ra đời lần đầu tiên năm 1961.
- Bộ sách ra đời nhằm nâng cao trình độ khoa học của thanh thiếu niên, đồng thời cập nhật những xu hướng khoa học, công nghệ mới nhất hiện nay trên thế giới.
- Bộ sách gồm 18 lĩnh vực, toàn bộ là các câu hỏi - lời đáp đa dạng, sâu sắc về thế giới tự nhiên, về những khám phá và sáng tạo của con người nhằm mang lại cuộc sống phát triển văn minh hơn, đặc biệt là các vấn đề có liên hệ mật thiết đến cuộc sống, khả năng ứng dụng kiến thức cao mà thanh thiếu niên quan tâm tìm hiểu.
- Sử dụng phương pháp trình bày mới mẻ, nhiều hình minh họa, có các ô chú giải hoặc mở rộng hiểu biết về danh nhân, công nghệ mới hoặc các trào lưu mới trong cùng vấn đề.
- Bộ sách giúp phát triển tư duy, thúc đẩy tinh thần khám phá, tìm hiểu khoa học.
- Sách dày 200 trang/cuốn, khổ 21 x 26,5 cm, giá 180.000đ/cuốn.

Bạn đọc có thể mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

- Tại TP. Hà Nội : 45 Phố Vọng ; 187, 187C Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 25 Hàn Thuyên ; 51 Lò Đúc ; 45 Hàng Chuối ; ngõ 385 Hoàng Quốc Việt ; 17T2 - 17T3 Trung Hoà, Nhân Chính ; Toà nhà HESCO Văn Quán - Hà Đông.
- Tại TP. Đà Nẵng : 78 Pasteur ; 145 Lê Lợi ; 223 Lê Đình Lý.
- Tại TP. Hồ Chí Minh : 261C Lê Quang Định, quận Bình Thạnh ; 231 Nguyễn Văn Cừ, quận 5 ; 116 Đinh Tiên Hoàng, phường 1, quận Bình Thạnh.
- Tại TP. Cần Thơ : 162D Đường 3 tháng 2, phường Xuân Khánh, quận Ninh Kiều.
- Tại Website bán hàng trực tuyến : www.sach24.vn

Website: www.nxbgd.vn
www.heid.vn
www.sachgiaoduconline.net
Facebook://SiêuThịSách NXBGDVN



TRUNG HỌC CƠ SỞ

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHIA HẾT

NGUYỄN THỊ NHUNG

(GV Toán THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh)

ngoài những phương trình có quy tắc giải như phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai, ... thì phương trình nghiệm nguyên thường không có quy tắc giải tổng quát. Mỗi bài toán, với điều kiện riêng của nó đòi hỏi phải tìm ra cách giải riêng phù hợp. Có rất nhiều phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên, trong bài viết này tôi giới thiệu một số ví dụ minh họa cho một phương pháp giải thường dùng đó là phương pháp sử dụng tính chất chia hết trên tập hợp số nguyên.

1. SỬ DỤNG TÍNH CHẴN, LẺ

Thí dụ 1. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình:* $x^2 - 2y^2 = 5$ (1)

Lời giải. Vì x, y nguyên nên từ phương trình (1) suy ra x là số lẻ. Thay $x = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) vào (1) ta được $4k^2 + 4k + 1 - 2y^2 = 5$

$$\Leftrightarrow 2(k^2 + k - 1) = y^2 \Rightarrow y \text{ là số chẵn.}$$

Đặt $y = 2t$ ($t \in \mathbb{Z}$) ta có $2(k^2 + k - 1) = 4t^2$

$$\Leftrightarrow k^2 + k - 1 = 2t^2 \Leftrightarrow k(k + 1) = 2t^2 + 1 (*)$$

Vì $k(k + 1)$ là số chẵn mà $2t^2 + 1$ là số lẻ nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy PT (1) vô nghiệm.

Thí dụ 2. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + x^2 + x + y) = 105 \quad (2)$$

(Trích đề thi HSG lớp 9 TP. Hà Tĩnh, năm học 2006 - 2007)

Nhận xét. Ở bài này ta thấy vế trái là tích của hai số nguyên mà vế phải là số lẻ nên nó phải là tích của hai số nguyên lẻ nên ta có thể sử dụng tính chẵn lẻ để giải như sau:

Lời giải. Vì 105 là số lẻ nên $2x + 5y + 1$, $2^{|x|} + x^2 + x + y$ là các số lẻ. Suy ra y là số chẵn,

mà $x^2 + x = x(x + 1)$ là số chẵn nên $2^{|x|}$ là số lẻ $\Leftrightarrow x = 0$. Thay $x = 0$ vào (2) ta được $(5y + 1)(y + 1) = 105 \Leftrightarrow 5y^2 + 6y - 104 = 0 \Leftrightarrow y = 4$ (vì y là số chẵn). Do đó $y = 4$. Vậy PT có nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 4)$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$|19x + 5y| + 1975 = |19y + 5x| + 2016^x \quad (3)$$

Lời giải. Biến đổi phương trình (3) ta được: $1975 - 2016^x = (|19y + 5x| + 19y + 5x) - (|19x + 5y| + 19x + 5y) + 14(x - y)$.

Vì $|a| + a$ là số chẵn với mọi giá trị nguyên của a nên vế phải là số chẵn do đó $1975 - 2016^x$ phải là số chẵn $\Rightarrow 2016^x$ là số lẻ $\Rightarrow x = 0$.

Thay $x = 0$ vào phương trình (3) ta được

$$|5y| + 1975 = |19y| + 1 \Leftrightarrow 14|y| = 1974$$

$$\Leftrightarrow y = 141 \text{ hoặc } y = -141.$$

Vậy PT có hai nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 141)$ và $(0; -141)$.

Thí dụ 4. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$x + x^2 + x^3 = 4y^2 + 4 \quad (4)$$

Lời giải. Ta có: $(4) \Leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 = 4y^2 + 4y + 1$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 1) = (2y + 1)^2 \quad (*)$$

Dễ thấy $(2y + 1)^2$ lẻ $\Rightarrow x + 1$ và $x^2 + 1$ là hai số lẻ. Giả sử $(x + 1, x^2 + 1) = d \Rightarrow d$ lẻ.

Mặt khác $x + 1 : d \Rightarrow 1 - x^2 : d$, kết hợp với $x^2 + 1 : d$ ta có $1 - x^2 + 1 + x^2 : d \Rightarrow 2 : d \Rightarrow d = 1$ (vì d lẻ).

Vì $(x + 1)(x^2 + 1)$ là số chính phương (theo (*)), và $(x + 1, x^2 + 1) = 1$ nên $x + 1$ và $x^2 + 1$ đều là số chính phương. Dễ thấy x^2 và $x^2 + 1$ là 2 số tự nhiên liên tiếp mà đều là số chính phương nên

$x = 0$. Khi đó theo (4) thì $y = 0$ hoặc $y = -1$.

Nghiệm của PT là: $(0; 0); (0; -1)$.

Nhận xét. Ta đã sử dụng tính chẵn lẻ, tính chất chia hết và tính chất của số chính phương để giải bài toán đã cho.

Thí dụ 5. Chứng tỏ phương trình:

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + k^4 = 2015$$

không có nghiệm nguyên.

Lời giải. Nếu x là số chẵn thì $x^4 : 16$.

Nếu x là số lẻ thì $x^2 : 8$ dư 1 nên

$$x^4 = (8k + 1)^2 : 16 \text{ dư } 1.$$

Như vậy mỗi số x^4, y^4, z^4, t^4 chia cho 16 dư 1 hoặc 0 nên $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + k^4$ chia cho 16 có số dư không lớn hơn 5 còn về phải 2015 chia cho 16 dư 15. Vậy PT không có nghiệm nguyên.

2. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHIA HẾT

Thí dụ 6. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên $x; y; z$ thỏa mãn

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z + 2017 \quad (6)$$

Lời giải. (6) $\Leftrightarrow (x^3 - x) + (y^3 - y) + (z^3 - z) = 2017$. Vì $x^3 - x = (x - 1)x(x + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6, tương tự $y^3 - y; z^3 - z$ cũng chia hết cho 6 nên vế phải chia hết cho 6 mà 2017 không chia hết cho 6 nên PT (6) vô nghiệm.

Vậy không tồn tại các số nguyên $x; y; z$ thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z + 2017$.

Thí dụ 7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y - 5x^2 - xy - x + y - 1 = 0$ (7).

(Trích đề thi HSG lớp 9 huyện Can Lộc, Hà Tĩnh)

Nhận xét. Đây là phương trình 2 ẩn mà bậc đối với y là bậc nhất nên ta dễ dàng biểu thị y theo x và ta có cách giải như sau:

Lời giải. (7) $\Leftrightarrow y = \frac{5x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ (do $x^2 - x + 1 > 0$)

$$\Rightarrow y = 5 + \frac{6x - 4}{x^2 - x + 1}.$$

Ta có $y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (6x - 4) : (x^2 - x + 1)$

$$\Leftrightarrow 2(3x - 2) : (x^2 - x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 : (x^2 - x + 1) \\ 3x - 2 : (x^2 - x + 1) \end{cases}$$

(vì $x^2 - x + 1 = x(x - 1) + 1$ là số lẻ).

• TH1: $2 : (x^2 - x + 1)$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = \pm 1 \text{ (vì } x^2 - x + 1 \text{ lẻ)}$$

$$\Leftrightarrow x = 0; x = 1 \text{ (thỏa mãn } x \text{ nguyên).}$$

+ Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$.

+ Với $x = 1 \Rightarrow y = 7$.

• TH2: $(3x - 2) : (x^2 - x + 1)$ (*)

$$\Rightarrow x(3x - 2) : (x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow (3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow (3x^2 - 3x + 3 + x - 3) : (x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow (x - 3) : (x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow (3x - 9) : (x^2 - x + 1) \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta được $7 : (x^2 - x + 1)$

$\Rightarrow x^2 - x + 1$ bằng một trong các giá trị $-7; 7;$

$1; 7$. Từ đây ta được các nghiệm: $(3; 7), (0; 1), (1; 7)$. Thử lại ta thấy PT (7) có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(3; 7), (0; 1), (1; 7)$.

Thí dụ 8. Tồn tại hay không số nguyên n thỏa mãn $n^3 + 2015n = 2014^{2016} + 1$?

Lời giải. Giả sử tồn tại số nguyên n thỏa mãn phương trình $n^3 + 2015n = 2014^{2016} + 1$, suy ra:

$$n^3 - n + 2016n = 2014^{2016} + 1$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)n(n + 1) + 2016n = 2014^{2016} + 1.$$

Do $(n - 1)n(n + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3 và $2016 : 3$ nên

$$n^3 - n + 2016n : 3 \text{ hay } n^3 + 2015n : 3.$$

Mặt khác 2014 chia 3 dư 1 nên 2014^{2016} chia 3 dư 1 $\Rightarrow 2014^{2016} + 1$ chia 3 dư 2.

Từ đó ta thấy điều mâu thuẫn. Vậy không tồn tại số nguyên n thỏa mãn PT

$$n^3 + 2015n = 2014^{2016} + 1.$$

Thí dụ 9. Tồn tại hay không hai số nguyên dương a và b thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2013$?

Lời giải. Giả sử tồn tại hai số nguyên dương a và b thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2013$.

Ta có $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

Vì $a^3 + b^3 = 2013 \div 3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \div 3$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 \div 3 \Rightarrow a+b \div 3 \Rightarrow (a+b)^3 \div 9$$

$$\Rightarrow 2013 = a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \div 9 \text{ (vô lý).}$$

Vậy không tồn tại hai số nguyên dương a và b thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2013$.

Thí dụ 10. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2(x-y) = 5(y-1) \quad (10)$$

Lời giải. Ta có (10) $\Leftrightarrow x^2(x-y) = 5(y-x) + 5(x-1) \Leftrightarrow (x^2+5)(x-y) = 5(x-1)$.

Suy ra $5(x-1) \div (x^2+5) \Rightarrow 5(x^2+5) - 5x(x-1) - 5(x-1) \div (x^2+5)$ hay $30 \div (x^2+5)$

$\Rightarrow (x^2+5) \in \{5; 6; 10; 15; 30\}$ và x là số nguyên

$\Rightarrow x \in \{0; \pm 1; \pm 5\}$. Thử lại ta được nghiệm nguyên của PT là $(0; 1); (1; 1); (-5; -4)$.

Thí dụ 11. Chứng minh phương trình

$$x^2 - 2^y = 2015 \quad (11)$$

không có nghiệm nguyên.

Lời giải. (11) $\Leftrightarrow x^2 = 2015 + 2^y$.

Ta sẽ chứng minh $A = 2015 + 2^y$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên y . Thật vậy thay y bằng 0; 1; 2 thì A lần lượt nhận các giá trị là 2016; 2017; 2019 đều không phải là số chính phương.

Với $y \geq 3$ thì 2^y chia hết cho 8, còn 2015 chia 8 dư 7 nên A chia 8 dư 7 mà số chính phương lẻ chia 8 chỉ có thể dư 1 do đó A không phải là số chính phương. Vậy PT (11) không có nghiệm nguyên.

Thí dụ 12. Tìm các số nguyên dương a, b sao cho

$$\frac{4}{a} + \sqrt[3]{4-b} = \sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b} + \sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b} \quad (12)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt[3]{2+\sqrt{b}} = x; \sqrt[3]{2-\sqrt{b}} = y$.

Nhận xét. Vì $b > 0$ nên $x > 0$. Ta có

$$xy = \sqrt[3]{2+\sqrt{b}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{b}} = \sqrt[3]{4-b}; x^3 + y^3 = 4.$$

Do đó phương trình (12) trở thành:

$$\frac{x^3+y^3}{a} + xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{x^3+y^3}{a} = x^2 + y^2 - xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{a} = x^2 + y^2 - xy$$

$$\text{mà } x^2 + y^2 - xy = \frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 > 0 \text{ suy ra}$$

$$x+y=a \Rightarrow \sqrt[3]{2+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{b}} = a \quad (*)$$

$$\Rightarrow 4 + 3\sqrt[3]{4-b} \cdot a = a^3 \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow 4-b = \left(\frac{a^3-4}{3a}\right)^3.$$

Vì b là số nguyên nên $a^3 - 4 \div 3a \Rightarrow a^3 - 4 \div a \Rightarrow 4 \div a \Rightarrow a \in \{1; 2; 4\}$.

- Với $a = 1 \Rightarrow b = 5$.

- Với $a = 2$ hoặc $a = 4$ thì b không phải là số nguyên dương.

Thử lại: Với $a = 1; b = 5$ ta có (**) đúng tức là

$$x^3 + y^3 + 3xya = a^3 \Leftrightarrow a^3 - x^3 - y^3 - 3xya = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-x-y)[(a+x)^2 + (a+y)^2 + (x-y)^2] = 0.$$

Do $x > 0; a > 0$ nên $x+a > 0 \Rightarrow (a+x)^2 + (a+y)^2 + (x-y)^2 > 0 \Rightarrow a-x-y = 0$ hay $a = x+y$, tức là (1) đúng. Vậy $(a; b) = (1; 5)$ là cặp số nguyên dương duy nhất thỏa mãn PT (12).

Thí dụ 13. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn

$$361(n^3 + 5n + 1) = 85(n^4 + 6n^2 + n + 5) \quad (13)$$

$$\text{Lời giải. Ta có (13) } \Leftrightarrow \frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5} = \frac{85}{361}.$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5}$ là phân số tối giản với mọi giá trị $n \in \mathbb{N}$.

Thật vậy, đặt $d = (n^3 + 5n + 1; n^4 + 6n^2 + n + 5)$.

Suy ra $n^4 + 6n^2 + n + 5 - n(n^3 + 5n + 1) \div d$ hay $n^2 + 5 \div d$. Từ đó $(n^3 + 5n + 1) - n(n^2 + 5) \div d$ hay

$1:d \Rightarrow d = 1$. Vậy phân số $\frac{n^3+5n+1}{n^4+6n^2+n+5}$ là phân số tối giản.

Mặt khác phân số $\frac{85}{361}$ cũng là phân số tối giản mà dạng tối giản của một phân số là duy nhất nên ta có
$$\begin{cases} n^3+5n+1=85 \\ n^4+6n^2+n+5=361 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (n^4+6n^2+n+5)-n(n^3+5n+1)=361-85n \\ \Leftrightarrow n^2+85n-356=0 \Leftrightarrow (n-4)(n+89)=0.$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n = 4$. Vậy số tự nhiên cần tìm là $n = 4$.

Thí dụ 14. Tìm tất cả các số nguyên dương m, n thỏa mãn $3^m = n^2 + 2n - 8$ (14)

Lời giải. Ta có (14) $\Leftrightarrow 3^m = (n+4)(n-2)$.

Đặt $n+4 = 3^x$; $n-2 = 3^y$ với x, y là số tự nhiên và $x+y=m$, khi đó $3^x - 3^y = 6$ hay $3^y(3^{x-y} - 1) = 6$.

Vì 3^y chỉ có ước là lũy thừa của 3; $3^{x-y} - 1 \not\equiv 3$ và $6 = 3 \cdot 2$ nên $3^y = 3$ và $3^{x-y} - 1 = 2$ hay $y = 1$ và $x = 2$.

Từ đó $m = x + y = 3$ và $n = 3^y + 2 = 5$.

Thí dụ 15. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2 - y! = 2015$ (15)

Lời giải. Nếu $y > 5$ thì $y! : 9 \Rightarrow y! + 2015$ chia 9 dư 8 mà x^2 chia 9 chỉ có thể nhận các số dư là 0; 1; 4; 7 nên trong trường hợp này không tồn tại nghiệm.

Xét y lần lượt bằng 0; 1; 2; 3; 4; 5 đều không có giá trị x thỏa mãn.

Vậy phương trình (15) vô nghiệm.

Thí dụ 16. Tìm tất cả các số tự nhiên $m; n$ để $P = 3^{3m^2+6n-61} + 4$ là số nguyên tố.

(Trích đề thi HSG TP. Hà Tĩnh, năm học 2015-2016)

Nhận xét. Để tìm các số tự nhiên m, n sao cho P là số nguyên tố thì ta có thể chứng minh P chia hết cho một số nguyên tố n nào đó và khi đó $P = n$.

Lời giải. Đặt $3m^2 + 6n - 61 = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$). Ta có $P = 3^{3k+2} + 4 = 9 \cdot 27^k + 4$.

Vì $27 \equiv 1 \pmod{13}$ nên $27^k \equiv 1 \pmod{13}$

$$\Rightarrow 9 \cdot 27^k \equiv 9 \pmod{13} \Rightarrow 9 \cdot 27^k + 4 \equiv 13 \pmod{13}$$

hay $P \equiv 13$, mà P là số nguyên tố nên $P = 13$, điều này xảy ra khi và chỉ khi $k = 0$.

$$\text{Suy ra } 3m^2 + 6n - 61 = 2 \Leftrightarrow m^2 + 2n = 21.$$

Vì $m; n$ là các số tự nhiên nên chỉ có 2 cặp số $(m; n)$ thỏa mãn là $(1; 10)$ và $(3; 6)$.

Thí dụ 17. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^{11} + y^{11} = 11z$ (17)

Lời giải. (17) có nghiệm nguyên khi $x^{11} + y^{11} \equiv 11$.

Vì 11 là số nguyên tố, theo định lý nhỏ Fermat ta có: $x^{11} - x \equiv 11$ và $y^{11} - y \equiv 11$. Ta viết (17) dưới dạng: $(x^{11} - x) + (y^{11} - y) + (x + y) = 11z$. Suy ra $x + y \equiv 11$. Đặt $x + y = 11k$; $x = t$ ($k, t \in \mathbb{Z}$). Ta có công thức nghiệm: $x = t$; $y = 11k - t$ và $[t^{11} + (11k - t)^{11}] \equiv 11$.

Trên đây là một số ví dụ minh họa cho việc giải phương trình nghiệm nguyên bằng cách sử dụng tính chia hết. Chúng ta thấy rằng bài toán giải phương trình nghiệm nguyên là một vấn đề không đơn giản bởi có nhiều cách giải, vì vậy việc nhận dạng và chọn được phương pháp phù hợp là quan trọng nhất. Sau đây là một số bài tập tự luyện:

1. Chứng tỏ rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên

a) $2x^2 + y^2 = 1999$.

b) $7x^2 - 5y^2 = 3$.

c) $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 4004$.

2. Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $17x^2 + 26y^2 = 846$.

b) $3x^2 - 3xy = 7x - y - 21$.

c) $x^3 + 3367 = 2^y$.

d) $2^x - 3^y = 7$.

e) $x! + y! = 10z + 9$.

f) $|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$.

g) $x^3 + y^3 + z^4 = 2003$.

3. Tồn tại hay không 4 số nguyên liên tiếp a, b, c, d thỏa mãn $a^3 + b^2 + c + d = 491$.

4. Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên. Biết rằng $f(1), f(2) = 45$. Chứng tỏ đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH VINH PHÚC NĂM HỌC 2015 - 2016

(Đề thi đăng trên TH&TT số 474, tháng 12 năm 2016)

Câu 1. a) ĐK: $x \geq 0$ và $x \neq 4$. Ta rút gọn được:

$$A = \frac{2}{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)}.$$

b) Nếu $x \in \mathbb{N}$ mà x không phải số chính phương thì $(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3) = (6-x) - \sqrt{x}$ là số vô tỉ $\Rightarrow A \notin \mathbb{Z}$. Do đó để $A \in \mathbb{Z}$ thì x là số chính phương. Khi đó $(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3) \in \mathbb{Z}$ nên $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3) \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\} \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Vậy không tồn tại x nguyên để A nguyên.

Câu 2. a) PT đã cho tương đương với

$$(x^2 + 7x + 6)(x^2 - 5x + 6) = 45x^2.$$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của PT nên PT trên tương đương với:

$$\left(x + \frac{6}{x} - 5\right) \left(x + \frac{6}{x} + 7\right) = 45.$$

Đặt $t = x + \frac{6}{x} + 1$, ta được: $t^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 9$.

PT có 4 nghiệm: $x = 4 \pm \sqrt{10}$; $x = -5 \pm \sqrt{19}$.

b) $x(x^2 + x + 1) = 4^y - 1 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 1) = 4^y$.

Do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x, y \geq 0$.

Nếu $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0;0)$ là nghiệm của PT.

Nếu $x > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow x+1$ chẵn, đặt $x+1 = 2k+1$, $k \geq 0$. Khi đó $(k+1)(2k^2 + 2k + 1) = 4^{y-1}$.

Do $2k^2 + 2k + 1$ là số lẻ $\Rightarrow k=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1$.

Suy ra $(1;1)$ là nghiệm của PT.

PT đã cho có nghiệm $(x; y) = (0;0); (x; y) = (1;1)$.

Câu 3. Do $3x+2y=1$ suy ra x, y trái dấu.

$$3x+2y=1 \Leftrightarrow y = -x + \frac{1-x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{2} = t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1-2t; y = 3t-1.$$

Khi đó $H = t^2 - 3t + |t| - 1$.

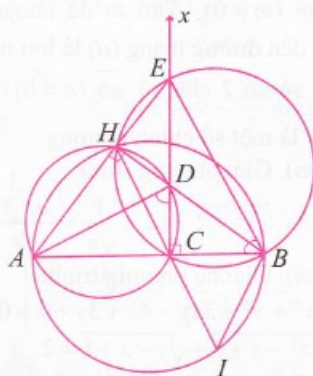
Nếu $t \geq 0 \Rightarrow H = (t-1)^2 - 2 \geq -2$, đẳng thức xảy ra khi $t=1$.

Nếu $t < 0 \Rightarrow H = t^2 - 4t - 1 > -1 > -2$.

Vậy, $\min H = -2$ khi $t=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Câu 4. (h.1) a) Từ giả thiết, có $CE > CD$.

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3}; \widehat{DCA} = \widehat{BCE} = 90^\circ$$



Hình 1

suy ra hai tam giác ADC, EBC đồng dạng

$$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{EBC} \quad (1)$$

Do tứ giác $AHDC$ nội tiếp, suy ra

$$\widehat{AHC} = \widehat{ADC} \quad (2)$$

Do tứ giác $BCHE$ nội tiếp, suy ra

$$\widehat{EBC} + \widehat{CHE} = 180^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\widehat{AHC} + \widehat{CHE} = 180^\circ \Rightarrow$ đpcm.

b) Ta có:

$$\tan \widehat{ADC} = \frac{AC}{CD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ADC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{EBC} = 60^\circ.$$

Nếu $AD \perp HC$ thì $\widehat{ACH} = \widehat{ADC} = 60^\circ$. Lại có

tứ giác $BCHE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{HCA} = 60^\circ$.

Suy ra $\triangle ABE$ đều $\Rightarrow C$ là trung điểm của AB .

c) Do $\widehat{AHB} = 90^\circ \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính AB cố định. Kéo dài HC cắt đường tròn đường kính AB tại điểm thứ hai I (I khác H).

Suy ra $\widehat{AHI} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABI} = 60^\circ \Rightarrow I$ là điểm cố định.

Câu 5. Đặt $x+y=2a; y+z=2b; z+x=2c$

$$\Rightarrow a, b, c \geq 0; a+b+c=2.$$

BĐT trở thành: $a+b \geq 4abc$.

$$\text{Ta có: } 2 = a+b+c \geq 2\sqrt{(a+b)c}$$

$$(\text{đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a+b=c) \Rightarrow 1 \geq (a+b)c$$

$$\Rightarrow a+b \geq (a+b)^2 c \geq 4abc.$$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH HƯNG YÊN

NĂM HỌC 2015 - 2016

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (2 điểm). Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $A = \sqrt{x^3 - 3x^2 - 3x + 2016}$.

Câu 2 (5 điểm)

a) Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + 1 - m$ ($m \neq 0$). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

b) Tìm các số có 2 chữ số $\overline{ab}$ ($a \neq b$) sao cho số $n = \overline{ab} - \overline{ba}$ là một số chính phương.

Câu 3 (2 điểm). Giải phương trình:

$$x^2 + 3x\sqrt{3x+2} - 12 + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 8}{x}.$$

Câu 4 (3 điểm). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy - 4x + 3y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2 - y + 3} + \sqrt{y - x + 1} = 2 \end{cases}$$

Câu 5 (6 điểm). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Lấy điểm M bất kỳ trên cung nhỏ BC (M không trùng với B, C).

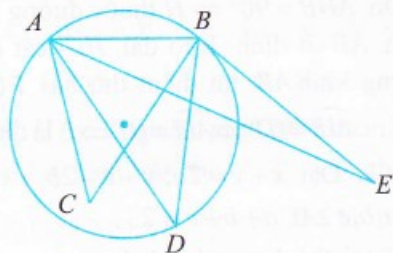
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b=c \\ a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{1}{2} \\ c=1 \end{cases}$

Vậy $x + 2y + z \geq (2-x)(2-y)(2-z)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=z=1 \\ y=0 \end{cases}$.

Câu 6. Từ 5 điểm có $4+3+2+1=10$ đoạn thẳng tạo thành. Do đó có ít nhất một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Giả sử 5 điểm là A, B, C, D, E và độ dài AB nhỏ nhất. Khi đó 3 điểm C, D, E còn lại có hai khả năng sau:

TH1. Cả ba điểm này nằm cùng phía nửa mặt phẳng bờ AB (h.2).



Hình 2

Vì không có 4 điểm nào cùng thuộc một đường tròn nên C, D, E nhìn AB dưới các góc nhọn khác nhau.

Đường thẳng qua A và vuông góc với CM tại H cắt tia BM tại K .

a) Chứng minh H là trung điểm của AK .

b) Chứng minh điểm K luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi. Tính bán kính đường tròn đó khi $R = 3\sqrt{3}$.

c) Gọi D là giao điểm của AM với BC . Tìm vị trí điểm M sao cho tích hai bán kính đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác MBD, MCD đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6 (2 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

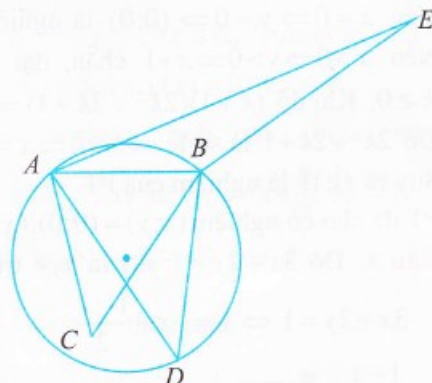
$$P = \frac{a^3}{3a - ab - ca + 2bc} + \frac{b^3}{3b - bc - ab + 2ca} + \frac{c^3}{3c - ca - bc + 2ab} + 3abc.$$

PHẠM TRUNG KIÊN

(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên) Giới thiệu

Giả sử $\widehat{ACB} > \widehat{ADB} > \widehat{AEB}$, khi đó đường tròn đi qua ba điểm A, B, D chứa điểm C bên trong và điểm E bên ngoài.

TH2. Có một điểm khác phía hai điểm khác ở hai nửa mặt phẳng bờ AB . Giả sử E khác phía hai điểm C, D (h.3).



Hình 3

Vì không có 4 điểm nào cùng thuộc một đường tròn nên C, D nhìn AB dưới các góc nhọn khác nhau.

Giả sử $\widehat{ACB} > \widehat{ADB}$, khi đó đường tròn đi qua ba điểm A, B, D chứa điểm C bên trong và điểm E bên ngoài. Vậy luôn có một đường tròn thỏa mãn điều kiện đề bài.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

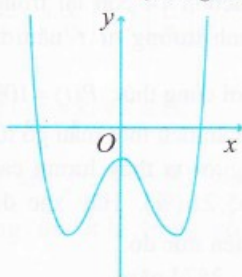
(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc) giới thiệu

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Xác định dấu của a, b, c .



- A. $a > 0, b > 0, c < 0$.
 B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c < 0$.
 D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Câu 2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $b = 0$. B. $d = 0$. C. $b = d = 0$. D. $b^2 - 4ac \geq 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là y_1, y_2 . Khi đó

- A. $2y_1 - y_2 = 5$. B. $y_1 + 3y_2 = 15$.
 C. $y_2 - y_1 = 2\sqrt{3}$. D. $y_1 + y_2 = 12$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	5	$+\infty$	2

Khẳng định nào sau đây là đúng và đầy đủ nhất?

- A. Phương trình $f(x) - 4 = 0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 B. Trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng 2.
 C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = 2, y = 5$ và một tiệm cận đứng $x = -1$.
 D. Cả A và C đều đúng.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{2x+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng và đầy đủ nhất?

- A. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; -2)$ và cắt trục hoành tại điểm $B(2; 0)$.
 B. Không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua điểm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
 C. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
 D. Cả A, B, và C đều đúng.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$. Kí hiệu $M = \max_{x \in [0; 2]} f(x)$, $m = \min_{x \in [0; 2]} f(x)$. Khi đó $M - m$ bằng

- A. 7. B. 9. C. 5. D. Đáp số khác.

Câu 7. Với giá trị nào của m thì đường cong $(C): y = x^3 + 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $(d): y = 5^m$ tại ba điểm phân biệt?

- A. $1 < m < 5$. B. $0 < m < 1$. C. $0 < m < 5$.
 D. Không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Câu 8. Tìm m để mỗi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2mx + 2017$ đều là đồ thị của hàm số bậc nhất đồng biến.

- A. $-6 \leq m \leq 0$. B. $-24 < m < 0$.
 C. $-\frac{3}{2} < m < 0$. D. $-6 < m < 0$.

Câu 9. Tìm m để đồ thị $(H): y = \frac{(m+1)x - 2m + 1}{x - 1}$ không có tiệm cận đứng.

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 10. Cho hình nón tròn xoay (N) có đỉnh S và đáy là hình tròn tâm O bán kính r nằm trên mặt phẳng (P) , đường cao $SO = h$. Điểm O' thay đổi trên đoạn SO sao cho $SO' = x$ ($0 < x < h$). Hình trụ tròn xoay (T) có đáy thứ nhất là hình tròn tâm O bán kính r' ($0 < r' < r$) nằm trên mặt phẳng (Q) , đáy thứ hai là hình tròn tâm O' bán kính r' nằm trên mặt phẳng (Q) , (Q) vuông góc với SO tại O' (đường tròn đáy thứ hai của (T) là giao tuyến của (Q) với mặt xung quanh của (N)). Hãy xác định giá trị của x để thể tích phần không gian nằm phía trong (N) nhưng phía ngoài của (T) đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $x = \frac{1}{2}h$. B. $x = \frac{1}{3}h$. C. $x = \frac{2}{3}h$. D. $x = \frac{1}{4}h$.

Câu 11. Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + m + 1}{x + 1}$ đồng biến trên tập xác định.

- A. $m \leq 0$. B. $m < 0$. C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Câu 12. Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Tính $3^x + 3^{-x}$.

- A. 5. B. ± 5 . C. 3. D. 6.

Câu 13. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau đây.

- A. Nếu ba số thực x, y, z có tổng không đổi thì ba số

2016^x, 2016^y, 2016^z có tích không đổi.

B. Nếu ba số thực x, y, z theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số nhân thì $\log x, \log y, \log z$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng.

C. Đạo hàm của hàm số $y = \ln|2x-1|$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

là $y' = \frac{2}{2x-1}$.

D. Mỗi hàm số $y = a^x, y = \log_a x$ đồng biến trên tập xác định khi $a > 1$ và nghịch biến trên tập xác định khi $0 < a < 1$ (a là hằng số).

Câu 14. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{e^x - e^{10}}}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{10\}$. B. $[10; +\infty)$. C. $(\ln 10; +\infty)$. D. $(10; +\infty)$

Câu 15. Điều nào sau đây đủ để suy ra $\sqrt[6]{a} = \sqrt{b}$?

A. $3 = \log_b a$. B. $b = \sqrt[3]{a}$. C. $a^2 = b^6$. D. $\sqrt[6]{\frac{a}{b^3}} = 1$.

Câu 16. Điều nào sau đây không đủ để suy ra $\log_2 x + \log_2 y = 10$?

A. $y = 2^{10-\log_2 x}$. B. $\log_2(xy) = 10$.

C. $\log_2 x^3 + \log_2 y^3 = 30$. D. $x = 2^{10-\log_2 y}$.

Câu 17. Hàm số nào sau đây có đạo hàm là $y' = 3^x \ln 3 + 7x^6$?

A. $y = 3^x + x^7$. B. $y = 3^x + 7^x$.

C. $y = x^3 + x^7$. D. $y = x^3 + 7^x$.

Câu 18. Phương trình $\log_2 x + \log_4 x + \log_6 x + \log_8 x = \log_3 x + \log_5 x + \log_7 x + \log_9 x$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 19. Cho $a = \log_{30} 3, b = \log_{30} 5$. Biểu diễn $\log_{30} 1350$ theo a và b .

A. $a + 2b + 1$. B. $2(a + b)$.

C. $2a + b + 1$. D. Kết quả khác.

Câu 20. Giải phương trình $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$. Lời giải sau đây sai bắt đầu từ bước nào?

Bước 1: Biến đổi $3^x \cdot 2^{x^2} = 1 \Leftrightarrow 3^x \cdot (2^x)^x = 1$.

Bước 2: Biến đổi $3^x \cdot (2^x)^x = 1 \Leftrightarrow (3 \cdot 2^x)^x = 1$.

Bước 3: Biến đổi $(3 \cdot 2^x)^x = 1 \Leftrightarrow (3 \cdot 2^x)^x = (3 \cdot 2^x)^0$.

Bước 4: Biến đổi $(3 \cdot 2^x)^x = (3 \cdot 2^x)^0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bước 5: Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

A. Bước 2. B. Bước 3.

C. Cả 5 bước đều đúng. D. Bước 4.

Câu 21. Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị cacbon). Khi một bộ phận của cây đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ

không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được cho

bởi công thức $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5730}}$ (%).

Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21 (%). Hãy xác định niên đại của công trình kiến trúc đó.

A. 3574 năm.

B. 3754 năm.

C. 3475 năm.

D. 3547 năm.

Câu 22. Cho các hàm $f(x), g(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó

A. $\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x)) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x)) \Big|_a^b + \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x)) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g'(x)dx$.

D. $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

Câu 23. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$.

B. $F(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) + C$.

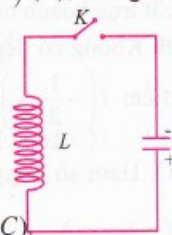
C. $F(x) = \sqrt{1+x^2} + C$.

D. $F(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

Câu 24. Cho mạch điện như hình vẽ dưới. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0 (C). Khi đóng khóa K , tụ điện phóng điện qua cuộn dây L . Giả sử cường độ dòng điện tại thời điểm t phụ thuộc vào thời gian theo công thức $I = I(t) = Q_0 \omega \cos(\omega t)$ (A), trong đó ω (rad/s) là tần số góc, $t \geq 0$ có đơn vị là giây (s). Tính điện lượng chạy qua một thiết bị điện thẳng của dây từ lúc bắt đầu đóng khóa K ($t = 0$) đến thời điểm $t = 6$ (s).

A. $Q_0 \sin(6\omega)$ (C). B. $Q_0 \sin(6\omega)$ (C).

C. $Q_0 \cos(6\omega)$ (C). D. $Q_0 \cos(6\omega)$ (C).



Câu 25. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan^2 x + \tan^4 x) dx$.

- A. $I = \frac{6\sqrt{2}}{5}$. B. $I = \sqrt{3}$. C. $I = \frac{5\pi}{9}$. D. Đáp số khác.

Câu 26. Cho $I = \int_1^e \ln x dx$. Khi đó

- A. $I = (x \ln x + x) \Big|_1^e$. B. $I = (x \ln x - 1) \Big|_1^e$.
C. $I = (x(\ln x - 1)) \Big|_1^e$. D. $I = \left(\frac{\ln^2 x}{2} \right) \Big|_1^e$.

Câu 27. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$, biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2cm.

- A. $S = 15 (cm^2)$. B. $S = \frac{15}{4} (cm^2)$.
C. $S = \frac{17}{4} (cm^2)$. D. $S = 17 (cm^2)$.

Câu 28. Rút gọn biểu thức

$$T = C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n, n \in \mathbb{N}^*.$$

- A. $T = \frac{2^n}{n+1}$. B. $T = 2^{n+1}$.
C. $T = \frac{2^n - 1}{n+1}$. D. $T = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

Cho hai số phức $z_1 = 1 - i, z_2 = 3 + 2i$. Trả lời các câu hỏi từ **Câu 29** đến **Câu 32**.

Câu 29. Phần thực và phần ảo của số phức $z_1 \cdot z_2$ tương ứng bằng

- A. 5 và 1. B. 5 và $-i$. C. 5 và -1 . D. 4 và 1.

Câu 30. Tìm môđun của số phức $\bar{z}_1 - z_2$.

- A. $\sqrt{5}$. B. 5. C. $\sqrt{13}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 31. Trong mặt phẳng Oxy , gọi các điểm M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 , gọi G là trọng tâm của tam giác OMN , với O là gốc tọa độ. Hỏi G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

- A. $5 - i$. B. $4 + i$. C. $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}i$. D. $2 + \frac{1}{2}i$.

Câu 32. Tìm số phức z thỏa mãn $\bar{z} \cdot z_1 + z_2 = 0$.

- A. $z = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$. B. $z = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$.
C. $z = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$. D. $z = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$.

Câu 33. Xét phương trình $z^3 = 1$ trên tập số phức. Tập nghiệm của phương trình là

- A. $S = \{1\}$. B. $S = \left\{ 1; \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \right\}$.
C. $S = \left\{ 1; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$. D. $S = \left\{ -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$.

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4| + |z + 4| = 10$.

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

- A. 10 và 4. B. 5 và 4. C. 4 và 3. D. 5 và 3.

Câu 35. Một hình chóp có 2×1998 cạnh thì có bao nhiêu mặt?

- A. 1999. B. 1998. C. 2000. D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 36. Khối trụ tròn xoay có đường cao và bán kính đáy cùng bằng 1 thì thể tích bằng

- A. π^2 . B. π . C. $\frac{1}{3}\pi$. D. 2π .

Câu 37. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 9, SB = 4, SC = 8$ và đôi một vuông góc. Các điểm A', B', C' thỏa mãn $\overline{SA} = 2.\overline{SA'}$, $\overline{SB} = 3.\overline{SB'}$, $\overline{SC} = 4.\overline{SC'}$. Thể tích khối chóp $S.A'B'C'$ là

- A. 24. B. 16. C. 2. D. 12.

Câu 38. Khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau. Nếu có thể tích là $\frac{9}{4}$ thì độ dài mỗi cạnh bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. 3. D. Đáp số khác.

Câu 39. Cho $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh a . Tính thể tích khối tứ diện $ACD'B'$.

- A. $\frac{1}{3}a^3$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 40. Một viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a . Người ta cưa viên đá đó theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

- A. $\frac{a^2}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{a^2}{\sqrt{4}}$. D. Kết quả khác.

Câu 41. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Mỗi khối đa diện đều là một khối đa diện lồi.
B. Hình chóp tam giác đều là hình chóp có bốn mặt là những tam giác đều.
C. Chỉ có năm loại khối đa diện đều.
D. Mỗi cạnh của hình đa diện là cạnh chung của đúng hai mặt.

Câu 42. Một hình trụ có tâm các đáy là A, B . Biết rằng mặt cầu đường kính AB tiếp xúc với các mặt đáy của hình trụ tại A, B và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình trụ đó. Diện tích của mặt cầu này là 16π . Tính diện tích xung quanh của hình trụ đã cho.

- A. $\frac{16\pi}{3}$. B. 16π . C. 8π . D. $\frac{8\pi}{3}$.

Câu 43. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (1; \log_3 5; \log_m 2)$, $\vec{v} = (3; \log_5 3; 4)$ là góc nhọn. Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

- A. $m > \frac{1}{2}$, $m \neq 1$. B. $m > 1$ hoặc $0 < m < \frac{1}{2}$.
C. $0 < m < \frac{1}{2}$. D. $m > 1$

Câu 44. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$?

- A. $\vec{u}_1 = (1; 1; 2)$. B. $\vec{u}_2 = (-1; 2; 0)$.
C. $\vec{u}_3 = (-2; 2; -4)$. D. $\vec{u}_4 = (1; -2; 0)$.

Câu 45. Cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(1; -1; -4)$. Phương trình của mặt cầu (S) đường kính AB là

- A. $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5$.
B. $(x+1)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 5$.
C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5$.
D. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 5$.

Câu 46. Cho hai vectơ $\vec{u} = (3; m; 0)$, $\vec{v} = (1; 7-2m; 0)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng song song. Khi đó giá trị của m là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. Đáp số khác.

Câu 47. Cho điểm $M(a; b; c)$ với a, b, c là các hằng số khác 0, $O(0; 0; 0)$ là gốc tọa độ. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Thể tích khối tứ diện $OABC$ là

- A. $\frac{1}{6}abc$. B. $\frac{1}{6}|abc|$. C. $\frac{1}{3}|abc|$. D. $\frac{1}{2}|abc|$.

Câu 48. Cho điểm $M(1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ và cách M một khoảng lớn nhất.

- A. $x + 2y - z = 0$. B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-1} = 1$.
C. $x - y - z = 0$. D. $x + y + z - 2 = 0$.

Câu 49. Tìm điểm M trên đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$

sao cho $AM = \sqrt{6}$, với $A(0; 2; -2)$.

- A. $M(1; 1; 0)$ hoặc $M(2; 1; -1)$.
B. $M(1; 1; 0)$ hoặc $M(-1; 3; -4)$.
C. $M(-1; 3; -4)$ hoặc $M(2; 1; -1)$.
D. Không có điểm M nào thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 50. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$

và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=m+t \end{cases}$. Tìm m để d cắt

(S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và tại B vuông góc với nhau.

- A. $m = -1$ hoặc $m = -4$. B. $m = 0$ hoặc $m = -4$.
C. $m = -1$ hoặc $m = 0$. D. Cả A, B và C đều sai.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

VINH 12 CON GIÁP

CON GÀ

Xuân Đinh Dậu, 2017

Đẹp, hiền, chăm chỉ, sống gần ta.

Mà có ai thương cái kiếp Gà.

Mào đỏ, lông mềm, tổ sáo lúa

Chân vàng, vựa củng, sỏ lạt hoa.

Bờ đất kiếm mồi, kêu bạn tốt.

Đậu cành nhấm mắt, dợt đêm qua.

Dậy sớm mỗi ngày, vươn cổ gáy

Ồ ồ o ... liêng vọng trời xa.

LÝ VĂN TOÁN
(Hà Nội)

MỪNG XUÂN ĐINH DẬU

Tập chí mừng xuân đến Tết Gà

Vui cùng đố giả ở gần xa

Khai niên, giải toán - tình yêu trẻ

Điền từ, bình thơ - sở thích già

Mỗi tập thông tin vèn cách giải

Qua nhiều thế hệ luyện tài ba

Mong sao Tập chí thêm cơ hội

Để toán khai tâm đến mọi nhà.

ĐÀO TAM
(GV Khoa Toán, Đại học Vinh)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

1B	2A	3A	4B	5C	6A	7C	8B
9C	10A	11C	12B	13A	14A	15C	16D
17B	18A	19C	20B	21C	22B	23A	24B
25A	26C	27A	28B	29A	30D	31C	32A
33C	34D	35C	36B	37D	38B	39D	40A
41C	42A	43D	44D	45C	46D	47B	48B
49A	50C						

Câu 1. Đây là dạng đồ thị của hàm số bậc 4, hệ số của x^4 dương, kiểm tra và chọn B.

Câu 5. Hàm số bậc 3 có 2 cực trị hoặc không có cực trị, do đó $m = 0$ hàm số trở thành hàm số bậc 2 có một cực trị. Chọn C.

Câu 6. Hàm số bậc 3 có hệ số của x^3 dương, tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc nhỏ nhất. (C) có điểm uốn (1;0) từ đó viết được phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn $y = -3x + 3$. Chọn A.

Câu 7. Tìm m để phương trình $-x^4 + 4x^2 - 3 = m$ có 4 nghiệm phân biệt. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ từ đó tìm được m . Chọn C.

Câu 8. Ta có $y = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$; y nguyên khi $x+2 = \pm 1$, từ đó chọn B.

Câu 9. Hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ có một cực trị, hệ số của x^4 dương nên cực trị là cực tiểu tại $x = 0$. Chọn C.

Câu 10. Mọi đồ thị của họ $(C_m): y = x^4 + mx^2 - m - 1$ đi qua điểm $(x; y)$ khi phương trình $y = x^4 + mx^2 - m - 1$ nghiệm đúng với mọi m hay $m(x^2 - 1) + x^4 - 1 - y = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = x^4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = x^4 - 1 \end{cases}$$

Từ đó tìm được 2 điểm thỏa mãn. Chọn A.

Câu 11. Ta có:

$$y = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}, \forall x \neq -1; y' = \frac{-1}{(x+1)^2}.$$

Giao 2 tiệm cận $I = (-1; 1)$. Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $\left(x_0; 1 + \frac{1}{x_0+1}\right)$ là:

$$y = \frac{-1}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + 1 + \frac{1}{x_0+1} \quad (a)$$

Khoảng cách từ I đến (a) là:

$$d(I; (a)) = \frac{\left| \frac{-1}{(x_0+1)^2}(-1-x_0) - 1 + 1 + \frac{1}{x_0+1} \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{(x_0+1)^4}}} = \frac{2|x_0+1|}{\sqrt{(x_0+1)^4 + 1}} \leq \frac{2|x_0+1|}{\sqrt{2}\sqrt{(x_0+1)^4}} = \sqrt{2}.$$

(Bất đẳng thức Cauchy). Chọn C.

Câu 20. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \frac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[-1; 1]$. Từ bảng biến thiên tìm được GTLN, GTNN, chọn B.

Câu 21. Thay $y = -2^{x+1} + 1$ từ PT thứ hai vào PT thứ nhất, giải phương trình bậc 2 ẩn $t = 2^x$ tìm được một giá trị x, y . Hệ có một nghiệm, chọn C.

Câu 24. Đổi biến bằng cách đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$ hoặc sử dụng máy tính. Chọn B.

Câu 25. Ta có:

$$\int_0^1 (|3x-1| - 2|x|) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-5x) dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (x-1) dx.$$

Từ đó tính được tích phân. Chọn A.

Câu 26. Tích phân từng phần tính được kết quả. Chọn C.

Câu 33. Ta có: A(2; -2); B(3; 1); C(0; 2).

Khi đó $AB = \sqrt{10}$; $AC = 2\sqrt{5}$; $BC = \sqrt{10}$;

$AC^2 = 20 = AB^2 + BC^2$. Do đó $\triangle ABC$ vuông cân tại B. Chọn C.

Câu 39. (Bạn đọc tự vẽ hình). Ta có:

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC; (ABCD)) = \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

Gọi I là trung điểm cạnh AD , ta có $CI \perp AD$;
 $CI \perp SA \Rightarrow CI \perp SD$; kẻ $CJ \perp SD \Rightarrow IJ \perp SD$
 $\Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng (SAD) và (SCD) chính
 là $\widehat{CJI} = \alpha$. Tam giác vuông cân ABC có

$$AB = BC = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}.$$

Tam giác vuông SAC có $\widehat{SCA} = 45^\circ$, do đó
 $SA = AC = a\sqrt{2}$. Lại có: $\triangle DAS \sim \triangle DJI$ từ đó
 tính được $IJ = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Tam giác vuông JIC có

$$CI = a; IJ = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{CI}{IJ} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Chọn D.

Câu 42. (Bạn đọc tự vẽ hình). Ta có $BC \perp AB$;
 $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Hạ $AM \perp SB$; kẻ $MN \parallel BC$ ($N \in SC$)
 $\Rightarrow MN \perp SB \Rightarrow (AMN) \perp SB$; $MN \perp AM$
 Tính diện tích tam giác vuông AMN :

$$\text{Tam giác vuông } SAB \text{ tính được } AM = \frac{2a}{\sqrt{5}};$$

$$SM = \frac{4a}{\sqrt{5}}; SB = a\sqrt{5}. \text{ Tam giác } SBC \text{ có } MN \parallel BC,$$

$$\text{tính được } MN = \frac{4a\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \text{diện tích tam giác}$$

$$\text{vuông } AMN \text{ bằng: } \frac{1}{2} \cdot \frac{4a\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{4a^2\sqrt{10}}{25}.$$

Chọn A.

Câu 50. Gọi $I(x; y; z)$, R lần lượt là tâm và bán
 kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Sử dụng
 $IA = ID = IC = IB = R$ được hệ phương trình, từ
 đó tìm x, y, z . Chọn C.

TIN TỨC

GẦN GIẢI ĐƯỢC GIẢ THUYẾT YẾU CỦA GOLDBACH

Các nhà toán học gần tìm được lời giải cho một giả thuyết đã tồn tại qua hơn ba thế kỷ. Một trong những vấn đề chưa giải được cổ nhất của toán học cũng đồng thời là vấn đề dễ hiểu nhất. Giả thuyết yếu của Goldbach nói rằng ta có thể biểu diễn bất cứ số lẻ nào thành tổng của tối đa là ba số nguyên tố. Ví dụ: $35 = 19 + 13 + 3$ hay $35 = 11 + 13 + 11$.

Nhà toán học Terence Tao của trường University of California, Los Angeles, nay đã gần hoàn tất một lời giải. Ông đã chứng minh được là mỗi số lẻ là tổng của tối đa năm số nguyên tố, và nay ông hy vọng có thể giảm từ năm xuống còn ba.

Tao cho biết rằng, bên cạnh niềm ham muốn hóa giải một trở ngại đã thách đố những trí tuệ siêu việt nhất của nhân loại qua gần ba thế kỷ, việc giải quyết được mục tiêu hấp dẫn này cũng sẽ dẫn các nhà toán học tới những hướng hữu ích trong cuộc sống – ví dụ như mã hóa những dữ liệu nhạy cảm.

Giả thuyết yếu Goldbach được đề xuất bởi một nhà toán học của thế kỷ 18, Christian Goldbach. Nó là họ hàng của một phát biểu khác liên quan tới các số chẵn, có tên là Giả thuyết mạnh Goldbach, nhưng thực ra lại được xây dựng bởi cộng sự của ông, nhà toán học Leonhard Euler. Giả thuyết mạnh khẳng định rằng mỗi số chẵn lớn hơn 2 là tổng của hai số nguyên tố. Như tên gọi của chúng phản ánh, nếu giả thuyết mạnh đúng thì giả thuyết yếu cũng đúng: để biểu diễn mỗi số lẻ thành tổng ba số nguyên tố, ta chỉ việc trừ 3 để tạo ra một số chẵn, và áp dụng giả thuyết mạnh đối với số chẵn này.

Các nhà toán học đã kiểm chứng cả hai giả thuyết này trên máy tính cho tất cả mọi số nguyên tối đa là 19 ký tự, và họ chưa tìm thấy trường hợp nào bị sai. Hơn thế, với số càng lớn thì càng có nhiều cách để biểu diễn nó thành tổng của hai hoặc ba số nguyên tố. Nghĩa là giả thuyết càng dễ đúng với những số lớn. Trong thực tế, các nhà toán học đã chứng minh rằng, giả sử tồn tại những ngoại lệ không đúng với giả thuyết mạnh, thì chúng sẽ càng hiếm với các số lớn dần tới vô cùng. Còn đối với giả thuyết yếu, một định lý cổ điển từ thập kỷ 1930 nói rằng, nếu có thì chỉ là hữu hạn một số những ngoại lệ. Nghĩa là ở những số “đủ lớn” thì sẽ không thể có ngoại lệ.

Cách làm của Tao là kết hợp kết quả kiểm chứng của máy tính ở những số “đủ nhỏ”, với kết quả lý thuyết áp dụng cho những số “đủ lớn”. Bằng việc cải thiện những tính toán với “rất nhiều bước ngoặt nhỏ”, ông nói, chúng ta sẽ thấy là hai tập số có sự chồng lấp nhau, ít ra là ở giả thuyết với năm số nguyên tố. Tao hy vọng có thể mở rộng cách làm của mình với giả thuyết về năm số nguyên tố. Nhưng cách giải này sẽ không giúp giải được giả thuyết mạnh. Giả thuyết yếu tương đối dễ hơn, Tao nói, vì việc biểu diễn một số thành tổng ba số khác sẽ “có nhiều cơ hội hơn để bạn gặp may, khi toàn bộ các số thành viên là số nguyên tố”. Vậy là, sau một phần tư thiên niên kỷ từ ngày Goldbach mất, vẫn chưa ai tìm được một chiến lược để giải giả thuyết mạnh mà ông đặt ra.



Nhà Toán học
Terence Tao

LÊ MAI *sưu tầm* (Nguồn: *Tia sáng*)



PAPPUS NGÔI SAO LẠ TRONG BẦU TRỜI

TOÁN HỌC HY LẠP CỔ ĐẠI

LÊ QUỐC HÂN
(GV Khoa Toán, ĐH Vinh, Nghệ An)

1. MỞ ĐẦU

Pền toán học Hy Lạp với các tên tuổi lẫy lừng: *Thales*, *Pythagore*, *Euclid*, *Archimedes*, ... đã che mất một ngôi sao lạ - *Pappus* - mà nếu không có sự xuất hiện của ngôi sao này, một loạt công trình của các bậc tiền bối có thể đã bị chôn vùi vào lớp bụi thời gian. Do đó sẽ không công bằng nếu ta biết *Pappus* chỉ qua vên vẹn một định lý mang tên ông: Trên hai đường thẳng a, a' tương ứng có hai bộ ba điểm phân biệt $(A; B; C)$ và $(A'; B'; C')$. Khi đó giao điểm của các cặp đường thẳng AB' và $A'B$; BC' và $B'C$; CA' và AC' thẳng hàng.

Ta hãy đi ngược dòng lịch sử để hiểu hơn vai trò và việc xuất hiện của ngôi sao lạ này. Vào khoảng từ năm 306 trước công nguyên, *Ptolemy* thực sự bắt đầu triều đại mình. Ông đã chọn Thành phố *Alexandria* bên bờ sông Nin làm Thủ đô, thu hút các học giả về và lập tức tiến hành xây dựng Trường học *Alexandria* danh tiếng. Chính *Euclid* đã đến đây để làm móng cho Trường phái toán học *Alexandria* nổi tiếng và hoàn thành tác phẩm *Nguyên lý* của ông trong thời gian làm việc ở đây. Sau *Euclid* là một nhà toán học kiêm thiên văn học thiên tài *Apollonius* (khoảng 262 - 190 trước công nguyên) - một thành viên của trường phái này - cũng có những cống hiến xuất sắc về hình học qua tác phẩm đặc sắc *Các thiết diện cônic*. Sau khi *Apollonius* mất, nền toán học Hy Lạp yếu dần và những phát triển chỉ giới hạn ở các lĩnh vực thiên văn học, lượng giác học và đại số học. Năm trăm năm sau (khoảng thế kỷ III), *Pappus* xuất hiện và đã nhen lại ngọn lửa say mê nghiên cứu hình học đã nguội tàn.

2. TÁC PHẨM CHÍNH

Công trình thực sự to lớn của *Pappus* là bộ *Tuyển tập toán học*, một tác phẩm vừa bình giải vừa hướng dẫn các công trình về hình học hiện hữu ở thời đại ông, khơi dậy lại những mệnh đề nguyên gốc, các cải tiến, mở rộng và những lời bình chú lịch sử. Đặc

biệt ông bình giải về *Nguyên lý* và *Dữ kiện* của *Euclid*, *Syntaxis mathematica* (thường được gọi là *Almagest*) và *Planispherium* của *Ptolemy* (nhà thiên văn học vĩ đại nhất thời Aicập cổ đại, không phải *Ptolemy* hoàng đế đã nhắc đến trước đó).

Trong số 8 quyển của bộ *Tuyển tập toán học* thì quyển thứ nhất và một phần của cuốn thứ hai đã bị thất lạc. Từ những gì còn giữ được, người ta thấy Quyển II nói về một phương pháp mà *Apollonius* phát triển để viết và nghiên cứu về các số lớn. Quyển III gồm 4 phần, hai phần đầu nói về các đại lượng trung bình, phần thứ ba nói về một số bất đẳng thức tam giác và phần thứ tư nói về việc cho nội tiếp tam đa diện đều trong một hình cầu cho trước.

Quyển IV là phần mở rộng của *Pappus* về Định lý *Pythagore*, mô tả, nguồn gốc và tính chất của đường xoắn ốc *Archimedes*, đường conchoid của *Nicomedes* và đường cầu phương của *Dinostratus* cùng với những ứng dụng của ba bài toán nổi tiếng và một bài luận bản về một đường xoắn ốc đặc biệt vẽ trên một hình cầu.

Quyển V chủ yếu nói về sự đẳng chu, sự so sánh diện tích của các hình có chu vi chặn ngoài bằng nhau và thể tích các hình khối có diện tích chặn ngoài bằng nhau. Quyển này cũng có một đoạn khá lý thú về con ong và các tính chất tối đa tối thiểu của các ô tổ ong. Trong quyển này *Pappus* còn đề cập đến 13 đa diện nửa đều của *Archimedes*.

Quyển VI nói về thiên văn và trình bày những luận văn nhằm giới thiệu cuốn *Almagest* của *Ptolemy*.

Quyển VII miêu tả các công trình tạo thành *Kho tàng giải tích*, một sưu tập - sau *Nguyên lý* của *Euclid* - chứa đựng các tư liệu được xem là những trang thiết bị chủ yếu của các nhà toán học chuyên nghiệp. Mười hai luận văn được bản ở đây là *Dữ kiện*, *Porisms* và *Quy tích mặt* của *Euclid*, *Các thiết diện cônic* và sáu công trình khác của *Apollonius*, *Các quỹ tích hình khối* của *Aristaeus* và *Về các trung bình* của *Eratosthenes*.

Quyển VIII chứa đựng nhiều vấn đề được xem là nguyên gốc của Pappus. Ở đây ta thấy cách giải bài toán dựng conic qua năm điểm cho trước, mở rộng của Định lý Pythagore và định lý: Nếu D, E, F là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác

ABC sao cho $\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB}$ thì hai tam giác DEF và ABC có cùng trọng tâm.

3. TẦM ẢNH HƯỞNG CỦA TÁC PHẨM "TUYỂN TẬP TOÁN HỌC" ĐỐI VỚI CÁC THỂ HỆ SAU

Tuyển tập toán học của Pappus thường được ví như một mỏ vàng trữ lượng cao về hình học. Những so sánh, nếu có thể, cho thấy những lời bình trong tác phẩm ấy rất có giá trị. Các thể hệ sau có thể soi vào chúng để thấy một cách toàn diện và sâu sắc nền toán học Hy Lạp cổ đại qua các công trình của trên 30 nhà toán học lừng danh trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Người ta ví von một cách khá hình ảnh rằng tác phẩm ấy như một bản cầu hồn của hình học Hy Lạp (mặc dù mọi sự so sánh đều khập khiễng!).

Tuy nhiên qua bài viết tôi muốn bàn đến một khía cạnh khác, đó là ảnh hưởng của những vấn đề trình bày trong tác phẩm ấy với các công trình nghiên cứu của các nhà toán học những thế hệ sau. Trong quyển VII, Pappus đã đưa ra một trong những định lý về trọng tâm: 1. Nếu một trong những cung phẳng xoay tròn quanh một trục trong mặt phẳng của nó nhưng không cắt cung đó thì diện tích của mặt tròn xoay tạo ra sẽ bằng tích của chiều dài cung đó với chiều dài của đường mà trọng tâm của cung vạch ra.

2. Nếu một hình phẳng xoay tròn quanh một trục trong mặt phẳng của nó nhưng không cắt hình phẳng đó thì thể tích của khối tròn xoay tạo ra sẽ bằng tích của diện tích hình phẳng đó với chiều dài của đường mà trọng tâm của hình phẳng đó vạch ra. Dùng định lý đó có thể tìm:

- Thể tích và diện tích mặt của hình xuyến tạo ra được bằng cách cho một hình tròn bán kính r xoay quanh một trục trên mặt phẳng của hình tròn với khoảng cách $d > r$ đến tâm của hình tròn;
- Trọng tâm của cung nửa đường tròn;
- Trọng tâm của diện tích nửa hình tròn.

Các kết quả này được tìm thấy lại trong công trình sơ khai về phép tính vi tích phân của nhà toán học Thụy Sĩ P. Guldin (1577- 1642). Điều này cho thấy Pappus đã đi trước thời đại một nghìn năm trăm năm.

Một ví dụ khác: Trong một bài luận (quyển VII) bàn về một quỹ tích nổi tiếng là "quỹ tích đối với ba hoặc bốn đường thẳng": Nếu p_1, p_2, p_3, p_4 là chiều dài những đoạn thẳng vẽ từ một điểm P đến bốn đường thẳng cho trước tạo thành các góc cho trước với bốn đường thẳng đó, và nếu $p_1 p_2 = k p_3^2$ hoặc $p_1 p_2 = k p_3 p_4$, trong đó k là một hằng số thì quỹ tích P là một conic. Bài toán này đã được Apollonius giải và có tầm quan trọng lịch sử bởi nó nhằm tổng quát hóa cho n đường thẳng mà Descartes đã gặp năm 1673 để hình thành phương pháp tọa độ. Những người cùng thời với Pappus đã cố gắng một cách tuyệt vọng khi tổng quát hóa bài toán đó. Trong trường hợp tuyến tính của định lý gọi là "Định lý Stewart" cũng thấy trong cuốn này:

Nếu A, B, C, D là bốn điểm nằm trên một đường thẳng thì $AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB - DA \cdot DB \cdot DC$.

Thực ra Robert Simson (1687 - 1758) đã đi trước M. Stewart (1717 - 1785) trong việc khám phá ra định lý này cho trường hợp tổng quát hơn khi D có thể nằm ngoài đường thẳng ABC .

Trong quyển VII, Pappus cũng đã chứng minh được rằng bốn tia đồng quy bị cắt bởi hai đường thẳng cho hai dãy điểm tương ứng A, B, C, D và A', B', C', D' thì hai tỉ số kép (A, B, C, D) và (A', B', C', D')

bằng nhau. Nói cách khác, tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng là bất biến qua phép chiếu xuyên tâm. Đây là định lý cơ bản của Hình học xạ ảnh. Điều này cũng chứng tỏ rằng Pappus là một người tiên phong trong việc nghiên cứu Hình học xạ ảnh, một ngành học mà phải 1400 năm sau (thế kỷ XVII) mới có tên gọi chính thức nhờ các công trình của G. Desargues (1593 - 1662) và được phát triển mạnh mẽ vào thế kỷ XIX bởi các nhà toán học thiên tài Gergonne, Poncelet, Brianchon, Chasles, Steiner, ...

Sẽ không kể hết những bài toán Pappus bàn đến trong Tuyển tập toán học mà các thế hệ toán học sau quan tâm đến. Điều tôi muốn gửi gắm với các bạn trẻ qua bài viết này là: Hãy say đắm với vẻ đẹp trong các công trình toán học của những người khác như Pappus đã say đắm với các công trình hiện hữu thời đại ông, như vậy bạn sẽ gặt hái được nhiều thành công trong sự nghiệp và niềm vui sáng tạo trong cuộc sống.



TỨ GIÁC ĐIỀU HÒA DƯỚI CÁCH NHÌN CỦA PHÉP NGHỊCH ĐẢO

NGUYỄN PHI MÃNG

(GV THPT chuyên Quốc Học Huế, Thừa Thiên Huế)

Trong tài liệu chuyên Hình học Lớp 10 ở bài đọc thêm: Tỉ số kép với góc định hướng và Tỉ số kép của bốn điểm trên đường tròn có trình bày về tứ giác điều hòa. Các kiến thức được xây dựng theo một hệ thống khá phức tạp. Do đó việc sử dụng các kiến thức về tứ giác điều hòa như vậy để giải toán ít có tính thuyết phục. Hơn nữa theo quy định thì các kiến thức đó không nằm trong các kiến thức được phép sử dụng trong Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT nên nếu học sinh muốn sử dụng thì phải xây dựng các kiến thức đó và điều này không khả thi vì cách xây dựng khá phức tạp. Đó là lí do khiến chúng tôi tìm hiểu để khắc phục tình trạng này.

Ở đây ta quan tâm đến hai vấn đề: Thứ nhất là tứ giác điều hòa có liên quan gì đến hàng điểm điều hòa hay chùm điều hòa? (đơn giản là xem chùm điều hòa là chùm bốn đường thẳng theo thứ tự đi qua một hàng điểm điều hòa); thứ hai là thiết lập các kiến thức về tứ giác điều hòa một cách ngắn gọn và chỉ dựa trên những kiến thức đơn giản quen thuộc. Hai vấn đề trên được giải quyết trong bài toán và cách giải của bài toán sau.

BÀI TOÁN. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và S là một điểm bất kì trên đường tròn (O) khác với các đỉnh A, B, C, D của tứ giác. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ có tích độ dài các cặp đối diện bằng nhau khi và chỉ khi chùm (SA, SC, SB, SD) là chùm điều hòa.

Dưới đây chúng tôi sẽ trình bày một cách giải ngắn gọn mà chỉ dùng những kiến thức đơn giản quen thuộc. Ý tưởng của cách giải này xuất phát từ sự liên hệ đến các tính chất của phép

nghịch đảo mà chủ yếu là tính chất: “*Phép nghịch đảo biến đường tròn đi qua cực nghịch đảo thành đường thẳng không đi qua cực nghịch đảo*”.

Gọi S_1 là điểm đối xứng của S qua O , Δ là đường thẳng qua S_1 và vuông góc với SS_1 . Do đường tròn (O) qua S và đường thẳng Δ vuông góc với đường kính SS_1 của (O) tại S_1 nên với cách chọn phép nghịch đảo có cực S và phương tích SS_1^2 thì qua phép nghịch đảo này đường tròn (O) biến thành đường thẳng Δ , do đó biến bốn điểm A, B, C, D trên đường tròn (O) khác với cực nghịch đảo S thành bốn điểm A_1, B_1, C_1, D_1 trên đường thẳng Δ .

Từ đó dưới cách nhìn của phép nghịch đảo ta có thể giải bài toán như sau:

Lời giải. Gọi S_1 là điểm đối xứng của S qua O và Δ là đường thẳng qua S_1 và vuông góc với SS_1 .

Các đường thẳng SA, SB, SC, SD cắt Δ lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1 .

Do Δ là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại S_1

và SS_1 là đường kính

của (O) nên với bốn

điểm A, B, C, D phân

biệt trên (O) và khác

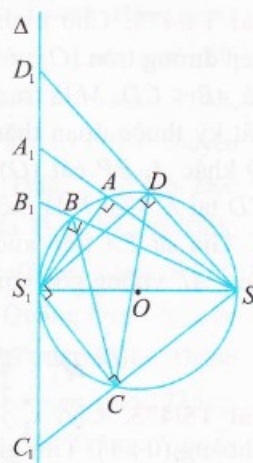
với S ta có A_1, B_1, C_1, D_1

là bốn điểm phân biệt

trên Δ .

$$\text{Ta có } AB \cdot CD = AD \cdot BC \Leftrightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} \quad (1)$$

(Xem tiếp trang 27)





CÁC LỚP THCS

Bài T1/475 (Lớp 6). Cho số tự nhiên n . Hãy tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho số $A = 1010n^2 + 2010(n+p) + 10^{101954}$ có thể viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

NGUYỄN HỮU BẢNG
(GV THCS Hưng Hòa, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T2/475 (Lớp 7). Giả sử tam giác ABC có trung tuyến AM thỏa mãn $\widehat{ABC} + \widehat{MAC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân hoặc vuông.

NGUYỄN XUÂN BÌNH
(NXBGD Việt Nam)

Bài T3/475. Giải phương trình:

$$\frac{x}{2\sqrt{x}+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x^3}+x}{4}.$$

LẠI QUANG THỊ
(GV THCS Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài T4/475. Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với AB song song với CD và $AB < CD$. M là trung điểm CD . P là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng MD . AP cắt (O) tại Q khác A , BP cắt (O) tại R khác B . QR cắt CD tại E . Gọi F là điểm đối xứng của P qua E . Giả sử EA tiếp xúc với (O) , chứng minh rằng AF vuông góc với AQ .

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T5/475. Cho x, y là các số thực thuộc khoảng $(0; 1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y)$.

TÙ HỮU SƠN
(Sở GD&ĐT Hà Tĩnh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/475. Cho $f(x) = x^2 - 6x + 12$.

Giải phương trình $f(f(f(f(x)))) = 65539$.

NGUYỄN TIỀN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T7/475. Giải hệ phương trình trên tập số

$$\text{thực: } \begin{cases} \sqrt{2^{2^x}} = 2(y+1) \\ 2^{2^y} = 2x \end{cases}$$

TRẦN VŨ HOÀNG ĐÀO
(GV THPT chuyên Long An)

Bài T8/475. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác đều. Gọi α là góc tạo bởi $A'B$ với mặt phẳng $(ACC'A')$ và β là góc giữa mặt phẳng $(A'BC')$ với mặt phẳng $(ACC'A')$. Chứng minh rằng:

$$\alpha < 60^\circ \text{ và } \cot^2 \alpha - \cot^2 \beta = \frac{1}{3}.$$

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT Nguyễn Bình Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

Bài T9/475. Cho p, q là hai số nguyên tố cùng nhau. Đặt

$$T = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor.$$

a) Tính T .

b) Xác định giá trị p, q để T là số nguyên tố, trong đó kí hiệu $[a]$ là phần nguyên lớn nhất không vượt quá a .

MAI TUẤN ANH
(GV THCS Nga Điền, Nga Sơn, Thanh Hóa)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/475. Gọi S là số các dãy nhị phân (là dãy chỉ gồm các số 0 và 1) có độ dài n (gồm n số) sao cho tổng ba số liên tiếp bất kì trong dãy là số dương. Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq S \leq \frac{13}{2} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n, \forall n \geq 3.$$

LÊ TÂM THƯ
(Đội 5, Lê Xuyên, Triệu Trach, Triệu Phong, Quảng Trị)

Bài T11/475. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

sao cho $f\left(\frac{x}{x-y}\right) + f(xf(y)) = f(xf(x))$, với mọi $x > y > 0$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T12/475. Cho tam giác ABC . Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác này tiếp xúc với BC , CA , AB tại D , E , F tương ứng. Gọi B_1, C_1 lần lượt là giao của các cặp đường thẳng (AB, DE) và (AC, DF) . Gọi H , K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC , AB_1C_1 . Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua điểm I .

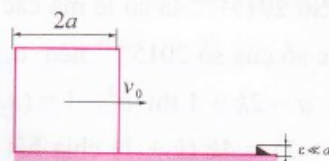
NGUYỄN THANH DŨNG
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Lạng Sơn)

Bài L1/475. Cho đoạn mạch gồm hộp kín X và Y . Trong đó, hộp X chứa cuộn dây, hộp Y chứa tụ điện C và một trong hai phần tử điện trở thuần R hoặc cuộn cảm thuần mắc nối tiếp. Người ta nối hai đầu hộp X với một điện áp không đổi $U = 12$ (V) thì dòng điện chạy qua có cường độ $I_1 = 0,3$ (A); sau đó thay nguồn điện không đổi trên bằng điện áp $u = 12\sqrt{2} \cos \omega t$ (V) vào hai đầu hộp X thì cường độ dòng điện hiệu dụng chạy qua đoạn mạch là $I_2 = 0,15$ (A). Lấy X mắc nối tiếp với Y và đặt điện áp xoay chiều trên vào hai đầu

đoạn mạch. Khi điện áp tức thời giữa hai đầu cuộn dây X bằng một nửa giá trị cực đại của nó và bằng $3\sqrt{6}$ (V) đang giảm thì điện áp tức thời giữa hai đầu đoạn mạch là $6\sqrt{6}$ (V) và đang giảm. Tính công suất tiêu thụ của mạch khi đó.

THANH LÂM (Hà Nội)

Bài L2/475. Một khối lập phương đặc, đồng chất cạnh $2a$. Trượt đều không ma sát, vận tốc v_0 trên mặt bàn nhẵn - nằm ngang, ở cạnh bàn có một gờ nhỏ. Với điều kiện nào v_0 để vật có thể rơi khỏi bàn? Giả sử kích thước gờ rất nhỏ không làm sai lệch đáng kể chuyển động quay của vật.



NGÔ AN HÒA KỲ (TP. Hồ Chí Minh)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/475 (For 6th grade). Given a natural number n . Find all the prime numbers p such that the following number

$$A = 1010n^2 + 2010(n+p) \cdot 10^{1954}$$

can be written as a difference of two perfect squares.

Problem T2/475 (For 7th grade). Given a triangle ABC and let M be the midpoint of BC . Suppose that $\widehat{ABC} + \widehat{MAC} = 90^\circ$. Prove that ABC is either an isosceles triangle or a right triangle.

Problem T3/475. Solve the equation

$$\frac{x}{2\sqrt{x}+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x^3}+x}{4}.$$

Problem T4/475. Given a isosceles trapezoid $ABCD$ inscribed in a circle (O) with AB is parallel to CD and $AB < CD$. Let M be the midpoint of CD and let P be any point on the

side MD . Suppose that AP intersects (O) at the second point Q , and BP intersects (O) at the second point R . Assume that QR intersects CD at E . Let F be the symmetry point of P over the point E . Suppose that EA is tangent to (O) , prove that AF is perpendicular to AQ .

Problem T5/475. Let x, y belong to $(0; 1)$. Find the maximum value of the expression

$$P = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y).$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/475. Given $f(x) = x^2 - 6x + 12$.

Solve the equation $f(f(f(f(x)))) = 65539$.

Problem T7/475. Find all real solutions of the following system of equations:
$$\begin{cases} \sqrt{2^{2^x}} = 2(y+1) \\ 2^{2^y} = 2x \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 27)



Bài T1/471. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a.b.c = 2015^{2016}$. Tìm số dư của phép chia tổng $19a^2 + 5b^2 + 1890c^2$ cho 24.

Lời giải. Số 2015^{2016} là số lẻ mà các số a, b, c đều là ước số của số 2015^{2016} nên a, b, c đều là số lẻ. Đặt $a = 2k + 1$ thì $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1) = 2k(2k + 2) = 4k(k + 1)$ chia hết cho 8 (vì $k(k + 1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2). Tương tự $b^2 - 1$ và $c^2 - 1$ đều chia hết cho 8 (1). Số 2015 không chia hết cho 3 vì tổng các chữ số bằng 8, do đó số 2015^{2016} không chia hết cho 3, suy ra các số a, b, c đều không chia hết cho 3. Nếu $a = 3k + 1$ thì $a - 1 = 3k$, nếu $a = 3k + 2$ thì $a + 1 = 3(k + 1)$, do đó $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ chia hết cho 3. Tương tự $b^2 - 1$ và $c^2 - 1$ đều chia hết cho 3 (2)

Từ (1) và (2) với chú ý rằng $(3, 8) = 1$ suy ra $a^2 - 1, b^2 - 1$ và $c^2 - 1$ đều chia hết cho $8.3 = 24$ (3)

Từ (3) và $19a^2 + 5b^2 + 1890c^2 = 19(a^2 - 1) + 5(b^2 - 1) + 1890(c^2 - 1) + 1914$ suy ra số dư của $19a^2 + 5b^2 + 1890c^2$ khi chia cho 24 cũng là số dư của 1914 chia cho 24, và bằng 18. $\square$

► **Nhận xét.** Mấu chốt để giải bài này là kết quả (3), một số bạn không chú ý điều đó nên giải khá dài hoặc đi lạc hướng khi khai thác điều kiện a, b, c đều là ước số của số 2015^{2016} .

Các bạn sau đã giải thích rõ các kết quả (1) và (2) để suy ra kết luận:

Phú Thọ: Trần Hiền Khanh, Lê Tuyết Nga, Nguyễn Thị Trà Linh, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội:** Nguyễn Ngân Chi, 6C, THPT Lý Thái Tổ, Cầu Giấy; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Khánh Thu, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VIỆT HẢI

Bài T2/471. Chứng minh rằng nếu $(a^2 + ab + b^2)$ chia hết cho 10 thì $(a^3 - b^3)$ chia hết cho 1000 (a, b là các số nguyên).

Lời giải. Vì $(a^2 + ab + b^2)$ chia hết cho 10 nên $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ chia hết cho 10 hay $(a^3 - b^3)$ chia hết cho 10, suy ra a^3 và b^3 có chữ số tận cùng giống nhau (1). Bằng cách lập bảng xét chữ số tận cùng (từ 0 đến 9) của các số tự nhiên và chữ số tận cùng của số lập phương tương ứng ta rút ra nhận xét: Hai số nguyên có chữ số tận cùng khác nhau thì lập phương của chúng cũng có chữ số tận cùng khác nhau. Do đó từ (1) suy ra a và b có chữ số tận cùng giống nhau, khi đó ba số a^2, ab và b^2 cũng có chữ số tận cùng giống nhau. Mà $(a^2 + ab + b^2)$ có chữ số tận cùng là 0 (giả thiết) nên a^2, ab và b^2 đều có tận cùng là 0, suy ra a và b có chữ số tận cùng là 0. Từ đó a^3 và b^3 đều chia hết cho 1000, nên $(a^3 - b^3)$ chia hết cho 1000. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải trên đây, đa số bạn có lập luận như sau:

Vì $(a^2 + ab + b^2)$ chia hết cho 10 nên $(a^2 + ab + b^2)$ là số chẵn, suy ra a và b đồng thời là số chẵn.

Sau đó dựa vào nhận xét "Một số chính phương chia cho 5 chỉ cho số dư là 0; 1 hoặc 4", viết lại $4(a^2 + ab + b^2) = (2a + b)^2 + 3b^2$, từ giả thiết $(a^2 + ab + b^2)$ chia hết cho 5 suy ra đồng thời $(2a + b)^2$ và $3b^2$ cùng chia hết cho 5 (vì $3b^2$ chia cho 5 chỉ cho số dư là 0; 3 hoặc 2), suy ra b^2 (và b) chia hết cho 5, từ đó a^2 (và a) chia hết cho 5. Như vậy a và b cùng chia hết cho 10 và có kết luận của bài toán.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Cao Ngọc Khoa, Nguyễn Minh Tiến, Vũ Minh Khải, Đặng Thái Tuấn, Nguyễn Công Hải I, Nguyễn Ngọc Lan, 7A3, Bùi Nhật Minh, Trần Thị Yến Khanh, 6A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** Nguyễn Ngân Chi, 6C, THCS Lý Thái Tổ, Cầu Giấy; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Khánh Lâm, 7I, THCS Hà Huy Tập, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** Phạm Thị Thảo Huyền, Phan Văn Nam, Trần Ngọc Sơn, Lê Nguyễn Gia Huy, Đặng Đình Huy, Phạm Huỳnh, 7B, Trần Anh Tuấn, Phạm Thị Thúy Diệp, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** Lê Tuấn Kiệt, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/471. Giải phương trình

$$\sqrt{2x-2} + \sqrt[3]{x-2} = \frac{9-x}{\sqrt[3]{8x-16}}$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ 8x-16 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Cách 1. Đặt $a = \sqrt{2x-2}$; $b = \sqrt[3]{x-2}$ (với $a \geq 0$, $b \neq 0$) ta có $a^2 = 2x-2 = 2(x-2) + 2 = 2b^3 + 2$, nên $a^2 = 2b^3 + 2$ (1).

Biến đổi PT đã cho thành

$$\sqrt{2x-2} + \sqrt[3]{x-2} = \frac{16-(2x-2)}{4\sqrt[3]{x-2}}$$

$$\text{nhân: } a+b = \frac{16-a^2}{4b} \Leftrightarrow (a+2b)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4-2b \\ a = -4-2b \end{cases}$$

Nếu $a = -4-2b$ thì do $a \geq 0$ nên $b \leq -2$; từ (1) ta lại có $2b^3 = a^2 - 2 \geq -2 \Rightarrow b \geq -1$ (mâu thuẫn). Vậy $a = 4-2b$. Thay vào (1) ta được

$$(4-2b)^2 = 2b^3 + 2 \Leftrightarrow (b-1)(b^2-b+7) = 0 \quad (2)$$

Vì $b^2-b+7 = \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$ nên từ (2) suy

ra $b = 1$, do đó $a = 2$.

Từ đó tìm được $x = 3$ (thỏa mãn ĐK).

Cách 2. • Với $x = 3$ thì

$$VT = \sqrt{3 \cdot 2 - 2} + \sqrt[3]{3-2} = 2+1=3;$$

$$VP = \frac{9-3}{\sqrt[3]{8 \cdot 3 - 16}} = \frac{6}{2} = 3. \text{ Nhận thấy } VT = VP,$$

nhên $x = 3$ là nghiệm của phương trình.

• Xét $x > 3$ thì

$$\sqrt{2x-2} > \sqrt{2 \cdot 3 - 2} = 2; \sqrt[3]{x-2} > \sqrt[3]{3-2} = 1;$$

$$9-x < 9-3=6; 0 < \frac{1}{\sqrt[3]{8x-16}} < \frac{1}{\sqrt[3]{8 \cdot 3 - 16}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{nhên } VT > 2+1=3 \text{ và } VP < \frac{6}{2} = 3.$$

Do đó $VT > VP$.

• Xét $2 < x < 3$ thì $\sqrt{2x-2} < 2$; $\sqrt[3]{x-2} < 1$;

$$9-x > 6; \frac{1}{\sqrt[3]{8x-16}} > \frac{1}{2}, \text{ nhên } VT < 3 \text{ và } VP > 3.$$

Do đó $VT < VP$.

Xét $1 \leq x < 2$ thì $\sqrt{2x-2} \geq 0$; $\sqrt[3]{x-2} \geq -1$ nên

$$VT > -1; 9-x > 7; -2 \leq \sqrt[3]{8x-16} < 0$$

$$\Rightarrow 0 < -\sqrt[3]{8x-16} < 2 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt[3]{8x-16}} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{9-x}{\sqrt[3]{8x-16}} > \frac{7}{2} \Rightarrow VP = \frac{9-x}{\sqrt[3]{8x-16}} < -\frac{7}{2} < -1.$$

Do đó $VT > VP$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$. □

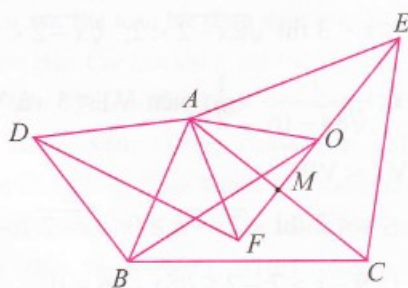
► **Nhận xét.** Đa số các bạn tham gia gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên. Một số bạn đặt ĐK còn thiếu $x \neq 2$ và khi giải bằng **Cách 2** các bạn thường xét gộp trường hợp $1 \leq x < 3$ (mà không tách riêng $1 \leq x < 2$ và $2 < x < 3$) nên bị nhầm khi đánh giá. Có hai bạn ở THCS Thốt Nốt - TP. Cần Thơ làm chung một bài, điều này phạm quy nên không được tuyên dương. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Nghệ An:** Nguyễn Thị Linh Đan, 8D, Phan Thị Huyền Anh, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương. Lương Thị

Thanh Nhân, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Phú Thọ:** Nguyễn Thị Hiền, Nguyễn Thùy Dương, 9A3, Lê Trung Hiếu, 8A3, THCS Lâm Thao; **TP. Hồ Chí Minh:** Hoàng Đăng Khoa, 9A5, THCS Lam Sơn; **Quảng Trị:** Đoàn Nhật Thanh, 9D, THCS Nguyễn Trãi, TP Đông Hà; **Phú Yên:** Đàm Ngọc Hiếu, 9H, THCS Trần Hưng Đạo.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/471. Cho $\triangle ABC$. Bên ngoài tam giác đó vẽ các tam giác đều ABD và ACE . Gọi O là tâm của tam giác đều ACE . Trên tia đối của tia OE lấy điểm F sao cho $OF = OE$. Chứng minh rằng $DF = BO$.

Lời giải (Theo đa số các bạn).



Vì $OE = OF = OA$ và $\widehat{AOF} = 60^\circ$ nên tam giác AOF đều $\Rightarrow AO = AF$.

Mặt khác, vì $\widehat{DAB} = \widehat{FAO} = 60^\circ$ nên ta có

$\widehat{DAF} = \widehat{DAB} + \widehat{BAF} = \widehat{BAF} + \widehat{FAO} = \widehat{BAO}$. Từ đó, $\triangle DAF = \triangle BAO$ (c.g.c). Do đó $DF = BO$. $\square$

► **Nhận xét.** Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Đa số các bạn cho lời giải đúng và theo cách trình bày ở trên. Các bạn sau đây trình bày lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** Nguyễn Khánh Huyền, Lê Việt Hoàng, Lê Hoàng, 8D, THCS Xuân Diệu, Ttr. Nghèn, Can Lộc; **Nguyễn Nam Khánh,** 9A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; **Ngệ An:** Hoàng Mạnh Nghĩa, Trần Minh Duy, Lê Xuân Toàn, Nguyễn Xuân Đạt, Nguyễn Thu Hiền, 8D, Hoàng Anh Dũng, Nguyễn Đình Tuấn, Nguyễn Trọng Lượng, Thái Thị Cẩm Chi, Phan Thị Huyền Anh, Trần Văn Hiếu, Thái Bá Bảo, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương;

Vĩnh Phúc: Nguyễn Thị Khánh Ly, 8A4, Lê Hồng Nhung, 8A1, Dương Tiến Đạt, Nguyễn Trúc Quỳnh, 9A2, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** Bùi Thị Quỳnh, Nguyễn Thùy Dương, 9A3, Nguyễn Trọng Nhật, Nguyễn Đức Tân 8A3, THCS Lâm Thao; **Bình Thuận:** Huỳnh Vũ Khôi Nguyên, 9G, THPT chuyên Trần Hưng Đạo; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Quang Diêu, 8D, Lương Thị Thanh Nhân, 9A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Cương, 9A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/471. Cho tam thức $f(x) = 20x^2 - 11x + 2016$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên α sao cho

$$f(\alpha) : 2^{201^{1960}}.$$

Lời giải. Cách 1. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp bài toán tổng quát:

Với mọi số nguyên dương n thì tồn tại số nguyên α_n sao cho $f(\alpha_n) : 2^n$ (*).

Với $n = 1$ ta lấy $\alpha_1 = 2$ thì $f(2) : 2^1$. Giả sử bài toán đúng với $n = k$, tức là tồn tại số nguyên α_k sao cho $\beta = f(\alpha_k) : 2^k$. Ta sẽ chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Chọn $\alpha_{k+1} = \alpha_k + \beta$, ta thu được

$$f(\alpha_{k+1}) = 10\beta(2\beta + 4\alpha_k - 1) : 2^{k+1}.$$

Bài toán tổng quát (*) được chứng minh. Do đó tồn tại số nguyên α sao cho $f(\alpha) : 2^n$.

Cách 2. (của bạn Nguyễn Đặng Nhật Minh, 8C2, THCS Archimedes, Trung Yên, Yên Hòa, Hà Nội).

Ta chứng minh kết quả tổng quát hơn sau:

Với mọi số nguyên dương chẵn n thì tồn tại số nguyên α sao cho $f(\alpha) : n$ (**).

Chia $f(1), f(2), \dots, f(n)$ cho n sẽ có n số dư. Giả sử trong đó có hai số có cùng số dư khi chia cho n là $f(a)$ và $f(b)$ ($a > b$; $a, b \in \{1, \dots, n\}$). Khi đó $f(a) - f(b) : n$. Ta có:

$$f(a) - f(b) = 20(a^2 - b^2) - 11(a - b) \\ = (a - b)[20(a + b) - 11] : n.$$

Do n là số chẵn, $20(a + b) - 11$ là số lẻ nên $a - b : n$, suy ra $a - b \geq n$. Mặt khác, do $a, b \in \{1, \dots, n\}$ nên $a - b \leq n - 1$, điều này mâu thuẫn với $a - b \geq n$. Vậy giả sử trên là sai. Do đó các số $f(1), f(2), \dots, f(n)$ khi chia cho n sẽ cho n số dư đôi một khác nhau. Suy ra tồn tại số nguyên α sao cho $f(\alpha) : n$.

Vậy $f(\alpha) : 2^{2011960}$ (với $n = 2^{2011960}$). $\square$

► **Nhận xét.** Ngoài lời giải bài toán (**) của bạn Minh, bạn Nguyễn Đình Tuấn, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An cũng đã mở rộng, chứng minh được bài toán (*) bằng quy nạp. Bài toán đã cho có thể được tổng quát “mạnh” hơn không? Rất mong các bạn tiếp tục khai thác, mở rộng bài toán trên!

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/471. Giải phương trình

$$\frac{\log_2 x}{x^4 - 10x^2 + 26} = \frac{5 - x^2}{\log_2^2 x + 1}.$$

Lời giải. ĐK: $x > 0$. Phương trình trở thành với: $\log_2 x (\log_2^2 x + 1) = (5 - x^2)((5 - x^2)^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow \log_2^3 x + \log_2 x = (5 - x^2)^3 + 5 - x^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ (1) có $f(\log_2 x) = f(5 - x^2)$.

$$\text{Do đó: } \log_2 x = 5 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + \log_2 x - 5 = 0 \quad (2)$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 + \log_2 x - 5$; có

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x \ln 2} > 0 \quad \forall x > 0.$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(0; +\infty)$.

Mà $g(2) = 0$ nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = 2$ (thỏa mãn ĐK bài toán).

Vậy phương trình trong đầu bài có nghiệm duy nhất $x = 2$. $\square$

► **Nhận xét.** Rất nhiều bài toán về giải phương trình sử dụng mệnh đề sau: Nếu hàm số $f(t)$ luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trong khoảng $(a; b)$ và

$$u(x), v(x) \in (a; b) \text{ thì}$$

$$f(u(x)) = f(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x).$$

Có thể đến (2) bằng cách:

Đặt $a = \log_2 x$; $b = 5 - x^2$, dễ dàng thu được

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 5 - x^2.$$

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Hưng Yên:** Cao thành Trung, 11A3, THPT Dương Quảng Hàm; **Hà Nam:** Lê Phương Nam, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Ng An:** Phạm Đông Hải, Nguyễn Thị Ngân, 11T1, THPT chuyên Long An; **Quảng Nam:** Nguyễn Huy Hải, Trương Nhật Nguyên Bảo, Nguyễn Hoàng Hải, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, Nguyễn Thanh Huyền, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Trung Phương, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Quang Hùng, 11A1, THPT Cù Huy Cận; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Lê Minh Triết, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Tiền Giang:** Lê Hoàng Bảo, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Sóc Trăng:** Nguyễn Đức Thịnh, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Lâm Đồng:** Nguyễn Quốc Trung, 11T, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/471. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{y} + 4) + y \geq 13$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^4}{y} + \frac{y^3}{x} + y$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai, ba số thực dương ta có:

$$\begin{aligned} 13 &\leq (\sqrt{x}+1)(2\sqrt{y}+4)+y \\ &= 2\sqrt{xy}+2\sqrt{y}+4\sqrt{x}+4+y \\ &\leq (x+y)+(y+1)+2(x+1)+4+y \\ &\Rightarrow 6 \leq 3(x+y) \Rightarrow 2 \leq x+y \\ \text{và } P &= \frac{x^4}{y} + \frac{y^3}{x} + y = \left(\frac{x^4}{y} + y\right) + \left(\frac{y^3}{x} + x + 1\right) - x - 1 \\ &\geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x^4}{y} \cdot y} + 3\sqrt{\frac{y^3}{x} \cdot x} \cdot 1 - x - 1 \\ &= 2x^2 + 3y - x - 1 = 2(x^2 + 1) + 3y - x - 3 \\ &\geq 2.2x + 3y - x - 3 = 3(x+y) - 3 \geq 3.2 - 3 = 3. \end{aligned}$$

$\min P = 3$ khi và chỉ khi $x = y = 1$.

➤ **Nhận xét.** Bài toán bất đẳng thức trên thuộc dạng cơ bản, đơn giản. Các bạn lớp 9, lớp 10 sau có lời giải đúng:

Bắc Ninh: Nguyễn Hữu Tinh, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hưng Yên:** Dương Thành Đạt, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** Vũ Hoàng Long, 10T2, Phạm Chí Công, Nguyễn Hoàng Minh, Bùi Trọng Oánh, Lương Đức Thịnh, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghe An:** Đinh Viết Ty, 10T1, THPT Đô Lương I; **Thanh Hóa:** Lê Tiến Đạt, 10A1, THPT Nông Cống I, Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Linh Chi, Phan Đình Minh Quân, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Nam:** Nguyễn Lê Thanh Hằng, Lê Thảo Huyền, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Dịch Long, 10T, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Phú Yên:** Đàm Ngọc Hiếu, 9H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hòa; **Vĩnh Long:** Hồ Huy Hoàng, 10T2, Trần Linh, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/471. Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\cot A + \cot B} \geq \frac{16}{3} \cot A \cot B \cot C.$$

Lời giải. Chú ý đến đẳng thức

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

Đặt $x = \cot A, y = \cot B$ ($x, y > 0$) thì

$$\cot C = \frac{1-xy}{x+y} \Rightarrow 1-xy > 0.$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt[3]{x+y} \geq \frac{16}{3} xy \cdot \frac{1-xy}{x+y} \text{ hay}$$

$$3^3(x+y)^4 \geq 16^3 x^3 y^3 (1-xy)^3 \quad (*)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, rồi bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương ta có: $3^3(x+y)^4 \geq 3^3 \cdot 16x^2y^2$

$$= \frac{1}{3} \cdot 16x^2y^2 [3xy + (1-xy) + (1-xy) + (1-xy)]^4$$

$$\geq \frac{1}{3} \cdot 16x^2y^2 \cdot 4^4 \cdot 3xy(1-xy)^3 = 16^3 x^3 y^3 (1-xy)^3.$$

Vậy bất đẳng thức (*) được chứng minh, do đó BĐT đề bài được chứng minh. Đẳng thức xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } x = y \text{ và } 3xy = 1 - xy \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2},$$

$$\text{hay } \cot A = \cot B = \frac{1}{2} \text{ và } \cot C = \frac{3}{4}. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** Hoàng Lê Nhật Tùng, 12T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Nguyễn Thị Ngọc Khánh, 12B1, THPT Hậu Lộc 2, Hậu Lộc; **Nghe An:** Cao Hữu Đạt, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Quảng Trị:** Nguyễn Hoàng Quân, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Thị Phương Nhi, Phan Trần Hương, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Tiền Giang:** Lê Hoàng Bảo, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Vĩnh Long:** Nguyễn Khiêm, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/471. Cho ba số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=abc$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + \sqrt{(1+b^2)(1+c^2)} + \sqrt{(1+c^2)(1+a^2)} - \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq 4.$$

Lời giải. (Của bạn **Trần Minh Hiếu**, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Nam Định**).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \\ &= (1+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) + (a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2) \\ &= (ab+bc+ca-1)^2 + (a+b+c-abc)^2. \end{aligned}$$

Do $a+b+c=abc$ nên

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = (ab+bc+ca-1)^2 \quad (1)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 \\ a+b+c=abc \end{cases}$$

nên $ab+bc+ca \geq 9 \Rightarrow ab+bc+ca-1 > 0$.

Do đó từ (1) suy ra

$$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} = ab+bc+ca-1.$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + \sqrt{(1+b^2)(1+c^2)} + \\ + \sqrt{(1+c^2)(1+a^2)} \geq ab+bc+ca+3 \quad (2) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1+a^2)(1+b^2) &= (ab+1)^2 + (a-b)^2 \geq (ab+1)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} &\geq ab+1. \end{aligned}$$

Tương tự $\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)} \geq bc+1$

$$\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)} \geq ac+1.$$

Từ đó suy ra (2). Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=abc \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Bài này được nhiều bạn tham gia giải với nhiều cách giải khác nhau (có cách giải khá dài nhưng giải đúng). Lời giải ngắn nhất là lời giải trên. (Bạn **Tổng**

Ngọc Trung, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế, **Thừa Thiên Huế** cũng có lời giải tương tự như vậy) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** **Nguyễn Thị Linh Chi**, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hung Yên:** **Nguyễn Thị Hồng Diễm**, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Nam:** **Trương Nhật Nguyên Bảo**, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **TP. Hồ Chí Minh:** **Nguyễn Dịch Long**, 10CT, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Quảng Bình:** **Lê Hoàng Long**, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Hà Nội:** **Nguyễn Minh Hiếu**, 11 Toán 1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; **Vĩnh Long:** **Nguyễn Khiêm**, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, TP. Vĩnh Long.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/471. Một trung tâm mở ra 7 lớp học hè. Biết rằng mỗi học sinh trong trung tâm tham gia ít nhất một trong các lớp học này. Số liệu thống kê sau 7 lớp học cho thấy mỗi lớp học có x_j học sinh tham dự bằng nhau và bằng 40. Hỏi tại ra cứ hai lớp học bất kỳ thì có không quá 9 học sinh học cả hai lớp đó. Chứng minh rằng trung tâm dạy học có ít nhất 120 học sinh tham dự các lớp học đó.

Lời giải. Ký hiệu n là số học sinh tham dự các lớp học đó và với học sinh thứ j ký hiệu a_j là số lớp học học sinh đó tham gia. Ta lập bảng có 7 hàng và n cột. Ô (i, j) của dòng i và cột j được đánh dấu $\times$ nếu học sinh j tham gia lớp i .

Tổng số các dấu $\times$ nếu tính theo cột là $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, và tổng này là 7. $40 = 280$ nếu tính theo dòng (vì mỗi lớp có đúng 40 học sinh tham gia). Bây giờ ta tính S là số cặp $(\times, \times)$ theo cùng cột. Trên cột j có $C_{a_j}^2$ cặp, cho nên số

S các cặp $(\times, \times)$ theo cột là $C_{a_1}^2 + \dots + C_{a_n}^2 = \frac{1}{2}$

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Thay $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 280$ và áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n},$$

$$\text{ta có } S \geq \frac{280^2}{2n} - 140 \quad (*)$$

Mặt khác với mỗi cặp 2 dòng, chỉ có nhiều lắm có 9 cột có cặp $(\times, \times)$ trên 2 dòng này, cho nên tổng số các cặp $(\times, \times)$ cùng cột trên tất cả C_7^2 cặp 2 dòng không vượt quá $9C_7^2$ cặp $(\times, \times)$.

Ta có bất đẳng thức: $9C_7^2 \geq S$.

Thay vào (*), ta có $9C_7^2 \geq \frac{280^2}{2n} - 140$ và có

$$n \geq \frac{280^2}{2(9C_7^2 + 140)} > 119. \text{ Vậy } n \geq 120. \square$$

► **Nhận xét.** Bài này nhiều bạn gửi lời giải và đều giải đúng: **Sóc Trăng:** Lê Long Quốc, 12A1T, Nguyễn Đức Thịnh, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP Sóc Trăng; **Quảng Nam:** Trương Nhật Nguyên Bảo, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Trung Phương, 11A1, chuyên Vĩnh phúc; **Long An:** Phạm Quốc Thắng, 12T1, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Đặng Công Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Hồng Quốc Khánh, 12A1, Nguyễn Đức Bảo, Phạm Trần Anh, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Trị:** Nguyễn Hoàng Quân, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** Lê Đình Hải, Lê Hoàng Long, Hoàng Nhật Tuấn, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Hà Tĩnh:** Trần Nhật Tân, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T11/470. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = f\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) + (x - y)^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Đặt $f(0) = c$.

Thay $y = 0$ vào (1), ta thu được

$$f(0) = f\left(\frac{x^2}{2}\right) + x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

hay $f(t) = -2t + c, \forall t \geq 0$ (2). Thay $y = 1$ vào (1), ta thu được

$$f(x) = f\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) + (x - 1)^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f(x) = f\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) + (x - 1)^2 = -2 \cdot \frac{x^2 + 1}{2} + c + (x - 1)^2$$

$$= c - 2x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Thử lại ta thấy hàm}$$

$$f(x) = c - 2x \text{ thỏa mãn các điều kiện bài ra. } \square$$

► **Nhận xét.** Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm với cặp biến tự do trên $\mathbb{R}$. Rất nhiều bạn đã gửi bài giải về tòa soạn và giải theo cách trình bày ở trên, tức là không sử dụng đến giả thiết của bài ra để tìm liên lục của hàm $f(x)$. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bình Định:** Phan Lộc Sơn, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nam:** Lê Phương Nam, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội:** Nguyễn Minh Hiếu, 11T1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, Nguyễn Văn Dũng, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Đình Nhật, 10T1 THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** Chu Minh Vương, 11A, THPT Văn Giang, Triệu Ninh Ngân, 12A9, THPT Dương Quảng Hàm; **Long An:** Lê Trí Phú, 11T1, Đặng Thanh Tùng, 12T2, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** Nguyễn Thanh Huyền, 11T2, Vũ Thị Diệp, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Bảo, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Quảng Bình:** Lê Hoàng Long, 11T, Lê Đình Hải, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Nam:** Nguyễn Huy Hải, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Trị:** Nguyễn Hoàng Quân, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc**

Trăng: Lê Long Quốc, 12A1T, Nguyễn Đức Thịnh, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Tiền Giang:** Lê Hoàng Bảo, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Lê Tiến Đạt, 10A1, THPT Nông Công 1; **Tây Ninh:** Hà Nhất Phương, 11T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha; **Thừa Thiên Huế:** Lê Viết Thanh Long, 11T1, Tổng Ngọc Trung, 11T, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Lê Sơn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

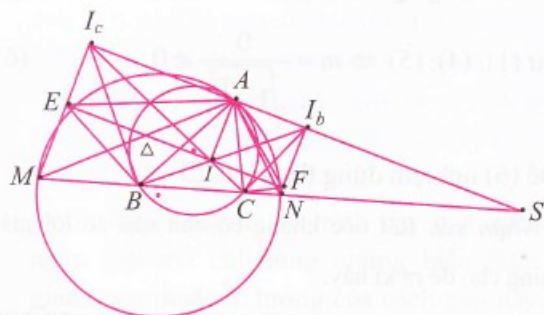
Bài T12/471. Cho tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc với AI . Các điểm E, F thuộc Δ sao cho $\widehat{EBA} = \widehat{FCA} = 90^\circ$. Các điểm M, N thuộc BC sao cho $ME \parallel NF \parallel AI$. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMN tiếp xúc với nhau.

Lời giải. Bỏ đề. Nếu các điểm M, N thuộc cạnh BC của tam giác ABC thì đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMN tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

Phép chứng minh bỏ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây. Trở lại giải bài toán 12.

Bỏ qua trường hợp đơn giản $AB = AC$.

Gọi I_b, I_c theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện với các đỉnh B, C của tam giác ABC ; S là giao điểm của BC và I_bI_c .



Dễ thấy A, B, I, I_c cùng thuộc đường tròn đường kính $I I_c$. Vì $\widehat{AIE} = \widehat{ABE} = 90^\circ$ nên A, B, I, E cùng thuộc đường tròn đường kính AE . Vậy $AI I_c$ là hình chữ nhật. Điều đó có nghĩa là $\widehat{MI_cS} = 90^\circ$ và $\widehat{AI_cE} = 90^\circ$

(1)

Tương tự $\widehat{NI_bS} = 90^\circ$ và $\widehat{AI_bF} = 90^\circ$

(2)

Vì IA, BI_b, CI_c đồng quy tại I nên $(\widehat{ASI_bI_c}) = -1$ (hàng điều hòa cơ bản). Từ đó, chú ý rằng

$I_cM \parallel I_bN$, suy ra $\frac{MI_c}{NI_b} = \frac{SI_c}{SI_b} = \frac{AI_c}{AI_b}$

(3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra các tam giác vuông AMI_c, ANI_b đồng dạng. Do đó $\widehat{MAI_c} = \widehat{NAI_b}$.

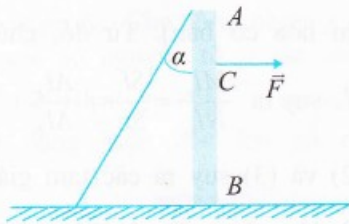
Kết hợp với $\widehat{BAI_c} = \widehat{CAI_b}$, suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

Vậy, theo bỏ đề trên, đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AMN tiếp xúc với nhau. $\square$

➤ Nhận xét. Đây là bài toán hay và khá khó, số bạn tham gia giải không nhiều. Xin nêu tên một số bạn lời giải tương đối tốt: **Sơn La:** Trần Hoàng Đạt, 11A1, THPT Mộc Ly, Mộc Châu; **Hà Nội:** Nguyễn Minh Hiếu, 11T, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Bảo, 11A1, Nguyễn Hồng Quốc Khánh, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** Trần Hậu Đức Thắng, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** Lê Viết Thanh Long, 11T1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Quảng Nam:** Nguyễn Phạm Nam Dương, 11T, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An; **Long An:** Phạm Quốc Thắng, 12T1, THPT chuyên Long An; **Sóc Trăng:** Nguyễn Đức Thịnh, 12A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/471. Một cột chiều dài $AB = 1,0 \text{ m}$ nặng $P = 500 \text{ N}$ được đặt thẳng đứng trên mặt đất nằm ngang ráp, hệ số ma sát là $\mu = 0,4$. Đầu A được neo chặt vào đất bằng dây thép, trọng lượng không đáng kể, nghiêng góc $\alpha = 37^\circ$ so với cột. Một lực F nằm ngang tác dụng vào điểm C của cột như hình dưới ($F > 0$).



a) C là trung điểm của AB . Tính lực F lớn nhất ($F = F_{\max}$) mà đầu B của cột còn chưa bị trượt.

b) C là điểm ứng với $n = \frac{AB}{AC} \geq 1$. Chứng minh rằng nếu C đủ thấp, tức là n đủ bé thì dù F lớn đến mấy đầu B cũng không trượt (giả thiết dây thép không bị đứt hoặc trượt đầu neo). Từ đó tìm n và BC ứng với độ cao ấy.

c) Cho $n = 2,5$; $F = 900 \text{ N}$. Tính lực căng dây T . (Lấy $\cos 37^\circ \approx 0,8$; $\sin 37^\circ \approx 0,6$).

Lời giải. a) Lực ma sát nghỉ cực đại tác dụng vào đầu B :

$$F_{ms} = \mu(P + T \cos \alpha) = 200 + 0,32T \quad (1)$$

Điều kiện cân bằng mômen đối với trục quay qua A cho ta: $F_{\max} = nF_{ms}$ (2)

Điều kiện cân bằng lực theo phương ngang:

$$F_{\max} = F_{ms} + T \sin \alpha \quad (3)$$

Từ các phương trình trên với $n = 2$ ta tìm được:

$$F_{\max} = 856 \text{ N}; F_{ms} = 428 \text{ N}; T = 714 \text{ N}.$$

b) Từ các phương trình trên ta tìm được lực

$$F_{\max} \text{ theo } n: F_{\max} = \frac{120n}{0,92 - 0,32n}.$$

Để lực $F_{\max}$ vô cùng lớn thì $n = \frac{0,92}{0,32} = 2,875$.

Khi đó $BC = 0,65 \text{ m}$.

c) Ta có $n = 2,5 < 2,875$. Để tính T ta dùng điều kiện cân bằng mômen đối với trục quay qua B :

$$F \cdot \frac{2}{3} AB = T \cdot AB \cdot \sin \alpha \Rightarrow T = 1000 \text{ N}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** Đề L1/471 đã được sửa cho chính xác là: “ n đủ bé”, “ C đủ thấp” và “ $n = 2,5$ ”. Rất tiếc không có bạn nào gửi lời giải bài này cho Tòa soạn.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/471. Chứng minh rằng vận tốc của hạt photon g chân không và trong mọi môi trường đều bằng c ; c là vận tốc của ánh sáng trong chân không có giá trị bằng 3.10^8 m/s .

Lời giải. Đã biết, khối lượng tương đối:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

Năng lượng của photon $E = hf$ (2); mặt khác

$$E = mc^2 \quad (3). \text{ Từ (2) và (3) } \Rightarrow m = \frac{hf}{c^2} \neq 0 \quad (4)$$

Khối lượng nghỉ của photon: $m_0 = 0$ (5)

$$\text{Từ (1), (4), (5) } \Rightarrow m = \frac{0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \neq 0 \quad (6)$$

Để (6) nghiệm đúng thì $v = c$. □

► **Nhận xét.** Rất tiếc không có bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T8/475. Given a uniform triangular prism $ABC.A'B'C'$ (the base ABC is an equilateral triangle). Let α be the angle between $A'B$ and $(ACC'A')$ and let β be the angle between $(A'BC')$ and $(ACC'A')$.

Prove that $\alpha < 60^\circ$ and $\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta = \frac{1}{3}$.

Problem T9/475. Let p, q be two coprime numbers.

Let $T = \left[\frac{p}{q} \right] + \left[\frac{2p}{q} \right] + \dots + \left[\frac{(q-1)p}{q} \right]$, where $[x]$ is the greatest integral number, that isn't exceed x and is called the integral part of x .

a) Find T .

b) Find p, q such that T is a prime number.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/475. Let S be the number of all the binary strings of length n with the property that the

sum of any 3 consecutive numbers on any of these strings is always positive. Prove that

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq S \leq \frac{13}{2} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n, \forall n \geq 3.$$

Problem T11/475. Find all functions $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ such

that $f\left(\frac{x}{x-y}\right) + f(xy) = f(xy(x))$, for every $x > y > 0$.

Problem T12/475. Given a triangle ABC . The incircle (I) of ABC is tangent to BC, CA , and AB at D, E , and F respectively. Let B_1 (resp. C_1) be the intersection between the lines which go through AB and DE (resp. AC and DF). Let H and K respectively be the orthocenter of ABC and AB_1C_1 . Prove that the line which goes through HK contains the point I .

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

TỨ GIÁC ĐIỀU HÒA ... (Tiếp theo trang 15)

Tam giác SS_1A_1 vuông tại S_1 có đường cao S_1A nên $SA.SA_1 = SS_1^2$. Tương tự

$$SB.SB_1 = SS_1^2; SC.SC_1 = SS_1^2; SD.SD_1 = SS_1^2.$$

Xét các tam giác SAB và SB_1A_1 ta có

$$SA.SA_1 = SB.SB_1 (= SS_1^2) \Rightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{SB_1}{SA_1} \text{ và góc ở đỉnh}$$

S chung nên hai tam giác này đồng dạng. Suy ra

$$\frac{BA}{B_1A_1} = \frac{SA}{SB_1} = \frac{SA.SB}{SB.SB_1} = \frac{SA.SB}{SS_1^2} \text{ do đó } BA = B_1A_1 \cdot \frac{SA.SB}{SS_1^2}.$$

$$\text{Tương tự } BC = B_1C_1 \cdot \frac{SB.SC}{SS_1^2}, DA = D_1A_1 \cdot \frac{SD.SA}{SS_1^2},$$

$$DC = D_1C_1 \cdot \frac{SD.SC}{SS_1^2}. \text{ Từ đó}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{B_1A_1.SA.SB}{B_1C_1.SB.SC} = \frac{D_1A_1.SD.SA}{D_1C_1.SD.SC} \Leftrightarrow \frac{B_1A_1}{B_1C_1} = \frac{D_1A_1}{D_1C_1} \quad (2)$$

Do A_1, B_1, C_1, D_1 là bốn điểm phân biệt thẳng hàng

$$\text{nên } (2) \Leftrightarrow (A_1C_1B_1D_1) = -1 \Leftrightarrow S(A_1C_1B_1D_1) = -1$$

$$\Leftrightarrow S(ACBD) = -1 \text{ (đpcm).}$$

Từ bài toán trên ta có thể xây dựng hệ thống các kiến thức về tứ giác điều hòa dựa trên các kiến thức quen thuộc của sách giáo khoa môn Toán. Cụ thể là sau khi giải bài toán trên ta có thể định nghĩa tứ giác điều hòa như trong tài liệu chuyên hình học Lớp 10: "Tứ giác nội tiếp $ABCD$ được gọi là điều hòa nếu

tồn tại điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác sao cho $M(ACBD) = -1$ " trong đó $M(ACBD) = -1$ là kí hiệu của chùm MA, MC, MB, MD là chùm điều hòa. Từ đó ta có thể định nghĩa "Tứ giác nội tiếp $ABCD$ được gọi là điều hòa nếu $AB.CD = AD.BC$ ". "Tứ giác điều hòa là tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối diện bằng nhau". Từ đó chứng minh một số tính chất cơ bản của tứ giác điều hòa xem như bổ đề khi giải toán. Chẳng hạn các tính chất hay được sử dụng sau:

"Trong tứ giác nội tiếp $ABCD$ ta có $AB.CD = AD.BC$ khi và chỉ khi các đường phân giác của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ cùng đi qua một điểm trên BD hoặc $AB.CD = AD.BC$ khi và chỉ khi các đường phân giác của các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ đi qua một điểm trên AC ".

"Trong tứ giác nội tiếp $ABCD$, nếu đường chéo AC không đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác thì $AB.CD = AD.BC$ khi và chỉ khi các tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tứ giác tại A và C cắt nhau trên BD ; nếu đường chéo BD không đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác thì $AB.CD = AD.BC$ khi và chỉ khi các tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tứ giác tại B và D cắt nhau trên AC ". Các bạn có thể dùng các kiến thức quen thuộc của sách giáo khoa môn Toán để chứng minh các tính chất trên hoặc có thể xem ở tài liệu "Một số chuyên đề hình học phẳng bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông" của tác giả Đỗ Thanh Sơn.



PHƯƠNG PHÁP LẬP BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ ĐỂ CHỨNG MINH MỘT DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

Trong quá trình giải toán bất đẳng thức (BĐT) ta thường gặp dạng sau đây:

Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$ thỏa mãn điều kiện $g(a_1) + g(a_2) + \dots + g(a_n) \geq k (\leq k)$. Chứng minh rằng $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq M (\leq M)$ (*).

Để chứng minh BĐT này ta có thể xây dựng và chứng minh một BĐT phụ có dạng:

$$f(x) \geq f(x_0) + m[g(x) - g(x_0)], \forall x \in D$$

là một BĐT đúng, trong đó $f(x), g(x)$ là hai hàm số xác định trong miền D và x_0 là điểm rơi của BĐT đã cho khi đẳng thức xảy ra. Nghĩa là ta xác định m để tạo ra một BĐT phụ có dạng trên và đồng thời chứng minh BĐT phụ đó đúng khi m tìm được.

Bài viết này xin nêu ra hai cách tìm m như sau:

Cách 1. Ta có $f(x) \geq f(x_0) + m[g(x) - g(x_0)]$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) - m[g(x) - g(x_0)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)[h(x) - mk(x)] \geq 0.$$

Để cho biểu thức $[h(x) - mk(x)]$ có nghiệm $x = x_0$ ta tìm m sao cho $h(x_0) - mk(x_0) = 0$.

Như vậy BĐT được viết lại dưới dạng

$$(x - x_0)^2 \cdot P(x) \geq 0.$$

Nếu $P(x) \geq 0, \forall x \in D$ đúng thì ta có BĐT phụ cần tìm.

Cách 2. Giả sử hai hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm trong D .

Để đưa BĐT về dạng $(x - x_0)^2 \cdot P(x) \geq 0$ suy ra

$$F(x) = f(x) - f(x_0) - m[g(x) - g(x_0)] \text{ có nghiệm}$$

kép $x = x_0$ nghĩa là m cần tìm thỏa mãn $PTF'(x_0) = 0$.

Nên nhớ rằng chúng ta đi tìm BĐT phụ chỉ mới đi tìm hướng giải quyết cho bài toán, còn chứng

minh BĐT phụ chính là điều quyết định giải bài toán đó. Trong bài viết này chỉ nêu hai cách chứng minh BĐT phụ dựa theo hai cách tìm m trên.

+ Với sự cho phép trong khuôn khổ bài viết chúng tôi nêu ra các dạng toán tiêu biểu sau đây:

CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \leq 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} + \frac{c^2}{c+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Phân tích. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{x+1}, g(x) = \frac{1}{x}$ và tìm m sao cho $f(x) \geq f(x_0) + m[g(x) - g(x_0)]$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} \geq \frac{1}{2} + m\left(\frac{1}{x} - 1\right), \forall x > 0.$$

$$\text{Xét hàm số } F(x) = \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{2} - m\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} + \frac{m}{x^2} \Rightarrow F'(1) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy BĐT phụ là } \frac{x^2}{x+1} \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x} - 1\right), \forall x > 0.$$

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh

$$\frac{x^2}{x+1} \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x} - 1\right), \forall x > 0 \quad (1)$$

$$\text{Xét } F(x) = \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} - \frac{3}{4x^2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{(x-1)(4x^3 + 12x^2 + 9x + 3)}{4x^2(x+1)^2}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên
 $\Rightarrow F(x) \geq F(1) = 0, \forall x > 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} - 1 \right), \forall x > 0 \text{ luôn đúng.}$$

Lần lượt thay x bằng a, b, c vào (1), ta có

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} + \frac{c^2}{c+1} \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{9}{4} \geq \frac{3}{2}.$$

Vậy $\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} + \frac{c^2}{c+1} \geq \frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra
 $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài toán 2. Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2+3bc} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2+3ac} + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2+3ab} \geq \frac{1}{2}.$$

Phân tích. Chưa thấy rõ hai hàm số $f(x), g(x)$ nhưng ta chuẩn hóa $a^2+b^2+c^2=3$ và $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow abc \leq 1$, khi đó ta có

$$\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ac} + \frac{c^2}{1+ab} \geq \frac{a^3}{1+a} + \frac{b^3}{1+b} + \frac{c^3}{1+c}.$$

Ta cần chứng minh $\frac{a^3}{1+a} + \frac{b^3}{1+b} + \frac{c^3}{1+c} \geq \frac{3}{2}$ với $a^2+b^2+c^2=3$.

Lúc này xuất hiện $f(x) = \frac{x^3}{1+x}, g(x) = x^2$ và điểm rơi tại $x_0 = 1$. Ta tìm m sao cho

$$\frac{x^3}{1+x} \geq \frac{1}{2} + m(x^2-1), \forall x \in (0; \sqrt{3}) \Rightarrow m = \frac{5}{8}.$$

Suy ra BĐT phụ $\frac{x^3}{1+x} \geq \frac{5x^2-1}{8}, \forall x \in (0; \sqrt{3})$.

Lời giải. Nhận thấy BĐT là thuần nhất nên ta chuẩn hóa $a^2+b^2+c^2=3$.

$$\text{BĐT trở thành } \frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ac} + \frac{c^2}{1+ab} \geq \frac{3}{2}.$$

Mặt khác $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow abc \leq 1$.
Do đó

$$\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ac} + \frac{c^2}{1+ab} \geq \frac{a^3}{1+a} + \frac{b^3}{1+b} + \frac{c^3}{1+c}.$$

Ta chứng minh BĐT phụ

$$\frac{x^3}{1+x} \geq \frac{5x^2-1}{8}, \forall x \in (0; \sqrt{3}) \quad (2)$$

Thật vậy

$$(2) \Leftrightarrow (x-1)^2(3x+1) \geq 0, \text{ đúng } \forall x \in (0; \sqrt{3}).$$

Lần lượt thay x bằng a, b, c vào BĐT (2) ta có

$$\frac{a^3}{1+a} + \frac{b^3}{1+b} + \frac{c^3}{1+c} \geq \frac{1}{8} [5(a^2+b^2+c^2)-3] = \frac{3}{2}.$$

Từ đó BĐT đã cho được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài toán 3. Cho các số a, b, c dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}} + \frac{b}{\sqrt{1+b}} + \frac{c}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Phân tích. Nhận thấy $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ nhưng chưa tìm được ngay hàm số $g(x)$.

Từ $abc = 1 \Rightarrow \ln a + \ln b + \ln c = 0$ ta có $\ln x = \ln a$, và điểm rơi chính là $x_0 = 1$.

Do đó ta tìm m sao cho

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} + m \ln x \Rightarrow m = \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh BĐT

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln x, \forall x \in (0; +\infty) \quad (3)$$

$$\text{Xét } F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln x$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{2+x}{2\sqrt{(x+1)^3}} - \frac{3}{4\sqrt{2}x} \Rightarrow F'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(8x^3+31x^2+36x+9) = 0.$$

Lập bảng xét dấu ta suy ra $F(x) \geq F(1) = 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln x, \forall x \in (0; +\infty).$$

Lần lượt thay x bằng a, b, c vào (3) rồi cộng vế

$$\text{theo vế ta có } \frac{a}{\sqrt{1+a}} + \frac{b}{\sqrt{1+b}} + \frac{c}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Nhận xét. Từ $abc = 1 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3$ suy ra hàm $g(x) = x^3$ có cách giải đơn giản hơn.

Bài toán 4. Cho 3 số a, b, c không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \leq 27.$$

Lời giải. Với mọi a, b, c không âm có

$$a^2 + a + 1 > 0, b^2 + b + 1 > 0, c^2 + c + 1 > 0.$$

Lôgarit hai vế, BĐT được viết lại

$$\ln(a^2 + a + 1) + \ln(b^2 + b + 1) + \ln(c^2 + c + 1) \leq \ln 27.$$

Ta chứng minh BĐT phụ:

$$\ln(x^2 + x + 1) \leq \ln 3 - 1 + x, \forall x \in [0; 3].$$

Thật vậy, xét $F(x) = \ln(x^2 + x + 1) - \ln 3 + 1 - x$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - 1 = \frac{-x^2+x}{x^2+x+1}.$$

Lập bảng biến thiên ta có

$$F(x) \leq F(1) = 0, \forall x \in [0; 3]$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) \leq \ln 3 - 1 + x, \forall x \in [0; 3] \quad (4)$$

Lần lượt thay x bằng a, b, c vào (4) ta có

$$\ln(a^2 + a + 1) + \ln(b^2 + b + 1) + \ln(c^2 + c + 1) \leq \ln 27.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài toán 5. Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $5(ab + bc + ca) = 3(a + b + c) + 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = ab^2(b+1) + bc^2(c+1) + ca^2(a+1).$$

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh BĐT phụ

$$x^3 + x^2 \geq 5x - 3, \forall x \geq 0. \text{ Thật vậy}$$

$$F(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 \text{ có } F'(x) = 3x^2 + 2x - 5.$$

Lập bảng biến thiên ta có $F(x) \geq F(1) = 0, \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 \geq 5x - 3, \forall x \geq 0 \quad (5).$$

Thay $x = a \geq 0$ vào (5) ta có $a^3 + a^2 \geq 5a - 3$ và vì $c \geq 0$ nên $ca^2(a+1) \geq 5ac - 3c$.

Tương tự

$$ab^2(b+1) \geq 5ba - 3a, bc^2(c+1) \geq 5cb - 3b.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên có

$$\begin{aligned} ab^2(b+1) + bc^2(c+1) + ca^2(a+1) \\ \geq 5(ab + bc + ca) - 3(a + b + c) = 6. \end{aligned}$$

Vậy $\min S = 6 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Nhận xét. Ta nhận thấy bài toán trên không thể tách các biến ra độc lập, ngoài cách giải trên ta còn có thể lấy một biến nào đó làm ẩn còn biến còn lại làm tham số. Ta xem ví dụ sau:

Bài toán 6. Cho ba số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b}.$$

Lời giải. Tổng trên có tính thuần nhất, ta chuẩn hóa $a + b + c = 1$, tổng trên được viết lại

$$S = \frac{a}{1+c-a} + \frac{b}{1+a-b} + \frac{c}{1+b-c}.$$
 Ta chứng minh

$$\frac{a}{1+x-a} \geq a - a(x-a), \forall x \in (0; 1) \quad (6)$$

$$\text{Xét } F(x) = \frac{a}{1+x-a} - a + a(x-a)$$

$$\Rightarrow F'(x) = -\frac{a}{(1+x-a)^2} + a$$

$$= \frac{a^2 + 2(1-a)x + a^2 - 2a}{(1+x-a)^2}.$$

Từ bảng biến thiên ta có

$$F(x) \geq F(a) = 0, \forall a, x \in (0; 1).$$

Thay $x = c \in (0; 1)$ vào (6), ta có

$$\frac{a}{1+c-a} \geq a - a(c-a), \forall a, c \in (0; 1).$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{1+a-b} \geq b - b(a-b),$$

$$\frac{c}{1+b-c} \geq c - c(b-c), \forall a, b, c \in (0; 1).$$

Cộng theo vế ba BĐT trên ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{1+c-a} + \frac{b}{1+a-b} + \frac{c}{1+b-c} \\ &\geq a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy $\min S = 1 \Leftrightarrow a = b = c$.

Nhận xét. Bài toán 6 có thể được giải gọn hơn bằng cách sử dụng BĐT Schwarz.

Bài toán 7. Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 9. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3 + b^3}{ab + 9} + \frac{b^3 + c^3}{bc + 9} + \frac{c^3 + a^3}{ca + 9} \geq 9.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9} \geq \frac{4(a^3+b^3)}{(a+b)^2+36} \geq \frac{(a+b)^3}{(a+b)^2+36}.$$

Tương tự với hai BĐT còn lại rồi cộng theo vế

$$\begin{aligned} \text{ta có: } & \frac{a^3+b^3}{ab+9} + \frac{b^3+c^3}{bc+9} + \frac{c^3+a^3}{ca+9} \\ & \geq \frac{(a+b)^3}{(a+b)^2+36} + \frac{(b+c)^3}{(b+c)^2+36} + \frac{(c+a)^3}{(c+a)^2+36}. \end{aligned}$$

Trước tiên ta chứng minh

$$\frac{x^3}{x^2+36} \geq x-3, \forall x \in (0; 18) \quad (8)$$

Thật vậy

$$(8) \Leftrightarrow x^3 \geq (x-3)(x^2+36) \Leftrightarrow (x-6)^2 \geq 0 \text{ (BĐT đúng)}.$$

Thay x lần lượt bằng $a+b, b+c, c+a$ ta có

$$\begin{aligned} & \frac{(a+b)^3}{(a+b)^2+36} + \frac{(b+c)^3}{(b+c)^2+36} + \frac{(c+a)^3}{(c+a)^2+36} \\ & \geq 2(a+b+c) - 9 = 9. \end{aligned}$$

Vậy $\frac{a^3+b^3}{ab+9} + \frac{b^3+c^3}{bc+9} + \frac{c^3+a^3}{ca+9} \geq 9$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Bài toán 8. Cho a, b, c là các số không âm chỉ có tối đa một số bằng 0. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$$

Phân tích. Nhìn thấy BĐT có tính đối xứng, nhưng đẳng thức xảy ra không vào tâm. Ta nghĩ ngay đến điểm rơi tại biên $a=0, b=c$ và các hoán vị của nó.

Lời giải. Ta nhận thấy đẳng thức xảy ra khi $a=0, b=c$ và các hoán vị của nó.

BĐT thuần nhất nên ta chuẩn hóa $a+b+c=2$,

$$\text{BĐT viết lại } \sqrt{\frac{a}{2-a}} + \sqrt{\frac{b}{2-b}} + \sqrt{\frac{c}{2-c}} \geq 2.$$

Ta chứng minh BĐT phụ

$$\sqrt{\frac{x}{2-x}} \geq x, \forall x \in [0; 2) \quad (9). \text{ Thật vậy}$$

$$(9) \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} \geq x^2 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)^2}{2-x} \geq 0, \forall x \in [0; 2)$$

luôn đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $x=0$ hoặc $x=1$.

Lần lượt thay x bằng a, b, c vào BĐT (9) rồi

$$\text{cộng lại ta có } \sqrt{\frac{a}{2-a}} + \sqrt{\frac{b}{2-b}} + \sqrt{\frac{c}{2-c}} \geq 2.$$

$$\text{Từ đó } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=0, b=c=1$ và các hoán vị của nó.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giả sử a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

2. Cho ba số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{a^3}{a^3+ab+2b^2} + \frac{b^3}{b^3+bc+2c^2} + \frac{c^3}{c^3+ca+2a^2} \\ & \geq \frac{a+b+c}{4}. \end{aligned}$$

4. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn

$$3(a+b+c) + 6abc \geq 12 + ab + bc + ca.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = a^3 + b^3 + c^3 + abc(a+b+c).$$

5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } S = \frac{a^3+b^3}{a+2b} + \frac{b^3+c^3}{b+2c} + \frac{c^3+a^3}{c+2a}.$$

6. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geq \frac{4}{3}.$$

7. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$



MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM HÀM LIÊN TỤC TRONG PHƯƠNG TRÌNH HÀM

TRẦN XUÂN ĐĂNG

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Trong bài viết này tác giả xin giới thiệu với bạn đọc một số phương pháp tìm hàm liên tục trong các phương trình hàm.

1. MỘT SỐ BÀI TOÁN TÌM HÀM LIÊN TỤC ĐƯỢC GIẢI BẰNG CÁCH XÉT MỘT DÃY SỐ HỘI TỤ

Trong kì thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Toán học Quốc tế năm 2007 có bài toán sau:

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm liên tục*

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn đề bài. Với $0 < x < \frac{1}{3}$: Xét dãy $(u_n) (n \in \mathbb{N}^*)$ được

xác định bởi $u_1 = x; u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{9}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được $0 < u_n < \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = \left(u_n - \frac{1}{3}\right)^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra

dãy (u_n) là dãy tăng. Vậy dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Do đó tồn tại số thực

$a \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$ sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

Ta có $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{9}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow f(u_{n+1}) = f\left(u_n^2 + \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{9}\right) = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow f(u_n) = f(u_1) = f(x), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(x).$$

Mặt khác $f(x)$ là hàm số liên tục nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\frac{1}{3}\right). \text{ Vậy } f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Với $x > \frac{1}{3}$: Xét dãy $(v_n) (n \in \mathbb{N}^*)$ được xác định bởi

$$v_1 = x; v_{n+1} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{4v_n - \frac{1}{3}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bằng phương pháp quy nạp chúng ta chứng minh được $v_n > \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$v_n - v_{n+1} = v_n^2 + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{4v_n - \frac{1}{3}}\right) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra (v_n) là dãy giảm. Vậy dãy (v_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Do đó tồn tại số thực

$b \left(b \geq \frac{1}{3}\right)$ sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}$. Ta có

$$f(v_n) = f\left(v_n^2 + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{9}\right) = f(v_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow f(v_n) = f(v_1) = f(x), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(x).$$

Mặt khác $f(x)$ là hàm số liên tục nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f\left(\frac{1}{3}\right). \text{ Vậy } f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Suy ra $f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right), \forall x > 0$. Với $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} = \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} > 0.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right).$$

$$\text{Đặt } k = f\left(\frac{1}{3}\right) \text{ ta có } f(x) = k, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = k, \forall x \in \mathbb{R}$ trong đó k là hằng số thỏa mãn đề bài.

Bài toán 2. Cho hàm số $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Hãy tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng $(-1;1)$ và thỏa mãn hệ thức $(1-x^2)f(g(x)) = (1+x^2)^2 f(x), \forall x \in (-1;1)$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm 2001 - Bảng A)

Cách tiếp cận lời giải: Hàm số $f(x) = \frac{1}{1-x^2},$

$\forall x \in (-1;1)$ thỏa mãn đề bài. Sau đây là lời giải bài toán 2 của tác giả bài viết này:

Xét hàm số $h: (-1;1) \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$h(x) = (1-x^2)f(x), \forall x \in (-1;1).$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{h(x)}{1-x^2} \text{ và } h(g(x)) = h(x), \forall x \in (-1;1).$$

Với $x \in (0;1)$: Xét dãy $(u_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ được xác

$$\text{định bởi } u_1 = x; u_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - u_n^2}}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Từ đó suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Suy ra dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0. \text{ Ta có } u_n = g(u_{n+1}). \text{ Suy ra}$$

$$h(u_{n+1}) = h(g(u_{n+1})) = h(u_n).$$

Vì $h(x)$ là hàm liên tục trên $(-1;1)$ nên

$$h(x) = h(u_1) = h(0).$$

Tương tự $h(x) = h(0), \forall x \in (-1;0).$

Vậy $h(x) = c, \forall x \in (-1;1)$ (c là hằng số). Suy ra

$$f(x) = \frac{c}{1-x^2}, \forall x \in (-1;1).$$

Thử lại ta thấy hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) = \frac{c}{1-x^2}, \forall x \in (-1;1) \text{ (} c \text{ là hằng số) thỏa mãn đề bài.}$$

2. HÀM LIÊN TỤC VÀ ĐƠN ÁNH

Định lý 1. Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và là đơn ánh. Khi đó f đồng biến trên $\mathbb{R}$ hoặc nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 3. Tìm tất cả các số thực k sao cho tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)) = kx^{25}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Với $k = 0$: Khi đó hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(f(x)) = kx^{25}, \forall x \in \mathbb{R}.$ Với $k \neq 0$: Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(f(x)) = kx^{25}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Khi đó f đơn ánh. Suy ra f đồng biến trên $\mathbb{R}$ hoặc f nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $k < 0$: Giả sử f nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó $f(-1) > f(0) \Rightarrow f(f(-1)) < f(f(0)) \Rightarrow -k < 0 \Rightarrow k > 0.$ Đó là điều vô lí.

Giả sử f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

$$f(-1) < f(0) \Rightarrow f(f(-1)) < f(f(0))$$

$$\Rightarrow -k < 0 \Rightarrow k > 0. \text{ Đó là điều vô lí.}$$

Với $k > 0$: Chọn hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) = \sqrt[25]{k}x^5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $f(f(x)) = kx^{25}, \forall x \in \mathbb{R}.$ Vậy số thực k thỏa mãn đề bài khi và chỉ khi $k \geq 0.$

Trong tạp chí Kvant tháng 11 năm 1986 có bài toán sau:

Bài toán 4. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(f(x)) = f(x) + x, \forall x \in \mathbb{R}.$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(f(x)) = f(x) + x, \forall x \in \mathbb{R}.$ Dễ dàng chứng minh được f đơn ánh và $f(0) = 0.$ Vì f

liên tục trên $\mathbb{R}$ và f đơn ánh nên f đồng biến trên $\mathbb{R}$ hoặc f nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 1. f nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Với $x \in \mathbb{R}$, xét dãy $(u_n) (n \in \mathbb{N})$ sao cho

$$u_0 = x, u_1 = f(x), u_{n+1} = f(u_n) (n \in \mathbb{N}).$$

Khi đó ta có $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Suy ra } u_n = \frac{f(x) - \alpha_2 x}{\sqrt{5}} \alpha_1^n + \frac{\alpha_1 x - f(x)}{\sqrt{5}} \alpha_2^n$$

$$\text{trong đó } \alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Với $x > 0$ ta có $f(x) < 0, f(f(x)) > 0$. Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được $u_{2k+1} < 0, u_{2k} > 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Vì $u_{2k} > 0$ nên

$$\frac{f(x) - \alpha_2 x}{\sqrt{5}} \alpha_1^{2k} + \frac{\alpha_1 x - f(x)}{\sqrt{5}} \alpha_2^{2k} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - \alpha_2 x}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha_1 x - f(x)}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{2k} > 0$$

$$\text{Vì } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{2k} = 0 \text{ nên } f(x) - \alpha_2 x \geq 0.$$

Vì $u_{2k+1} < 0$ nên

$$\frac{f(x) - \alpha_2 x}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha_1 x - f(x)}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{2k+1} < 0.$$

$$\text{Vì } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{2k+1} = 0 \text{ nên } f(x) - \alpha_2 x \leq 0.$$

Vậy $f(x) = \alpha_2 x, \forall x > 0$. Tương tự

$$f(x) = \alpha_2 x, \forall x < 0 \Rightarrow f(x) = \alpha_2 x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2. f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $x > 0$ ta có $f(x) > 0$.

Mặt khác $f(f(x)) = f(x) + x$.

Suy ra $f(f(x)) > x$. Với $x < 0$, ta có $f(x) < 0$.

Mặt khác $f(f(x)) = f(x) + x$.

Suy ra $f(f(x)) < x$.

Ta có f liên tục trên $\mathbb{R}$. Vậy $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

Mặt khác f đơn ánh nên tồn tại hàm $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

sao cho $g(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(g(x)) = x,$

$\forall x \in \mathbb{R}$ (g là hàm ngược của f), g đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g(0) = 0$.

Với $x \in \mathbb{R}$ ta có $x = g(g(x)) + g(x)$.

Thật vậy, đặt $g(x) = y, g(y) = t$ ta có

$$g(g(x)) = g(y) = t, y = f(t)$$

$$\Rightarrow g(g(x)) + g(x) = t + f(t) = f(f(t)) = f(y) = x$$

$$\Rightarrow g(g(x)) = x - g(x).$$

Với $x \in \mathbb{R}$, xét dãy $(v_n) (n \in \mathbb{N})$ được xác định như sau:

$$v_0 = x, v_1 = g(x), v_{n+1} = g(v_n) (n \in \mathbb{N}).$$

Ta có $v_{n+2} = v_n - v_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Suy ra } v_n = \frac{g(x) - \lambda_2 x}{\sqrt{5}} \lambda_1^n + \frac{\lambda_1 x - g(x)}{\sqrt{5}} \lambda_2^n \text{ trong}$$

$$\text{đó } \lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Với $x > 0$ ta có $g(x) > 0$. Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$v_{2k} = \frac{g(x) - \lambda_2 x}{\sqrt{5}} \lambda_1^{2k} + \frac{\lambda_1 x - g(x)}{\sqrt{5}} \lambda_2^{2k} > 0, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{g(x) - \lambda_2 x}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \right)^{2k} + \frac{\lambda_1 x - g(x)}{\sqrt{5}} > 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Vì } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \right)^{2k} = 0 \text{ nên } \lambda_1 x - g(x) \geq 0.$$

Ta có

$$v_{2k+1} = \frac{g(x) - \lambda_2 x}{\sqrt{5}} \lambda_1^{2k+1} + \frac{\lambda_1 x - g(x)}{\sqrt{5}} \lambda_2^{2k+1} > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{g(x) - \lambda_2 x}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \right)^{2k+1} + \frac{\lambda_1 x - g(x)}{\sqrt{5}} < 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Vì } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \right)^{2k+1} = 0 \text{ nên } \lambda_1 x - g(x) \leq 0.$$

Vậy $\lambda_1 x - g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = \lambda_1 x, \forall x > 0$.

Tương tự $g(x) = \lambda_1 x, \forall x < 0$. Từ đó suy ra

$$g(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng phương pháp giải của bài toán 4 chúng ta có thể giải được bài toán sau:

Bài toán 5. *Tìm tất cả các hàm f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

1) f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$;

2) f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$;

3) $f(f(x)) = f(x) + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$.

(Bài toán 7 của đề thi VMO 2012)

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các điều kiện đề bài. Khi đó f là đơn ánh. Suy ra $f(0) = 0$. Vì f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ và là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại hàm g xác định trên $\mathbb{R}$, tăng trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(g(x)) = x$.

$$g(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (} g \text{ là hàm ngược của } f \text{),}$$

$$g(x) \text{ là hàm tăng và } g(0) = 0.$$

$$\text{Ta chứng minh } g(g(t)) = \frac{1}{12}t - \frac{1}{12}g(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Thật vậy với } t \in \mathbb{R}, \text{ đặt } g(t) = y \text{ ta có } f(y) = t.$$

$$\text{Đặt } g(y) = x \text{ ta có } f(x) = y \Rightarrow g(g(t)) = g(y) = x.$$

$$\text{Ta có } t = f(y) = f(f(x)) \text{ và } f(f(x)) = f(x) + 12x$$

$$\Rightarrow t = g(t) + 12g(g(t)) \Rightarrow g(g(t)) = \frac{1}{12}t - \frac{1}{12}g(t).$$

Với $t \in \mathbb{R}$, xét dãy $(u_n) (n \in \mathbb{N})$ được xác định bởi $u_0 = t$ và $u_{n+1} = g(u_n) (n \in \mathbb{N})$.

$$\text{Khi đó } u_{n+2} = \frac{1}{12}u_n - \frac{1}{12}u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{4}{7}t + \frac{12}{7}g(t)\right) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{3}{7}t - \frac{12}{7}g(t)\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta có $g(g(t)) = \frac{1}{12}t - \frac{1}{12}g(t)$. Nếu $t > 0$ thì

$$u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Với } k \in \mathbb{N}, \text{ ta có } u_{2k} > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2k} \left[\frac{4}{7}t + \frac{12}{7}g(t)\right] + \frac{3}{7}t - \frac{12}{7}g(t) > 0.$$

$$\text{Vì } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2k} = 0 \text{ nên } \frac{3}{7}t - \frac{12}{7}g(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow g(t) \leq \frac{1}{4}t. \text{ Với } k \in \mathbb{N} \text{ ta có } u_{2k+1} > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2k+1} \left[\frac{4}{7}t + \frac{12}{7}g(t)\right] - \frac{3}{7}t + \frac{12}{7}g(t) > 0$$

$$\Rightarrow g(t) \geq \frac{1}{4}t. \text{ Do đó } g(t) = \frac{1}{4}t, \forall t > 0.$$

$$\text{Tương tự ta có } g(t) = \frac{1}{4}t, \forall t < 0.$$

$$\text{Vậy } g(x) = \frac{1}{4}x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra } f(t) = 4t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tại lại ta thấy hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = 4x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn đề bài.

3. HÀM SỐ LIÊN TỤC VÀ CỘNG TÍNH

Định nghĩa. Hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là cộng tính nếu $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Định lý 2. Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục và cộng tính. Khi đó, $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ trong đó a là hằng số.

Bài toán 6. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{thỏa mãn } f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g(x)$ là hàm liên tục, $g(0) = 0$ và

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2} \quad (1), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = 0$ vào (1) ta được

$$g(x) = 2g\left(\frac{x}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g(x+y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ trong đó } a \text{ là hằng số.}$$

Suy ra $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ trong đó a, b là các hằng số.

4. SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG GIAN CỦA HÀM LIÊN TỤC

Định lý 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ sao cho $f(a)f(b) < 0$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Bài toán 7. Tìm tất cả các cặp số thực không âm (a, b) sao cho tồn tại duy nhất một hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)) + f(x) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Giả sử a, b là các số thực không âm sao cho tồn tại duy nhất một hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)) + f(x) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = mx + p, \forall x \in \mathbb{R}$ trong đó m và p là các hằng số.

$f(f(x)) + f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m^2 + m - a = 0$ (1) và $(m+2)p = b$. Nếu $a \neq 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -2. Khi đó tồn tại hai hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(f(x)) + f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$. Đó là điều vô lý. Vậy $a = 2$. Khi đó, nếu $b = 0$ thì mọi hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = -2x + p, \forall x \in \mathbb{R}$ trong đó p là một hằng số thỏa mãn

$$f(f(x)) + f(x) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đó là điều vô lý. Vậy $b > 0$. Ngược lại, giả sử $a = 2, b > 0$ và tồn tại hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(f(x)) + f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) = x_0$ suy ra

$$2x_0 + b = f(f(x_0)) + f(x_0) = f(x_0) + x_0 = 2x_0.$$

Đó là điều vô lý. Vì f là hàm liên tục nên $f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) < x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$g(x) = f(x) - x - \frac{b}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 1: $f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$g(x) > -\frac{b}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } g(x) \text{ là hàm số liên}$$

$$\text{tục và } g(f(x)) = f(f(x)) - f(x) - \frac{b}{3} = 2x + b - 2f(x) - \frac{b}{3}$$

$$= -2g(x). \text{ Với } x \in \mathbb{R}, \text{ xét dãy } (u_n) (n \in \mathbb{N}) \text{ sao}$$

$$\text{cho } u_0 = x, u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Khi đó ta có } g(u_n) = (-2)^n g(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nếu $g(x) > 0$, khi đó $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(u_{2k+1}) = -\infty$. Đó là điều vô lý. Nếu $g(x) < 0$, khi đó $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(u_{2k}) = -\infty$.

Đó là điều vô lý. Vậy $g(x) = 0$.

Trường hợp 2: $f(x) < x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tương tự như trường hợp 1 ta cũng có $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Trong mọi trường hợp ta đều có

$$g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra } f(x) = x + \frac{b}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) = x + \frac{b}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ thỏa mãn}$$

$$f(f(x)) + f(x) = 2x + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy cặp số thực không âm (a, b) thỏa mãn đề bài khi và chỉ khi $a = 2, b > 0$.

BÀI TẬP

1. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x^2 + \frac{1}{4}) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x^2 + \frac{5}{36}) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
3. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x^2 - 6) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
4. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(f(x))) + f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.
5. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(f(x+y+xy))) = f(x) + f(y) + f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$.
6. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + f(y)) = 2y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.
7. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
8. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: [-1;1] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(2x^2 - 1) = 2xf(x), \forall x \in [-1;1]$.
9. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + f(y)) = y + f(x+1), \forall x, y \in \mathbb{R}$.
10. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x-y)f(y-z)f(z-x) + 8 = 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ (VMO 2006).
11. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $xf(y) + f(x) - xy - 1 = f(xy - f(x) - yf(x) + 1), \forall x, y \in \mathbb{R}$.
12. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)) = f(x) + 6x, \forall x \in \mathbb{R}$.

MỪNG BẢO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ 54 MÙA XUÂN

*Mừng xuân báo toán những năm qua:
Hay, đều, đẹp, phát, rạng gần xa.
Biên tập nhiệt tình tặng vạn sách,
Học sinh say đọc nở ngàn hoa.*

NGUYỄN HỮU DỰ

(Xóm 3, Quỳnh Liên, TX. Hoàng Mai, Nghệ An)

THÔNG BÁO

Mời các bạn đặt mua ĐÓNG TẬP TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM 2016.

Giá bìa: 199.000 đồng tại các cơ sở Bưu điện trên cả nước hoặc tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội.

ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocvatuoi trẻ vietnam@gmail.com

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 16

Problem. How many ways can we arrange the numbers 1, 2, 3, 4, and 5 to get a 5 - digit number which is divisible by 12?

Solution. A number is divisible by 12 if and only if it is divisible by 3 and 4. A number with the 5-digits 1, 2, 3, 4, and 5 is always divisible by 3 since $1+2+3+4+5$ is divisible by 3. On the other hand, a number $\overline{abcde}$ is divisible by 4 if and only if $\overline{de}$ is divisible by 4. Hence the choices for $\overline{de}$ are 12, 24, 32, or 52. For each

choice, there are $3! = 6$ ways to fill in the first 3 positions. Therefore there are $4 \times 6 = 24$ ways to arrange the numbers 1, 2, 3, 4, and 5 to get a 5-digit number which is divisible by 12.

TỪ VỰNG

arrange : sắp xếp
5 - digit number : số có 5 chữ số
divisible by : chia hết cho

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG, Hà Nội)



Bài toán. (1998 APMO) Cho tam giác ABC và D là chân đường cao kẻ từ A . Gọi E và F là các điểm nằm trên đường thẳng đi qua D sao cho AE vuông góc với BE , AF vuông góc với CF và E, F không trùng với D . Giả sử M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và EF . Chứng minh rằng AN vuông góc với MN .

Lời giải. Chọn điểm A làm gốc tọa độ và trục hoành song song với EF . Giả sử tọa độ của các điểm B, E, F lần lượt là $(d; m), (e; m), (f; m)$. Trong trường hợp $m = 0$, $D \equiv E$, mâu thuẫn với giả thiết.

Vì vậy ta có thể giả sử $m \neq 0$. Do $BE \perp AE$ nên đường thẳng BE đi qua E có hệ số góc là $-\frac{e}{m}$. Do

đó phương trình đường thẳng BE là: $ex + my - e^2 - m^2 = 0$. Tương tự phương trình của CF và BC lần lượt là: $fx + my - f^2 - m^2 = 0$ và $dx + my - d^2 - m^2 = 0$.

Mặt khác, các đường thẳng BE và CF cắt các đường thẳng BC và CF tại B và C . Từ đó ta tìm được: $B\left(d + e; m - \frac{de}{m}\right), C\left(f; m - \frac{df}{m}\right)$.

Bởi vì M và N lần lượt là trung điểm của

các đoạn thẳng BC và EF , nên $M\left(d + \frac{e+f}{2}; m - \frac{de+df}{2m}\right),$

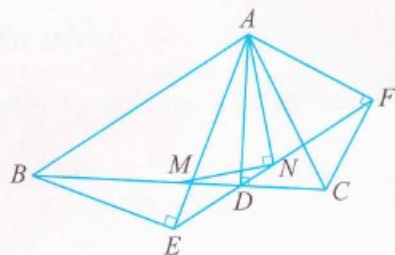
$N\left(\frac{e+f}{2}; m\right)$ và $\overline{MN}\left(-d; \frac{de+df}{2m}\right), \overline{AN}\left(\frac{e+f}{2}; m\right).$

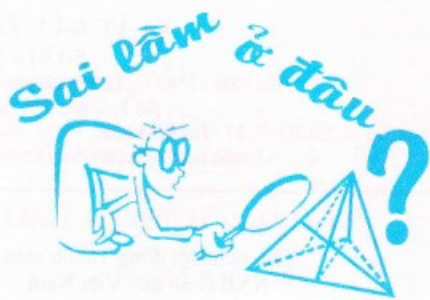
Từ đó $\overline{MN} \cdot \overline{AN} = 0 \Leftrightarrow MN \perp AN$.

Lưu ý. Ta có thể chọn gốc tọa độ tại D và trục hoành chứa cạnh BC . Tuy nhiên việc tính toán tọa độ các điểm E và F sẽ phức tạp hơn. Tốt hơn hết là chọn đường thẳng qua D, E, F làm trục hoành.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt hơn cả: **Hà Nội:** Nguyễn Hương Giang, 10A13, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, Vũ Thanh Thảo, 10 Toán, THPT Sơn Tây; **Hải Dương:** Nguyễn Đặng Sơn, 11A, THPT Nam Sách, Nam Sách; **Nghệ An:** Lê Thị Thùy Dung, Mai Thị Kim Chi, 11A1, THPT Cửa Lò, TX. Cửa Lò; **Thừa Thiên Huế:** Phan Cảnh Minh Phước, 11 Toán 2, THPT Quốc Học Huế, TP.Huế; **Vĩnh Long:** Huỳnh Lý Văn Anh, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

HỒ HẢI (Hà Nội)





GIẢI ĐÁP: $1 = 0!$

(Đề đăng trên TH&TT số 471, tháng 9 năm 2016)

Phân tích sai lầm. Bạn học sinh đó đã áp dụng sai định lý: Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ (a, b hữu hạn), thì $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = a + b$.

Cần nhớ rằng định lý trên chỉ đúng trong trường hợp tổng $u_n + v_n$ có hữu hạn số hạng.

Do $\lim\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right)$ là giới hạn của tổng vô hạn nên không thể thực hiện biến đổi:

$$\begin{aligned} \lim\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) \\ = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n} + \dots + \lim \frac{1}{n} = 0. \end{aligned}$$

Đó chính là lí do dẫn đến kết quả sai $1 = 0!$

Nhận xét. Nhiều bạn đã tham gia bài này nhưng chỉ có các bạn sau phát hiện đúng sai lầm:

Hà Nội: Đinh Châu Anh, 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, số 1, Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân.

Hưng Yên: Triệu Ninh Ngân, 12A9, Nguyễn Thị Phương Oanh, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang.

Vĩnh Long: Lê Minh Quân, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

KIHIVI



SÔ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ!

Dãy số là một chuyên đề quan trọng trong bồi dưỡng học sinh giỏi. Trong chuyên đề dãy số có bài toán quen thuộc sau:

Bài toán. Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ u_n = \frac{u_n + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2)u_n}, n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát u_n .

Lời giải. Ta có:

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{12} + 2\sqrt{3} \tan \frac{\pi}{12} - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\text{Khi đó: } u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}.$$

$$u_2 = \frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{12}} = \tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \right);$$

$$u_3 = \frac{\tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \right) + \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \right) \tan \frac{\pi}{12}} = \tan \left(\frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{\pi}{12} \right).$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$u_n = \tan \left(\frac{\pi}{6} + (n-1) \cdot \frac{\pi}{12} \right), \forall n \geq 1.$$

Các bạn có nhận xét gì về bài toán và lời giải trên?

PHẠM QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên Thái Bình)



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên
NXB Giáo dục Việt Nam

MẠC VĂN THIÊN

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập
NXB Giáo dục Việt Nam

TS. PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HẠ,
TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT,
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT,
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ
KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Nguyễn Thị Nhung – Giải phương trình, nghiệm nguyên bằng phương pháp sử dụng tính chất chia hết.

5 Hướng dẫn giải Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 9 tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2015 – 2016.

6 Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Hưng Yên, năm học 2015 – 2016.

7 Thử sức trước kỳ thi - Đề số 5.

11 Đáp án và hướng dẫn giải đề số 4.

12 Tin tức

Lê Mai – Gần giải được giả thuyết yếu của Goldbach.

13 Lịch sử Toán học

Lê Quốc Hán – Pappus, ngôi sao lạ trong bầu trời toán học Hy Lạp cổ đại.

15 Bạn đọc tìm tòi

Nguyễn Phi Mãng – Tứ giác điều hòa dưới cách nhìn của phép nghịch đảo.

Đề ra kỳ này

Problems in This Issue

T1/475, ..., T12/475, L1/475, L2/475.

18 Giải bài kỳ trước

Solutions to Previous Problems

28 Diễn đàn dạy học Toán

Nguyễn Lái – Phương pháp lập bất đẳng thức phụ để chứng minh một dạng bất đẳng thức.

32 Phương pháp giải toán

Trần Xuân Đáng – Một số phương pháp tìm hàm liên tục trong phương trình hàm.

38 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 16

Bài dịch số 13 - Tiếng Anh qua các bài toán

39 Sai lầm ở đâu?

Giải đáp: $1 = 0!$

Nguyễn Quang Hùng – Số hạng tổng quát của dãy số !



TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

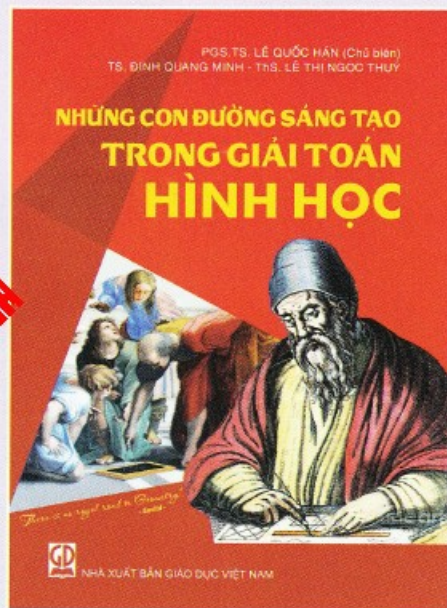
NHỮNG CON ĐƯỜNG SÁNG TẠO TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

(của các tác giả: PGS.TS. NGUYỄN Lê Quốc Hán (chủ biên), TS. Đinh Quang Minh, Th.S. Lê Thị Ngọc Thúy)

Sách dày 472 trang, khổ 17×24 cm, giá bìa 80.000 đồng. Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải những loại toán hình học phổ thông điển hình với gần 1000 bài toán hình học từ lớp 7 đến lớp 12 theo chương trình Bộ Giáo dục & Đào tạo hiện ban hành. Ngoài ra sách còn trình bày nguồn gốc những bài toán ấy và cách thức sáng tác các bài toán mới từ chúng. Có lẽ đây là nét khác biệt của cuốn sách này với phần lớn các sách tham khảo toán cùng loại.

Sách gồm ba phần chính. Phần *Hình học phẳng* dành cho các học sinh khá giỏi về toán; trong đó có nhiều bài toán không dễ, được chọn trong các đề thi Olympic Toán Quốc tế và Khu vực, một số định lý và khái niệm quen thuộc và ít quen thuộc được đề cập khá chi tiết như: Định lý Thales, Định lý Pythagore, Định lý Ptolemy, Công thức Leibniz, Công thức Euler, Bài toán Torricelli, Bài toán Napoléon, Đường thẳng và đường tròn chính tâm Euler, Đường thẳng Simson, Điểm Lemoine, ... Phần *Hình học không gian* chủ yếu dành cho học sinh đại trà. Vì vậy bên cạnh các bài toán khó đánh dấu * là những bài toán chọn trong các đề thi Tuyển sinh Đại học hay Tốt nghiệp THPT mấy năm gần đây. Ngoài phương pháp chính là suy luận lôgic, thỉnh thoảng các tác giả sử dụng công cụ vector nếu thấy thật cần thiết. Phần *Mối liên hệ giữa hình học với các phân môn khác* như Lượng giác, Đại số; các tác giả tập trung vào phần *Tam giác lượng* với nhiều bài toán hay, và trong phần *Phương pháp hình học trong đại số* đề cập đến một số dạng toán hình học giải tích phẳng thường gặp trong các kỳ thi Tuyển sinh đại học hay Tốt nghiệp THPT.

Sách cố gắng trình bày dựa trên sự kết hợp hài hòa của văn phong tươi mát, độc đáo và sắc sảo của Polya với sự giản dị dễ hiểu mà thâm trầm sâu sắc của Hứa Thuần Phông. Có thể



xem đây là những suy nghiệm sâu sắc nhất của nhóm tác giả, đặc biệt là của NGUYỄN Lê Quốc Hán, chủ biên cuốn sách với 50 năm học và giải toán.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn Hình học vốn được xem là khó nhưng hấp dẫn này.

Mọi chi tiết xin liên hệ: **TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

● ĐT Biên tập: (04) 35121607

● ĐT/Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

● Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com

● Website: www.nxbgd.vn/toanhocuoitre

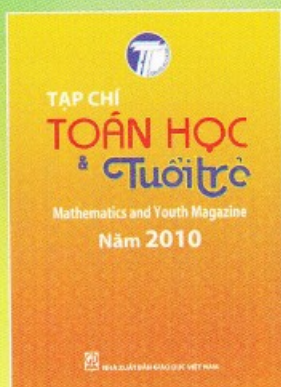


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

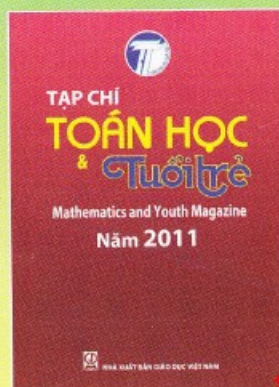
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

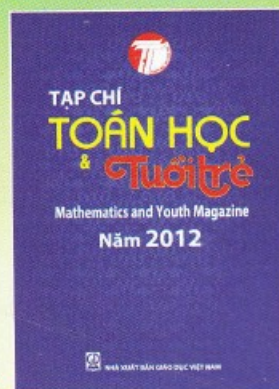
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



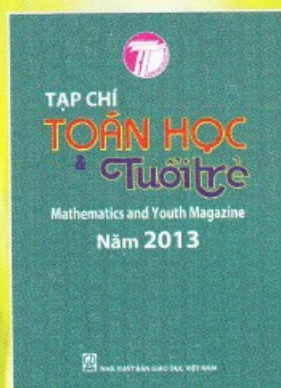
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



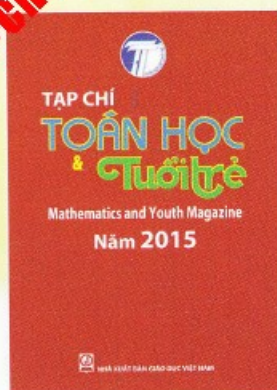
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



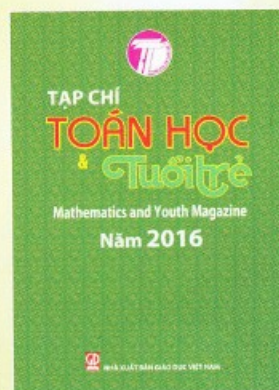
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Bạn đọc có thể đặt mua các cuốn Đóng tập này tại các cơ sở BƯU ĐIỆN trên toàn quốc hoặc đặt mua tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- ĐT Biên tập: (04) 35121607
- ĐT/Fax Phát hành, Trại sự: (04) 35121606
- Email: toanhocvatuoiirevietnam@gmail.com
- Website: www.nxbgd.vn/toanhocvatuoiire

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT1M7

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2017

Giá: 12.500 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng