TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

7 2018
Số 493

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Nhà Toán học Robert Langlands (Canada) nhận Giải thưởng Abel 2018 từ Vua Harald V (Na Uy)

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

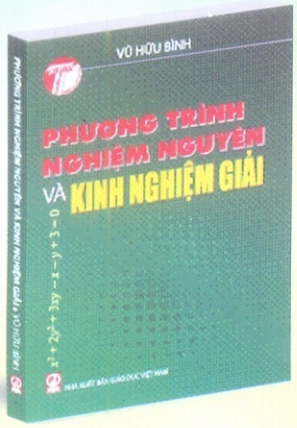
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Bưu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ TRONG LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

ĐỖ QUANG MINH
(GV THCS Nguyễn Bá Ngọc, An Xuân, Tuy An, Phú Yên)

Các bài toán hình học thường được giải bằng phương pháp hình học thuần túy. Tuy nhiên ta còn có thể vận dụng phương pháp đại số để giải các bài toán nói trên. Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu cách vận dụng phương pháp đại số vào giải một số dạng toán hình học.

1. Vận dụng phương pháp đại số vào dạng bài tập tính toán

Trong dạng bài tập này, chúng ta thực hiện các bước sau:

• Chọn ẩn, đặt điều kiện cho ẩn.

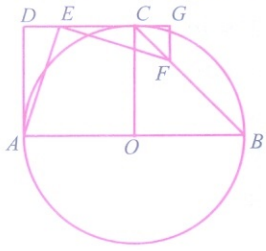
• Biểu diễn các đại lượng hình học chưa biết, đã biết thông qua ẩn.

• Dựa vào các hệ thức hình học đã biết để lập phương trình, hệ phương trình.

• Giải PT, hệ PT để tìm nghiệm.

• Chọn nghiệm thích hợp rồi trả lời.

Thí dụ 1. *Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$, C là một điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$. Hai tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và C cắt nhau ở D. Trên đoạn DC lấy điểm E sao cho $DE = \frac{1}{3}DC$. Trên đoạn BC lấy điểm F sao cho EF = EA. Kẻ FG vuông góc với đường thẳng DC ($G \in DC$). Tính độ dài đoạn thẳng CG theo R (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, năm học 2017 – 2018, Tỉnh Phú Yên).*



Lời giải. Từ giả thiết suy ra tứ giác $OADC$ là hình vuông và tam giác CGF vuông cân tại G.

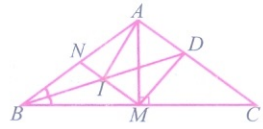
Đặt $CG = GF = x$, với $0 < x < R$. Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ADE, EGF và kết hợp với $AE = EF$ ta có:

$$AE^2 = EF^2 \Leftrightarrow R^2 + \frac{R^2}{9} = \left(\frac{2}{3}R + x\right)^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2Rx - R^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$$

(loại nghiệm $x = -R$). Vậy $CG = \frac{R}{3}$.

Thí dụ 2. *Cho tam giác ABC cân tại A có đường trung tuyến AM và đường phân giác BD sao cho $BD = 2AM$. Tính số đo $\widehat{BAC}$.*



Lời giải. Gọi N là trung điểm của AB thì $MN \parallel AC$ và MN cắt BD tại trung điểm I của BD $\Rightarrow ID = AM \Rightarrow$ tứ giác $ADMI$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{MAC} = \widehat{MAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Khi đó, đặt $\widehat{BAC} = 2x$, với $0^0 < x < 90^0$ thì

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 90^0 - x \text{ và } \widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \frac{90^0 - x}{2}$$

Kết hợp với tính chất của góc ngoài tam giác, ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{CBD} + \widehat{ACB}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2x = \frac{90^0 - x}{2} + 90^0 - x \Leftrightarrow x = 54^0.$$

Vậy $\widehat{BAC} = 2 \times 54^0 = 108^0$.

Thí dụ 3. *Cho ΔABC có diện tích $1\,m^2$. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho AM = 3BM và AN = 4CN. Tính diện tích các tam giác AOB và AOC.*

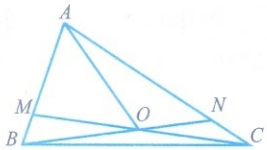
Lời giải. Đặt $S_{AOB} = x$; $S_{AOC} = y$, với $0 < x, y < 1$.

Vì $AM = 3BM$, nên $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{S_{AOM}}{S_{AOB}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{AOM} = \frac{3}{4}S_{AOB} = \frac{3}{4}x.$$

Tương tự, ta cũng tính được $S_{AON} = \frac{4}{5}y$.

Kết hợp với:



$S_{ABN} = S_{AOB} + S_{AON} = x + \frac{4}{5}y$

và $S_{ABN} = \frac{4}{5}S_{ABC} = \frac{4}{5}$,

ta có $x + \frac{4}{5}y = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5x + 4y = 4$ (1)

Lập luận tương tự, ta cũng có:

$$S_{AOC} + S_{AOM} = S_{ACM} \Leftrightarrow y + \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 4y = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ PT $\begin{cases} 5x + 4y = 4 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$ (*)

Giải hệ PT (*), ta được nghiệm $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{8} \end{cases}$

(thỏa mãn).

Vậy $S_{AOB} = \frac{1}{2}m^2$, $S_{AOC} = \frac{3}{8}m^2$.

2. Vận dụng phương pháp đại số vào dạng bài tập chứng minh họ đường thẳng đi qua điểm cố định

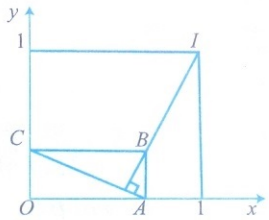
Kiến thức vận dụng

• Phương trình họ đường thẳng (Δ_m) có dạng $m.f(x,y) + h(x,y) = 0$. Khi đó họ đường thẳng (Δ_m) luôn đi qua điểm cố định có tọa độ là nghiệm của hệ PT $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ h(x,y) = 0 \end{cases}$.

• Hai đường thẳng (d): $y = ax + b$, (d'): $y = a'x + b'$ vuông góc với nhau $\Leftrightarrow a.a' = -1$.

Thí dụ 1. *Cho góc vuông xOy. Một hình chữ nhật OABC có chu vi không đổi sao cho A, C là hai điểm thay đổi thuộc tia Ox, Oy. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Giả sử chu vi hình chữ nhật $OABC$ là $2a$ (với a có độ dài không đổi). Ta lập hệ tọa độ vuông góc có trục hoành chứa Ox và trục tung chứa Oy. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$. Nếu tọa độ điểm $A(m;0)$ thì tọa độ các điểm $C(0;1-m)$; $B(m;1-m)$, với $m \neq 0$ và $m \neq 1$. Ta có PT đường thẳng (AC) có dạng:



$$y = -\frac{1-m}{m}x + 1 - m$$

$\Rightarrow$ PT đường thẳng (Δ_m) đi qua B và vuông góc với đường thẳng (AC) là: $y = \frac{m}{1-m}x + \frac{1-2m}{1-m}$

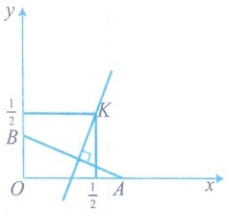
$\Leftrightarrow m(x + y - 2) + (1 - y) = 0$, với $m \neq 0$ và $m \neq 1$.

Từ đó họ đường thẳng (Δ_m) đi qua B và vuông góc với đường thẳng (AC) luôn đi qua điểm cố định I có tọa độ là nghiệm của hệ PT:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Thí dụ 2. *Cho góc vuông xOy và hai điểm A, B chuyển động trên Ox, Oy sao cho $OA + OB = a$ (a là độ dài cho trước). Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn AB luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Ta lập hệ tọa độ vuông góc có trục hoành chứa Ox và trục tung chứa Oy. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$. Nếu tọa độ điểm $A(m;0)$ thì tọa



độ điểm $B(0;1-m)$, với $m \neq 0$.

Khi đó PT đường trung trực (d_m) của đoạn thẳng AB có dạng:

$$(x-m)^2+(y-0)^2=(x-0)^2+(y-(1-m))^2.$$

$$\Leftrightarrow 2m.(x+y-1)+(1-2y)=0.$$

Vậy họ đường thẳng (d_m) luôn đi qua điểm cố định K có tọa độ là nghiệm của hệ PT

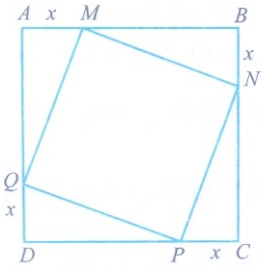
$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 1-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$$

3. Vận dụng phương pháp đại số vào dạng bài tập cực trị hình học

Kiến thức được vận dụng trong dạng bài tập này là các bất đẳng thức *Cauchy, Bunyakovsky, ...*

Thí dụ 1. *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho AM = BN = CP = DQ. Tìm vị trí của điểm M sao cho tứ giác MNPQ có chu vi nhỏ nhất.*

Lời giải. Dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình vuông, suy ra chu vi tứ giác $MNPQ$ có chu vi nhỏ nhất khi và chỉ khi MQ nhỏ nhất. Đặt $AM=x$, với $0<x<a$.



Khi đó $AQ=MB=a-x$.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông AMQ, ta có:

$$MQ^2=AM^2+AQ^2=x^2+(a-x)^2$$

$$\geq \frac{1}{2}[x+(a-x)]^2=\frac{a^2}{2}$$

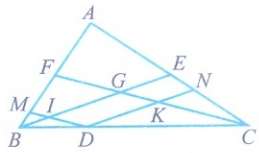
$\Rightarrow MQ \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (không đổi). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=a-x \Leftrightarrow x=\frac{a}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB. Vậy khi M là trung điểm của AB thì chu vi tứ giác $MNPQ$ có giá trị nhỏ nhất là $2a\sqrt{2}$.

Thí dụ 2. *Cho ΔABC có các đường trung tuyến BE và CF cắt nhau ở G. Gọi D là một điểm trên cạnh BC. Qua D kẻ đường thẳng song song với CF, cắt BE và BA theo thứ tự ở I và M. Qua D kẻ đường thẳng song song với BE, cắt CF và CA theo thứ tự ở K và N. Tìm vị trí của điểm D trên cạnh BC để tứ giác GIDK có diện tích lớn nhất.*

Lời giải. Đặt

$$\begin{cases} BD=x \\ CD=y \end{cases} \Rightarrow x+y=BC$$

(với $0<x,y<BC$).



Từ giả thiết có $S_{GBC}=\frac{1}{3}S_{ABC}$ (không đổi) và các tam giác IBD, GBC, KDC đồng dạng suy ra

$$\frac{S_{GIDK}}{S_{GBC}}=\frac{S_{GBC}-S_{IBD}-S_{KDC}}{S_{GBC}}=1-\left(\frac{x}{BC}\right)^2-\left(\frac{y}{BC}\right)^2$$

$$=1-\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$$

Từ đó S_{GIDK} lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$ nhỏ nhất.

Lại có: $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$ $\Leftrightarrow BD=CD \Leftrightarrow D$ là trung điểm của BC. Vậy khi D là trung điểm của BC thì diện tích tứ giác $GIDK$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{6}S_{ABC}$.

4. Vận dụng phương pháp đại số vào dạng bài tập quỹ tích

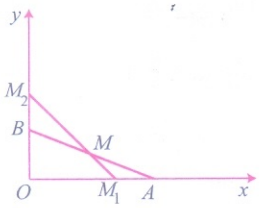
Kiến thức vận dụng: Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và $I(x;y)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB thì

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + y_A}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}.$$

Thí dụ 1. *Hai điểm A, B di động lần lượt trên hai cạnh Ox, Oy của góc vuông xOy, sao cho $OA + OB = 2m$ (m là độ dài cho trước). Tìm quỹ tích các trung điểm M của đoạn thẳng AB.*

Lời giải. *Phần thuận.* Ta lập hệ tọa độ vuông góc có trục hoành chứa Ox và trục tung chứa Oy. Theo đề bài thì có: $A(x_A;0)$ $B(0;y_B)$ và $x_A + y_B = 2m$. (với $x_A, y_B \geq 0$ và $x_A^2 + y_B^2 \neq 0$). Gọi $M(x;y)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + 0}{2} = \dfrac{x_A}{2} \\ y = \dfrac{0 + y_B}{2} = \dfrac{y_B}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x + y = \frac{x_A + y_B}{2} = m$$

$\Leftrightarrow$ $y = -x + m$. Từ đó trung điểm M thuộc đường thẳng (d): $y = -x + m$.

Giới hạn. Khi $B \equiv O$ thì $M \equiv M_1$ thuộc tia Ox sao cho $OM_1 = m$.

Khi $A \equiv O$ thì $M \equiv M_2$ thuộc tia Oy sao cho $OM_2 = m$.

Do đó trung điểm M thuộc đoạn thẳng M_1M_2 của đường thẳng (d): $y = -x + m$.

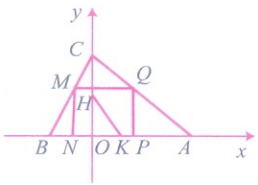
Phần đảo. Trên đoạn thẳng M_1M_2 của đường thẳng (d): $y = -x + m$ ta lấy bất kỳ một điểm $M'(x';y')$. Dựng đường tròn $(M';M'O)$ cắt Ox tại $A'(x_{A'};0)$, cắt Oy tại $B'(0;y_{B'})$. Ta sẽ chứng minh $x_{A'} + y_{B'} = 2m$. Thật vậy, từ cách dựng đường tròn $(M';M'O)$. Suy ra M' là trung điểm của $A'B'$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_{A'}}{2} \\ y = \dfrac{y_{B'}}{2} \end{cases}.$$ Kết hợp với $x' + y' = m$ (do M' thuộc đường thẳng (d): $y = -x + m$), ta suy ra: $x_{A'} + y_{B'} = 2m$. Tức là $OA' + OB' = 2m$.

Kết luận. Quỹ tích các trung điểm M là đoạn thẳng M_1M_2, với hai điểm M_1, M_2 lần lượt trên hai cạnh Ox, Oy sao cho $OM_1 = OM_2 = m$.

Thí dụ 2. *Cho ΔABC nhọn, M là điểm chuyển động trên cạnh BC. Dựng hình chữ nhật MNPQ ($N, P \in AB$, $Q \in AC$). Khi điểm M chuyển động trên cạnh BC thì tâm của hình chữ nhật MNPQ chuyển động trên đường nào?*

Lời giải. *Phần thuận.* Lập hệ tọa độ vuông góc có hai điểm A, B nằm trên trục hoành Ox, điểm C nằm trên trục tung Oy, sao cho các điểm $A(a;0)$, $B(b;0)$, $C(0;c)$. Giả sử PT đường thẳng (MQ) có dạng: $y = m$, với $0 \leq m \leq c$. Khi đó:



PT đường thẳng (AC) là: $y = -\dfrac{c}{a}x + c$.

PT đường thẳng (BC) là: $y = -\dfrac{c}{b}x + c$.

Suy ra tọa độ của các điểm $M\left(\dfrac{b}{c}(c-m); m\right)$, $Q\left(\dfrac{a}{c}(c-m); m\right) \Rightarrow P\left(\dfrac{a}{c}(c-m); 0\right)$.

Gọi $I(x;y)$ là trung điểm của đoạn thẳng MP, ta có:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2c}.(c-m) \\ y = \dfrac{m}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{c}{a+b}x + \frac{c}{2}.$$

Suy ra điểm I thuộc đường thẳng

$$(d)\text{: } y = -\frac{c}{a+b}x + \frac{c}{2}.$$

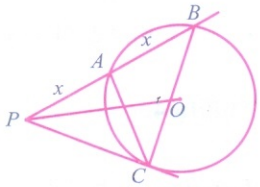
Giới hạn. Khi $M \equiv B$ thì $I \equiv K$ (với K là trung điểm của AB).

Khi $M \equiv C$ thì $I \equiv H$ (với H là trung điểm của OC).

Kết luận. Khi điểm M chuyển động trên cạnh BC thì tâm I của hình chữ nhật $MNPQ$ chuyển động trên đoạn thẳng HK (với H, K lần lượt là trung điểm của OC, AB).

5. Vận dụng phương pháp đại số vào dạng bài tập dựng hình

Thí dụ 1. *Từ một điểm P ở ngoài đường tròn $(O;R)$, hãy dựng một cát tuyến PAB (A nằm giữa P và B) với đường tròn sao cho $PA = AB$.*



Lời giải. *Phân tích*. Giả sử đã dựng được cát tuyến PAB sao cho $PA = AB$. Từ P dựng tiếp tuyến PC của đường tròn $(O;R)$, khi đó $PC = a$ (không đổi).

Đặt $PA = AB = x$. Từ kết quả: $PA.PB = PC^2$ $\Leftrightarrow 2x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{a.\frac{a}{2}}$, ta có cách dựng sau:

Cách dựng

• Từ P dựng tiếp tuyến $PC = a$ của đường tròn $(O;R)$.

• Dựng đoạn trung bình nhân x của a và $\frac{a}{2}$.

• Dựng cung tròn tâm P bán kính x cắt đường tròn $(O;R)$ tại A.

• Nối PA, kéo dài cắt đường tròn $(O;R)$ tại B.

Như vậy PAB là cát tuyến cần dựng.

Chứng minh. Theo cách dựng trên ta có

$x = \sqrt{a.\frac{a}{2}}$. Kết hợp với $PA.PB = PC^2 = a^2$, $PA = x$, ta suy ra $AB = x = PA$.

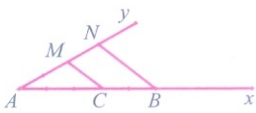
Biện luận.

• Vì cung tròn tâm P, bán kính x có thể cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm nên thông thường bài toán có hai nghiệm hình.

• Khi cung tròn $(P;x)$ tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ thì bài toán có một nghiệm hình và cát tuyến cần dựng đi qua tâm O của đường tròn.

• Khi cung tròn $(P;x)$ không có điểm chung với đường tròn $(O;R)$ thì bài toán vô nghiệm.

Thí dụ 2. *Hãy dựng đoạn thẳng có độ dài bằng $\frac{10}{3}$.*



Lời giải. *Phân tích*. Đặt $x = \frac{10}{3}$ thì $\frac{x}{5} = \frac{2}{3}$, suy ra x là số hạng chưa biết trong tỉ lệ thức chứa các số 2; 3 và 5. Từ đó ta có cách dựng sau:

Cách dựng

• Dựng 2 tia Ox, Oy sao cho $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt. Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{xOy}$ nhọn.

• Trên tia Ax dựng $AB = 5$; $AC = 3$ (đơn vị độ dài tùy ý).

• Trên tia Ay dựng đoạn thẳng $AM = 2$.

• Qua B dựng BN song song với CM, cắt Ay tại N. Ta có $x = AN = \frac{10}{3}$ chính là độ dài cần dựng.

Chứng minh. Theo cách dựng trên ta có

$$BN \parallel CM,\ AB = 5,\ AC = 3,\ AM = 2.$$

Áp dụng định lí Thales ta có:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AN = \frac{AB.AM}{AC} \Leftrightarrow x = \frac{5.2}{3} = \frac{10}{3}.$$

Biện luận. (Dành cho bạn đọc).

Như vậy phương pháp đại số được chúng ta vận dụng vào giải các bài toán hình học một cách khá hiệu quả. Trong khuôn khổ bài viết có hạn nên chúng tôi chỉ giới thiệu một số dạng như đã trình bày ở trên. Hy vọng các bạn sẽ vận dụng phương pháp này thật hiệu quả khi giải các bài toán hình học, đồng thời phát hiện ra các dạng toán khác nữa mà chúng tôi chưa đề cập đến. Chúc các bạn thành công!

PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG BẬC GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

DƯƠNG VĂN DUY
(GV THPT Nguyên Hồng, TP. Bắc Giang, Bắc Giang)

Trong tạp chí TH&TT số 484 (tháng 10 - 2017) tác giả *Mai Văn Năm* đã giới thiệu phương pháp đồng bậc trong chứng minh bất đẳng thức. Trong bài viết này tôi xin đưa ra một ứng dụng nữa của phương pháp này trong việc giải các hệ phương trình.

Thí dụ 1. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 1 \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x \end{cases}.$$

Lời giải. Từ hệ PT

$\Rightarrow 2x^3 - y^3 = (2y - x)(2y^2 - x^2)$

$\Leftrightarrow 2x^3 - y^3 = 4y^3 - 2xy^2 - 2x^2y + x^3$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 5y^3 = 0$ (*)

• $y = 0 \Rightarrow x = 0$ không là nghiệm của hệ PT.

• $y \neq 0$ ta chia cả 2 vế của (*) cho y^3 ta được:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 5 = 0$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ ta có: $t^3 + 2t^2 + 2t - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 3t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y.$

Vậy hệ trên có 2 nghiệm: $(x; y) = (1;1)$ và $(-1;-1)$.

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}.$$

Lời giải. Từ hệ PT $\Rightarrow x^3 + y^3 = \frac{x^2y + 2xy^2 + y^3}{2}$

$\Leftrightarrow 2x^3 + y^3 - x^2y - 2xy^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)(2x - y) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = y^2 \\ y = 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \pm x \\ y = 2x \end{array}\right..$

• $y = -x$ thì hệ PT vô nghiệm.

• $y = x$ hệ PT có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

• $y = 2x$ hệ PT có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)$.

Thí dụ 3. *Giải hệ PT:* $\begin{cases} y^3 + y^2x + 3x - 6y = 0 \\ x^2 + xy = 3 \end{cases}.$

Lời giải. Từ hệ PT suy ra ta có:

$$y^3 + y^2x + x(x^2 + xy) - 2y(x^2 + xy) = 0$$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)(x - y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -x \end{array}\right.$

• $y = x$ thì hệ PT trên có hai nghiệm là:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \text{ và } \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

• $y = -x$ thì hệ PT trên vô nghiệm

Thí dụ 4. *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}.$

Lời giải. Từ hệ PT $\Rightarrow (x^2 + y^2)^3 = (x^3 + y^3)^2$

$\Leftrightarrow x^6 + y^6 + 3x^2y^2(x^2 + y^2) = x^6 + y^6 + 2x^3y^3$

$\Leftrightarrow 3x^2y^2(x^2 + y^2) = 2x^3y^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2y^2 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 0 \end{array}\right.$

• TH1: $x^2y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ y = 0 \Rightarrow x = 1 \end{array}\right..$

• TH2: $3x^2 + 3y^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + 2x^2 + 2y^2 = 0.$

$\Leftrightarrow x = y = 0$ thì hệ PT trên vô nghiệm.

Vậy hệ có đã cho có 2 nghiệm $(1;0)$ và $(0;1)$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ xy^2 + 2x^2y + x^3 = 18 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} y^2 + x^2 = 4 \\ x^3 + y^3 = 8 \end{cases}.$

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN VỊ THANH, HẬU GIANG NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1. 1) Ta có

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \ge ab \text{ và}$$

$$(a+1)(b+1) \ge 64 \Leftrightarrow ab+a+b \ge 63.$$

Suy ra

$$\frac{(a+b)^2}{4} + a+b \ge 63 \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}+1\right)^2 \ge 64 \Leftrightarrow a+b \ge 14.$$

Vậy $T_{\min} = 14$ là giá trị nhỏ nhất khi $a = b = 7$.

2) Đặt $u_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ với n là số nguyên dương. Ta có

$$u_n = \sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+1\right)^2} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+1.$$

$$u_1 = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1;\ u_2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1;\ u_3 = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}+1;\ldots;$$

$$u_n = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+1.$$

Suy ra $s = 1-\frac{1}{n+1}+n = n+1-\frac{1}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n+1}$.

3) Với x; y nguyên dương và $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}=1$.

$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}=1 \Leftrightarrow x = \frac{py}{y-q} = p+\frac{pq}{y-q}$ là số nguyên dương nên $y-q$ là ước dương của pq. Suy ra $y = 1+q$ hoặc $y = p+q$ hoặc $y = 2q$ hoặc $y = q(1+p)$. Vậy $\begin{cases} x = p(1+q) \\ y = 1+q \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = p+q \\ y = p+q \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2p \\ y = 2q \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1+p \\ y = q(1+p) \end{cases}$.

Câu 2. 1) ĐK: $y \ne 0$. Ta có

$$\begin{cases} x^2+xy = y \\ \dfrac{3x^2}{y} = 7-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+x = 1 \\ 3.\dfrac{x^2}{y}+2x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = \dfrac{16}{5} \end{cases}.$$

2a) $x(4+\sqrt{x})-3-(x+\sqrt{x})\sqrt{4x-3} = 0.$ (1)

ĐK: $x \ge \frac{3}{4}$.

$$(1) \Leftrightarrow 4x-3-(x+\sqrt{x})\sqrt{4x-3}+x\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x-3}-x)(\sqrt{4x-3}-\sqrt{x}) = 0.$$

• $\sqrt{4x-3} = x \Rightarrow x^2-4x+3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

• $\sqrt{4x-3} = \sqrt{x} \Leftrightarrow 4x-3 = x \Leftrightarrow x = 1$.

Thử lại, ta có $x = 1$ hoặc $x = 3$ là thỏa mãn.

2b) ĐK: $x \ne 1$. Ta có:

$$x^2+\frac{x^2}{x^2-2x+1} = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2-2x+1)}{x^2-2x+1}+\frac{x^2}{x^2-2x+1}-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2.\frac{x^2}{x-1}-3 = 0 \qquad (2)$$

Giải (2), ta được $\frac{x^2}{x-1} = -1$ hoặc $\frac{x^2}{x-1} = 3$.

• $\frac{x^2}{x-1} = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

• $\frac{x^2}{x-1} = 3 \Leftrightarrow x^2-3x+3 = 0$ (vô nghiệm).

3a) $x^2+2\sqrt{3}x-4\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3}+\sqrt{3+4\sqrt{5}} \\ x = \sqrt{3}-\sqrt{3+4\sqrt{5}} \end{array}\right.$.

3b) $x^2+2\sqrt{3}x-4\sqrt{5} = 0$

$\Rightarrow x^{2018}+2\sqrt{3}x^{2017}-4\sqrt{5}x^{2016} = 0$

Ta có $a^{2018}+2\sqrt{3}a^{2017}-4\sqrt{5}a^{2016} = 0$ và

$$b^{2018}+2\sqrt{3}ba^{2017}-4\sqrt{5}b^{2016} = 0.$$

Suy ra

$$s_{2018}+2\sqrt{3}s_{2017}-4\sqrt{5}s_{2016} = 0 \Rightarrow s_{2018} = 4\sqrt{5}\alpha-2\sqrt{3}\beta.$$

Câu 3. 1) Vì đường thẳng $d: y = 2(m-1)x-4$ đi qua $A(1;6)$ nên ta suy ra $y = 10x-4$. Ta có:

$$x^2 = 10x-4 \Leftrightarrow x^2-10x+4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5-\sqrt{21} \\ x = 5+\sqrt{21} \end{array}\right..$$

Tọa độ giao điểm là $P(5-\sqrt{21};\ 46-10\sqrt{21})$ và $Q(5+\sqrt{21};\ 46+10\sqrt{21})$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 = 2(m-1)x-4 \Leftrightarrow x^2-2(m-1)x+4 = 0 \qquad (*)$$

Ta có: $\Delta' = m^2-2m-3 = (m+1)(m-3)$. d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -1$ hoặc $m > 3$. Khi đó, $\begin{cases} x_1+x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = 4 \end{cases}$.

Ta có:

(Xem tiếp trang 9)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN, ĐHSP HÀ NỘI NĂM HỌC 2018 – 2019

VÒNG 1

(Dành cho tất cả thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1 *(2 điểm)*. Cho biểu thức

$$P=\frac{2}{(x+1)\sqrt{x+1}+(x-1)\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\frac{2x}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}} \text{ với } x>1.$$

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm x để $P=x-1$.

Câu 2 *(2 điểm)*. Một nhà máy chuyên sản xuất một loại sản phẩm. Năm 2015, nhà máy sản xuất được 5000 sản phẩm. Do ảnh hưởng của thị trường tiêu thụ nên sản lượng của nhà máy trong các năm 2016 và 2017 đều giảm. Cụ thể: số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2016 giảm $x\%$ so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015, số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 cũng giảm $x\%$ so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2016. Biết rằng số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2017 giảm 51% so với số lượng sản phẩm nhà máy sản xuất được trong năm 2015. Tìm x.

Câu 3 *(2 điểm)*. Cho phương trình $x^3-x-1=0$.

Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình đã cho.

1) Chứng minh $x_0>0$.

2) Tính giá trị của biểu thức

$$M=\frac{x_0^2-1}{x_0^3}\sqrt{2x_0^2+3x_0+2}.$$

Câu 4 *(3 điểm)*. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $BC=a$, $AB=b$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Qua điểm M dựng đường thẳng cắt đường chéo AC của hình chữ nhật $ABCD$ tại điểm P và cắt đường thẳng BC tại điểm Q sao cho B nằm giữa C và Q.

1) Khi $MP\perp AC$, hãy:

a) Tính PQ theo a và b.

b) Chứng minh $a.BP=b.PN$.

2) Chứng minh $\widehat{MNP}=\widehat{MNQ}$ (không nhất thiết MP và AC vuông góc với nhau).

Câu 5 *(1 điểm)*. Các số nguyên $x, x_1, x_2, ..., x_9$ thỏa mãn

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_9)=(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_9)=x.$$

Tính $P=x.x_1.x_2...x_9$.

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 *(2 điểm)*. Cho các số thực x, y không âm thỏa mãn $(x+1)(y+1)=2$. Tính giá trị biểu thức:

$$P=\sqrt{x^2+y^2-2\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+2+xy}.$$

Câu 2 *(2 điểm)*. Các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=x+y+z$.

Câu 3 *(2 điểm)*.

1) Cho biểu thức $M=\dfrac{(a+b)^2}{a^3+ab^2-a^2b-b^3}$ với a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng M không thể nhận giá trị nguyên.

2) Cho a, b là hai số nguyên dương, đặt

$$A=(a+b)^2-2a^2;\ B=(a+b)^2-2b^2$$

Chứng minh rằng A và B không đồng thời là số chính phương.

Câu 4 *(3 điểm)*. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại D và E. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với PC. Đường thẳng qua B song song với OP cắt PC tại Q. Chứng minh rằng:

1) $PB=PQ$.

2) O là trực tâm của tam giác ADE. ☞

☞ 3) $\widehat{PAO} = \widehat{QAC}$.

Câu 5 (*1 điểm*). Có 45 người tham gia một cuộc họp. Quan sát sự quen nhau giữa họ, người ta thấy rằng: nếu hai người có số người quen bằng nhau thì lại không quen nhau.

Gọi S là số cặp người quen nhau trong cuộc họp (cặp người quen nhau không kể thứ tự sắp xếp giữa hai người trong cặp).

1) Xây dựng ví dụ để $S = 237$.

2) Chứng minh $S \le 870$.

NGUYỄN THANH HỒNG

(*GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội*) ***giới thiệu***

HƯỚNG DẪN GIẢI...

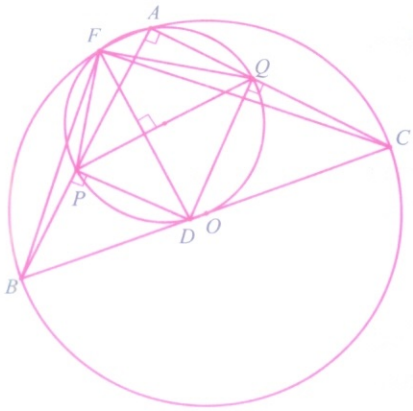
(*Tiếp theo trang 7*)

$$P = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2)x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 964 = 0.$$

$\Leftrightarrow 8(m-1)^3 - 24(m-1) + 4(m-1)^2 - 16 - 964 = 0$

$\Leftrightarrow m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = 6.$

Câu 4.



1a) Ta có $APDQ$ là hình chữ nhật nên có diện tích là $S_{APDQ} = x(a - x)$. Hình chữ nhật $APDQ$ có diện tích lớn nhất khi $APDQ$ là hình vuông. Khi đó, ta có $AP = x = \frac{a}{2}$. Suy ra $S_{\max} = \frac{a^2}{4}$.

1b) Ta có $FP = DP; DP = BP$ nên $FP = BP$. Tương tự $FQ = CQ$. Dễ thấy 5 điểm $A; F; P; D; Q$ cùng thuộc đường tròn đường kính PQ.

$\Rightarrow \widehat{APF} = \widehat{AQF}$ và $\widehat{BPF} = \widehat{CQF}$.

$\Rightarrow \Delta FPB \backsim \Delta FQC$.

$\Rightarrow \widehat{PFQ} = \widehat{PFC} + \widehat{CFQ} = \widehat{PFC} + \widehat{BFP} = \widehat{BFC}$.

Do $\Delta DPQ = \Delta FPQ \Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{PFQ} = \widehat{PDQ} = 90^0$.

2) Diện tích lục giác đều cạnh $2a$ là

$$s_1 = 6.\frac{1}{2}a\sqrt{3}.2a = 6\sqrt{3}a^2.$$

Diện tích của phần không bị tô đen là

$$s_2 = 6.\frac{120}{360}a^2\pi = 2a^2\pi.$$

Diện tích phần bị tô đen là

$$s = s_1 - s_2 = 6\sqrt{3}a^2 - 2a^2\pi = (6\sqrt{3} - 2\pi)a^2.$$

Câu 5. Ta có

$$P = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 36 - 2(ab + ac + bc).$$

Vì $1 \le a \le 3; 1 \le b \le 3; 1 \le c \le 3$ nên ta có

$(a-3)(b-3)(c-3) \le 0$ và $(a-1)(b-1)(c-1) \ge 0$.

Xét $(a-3)(b-3)(c-3) \le 0$

$\Leftrightarrow abc - 3(ab + ac + bc) + 9(a + b + c) - 27 \le 0$

$\Leftrightarrow abc \le 3(ab + ac + bc) - 27$ (1)

Xét $(a-1)(b-1)(c-1) \ge 0$

$\Leftrightarrow abc - (ab + ac + bc) + (a + b + c) - 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow abc \ge (ab + ac + bc) - 5$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra

$(ab + ac + bc) - 5 \le abc \le 3(ab + ac + bc) - 27$

$\Rightarrow ab + ac + bc \ge 11.$

P đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow ab + ac + bc = 11$.

Do đó $P_{\max} = 14$ khi $ab + ac + bc = 11$. Chẳng hạn, khi $a = 1; b = 2; c = 3$.

MAI HOÀN HẢO (*Hậu Giang*) ***giới thiệu***

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

KỸ THUẬT ĐỔI BIẾN ĐỂ THIẾT LẬP BĐT MỚI TỪ CÁC BĐT THƯỜNG GẶP

BÙI TRUNG HIẾU
(GV THPT Hưng Đạo, Tứ Kỳ, Hải Dương)

Trong quá trình học toán có thể bạn đã giải được rất nhiều bài toán liên quan đến BĐT và trong đó chắc hẳn cũng có những bài tập rất khó. Trong học tập, có khi nào bạn nghĩ mình sẽ tự đặt ra bài toán về BĐT để "*đố*" bạn bè chưa? Việc các bạn có thói quen lật đi lật lại vấn đề, suy nghĩ mở rộng đặt ra một bài toán mới sẽ giúp bạn thu được những điều quan trọng hơn lời giải rất nhiều. Điều đó giúp bạn thu nhận ra đâu là kỹ thuật chính để chứng minh BĐT, qua đó giải thích được "*vì sao giải được như vậy*". Có rất nhiều cách để sáng tạo ra một BĐT mới từ BĐT đã cho trong đó có thể nói đơn giản nhất là sử dụng phương pháp đổi biến số. Bài viết này sẽ chia sẻ với các bạn 8 bài BĐT được sinh ra từ bài toán ban đầu: "*Cho* $a, b, c > 0$, *chứng minh rằng* $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$," bằng phương pháp đổi biến.

Bài toán 1. *Cho* $a, b, c > 0$, *chứng minh rằng*:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc. \qquad (1)$$

Bài toán này chúng ta có thể chứng minh một cách dễ dàng nhờ BĐT Cauchy như sau:

Do $a, b, c > 0$ áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm ta có:

$$\begin{cases} a+b \ge 2\sqrt{ab} \\ b+c \ge 2\sqrt{bc} \\ c+a \ge 2\sqrt{ac} \end{cases} \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+d) \ge 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Từ bài toán này bây giờ ta sẽ tạo ra một số bài toán khác:

***Cách* 1:** Từ giả thiết bài toán chia cả 2 vế của BĐT (1) cho vế trái ta được BĐT:

$$1 \ge \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 8.\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b}{c+a}\cdot\frac{c}{a+b}.$$

Để cho BĐT trở nên gọn gàng hơn ta đặt:

$$x = \frac{a}{b+c}; y = \frac{b}{c+a}; z = \frac{c}{a+b}$$

Khi đó:

$$x+1 = \frac{a+b+c}{b+c};\ y+1 = \frac{a+b+c}{c+a};\ z+1 = \frac{a+b+c}{a+b}.$$

Do đó ta có hệ thức liên hệ giữa x, y, z như sau:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2.$$

Từ đây ta thu được bài toán.

Bài toán 2. *Cho* $x, y, z > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$. *Chứng minh rằng* $8xyz \le 1$.

Từ bài toán này nếu lặp đi lặp lại nhiều lần ta sẽ có bài toán tổng quát như sau:

Bài toán 3. *Cho* $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + ... + \frac{1}{x_n+1} = n-1$. *Chứng minh rằng*: $x_1x_2...x_n \le \frac{1}{(n-1)^n}$.

Thoạt nhìn, ta thấy đây không phải là một bài toán dễ nhưng nếu biết nguồn gốc xuất phát của nó thì việc chứng minh sẽ dễ dàng hơn.

***Cách* 2:** Từ bài toán ban đầu ta đặt $\begin{cases} a = x+y \\ b = y+z \\ c = z+x \end{cases}$,

khi đó $x, y, z > 0$ và

$$(x+y+z+y)(y+z+x+z)(z+x+y+x) \ge 8(x+y)(y+z)(z+x).$$

Để BĐT bớt cồng kềnh ta đặt $p = x + y + z$, thì BĐT trở thành:

$$(p+x)(p+y)(p+z) \geq 8(p-x)(p-y)(p-z) \quad (*)$$

Mặt khác, từ bài toán 1 ta có:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$
$$\Leftrightarrow (p-x)(p-y)(p-z) \geq 8xyz \quad (2)$$

Từ (*) và (2) suy ra

$$(p+x)(p+y)(p+z) \geq 8^2 xyz \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có bài toán 4 như sau:

Bài toán 4. *Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = p$. Chứng minh rằng:*

$$(p^2 - x^2)(p^2 - y^2)(p^2 - z^2) \geq 8^3 x^2 y^2 z^2$$

hay: $\left(\frac{p^2}{x^2} - 1\right)\left(\frac{p^2}{y^2} - 1\right)\left(\frac{p^2}{z^2} - 1\right) \geq 8^3.$

Để rút bớt ẩn p ta cho điều kiện $p \geq 1$ và thu được bài toán mới như sau:

Bài toán 5. *Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z \geq 1$. Chứng minh rằng:*

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \geq 8^3.$$

Bản thân bài toán 5 đã là một bài toán hay nhưng ta sẽ thấy nó hay hơn qua mối quan hệ với bài toán dưới đây:

Bài toán 6. (*IMO* - 2001) *Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng:* $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$

Bài toán này có thể giải như sau:

Đặt $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \\ y = \dfrac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} \\ z = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \end{cases}$, khi đó BĐT cần chứng minh trở thành: $x + y + z \geq 1$. Ta đi tìm mối liên hệ giữa x, y, z:

Ta thấy $\begin{cases} x^2 = \dfrac{a^2}{a^2 + 8bc} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} = 1 + \dfrac{8bc}{a^2} \\ y^2 = \dfrac{b^2}{b^2 + 8ca} \Rightarrow \dfrac{1}{y^2} = 1 + \dfrac{8ca}{b^2} \\ z^2 = \dfrac{c^2}{c^2 + 8ab} \Rightarrow \dfrac{1}{z^2} = 1 + \dfrac{8ab}{c^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = \frac{8bc}{a^2} \cdot \frac{8ca}{b^2} \cdot \frac{8ab}{c^2} = 8^3.$$

Như vậy, ta cần chứng minh bài toán:

Bài toán 7. *Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \geq 8^3$. Chứng minh rằng:*

$$x + y + z \geq 1.$$

Rõ ràng, đây chỉ là một phát biểu theo dạng "*ngược*" của bài toán 5. Nếu bây giờ ta thay x, y, z bởi nghịch đảo của chúng thì bài toán trở thành:

Bài toán 8. *Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1) \geq 8^3$. Chứng minh rằng: $xy + yz + zx \geq xyz$.*

Trên đây là một số cách biến đổi để đưa ra BĐT mới từ một BĐT đơn giản ban đầu. Các bạn có thể suy nghĩ thêm về các bài tập sau:

1. *Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng:*

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4.$$

Hướng dẫn. Đây là một bài toán khá quen thuộc với nhiều bạn. Cách chứng minh đơn giản nhất cho bài toán này là sử dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm. Ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}$.

Do đó: $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Từ đây bạn đọc hãy nghĩ cách để đưa ra các bất đẳng thức sau:

a) Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{2}{2a+b+c}+\frac{2}{a+2b+c}+\frac{2}{a+b+2c}.$$

b) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\ge\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

c) Cho $a,b,c>0$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+2c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{2a+b+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

d) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+2c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{2a+b+c}\le 1.$$

e) Cho $a,b,c>0$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+3b+2c}+\frac{1}{2a+b+3c}+\frac{1}{3a+2b+c}\le\frac{3}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

f) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn ĐK: $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+3b+2c}+\frac{1}{2a+b+3c}+\frac{1}{3a+2b+c}\le\frac{3}{16}.$$

2. *Cho $a,b,c>0$, chứng minh rằng:*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9.$$

Hướng dẫn. Đây là một bài toán khá quen thuộc với nhiều bạn. Cách chứng minh đơn giản nhất cho bài toán này là sử dụng BĐT Cauchy cho 3 số không âm. Ta có: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{a.b.c}$ và

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}.$$ Do đó

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3\sqrt[3]{a.b.c}.3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}=9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Từ đây bạn hãy nghĩ cách để đưa ra các BĐT sau:

a) Cho $a,b,c>0$, chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

b) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc\le\frac{1}{8}$. Chứng minh rằng: $a+b+c\ge\frac{3}{2}$.

c) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Chứng minh rằng: $a+b+c\ge\frac{3}{2}$.

3. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}.$$

Hướng dẫn. Đây là một bài toán khá quen thuộc với nhiều bạn. Cách chứng minh đơn giản nhất cho bài toán này là sử dụng phương pháp đánh giá. Ta có:

$$a^3+b^3\ge ab(a+b)\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c).$$

Tương tự ta có: $a^3+c^3+abc\ge ac(a+b+c)$,

$$b^3+c^3+abc\ge bc(a+b+c).$$

Do đó:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}$$
$$\le\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\frac{1}{a+b+c}\le\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Từ đây bạn đọc hãy nghĩ cách để đưa ra các bất đẳng thức sau:

a) Cho $x,y,z>1$ thỏa mãn

$$(x+y-z-1)(x-y+z-1)(-x+y+z-1)=8.$$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le 1$.

b) Cho $x,y,z>1$ thỏa mãn $xy+yz+zx=xyz$. Chứng minh rằng:

$$(x+y-z-1)(x-y+z-1)(-x+y+z-1)\le 8.$$

Có lẽ qua vài ví dụ nhỏ ở trên, các bạn đã hình dung ra cách để "*đưa ra một bài toán mới*". Từ *bài toán* 1 có vẻ đơn giản nhưng qua phương pháp đổi biến đã dẫn tới những bài toán không tầm thường chút nào. Đổi biến là một kỹ thuật tinh tế mà bài viết trên chỉ chia sẻ những ý tưởng đơn giản nhất, điều đó có nghĩa là sáng tạo là vô cùng phong phú và điều đó phụ thuộc chủ yếu vào chính các bạn!

TỪ PHƯƠNG TRÌNH PYTHAGORE ĐẾN ĐỊNH LÍ LỚN FERMAT

NGÔ THÚC LANH (*Hà Nội*)

Xét phương trình

$$x^2 = y^2 + z^2. \qquad (1)$$

Ta biết rằng nếu a là cạnh huyền, b và c là các cạnh góc vuông của một tam giác vuông thì theo định lí Pythagore, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Nhà toán học cổ Hy Lạp Pythagore
(580 - 572 tr. CN)

Vậy bộ ba (a,b,c) đó là một nghiệm của phương trình (1). Như vậy PT (1) được thỏa mãn bởi tất cả các bộ ba (a,b,c) trong đó a là cạnh huyền, b và c là các cạnh góc vuông của một tam giác vuông.

Nếu b và c là những số nguyên, thì a không nhất thiết là số nguyên. Chẳng hạn, nếu $b = 2$ và $c = 3$, thì $b^2 + c^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$, và không có số nguyên nào mà bình phương bằng 13. Khi đó $a = \sqrt{13}$ là một số vô tỉ.

Nếu ta yêu cầu rằng nghiệm của PT (1) gồm toàn những số nguyên, thì PT (1) được gọi là phương trình Pythagore.

Các bộ ba số nguyên (a,b,c) là nghiệm của PT Pythagore được gọi là các bộ ba Pythagore và các số a, b, c được gọi là các số nguyên Pythagore.

Nhà toán học cổ Hy Lạp *Platon* (429 – 348 tr.CN) đã xác định có vô số bộ ba Pythagore và *Euclid* (330 – 275 tr. CN) đã chỉ ra cách tìm tất cả các bộ ba đó, qua việc đưa ra lời giải tổng quát của PT Pythagore như sau:

$$x = k(m^2 + n^2),\ y = k(m^2 - n^2),\ z = 2kmn$$

trong đó k, m, n là những số nguyên và $m - n$ là một số lẻ.

Bảng sau đây liệt kê các bộ ba Pythagore (a,b,c) sao cho $a \le 100$, $b \ge c$ và b, c nguyên tố cùng nhau.

(5, 4, 3)	(13,12,6)	(17,15,8)	(25,24,7)
(29,21,20)	(37,35,12)	(41,40,9)	(53,45,28)
(61,60,11)	(65,56,33)	(65,63,16)	(73,55,48)
(85,84,13)	(85,77,36)	(81,80,39)	(97,72,65)

Nhà toán học Hy Lạp *Diophantus* ở Alexandria (khoảng 325 – 409) trong tác phẩm *Số học* của mình đã nghiên cứu phương trình Pythagore. Trong bài toán 8 của sách, khi bình luận về bài toán này, nhà toán học Pháp *Pierre Fermat* (1601 – 1665) viết những suy nghĩ của mình xung quanh bài toán đó vào lề cuốn sách như sau: "*Trái lại, không thể chia một lập phương thành tổng hai lập phương, một lũy thừa bậc 4 thành tổng hai lũy thừa bậc 4, một cách tổng quát, một lũy thừa bất kỳ thành tổng của hai lũy thừa cùng bậc. Tôi đã phát minh ra một phép chứng minh tuyệt diệu (của định lí tổng quát này), nhưng lề này nhỏ quá không thể ghi ra được.*"

Nhà toán học Pháp Pierre Fermat
(1601 - 1665)

Khẳng định trên đây là nội dung của định lí được gọi là *định lí lớn Fermat*. Định lí này phát biểu như sau: "*Nếu n là một số nguyên lớn hơn hay bằng* 3, *thì phương trình* $x^n = y^n + z^n$ *không có nghiệm* (x, y, z) *nào với* x, y, z *là những số nguyên khác* 0."

Từ ngày *Fermat* đưa ra định lí đó, hơn 300 năm sau, nhiều nhà toán học lỗi lạc đã tìm ra cách chứng minh nó. Các trường hợp $n = 3$ và $n = 4$ đã được chứng minh bởi *Euler* (1707 – 1783) và *Gauss* (1777 – 1855), $n = 5$ bởi *Legendre* (1752 – 1833) và *Dirichlet* (1805 – 1859), $n = 14$ bởi *Dirichlet*, rồi nhiều trường hợp khác bởi *Dirichlet* và *Kronecker* (1823 – 1891)...

Năm 1908, *Wolfskehl* đặt ra một giải 100000 Mac để thưởng cho phép chứng minh đầy đủ đầu tiên của *định lí lớn Fermat*. Trước đó, từ 1850, Viện Hàn lâm Khoa học Paris đặt ra một giải thưởng gồm một huy chương Vàng và 300000 francs cho phép chứng minh đầu tiên của định lí này.

Năm 1976, *định lí lớn Fermat* đã được kiểm chứng với tất cả các số tự nhiên x, y, z nhỏ hơn hay bằng 25000 và với mọi số nguyên tố n nhỏ hơn 125000.

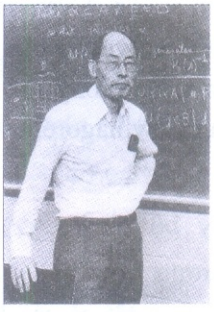
Năm 1983 *Faltings* nhà toán học người Đức, sinh năm 1954 đã chứng minh rằng với $n \geq 3$ phương trình $x^n = y^n + z^n$ chỉ có một số hữu hạn lời giải nguyên thủy.

Nhà toán học Đức Gred Faltings 28.07.1954

Cuối cùng, ngày 25/6/1993, nhà toán học Anh là *Andrew Wiles*, sinh năm 1953, từ 1982 là Giáo sư Trường Đại học Princeton (Hoa Kỳ), trình bày trước một cử tọa gồm các nhà toán học ở Cambridge, lời giải của cái mà các nhà chuyên môn gọi đó là "giả thuyết *Taniyama – Shimura*", từ đó suy ra định lí lớn Fermat như một hệ luận. Những người tham dự buổi thuyết trình đó, tuyên bố họ đã được sống một khoảnh khắc hạnh phúc tuyệt vời. Song một số nhà bác học đặt vấn đề nghi ngờ về một số suy diễn của *Wiles*. *Wiles* đã xem xét lại và khắc phục được những thiếu sót trong lập luận của mình. Sau hơn một năm tính toán, Wiles đã hoàn thành công trình dài 200 trang của mình. Và đến tháng 10 năm 1994, công trình đó đã được một tập thể chuyên gia do *Simon Kochen* lãnh đạo, công nhận là đúng. *Định lí lớn Fermat* đã được chứng minh hoàn toàn. *Fermat* đã qua đời từ 329 năm trước.

Nhà toán học Anh Andrew John Wiles 11.04.1953

Nhà toán học Nhật Bản Yutaka Taniyama (1927 - 1958)



Nhà toán học Nhật Bản Goro Shimura (23.02.1930)

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA TRONG CHỨNG MINH

LƯƠNG XUÂN VINH
(GV Đại học Kinh Tế - Tài Chính, TP. Hồ Chí Minh)

"*Chúng ta muốn hiểu mọi điều phức tạp, còn toán học là biến những điều phức tạp thành các công thức đơn giản*".

Ta xét bài toán sau: *Cho hai dãy số* $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$ *được xác định theo công thức:*

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3},\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2},\ y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$$

với $n \geq 2$. *Chứng minh rằng:* $x_n y_n \in (2;3)$ *với mọi n và* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

(Olympic sinh viên – 2009).

Lời giải. $x_n y_n \in (2;3)$ (bạn thử giải xem tại sao?). Đặt: $y_n = \tan\varphi_n \left(0 < \varphi_n < \frac{\pi}{2}, \varphi_1 = \frac{\pi}{3}\right)$.

Khi đó:

$$y_{n+1} = \frac{\sin\varphi_n}{1+\cos\varphi_n} = \tan\frac{\varphi_n}{2} = \tan\varphi_{n+1}.$$

Như vậy: $\varphi_{n+1} = \frac{1}{2}\varphi_n, \varphi_1 = \frac{\pi}{3}\cdot$ Dãy số $\{\varphi_n\}$ là một cấp số nhân, với công bội $q = \frac{1}{2}\cdot$ Vậy:

$$\varphi_n = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, y_n = \tan\left[\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right].$$

Từ đó ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

Lời giải của bài toán trở thành hiển nhiên khi ta sử dụng được phép thế lượng giác thích hợp. Ý tưởng ban đầu của phương pháp lượng giác hóa chính là ở chỗ tất cả mọi số đều có một hàm số lượng giác tương ứng. Các công thức của những hàm số lượng giác này sẽ giúp chúng ta biến đổi bài toán trở thành đơn giản hơn.

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

1. Nếu như trong bài toán có điều kiện $x^2 + y^2 = 1$ thì ta sử dụng phép thế $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$. Phép thế này tỏ ra khá hiệu quả trong nhiều trường hợp.

2. Khi $a,b,c \in \mathbb{R}^+, ab+bc+ca = 1$. Khi đó ta có thể đặt $a = \tan\frac{A}{2}, b = \tan\frac{B}{2}, c = \tan\frac{C}{2}$, với A, B, C là ba góc của một tam giác.

3. Khi $a,b,c \in \mathbb{R}^+, a+b+c = abc$. Khi đó ta có thể đặt $a = \tan A, b = \tan B, c = \tan C$, với A, B, C là ba góc của một tam giác.

4. Từ điều kiện $a,b,c \in [-1,1]$ và $a^2+b^2+c^2+2abc = 1$. Khi đó ta có thể đặt $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$ hoặc $a = \sin\frac{A}{2}, b = \sin\frac{B}{2}, c = \sin\frac{C}{2}$, với A, B, C là ba góc của một tam giác.

5. Với những bài toán xuất hiện cùng lúc các đại lượng $y+z, z+x, x+y$, thì tồn tại một tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $a = y+z, b = z+x, c = x+y$. Khi đó ta có một số dạng biến đổi như sau:

$$\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sin\frac{A}{2};$$

$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\cos\frac{A}{2}.$$

$$\left(\text{trong đó } p=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z\right).$$

CÁC ÁP DỤNG CƠ BẢN

I. Áp dụng trong bất đẳng thức

Thí dụ 1. *Cho* $a,b,c\in\mathbb{R}^+, ab+bc+ca=1$. *Chứng minh rằng:* $\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}\le\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$.

Lời giải. Từ điều kiện đề bài ta có thể đặt $a=\tan\frac{A}{2}, b=\tan\frac{B}{2}, c=\tan\frac{C}{2}$, với A, B, C là ba góc của một tam giác. Dễ thấy bài toán có thể đưa về chứng minh BĐT:

$$\sin A+\sin B\le 2\cos\frac{C}{2}.$$

Thật vậy, ta có:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 2\cos\frac{C}{2}.$$

Thí dụ 2. *Cho các số dương* x,y,z *thỏa mãn:* $xyz+x+y=z$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:* $P=\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{y^2+1}-\frac{2}{z^2+1}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có: $xy+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}=1$. Như vậy ta có thể đặt:

$$x=\tan\frac{A}{2}, y=\tan\frac{B}{2}, \frac{1}{z}=\tan\frac{C}{2},$$

với A, B, C là 3 góc trong một tam giác. Khi đó bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=2\cos^2\frac{A}{2}+3\cos^2\frac{B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$

$$=\cos A+\cos C-3\sin^2\frac{B}{2}+3.$$ Ta có

$$P=2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}-3\sin^2\frac{B}{2}+3$$

$$\le -3\sin^2\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}+3=-3\left(\sin\frac{B}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}\le\frac{10}{3}.$$

Như vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{10}{3}$. Đẳng thức xảy ra tại điểm: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}, y=\frac{\sqrt{2}}{4}, z=\sqrt{2}$.

Thí dụ 3. (*USAMO*, 2001) *Cho* $a,b,c\ge 0$, *thỏa mãn:* $a^2+b^2+c^2+abc=4$. *Chứng minh rằng:*

$$ab+bc+ca-abc\le 2.$$

Lời giải. *Cách* 1. Bài toán này có một lời giải đại số khá đẹp như sau:

Nếu $a,b,c\ge 1$ khi đó ta có: $a^2+b^2+c^2+abc\ge 4$.

Nếu $a,b,c\le 1$ khi đó ta có: $a^2+b^2+c^2+abc\le 4$.

Do đó trong ba số a, b, c phải có hai số nằm về phía so với số 1, và số còn lại nằm khác phía đối với a, b, c so với số 1. Giả sử hai số đó là a, b. Khi đó ta có: $(a-1)(b-1)\ge 0\Leftrightarrow 1\ge a+b-ab$.

Từ giả thiết ta có

$$c=\frac{-ab+\sqrt{(4-a^2)(4-b^2)}}{2}, \text{ (do } c\ge 0).$$

Mà $c=\frac{-ab+\sqrt{(4-a^2)(4-b^2)}}{2}\le$

$$\le\frac{-ab+\frac{8-a^2-b^2}{2}}{2}=\frac{8-(a+b)^2}{4}\le 2-ab.$$

Do đó ta có: $c(a+b-ab)\le(2-ab).1=2-ab$, suy ra: $ab+bc+ca-abc\le 2$.

Trở lại với cách giải theo hướng lượng giác hóa:

Cách 2. Từ giả thiết và phép đổi biến 4 đã trình bày ở trên ta có thể đặt:

$$a = 2\cos A, b = 2\cos B, c = 2\cos C,$$

với A, B, C là ba góc trong tam giác. Ta viết lại điều phải chứng minh như sau:

$$\sum 4\cos A\cos B \le 8\prod \cos A + 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum \cos A\cos B \le 1 + 4\prod \cos A.$$

Hay: $2\sum \cos A\cos B + 2\sum \cos^2 A \le 3.$

Ta có: $2\cos A\cos B = \sqrt{\sin 2A\cot A\sin 2B\cot B}$

$$\le \frac{\sin 2A\cot B + \sin 2B\cot A}{2}$$

Do đó:

$$2\sum \cos A\cos B \le \frac{1}{2}\left[\cot B(\sin 2A + \sin 2C) + \cot A(\sin 2B + \sin 2C) + \cot C(\sin 2A + \sin 2B)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\sum \cos A\cos B \le \cos B\cos(A-C) + \cos A\cos(B-C) + \cos C\cos(A-B)$$

$$\Rightarrow 2\sum \cos A\cos B \le -(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) = 1 + 4\cos A.\cos B.\cos C. \quad \square$$

Thí dụ 4. *Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn: $-1 \le x_1, x_2, ..., x_n \le 1$ và $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 0$. Chứng minh rằng: $x_1 + x_2 + ... + x_n \le \frac{n}{3}$.*

Lời giải. Đặt: $x_i = \sin\alpha_i$. Sử dụng công thức góc nhân ba: $\sin^3\alpha_i = \frac{1}{4}(3\sin\alpha_i - \sin(3\alpha_i))$ và điều kiện: $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 0$, ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\sin(3\alpha_i) \le \frac{n}{3}. \quad \square$$

Thí dụ 5. *Chứng minh rằng với mọi $x, y, z > 1$ sao cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ thì ta có:*

$$\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Lời giải. Ta đặt: $a = \sqrt{x-1}, b = \sqrt{y-1}, c = \sqrt{z-1}$, khi đó $a, b, c > 0$. Từ điều kiện đã cho ta có thể biến đổi thành: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2b^2c^2 = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+3} \ge a+b+c \Leftrightarrow ab+bc+ca \le \frac{3}{2}$$

Rõ ràng điều này làm ta liên tưởng đến một bất đẳng thức lượng giác quen thuộc: *Cho tam giác ABC, khi đó: $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.*

Thật vậy từ điều kiện:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2b^2c^2 = 1$$

sẽ tồn tại một tam giác ABC sao cho: $ab = \cos A, bc = \cos B, ca = \cos C$. $\square$

Thí dụ 6. *Cho các số thực a, b, $c \ge 1$ thỏa mãn: $a + b + c + 2 = abc$. Chứng minh rằng:*

$$bc\sqrt{a^2-1} + ca\sqrt{b^2-1} + ab\sqrt{c^2-1} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}abc.$$

Lời giải. Giả thiết đã cho tương đương với:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{bc}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2 + 2.\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}.\frac{1}{\sqrt{ab}} = 1.$$

Do $0 < \frac{1}{\sqrt{ab}}, \frac{1}{\sqrt{bc}}, \frac{1}{\sqrt{ca}} \le 1$ nên ta đặt:

$$\frac{1}{\sqrt{bc}} = \cos A, \frac{1}{\sqrt{ca}} = \cos B, \frac{1}{\sqrt{ab}} = \cos C.$$

(A, B, C là ba góc của ΔABC không vuông).

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{1-\frac{1}{a^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{b^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{c^2}} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum\sqrt{1-\left(\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\sum\sqrt{1-\left(\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^2} \le \sqrt{3\left(3-\sum\left(\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^2\right)}$$

Áp dụng BĐT $X^2+Y^2+Z^2 \ge XY+YZ+ZX$ có:

$$\sum\left(\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^2 \ge \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \ge \frac{3}{4}$$

Từ đó:

$$\sum\sqrt{1-\left(\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^2} \le \sqrt{3\left(3-\sum\left(\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^2\right)}$$

$$\le \sqrt{3\left(3-\frac{3}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

II. Áp dụng trong giải phương trình

Thí dụ 7. *Giải phương trình:*

$$16x^5-20x^3+5x+2=0.$$

Lời giải. • Nếu $|x|\le 1$ thì có duy nhất một số $\alpha\in[0;\pi]$ sao cho $x=\cos\alpha$, phương trình đã cho trở thành $\cos 5\alpha+2=0$ (phương trình này vô nghiệm).

• Nếu $|x|>1$ thì xét phương trình: $x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$.

Ta có: $f(t)=t^2-2xt+1=0$ có $\Delta'=x^2-1>0$ nên PT này có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2.

• Nếu $x>1$: $f(1)=2-2x=2(1-x)<0$ và $f(0)=1>0$ nên $0<t_1<1<t_2$.

• Nếu $x<-1$: $f(-1)=2+2x=2(x+1)<0$ và $f(0)=1>0$ nên $t_1<-1<t_2<0$.

Tóm lại nếu $|x|>1$ thì chỉ có duy nhất một số thực t thỏa mãn $|t|>1$ và $x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$. Từ $x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ ta dễ dàng chứng minh được $t^5+\frac{1}{t^5}=2\left(16x^5-20x^3+5\right)$. Do đó phương trình đã cho trở thành: $\frac{1}{2}\left(t^5+\frac{1}{t^5}\right)+2=0$ và $|t|>1$. Giải phương trình này ta thu được:

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-2-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[5]{-2-\sqrt{3}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-2-\sqrt{3}}+\sqrt[5]{-2+\sqrt{3}}\right).$$

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình đã cho là: $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-2-\sqrt{3}}+\sqrt[5]{-2+\sqrt{3}}\right)$.

Thí dụ 8. *Giải phương trình:*

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}.$$

Hướng dẫn. Ta thấy rằng: $x>1$ (các bạn nghĩ xem tại sao?). Từ đó đặt: $x=\frac{1}{\sin\alpha}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

PT có thể viết lại thành: $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{35}{12}$.

Đây là một PT lượng giác cơ bản có thể giải bằng cách đặt: $t=\sin\alpha+\cos\alpha$ với $t>0$. Tập nghiệm của PT này là: $S=\left\{\frac{5}{3};\frac{5}{4}\right\}$.

III. Áp dụng trong các dãy truy hồi

Thí dụ 9. *Cho dãy số $\{x_n\}$ được cho bởi điều kiện:* $x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{2}}, \forall n\ge 1$. *Đặt* $S_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$. *Chứng minh rằng:* $\lim_{n\to+\infty} S_n \le \frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn. Ta có: $x_2 = \sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3.2^2}$. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng: $x_n = \sin\frac{\pi}{3.2^n}$ (phần này dành cho các bạn tự chứng minh).

Lại có: $\sin x < x, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{2} + \sin\frac{\pi}{3.2} + ... + \sin\frac{\pi}{3.2^n} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}.$$

Do đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n \le \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$. ❐

Thí dụ 10. *Cho hai dãy số $\{u_n\},\{v_n\}$ được xác định như sau:*

$$\begin{cases} u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}} \end{cases}, \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{\sqrt{1+v_n^2}-1}{v_n} \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $2^{n+2}u_n < \pi < 2^{n+2}v_n$.

Lời giải. Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được rằng: $u_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}, v_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$. Khảo sát hai hàm số:

$$f(x) = \sin x - x,\ g(x) = \tan x - x \quad \text{trên} \quad \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

thu được các bất đẳng tức:

$$\sin x < x < \tan x; \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$ ❐

BÀI TẬP

1. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab} \le 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

2. Cho $x,y,z \in (0,1)$, $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3. Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{2b^2+2c^2-a^2} + \frac{b}{2c^2+2a^2-b^2} + \frac{c}{2a^2+2b^2-c^2}.$$

4. Cho ba số thực dương x,y,z thỏa $x(x+y+z) = 3yz$. Chứng minh rằng:

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \le 5(y+z)^3.$$

5. Trong các nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z^2+t^2=2 \\ xt+yz \ge \sqrt{2} \end{cases}.$$

Hãy tìm nghiệm sao cho $y+t$ nhỏ nhất.

6. Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $xy = 1 + z(x+y)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2xy(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{z}{1+z^2}$.

7. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c = abc$. Chứng minh rằng:

$$(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) \le \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}.$$

8. Dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi công thức: $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1-2x_n}, n = 1,2,...$ Chứng minh rằng:

a) $\{x_n\} \ne 0$ với mọi n.

b) Dãy số này không tuần hoàn.

9. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y=4y^3 \\ y+3z=4z^3 \\ z+3x=4x^3 \end{cases}$.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ ĐỀU MỘT HÀM SỐ BỞI HÀM ĐA THỨC TRONG BÀI TOÁN ƯỚC LƯỢNG CỰC TRỊ TRÊN ĐOẠN

PHẠM BẮC PHÚ

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Đặt vấn đề. Trong thực tế nhiều khi ta phải tìm hiểu và dự đoán các quy luật của sự việc (giả định là sự việc tồn tại quy luật nào đó). Theo quan điểm hàm, công việc này có thể là: Căn cứ trên sự việc đã xảy ra ta có lượng hữu hạn các cặp quan hệ $(x_i;\ y_i)$ mà $x_i \in [a;b], \forall i = \overline{1,n}$; để dự báo cặp quan hệ $(\alpha;\beta)$ cho tương lai, ta cần xây dựng hàm $y = f(x)$ mà $y_i = f(x_i), \forall i = \overline{1,n}$ đồng thời $\beta = f(\alpha)$. Bài toán ta vừa đặt ra được gọi là bài toán nội suy hàm $f(x)$ với n mốc nội suy $x_1, x_2, ..., x_n$ (về mặt hình học, đây là bài toán dựng đường cong đi qua n điểm cho trước của mặt phẳng). Nói chung nghiệm $f(x)$ không duy nhất và người ta đi giải quyết hai khâu: Lựa chọn các mốc quan sát (mốc nội suy) $(x_i;\ y_i)$; tìm hàm đa thức $P_m(x)$ bậc m sao cho độ sai lệch giữa $f(x)$ và $P_m(x)$ trên đoạn $[a;b]$ là ít nhất, nghĩa là $\max\limits_{[a;b]}|f(x) - P_m(x)| \to \min$ (*). Nếu có $P_m(x)$ thỏa mãn (*) và $P_m(x_i) = y_i, \forall i = \overline{1,n}$ thì $P_m(x)$ gọi là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Sau đây bài viết giới thiệu với bạn đọc một số kết quả về xấp xỉ đều $f(x)$ bởi đa thức và ứng dụng trong giải toán ước lượng cực trị trên đoạn.

A. Xấp xỉ $f(x)$ bằng hằng số

Bài toán tổng quát 1. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Tìm số thực A sao cho $\max\limits_{[a;b]}|f(x) - A| \to \min$.*

Lời giải. Từ tính liên tục của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ suy ra tồn tại các số L, m, M cho bởi:

$$L = \max_{[a;b]}|f(x) - A|,\ m = \min_{[a;b]} f(x) = f(x_1),$$

$$M = \max_{[a;b]} f(x) = f(x_2) \text{ với } x_1, x_2 \in [a;b].$$

• Ta có: $\begin{cases} L \ge |f(x_2) - A| = |M - A| \\ L \ge |f(x_1) - A| = |m - A| \end{cases}$, suy ra:

$$2L \ge |M - A| + |A - m| \ge |M - A + A - m| = M - m$$

$$\Rightarrow L \ge \frac{M - m}{2} \quad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (M - A)(A - m) \ge 0 \\ |M - A| = |m - A| = \dfrac{M - m}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{M + m}{2}.$$

• Ngược lại, khi $A = \dfrac{M + m}{2}$, $\forall x \in [a;b]$ có:

$$m - \frac{M + m}{2} \le f(x) - A \le M - \frac{M + m}{2}$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - A| \le \frac{M - m}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $x \in \{x_1; x_2\}$. Do đó

$$\max_{[a;b]}|f(x) - A| = \frac{M - m}{2}.$$

Vậy $\max\limits_{[a;b]}|f(x) - A|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $A = \dfrac{M + m}{2}$.

Nhận xét. Trong lời giải trên, thực chất ta đã dùng hai mốc nội suy là x_1, x_2.

Thí dụ 1. *Tìm số thực a để giá trị lớn nhất của biểu thức $|x + \sqrt{1 - x^2} - a|$ là nhỏ nhất.*

Hướng giải. Đặt $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$ thì $f(x)$ liên tục trên tập xác định là đoạn $[-1;1]$.

+ Việc tìm GTLN, GTNN của $f(x)$ xin dành cho bạn đọc, kết quả như sau:

$$m = \min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = -1,$$

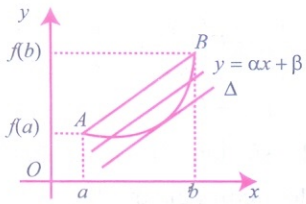
$$M = \max_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}.$$

+ Sử dụng kết quả của Bài toán tổng quát 1 có đáp số $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

B. Xấp xỉ $f(x)$ bằng nhị thức bậc nhất

Bài toán tổng quát 2. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Tìm các số thực α và β sao cho*

$$\max_{[a;b]} |f(x) - (\alpha x + \beta)| \to \min.$$



Nếu $f(x)$ là hàm tuyến tính thì xấp xỉ đều tốt nhất của $f(x)$ là chính nó. Bây giờ ta xét $f(x)$ không tuyến tính, $f(x)$ là hàm lồi (hoặc lõm) và có đạo hàm trên $[a;b]$, có kết quả là đường thẳng $y = \alpha x + \beta$ song song và cách đều các đường thẳng AB và Δ với Δ là một tiếp tuyến song song với dây cung AB của đồ thị (C): $y = f(x)$, ở đó A, B thuộc đồ thị (C) có hoành độ lần lượt là a, b.

Như vậy α là hệ số góc của đường thẳng AB hay

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

c là nghiệm trên đoạn $[a;b]$ của phương trình

$$f'(c) = \alpha;\ \beta = \frac{f(a) + f(c) - (a + c)\alpha}{2}.$$

Ta có thể mở rộng kết quả trên cho trường hợp đồ thị (C) trên đoạn $[a;b]$ nằm hoàn toàn về một phía của dây cung AB, khi đó c là hoành độ tiếp điểm ứng với tiếp tuyến có phương AB và ở xa AB nhất. Các mốc nội suy được xét ở đây là a, c, b.

Thí dụ 2. *Tìm các số thực α và β sao cho $\max_{[0;1]} |x^3 - (\alpha x + \beta)|$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

Phân tích. + Đồ thị (C) của hàm số $y = x^3$ trên đoạn $[0;1]$ nằm bên dưới dây cung AB với $A(0;0)$ và $B(1;1)$.

+ Đường thẳng AB có phương trình: $y = x$.

+ Giải ĐK: $\begin{cases} (x^3)' = 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$ được nghiệm $x = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tiếp tuyến song song với AB trên cung AB là Δ: $y = x - \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

+ Đường thẳng $y = \alpha x + \beta$ song song cách đều AB và Δ nên tìm được $\alpha x + \beta \equiv \frac{1}{2}\left[x + \left(x - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\right]$ hay $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Sau đây ta trình bày lời giải sơ cấp cho Thí dụ này với các mốc nội suy là 0, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1.

Lời giải. Hàm số $F(x) = x^3 - (\alpha x + \beta)$ liên tục trên $[0;1]$ nên tồn tại $L = \max_{[0;1]} |x^3 - (\alpha x + \beta)|$.

• Ta có $\begin{cases} L \ge |F(0)| = |-\beta| \\ L \ge \left|F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \left|\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \beta\right| \\ L \ge |F(1)| = |1 - \alpha - \beta| \end{cases}$.

Sử dụng BĐT về dấu giá trị tuyệt đối suy ra:

$$2\sqrt{3}L \ge (\sqrt{3} - 1)|F(0)| + \sqrt{3}\left|F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| + |F(1)|$$

$$\ge \left|(\sqrt{3} - 1)(-\beta) + \sqrt{3}\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \beta\right) + 1 - \alpha - \beta\right|$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}L \ge \left|\frac{2}{3}\right| \Rightarrow L \ge \frac{1}{3\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |-\beta| = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \left|\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \beta\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ |1 - \alpha - \beta| = \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \end{cases}.$$

• Ngược lại, ta chỉ ra khi $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ thì

$$L = \max_{[0;1]} |F(x)| = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Thật vậy, $F(x) = x(x^2 - 1) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $\forall x \in [0;1]$.

Lại có với mọi $x \in [0;1]$ thì:

$$F(x) + \frac{1}{3\sqrt{3}} = x^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - x$$

$$\geq 3\sqrt[3]{x^3.\frac{1}{3\sqrt{3}}.\frac{1}{3\sqrt{3}}} - x = 0.$$

Từ đó suy ra $\forall x \in [0;1]: -\frac{1}{3\sqrt{3}} \leq F(x) \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$ hay $|F(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Khi $x \in \left\{0; \frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right\}$ thì $|F(x)| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Vậy $L = \max\limits_{[0;1]} |F(x)| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ và $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

C. Sử dụng đa thức Chebysev

Định nghĩa. *Cho số tự nhiên n, đa thức* $T_n(x) = \cos(n.\arccos x)$ *với* $x \in [-1;1]$, *gọi là đa thức Chebysev bậc n.*

Có thể dễ dàng chỉ ra một số trường hợp ban đầu sau: $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1,$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \ldots$$

Người ta chứng minh được một số tính chất sau:

Tính chất 1. $\max\limits_{[-1;1]} |T_n(x)| = 1$, *hơn nữa khi* $n \in \mathbb{N}^*$, *giá trị lớn nhất này đạt được tại* $n+1$ *điểm* $t_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = \overline{0,n})$ *và* $T_n(t_k) = (-1)^k$.

Tính chất 2. *Với mọi đa thức* $P(x)$ *bậc n có hệ số của* x^n *bằng 1, ta có:*

$$\max_{[-1;1]} |P(x)| \geq \max_{[-1;1]} \left|\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}\right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dựa trên hai tính chất này có thể giúp ta chỉ ra được các mốc nội suy cần thiết trong bài toán và ở những trường hợp đơn giản có thể chỉ được ngay đáp số. Sau đây ta xét một số thí dụ minh họa:

Thí dụ 3. *Xét các số thực a, b, c, d tùy ý, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $\max\limits_{[-1;1]} |x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d|$. *Với giá trị nào của a, b, c, d thì xảy ra giá trị nhỏ nhất đó.*

Phân tích. Theo tính chất 2, ta có giá trị nhỏ nhất cần tìm là $\frac{1}{8}$, điều này xảy ra khi

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv \frac{T_4(x)}{8}$$

hay $a = c = 0,\ b = -1,\ d = \frac{1}{8}$. Các mốc nội suy sử dụng là $x_k = \cos\frac{k\pi}{4}$ $(k = \overline{0,4})$.

Lời giải. Đặt $F(x) = |x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d|$ và và gọi $L = \max\limits_{[-1;1]} F(x)$.

• Ta có:

$$\begin{cases} L \geq F(-1) = |1 - a + b - c + d| & (3) \\ L \geq F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left|\frac{1}{4} - \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} - \frac{c}{\sqrt{2}} + d\right| & (4) \\ L \geq F(0) = |d| & (5) \\ L \geq F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left|\frac{1}{4} + \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}} + d\right| & (6) \\ L \geq F(1) = |1 + a + b + c + d| & (7) \end{cases}$$

Ta sử dụng bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối để tìm giá trị nhỏ nhất của L.

Từ (3) và (7) có

$$2L \geq |1 - a + b - c + d + 1 + a + b + c + d|$$

$$\Rightarrow L \geq |1 + b + d| \quad (8)$$

Từ (4) và (6) có

$$2L \geq \left|\frac{1}{4} - \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} - \frac{c}{\sqrt{2}} + d + \frac{1}{4} + \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}} + d\right|$$

$$\Rightarrow L \geq \left|\frac{1}{4} + \frac{b}{2} + d\right| \quad (9)$$

Từ (5), (8), (9) suy ra:

$$4L \geq |d| + |1 + b + d| + 2\left|\frac{1}{4} + \frac{b}{2} + d\right|$$

$$\geq \left|-d - 1 - b - d + \frac{1}{2} + b + 2d\right| = \frac{1}{2}.$$

Vậy có $L \geq \frac{1}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} |d| = |1 + b + d| = \left|\frac{1}{4} + \frac{b}{2} + d\right| = \frac{1}{8} & (10) \\ |1 - a + b - c + d| = |1 + a + b + c + d| \\ \qquad = \left|\frac{1}{4} + \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}} + d\right| \\ \qquad = \left|\frac{1}{4} - \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} - \frac{c}{\sqrt{2}} + d\right| = \frac{1}{8} & (11) \end{cases}$$

Giải (10) ta được $d=\frac{1}{8}, b=-1$. Thay vào (11) giải được $a=c=0$.

• Thử lại, với $a=c=0$, $d=\frac{1}{8}, b=-1$ thì $F(x)=\frac{1}{8}\left|1-8x^2(1-x^2)\right|$. Với $x\in[-1;1]$, ta đặt $x=\cos t$ thì

$$F(x)=\frac{1}{8}\left|1-8\cos^2 t(1-\cos^2 t)\right|$$
$$=\frac{1}{8}\left|1-8\cos^2 t.\sin^2 t\right|=\frac{|\cos 4t|}{8}$$

điều này chứng tỏ $\max\limits_{[-1;1]} F(x)=\max\limits_{\mathbb{R}}\frac{|\cos 4t|}{8}=\frac{1}{8}$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\max\limits_{[-1;1]}\left|x^4+ax^3+bx^2+cx+d\right|$ là $\frac{1}{8}$, đạt được khi và chỉ khi $(a;b;c;d)=\left(0;-1;0;\frac{1}{8}\right)$.

Thí dụ 4. *Tìm các số thực a, b, c sao cho biểu thức* $\max\limits_{[0;1]}|x^3+ax^2+bx+c|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Phân tích. Để sử dụng hai tính chất đã nêu của đa thức $T_3(x)$ ta cần chuyển phạm vi của biến từ đoạn $[0;1]$ về đoạn $[-1;1]$. Điều này có thể giải quyết nhờ phép thế $y=2x-1$. Khi đó bài toán $\max\limits_{[0;1]}|x^3+ax^2+bx+c|\to\min$ chuyển thành bài toán sau:

$$\max_{[-1;1]}\frac{1}{8}|y^3+(2a+3)y^2+(4a+4b+3)y+(1+2a+4b+8c)|\to\min.$$

Như vậy có đáp số:

$$y^3+(2a+3)y^2+(4a+4b+3)y+(1+2a+4b+8c)\equiv T_3(y),$$

từ đó tìm ra $(a;b;c)=\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{16};-\frac{1}{32}\right)$. Cần lưu ý rằng lời giải không nhất thiết phải trình bày theo phép thế trên, thực tế phép thế trên giúp ta chỉ ra các mốc nội suy là $y_k=\cos\frac{k\pi}{3}\left(k=\overline{0,3}\right)$ nên các mốc nội suy ứng với biến x là $0;\frac{1}{4};\frac{3}{4};1$.

Trong trường hợp tổng quát, bài toán $\max\limits_{[a;b]}|F(x)|\to\min$ qua phép thế $y=\frac{2x-a-b}{b-a}$ đưa về bài toán $\max\limits_{[-1;1]}|G(y)|\to\min$. Nếu $F(x)$ là đa thức bậc n thì các mốc nội suy được chọn là

$$x_k=\frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+\frac{b+a}{2}\ \left(k=\overline{0,n}\right).$$

Trên đây là một vài điều quanh bài toán ước lượng cực trị dạng $\max\limits_{[a;b]}|F(x)|\to\min$, còn nhiều vấn đề khác do sự đa dạng của hàm $F(x)$, rất mong sự tìm tòi và trao đổi thêm của bạn đọc. Dưới đây là một số bài tập tự luyện:

BÀI TẬP

1. Tìm số thực m sao cho:

a) $\max\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{2x}{1+x^2}+m\right|\to\min$.

b) $\max\limits_{[-1;0]}\left|\frac{x^2+(m+1)x+1-m}{x-1}\right|\to\min$.

c) $\max\limits_{\mathbb{R}}\frac{|(m-1)\sin x-(m+1)\cos x+3m+1|}{\sin x-\cos x+3}\to\min$.

2. Tìm các số thực a, b sao cho:

a) $\max\limits_{[2;6]}\left|\sqrt{x^2-4x+13}-ax-b\right|\to\min$.

b) $\max\limits_{[-1;1]}\left|\frac{9}{4}.\frac{5^x+5^{-x}-2}{5^x+5^{-x}+2}+\frac{3}{2}(a-b)\frac{5^x-1}{5^x+1}+2a+b\right|\to\min$.

c) $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}|\sin x+ax+b|\to\min$.

d) $\max\limits_{[1;e]}|\ln x+ax+b|\to\min$.

3. Tìm các số thực a, b, c sao cho:

a) $\max\limits_{[-1;1]}\left|x^2+ax+b\right|\to\min$.

b) $\max\limits_{[-1;1]}\left|x^3+ax^2+bx+c\right|\to\min$.

c) $\max\limits_{[-1;1]}\left|8x^4+ax^2+b\right|\to\min$.

4. Tìm các số thực a, b biết:

a) $\left|2x^2+ax+b\right|\le 1, \forall x\in[-1;1]$

b) $\left|4x^3+ax+b\right|\le 1, \forall x\in[-1;1]$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/493 (Lớp 6). Tìm 2018 số sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng các số còn lại.

NGUYỄN ĐỨC TẤN(*TP. Hồ Chí Minh*)

Bài T2/493 (Lớp 7). Tính tổng:

$$S = (1 + 2.3 + 3.5 + ... + 101.201) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2)$$

CAO NGỌC TOẢN

(*GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế*)

Bài T3/493. Tìm các cặp số nguyên dương (m, n) thỏa mãn: $n^3 - 5n + 10 = 2^m$.

NGUYỄN DUY LIÊN

(*GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc*)

Bài T4/493. Cho tam giác ABC (với $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$) có $3\widehat{B} + 2\widehat{C} = 180^0$. Chứng minh rằng: $b + c \le \frac{5}{4}a$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN

(*3/29E, Đà Nẵng, Hải Phòng*)

Bài T5/493. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x} - y + 2 = 0 & (1) \\ x + 8y + 4\sqrt{x} - 8\sqrt{y} - 4\sqrt{xy} = 0 & (2) \end{cases}$$

LẠI QUANG THỌ

(*Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/493. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b)^2 + c^2} + \frac{1}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{1}{(c+a)^2 + b^2} \le \frac{3}{5}.$$

VÕ THÀNH VĂN

(*SV* 09DT3, *ĐH Bách Khoa Đà Nẵng*)

Bài T7/493. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 1 = \sqrt[4]{9 + 12y - 6y^2} \\ y - 1 = \sqrt[4]{9 + 12x - 6x^2} \end{cases}$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Yên Phong, Bắc Ninh*)

Bài T8/493. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi α là góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BC)$. Chứng minh rằng $\sin\alpha \le 2\sqrt{3} - 3$.

NGUYỄN QUANG NAM

(*GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An*)

Bài T9/493. Cho các số dương a, b. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}\left[1 - \frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}\right]^2 \le \frac{b-a}{a} - \ln b + \ln a \le \frac{1}{2}\left[\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)} - 1\right]^2.$$

VŨ TIẾN VIỆT

(*GV Khoa Công nghệ& An ninh Thông tin, Học viện An ninh Nhân dân*)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/493. Tìm số dương k lớn nhất sao cho:

$$a^2 + b^2 + c^2 + k(a + b + c) \ge 3 + k(ab + bc + ca)$$

đúng với mọi số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru (Romania)

Bài T11/493. Cho dãy số (x_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} x_2 = x_3 = 1 \\ (n+1)(n-2)x_{n+1} = (n^3 - n^2 - n)x_n - (n-1)^3 x_{n-1} \ \forall n \ge 3 \end{cases}.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho x_n là số nguyên.

LÊ XUÂN ĐẠI

(*GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc*)

Bài T12/493. Cho tứ giác nội $ABCD$. K là giao điểm của AC và BD. M, N, P, Q theo thứ tự là hình chiếu của K trên AB, BC, CD, DA. X, Y, Z, T theo thứ tự là hình chiếu của K trên MN, NP, PQ, QM. Chứng minh rằng diện tích của hai tứ giác $AXCZ$ và $BYDT$ là bằng nhau.

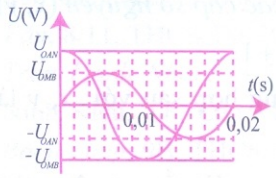
NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài L1/493. Hai điểm A, B nằm trên cùng một đường thẳng đi qua một nguồn âm và ở khác phía so với nguồn âm. Biết mức cường độ âm tại A và tại trung điểm của AB lần lượt là 60dB và 55dB. Xác định mức cường độ âm tại B.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

Bài L2/493. Đoạn mạch điện AB mắc nối tiếp theo thứ tự lần lượt gồm cuộn dây thuần cảm, điện trở thuần $R = 60\ \Omega$ và tụ điện. Gọi M và N là điểm nối giữa cuộn cảm với điện trở và điện trở với tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB điện áp xoay chiều có biểu thức $u = U\sqrt{2}\cos\omega t$ (V) thì thấy điện áp ở hai đầu đoạn mạch AN và điện áp ở hai đầu đoạn mạch MB biến thiên theo thời gian như đồ thị. Hệ số công suất của mạch AB lúc đó là $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Xác định điện dung của tụ điện.



VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/493 (For 6th grade). Find 2018 numbers so that each of them is the square of the sum of all remaining numbers.

Problem T2/493 (For 7th grade). Find the following sum

$$S = (1 + 2.3 + 3.5 + \ldots + 101.201) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2).$$

Problem T3/493. Find all pairs of positive integers (m, n) such that $n^3 - 5n + 10 = 2^m$.

Problem T4/493. Given a triangle ABC with $BC = a, AC = b, AB = c$, and $3\widehat{B} + 2\widehat{C} = 180^0$. Prove that $b + c \le \frac{5}{4}a$.

Problem T5/493. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x} - y + 2 = 0 \\ x + 8y + 4\sqrt{x} - 8\sqrt{y} - 4\sqrt{xy} = 0 \end{cases}$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/493. Given three positive numbers a, b, c satisfying $a + b + c = 3$. Show that

$$\frac{1}{(a+b)^2 + c^2} + \frac{1}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{1}{(c+a)^2 + b^2} \le \frac{3}{5}.$$

Problem T7/493. Solve the system of equations $\begin{cases} x - 1 = \sqrt[4]{9 + 12y - 6y^2} \\ y - 1 = \sqrt[4]{9 + 12x - 6x^2} \end{cases}$.

Problem T8/493. Given a right prism with equilateral bases $ABC.A'B'C'$. Let α be the angle between the line BC' and the plane $(A'BC)$. Prove that $\sin\alpha \le 2\sqrt{3} - 3$.

(Xem tiếp trang 36)

Bài T1/489. *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + x = 3^{2018y} + 1$.*

Lời giải. Ta xét ba trường hợp sau với x, y là các số nguyên.

• Nếu $y < 0$ thì $x^2 + x$ là số nguyên, còn $3^{2018y} + 1$ không là số nguyên (loại).

• Nếu $y \geq 1$ thì $3^{2018y} + 1$ chia cho 3 dư 1. Ta thấy khi $x = 3k$ hoặc $x = 3k + 2$ với số nguyên k thì $x^2 + x = x(x + 1)$ chia cho 3 dư 0, khi $x = 3k + 1$ thì $x^2 + x = x(x + 1)$ chia cho 3 dư 2. Vậy với $y \geq 1$ thì không có cặp số nguyên $(x ; y)$ nào thỏa mãn đề bài.

• Nếu $y = 0$ thì $x^2 + x = 3^0 + 1 = 2$ nên $x(x + 1) = 1.2 = (-2)(-1)$ mà $x < x + 1$ nên $x = 1$ và $x = -2$ thỏa mãn đề bài.

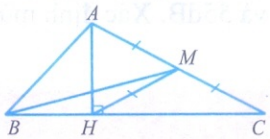
Vậy có đúng hai cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là $(-2; 0)$ và $(1; 0)$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Một số bạn viết nhầm số hoặc biến đổi dài dòng. Các bạn sau giải đúng, trình bày gọn. **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 6B, THCS Đông Cửu, Thanh Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Bảo Nhi, Võ Thị Thành, Hồ Trọng Hiếu, Đoàn Thị Hương Giang, Lê Quỳnh Anh, Võ Thành Nam, Cao Thị Ngọc Khuê, Trần Thanh Ngọc, Ngô Khánh Linh, Đậu Nhật Nam, Lê Thị Bích Thảo*, 6B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Trần Hồng Minh, Nguyễn Công An, Phạm Viết Thịnh*, 6A, *Phạm Xuân Bình Dương, Nguyễn Thị Ngân, Đặng Thanh Quý, Phan Thị Hoa, Bùi Duy Huy Hoàng, Nguyễn Công Phúc, Nguyễn Tất Tú, Thái Huyền Trang*, 6B, *Kiều Đình Nam, Phạm Trọng Toàn*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Hoàng Diệu Thảo, Phan Nguyễn Thảo Hiền, Nguyễn Thị Hương Minh, Nguyễn Bình An Đức, Trần Ngọc Anh, Nguyễn Đức Anh, Đặng Thành Trung, Đậu Bá Tiệp*, 6A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc.

VIỆT HẢI

Bài T2/489. *Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^0$, $\widehat{C} = 30^0$. BM là đường trung tuyến của tam giác ABC. Tính số đo góc $\widehat{AMB}$.*

Lời giải. Kẻ $AH \perp BC$, xét ΔHAC có $\widehat{C} = 30^0$ nên suy ra $\widehat{HAM} = 60^0$. Mà HM là đường trung tuyến nên



$AM = MH = MC$

$\Rightarrow \Delta HAM$ cân tại M.

Do đó ΔHAM đều suy ra $\widehat{AHM} = 60^0$. Vậy $\widehat{MHC} = 30^0$. ΔHAB vuông tại H có $\widehat{ABH} = 45^0 \Rightarrow \Delta HAB$ cân tại H $\Rightarrow BH = AH \Rightarrow BH = MH \Rightarrow \Delta HBM$ cân tại H. Vì $\widehat{MHC}$ là góc ngoài của ΔBHC, do đó $\widehat{MBH} = \widehat{BMH} = 30^0 : 2 = 15^0$. Ta có $\widehat{AMB}$ là góc ngoài của $\Delta MBC \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{MBH} + \widehat{C} = 45^0$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Các bạn có lời giải đúng gửi về Tòa soạn: **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Thủy, Phạm Văn Quyền, Nguyễn Văn Thành Nam, Nguyễn Phương Uyên, Nguyễn Thị Khánh Thư*, 7A, *Đào Đức Chí Hiếu*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Duy Thái Việt, Nguyễn Thanh Tùng, Ngô Thị Huyền Trang, Trần Thiên Ngân*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** *Phạm Đình Tâm*, 7A, *Nguyễn Trung Phú*, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; *Võ Thị Hồng Thu*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Thanh Hóa:** *Trịnh Đức Tuấn*, 7A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Phú Thọ:** *Võ Hồng Phúc*, 7G, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ; *Phùng Đăng Dương*, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Hà Minh Ngọc, Lại Trường*

Giang, 7A, THCS Nguyễn Quang Bích, Hương Nộn, Tam Nông; *Quách Thạch Thảo*, 7A3, THCS Lâm Thao.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/489. *Cho x, y là các số thực thỏa mãn $0<x<1$; $0<y<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $F=x^2+y^2+\dfrac{2xy-x-y+1}{4xy}$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh nhận xét sau: Với $0<x<1$; $0<y<1$ thì

$$x^2+y^2\ge\frac{xy}{2xy-x-y+1}\qquad(*)$$

Thật vậy, do

$$2xy-x-y+1=(1-x)(1-y)+xy>0$$

(vì $0<x<1$; $0<y<1$) nên từ (*) ta có:

$$(1-x)(1-y)(x^2+y^2)+xy(x^2+y^2)-xy\ge0$$

$$\Leftrightarrow(1-x)(1-y)(x-y)^2+xy[2(1-x)(1-y)+x^2+y^2-1]\ge0$$

$$\Leftrightarrow(1-x)(1-y)(x-y)^2+xy(1-x-y)^2\ge0\qquad(**)$$

Với $0<x<1$; $0<y<1$ thì bất đẳng thức (**) luôn đúng, nên bất đẳng thức (*) đã được chứng minh.

Trở lại bài toán, áp dụng bất đẳng thức (*) và bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$F=x^2+y^2+\frac{2xy-x-y+1}{4xy}$$

$$\ge\frac{xy}{2xy-x-y+1}+\frac{2xy-x-y+1}{4xy}$$

$$\ge2\sqrt{\frac{xy}{2xy-x-y+1}.\frac{2xy-x-y+1}{4xy}}=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}(x-y)^2=0\\(1-x-y)^2=0\\\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}=\dfrac{2xy-x-y+1}{4xy}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $F=1$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$. □

➢ ***Nhận xét.*** Bài toán có thể mở rộng như sau: *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0<a\le b<c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

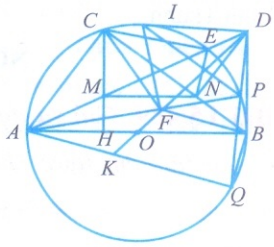
$$F=\frac{a^2+b^2}{c^2}+\frac{2ab-ab-ac+c^2}{4ab}.$$

Tuyên dương các bạn sau có lời giải đúng: **Bắc Ninh**: *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, Yên Phong; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 8/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Cần Thơ:** *Trần Danh Nhân*, 8A5, THCS Đoàn Thị Điểm, Ninh Kiều, TP. Cần Thơ; **Thanh Hóa**: *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Quảng Trị**: *Lê Văn Tuấn Kiệt*, 9C, THCS Phan Đình Phùng, TP. Đồng Hới.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/489. *Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên đường tròn (O) lấy điểm C (C khác với A và B). Kẻ CH vuông góc với đường kính AB tại H. Lấy điểm M nằm giữa C và H, lấy điểm N nằm giữa B và C sao cho MN song song với AB. Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với BC, đường thẳng này cắt tia AM tại D. Trên đường thẳng DO lấy hai điểm F và K sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng FK. Các đường thẳng AF và AK theo thứ tự cắt đường tròn (O) tại P và Q. Chứng minh rằng ba điểm D, P, Q thẳng hàng.*

Lời giải. Gọi E là giao điểm thứ hai của MA với đường tròn (O). Ta có $\widehat{MNC}=\widehat{ABC}$ (đồng vị); $\widehat{ABC}=\widehat{AEC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$).



Suy ra tứ giác $CMNE$ nội tiếp. Ta có

$$\widehat{MEN}=\widehat{MCN}=\widehat{CAB}\qquad(1)$$

Hơn nữa, $\widehat{BED}=\widehat{BND}=90^0$ nên tứ giác $BDEN$ nội tiếp, ta có $\widehat{DBN}=\widehat{NEM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CBD}=\widehat{CAB}$, nên BD tiếp xúc với (O) tại B.

Nếu F nằm trên đường tròn (O) thì hiển nhiên $F\equiv P$ và $K\equiv Q$ nên D, P, Q thẳng hàng.

Giả sử F, K nằm trong đường tròn (O) và F nằm giữa O, D. (trường hợp F, K ngoài (O) hoàn toàn tương tự).

Do $OF = OK$ và $OA = OB$ nên $AKBF$ là hình bình hành. Suy ra $\widehat{FBQ}=\widehat{AQB}=90°\Rightarrow\widehat{ABQ}=\widehat{FBD}$ (cùng phụ với $\widehat{ABF}$) (3)

Kẻ tiếp tuyến DI của đường tròn (O) ($I\in(O)$, $I\neq B$. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau,

$$\widehat{FDI}=\widehat{ODI}=\widehat{OBI}=\widehat{ABI}=\widehat{API}=\widehat{FPI}.$$

Suy ra tứ giác $IDPF$ nội tiếp, do đó

$$\widehat{FID}+\widehat{FPD}=180^0 \quad (4)$$

Lại có I và B đối xứng nhau qua OD, nên

$$\widehat{FID}=\widehat{FBD} \quad (5)$$

Do $\widehat{ABQ}=\widehat{APQ}$ và từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{FPQ}+\widehat{FPD}=180^0$, do đó P, D, Q thẳng hàng. ❐

Nhận xét. Có hai bạn cho lời giải tốt là **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **TP. Hồ Chí Minh:** *Vũ Phương Nam*, 9A7, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận Bình Thạnh.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/489. *Giả sử đa thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có ba nghiệm thực không âm. Tìm số thực α lớn nhất thỏa mãn: $f(x)\geq\alpha(x-a)^3, \forall x\geq 0$.*

Lời giải. Giả sử các nghiệm của $f(x)$ thỏa mãn $0\leq x_1\leq x_2\leq x_3$. Ta có

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \text{ và}$$

$$x_1+x_2+x_3=-a$$

$$\Rightarrow x-a=x+x_1+x_2+x_3\geq 0\ \forall x\geq 0.$$

• TH1. Nếu $0\leq x\leq x_1$: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm, ta có

$$-f(x)=(x_1-x)(x_2-x)(x_3-x)\leq\frac{1}{27}(x_1+x_2+x_3-3x)^3$$

$$\leq\frac{1}{27}(x+x_1+x_2+x_3)^3=\frac{1}{27}(x-a)^3$$

$$\Rightarrow f(x)\geq-\frac{1}{27}(x-a)^3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x=0;\ x_1=x_2=x_3.$$

• TH2. Nếu $x_1\leq x\leq x_2$: Ta có

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\geq 0\geq-\frac{1}{27}(x-a)^3.$$

• TH3. Nếu $x_2\leq x\leq x_3$: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm, ta có

$$-f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x_3-x)\leq\frac{1}{27}(x-x_1-x_2+x_3)^3$$

$$\leq\frac{1}{27}(x+x_1+x_2+x_3)^3=\frac{1}{27}(x-a)^3$$

$$\Rightarrow f(x)\geq-\frac{1}{27}(x-a)^3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x_1=x_2=0;\ x=\frac{x_3}{2}.$$

• TH4. Nếu $x\geq x_3$: Ta có

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\geq 0\geq-\frac{1}{27}(x-a)^3.$$

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có

$$f(x)\geq-\frac{1}{27}(x-a)^3\quad\forall x\geq 0.$$

Do đó số thực α thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\alpha=-\frac{1}{27}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Trong lời giải trên ta đã sử dụng các kiến thức sau :

1. Định lí Viète cho phương trình bậc ba: Nếu phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ có ba nghiệm thực thì $x_1+x_2+x_3=-a$ (ngoài ra còn có $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$; $x_1x_2x_3=-c$). Bạn đọc dễ dàng chứng minh các hệ thức trên bằng cách đồng nhất hệ số từ đẳng thức

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3+ax^2+bx+c.$$

2. Bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm:

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\le\frac{1}{27}(a+b+c)^3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bạn *Ngô Quốc Bảo*, 8/1, THCS Mỹ Hóa, TP. Bến Tre, **Bến Tre** có lời giải tốt.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/489. *Giải phương trình:*

$$(1-\sqrt{2}\sin x)(\cos 2x+\sin 2x)=\frac{1}{2}.$$

Lời giải. *Nhận xét.* Nếu

$$1+\sqrt{2}\sin x=0\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=0;\ \sin 2x=\mp 1$$

$$\Rightarrow (1-\sqrt{2}\sin x)(\cos 2x+\sin 2x)=\mp 2\ne\frac{1}{2}.$$

Do đó PT của bài toán đang xét tương đương với:

$$(1+\sqrt{2}\sin x)(1-\sqrt{2}\sin x)(\cos 2x+\sin 2x)=$$
$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}\sin x)\qquad (1)$$

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow 2(1-2\sin^2 x)(\cos 2x+\sin 2x)=1+\sqrt{2}\sin x$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 2x+\sin 2x)=1+\sqrt{2}\sin x$$
$$\Leftrightarrow (2\cos^2 2x-1)+2\cos 2x.\sin 2x=\sqrt{2}\sin x$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x+\sin 4x=\sqrt{2}\sin x\Leftrightarrow \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x+\frac{\pi}{4}=x+2k\pi\\ 4x+\frac{\pi}{4}=\pi-x+2l\pi\end{array}\right.\quad (k,l\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\\ x=\frac{3\pi}{20}+\frac{2l\pi}{5}\end{array}\right.\quad (k,l\in\mathbb{Z})$$

Chú ý.

- $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$, $\sin x\ne-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow (k-2)\not\vdots\, 3$.
- $x=-\frac{3\pi}{20}+\frac{2l\pi}{5}$, $\sin x\ne-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow (l-4)\not\vdots\, 5$.

Như vậy nghiệm của PT của bài toán là

$$\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z},\ (k-2)\not\vdots\, 3\\ x=\frac{3\pi}{20}+\frac{2l\pi}{5},\ l\in\mathbb{Z},\ (l-4)\not\vdots\, 5\end{array}\right.$$ ❐

➢***Nhận xét.*** Phương trình lượng giác trên thuộc loại cơ bản và hay. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Hưng Yên:** *Nguyễn Thanh Lâm*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Trần Thị Kim Anh*, *Phan Phước Minh*, 10T1, *Lê Thị Thu Sương*, 10T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Long:** *Lê Nữ Hoàng Kim*, *Lê Văn Nhân*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/489. *Cho hệ phương trình:*

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\dfrac{yz(y+z-x)}{x+y+z}=a\\ \dfrac{zx(z+x-y)}{x+y+z}=b\\ \dfrac{xy(x+y-z)}{x+y+z}=c\end{cases}$$

với a, b, c là các tham số dương.

a) *Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm dương.*

b) *Giải hệ khi $a=2$, $b=5$, $c=10$.*

Lời giải. Dễ thấy $\begin{cases}xyz\neq 0\\ x+y+z\neq 0\end{cases}$.

Đặt $t=\dfrac{2xyz}{x+y+z}\Rightarrow$ (I) trở thành $\begin{cases}yz=t+a\\ zx=t+b\\ xy=t+c\end{cases}$ (1)

$$\Rightarrow \frac{2}{t}=\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{t+a}+\frac{1}{t+b}+\frac{1}{t+c}$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{t}{t+a}+\frac{t}{t+b}+\frac{t}{t+c}-2=0.$$

Ta có: $f(0)=-2$, $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=1\Rightarrow\exists\alpha\in(0;+\infty)$ sao cho $f(0)f(\alpha)<0$.

Vì $f(t)$ là hàm đồng biến và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ nên phương trình $f(t)=0$ có một nghiệm dương. Từ (1) suy ra:

$$(xyz)^2=(t+a)(t+b)(t+c)>0\ (2)\Rightarrow$$

$$(x;y;z)=\left(\pm\sqrt{\frac{(t+b)(t+c)}{t+a}};\pm\sqrt{\frac{(t+c)(t+a)}{t+b}};\pm\sqrt{\frac{(t+a)(t+b)}{t+c}}\right)\ (3)$$

Từ (1) và (3) chứng tỏ hệ (I) luôn có một nghiệm dương.

b) Khi $a=2$, $b=5$, $c=10$ thì PT $f(t)=0$ trở thành: $\dfrac{t}{t+2}+\dfrac{t}{t+5}+\dfrac{t}{t+10}-2=0$

$$\Leftrightarrow t^3-80t-200=0$$

$$\Leftrightarrow (t-10)(t^2+10t+20)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=10 & (\text{thỏa mãn (2)})\\ t=-5-\sqrt{5} & (\text{thỏa mãn (2)})\\ t=-5+\sqrt{5} & (\text{không thỏa mãn (2)})\end{array}\right.$$

Kết hợp với (1) và (3) suy ra hệ đã cho có 4 nghiệm $(x;y;z)$ là: $(5;4;3)$, $(-5;-4;-3)$,

$$(\sqrt{-10+5\sqrt{5}};\sqrt{2+2\sqrt{5}};-\sqrt{2+\sqrt{5}}),$$

$$(-\sqrt{-10+5\sqrt{5}};-\sqrt{2+2\sqrt{5}};\sqrt{2+\sqrt{5}}).\quad\square$$

➢***Nhận xét.*** Bài toán sẽ dài nếu không khéo trong việc chọn hướng giải và biến đổi. Có ít bạn tham đã gia giải bài này. Một số bạn giải sai và một số bạn giải còn dài. Các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Chu Thị Thanh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/489. *Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}\geq\frac{1}{2}+\frac{2r}{R},$$

trong đó R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

Lời giải. Gọi S là diện tích của tam giác đã cho.

Sử dụng các công thức $R=\dfrac{abc}{4S}$; $r=\dfrac{2S}{a+b+c}$;

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)},$$

ta thấy bất đẳng thức (BĐT) cần chứng minh tương đương với

$$\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}$$
$$\geq\frac{1}{2}+\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc}$$

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2}$$
$$\geq 4+\frac{2(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz, ta thấy:

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2}$$
$$\geq \frac{[(a+b)+(b+c)+(c+a)]^2}{(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)}=\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ta đi chứng minh BĐT

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\geq 2+\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc},$$

hay

$$(a+b+c)^2\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)}{abc}[2abc+(a+b-c)\times$$
$$\times(b+c-a)(c+a-b)] \ (*)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $c\leq b\leq a$. Sử dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\text{VP}(*)\leq\frac{1}{4}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{b}+\right.$$
$$\left.+\frac{2abc+(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{ca}\right]^2$$

Ta còn phải chứng minh

$$2(a+b+c)\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{b}+$$
$$+\frac{2abc+(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{ca}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)abc-(a^2+b^2+c^2)ac-$$
$$-b[2abc+(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3b-a^3c-b^3a-b^3c+c^3b-c^3a+a^2bc+$$
$$+ab^2c+abc^2-a^2b^2-b^2c^2+b^4\geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (a-b)c^2b-(a-b)c^3+(a-b)b^2c-(a-b)ca^2$$
$$-(a-b)b^3+(a-b)a^2b\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)[c^2(b-c)-b^2(b-c)+a^2(b-c)]\geq 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a^2-b^2+c^2)\geq 0.$ BĐT này luôn đúng (vì $c\leq b\leq a$), do đó BĐT (*) đúng, ta có điều cần chứng minh. Dễ kiểm tra đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều. ❐

➢***Nhận xét.*** Số bài gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả*, *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 10 Toán, *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Phú Yên:** *Đặng Hải Đăng*, 10A6, THPT Ngô Gia Tự, Tuy Hòa; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam, *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/489. *Cho biểu thức*

$$P=\sqrt[60]{3}.\sqrt[120]{4}\ldots\sqrt[(n^3-n)]{n-1}$$

với n là số tự nhiên, $n\geq 4$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[(24n^2+24n)]{3^{n^2+n-12}}\leq P<\sqrt[8]{3}.$$

Lời giải.

• Do $n\geq 4$ nên

$$\sqrt[(n^3-n)]{n-1}\geq\sqrt[(n^3-n)]{3}=3^{\frac{1}{(n-1)n(n+1)}}.$$

Suy ra $P\geq 3^{\frac{1}{3.4.5}}.3^{\frac{1}{4.5.6}}\ldots 3^{\frac{1}{(n-1)n(n+1)}}=3^Q$, với

$$Q=\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{5-3}{3.4.5}+\frac{6-4}{4.5.6}+\ldots+\frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{n^2+n-12}{24n^2+24n}.$$

Suy ra $P\geq 3^Q=3^{\frac{n^2+n-12}{24n^2+24n}}=\sqrt[(24n^2+24n)]{3^{n^2+n-12}}$.

• Ta có: $\ln P=\ln(\sqrt[60]{3}.\sqrt[120]{4}...\sqrt[(n^3-n)]{n-1})$

$$=\ln\sqrt[60]{3}+\ln\sqrt[120]{4}+...+\ln\sqrt[(n^3-n)]{n-1}$$

$$=\frac{1}{3.4.5}\ln 3+\frac{1}{4.5.6}\ln 4+...+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}\ln(n-1).$$

Xét hàm số $y=\ln(x-1)-\frac{x-1}{2}$ với $x\geq 4$. Ta có

$$y'=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}=\frac{3-x}{2(x-1)}<0.$$

Suy ra hàm số $y=\ln(x-1)-\frac{x-1}{2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[4;+\infty)$. Do đó

$$\ln(x-1)-\frac{x-1}{2}\leq\ln 3-\frac{3}{2}<0$$

$$\Rightarrow \ln(x-1)<\frac{x-1}{2}\ (1)\ \text{với}\ x\geq 4.$$

Áp dụng BĐT (1) ta có

$$\frac{1}{(n-1)n(n+1)}\ln(n-1)<\frac{1}{(n-1)n(n+1)}.\frac{n-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n-1)n(n+1)}\ln(n-1)<\frac{1}{2n(n+1)}\qquad (2).$$

Áp dụng BĐT (2) ta có

$$\ln P=\frac{1}{3.4.5}\ln 3+\frac{1}{4.5.6}\ln 4+...+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}\ln(n-1)$$

$$<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{.4.5}+\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

Mặt khác ta có

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{5-4}{4.5}+\frac{6-5}{5.6}+...+\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

Suy ra: $\ln P<\frac{1}{8}\Rightarrow P<e^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{e}<\sqrt[8]{3}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Có thể chứng minh $P<\sqrt[8]{3}$ bằng cách quy nạp theo *n*. Các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Phan Thành Dũng, Trần Hồng Quý, Tạ Nam Khánh, Lê Anh Dũng*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam; *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre. **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

NHƯ HOÀNG

Bài T10/489. *Tìm số tự nhiên n sao cho 4^m+2^n+29 không thể là số chính phương với mọi số tự nhiên m.*

Lời giải. (Theo lời giải của đa số các bạn, sử dụng phương pháp liệt kê).

Nhận xét rằng số chính phương a^2 khi chia cho 8 chỉ nhận số dư là 0, 1 hoặc 4 và khi chia cho 3 chỉ có thể nhận số dư là 0 hoặc 1.

Xét $A(m,n)=4^m+2^n+29$.

• Với $n=0$ thì $A(m,0)=30+4^m$.

Khi $m=0$ thì $A(0,0)=31$ không là số chính phương.

Khi $m=1$ thì $A(1,0)=34$ không là số chính phương.

Khi $m \geq 2$ thì $A(m,0) \equiv 6 \pmod 8$ nên $A(m,0)$ không là số chính phương.

• Với $n = 2$ thì $A(2,2) = 49$ là số chính phương.

• Với $n = 1$ thì $A(m,1) = 31 + 4^m$. Khi $m = 0$ thì $A(0,1) = 32$ không là số chính phương.

Khi $m = 1$ thì $A(1,1) = 35$ không là số chính phương.

Khi $m \geq 2$ thì $A(m,1) \equiv 7 \pmod 8$ nên $A(m,1)$ không là số chính phương.

• Với $n \geq 3$ thì 2^n chia hết cho 8.

Khi $m = 0$ thì $A(0,n) \equiv 6 \pmod 8$ nên $A(0,m)$ không là số chính phương.

Khi $m \geq 2$ thì 4^m chia hết cho 8 nên $A(m,n) \equiv 5 \pmod 8$ nên $A(m,n)$ không là số chính phương.

Khi $m = 1$ thì $A(1,n) = 33 + 2^n$. Khi đó $A(1,n)$ là số chính phương khi và chỉ khi $n = 4$ hoặc $n = 8$. Thật vậy, nếu $A(1,n) = 33 + 2^n = a^2$ là số chính phương thì $a^2 \equiv 0 \pmod 3$ hoặc $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ nên n chẵn. Đặt $n = 2k$ thì $33 = (a - 2^k)(a + 2^k)$ nên

$$\begin{cases} a - 2^k = 1 \\ a + 2^k = 33 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a - 2^k = 3 \\ a + 2^k = 11 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta thu được $k = 4$ và $k = 2$, tức $n = 8$ và $n = 4$.

Kết luận. Với mọi $n \notin \{2,4,8\}$ thì các số $A(m,n)$ không thể là số chính phương với mọi $m \in \mathbb{N}$.

➢***Nhận xét.*** Nhiều bạn gửi lời giải đến Tòa soạn, đa số giải theo cách liệt kê các trường hợp ứng với mỗi n. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đức Toàn, Phạm Hiệu*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thành Lâm, Chu Ngọc Chiến*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Phạm Đại Phúc*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Phú Yên:** *Đặng Hải Đăng*, 10A6, THPT Ngô Gia Tự, Tuy Hòa; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Vĩnh Phúc:** *Chu Thị Thanh, Tạ Nam Khánh, Lê Anh Dũng, Phạm Thành Dũng, Trần Hồng Quý, Vương Tùng Dương, Đỗ Minh Hiệp*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/489. *Cho dãy số (a_n) xác định như sau:*

$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_{n+1} = \frac{(a_n - 1)^2}{2 - a_n} \text{ với mọi } n = 1,2,...$$

a) *Hãy tìm giới hạn của dãy (a_n) khi n dần tới dương vô cực.*

b) *Chứng minh rằng* $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *với mọi* $n = 1,2,...$

Lời giải. a) Trước tiên ta dễ dàng nhận xét thấy $a_n \in [0,1]$ bằng quy nạp, vì nếu $a_n \in [0,1]$ thì $a_{n+1} = \dfrac{(a_n - 1)^2}{2 - a_n} \geq 0$ và $a_{n+1} = \dfrac{(a_n - 1)^2}{2 - a_n} \leq \dfrac{1}{2 - 1} = 1$.

Với $a_n \in [0,1]$ ta có:

$$\left| a_{n+1} - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right| = \left| \frac{(a_n - 1)^2}{2 - a_n} - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{2a_n^2 - (2 + \sqrt{2})a_n + (2\sqrt{2} - 2)}{2(2 - a_n)} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2(2 - a_n)} [2a_n^2 - (2 + \sqrt{2})a_n + 2\sqrt{2} - 2] \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2 - a_n} (a_n - \frac{2 - \sqrt{2}}{2})(a_n - \sqrt{2}) \right|$$

$$= \left| \frac{\sqrt{2} - a_n}{2 - a_n} \right| . \left| a_n - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \left| a_n - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right|.$$

Từ đó suy ra

$$\left|a_{n+1}-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}}\left|a_n-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right|$$

$$<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left|a_1-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right|=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Do đó $\lim a_n=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Đặt $f(x)=\frac{(x-1)^2}{2-x}$ với $x\in[0;1]$. Ta có $f(x)$ là hàm liên tục và $f'(x)=\frac{(x-1)(3-x)}{2-x}\le 0$, $\forall x\in[0,1]$. Từ đó suy dễ dàng

$0\le a_n\le a_1=f(0)=\frac{1}{2}$. Từ $a_{n+1}=\frac{(a_n-1)^2}{2-a_n}$ ta có

$\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-1=1-a_n$ và do đó

$$n-\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k+a_{k+1}}-n$$

$$\ge\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})}-n=\frac{n^2}{a_{n+1}-a_1+2\sum_{k=1}^{n}a_k}-n\ge$$

$$\ge\frac{n^2}{2\sum_{k=1}^{n}a_k}-n\ (\text{vì } a_1\ge a_{n+1}).$$

Đặt $x=\sum_{k=1}^{n}a_k$ ta có $n-x\ge\frac{n^2}{2x}-n$. Biến đổi tương đương ta có

$$2x^2-4nx+n^2\le 0\Rightarrow n\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ge x\ge n\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

và do đó $\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}\ge 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lưu ý: Một số bạn sử dụng phương pháp khác giải bài toán này. Để giải a) các bạn đã chứng minh dãy

$$a_1\ge a_3\ge\cdots\ge a_{2n+1}\ge 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{và}$$

$$a_2\le a_4\le\cdots\le a_{2n}\le 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

bằng cách quy nạp. Giới hạn của hai dãy con này có thể tính được bằng cách giải phương trình $x=\frac{(x-1)^2}{2-x}$ là $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Để chứng minh b), dễ kiểm tra là

$$a_{2k-1}+a_{2k}=\frac{1}{2-a_{2k-1}}\ge\frac{1}{2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ, ta có bất đẳng thức $\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}\ge 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

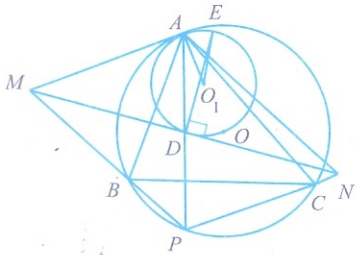
➢***Nhận xét.*** Có ít bạn giải được bài toán này. Các bạn sau đây có lời giải đúng gửi về Tạp chí: **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Minh Hiệp, Vương Tùng Dương, Lê Anh Dũng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả, Đinh Đoàn Xuân Phương*, 10 Toán, *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Nam Định:** *Lê Phương Thanh*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Quang Đạt*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam; **Hà Nội:** *Mai Đức Thái*, 10A2, THPT chuyên KHTN ĐHQG Hà Nội.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T12/489. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm P chạy trên (O) và khác A, B,C. M, N theo thứ tự nằm trên PB, PC sao cho tứ giác AMPN là hình bình hành.*

a) *Chứng minh rằng tồn tại một điểm cố định cách đều hai điểm M và N.*

b) *Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác AMN luôn đi qua một điểm cố định.*



Lời giải. a) Gọi D là giao điểm của AP và MN; (O_1) là ảnh của (O) qua phép vị tự $V_A^{\frac{1}{2}}$; E là giao điểm thứ hai của (O_1) và trung trực của MN. Vì P thuộc (O) và $AM \parallel PC$ nên

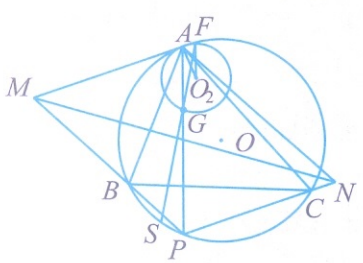
$$(AM, AP) \equiv (PC, PA) \equiv (BC, BA) \equiv -(BA, BC) (\text{mod}\,\pi);$$
$$(PA, PM) \equiv (PA, PB) \equiv (CA, CB) \equiv -(CB, CA) (\text{mod}\,\pi).$$

Do đó tam giác MAP đồng dạng ngược hướng với tam giác ABC. Từ đó, chú ý rằng D là trung điểm chung của AP và MN, suy ra tam giác AMN có hình dạng và hướng không đổi. Kết hợp với $DE \perp MN$, suy ra tồn tại số α sao cho $(DE, DA) \equiv \alpha (\text{mod}\,\pi)$. Từ đó, chú ý rằng D thuộc (O_1), suy ra

$$(\overrightarrow{O_1E}, \overrightarrow{O_1A}) \equiv 2(DE, DA) \equiv 2\alpha (\text{mod}\,\pi).$$

Điều đó có nghĩa là E cố định. Nói cách khác M và N luôn cách đều một điểm cố định, điểm E.

b)



Gọi G là trọng tâm của tam giác AMN; (O_2) là ảnh của (O) qua phép vị tự $V_A^{\frac{1}{3}}$; S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN; F là giao điểm thứ hai của (O_2) và GS của tam giác AMN.

Tương tự như phần a, tồn tại số β sao cho

$$(GS, GA) \equiv \beta (\text{mod}\,\pi).$$

Từ đó, chú ý rằng G thuộc (O_2), suy ra

$$(\overrightarrow{O_2F}, \overrightarrow{O_2A}) \equiv 2(GF, GA) \equiv 2(GS, GA) \equiv 2\beta (\text{mod}\,\pi).$$

Điều đó có nghĩa là F cố định. Nói cách khác đường thẳng Euler của tam giác AMN luôn đi qua một điểm cố định, điểm F. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Bài toán này không khó nhưng chỉ có 4 bạn tham gia giải và lời giải chưa đẹp. Nguyên nhân của sự việc này là: không có kiến thức về các phép biến hình và không có kiến thức về góc định hướng.

2) Xin nêu tên cả 4 bạn: **Lào Cai:** *Nguyễn Minh Hiệu*, 12T, THPT chuyên Lào Cai, TP. Lào Cai; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đức Toàn*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh.

NGUYỄN MINH HÀ

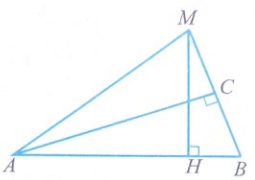
Bài L1/489. *Trên mặt nước có hai nguồn sóng A, B cách nhau 28cm dao động đồng pha với tần số 50Hz. Tốc độ truyền sóng trên mặt nước là 3m/s. Trên mặt nước xét đường tròn tâm A, bán kính AB. Điểm M trên đường tròn dao động với biên độ cực đại cách đường thẳng qua A, B một đoạn bằng bao nhiêu?*

Lời giải. $\lambda = \dfrac{v}{f} = 6$ cm; $AB = 4\lambda + 4$ chứng tỏ: M thuộc cực đại thứ tư, suy ra

$$MA - MB = AB - MB = 4\lambda \Rightarrow MB = 4 \text{ cm}.$$

Do đó ΔAMB cân tại A.

$$\Rightarrow MC = \frac{MB}{2}.$$



$\Delta HMB \backsim \Delta CAB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{MH}{AC}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{MB}{AB}\sqrt{AB^2 - \frac{MB^2}{4}} \approx 3{,}99 \text{ cm}.$$ ❐

➢*Nhận xét.* Rất tiếc, một số bạn ở: **Thừa Thiên Huế:** *Huỳnh Hồng Thảo, Châu Thị Tuyết Chi, Nguyễn Dạ Như Nhung, Phạm Nhật Tiến*, 11 Lí 2, THPT chuyên Quốc học Huế đã có hướng giải đúng nhưng chưa đưa ra được kết luận cuối cùng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/489. *Mạch điện gồm tải Z_2 nối với điện trở R rồi nối vào nguồn điện xoay chiều có điện áp hiệu dụng U_1. Khi đó, điện áp hiệu dụng và hệ số công suất trên tải là U_2 và $\cos\varphi_2 = 0,6$; điện áp hai đầu R là $\Delta U = \frac{U_2}{4}$; hệ số công suất toàn mạch là $\cos\varphi_1 = 0,8$. Bằng cách điều chỉnh tải Z_2 và điện áp nguồn, người ta làm cho công suất tiêu thụ trên hệ số R giảm 100 lần còn công suất tiêu thụ $\mathcal{P}_2$ và $\cos\varphi_2$ trên tải không đổi. Khi đó, điện áp đầu nguồn phải tăng bao nhiêu lần?*

Lời giải. Ban đầu: $\vec{U}_1 = \Delta\vec{U} + \vec{U}_2$

$$\Rightarrow U_1\cos\varphi_1 = \Delta U + U_2\cos\varphi_2 = \frac{1}{4}U_2 + U_2\cos\varphi_2$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{U_2}{\cos\varphi_1}(0,25 + \cos\varphi_2) = \frac{17}{16}U_2$$

Công suất trên R giảm 100 lần, $\Delta\mathcal{P}' = \frac{\Delta\mathcal{P}}{100}$

$$\Rightarrow I' = \frac{I}{10} \Rightarrow \Delta U' = \frac{\Delta U}{10} = \frac{U_2}{40}.$$

Lại có :

$$P_2 = U_2 I\cos\varphi_2 = U_2' I'\cos\varphi_2 \Rightarrow U_2' = 10U_2$$

Mặt khác : $\vec{U}_1' = \Delta\vec{U}' + \vec{U}_2'$

$$\Rightarrow -\cos\varphi_2 = \frac{U_2'^2 + \Delta U'^2 - U_1'^2}{2U_2'\Delta U'}$$

$$\Rightarrow U_1' = U_2\sqrt{10^2 + \frac{1}{40^2} + 2.0,6.10.\frac{1}{40}} \approx 10,015U_2$$

$$\Rightarrow \frac{U_1'}{U_1} = \frac{10,015U_2}{1,0625U_2} \approx 9,426 \text{ (lần).}$$ ❐

➢*Nhận xét.* Rất tiếc không có bạn nào gửi lời giải cho bài Vật lý này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS...

(*Tiếp theo trang 25*)

Problem T9/493. Given positive numbers a, b. Show that

$$\frac{1}{2}\left[1 - \frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}\right]^2 \le \frac{b-a}{a} - \ln b + \ln a \le \frac{1}{2}\left[\frac{\max(a,b)}{\min(a,b)} - 1\right]^2.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/493. Find the maximal positive number k so that the following inequality

$$a^2 + b^2 + c^2 + k(a+b+c) \ge 3 + k(ab+bc+ca)$$

holds true for all positive numbers a, b, c satisfying $abc = 1$.

Problem T11/493. Given the sequence (x_n)

$$\begin{cases} x_2 = x_3 = 1 \\ (n+1)(n-2)x_{n+1} = (n^3 - n^2 - n)x_n - (n-1)^3 x_{n-1} \ \forall n \ge 3 \end{cases}$$

Find all indices n so that x_n is an integer.

Problem T12/493. Given a cyclic quadrilateral $ABCD$. Let K be the intersection between AC and BD. Let M, N, P, and Q respectively be the perpendicular projection of K on AB, BC, CD, and DA. And then, let X, Y, Z, and T respectively be the perpendicular projection of K on MN, NP, PQ, QM. Prove that $AXCZ$ and $BYDT$ have equal areas.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 34

Problem. *Find the coefficient of x^5 in the expansion of $(1+x+3x^2+4x^3)^{10}$.*

Solution. We have

$x^5 = x.x.x.x.x = x.x.x.x^2 = x.x.x^3 = x.x^2.x^2 = x^2.x^3$.

That means to form x^5, we can choose 5 among 10 factors $(1+x+3x^2+4x^3)$'s to use x; or we can choose 3 among 10 factors $(1+x+3x^2+4x^3)$'s to use x and then we choose 1 among 7 remaining factors $(1+x+3x^2+4x^3)$'s to use x^2; and so on...

The number of the terms of the form $x.x.x.x.x$ is C_{10}^5. The number of the terms of the form $x.x.x.x^2$ is $C_{10}^3 \times 3C_7^1$ (notice that number 3 is for $3x^2$).

The number of the terms of the form $x.x.x^3$ is $C_{10}^2 \times 4C_8^1$ (notice that number 4 is for $4x^3$).

The number of the terms of the form $x.x^2.x^2$ is $C_{10}^1 \times 3^2 C_9^2$ (notice that number 3^2 is for $3x^2 \times 3x^2$).

The number of the terms of the form $x^2.x^3$ is $3 \times C_{10}^1 \times 4C_9^1$ (notice that number 3 is for $3x^2$ and number 4 is for $4x^3$). Add all of these numbers we get the answer is 8532.

TỪ VỰNG

Coefficient	: hệ số
Expansion	: khai triển
Factor	: thừa số

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 31

Bài toán. *Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số liên tục thỏa mãn điều kiện $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x)=ax$, với a là hằng số nào đó.*

Lời giải. Ta có $f(2)=f(1)+f(1)=f(1)\times 2$ và tiếp theo $f(3)=f(2)+f(1)=f(1)\times 3,...$ Từ đó, có $f(n)=a.n$, với mọi số nguyên dương n $(a=f(1))$. Mặt khác $f(0)=f(0+0)=2f(0)$, vì vậy $f(0)=0$. Từ đây kết hợp với đẳng thức $f[n+(-n)]=f(n)+f(-n)$ suy ra $f(n)=a.n$, với mọi số nguyên n.

Ta có $f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$ và $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1).f\left(\frac{1}{2}\right)=a\left(\frac{1}{2}\right)$. Tương tự trên, ta có $f\left(\frac{1}{2}\right)=a\left(\frac{1}{n}\right)$, với mọi số nguyên n khác 0. Ta có thể chỉ ra $f\left(\frac{m}{n}\right)=a\left(\frac{m}{n}\right)$ với mọi số nguyên m, n (n khác 0) (ví dụ $f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)=2af\left(\frac{1}{3}\right)=a\left(\frac{2}{3}\right),...$). Như vậy dễ dàng chứng minh được rằng $f(r)=a.r$, với mọi số hữu tỷ r.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-ax$. Khi đó $g(x)$ là hàm số liên tục và bằng 0 tại mọi điểm hữu tỷ. Sử dụng định nghĩa về tính liên tục của hàm số và kết quả: bất kỳ số vô tỷ nào đều là giới hạn của một dãy số hữu tỷ, ta được $g(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Nói cách khác $f(x)=a.x$, với mọi số thực x $(a=f(1))$. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tương đối tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm hơn cả: **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành, Trần Thị Phương Linh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

VUI HỌC TOÁN

NGUYỄN XUÂN PHAN
(GV THCS Lê Quý Đôn, Hải Dương)

Chúng ta cùng nhìn lại bài toán cổ sau:

Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn.

Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con chó?

Với vốn kiến thức đại số của lớp 8 và lớp 9, ai cũng biết giải bài toán trên bằng hai cách: **Cách 1** là: lập phương trình bậc nhất một ẩn và **Cách 2** là: lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, tìm được số con *gà* là 22, số con *chó* là 14.

Với ý thức tìm tòi, sáng tạo, ta hãy tìm thêm các cách giải mới cho bài toán. Thực tế, có những lúc con *chó* chỉ đi đứng bằng hai chân sau, còn hai chân trước không tiếp đất nên có bạn đề xuất:

Cách 3. Giả sử tất cả các con *gà* và *chó* đều đi đứng đúng bằng hai chân.

Khi đó số chân *gà* và chân *chó* tiếp đất là $36 \times 2 = 72$ nên số chân *chó* không tiếp đất là $100 - 72 = 28$. Vậy số con *chó* là: $28 : 2 = 14$, số con *gà* là: $36 - 14 = 22$.

Áp dụng mẹo trên, nhưng mạnh dạn hơn, ta có:

Cách 4. Ta tưởng tượng mỗi con *gà* cũng có 4 chân và tất cả các con *gà* và *chó* đều đi đứng đúng bằng 4 chân, thì số chân *gà* và *chó* là: $36 \times 4 = 144$.

Vậy số chân dư ra là $144 - 100 = 44$. Do đó số con *gà* là $44 : 2 = 22$, số con *chó* là $36 - 22 = 14$.

Từ cách 3 và cách 4 ta có thể tưởng tượng *gà* và *chó* là động vật đi đứng bằng **3 chân**? Khi thực tế *gà* có đúng 2 chân, *chó* có đúng 4 chân! Tưởng tượng, giả thiết tạm là một sáng tạo, mục tiêu là giải được bài toán! Ta có:

Cách 5. Giả sử mỗi con *gà* "**mượn thêm**" một chân, mỗi con *chó* "**cho đi**" một chân, khi đó mỗi con *gà* và con *chó* có đúng 3 chân. Vậy 36 con có số chân là $36 \times 3 = 108$, nhiều hơn so với thực tế là $108 - 100 = 8$ chân. Nên số chân "**mượn thêm**" nhiều hơn số chân "**cho đi**" là 8 chân, hay số gà nhiều hơn số *chó* là 8 con. Số con *chó* là $(36 - 8) : 2 = 14$. Số con *gà* là $36 - 14 = 22$.

Tư duy tương tự như thế, nhưng phù hợp với thực tế hơn ta có:

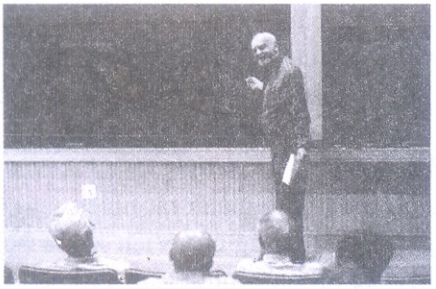
Cách 6. Vì tổng số con *gà* và con *chó* là một số chẵn: 36 con. Ta hãy xếp đôi: 1 con *gà* và 1 con *chó* cho đến hết, nếu số con *chó* và số con *gà* không bằng nhau thì sẽ có một số đôi: *gà* với *gà* hoặc: *chó* với *chó*.

(*Xem tiếp trang* 42)

TIN TỨC

GIẢI ABEL 2018

ALEX BELLOS



Robert Phelan Langlands
(*sinh ngày* 6.10.1936)

Vài nhà Toán học được nhớ mãi bởi một định lý, một số khác bởi một giả thuyết. Nhưng *Robert Langlands* là một nhà Toán học vĩ đại được nhớ đến vì chương trình mang tên ông, *chương trình Langlands*. *Robert Langlands*, 81 tuổi, đã nhận giải Abel 2018, một trong các giải thưởng uy tín nhất trong Toán học, vì những cống hiến của ông mà ngày nay được gọi là *chương trình Langlands*, đó là một dự án tham vọng thường được gọi là một "*lý thuyết lớn về sự thống nhất của Toán học*".

Giải thưởng được trao bởi Viện Hàn lâm và Khoa học Na Uy, nó trị giá 6 triệu krone (tiền Na Uy, tương đương 550.000 bảng Anh). Nó được đánh giá tương đương với giải Nobel của Toán học (trong Toán học không có giải Nobel).

Tiểu sử của Robert Langlands

Vào tháng 1 năm 1967, *Robert Langlands*, một giáo sư liên kết 30 tuổi tại Princeton, đã viết một bức thư cho nhà Toán học nổi tiếng người Pháp *André Weil*, 60 tuổi, để phác thảo một số hiểu biết mới sâu sắc của ông về Toán học. Nguyên văn không dịch như sau: "*If you are willing to read it as pure speculation I would appreciate that*", he wrote: "*If not - I am sure you have a waste basket handy*". Trong 17 trang thư của ông đã giới thiệu về một lý thuyết mà sau đó tạo ra một phương hướng hoàn toàn mới của việc suy nghĩ về Toán học: nó đề ra một liên kết sâu sắc giữa hai lĩnh vực: *lý thuyết số* và *giải tích điều hòa*, mà trước đó người ta nghĩ rằng đó là hai lĩnh vực hoàn toàn tách biệt. Ông đề nghị kết nối những ngành Toán học với nhau và trong lá thư đó ông bắt đầu một chương trình, *chương trình Langlands*, một chương trình đã lôi kéo hàng trăm nhà Toán học hàng đầu trong nửa thế kỉ trở lại đây. Không có một dự án nào khác trong Toán học hiện đại có ảnh hưởng rộng lớn, đưa ra rất nhiều kết quả sâu sắc và có rất nhiều người làm việc với nó như *chương trình Langlands*. Vì tính sâu sắc và ảnh hưởng rộng lớn của nó mà nó được coi là lý thuyết thống nhất của Toán học. *Robert Langlands* sinh ra tại New Westminster, Greater Vancouver, Canada vào năm 1936. Khi 9 tuổi, ông chuyển đến một thị trấn nhỏ gần biên giới Mỹ nơi mà cha mẹ ông đã mở một cửa hàng cung cấp vật liệu xây dựng. Ông không hề có ý định vào đại học cho đến khi một giáo viên của ông nói với ông ngay trước mặt các bạn cùng lớp rằng đó là một sự phản bội của ông trước tài năng được Chúa ban cho. *Langlands* ghi danh vào trường Đại học British Columbia ở tuổi 16. Ông hoàn thành chương trình Cử nhân Toán học vào năm 1957, và chương trình Thạc sĩ sau đó. Sau đó ông chuyển đến Đại học Yale, hoàn thành luận án Tiến sĩ tại đây với đề tài *Semi-group and representation of Lie groups* (*nửa nhóm và biểu diễn của các nhóm Lie*) trong năm đầu tại đây. Trong năm thứ hai ông bắt đầu nghiên cứu các công trình của nhà Toán học người Na Uy, *Atle Selberg*, mà sau đó trở thành lĩnh vực nghiên cứu chính của ông.

Vào năm 1960, Langlands đến Đại học Princeton với vai trò giảng viên, nơi mà ông vai kề vai cùng *Selberg*, cũng như *André Weil* và *Harish-Chandra*, những người ở gần Viện Nghiên cứu Cao cấp. Ông đặc biệt bị ảnh hưởng bởi công trình của *Harish-Chandra* về các dạng tự đẳng cấu. *Langlands* cũng đã học các lý thuyết khác của Toán học, như lý thuyết trường các lớp, một lĩnh vực ông đã bị cuốn vào bởi người đồng nghiệp *Salomon Bochner*. Năm 1962 *Langlands* đã được bổ nhiệm là thành viên của trường Toán của Viện Nghiên cứu Cao cấp. Trong kì nghỉ giáng sinh năm 1966, *Langlands* bắt đầu với ý tưởng cơ bản của "*functoriality*", một cơ chế để liên kết các ý tưởng trong lý thuyết số với các dạng tự đẳng cấu. Ông đã gặp *Weil* ở hành lang Viện Nghiên cứu Cao cấp trong những ngày đầu tháng giêng năm 1967 và bắt đầu giải thích cho *Weil* các khám phá của ông. *Weil* gợi ý rằng ông nên viết các ý tưởng đó ra giấy rồi gửi cho *Weil*. *Langlands* nhanh chóng viết một bức thư dài bằng tay. *Weil* đã cho đánh máy và bức thư đã được phổ biến rộng rãi cho các nhà Toán học. Nội dung bức thư đã đưa ra rất nhiều điều mới, sâu sắc và các vấn đề thú vị. Và ngày càng có nhiều người tham gia dự án để chứng minh các giả thuyết của ông, được biết đến như là chương trình Langlands. "*Có một vài điểm mới đã đúng mà làm tôi ngạc nhiên đến tận bây giờ*", *Langlands* nói về bức thư của ông, "*Có một điều hiển nhiên rằng các L− hàm là tốt nhưng chúng sẽ có những hệ quả cho lý thuyết số đại số bởi những ý nghĩa không chắc chắn*".

Trong hai năm 1967−1968 *Langlands* làm việc tại Đại học Kĩ thuật Trung Đông tại Ankara. Ông nói thành thạo tiếng Thổ Nhĩ Kỳ, một ngôn ngữ cần sự kiên nhẫn, ông cũng nói được tiếng Đức và Nga. *Langlands* quay lại Yale nơi ông xây dựng các ý tưởng của ông về "*functoriality*" và sự tương giao, sau đó công bố chúng trong *Problems in Theory of Automorphic Forms* (*các vấn đề về lý thuyết các dạng tự đẳng cấu*) vào năm 1970.

Năm 1972 ông quay lại Princeton với tư cách giáo sư tại Viện Nghiên cứu Cao cấp, và ở đó cho đến nay.

Trong những năm 1970, *Langlands* tiếp tục làm việc với các ý tưởng về chương trình của ông. Giữa những năm 1980, ông chuyển sự chú ý đến vật lý lý thuyết. Trong những năm gần đây ông đã tìm cách quay trở lại các ý tưởng mà ông đã tiên phong, một trong số đó là "*endoscopy*".

Langlands đã từng giành rất nhiều giải thưởng, bao gồm giải thưởng của Viện Khoa học Quốc gia Mỹ về Toán trong năm 1988 cho những "*tầm nhìn rộng lớn của ông*". Ông đồng nhận giải Wolf 1996 với *Andrew Wiles*. Các giải thưởng khác gồm giải 2005 - American Mathematical Society Steele prize, 2006 Nemmbers prize in Mathematics và giải Shaw 2007 cùng *Richard Taylor*.

Trong thời gian ở Đại học British Columbia, lúc 19 tuổi ông kết hôn với *Charlotte Lorraine Cheverie*. Họ có bốn người con và một vài người cháu. Ở tuổi 81, ông tiếp tục làm việc tại Viện Nghiên cứu Cao cấp, nơi mà hiện tại ông là giáo sư danh dự, và tại đây ông sử dụng văn phòng mà *Albert Einstein* đã từng dùng.

Một cái nhìn thoáng qua về các công trình của Robert Langland

Trích dẫn cho *Robert Langlands* khi nhận giải Abel bắt đầu bởi: *Chương trình langlands dự đoán sự tồn tại của những mối liên hệ chặt chẽ giữa các dạng tự đẳng cấu và các nhóm Galois.*

Để hiểu về tầm quan trọng của chương trình langlands chúng ta cần xem xét lịch sử Toán học về cả hai khái niệm: các dạng tự đẳng cấu và các nhóm Galois.

Giải tích điều hòa

Các dạng tự đẳng cấu xuất phát từ lĩnh vực trong Toán học mang tên *giải tích điều hòa*, theo một cách nào đó có thể nghĩ là các xấp xỉ và các số hạng tổng quát, như các hàm sóng tuần hoàn. Sóng tuần hoàn tốt nhất là sóng sine.

Việc dùng từ "*điều hòa*" ở đây xuất phát từ các ứng dụng của sóng sine đến vật lý âm thanh. Một nốt về âm nhạc, ví dụ *C*, chơi bằng violin, có thể hiểu là sự chồng chất của rất nhiều sóng sine, mỗi trong chúng dao động đại diện một "*điều hòa*" của *C*. Các dạng tự đẳng cấu là ý tưởng mở rộng của các sóng tuần hoàn, biểu diễn bởi việc sử dụng một ngôn ngữ hình học tinh vi hơn nhiều lần.

Lý thuyết số

Nhóm Galois là khái niệm xuất phát từ lý thuyết số, nghiên cứu về tính chất của các số. Một trong các chủ đề quan trọng trong lý thuyết số là làm thế nào giải được các phương trình đa thức. Ví dụ làm thế nào để giải phương trình $x^2+x+1=0$. Phương trình này là một phương trình bậc hai và hai nghiệm của nó có thể tính bằng công thức mà hầu hết học sinh phổ thông đã được học. Các nghiệm của nó là $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}$. Các nghiệm của nó nhìn có vẻ tương tự nhau: phần thứ nhất giống nhau là $\frac{-1}{2}$, phần thứ hai hoặc là + hoặc là – của $\frac{\sqrt{-3}}{2}$, nói một cách khác thì chúng thể hiện ra một sự đối xứng.

Trong những năm đầu tiên của thế kỉ 19, nhà Toán học người Pháp *Evariste Galois* nghiên cứu sự đối xứng giữa các nghiệm của một phương trình đa thức. Bảng các quan hệ đối xứng này bây giờ ta gọi là *nhóm Galois*.

Mối liên hệ

Chương trình Langlands là một tham vọng to lớn để kết nối giải tích điều hòa và lý thuyết số, bằng cách chứng minh các kết nối sâu sắc giữa các dạng tự đẳng cấu và các nhóm Galois. *Giải tích điều hòa* và *lý thuyết số* là hai lĩnh vực tách biệt, chúng có các khái niệm riêng, kĩ thuật và thuật ngữ riêng, chương trình thể hiện mối tương quan mạnh mẽ giữa chúng.

Một khái niệm cơ bản quan trọng trong các ý tưởng của *Langlands* là *số học modular*, một cách thực hiện số học với một tập cố định các số liên tiếp sao cho khi ta đếm xa hơn về phía trên thì ta sẽ bắt đầu lại từ 0. Một ví dụ của số học modular là đồng hồ 12 số, nếu đang là 11 giờ, bạn cộng thêm 5 giờ, bạn có 16 giờ. Nhưng không có số 16 trên đồng hồ 12 số, tất cả chúng ta biết rằng 11 giờ cộng 5 tiếng là 4 giờ, vì bạn đã trừ đi 12!

Trong luận văn Số học của mình (1801), nhà Toán học người Đức *Carl Friedrich Gauss* đã thiết lập lý thuyết số học modular và trình bày nó như một định lý cơ bản luật thuận nghịch bình phương, về tính giải được của các phương trình bậc hai sử dụng số học modular. Nhìn lại lần nữa phương trình $x^2+x+1=0$. Nếu chúng ta xét số học modular với module 3, tức là ta chỉ sử dụng ba số 0, 1, 2, thì phương trình này có một nghiệm $x=1$ vì $1^2+1+1=3\equiv 0 \pmod 3$.

Từ *Gauss*, nhiều nhà Toán học đã có cảm hứng quan tâm đến tính giải được của một số dạng phương trình phụ thuộc vào module và làm thế nào để liên hệ giữa nhóm Galois với các phương trình này.

Một trường hợp đặc biệt của *chương trình Langlands*, kết nối lý thuyết số và giải tích điều hòa là có thể nhìn nhận bằng các xét các dạng phương trình đa thức gọi là các "*đường cong elliptic*". Nếu bạn lấy một đường cong elliptic và tìm số nghiệm nó có cho mọi module nguyên số (tức là các số nguyên dương 2,3,5,7,11,..., các số chỉ chia hết cho 1 và chính nó), bạn sẽ tạo ra một dãy các số. Dãy số này, tuy nhiên, cũng có thể tạo ra bằng một dạng đối tượng Toán học khác (gần đúng) tương tự như các sóng tuần hoàn và có thể được nghiên cứu bằng các công cụ của giải tích điều hòa.

Trong bức thư gửi *André Weil* năm 1967 và *Problems in the Theory of Automorphic Forms* năm 1970, *Langlands* đã đưa ra các giả thuyết rộng lớn kết nối *lý thuyết số* và *giải tích điều hòa*, điều mà rất nhiều các chuyên gia tin là đúng nhưng rất nhiều trong số các giả thuyết đó chưa được chứng minh. Thậm chí, nó là một trong các lĩnh vực nghiên cứu phong phú nhất. Trong năm 2002 và 2010, một số nhà Toán học đã được trao giải Fields vì chứng minh một số giả thuyết của Langlands (trong đó có GS. *Ngô Bảo Châu* về *Bổ đề cơ bản* của *chương trình Langlands*).

Chương trình Langlands là động lực cho các nhà Toán học vì nó là cầu nối giữa các lĩnh vực tách biệt, nó cho thấy một cấu trúc nền tảng sâu sắc của các lĩnh vực Toán học cung cấp những cách mới để giải quyết những vấn đề còn tồn đọng và nó có một sự mê hoặc đặc biệt bởi bản chất tự nhiên của sự kết nối: lý thuyết số là nơi các con số thường xuất hiện một cách khó có thể dự đoán và các dạng tự đẳng cấu là các đường cong mịn đầy đủ, hình mẫu chính quy và có sự đối xứng rất đẹp.

Thêm một câu nói hay về *Langlands*: "*He never got a Fields medal. But many people have got Fields Medals for settling special cases of his conjectures, relying on his tools to start off*" - *Peter C. Sarnak*.

Dựa theo bản dịch của *Phạm Khoa Bằng* trên *diendantoanhoc.net*, có đối chiếu với bản gốc trên trang web: *theguardian.com*. **TH&TT**

TẬP SÁNG TẠO

(*Tiếp theo trang* 38)

Rõ ràng nếu số con *gà* và số con *chó* bằng nhau thì phải có số chân là: $(36 : 2) \times 6 = 108 > 100$ điều này trái với đề bài. Số chân nhiều hơn thực tế là 8 nên số con *gà* nhiều hơn số con *chó*, có 4 đôi *gà* với *gà*, do đó số *gà* nhiều hơn số *chó* là 8 con, suy ra số con *chó* là $(36 - 8):2 = 14$, số con *gà* là $36 - 14 = 22$.

Mạnh dạn hơn nữa, mở rộng ta có bài toán mới:

Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Một trăm chân chẵn.
Hỏi có bao nhiêu con gà? bao nhiêu con chó?

Không phải suy nghĩ lâu, ta có phương trình $2x + 4y = 100$, trong đó x là số con *gà*, y là số con *chó* với điều kiện $x, y \in \mathbb{N}; x \le 50;\ y \le 25$, từ đó có $x = 50 - 2y$. Vậy có bảng nghiệm sau:

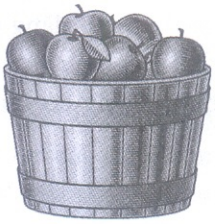
y	0	1	2	…	**14**	15	16	17	…	23	24	25
$x = 50 - 2y$	50	48	46	…	**22**	20	18	16	…	4	2	0
$x + y$	50	49	48	…	**36**	35	34	33	…	27	26	25

Như thế ta được đủ nghiệm và nhiều bài toán mới, vui hơn. Bài toán cổ chỉ là một trường hợp. Một chút sáng tạo, một niềm vui nhỏ. Ta thêm hiểu, thêm nhớ:

Mệnh đề A kéo theo B
Là quy tắc luận say mê ở đời
Học một vận dụng hơn mười
Quy luật ***nhân quả*** *mỉm cười với ai.*

Bây giờ, chúc các bạn giải thành công bằng nhiều cách sáng tạo bài toán quen thuộc:

Quýt cam mười bảy quả tươi
Đem chia cho một trăm người cùng vui
Chia ba mỗi quả quýt rồi
Còn cam mỗi quả chia mười vừa xinh
Trăm người trăm miếng
ngọt lành
Quýt cam mỗi loại tính
rành là bao?



Sau khi đọc cách giải một bài toán trong Tạp chí TH&TT số 487, tôi xin được nêu thêm một cách giải khác đối với học sinh THCS bằng cách áp dụng tính chất đồng biến và nghịch biến của hàm số bậc nhất $y = ax+b$ để bạn đọc tham khảo.

Bài T5/483. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện* $a+b+c=3$ *và* $abc \geq -4$. *Chứng minh rằng:*

$$3(abc+4) \geq 5(ab+bc+ca).$$

Lời giải khác. Do $a+b+c=3$ nên trong ba số a, b, c có ít nhất một số dương.

Giả sử $a>0$, từ giả thiết $abc \geq -4 \Rightarrow bc \geq -\dfrac{4}{a}$.

Ta có: $bc \leq \dfrac{(b+c)^2}{4}$ nên $bc \leq \dfrac{(3-a)^2}{4}$

(do $a+b+c=3$).

Xét $A=(3abc+4)-5(ab+bc+ca)$. Đặt $bc=t$ ta có:

$$f(t)=3at+12-5t-5a(3-a)$$
$$=(3a-5)t-15a+5a^2+12,$$

với $\dfrac{-4}{a} \leq t \leq \dfrac{(3-a)^2}{4}$.

• Xét $3a-5=0$ hay $a=\dfrac{5}{3}$ thì lúc này

$$f(t)=-15\frac{5}{3}+5.\left(\frac{5}{3}\right)^2+12=\frac{8}{9}>0.$$

• Xét $3a-5 \neq 0$ khi đó $f(t)$ là hàm số bậc nhất đối với t và $\dfrac{-4}{a} \leq t \leq \dfrac{(3-a)^2}{4}$ nên để chứng minh $f(t) \geq 0$ ta cần chứng minh $f\left(\dfrac{-4}{a}\right) \geq 0$ và $f\left(\dfrac{(3-a)^2}{4}\right) \geq 0$. Thật vậy, ta có:

$$f\left(\frac{-4}{a}\right)=\frac{-4}{a}(3a-5)-15a+5a^2+12$$
$$=\frac{1}{a}(5a^3-15a^2+20)$$
$$=\frac{5}{a}(a+1)(a-2)^2 \geq 0;$$

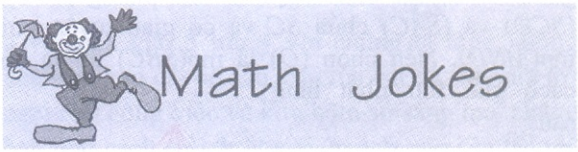
$$f\left(\frac{(3-a)^2}{4}\right)=(3a-5).\frac{(3-a)^2}{4}-15a+5a^2+12$$
$$=\frac{3a^3-3a^2-3a+3}{4}$$
$$=\frac{3}{4}(a+1)(a-1)^2 \geq 0 \quad (\text{do } a>0).$$

Suy ra $f(t) \geq 0$ với $\dfrac{-4}{a} \leq t \leq \dfrac{(3-a)^2}{4}$.

Do vai trò a, b, c trong biểu thức A là bình đẳng nên $A \geq 0 \Leftrightarrow 3(abc+4) \geq 5(ab+bc+ca)$.

PHAN THỊ BẠCH HƯỜNG

(GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)



"*What is π?*"

A mathematician: "π *is the ratio of the circumference of a circle to its diameter.*"

A computer programmer: "π *is* 3.141592653589 *in double precision*".

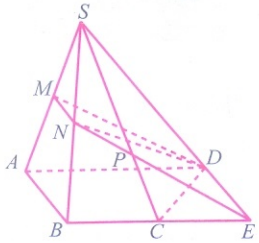
A physicist: "π *is* 3.14159 plus *or minus* 0.000005".

An engineer: "π *is about* 22/7".

A nutritionist: "*Pie is a healthy and delicious dessert!*"

BÀI TOÁN 14. *Cho hình chóp S. ABCD, đáy ABCD là hình thang. ($AD \parallel BC$) và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB, P là giao điểm của SC với mp(MND). Tính tỉ số $\frac{CP}{CS}$.*

Phân tích. Để tính $\frac{CP}{CS}$, trước tiên ta xác định giao điểm P. Để tìm giao điểm P nếu không nhìn thấy sự tồn tại một đường thẳng thuộc (MND) có giao điểm với SC thì thông thường ta xác định một mp(Q) (mặt phẳng phụ) chứa SC và có giao tuyến với (MND), giao điểm của giao tuyến đó với SC chính là P. Việc xác định mp(Q) có ý nghĩa nhất định trong việc tính tỉ số $\frac{CP}{CS}$. Nếu không tạo thêm mặt phẳng chứa SC thì hiện tại, từ giả thiết, ta xác định được ba mặt phẳng (SBC), (SCD) và (SAC) chứa SC và có giao tuyến với mp(MND). Nếu chọn (Q) là mp(SBC) thì ta có cách giải thứ nhất như sau:



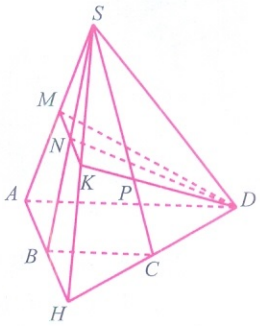
Cách giải 1. Trong mp$(ABCD)$ từ D dựng đường thẳng song song với AB cắt đường BC tại E. Khi đó $ABCE$ là hình bình hành và C là trung điểm của BE. Ta có:

$$MN \parallel AB \Rightarrow DE \parallel MN \Rightarrow DE \subset (MND)$$

$$\Rightarrow (MND) \cap (SBC) = NE.$$

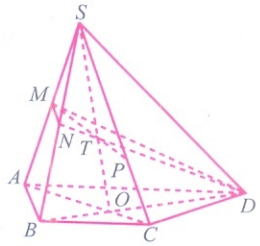
Khi đó P là giao điểm của NE và SC. Vì C là trung điểm của BE và N là trung điểm của SB nên P là trọng tâm của tam giác $SBE \Rightarrow \frac{CP}{CS} = \frac{1}{3}$.

Nếu chọn (Q) là mặt phẳng (SCD) thì ta có cách giải thứ hai.

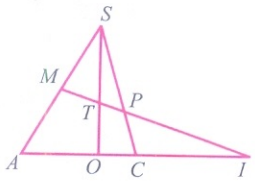


Cách giải 2. Gọi H là giao điểm của AB và CD. Trong mp(SAB) gọi K là giao điểm của MN và SH. Khi đó $(SCD) \cap (MND) = DK \Rightarrow P$ là giao điểm của SC và DK. Từ giả thiết suy ra K là trung điểm của SH. Từ giả thiết BC và AD là hai đáy của hình thang và $AD = 2BC$ ta suy ra C là trung điểm của DH. Do đó P là trọng tâm của tam giác $SDH \Rightarrow \frac{CP}{CS} = \frac{1}{3}$. Nếu chọn (Q) là mặt phẳng (SAC) thì ta có cách giải thứ ba.

Cách giải 3. Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó trong mp(SBD) ta có SO và DN cắt nhau tại $T \Rightarrow (SAC) \cap (MND) = MT \Rightarrow P$ là giao điểm của SC và MT. Trong tam giác SBD với giả thiết N là trung điểm của SB và $\frac{OB}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$. Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSBO và cát tuyến NTD ta tính được $\frac{TS}{TO} = \frac{3}{2}$. Gọi I là giao điểm của MP và AC. Khi đó trong tam giác SAI ta có M là trung điểm của SA và $\frac{TS}{TO} = \frac{3}{2}$, sử dụng

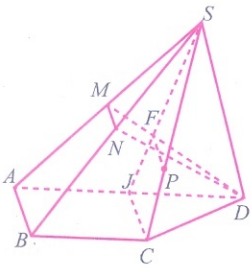


định lý Menelaus cho ΔSAO với cát tuyến MTI ta tính được $\frac{OA}{OI} = \frac{1}{2}$, mà $\frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$ nên C là trung điểm của AI. Do đó P là trọng tâm của tam giác $SAI \Rightarrow \frac{CP}{CS} = \frac{1}{3}$.



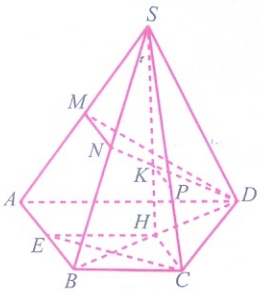
Nhận xét. Đối với cách giải 3 việc xác định điểm P không khó, tuy nhiên việc tính tỉ số $\frac{CP}{CS}$ đã gặp khó khăn hơn rất nhiều. Ta có thể tạo mp(Q) chứa SC và chứa một đường song song với MN như sau:

***Cách giải* 4.** Gọi J là trung điểm của AD. Do $AD = 2BC$ nên $ABCJ$ là hình bình hành $\Rightarrow JC \parallel AB$. Gọi F là giao điểm của SJ với MD $\Rightarrow F$ là trọng tâm của tam giác SAD. Từ giả thiết suy ra $MN \parallel JC$, do đó giao tuyến của mp(MND) với (SJC) là đường thẳng đi d qua F và song song với JC, suy ra P là giao điểm của d và SC. Trong tam giác SJC có $\frac{CP}{CS} = \frac{JF}{JS} = \frac{1}{3}$.



Tiếp theo, ta có thể tạo ra mặt phẳng mới chứa SC và chứa một đường song song với MN như sau:

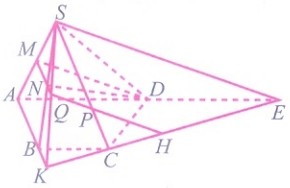
***Cách giải* 5.** Gọi H là trung điểm của BD, E là trung điểm của AB; K là giao điểm của SH với ND. Khi đó K là trọng tâm của tam giác SBD $\Rightarrow \frac{HK}{HS} = \frac{1}{3}$.



Do $AD = 2BC$ nên ta có $BCHE$ là hình bình hành $\Rightarrow HC \parallel MN$, do đó giao tuyến của mp(MND) với (SHC) là đường thẳng d' đi qua K và song song với HC, suy ra P là giao điểm của d' và SC. Khi đó, trong tam giác SHC có $\frac{CP}{CS} = \frac{HK}{HS} = \frac{1}{3}$.

Ta có thể tạo ra mặt phẳng chứa SC và một đường song song với MD như sau:

***Cách giải* 6.** Gọi E là điểm đối xứng với A qua D, khi đó $SE \parallel MD$. Trong mp($ABCD$), gọi K là giao điểm của EC và AB. Trong mp(SAK), gọi Q là giao điểm của MN và SK. Lúc này, Q là một điểm chung của (SEC) và (MND); giao tuyến d của chúng đi qua Q song song với SE, d cắt SC tại P và cắt EK tại H.



Do M, N lần lượt là trung điểm SA và SB nên Q là trung điểm của SK và H là trung điểm của EK. Mặt khác

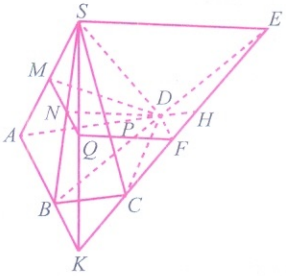
$$AD = 2BC \Rightarrow BC = \frac{1}{4}AE \Rightarrow KC = \frac{1}{4}KE \Rightarrow C$$

là trung điểm của KH. Từ Q là trung điểm của SK, C là trung điểm của KH, suy ra P là trọng tâm của tam giác $SKH \Rightarrow \frac{CP}{CS} = \frac{1}{3}$.

Ta có thể tạo ra mặt phẳng chứa SC và một đường thẳng song song với ND như sau:

***Cách giải* 7.** Gọi E là điểm đối xứng với B qua D, khi đó $SE \parallel DN$. Trong mp($ABCD$), gọi K là giao điểm của EC và AB.

Trong mp(SAB), gọi Q là giao điểm của MN và SK, Q là trung điểm của SK. Lúc này Q là một điểm chung của (MND) và (SEC) và giao tuyến d của chúng đi qua Q và song song với SE, d cắt SC tại P và EK tại F, F là trung điểm của KE. Kéo dài AD cắt EK tại H, khi đó H là trung điểm của CE. Đến đây, ta chứng minh được C là trung điểm của KF, suy ra P là trọng tâm của $\Delta SKF \Rightarrow \frac{CP}{CS} = \frac{1}{3}$.



NGUYỄN ANH VŨ
(*GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định*)

Nhận xét. Việc chọn mặt phẳng phụ chứa SC trong bài toán để xác định vị trí điểm P đã góp phần quan trọng để tính được tỉ số $\frac{CP}{CS}$. Cách giải 4 và cách giải 5 lưu ý với chúng ta rằng không nên dựa vào cái có sẵn, đôi lúc cái có sẵn gây trở ngại cho công việc và kìm hãm sự sáng tạo, chẳng hạn như cách giải 3. Ngoài 7 cách giải của tác giả *Nguyễn Anh Vũ*, Tòa soạn không nhận được thêm cách giải nào khác của các bạn đọc gửi về.

LÊ MAI(*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 16 sau đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.8.2018.

BÀI TOÁN 16. *Cho tam giác ABC vuông tại cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Kẻ NH vuông góc với CM ($H \in CM$). Chứng minh rằng tam giác ABH cân.*

ĐẬU CÔNG NHO
(*GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An*)

Trong bài kỳ này là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 489, T3.2018.

Bài 22 (*Putnam 1988*). *Chứng minh rằng với mọi số thực α, phương trình*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$$

có một nghiệm (x_1,x_2,x_3,x_4) *mà* x_1,x_2,x_3,x_4 *là các số nguyên đều lớn hơn α.*

Lời giải. Chú ý rằng phương trình có một nghiệm tầm thường là (1; 1; 1; 1). Đây chính là phần tử (nghiệm) sinh ra các nghiệm khác của phương trình. Chúng ta sẽ tìm một dạng nghiệm khác theo các biến khác với x_1 để giá trị mới của x_1 vẫn thỏa mãn phương trình. Để làm được điều này ta tách các biến và viết phương trình đã cho thành dạng bậc hai theo x_1:

$$x_1^2-(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x_1+x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_2x_3x_4=0 \quad (1)$$

Khi đó nếu nghiệm của (1) (đối với x_1) là r_1, r_2 thì theo định lý Viète ta có:

$$r_1+r_2=x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4. \quad (2)$$

Giả sử $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(r_1,s_1,t_1,u_1)$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử: $r_1\le s_1\le t_1\le u_1$.

Do (2) nên

$$(x_1', x_2, x_3, x_4)=(s_1t_1+s_1u_1+t_1u_1-r_1, s_1, t_1, u_1)$$

cũng là nghiệm của phương trình.

Chú ý rằng

$$x_1'=s_1t_1+s_1u_1+t_1u_1-r_1>u_1\ge t_1\ge s_1\ge r_1=x_1.$$

Như vậy giá trị mới x_1' lớn hơn giá trị ban đầu x_1. Lặp lại qua trình này cho đến khi ta được giá trị mới lớn hơn α và áp dụng quá trình trên cho các biến x_2, x_3, x_4 ta sẽ luôn tìm được các giá trị mới, các giá trị này tiến tới $+\infty$ và do đó sẽ có các giá trị x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn bài toán, lớn hơn α.

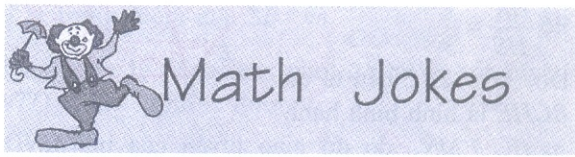
Nhận xét. Lời giải trong bài toán trên đã sử dụng phương pháp "*bước nhảy Viète*", một phương pháp thường được dùng trong các bài toán số học liên quan đến phương trình Diophant (bạn đọc có thể tham khảo rõ hơn về phương pháp này trong *Tạp chí TH&TT số* 478 (T4.2017).

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.8.2018.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 24. *Tìm tất cả các số nguyên dương w, x, y và z sao cho* $w!=x!+y!+z!$.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)



The math professor's six-year-old son knocks at the door of his father's study.

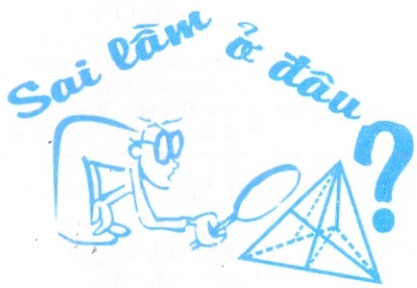
"*Daddy,*" he says. "*I need help with a math problem I couldn't do at school.*"

"*Sure,*" the father says and smiles. "*Just tell me what's bothering you.*"

"*Well, it's a really hard problem: There are four ducks swimming in a pond when two more ducks come and join them. How many ducks are now swimming in the pond?*"

The professor stares at his son in disbelief. "*You couldn't do that?! All you need to know is that* 4 + 2 = 6!"

"*Do you think, I'm stupid?! Of course I know that* 4 + 2 = 6. *But what does this have to do with ducks!?*"



GIẢI ĐÁP:

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ NGHIỆM!

(*Đề đăng trên TH&TT số 489, tháng 3 năm 2018*)

Phân tích. Lời giải đã cho mắc sai lầm ở chỗ đặt điều kiện: $x^2.\log_2 y \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 y \geq 0$ là chưa chính xác vì khi $x = 0$ thì không cần biết dấu của $\log_2 y$ (chỉ cần $\log_2 y$ có nghĩa) thì điều kiện vẫn đúng. Do đó cần xét thêm trường hợp $x = 0$.

Lời giải đúng

Điều kiện: $\begin{cases} y > 0 \\ x^2 \log_2 y \geq 0 \end{cases}$ (1). Xét hai trường hợp:

• TH1: $x = 0$. BPT trở thành:

$$\log_2 y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \log_2 y \leq -1 \Leftrightarrow 0 < y \leq \frac{1}{2}.$$

• TH2: $x \neq 0$. ĐK(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ \log_2 y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \geq 1$. Với ĐK này BPT tương đương với

$$\left(\sqrt{x^2}\right)^2 + 2\sqrt{x^2}.\sqrt{\log_2 y} + \left(\sqrt{\log_2 y}\right)^2 + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{\log_2 y}\right)^2 + 1 \leq 0.$$

Vì $y \geq 1$ nên $\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{\log_2 y}\right)^2 + 1 > 0$. Do đó BPT đã cho vô nghiệm.

Vậy nghiệm của BPT đã cho là $\begin{cases} x = 0 \\ 0 < y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Nhận xét. Các bạn gửi về đều tìm đúng sai lầm và đưa ra cách giải đúng. Sau đây là danh sách các bạn đó:

Hà Nội: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành, Chu Ngọc Chiến*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thu Sương*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

KIHIVI

ĐÚNG HAY SAI !

Bài toán. *Giải phương trình*

$$x^3 - 3x^2 + 2(\sqrt{x+2})^3 - 6x = 0 \quad (1).$$

Một học sinh giải như sau: ĐK: $x \geq -2$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 6x + 16 = 16 - 2(\sqrt{x+2})^3$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 8) = \frac{2(2-x)(x+6+2\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 2 & \\ x^2 - x - 8 = -\dfrac{2(x+6+2\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}+2} & (2) \end{array}\right..$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = -2\left(\frac{x+6+2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2} - 3\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = -2\left(\frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = \frac{-2(x^2 - x - 2)}{(\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - x - 2 = 0 & (3) \\ (\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{x+2}) = -2 & (4) \end{array}\right..$$

(3) có nghiệm $x = -1$, $x = 2$.

Giải (4). Đặt $\sqrt{x+2} = t \geq 0 \Rightarrow x = t^2 - 2$. Khi đó (4) trở thành: $(t^2 + t - 2)(t + 2) = -2$

$\Leftrightarrow (t+1)(t^2 + 2t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = -1 + \sqrt{3}$ (do $t \geq 0$).

Với $t = -1 + \sqrt{3}$ suy ra $x = 2(1 - \sqrt{3})$.

Vậy PT(1) có ba nghiệm: $x = -1$, $x = 2$, $x = 2(1 - \sqrt{3})$.

Theo bạn lời giải trên có đúng không? Nếu sai, hãy sửa cho đúng!

NGUYỄN NGỌC TÚ

(GV THPT chuyên Hà Giang)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 493 (7.2018)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

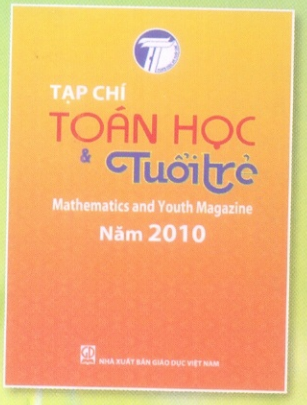
Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Thiết kế, chế bản: NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

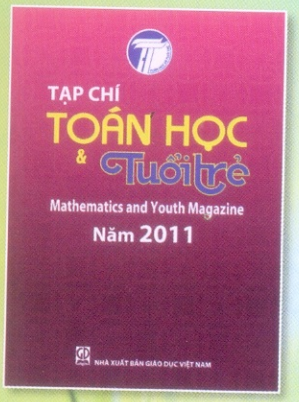
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

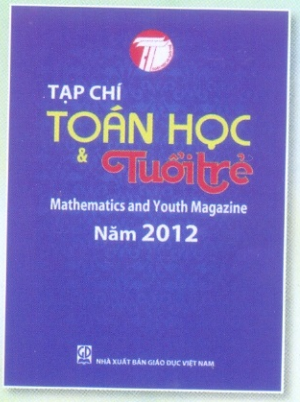
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



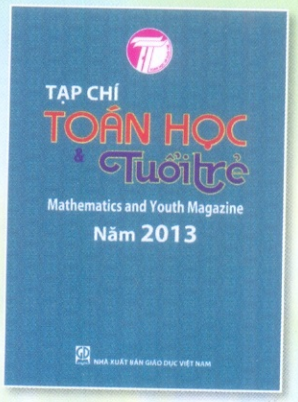
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



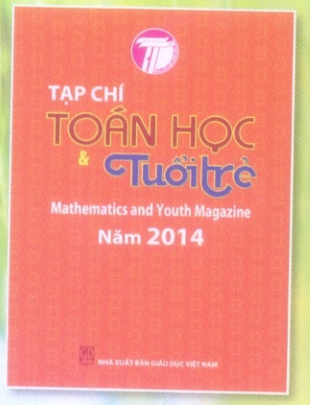
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



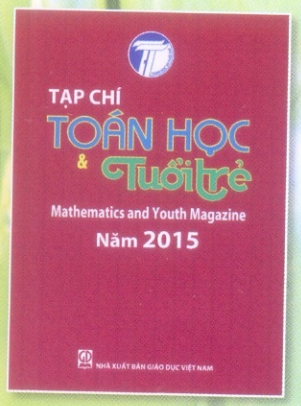
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



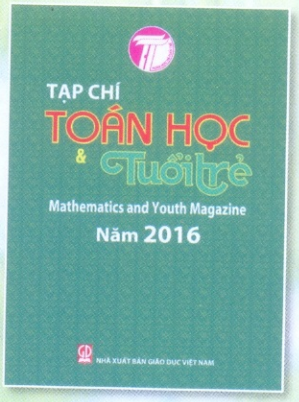
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



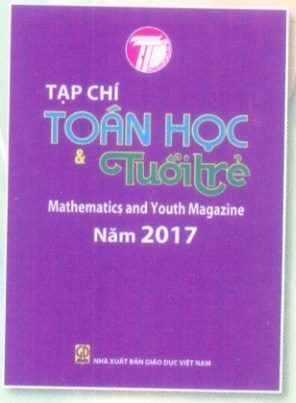
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: (024).35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: (024). 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

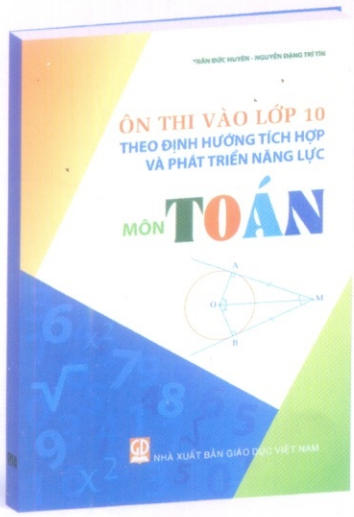
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

ÔN THI VÀO LỚP 10 THEO ĐỊNH HƯỚNG TÍCH HỢP VÀ PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC

của các tác giả: TRẦN ĐỨC HUYÊN và NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN

Sách dày 236 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa: 69.000đồng



Nhằm giúp cho các em học sinh có thể tự ôn luyện và hỗ trợ quý Thầy Cô có thêm tài liệu ôn thi vào lớp 10, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam tổ chức biên soạn cuốn "**ÔN THI VÀO LỚP 10 THEO ĐỊNH HƯỚNG TÍCH HỢP VÀ PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC**".

Ngoài việc luyện thi vào lớp 10, cuốn sách này cũng đáp ứng yêu cầu cho việc đổi mới dạy - học, đáp ứng yêu cầu được các tiêu chí của bộ sách giáo khoa mới, theo định hướng tích hợp các môn học, và phát triển năng lực của học sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Sách gồm 4 chương:

CHƯƠNG 1. NHỮNG CHỦ ĐỀ CƠ BẢN

Bao gồm 12 chủ đề căn bản của chương trình toán lớp 9 hiện hành: Mỗi chủ đề đều có phần tóm tắt lý thuyết, đề toán có hướng dẫn và đề toán tự giải rất tiện cho các em học sinh tự ôn tập và rèn luyện.

CHƯƠNG 2. NHỮNG CHỦ ĐỀ TOÁN ỨNG DỤNG

Chủ đề 13: Những bài toán tích hợp liên môn Lý - Hóa - Sinh.

Chủ đề 14: Những bài toán tỉ lệ phần trăm trong tài chính.

Chủ đề 15: Những bài toán thực tế đo đạc hình học – Các bài toán về địa lí.

CHƯƠNG 3. NHỮNG CHỦ ĐỀ NÂNG CAO

Chủ đề 16: Vận dụng mô hình toán học để giải quyết các vấn đề thực tế.

Chủ đề 17: Toán đại số tổng hợp.

Chủ đề 18: Toán hình học tổng hợp.

CHƯƠNG 4. ĐỀ MẪU THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

Gồm 6 đề thi mẫu được biên soạn theo đúng hướng dẫn cấu trúc và ma trận đề minh họa của Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Hồ Chí Minh, trong đó một số đề có hướng dẫn giải và các đề còn lại các em học sinh sẽ tự làm.

Để sử dụng tài liệu một cách có hiệu quả các em học sinh cần học đầy đủ các kiến thức cơ bản trong sách giáo khoa, tích cực rèn luyện cách suy nghĩ, tư duy, phân tích, phản biện, đồng thời tìm mối liên hệ với thực tế đối với kiến thức đã học.

Chúng tôi hi vọng tài liệu này sẽ giúp ích cho quý thầy cô và các em học sinh trong việc ôn tập, luyện thi vào lớp 10 theo cấu trúc đề mới và rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp xây dựng để những lần tái bản sau tài liệu sẽ được ngày càng hoàn thiện hơn.

Địa chỉ phát hành:

- Công ty CP Sách và Thiết bị giáo dục Miền Nam,
  231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh, ĐT: (028) 38358423
- Các Công ty CP Sách và Thiết bị Trường học Tỉnh (Thành phố).
- Mua sách trực tuyến tại: www.sobee.vn

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT07M8

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 07 năm 2018

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng