

CHUYÊN ĐỀ III: NGUYÊN HÀM

Chủ đề III.1: NGUYÊN HÀM VÀ CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

III.1.A. Lý thuyết cơ bản

III.1.A.1. Khái niệm nguyên hàm

- Hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Kí hiệu: $\int f(x)dx = F(x)$.

- Với C là một hằng số nào đó, ta luôn có $[F(x) + C]' = F'(x)$ nên tổng quát hóa ta viết $\int f(x)dx = F(x) + C$. Khi đó $F(x) + C$ được gọi là một họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Với một giá trị cụ thể của C thì ta được một nguyên hàm của hàm số đã cho.

Ví dụ:

- Hàm số $f(x) = 3x^2$ có nguyên hàm là $F(x) = x^3 + C$ vì $(x^3 + C)' = 3x^2$.
- Hàm số $f(x) = \cos x$ có nguyên hàm là $F(x) = \sin x + C$ vì $(\sin x + C)' = \cos x$.
- Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

III.1.A.2. Các tính chất của nguyên hàm

Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và tồn tại các nguyên hàm tương ứng $F(x)$ và $G(x)$, khi đó ta có các tính chất sau:

- Tính chất 1: $\int f'(x)dx = f(x) + C$.
- Tính chất 2: $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx, \forall k \neq 0$.
- Tính chất 3: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
- Tính chất 4: $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = F(u(x)) + C$.

III.1.A.3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm của các hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của các hàm hợp $u = u(x)$
$\int 0dx = C, \int dx = x + C$	
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$

$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

III.1.B. Bài tập

Dạng III.1.1. Sử dụng bảng nguyên hàm để tính nguyên hàm

III.1.1.A. Bài tập ví dụ

Ví dụ 1.1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int (2x^3 - 3x^2 + 1) dx$.

b) $\int \left(e^x - \frac{1}{x} + 2^x \right) dx$.

c) $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x} dx$.

d) $\int \frac{3\sin^2 x - 4\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

e) $\int (x+2)(x^2 - 2x + 4) dx$.

f) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x} \right) dx$.

Lời giải:

a) $\int (2x^3 - 3x^2 + 1) dx = \int 2x^3 dx - \int 3x^2 dx + \int 1 dx = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x + C$.

b) $\int \left(e^x - \frac{1}{x} + 2^x \right) dx = \int e^x dx - \int \frac{1}{x} dx + \int 2^x dx = e^x - \ln |x| + \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

c) $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x} dx = \int \left(x - 3 + \frac{1}{x} \right) dx = \int x dx - \int 3 dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \ln |x| + C$.

d) $\int \frac{3\sin^2 x - 4\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{4}{\sin^2 x} \right) dx$

$= 2 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 2 \tan x + 4 \cot x + C$.

e) $\int (x+2)(x^2 - 2x + 4) dx = \int (x^3 + 8) dx = \frac{x^4}{4} + 8x + C$.

f) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x} \right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$.

Ví dụ 1.2: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$, biết $F(-1) = 3$.

Lời giải:

Ta có $\int f(x)dx = \int (4x^3 - 3x^2 + 2)dx = x^4 - x^3 + 2x + C$.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên có dạng $F(x) = x^4 - x^3 + 2x + C$.

Mà $F(-1) = 3 \Rightarrow C = 3$. Do đó $F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$.

Ví dụ 1.3: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x}$ thỏa mãn $F(1) = -1$. Tìm x để $2F(x) = \frac{1}{F(x)+1} - 1$.

Lời giải:

Ta có $\int f(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên có dạng $F(x) = \ln|x| + C$.

Mặt khác $F(1) = -1 \Rightarrow C = -1$. Do đó $F(x) = \ln|x| - 1$.

Khi đó $2F(x) = \frac{1}{F(x)+1} - 1 \Leftrightarrow 2(\ln|x| - 1) = \frac{1}{\ln|x|} - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln|x| \neq 0 \\ 2\ln^2|x| - \ln|x| - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|x| = 1 \\ \ln|x| = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm e \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $x = \pm e$ hoặc $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Ví dụ 1.4: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$.

A. $m = 3$.

B. $m = 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Lời giải:

Cách 1:

Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$

$$\Leftrightarrow F'(x) = f(x) \Leftrightarrow 3mx^2 + 2(3m+2)x - 4 = 3x^2 + 10x - 4$$

$$\text{Đồng nhất hệ số} \Rightarrow \begin{cases} 3m = 3 \\ 2(3m + 2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Cách 2:

Ta có $\int (3x^2 + 10x - 4)dx = x^3 + 5x^2 - 4x$.

Đồng nhất hệ số suy ra $m = 1$.

Chọn đáp án C.

III.1.1.B. Bài tập vận dụng

Bài 1. Nguyên hàm của $2x(1+3x^3)$ là

A. $x^2(x+x^3)+C$

B. $x^2(1+3x^2)+C$

C. $2x(x+x^3)+C$

D. $x^2\left(1+\frac{6x^3}{5}\right)+C$

Bài 2. Nguyên hàm của $\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là:

A. $-\frac{x^4+x^2+3}{3x}+C$

B. $-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+C$

C. $\frac{-x^4+x^2+3}{3x}+C$

D. $-\frac{1}{x}-\frac{x^3}{3}+C$

Bài 3. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ là:

A. $F(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{4} + C$

B. $F(x) = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$

C. $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x}} + C$

D. $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} + C$

Bài 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ là:

A. $F(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + C$

B. $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

C. $F(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + C$

D. $F(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + C$

Bài 5. $\int \left(\frac{5}{x} + \sqrt{x^3} \right) dx$ bằng:

A. $5\ln|x| - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

B. $-5\ln|x| + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

C. $-5\ln|x| - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

D. $5\ln|x| + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

Bài 6. $\int \frac{dx}{2-3x}$ bằng:

A. $\frac{1}{(2-3x)^2} + C$

B. $-\frac{3}{(2-3x)^2} + C$

C. $\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C$

D. $-\frac{1}{3}\ln|3x-2| + C$

Bài 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2}$ là:

A. $F(x) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}} + C$

B. $F(x) = \frac{2(\sqrt{x}+1)}{x^2} + C$

C. $F(x) = \frac{2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + C$

D. $F(x) = \frac{1+2\sqrt{x}}{x} + C$

Bài 8. Tìm nguyên hàm: $\int (\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x}) dx$

A. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$

B. $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$

C. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 4\ln|x| + C$

D. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| + C$

Bài 9. Tìm nguyên hàm: $\int (x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}) dx$

A. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

B. $\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$

C. $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

D. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

Bài 10. Tìm nguyên hàm: $\int (\frac{5}{x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^3}) dx$

A. $-\frac{5}{x} + \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + C$

B. $\frac{5}{x} - \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + C$

C. $-\frac{5}{x} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + C$

D. $\frac{5}{x} + \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + C$

Bài 11. Tìm nguyên hàm: $\int (x^3 - \frac{2}{x} + \sqrt{x})dx$

A. $\frac{1}{4}x^4 + 2\ln|x| - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

B. $\frac{1}{4}x^4 - 2\ln|x| - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

C. $\frac{1}{4}x^4 + 2\ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

D. $\frac{1}{4}x^4 - 2\ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

Bài 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$

Bài 13. Tìm hàm số $F(x)$ biết rằng $F'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ và $F(-1) = 3$

A. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x - 3$

B. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x + 3$

C. $F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$

D. $F(x) = x^4 + x^3 + 2x + 3$

Bài 14. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x^2 + x^3 - 4$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = 0$ là

A. 4

B. $2x^3 - 4x^4$

C. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - 4x$

D. $x^3 - x^4 + 2x$

Bài 15. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ trên $\mathbb{R}$ là

A. $\frac{x^4}{4} + x + C$

B. $3x^2 + C$

C. $3x^2 + x + C$

D. $\frac{x^4}{4} + C$

Bài 16. Tính $\int \frac{x^5 + 1}{x^3} dx$ ta được kết quả nào sau đây?

A. Một kết quả khác

B. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

C. $\frac{\frac{x^6}{6} + x}{\frac{x^4}{4}} + C$

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2x^2} + C$

Bài 17. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x) = 3x^2 + 1$ thỏa $F(1) = 0$ là:

A. $x^3 - 1$

B. $x^3 + x - 2$

C. $x^3 - 4$

D. $2x^3 - 2$

Bài 18. Hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên K nếu

A. $f(x)$ xác định trên K

B. $f(x)$ có giá trị lớn nhất trên K

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên K

D. $f(x)$ liên tục trên K

Bài 19. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$?

A. $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$

B. $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$

C. $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}} + C$

D. $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$

Bài 20. Cho hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, biết rằng $F(1) = 4$ thì

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{49}{12}$

B. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$

D. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x$

Bài 21. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$ và C là hằng số thì $\int f(x)dx = F(x) + C$.

B. Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên $[a; b]$.

C. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b] \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in [a; b]$.

D. $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$

Bài 22. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2 - x^2$ biết $F(2) = \frac{7}{3}$

A. $F(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$

B. $F(x) = 2x - x^3 + \frac{19}{3}$

C. $F(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + 1$

D. $F(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + 3$

Bài 23. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x), G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x), g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I): $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$

(II): $k \cdot F(x)$ là một nguyên hàm của $k f(x)$ ($k \in \mathbb{R}$)

(III): $F(x) \cdot G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) \cdot g(x)$

Mệnh đề nào là mệnh đề đúng ?

A. I

B. I và II

C. I, II, III

D. II

Bài 24. Tìm công thức sai:

A. $\int e^x dx = e^x + C$

B. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($0 < a \neq 1$)

C. $\int \cos x dx = \sin x + C$

D. $\int \sin x dx = \cos x + C$

Bài 25. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(I): $\int \sin^2 x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

(II): $\int \frac{4x+2}{x^2+x+3} dx = 2 \ln(x^2+x+3) + C$

(III): $\int 3^x (2^x + 3^{-x}) dx = \frac{6^x}{\ln 6} + x + C$

A. (III)

B. (I)

C. Cả 3 đều sai.

D. (II)

Bài 26. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$ thì $F(3)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$

B. $\ln \frac{3}{2}$

C. $\ln 2$

D. $\ln 2 + 1$

Bài 27. Công thức nguyên hàm nào sau đây không đúng?

A. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

B. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

C. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$

D. $\int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + C$

Bài 28. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:

A. $\int (x^3 - x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$

B. $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^x + C$

C. $\int \sin x dx = \cos x + C$

D. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x} = \ln \frac{4}{3}$

Bài 29. Cho hàm số $f(x) = \frac{5+2x^4}{x^2}$. Khi đó:

A. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$

B. $\int f(x) dx = 2x^3 - \frac{5}{x} + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5}{x} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + 5 \ln x^2 + C$

Bài 30. Cho hàm số $f(x) = x(x^2+1)^4$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$; đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(1;6)$. Nguyên hàm $F(x)$ là.

A. $F(x) = \frac{(x^2+1)^4}{4} - \frac{2}{5}$

B. $F(x) = \frac{(x^2+1)^5}{5} - \frac{2}{5}$

C. $F(x) = \frac{(x^2+1)^5}{5} + \frac{2}{5}$

D. $F(x) = \frac{(x^2+1)^4}{4} + \frac{2}{5}$

Bài 31. Tìm 1 nguyên hàm $F(x)$ của $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$ biết $F(1) = 0$

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}$

Bài 32. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ thỏa mãn $F(1) = 9$ là:

A. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2$

B. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 10$

C. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x$

D. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 10$

Bài 33. Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai?

A. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số)

B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số)

C. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ (C là hằng số)

D. $\int dx = x + C$ (C là hằng số)

Bài 34. Cho $\int f(x) dx = x^2 - x + C$

Vậy $\int f(x^2) dx = ?$

A. $\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C$

B. $x^4 - x^2 + C$

C. $\frac{2}{3} x^3 - x + C$

D. Không được tính

Bài 35. Hãy xác định hàm số $f(x)$ từ đẳng thức: $x^2 + xy + C = \int f(y) dy$

A. $2x$

B. x

C. $2x + 1$

D. Không tính được

Bài 36. Hãy xác định hàm số f từ đẳng thức sau: $e^u + e^v + C = \int f(v) dv$

A. e^v

B. e^u

C. $-e^v$

D. $-e^u$

Bài 37. Hãy xác định hàm số f từ đẳng thức sau: $\frac{4}{x^3} - \frac{1}{y^2} + C = \int f(y) dy$

A. $-\frac{1}{y^3}$

B. $+\frac{3}{y^3}$

C. $+\frac{2}{y^3}$

D. Một kết quả khác.

Bài 38. Hãy xác định hàm số f từ đẳng thức: $\sin u \cdot \cos v + C = \int f(u) du$

A. $2\cos u \cos v$

B. $-\cos u \cos v$

C. $\cos u + \cos v$

D. $\cos u \cos v$

Bài 39. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = -\frac{1}{\cos^2 x}$ và $F(0) = 1$. Khi đó, ta có

$F(x)$ là:

A. $-\tan x$

B. $-\tan x + 1$

C. $\tan x + 1$

D. $\tan x - 1$

Bài 40. Cho hàm $y = \frac{1}{\sin^2 x}$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số và đồ thị hàm số

$y = F(x)$ đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$ thì $F(x)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3} - \cot x$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{3} + \cot x$

C. $-\sqrt{3} + \cot x$

D. $\sqrt{3} - \cot x$

Bài 41. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ biết $f(x) = \tan^2 x$

A. $\frac{\tan^3 x}{3} + C$

B. Đáp án khác

C. $\tan x - 1 + C$

D. $\frac{\sin x - x \cos x}{\cos x} + C$

Bài 42. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x + \cos x$ là:

A. $2 \cos x - \sin x + C$

B. $2 \cos x + \sin x + C$

C. $-2 \cos x - \sin x + C$

D. $-2 \cos x + \sin x + C$

Bài 43. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x + \sin x$ thỏa mãn $F(0) = 19$ là:

A. $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2}$

B. $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2} + 2$

C. $F(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} + 20$

D. $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2} + 20$

Bài 44. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) = 2x - 3 \cos x, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

A. $F(x) = x^2 - 3 \sin x + 6 + \frac{\pi^2}{4}$

B. $F(x) = x^2 - 3 \sin x - \frac{\pi^2}{4}$

C. $F(x) = x^2 - 3 \sin x + \frac{\pi^2}{4}$

D. $F(x) = x^2 - 3 \sin x + 6 - \frac{\pi^2}{4}$

Bài 45. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là:

A. $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{4}$

B. $F(x) = \cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$

C. $F(x) = -\cot x + x^2$

D. $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Bài 46. $\int (3^x + 4^x) dx$ bằng:

A. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{4^x}{\ln 4} + C$

B. $\frac{3^x}{\ln 4} + \frac{4^x}{\ln 3} + C$

C. $\frac{4^x}{\ln 3} + \frac{3^x}{\ln 4} + C$

D. $\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{4^x}{\ln 4} + C$

Bài 47. $\int (3 \cdot 2^x + \sqrt{x}) dx$ bằng:

A. $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$

B. $3 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$

C. $\frac{2^x}{3 \cdot \ln 2} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$

D. $3 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + \sqrt{x^3} + C$

Bài 48. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{3x} \cdot 3^{2x}$ là:

A. $F(x) = \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} \cdot \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + C$

B. $F(x) = \frac{72}{\ln 72} + C$

C. $F(x) = \frac{2^{3x} \cdot 3^{2x}}{\ln 6} + C$

D. $F(x) = \frac{\ln 72}{72} + C$

Bài 49. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3^{x+1}}{4^x}$ là:

A. $F(x) = 3 \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\ln \frac{3}{4}} + C$

B. $F(x) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\ln \frac{3}{4}} + C$

C. $F(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + C$

D. $F(x) = 3 \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\ln \frac{3}{4}} + C$

Bài 50. $\int 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x dx$ là

A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C$

B. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 4 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C$

C. $84^x + C$

D. $84^x \ln 84 + C$

Bài 51. Hàm số $F(x) = e^x + e^{-x} + x$ là nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = e^{-x} + e^x + 1$

B. $f(x) = e^x - e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

C. $f(x) = e^x - e^{-x} + 1$

D. $f(x) = e^x + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

Bài 52. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x}$

A. $\ln|e^x + e^{-x}| + C$

B. $\frac{1}{e^x - e^{-x}} + C$

C. $\ln|e^x - e^{-x}| + C$

D. $\frac{1}{e^x + e^{-x}} + C$

Đáp án:

1.D	2.A	3.B	4.B	5.B	6.D	7.A	8.D	9.D	10.A
11.D	12.C	13.C	14.C	15.D	16.D	17.B	18.D	19.A	20.A
21.A	22.C	23.B	24.D	25.B	26.D	27.A	28.C	29.A	30.B
31.D	32.D	33.C	34.C	35.B	36.A	37.C	38.D	39.B	40.D
41.D	42.D	43.D	44.D	45.D	46.A	47.B	48.B	49.D	50.A
51.C	52.A								

Dạng III.1.2. Tính nguyên hàm bằng phương pháp vi phân

III.1.2.A. Phương pháp

- Định nghĩa:** Vi phân của hàm số $y = f(x)$ là biểu thức $f'(x)dx$. Kí hiệu dy hay $d(f(x))$ là vi phân của y hay $f(x)$.

$$dy = f'(x)dx \text{ hay } d(f(x)) = f'(x).dx.$$

- Các vi phân quan trọng:**

$$1. \quad xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2 \pm a) = -\frac{1}{2}d(a - x^2).$$

$$2. \quad x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3) = \frac{1}{3}d(x^3 \pm a) = -\frac{1}{3}d(a - x^3).$$

$$3. \quad \sin x dx = -d(\cos x) = -d(\cos x \pm a) = d(a - \cos x).$$

$$4. \quad \cos x dx = d(\sin x) = d(\sin x \pm a) = -d(a - \sin x).$$

$$5. \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x) = d(\tan x \pm a) = -d(a - \tan x).$$

$$6. \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\cot x) = -d(\cot x \pm a) = d(a - \cot x).$$

$$7. \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}) = d(\sqrt{x} \pm a) = -d(a - \sqrt{x}).$$

$$8. e^x dx = d(e^x) = d(e^x \pm a) = -d(a - e^x).$$

$$9. \frac{dx}{x} = d(\ln x) = d(\ln x \pm a) = -d(a - \ln x).$$

$$10. dx = \frac{1}{a} d(ax + b) = -\frac{1}{a} d(b - ax).$$

III.1.2.B. Bài tập ví dụ

Ví dụ 2.1: Tìm các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int (1-3x)^{2018} dx.$

b) $\int \frac{dx}{(2x+1)^2}.$

c) $\int \sqrt{4x+5} dx.$

d) $\int \frac{dx}{3x+2}.$

e) $\int \left(\sin 2x + \frac{3}{4x-3} \right) dx.$

f) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \sin x + \sin 3x \right) dx.$

g) $\int \left(e^{-2x+1} - \frac{1}{\sin^2 3x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx.$

Lời giải:

a) $\int (1-3x)^{2018} dx = -\frac{1}{3} \int (1-3x)^{2018} d(1-3x) = -\frac{(1-3x)^{2019}}{6057} + C.$

b) $\int \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} + C = -\frac{1}{2(2x+1)} + C.$

c) $\int \sqrt{4x+5} dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{4x+5} d(4x+5) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x+5)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} (4x+5)^{\frac{3}{2}} + C.$

d) $\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+2)}{3x+2} = \frac{1}{3} \ln |3x+2| + C.$

e) $\int \left(\sin 2x + \frac{3}{4x-3} \right) dx = \int \sin 2x dx + \int \frac{3dx}{4x-3} = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) + \frac{3}{4} \int \frac{d(4x-3)}{4x-3}$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{4} \ln |4x-3| + C.$$

f) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \sin x + \sin 3x \right) dx.$

Ta có $d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} dx \Rightarrow dx = 2d\left(\frac{x}{2}\right); d(3x) = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3} d(3x).$

Từ đó $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \sin x + \sin 3x \right) dx = \int \sin \frac{x}{2} dx + \int \sin x dx + \int \sin 3x dx$

$$2 \int \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) + \int \sin x dx + \frac{1}{3} \int \sin 3x d(3x) = -2 \cos \frac{x}{2} - \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + C.$$

g) $\int \left(e^{-2x+1} - \frac{1}{\sin^2 3x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx = \int e^{-2x+1} dx - \int \frac{dx}{\sin^2 3x} + \int \frac{4}{\sqrt{x}} dx$

$$= -\frac{1}{2} \int e^{-2x+1} d(-2x+1) - \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} + 4 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x+1} + \frac{1}{3} \cot 3x + 8\sqrt{x} + C.$$

III.1.2.C. Bài tập vận dụng

Bài 53. Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, kết quả là:

A. $\frac{C}{\sqrt{1-x}}$

B. $-2\sqrt{1-x} + C$

C. $\frac{2}{\sqrt{1-x}} + C$

D. $C\sqrt{1-x}$

Bài 54. Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$

A. $\frac{x^2 - x - 1}{x+1}$

B. $\frac{x^2 + x - 1}{x+1}$

C. $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$

D. $\frac{x^2}{x+1}$

Bài 55. Kết quả nào sai trong các kết quả sau?

A. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \frac{1}{5 \cdot 2^x \cdot \ln 2} + \frac{2}{5^x \cdot \ln 5} + C$

B. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$

C. $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - x + C$

D. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$

Bài 56. $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} dx$ bằng:

A. $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x+1| + C$

B. $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + C$

C. $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C$

D. $x + 2\ln|x+1| + C$

Bài 57. $\int \frac{x^2 - x + 3}{x+1} dx$ bằng:

A. $x + 5\ln|x+1| + C$

B. $\frac{x^2}{2} - 2x + 5\ln|x+1| + C$

C. $\frac{x^2}{2} - 2x - 5\ln|x-1| + C$

D. $2x + 5\ln|x+1| + C$

Bài 58. Cho các hàm số: $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$; $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ với $x > \frac{3}{2}$. Để hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì giá trị của a, b, c là:

A. $a = 4; b = 2; c = 1$

B. $a = 4; b = -2; c = -1$

C. $a = 4; b = -2; c = 1$.

D. $a = 4; b = 2; c = -1$

Bài 59. Cho $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Khi đó:

A. $\int f(x) dx = 2\ln(1+x^2) + C$

B. $\int f(x) dx = 3\ln(1+x^2) + C$

C. $\int f(x) dx = 4\ln(1+x^2) + C$

D. $\int f(x) dx = \ln(1+x^2) + C$

Bài 60. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ biết $F(1) = \frac{1}{3}$

A. $F(x) = x^2 + x + \frac{2}{x+1} - 6$

B. $F(x) = x^2 + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - 6$

Bài 61. Nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt{3x-1}$ trên $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ là:

A. $\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - x} + C$

B. $\frac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3} + C$

C. $\frac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3+C}$

D. $\sqrt{\frac{3}{2}x^2-x+C}$

Bài 62. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{2x^4+3}{x^2}$ là:

A. $\frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$

B. $-3x^3 \frac{3}{x} + C$

C. $\frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$

Bài 63. Cho $\int f(x)dx = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, ta có $\int f(ax+b)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2a} F(ax+b) + C$

B. $F(ax+b) + C$

C. $\frac{1}{a} F(ax+b) + C$

D. $F(ax+b) + C$

Bài 64. Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{x-2} + C$

B. Đáp số khác

C. $F(x) = \frac{-1}{x-2} + C$

D. $F(x) = \frac{-1}{(x-2)^3} + C$

Bài 65. Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$ là

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C$

B. $F(x) = x^2 + \ln|x-1| + C$

C. $F(x) = x + \frac{1}{x-1} + C$

D. Đáp số khác

Bài 66. Họ nguyên hàm của hàm số $y = (2x+1)^5$ là:

A. $\frac{1}{12}(2x+1)^6 + C$

B. $\frac{1}{6}(2x+1)^6 + C$

C. $\frac{1}{2}(2x+1)^6 + C$

D. $10(2x+1)^4 + C$

Bài 67. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ biết $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$

A. $\frac{2}{27}(\sqrt{(x+9)^3}-\sqrt{x^3}) + C$

B. Đáp án khác

C. $\frac{2}{3(\sqrt{(x+9)^3} - \sqrt{x^3})} + C$

D. $\frac{2}{27}(\sqrt{(x+9)^3} + \sqrt{x^3}) + C$

Bài 68. Hàm nào không phải nguyên hàm của hàm số $y = \frac{2}{(x+1)^2}$:

A. $\frac{-x+1}{x+1}$

B. $\frac{2x}{x+1}$

C. $\frac{-2}{x+1}$

D. $\frac{x-1}{x+1}$

Bài 69. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $\frac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Khi đó $F(3)$ bằng bao nhiêu:

A. $\ln 2 + 1$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\ln \frac{3}{2}$

D. $\ln 2$

Bài 70. Nguyên hàm của hàm số $\frac{1}{(2x-1)^2}$ là

A. $\frac{1}{2-4x} + C$

B. $\frac{-1}{(2x-1)^3} + C$

C. $\frac{1}{4x-2} + C$

D. $\frac{-1}{2x-1} + C$

Bài 71. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 7}{(x+1)^2}$ với $F(0) = 8$ là:

A. $\frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{x+1}$

B. $\frac{x^2}{2} + x - \frac{8}{x+1}$

C. $\frac{x^2}{2} - x + \frac{8}{x+1}$

D. Một kết quả khác

Bài 72. Cho hai hàm số $F(x) = \ln(x^2 + 2mx + 4)$ và $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+4}$. Định m để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$

A. $\frac{3}{2}$

B. $-\frac{3}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

Bài 73. $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx$ bằng:

A. $\frac{(\sin 2x - \cos 2x)^3}{3} + C$

B. $\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 + C$

C. $x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$

D. $x + \frac{1}{4}\cos 4x + C$

Bài 74. $\int \cos^2 \frac{2x}{3} dx$ bằng:

- A. $\frac{3}{2} \cos^4 \frac{2x}{3} + C$ B. $\frac{1}{2} \cos^4 \frac{2x}{3} + C$
C. $\frac{x}{2} + \frac{3}{8} \sin \frac{4x}{3} + C$ D. $\frac{x}{2} - \frac{4}{3} \cos \frac{4x}{3} + C$

Bài 75. Tìm nguyên hàm: $\int (1 + \sin x)^2 dx$

- A. $\frac{2}{3}x + 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$; B. $\frac{3}{2}x - 2 \cos x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$;
C. $\frac{2}{3}x - 2 \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$; D. $\frac{3}{2}x - 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$;

Bài 76. Cho $f(x) = \frac{4m}{\pi} + \sin^2 x$. Tìm m để nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$ và

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$$

- A. $m = -\frac{4}{3}$ B. $m = \frac{3}{4}$ C. $m = -\frac{3}{4}$ D. $m = \frac{3}{4}$

Bài 77. Cho hàm $f(x) = \sin^4 2x$. Khi đó:

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$
B. $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x - \cos 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x + \cos 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$
D. $\int f(x) dx = \frac{1}{8} \left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C$

Bài 78. Một nguyên hàm của hàm số $y = \sin 3x$

- A. $-\frac{1}{3} \cos 3x$ B. $-3 \cos 3x$ C. $3 \cos 3x$ D. $\frac{1}{3} \cos 3x$

Bài 79. Một nguyên hàm của $f(x) = \cos 3x \cos 2x$ bằng

- A. $\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin 5x$ B. $\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x$

C. $\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{10}\cos 5x$

D. $\frac{1}{6}\sin 3x \sin 2x$

Bài 80. Tính $\int \cos^3 x dx$ ta được kết quả là:

A. $\frac{\cos^4 x}{x} + C$

B. $\frac{1}{12}\sin 3x - \frac{3\sin x}{4} + C$

C. $\frac{\cos^4 x \cdot \sin x}{4} + C$

D. $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x\right) + C$

Bài 81. Họ nguyên hàm của $\sin^2 x$ là:

A. $\frac{1}{2}(x + 2\cos 2x) + C$

B. $\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)$

C. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

D. $\frac{1}{2}(x - 2\cos 2x) + C$

Bài 82. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ là

A. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

B. $F(x) = \cos 2x + C$

C. $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + C$

D. $F(x) = -\cos 2x + C$

Bài 83. Một nguyên hàm của hàm số: $y = \cos 5x \cdot \cos x$ là:

A. $F(x) = \cos 6x$

B. $F(x) = \sin 6x$

C. $-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4}\right)$

D. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)$

Bài 84. Tính $\int \cos 5x \cdot \cos 3x dx$

A. $\frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

B. $\frac{1}{2}\sin 8x + \frac{1}{2}\sin 2x$

C. $\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x$

D. $\frac{-1}{16}\sin 8x - \frac{1}{4}\sin 2x$

Bài 85. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x$ là:

A. $\frac{x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$

B. $\frac{x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C$

C. $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$

D. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

Bài 86. Tính: $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

A. $2 \tan \frac{x}{2} + C$

B. $\tan \frac{x}{2} + C$

C. $\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C$

D. $\frac{1}{4} \tan \frac{x}{2} + C$

Bài 87. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{1-3x}$ là:

A. $F(x) = \frac{3}{e^{1-3x}} + C$

B. $F(x) = \frac{e^{1-3x}}{3} + C$

C. $F(x) = -\frac{3e}{e^{3x}} + C$

D. $F(x) = -\frac{e}{3e^{3x}} + C$

Bài 88. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^{2-5x}}$ là:

A. $F(x) = \frac{5}{e^{2-5x}} + C$

B. $F(x) = -\frac{5}{e^{2-5x}} + C$

C. $F(x) = -\frac{e^{2-5x}}{5} + C$

D. $F(x) = \frac{e^{5x}}{5e^2} + C$

Đáp án:

53.B	54.B	55.A	56.A	57.B	58.C	59.D	60.C	61.B	62.A
63.C	64.A	65.A	66.A	67.D	68.A	69.A	70.A	71.A	72.B
73.D	74.C	75.D	76.D	77.D	78.D	79.B	80.D	81.C	82.A
83.D	84.C	85.C	86.B	87.D	88.D				

Bài tập 1 2 3
Vươn xa những ước mơ

CHỦ ĐỀ III.2: TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

III.2.A. Lý thuyết cơ bản:

Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

III.2.B. Bài tập:

Tính tích phân $I = \int f(x)dx$

Dạng III.2.1. Đổi biến số loại 1

- Ta làm theo các bước sau:
 - Bước 1: Chọn ẩn phụ $t = u(x)$.
 - Bước 2: Tính vi phân $dt = u'(x)dx$.
 - Bước 3: Biểu thị $f(x)$ và dx theo t và dt . Giả sử rằng $f(x)dx = g(t)dt$.
 - Bước 4: Tính $I = \int g(t)dt$.
- Nếu hàm số $f(x)$ có chứa $\sqrt[n]{g(x)}$ thì đặt $t = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow t^n = g(x) \Rightarrow n \cdot t^{n-1} dt = g'(x)dx$
- Nếu hàm số $f(x)$ có chứa $(ax+b)^n$ thì đặt $t = ax+b \Rightarrow \begin{cases} dt = adx \\ x = \frac{t-b}{a} \end{cases}$
- Hàm lượng giác:
 - Nếu gặp $\int f(\sin x) \cdot \cos x dx$ thì đặt $t = \sin x$.
 - Nếu gặp $\int f(\cos x) \cdot \sin x dx$ thì đặt $t = \cos x$.
 - Nếu gặp $\int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}$ thì đặt $t = \tan x$.
 - Nếu gặp $\int f(\cot x) \frac{dx}{\sin^2 x}$ thì đặt $t = \cot x$.
- Biểu thức có chứa logarit:

Thường gặp biểu thức có chứa $\frac{1}{x}$ và $\ln x$. Khi đó đặt $t = \ln x$ hoặc $t =$ biểu thức có chứa $\ln x$.

III.2.1.B. Bài tập ví dụ

Ví dụ 1.1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I = \int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

b) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

c) $I = \int x(3x+1)^{19} dx$

Lời giải:

a) Đặt $t = \sqrt{1 + \ln x} \Leftrightarrow t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow \ln x = t^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = 2tdt$.

$$\Rightarrow I = \int \frac{(t^2 - 1) \cdot 2tdt}{t} = 2 \int (t^2 - 1)dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) + C = 2 \left(\frac{\sqrt{(1 + \ln x)^3}}{3} - \sqrt{1 + \ln x} \right) + C.$$

b) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

Đặt $t = \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow t^2 = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = t^2 + 1 \Rightarrow e^x dx = 2tdt$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{2tdt}{t(t^2 + 1)} = \int \frac{2dt}{t^2 + 1} = \int \frac{2dt}{(t - i)(t + i)} = \int \frac{dt}{t - i} - \int \frac{dt}{t + i} \\ &= \ln |t - i| - \ln |t + i| + C = \ln \left| \frac{t - i}{t + i} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{e^x - 1} - i}{\sqrt{e^x - 1} + i} \right| + C \end{aligned}$$

c) $I = \int x(3x + 1)^{19} dx$

Đặt $t = 3x + 1 \Rightarrow x = \frac{t - 1}{3} \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$.

$$\Rightarrow I = \int \frac{t - 1}{3} \cdot t^{19} \cdot 3 \cdot \frac{dt}{3} = \int (t^{20} - t^{19})dt = \frac{t^{21}}{21} - \frac{t^{20}}{20} + C = \frac{(3x + 1)^{21}}{21} - \frac{(3x + 1)^{20}}{20} + C.$$

Ví dụ 1.2 (THPT Chuyên Quang Trung 2017 Lần 3)

Cho $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}(2\sqrt{x^2 + 1} + 5)$, biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$F(0) = 6$. Tính $F\left(\frac{3}{4}\right)$.

A. $\frac{125}{16}$.

B. $\frac{126}{16}$.

C. $\frac{123}{16}$.

D. $\frac{127}{16}$.

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow tdt = xdx$.

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}(2\sqrt{x^2 + 1} + 5)dx = \int (2t + 5)dt = t^2 + 5t + C = (x^2 + 1) + 5\sqrt{x^2 + 1} + C$$

$F(0) = 6 \Rightarrow C = 0$.

Vậy $F\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{125}{16}$.

III.2.1.C. Bài tập vận dụng

Bài 1. $\int \frac{3\cos x}{2 + \sin x} dx$ bằng:

A. $3\ln(2 + \sin x) + C$

B. $-3\ln|2 + \sin x| + C$

C. $\frac{3\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C$

D. $-\frac{3\sin x}{\ln(2 + \sin x)} + C$

Bài 2. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ bằng:

A. $\ln|e^x - e^{-x}| + C$

B. $-\ln|e^x - e^{-x}| + C$

C. $-\ln|e^x + e^{-x}| + C$

D. $\ln|e^x + e^{-x}| + C$

Bài 3. $\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{3\cos x + 2\sin x} dx$ bằng:

A. $\ln|3\cos x + 2\sin x| + C$

B. $-\ln|3\cos x + 2\sin x| + C$

C. $\ln|3\sin x - 2\cos x| + C$

D. $-\ln|3\sin x - 2\cos x| + C$

Bài 4. Nguyên hàm của $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ là:

A. $\ln|\sin x + \cos x| + C$

B. $\frac{1}{\ln|\sin x - \cos x|} + C$

C. $\ln|\sin x - \cos x| + C$

D. $\frac{1}{\sin x + \cos x} + C$

Bài 5. $\int \frac{4x-1}{4x^2-2x+5} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{4x^2-2x+5} + C$

B. $-\frac{1}{4x^2-2x+5} + C$

C. $-\ln|4x^2-2x+5| + C$

D. $\frac{1}{2}\ln|4x^2-2x+5| + C$

Bài 6. $\int (x-1)e^{x^2-2x+3} dx$ bằng:

A. $\left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{x^2-2x+3} + C$

B. $(x-1)e^{\frac{1}{3}x^3-x^2+3x} + C$

C. $\frac{1}{2}e^{x^2-2x} + C$

D. $\frac{1}{2}e^{x^2-2x+3} + C$

Bài 7. $\int \frac{\cot x}{\sin^2 x} dx$ bằng:

A. $-\frac{\cot^2 x}{2} + C$

B. $\frac{\cot^2 x}{2} + C$

C. $-\frac{\tan^2 x}{2} + C$

D. $\frac{\tan^2 x}{2} + C$

Bài 8. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$ bằng:

A. $\frac{-1}{4\cos^4 x} + C$

B. $\frac{1}{4\cos^4 x} + C$

C. $\frac{1}{4\sin^4 x} + C$

D. $\frac{-1}{4\sin^4 x} + C$

Bài 9. $\int \sin^5 x \cdot \cos x dx$ bằng:

A. $\frac{\sin^6 x}{6} + C$

B. $-\frac{\sin^6 x}{6} + C$

C. $-\frac{\cos^6 x}{6} + C$

D. $\frac{\cos^6 x}{6} + C$

Bài 10. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sqrt{1+\ln x} - \sqrt{1+\ln x} \right) + C$

B. $\left(\frac{1}{3} \sqrt{1+\ln x} - \sqrt{1+\ln x} \right) + C$

C. $2 \left(\frac{1}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} - \sqrt{1+\ln x} \right) + C$

D. $2 \left(\frac{1}{3} \sqrt{1+\ln x} + \sqrt{1+\ln x} \right) + C$

Bài 11. $\int \frac{1}{x \cdot \ln^5 x} dx$ bằng:

A. $-\frac{\ln^4 x}{4} + C$

B. $-\frac{4}{\ln^4 x} + C$

C. $\frac{1}{4\ln^4 x} + C$

D. $-\frac{1}{4\ln^4 x} + C$

Bài 12. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ bằng:

A. $\frac{3}{2}\sqrt{(\ln x)^3} + C$

B. $2\sqrt{(\ln x)^3} + C$

C. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$

D. $3\sqrt{(\ln x)^3} + C$

Bài 13. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+2} + C$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C$

C. $\sqrt{2x^2+3} + C$

D. $2\sqrt{2x^2+3} + C$

Bài 14. $\int x.e^{x^2+1} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$

B. $e^{x^2+1} + C$

C. $2e^{x^2+1} + C$

D. $x^2.e^{x^2+1} + C$

Bài 15. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$ bằng:

A. $(e^x+1).\ln|e^x+1| + C$

B. $e^x.\ln|e^x+1| + C$

C. $e^x+1-\ln|e^x+1| + C$

D. $\ln|e^x+1| + C$

Bài 16. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ bằng:

A. $e^{\frac{1}{x}} + C$

B. $-e^{\frac{1}{x}} + C$

C. $-e^{\frac{1}{x}} + C$

D. $\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} + C$

Bài 17. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ bằng:

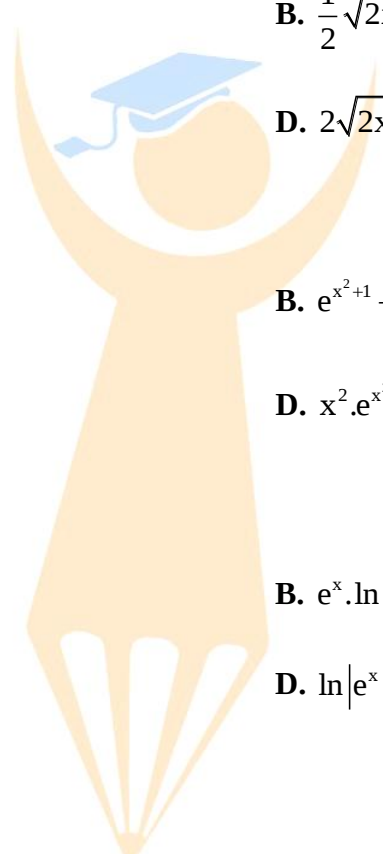
A. $e^x + x + C$

B. $\ln|e^x+1| + C$

C. $\frac{e^x}{e^x+x} + C$

D. $\frac{1}{\ln|e^x+1|} + C$

Bài 18. $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$ bằng:



Bài tập 1 2 3
Hãy xa những ước mơ

A. $\ln|x+1| + x + 1 + C$

B. $\ln|x+1| + C$

C. $\frac{1}{x+1} + C$

D. $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

Bài 19. Họ nguyên hàm $\int x(x+1)^3 dx$ là:

A. $\frac{(x+1)^5}{5} + \frac{(x+1)^4}{4} + C$

B. $\frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^4}{4} + C$

C. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} + C$

D. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + C$

Bài 20. Hàm số $f(x) = x\sqrt{x+1}$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Nếu $F(0) = 2$ thì giá trị của $F(3)$ là

A. $\frac{116}{15}$

B. Một đáp số khác

C. $\frac{146}{15}$

D. $\frac{886}{105}$

Bài 21. Kết quả của $\int \frac{x}{1-x^2} dx$ là:

A. $\sqrt{1-x^2} + C$

B. $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + C$

C. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$

D. $-\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$

Bài 22. Kết quả nào sai trong các kết quả sau?

A. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C$

B. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + C$

C. $\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} = \ln(\ln(\ln x)) + C$

D. $\int \frac{xdx}{3-2x^2} = -\frac{1}{4} \ln|3-2x^2| + C$

Bài 23. Tìm họ nguyên hàm: $F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{2\ln x+1}}$

A. $F(x) = 2\sqrt{2\ln x+1} + C$

B. $F(x) = \sqrt{2\ln x+1} + C$

C. $F(x) = \frac{1}{4} \sqrt{2\ln x+1} + C$

D. $F(x) = \frac{1}{2} \sqrt{2\ln x+1} + C$

Bài 24. Tìm họ nguyên hàm: $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4-1} dx$

A. $F(x) = \ln|x^4 - 1| + C$

B. $F(x) = \frac{1}{4} \ln|x^4 - 1| + C$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^4 - 1| + C$

D. $F(x) = \frac{1}{3} \ln|x^4 - 1| + C$

Bài 25. Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^4 x \cos x$

A. $F(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

B. $F(x) = \cos^5 x + C$

C. $F(x) = \sin^5 x + C$

D. $F(x) = -\frac{1}{5} \sin^5 x + C$

Bài 26. Để tìm nguyên hàm của $f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$ thì nên:

A. Dùng phương pháp đổi biến số, đặt $t = \cos x$

B. Dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = \sin^4 x \cos^4 x dx \end{cases}$

C. Dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, đặt $\begin{cases} u = \sin^4 x \\ dv = \cos^5 x dx \end{cases}$

D. Dùng phương pháp đổi biến số, đặt $t = \sin x$

Bài 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x \tan x$ là

A. $-\frac{4}{3} \cos^3 x - 3 \cos x + C$

B. $\frac{1}{3} \sin^3 x + 3 \sin x + C$

C. $-\frac{4}{3} \cos^3 x + 3 \cos x + C$

D. $\frac{1}{3} \cos^3 x - 3 \cos x + C$

Bài 28. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x}$ là

A. $\frac{(2 \ln x + 3)^2}{2} + C$

B. $\frac{2 \ln x + 3}{8} + C$

C. $\frac{(2 \ln x + 3)^4}{8} + C$

D. $\frac{(2 \ln x + 3)^4}{2} + C$

Bài 29. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8 - x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là:

A. $x = 0$

B. $x = 1$

C. $x = -1$

D. $x = 1 - \sqrt{3}$

Bài 30. Tích phân $\int \frac{dx}{e^x + 1}$ bằng

A. $\ln \frac{e^x}{2e^x + 2}$

B. $\ln \frac{2e^x}{e^x + 1}$

C. $\ln \frac{e^x}{2(e^x - 1)}$

D. $\ln(e^x + 1) - \ln 2$

Bài 31. Họ nguyên hàm của $\tan x$ là:

A. $\ln|\cos x| + C$

B. $-\ln|\cos x| + C$

C. $\frac{\tan^2 x}{2} + C$

D. $\ln(\cos x) + C$

Bài 32. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ là:

A. $\frac{1}{2} \ln(x + 1)$

B. $2 \ln(x^2 + 1)$

C. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$

D. $\ln(x^2 + 1)$

Bài 33. Hàm số nào là nguyên hàm của $f(x) = x\sqrt{x^2 + 5}$:

A. $F(x) = (x^2 + 5)^{\frac{3}{2}}$

B. $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 5)^{\frac{3}{2}}$

C. $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 5)^{\frac{3}{2}}$

D. $F(x) = 3(x^2 + 5)^{\frac{3}{2}}$

Bài 34. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\ln x + x}{x}, x > 0$ là:

A. $\frac{\ln^2 x}{x} + C$

B. $2\ln x + 1 + C$

C. $(2\ln^2 x + x)\ln x + C$

D. $\frac{\ln^2 x}{x} + x + C$

Bài 35. Họ nguyên hàm của $\frac{e^x}{e^{2x} - 1}$ là:

A. $\ln|e^{2x} - 1| + C$

B. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right| + C$

C. $\ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C$

D. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C$

Bài 36. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $y = \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}$ mà $F(1) = \frac{1}{3}$. Giá trị $F^2(e)$ bằng:

A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

Bài 37. Họ nguyên hàm của $\frac{1}{\sin x}$ là:

A. $\ln \left| \cot \frac{x}{2} \right| + C$

B. $\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$

C. $-\ln |\cos x| + C$

D. $\ln |\sin x| + C$

Bài 38. $\int \cos x \cdot \sin^3 x dx$ bằng:

A. $\frac{\cos^4 x}{4} + C$

B. $\frac{\sin^4 x}{4} + C$

C. $\sin^4 x + C$

D. $\cos^4 x + C$

Bài 39. Họ nguyên hàm của $f(x) = x \cdot \cos x^2$ là:

A. $\cos x^2 + C$

B. $\sin x^2 + C$

C. $\frac{1}{2} \sin x^2 + C$

D. $2 \sin x^2 + C$

Bài 40. Một nguyên hàm của $f(x) = x e^{-x^2}$ là:

A. e^{-x^2}

B. $-\frac{1}{2} e^{-x^2}$

C. $-e^{-x^2}$

D. $\frac{1}{2} e^{-x^2}$

Bài 41. $\int \frac{2x}{(x^2 + 9)^4} dx$ bằng:

A. $-\frac{1}{5(x^2 + 9)^5} + C$

B. $-\frac{1}{3(x^2 + 9)^3} + C$

C. $-\frac{4}{(x^2 + 9)^5} + C$

D. $-\frac{1}{(x^2 + 9)^3} + C$

Bài 42. Họ nguyên hàm của hàm số: $y = \sin^3 x \cdot \cos x$ là:

A. $\tan^3 x + C$

B. $-\cos^2 x + C$

C. $\frac{1}{3} \cos^3 x + C$

D. $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$

Bài 43. $\int \sin x \cos 2x \, dx$ bằng:

A. $-\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x + C$

B. $-\frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x + C$

C. $\frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin x + C$

D. $\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x + C$

Bài 44. Nguyên hàm của (với C hằng số) là $\int \frac{-2x}{1-x^2} dx$

A. $\frac{1+x}{1-x} + C$

B. $\frac{x}{1-x} + C$

C. $\frac{1}{1-x} + C$

D. $\ln|1-x^2| + C$

Bài 45. Nguyên hàm của hàm số: $y = \sin^3 x \cdot \cos x$ là:

A. $\frac{1}{4} \cos^4 x + C$

B. $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$

C. $-\cos^2 x + C$

D. $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$

Bài 46. Nguyên hàm của hàm số: $y = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$ là:

A. $\sin^3 x + \sin^5 x + C$

B. $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

C. $\sin^3 x - \sin^5 x + C$

D. $-\frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

Bài 47. Một nguyên hàm của hàm số: $f(x) = x \sin \sqrt{1+x^2}$ là:

A. $F(x) = -\sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} - \sin \sqrt{1+x^2}$

B. $F(x) = -\sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} + \sin \sqrt{1+x^2}$

C. $F(x) = \sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} + \sin \sqrt{1+x^2}$

D. $F(x) = \sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2} - \sin \sqrt{1+x^2}$

Bài 48. Hàm số $f(x) = x(1-x)^{10}$ có nguyên hàm là:

A. $F(x) = \frac{(x-1)^{12}}{12} - \frac{(x-1)^{11}}{11} + C$

B. $F(x) = \frac{(x-1)^{12}}{12} + \frac{(x-1)^{11}}{11} + C$

C. $F(x) = \frac{(x-1)^{11}}{11} + \frac{(x-1)^{10}}{10} + C$

D. $F(x) = \frac{(x-1)^{11}}{11} - \frac{(x-1)^{10}}{10} + C$

Bài 49. Nguyên hàm của hàm số $\int \cos x \cdot \sin^2 x \cdot dx$ bằng:

A. $\frac{3\sin x - \sin 3x}{12} + C$

B. $\frac{3\cos x - \cos 3x}{12} + C$

C. $\sin^3 x + C$

D. $\sin x \cdot \cos^2 x + C$

Bài 50. Tính $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

A. $\ln x + C$

B. $\ln |x| + C$

C. $\ln(\ln x) + C$

D. $\ln |\ln x| + C$

Bài 51. Tính $\int x\sqrt{x^2 + 3} dx$

A. $x^2 + 3 + C$

B. $(x^2 + 3)^2 + C$

C. $\frac{(x^2 + 3)^2}{4} + C$

D. $\frac{x^2}{4} + C$

Bài 52. Nguyên hàm của hàm số: $y = \sin^3 x \cdot \cos x$ là:

A. $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$

B. $\frac{1}{3} \cos^3 x + C$

C. $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$

D. $\sin^4 x + C$

Bài 53. Một nguyên hàm của hàm số: $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^3$

B. $F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^2$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} (\sqrt{1+x^2})^2$

D. $F(x) = \frac{1}{2} (\sqrt{1+x^2})^2$

Bài 54. Đổi biến $x = 2\sin t$ tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành

A. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$

Bài 55. Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x}$ là:

A. $F(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} + C$

B. $F(x) = -\frac{1}{\sin x} + C$

C. $F(x) = \frac{1}{\sin x} + C$

D. $F(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + C$

Bài 56. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \tan^3 x$ là:

A. $\tan^2 x + \ln|\cos x|$.

B. $\frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x|$

C. $\frac{1}{2}(\tan^2 x + \ln|\cos x|)$

D. $-\frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x|$

Bài 57. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ là:

A. $\frac{1}{3}(x^2 + 2)\sqrt{1-x^2} + C$

B. $-\frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{1-x^2} + C$

C. $\frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{1-x^2} + C$

D. $-\frac{1}{3}(x^2 + 2)\sqrt{1-x^2} + C$

Bài 58. Nguyên hàm của hàm số: $y = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$ là:

A. $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

B. $\sin^3 x + \sin^5 x + C$

C. $-\frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

D. $\sin^3 x - \sin^5 x + C$

Bài 59. Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+3}$ là

A. $F(x) = -\frac{1}{2} \ln|x^2 - 4x + 3| + C$

B. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 4x + 3| + C$

C. $F(x) = \ln|x^2 - 4x + 3| + C$

D. $F(x) = 2 \ln|x^2 - 4x + 3| + C$

Bài 60. $\int \frac{dx}{(1+x^2)x}$ bằng:

A. $\ln|x|(x^2+1) + C$

B. $\ln|x|\sqrt{1+x^2} + C$

C. $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$

D. $\ln \frac{x}{1+x^2} + C$

Bài 61. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số: $y = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

A. $F(x) = 2\sqrt{4+x^2}$

B. $F(x) = x + 2\sqrt{4+x^2}$

C. $F(x) = \ln(x - \sqrt{4+x^2})$

D. $F(x) = \ln(x + \sqrt{4+x^2})$

Bài 62. Tìm nguyên hàm của: $F(x) = \int \frac{dx}{x^3 + x^5}$

A. $F(x) = \frac{1}{2x^2} - \ln x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

B. $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - \ln x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

C. $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

D. $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + \ln x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

Bài 63. $\int \frac{dx}{(1+x^2)x}$ bằng:

A. $\ln \frac{x}{1+x^2} + C$

B. $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$

C. $\ln |x| \sqrt{x^2+1} + C$

D. $\ln |x|(x^2+1) + C$

Bài 64. Kết quả $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ là:

A. $2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$

B. $2 - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$

C. $2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$

D. $2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x}+1) + C$

Bài 65. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ biết $f(x) = \frac{1+\ln\sqrt{x}}{x}$

A. Đáp án khác

B. $x + \ln x + C$

C. $\ln x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

D. $\ln x + \frac{1}{4} \ln^2 x + C$

Bài 66. Nguyên hàm của hàm số: $I = \int x^3 \sqrt{x-1} dx$ là:

A. $F(x) = \left[\frac{2}{9}(x-1)^4 + \frac{5}{7}(x-1)^3 + \frac{6}{5}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1) \right] \sqrt{x-1} + C$

B. $F(x) = \left[\frac{2}{9}(x-1)^4 + \frac{6}{7}(x-1)^3 + \frac{6}{5}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1) \right] \sqrt{x-1} + C$

C. $F(x) = \left[\frac{2}{9}(x-1)^4 + \frac{6}{7}(x-1)^3 + \frac{6}{5}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1) \right] \sqrt{x-1} + C$

D. $F(x) = \left[\frac{2}{9}(x-1)^4 + \frac{6}{7}(x-1)^3 + \frac{6}{5}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1) \right] \sqrt{x-1} + C$

Bài 67. Nguyên hàm của hàm số: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4}$ là:

A. $F(x) = \sqrt{2x-1} - 4\ln(\sqrt{2x-1}+4) + C$

B. $F(x) = \sqrt{2x+1} - 4\ln(\sqrt{2x+1}+4) + C$

C. $F(x) = \sqrt{2x-1} + 4\ln(\sqrt{2x+1}+4) + C$

D. $F(x) = \sqrt{2x-1} - \frac{7}{2}\ln(\sqrt{2x-1}+4) + C$

Bài 68. Nguyên hàm của hàm số: $y = \int \frac{\cos^5 x}{1-\sin x} dx$ là:

A. $\cos x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$

B. $\sin x - \frac{\sin^3 3x}{3} - \frac{\cos^4 4x}{4} + C$

C. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$

D. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{9} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$

Bài 69. Nguyên hàm của hàm số: $y = \int x\sqrt{4x+7} dx$ là:

A. $\frac{1}{20} \left[\frac{2}{5}(4x+7)^{\frac{5}{2}} - 7 \cdot \frac{2}{3}(4x+7)^{\frac{3}{2}} \right] + C$

B. $\frac{1}{18} \left[\frac{2}{5}(4x+7)^{\frac{5}{2}} - 7 \cdot \frac{2}{3}(4x+7)^{\frac{3}{2}} \right] + C$

C. $\frac{1}{14} \left[\frac{2}{5}(4x+7)^{\frac{5}{2}} - 7 \cdot \frac{2}{3}(4x+7)^{\frac{3}{2}} \right] + C$

D. $\frac{1}{16} \left[\frac{2}{5}(4x+7)^{\frac{5}{2}} - 7 \cdot \frac{2}{3}(4x+7)^{\frac{3}{2}} \right] + C$

Bài 70. Họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$

A. $\ln(\ln x) + C$

B. $\ln|2\ln|x|| + C$

C. $\ln|x| + C$

D. $\ln|\ln(\ln x)| + C$

Bài 71. Một học sinh tìm nguyên hàm của hàm số $y = x\sqrt{1-x}$ như sau:

(I) Đặt $u = 1 - x$ ta được $y = (1-u)\sqrt{u}$

(II) Suy ra $y = u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}$

(III): Vậy nguyên hàm $F(x) = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + C$

(IV) Thay $u = 1 - x$ ta được: $F(x) = \frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} - \frac{2}{5}(1-x)^2\sqrt{1-x} + C$

Lập luận trên, nếu sai thì sai từ giai đoạn nào?

A. II

B. III

C. I

D. IV

Đáp án:

1.A	2.D	3.B	4.C	5.D	6.D	7.A	8.B	9.A	10.C
11.A	12.C	13.B	14.A	15.C	16.C	17.B	18.D	19.B	20.C
21.D	22.A	23.B	24.B	25.A	26.D	27.C	28.C	29.D	30.B
31.B	32.C	33.B	34.D	36.D	36.A	37.B	38.B	39.C	40.B
41.B	42.D	43.B	44.D	45.B	46.B	47.B	48.B	49.A	50.D
51.A	52.A	53.A	54.A	55.B	56.B	57.D	58.A	59.B	60.C
61.D	62.B	63.B	64.A	65.D	66.B	67.A	68.C	69.B	70.D
71.B									

Dạng III.2.2. Đổi biến số loại 2

III.2.2.A. Phương pháp

- Ta làm theo các bước sau:
 - Bước 1: Chọn ẩn phụ $x = u(t)$.
 - Bước 2: Tính vi phân $dx = u'(t)dt$.
 - Bước 3: Biểu thị $f(x)$ và dx theo t và dt . Giả sử rằng $f(x)dx = g(t)dt$.
 - Bước 4: Tính $I = \int g(t)dt$.

- Nếu hàm số $f(x)$ có chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$ thì đặt

$$x = a \sin t \Rightarrow \begin{cases} dx = d(a \sin t) = a \cos t dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t \end{cases}$$

- Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{a^2 + x^2}$ thì đặt

$$x = a \tan t \Rightarrow \begin{cases} dx = d(a \tan t) = \frac{adt}{\cos^2 t} = a(1 + \tan^2 t)dt \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t} = \frac{|a|}{\cos t} \end{cases}$$

- Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì đặt $x = \frac{a}{\sin t} \Rightarrow \begin{cases} dx = d\left(\frac{a}{\sin t}\right) = -\frac{a \cos t dt}{\sin^2 t} \\ \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = \frac{|a|}{\cot t} \end{cases}$

- Nếu hàm $f(x)$ có chứa $(1+x^2)^k$ thì đặt $x = \tan t \Rightarrow \begin{cases} dx = d(\tan t) = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ (1+x^2)^k = (1+\tan^2 t)^k = \frac{1}{\cos^{2k} t} \end{cases}$

III.2.2.B. Bài tập ví dụ

Ví dụ 1.1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $I = \int \sqrt{1-x^2} dx.$

b) $I = \int x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$

c) $I = \int \frac{dx}{x^2+1}.$

d) $I = \int \sqrt{x^2+2x+5} dx.$

Lời giải:

a) $I = \int \sqrt{1-x^2} dx.$

Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = d(\sin t) = \cos t dt.$

$$\Rightarrow I = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos t \cdot \cos t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C.$$

Từ $x = \sin t \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2} \\ t = \arcsin x \end{cases} \Rightarrow \sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}.$

$$\Rightarrow I = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + C.$$

b) $I = \int x^2 \sqrt{9-x^2} dx$

Đặt $x = 3\sin t \Rightarrow dx = d(3\sin t) = 3\cos t dt.$

$$\Rightarrow I = \int 9\sin^2 t \cdot 3\cos t \cdot 3\cos t dt = \frac{81}{4} \int \sin^2 2t dt = \frac{81}{4} \int \frac{1-\cos 4t}{2} dt$$

$$= \frac{81}{4} \left[\frac{1}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int \cos 4t dt \right] = \frac{81}{4} \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{8} \sin 4t \right) + C \text{ với } t = \arcsin \frac{x}{3}.$$

c) $I = \int \frac{dx}{x^2+1}$

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = d(\tan t) = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t)dt$.

$\Rightarrow \int \frac{(1 + \tan^2 t)dt}{1 + \tan^2 t} = \int dt = t + C = \arctan x + C$.

d) $I = \int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx = \int \sqrt{(x+1)^2 + 4} d(x+1)$

Đặt $x+1 = 2 \tan t \Rightarrow dt = d(2 \tan t) = \frac{2dt}{\cos^2 t}$.

$\Rightarrow I = \int \frac{2dt}{\frac{2}{\cos t} \cdot \cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{d(\sin t)}{1 - \sin^2 t}$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{(1 + \sin t) + (1 - \sin t)}{(1 + \sin t)(1 - \sin t)} d(\sin t) = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin t)}{1 - \sin t} + \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin t)}{1 + \sin t} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right| + C$

III.2.2.C. Bài tập vận dụng

Bài 72. Tính: $P = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

A. $P = x\sqrt{x^2+1} - x + C$

B. $P = \sqrt{x^2+1} + \ln \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C$

C. $P = \sqrt{x^2+1} + \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C$

D. Đáp án khác.

Bài 73. Tính nguyên hàm $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$?

A. $\ln \left| x - \sqrt{x^2+a} \right| + C$

B. $\ln \left| 2x - \sqrt{x^2+a} \right| + C$

C. $\ln \left| 2x + \sqrt{x^2+a} \right| + C$

D. $\ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C$

Bài 74. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+k}$ với $k \neq 0$?

A. $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+k} + \frac{x}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right|$.

B. $f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right|$.

C. $f(x) = \frac{k}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right|$.

D. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$.

Bài 75. Trong các hàm số sau:

(I). $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

(II). $f(x) = \sqrt{x^2+1} + 5$.

(III). $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(IV). $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 2$.

Hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2+1}|$.

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (III).

C. Chỉ (II).

D. Chỉ (III) và (IV).

Bài 76. 63 Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$?

A. $F(x) = 2\sqrt{4+x^2}$.

B. $F(x) = x + 2\sqrt{x^2+4}$.

C. $F(x) = \ln(x - \sqrt{4+x^2})$.

D. $F(x) = \ln(x + \sqrt{4+x^2})$.

Bài 77. 56 Đổi biến $x = 2\sin t$ nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, cho biết giá trị $\cos x$ dương. Khi đó ta được:

A. $\int dt$.

B. $\int t dt$.

C. $\int \frac{1}{t} dt$.

D. $\int t^2 dt$.

Đáp án:

72.B	73.D	74.B	75.B	76.D	77.A				
------	------	------	------	------	------	--	--	--	--

Bài tập 1 2 3
Vươn xa những ước mơ

CHỦ ĐỀ III.3. PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

III.3.A. Phương pháp

- Công thức nguyên hàm từng phần: $I = \int u dv = uv - \int v du$.
- Ta thường sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần cho các nguyên hàm có dạng $\int f(x).g(x)dx$ trong đó ($f(x)$ và $g(x)$) là hai trong 4 loại hàm: **đa thức, lượng giác, mũ, loga**.
- Thứ tự ưu tiên chọn u : **Logarit $\rightarrow$ đa thức $\rightarrow$ Lượng giác = mũ**.
- Các bước tính nguyên hàm từng phần:
 - + Bước 1: Biến đổi tích phân ban đầu về dạng $I = \int f(x).g(x)dx$.
 - + Bước 2: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx \end{cases}$
(chọn v là một nguyên hàm của $g(x)$).
 - + Bước 3: Khi đó $I = \int u dv = uv - \int v du$.

III.3.B. Bài tập ví dụ

Ví dụ 1 (Chuyên Vinh 2017 Lần 3)

Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x$ và $\int f(x)dx = (ax+b)e^x + c$ với a, b, c là các hằng số. Khi đó:

- A.** $a+b=2$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=1$.

Lời giải:

$$f'(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f(x) = \int (x+1)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow f(x) = (x+1)e^x - \int e^x d(x+1) = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C.$$

$$\text{Chọn } f(x) = xe^x \text{ ta có } \int f(x)dx = \int xe^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1 = x \\ dv_1 = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = dx \\ v_1 = e^x \end{cases} \Rightarrow \int f(x)dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Do đó $a=1; b=-1 \Rightarrow a+b=0$. Chọn C.

Ví dụ 2: Tìm các nguyên hàm sau :

a) $I = \int x^2 \ln x dx$.

b) $I = \int e^x \sin x dx$.

c) $I = \int (x^2 + 2x) \sin x dx$.

Lời giải:

a) $I = \int x^2 \ln x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Nhận xét: Ngoài cách đặt u, v như trên ta có thể làm trực tiếp như sau:

$$I = \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} d(\ln x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

b) $I = \int e^x \sin x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow I = -e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1 = e^x \\ dv_1 = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = e^x dx \\ v_1 = \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + C - I$$

$$\Rightarrow I = -e^x \cos x + e^x \sin x + C - I$$

$$\Leftrightarrow 2I = -e^x \cos x + e^x \sin x + C \Leftrightarrow I = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C$$

Nhận xét: Nếu biểu thức cần tính nguyên hàm là tích của hàm số lượng giác và hàm số mũ thì có thể đặt u, v tùy ý. Tuy nhiên trong quá trình tính sẽ gồm các vòng lặp, trong mỗi vòng lặp ta phải nhất quán việc đặt u .

c) $\int (x^2 + 2x) \sin x dx.$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 + 2x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x + 2) dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow I = -(x^2 + 2x) \cos x + \int \cos x \cdot (2x + 2) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x + 2 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = -(x^2 + 2x) \cos x + (2x + 2) \sin x - \int \sin x \cdot 2 dx$$

$$I = -(x^2 + 2x) \cos x + (2x + 2) \sin x + 2 \cos x + C$$

Nhận xét: Nếu hàm đa thức bậc n thì phải thực hiện tích phân từng phần n lần.

Ví dụ 3: Tìm $I = \int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

A. $I = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C.$

B. $I = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$

C. $I = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x + C.$ D. $I = \sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x + C.$

Lời giải:

$$I = \int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ dv = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ v = \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$

Theo công thức tính nguyên hàm, từng phần, ta có:

$$I = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int dx = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x + C$$

Chọn C.

Ví dụ 4: Kết quả của phép lấy nguyên hàm $I = \int \sqrt{x^2 + a} dx$ là

A. $I = \frac{x\sqrt{x^2 + a}}{2} + \frac{a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|}{2} + C.$ B. $I = \frac{x\sqrt{x^2 + a}}{2} + C.$

C. $I = \frac{a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|}{2} + C.$ D. $I = \ln(x + \sqrt{x^2 + a}) + C.$

Lời giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x^2 + a} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ v = x \end{cases}$$

Theo công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$$\begin{aligned}
 I &= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}} dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}} dx \\
 &= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a} dx + a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} - I + a.J \quad (1)
 \end{aligned}$$

Tính $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Đặt } t &= x + \sqrt{x^2+a} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right) dx = \frac{\sqrt{x^2+a} + x}{\sqrt{x^2+a}} dx = \frac{t}{\sqrt{x^2+a}} dx. \\
 \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} &= \frac{dt}{t}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } J = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |x + \sqrt{x^2+a}|. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } I = \frac{x\sqrt{x^2+a}}{2} + \frac{a \ln |x + \sqrt{x^2+a}|}{2} + C.$$

Chọn A.

Ví dụ 5: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(\ln x)$ là hàm số

A. $F(x) = \frac{x \cos(\ln x)}{2} + C.$

B. $F(x) = \frac{x \sin x(\ln x)}{2} + C.$

C. $F(x) = \frac{x \cos(\ln x) - x \sin(\ln x)}{2} + C.$

D. $F(x) = \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C.$

Lời giải:

$$\text{Tính } F(x) = \int f(x) dx = \int \sin(\ln x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx \\ v = x \end{cases}.$$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần ta có:

$$F(x) = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - J \quad (1)$$

$$\text{Xét } J = \int \cos(\ln x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) dx \\ v = x \end{cases}$$

Theo công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$$J = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + I \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I \Leftrightarrow 2I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x).$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C.$$

Chọn D.

III.3.C. Bài tập vận dụng

Bài 1. Tính $I = \int x \sin x dx$ ta được:

- A. $x \cos x + \sin x + C$.
C. $x \cos x - \sin x + C$.

- B. $x \sin x - \cos x + C$.
D. $-x \cos x + \sin x + C$.

Bài 2. $\int \sqrt{x} \ln x dx$ là

A. $\frac{x^{\frac{3}{2}} \ln x}{3} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9} + C$

B. $\frac{2x^{\frac{3}{2}} \ln x}{3} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9} + C$

C. $\frac{2x^{\frac{3}{2}} \ln x}{3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{9} + C$

D. $\frac{2x^{\frac{3}{2}} \ln x}{3} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9} + C$

Bài 3. $\int x \sin \frac{x}{3} dx = a \sin \frac{x}{3} - b x \cos \frac{x}{3} + C$. Khi đó a+b bằng

- A. -12. B. 9 C. 12 D. 6

Bài 4. $\int x^2 e^x dx = (x^2 + mx + n)e^x + C$. Khi đó m.n bằng

- A. 0. B. 4. C. 6. D. -4

Bài 5. Nguyên hàm của hàm số: $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

- A. $2e^x - \tan x + C$ B. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$
C. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$ D. $2e^x + \tan x + C$

Bài 6. Một nguyên hàm của hàm $f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ là

- A. $x.e^{\frac{1}{x}}$ B. $x^2.e^{\frac{1}{x}}$ C. $(x^2-1).e^{\frac{1}{x}}$ D. $e^{\frac{1}{x}}$

Bài 7. Nguyên hàm của hàm số: $I = \int (x-2)\sin 3x dx$ là

A. $F(x) = -\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C$

B. $F(x) = \frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C$

C. $F(x) = -\frac{(x+2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C$

D. $F(x) = -\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\sin 3x + C$

Bài 8. Nguyên hàm của hàm số: $I = \int x^3 \ln x dx$ là

A. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x + \frac{1}{16}x^4 + C$

B. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln^2 x - \frac{1}{16}x^4 + C$

C. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^3 + C$

D. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$

Bài 9. Tính $\int (2x-1)\cos x dx$ ta được:

A. $(2x-1)\sin x + 2\cos x + C$.

B. $(2x-1)\cos x - 2\sin x + C$.

C. $(2x-1)\cos x + 2\sin x + C$.

D. $(2x-1)\sin x - 2\cos x + C$.

Bài 10. Tính $\int (1-x)e^x dx$ ta được:

A. $(1-x)e^x + C$.

B. $(2-x)e^x + C$.

C. $-e^x + C$.

D. $e^x + C$.

Bài 11. Tính $\int (2x+3)e^{2x} dx$ ta được:

A. $2e^{2x} + C$.

B. $\frac{1}{2}(2x+3)e^{2x} + C$.

C. $(x+1)e^{2x} + C$.

D. $2(2x+3)e^{2x} + C$.

Bài 12. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = (2x-1)\ln x$ và thỏa mãn $F(1) = 1$. Tìm $F(x)$.

A. $(x^2-x)\ln x - \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.

B. $(x^2-x)\ln x - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$.

C. $(x^2-x)\ln x + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$.

D. $(x^2-x)\ln x + \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$.

Bài 13. Tính $I = \int x \cos^2 x dx$ ta được:

A. $\frac{2x^2 + 2x \sin 2x - \cos 2x}{8} + C$.

B. $\frac{2x^2 + 2x \sin 2x + \cos 2x}{8} + C$.

C. $\frac{x + 2x \sin 2x + 2x \cos 2x}{8} + C$.

D. $\frac{x^2 + 2x \sin 2x - 2x \cos 2x}{8} + C$.

Bài 14. Tính $I = \int (x+1)\cos 2x dx$ ta được:

A. $\frac{\sin 2x - 2(x+1)\cos 2x}{4} + C$.

B. $\frac{\sin 2x + 2(x+1)\cos 2x}{4} + C$.

C. $\frac{2(x+1)\sin 2x - \cos 2x}{4} + C$.

D. $\frac{2(x+1)\sin 2x + \cos 2x}{4} + C$.

Bài 15. Tính $I = \int (1-2x)\sin 2x dx$ ta được:

A. $\frac{(2x-1)\cos 2x - \sin 2x}{2} + C.$

B. $\frac{(2x-1)\cos 2x + \sin 2x}{2} + C.$

C. $\frac{(1-2x)\cos 2x - \sin 2x}{2} + C.$

D. $\frac{(1-2x)\cos 2x + \sin 2x}{2} + C.$

Bài 16. Tính $I = \int e^x \cos x dx$ ta được:

A. $2e^x(\sin x + \cos x) + C.$

B. $2e^x(\sin x - \cos x) + C.$

C. $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$

D. $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$

Bài 17. Tìm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x + \sin^2 x)\cos x$, biết $F(0) = 2$.

A. $x \sin x - \cos x + \frac{1}{3} \sin^3 x - 1.$

B. $x \sin x - \cos x + \frac{1}{3} \sin^3 x + 1.$

C. $x \sin x + \cos x + \frac{1}{3} \sin^3 x - 1.$

D. $x \sin x + \cos x + \frac{1}{3} \sin^3 x + 1.$

Bài 18. Tính $I = \int (x-2)e^{2x} dx$ ta được:

A. $\frac{1}{4}(2x-5)e^{2x} + C.$

B. $\frac{1}{4}(2x-3)e^{2x} + C.$

C. $\frac{1}{2}(2x-5)e^{2x} + C.$

D. $\frac{1}{2}(2x-3)e^{2x} + C.$

Bài 19. Tính $I = \int (e^{2x} - x)e^x dx$ ta được:

A. $3e^{3x} + (x-1)e^x + C.$

B. $3e^{3x} - (x-1)e^x + C.$

C. $\frac{1}{3}e^{3x} + (x-1)e^x + C.$

D. $\frac{1}{3}e^{3x} - (x-1)e^x + C.$

Bài 20. Tính $\int x^2 \ln^2 x dx$ ta được:

A. $\frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{9x^3} \ln x + \frac{2}{27x^3} + C.$

B. $\frac{x^3}{3} \ln x^2 + \frac{2}{9x^3} \ln x - \frac{2}{27x^3} + C.$

C. $\frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{9x^3} \ln x - \frac{2}{27x^3} + C.$

D. $\frac{x^3}{3} \ln x^2 + \frac{2}{9x^3} \ln x + \frac{2}{27x^3} + C.$

Bài 21. Cho $I = \int \ln(x^2 - x) dx$. Nếu đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2 - x) \\ dv = dx \end{cases}$ thì ta được:

A. $I = x \ln(x^2 - x) + \int \frac{2x-1}{x-1} dx.$

B. $I = x \ln(x^2 - x) - \int \frac{2x-1}{x-1} dx.$

C. $I = x \ln(x^2 - x) + \int \frac{1}{x-1} dx.$

D. $I = x \ln(x^2 - x) - \int \frac{1}{x-1} dx.$

Bài 22. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x \ln(\sin x + \cos x)$ là

A. $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) - \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2x) \ln(1 + \sin 2x) + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

Bài 23. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-2)\sin 3x$ là

A. $-\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9} \sin 3x + C.$

B. $\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9} \sin 3x + C.$

C. $-\frac{(x-2)\cos 3x}{3} - \frac{1}{9} \sin 3x + C.$

D. $-\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{3} \sin 3x + C.$

Bài 24. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 \ln x$ là

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{16} + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^3}{16} + C.$

D. $F(x) = -\frac{x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{16} + C$

Bài 25. Tính $I = \int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ ta được:

A. $x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C.$

B. $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C.$

C. $x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \sqrt{x^2 + 1} + C.$

D. $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \sqrt{x^2 + 1} + C.$

Đáp án:

1.D	2.B	3.C	4.D	5.D	6.B	7.A	8.D	9.A	10.B
11.C	12.A	13.B	14.D	15.A	16.C	17.D	18.A	19.D	20.D
21.B	22.C	23.A	24.B	25.A					

Bài tập 1 2 3
Vươn xa những ước mơ