

Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn – Đức Thọ - Hà Tĩnh

Câu 1: Rút gọn các biểu thức sau

a) $P = \sqrt{45} - \sqrt{5}$

b) $Q = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}-2}\right) : \frac{x}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$

Giải: a) Ta có $P = \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

b) Ta có $Q = \frac{\sqrt{x}-2+2}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Câu 2: a) Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$), biết đồ thị của nó đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$

b) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - m = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2 = 6$

Giải: a) Đồ thị của hàm số đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ nên $x = -\frac{1}{3}$; $y = 1$ thay vào đẳng thức

$y = ax^2$ được $a\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a = 9$

b) Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Rightarrow (m-1)^2 - (m^2 - m) \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 - m^2 + m \geq 0 \Leftrightarrow -m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$. Theo Vi-et thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m^2 - m \end{cases}$

Ta có $(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2 = 6 \Leftrightarrow 1 + 2x_1 + x_1^2 + 1 + 2x_2 + x_2^2 = 6$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 4 \Rightarrow 4(m-1)^2 - 2(m^2 - m) + 4(m-1) = 4$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 - 2m^2 + 2m + 4m - 4 = 4 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m(m-2) + m-2 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$

Đối chiếu ĐK $m \leq 1$ thì $m = -1$ thỏa mãn bài toán

Câu 3: Hai người công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 16 giờ. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 2 giờ thì họ làm được $\frac{1}{6}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu ?

Giải: Gọi thời gian người công nhân A làm một mình xong công việc là x (giờ). ĐK $x > 16$

Thời gian người công nhân B làm một mình xong công việc là y (giờ). ĐK $y > 16$

Mỗi giờ A làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), B làm được $\frac{1}{y}$ (công việc), cả hai người làm được $\frac{1}{16}$

(công việc). Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{16} - \frac{1}{x}$ (1)

Vì A làm 3 giờ và B làm 2 giờ thì họ làm được $\frac{1}{6}$ công việc nên ta có phương trình

$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{6}$ (2). Từ (1) thế vào (2) được $\frac{3}{x} + \frac{2}{16} - \frac{2}{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \Rightarrow x = 24$ thay vào (1) được

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{16} - \frac{1}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{48} \Rightarrow y = 48. \text{ Đối chiếu điều kiện ta có thời gian người thứ nhất làm một}$$

minh xong công việc là 24 giờ, người thứ hai là 48 giờ

Câu 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O; R). Vẽ đường kính AD của đường tròn (O), đường cao AH của tam giác ABC (H thuộc BC) và BE vuông góc với AD (E thuộc AD)

- Chứng minh rằng tứ giác AEHB nội tiếp
- Chứng minh rằng $AH \cdot DC = AC \cdot BH$
- Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $IH = IE$

Giải: a) Ta có $BH \perp AE$ (gt); $AH \perp BC$ (gt)

$\Rightarrow \angle AEB = \angle AHB = 90^\circ$ suy ra đỉnh E, B cùng nhìn đoạn thẳng AB dưới 1 góc vuông nên tứ giác AEHB nội tiếp đường tròn

b) Ta có $\angle ADC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Xét $\triangle AHB$ và $\triangle ACD$ có

$\angle AHB = \angle ACD = 90^\circ$ và $\angle ABH = \angle ADC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) $\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle ACD$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{DC} \Rightarrow AH \cdot DC = AC \cdot BH$$

c) Theo câu a tứ giác AEHB nội tiếp

nên $\angle BAD = \angle EHI$ (cùng bù với $\angle BHE$) mà $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD$ (góc nội tiếp, góc ở tâm cùng chắn cung BD) $\Rightarrow \angle EHI = \frac{1}{2} \angle BOD$ (1). Ta lại có $IB = IC$ (gt) $\Rightarrow OI \perp BC$ do đó $\angle BIO = \angle BEO = 90^\circ$ suy ra đỉnh E, I cùng nhìn đoạn BO dưới 1 góc vuông nên tứ giác BIEO nội tiếp $\Rightarrow \angle EIC = \angle BOD$ (cùng bù với $\angle BIE$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle EHI = \frac{1}{2} \angle EIC \Rightarrow \angle EIC = 2\angle EHI$ mà $\angle EIC = \angle EHI + \angle IEH$ (góc ngoài của $\triangle EIH$)

$\Rightarrow \angle EHI = \angle IEH \Rightarrow \triangle EIH$ cân tại I $\Rightarrow IH = IE$

Câu 5: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $(a+2)(b+2) = \frac{25}{4}$. Tìm GTNN của $P = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4}$

Giải: Áp dụng BĐT Minicopski ta có $P = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4} \geq \sqrt{(1+1)^2 + (a^2+b^2)^2}$
 $= \sqrt{(a^2+b^2)^2 + 4}$. Từ giả thiết ta có $2a+2b+ab = \frac{9}{4}$

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \quad (1); \begin{cases} 4a^2 + 1 \geq 4a \\ 4b^2 + 1 \geq 4b \end{cases} \Rightarrow 4a^2 + 4b^2 \geq 4(a+b) - 2$$

$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq 2(a+b) - 1$ (2). Cộng theo vế các BĐT (1) và (2) được

$$\frac{5(a^2 + b^2)}{2} \geq ab + 2(a+b) - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow P \geq \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Do đó GTNN của P bằng $\frac{\sqrt{17}}{2}$. Đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}$



