

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

A - NGUYÊN HÀM.

I - Tính chất

• **Ký hiệu:** Họ nguyên hàm của $f(x)$ là $\int f(x)dx$,

ta có: $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$F(x)$ là một trong các nguyên hàm của $f(x)$

• **Sự tồn tại của nguyên hàm:** mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K

• **Tính chất:**

$$+) \left(\int f(x)dx \right)' = f(x) \quad ; \quad \int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$+) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \text{ là hằng số khác } 0)$$

$$+) \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$+) \int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C.$$

• **Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp:**

$\int 0dx = C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$)
$\int dx = x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

• **Lưu ý:** Trong số trường hợp (SGK, Ví dụ trong chuẩn kiến thức...) vẫn hiểu tìm nguyên hàm cũng chính là tìm họ nguyên hàm của một hàm số. Tuy nhiên bài toán có thể cho dữ kiện để tìm C (VD2).

II - Các phương pháp tìm họ nguyên hàm.

1) Phương pháp đưa về các nguyên hàm cơ bản:

• Để tìm $\int f(x)dx$ ta biến đổi $f(x)$ về dạng

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_k f_k(x)$$

Trong đó $f_i(x)$ là các hàm số đã biết nguyên hàm

$$\Rightarrow \int f(x)dx = a_1 \int f_1(x)dx + a_2 \int f_2(x)dx + \dots + a_k \int f_k(x)dx$$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x}$ trên $(0; +\infty)$

b) $g(x) = 3\cos x - 3^{x-1}$ trên $(-\infty; +\infty)$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } f(x) &= \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} + \frac{1}{x} = x + x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \int f(x)dx &= \int \left(x + x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \right) dx = \int x dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x^{\frac{1}{2}} + \ln|x| + C = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + \ln x + C \end{aligned}$$

(Vì $x > 0$ nên $|x| = x$).

b) Ta có: $g(x) = 3\cos x - 3^{x-1} = 3\cos x - \frac{1}{3}3^x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int g(x)dx &= \int \left(3\cos x - \frac{1}{3}3^x \right) dx = 3 \int \cos x dx - \frac{1}{3} \int 3^x dx \\ &= 3\sin x - \frac{1}{3} \frac{3^x}{\ln 3} = 3\sin x - \frac{3^{x-1}}{\ln 3} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + 4e^x \text{ biết } F(0) = 1$$

Giải:

* Trước hết ta tìm họ nguyên hàm của $f(x)$

$$\int f(x)dx = 3 \int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx + 4 \int e^x dx = x^3 - \ln|x| + 4e^x + C$$

* Giả sử: $F(x) = x^3 - \ln|x| + 4e^x + C_0$, khi đó:

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow 0^3 - \ln|0| + 4e^0 + C_0 = 1 \Leftrightarrow C_0 = -2$$

* Vậy $F(x) = x^3 - \ln|x| + 4e^x - 2$

BÀI TẬP:

Bài 1: Tìm các họ nguyên hàm sau

a) $\int \frac{x^5 + 1 + \sqrt{x}}{2x} dx$; b) $\int (2x + 3\sin x + 2^{x+2}) dx$

c) $\int \tan^2 x dx$; d) $\int \cot^2 x dx$

2) Phương pháp đổi biến số:

Định lý 1: Nếu $\int f(t)dt = F(t) + C$

và $t = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục, thì

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

Hệ quả: Nếu $u(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) thì

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Lưu ý: $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

Ví dụ 1: Với $a \neq 0$, ta có:

$$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$\begin{aligned} \circ \int e^{ax+b} dx &= \frac{1}{a} e^{ax+b} + C \\ \circ \int a^{mx+b} dx &= \frac{a^{mx+b}}{m \cdot \ln a} + C \quad (m \neq 0; a > 0, a \neq 1) \\ \circ \int \sin(ax+b) dx &= -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C \\ \circ \int \cos(ax+b) dx &= \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C \\ \circ \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx &= \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C \\ \circ \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx &= -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tìm các họ nguyên hàm:

a) $\int x^2 \sqrt{x^3+5} dx$; b) $\int (\sin^4 x + 1) \cos x dx$

Giải:

a) C1: Đặt $t = x^3 + 5 \Rightarrow dt = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{3} dt = x^2 dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int x^2 \sqrt{x^3+5} dx &= \int \sqrt{x^3+5} \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}+1\right)} + C = \frac{2}{9} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} \sqrt{t^3} + C \end{aligned}$$

* Thay $t = x^3 + 5 \Rightarrow \int x^2 \sqrt{x^3+5} dx = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3+5)^3} + C$

C2: Đặt $t = \sqrt{x^3+5} \Rightarrow t^2 = x^3+5$

$$\Rightarrow dt^2 = d(x^3+5) \Leftrightarrow 2tdt = 3x^2 dx \Leftrightarrow \frac{3t}{2} dt = x^2 dx$$

b) Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int (\sin^4 x + 1) \cos x dx &= \int (t^4 + 1) dt = \frac{t^5}{5} + t + C \\ &= \frac{\sin^5 x}{5} + \sin x + C \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tìm các nguyên hàm:

a) $\int t \tan x dx$; b) $\int \frac{x}{(x+1)^5} dx$; c) $\int \frac{(\ln^2 x + \ln x + 1)}{x} dx$

Giải:

a) $\int t \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

Đặt $\cos x = t \Rightarrow dt = (\cos x)' dx = -\sin x dx$
 $\Rightarrow -dt = \sin x dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int t \tan x dx &= -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + C \\ &= -\ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

b) Đặt $t = x + 1 \Rightarrow dt = (x+1)' dx = dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= t - 1 \\ \Rightarrow \int \frac{x}{(x+1)^5} dx &= \int \frac{t-1}{t^5} dt = \int \left(\frac{t}{t^5} - \frac{1}{t^5} \right) dt = \int (t^{-4} - t^{-5}) dt \\ &= \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{t^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{4t^4} + C \\ &= -\frac{1}{3(x+1)^3} + \frac{1}{4(x+1)^4} + C \end{aligned}$$

c) HD: Đặt $\ln x = t$

BÀI TẬP:

Bài 1: Tìm các họ nguyên hàm sau: (HD: đặt $t = \text{căn}$)

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx & \quad 4) \int \sin 3x \cos 3x dx \\ 2) \int x^3 \sqrt{2-x^2} dx & \quad 5) \int \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \\ 3) \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx & \quad 6) \int \cos^2(2x+1) dx \\ & \quad 7) \int \sqrt[3]{3x+5} dx \end{aligned}$$

Bài 2: Tìm các họ nguyên hàm sau (HD: đặt $t = \text{mẫu}$)

$$\begin{aligned} a) \int \frac{x+1}{x^2+2x+1} dx & \quad ; \quad b) \int \frac{x^3}{x+2} dx \\ c) \int \cot x dx & \quad ; \quad d) \int \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1+\cos x} dx \end{aligned}$$

Bài 3: Tìm các họ nguyên hàm sau

(HD: đặt $t = \text{biểu thức trong lũy thừa}$)

$$\begin{aligned} 1) \int x^3(1+x^4)^3 dx & \quad ; \quad 2) \int x^5(1-x^3)^6 dx \\ 3) \int \cos^3 x dx & \quad ; \quad 4) \int x^3(x^4-1)^5 dx \end{aligned}$$

Bài 4: Tìm các họ nguyên hàm sau

(HD: đặt $t = \text{biểu thức trên mũ}$)

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{e^{tgx+2}}{\cos^2 x} dx & \quad ; \quad 2) \int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx \\ 3) \int e^{\sin^2 x} \cdot \sin x \cos^3 x dx & \quad ; \quad 4) \int (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx \end{aligned}$$

Bài 5: Tìm các họ nguyên hàm sau (HD: đặt $t = \ln \dots$)

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx & \quad ; \quad 2) \int \frac{\sqrt{1+3 \ln x \ln x}}{x} dx \\ 3) \int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx & \quad ; \quad 4) \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \end{aligned}$$

Bài 6: Tìm các họ nguyên hàm sau

$$1) \int \frac{1}{x^2-4} dx \quad ; \quad 2) \int \frac{-x}{x^2-5x+6} dx$$

HD: Phân tích mẫu, dùng đồng nhất thức

$$\begin{aligned} 1) \frac{1}{x^2-4} &\equiv \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} \quad (\text{tim a và b}) \\ 2) \frac{-x}{x^2-5x+6} &\equiv \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} \quad (\text{tim a và b}) \end{aligned}$$

3) Phương pháp nguyên hàm từng phần:

Định lý: Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$$

hay: $\int u dv = u.v - \int v du$

Lưu ý: Ta **thường** sử dụng nguyên hàm từng phần cho các nguyên hàm có dạng $\int f(x).g(x)dx$

($f(x)$ và $g(x)$ là 2 trong 4 loại hàm: $P(x)$; $a^{Q(x)}$; $\log_a Q(x)$; $\sin Q(x)$ (hoặc $\cos Q(x)$)).

Khi đó: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx \end{cases} (C = 0)$

Thứ tự ưu tiên đặt u: $\ln x \gg x \gg \sin x$; $\cos x \gg e^x$

(Nhất lô, nhì đa, tam lượng tứ mũ)

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm

a) $\int \ln x dx$; b) $\int e^{2x}(3x+1)dx$; c) $\int e^x \sin x dx$

Giải:

a) Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

Ta có: $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx$
 $= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$

b) Đặt: $\begin{cases} u = 3x+1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$

Ta có: $\int e^{2x}(3x+1)dx = \frac{1}{2}(3x+1)e^{2x} - \frac{3}{2} \int e^{2x} dx$
 $= \frac{2}{4}(3x+1)e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C$
 $= \frac{1}{4}e^{2x}(6x+2-3) + C$
 $= \frac{1}{4}(6x-1)e^{2x} + C$

c) Đặt: $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}$

Ta có: $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int \cos x e^x dx$ (1)

Đặt: $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int \cos x e^x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\int e^x \sin x dx = \sin x e^x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx)$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \sin x e^x - \int e^x \sin x dx$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \sin x e^x + C$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2} \sin x e^x + C$$

Ví dụ 2*: Tìm nguyên hàm $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$ với $x > 0$

Giải:

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{-1}{x+1} \end{cases}$

Vì: $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int (x+1)^{-2} dx = -(x+1)^{-1} + C = \frac{-1}{x+1} + C$

Ta có: $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = -\frac{\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)} dx$
 $= -\frac{\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$
 $= -\frac{\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) + C$
 $= \frac{x}{x+1} \ln x + \ln(x+1) + C$

BÀI TẬP:

Bài 1: Tìm các họ nguyên hàm sau

- 1) $\int (x+1)e^x dx$; 2) $\int xe^x dx$
- 3) $\int (x-2)e^{2x} dx$; 4) $\int x \ln x dx$
- 5) $\int (2x+1) \sin x dx$; 6) $\int x \ln^2 x dx$
- 7) $\int (x^2+2x+3) \ln x dx$; 8) $\int x^2 e^x dx$

Bài 2*: Tìm các họ nguyên hàm sau

- 1) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$; 2) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$
- 3) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$; 4) $\int \sin x \ln(\tan x) dx$
- 5) $\int \ln(x - \sqrt{1+x^2}) dx$

B - TÍCH PHÂN.**I- Khái niệm, tính chất****1) Định nghĩa.**

*) $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $\int f(x)dx = F(x) + C$, khi

đó tích phân từ a đến b của $f(x)$ kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$ xác

định.
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

*) Khi $a = b$, Quy ước $\int_a^a f(x)dx = 0$

*) Khi $a > b$, Quy ước $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

* **Chú ý:** Tích phân không phụ thuộc vào chữ dùng làm biến số trong dấu tích phân

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

2) Tính chất.

+) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (k là hằng số khác 0)

+) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

+) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{b_1} f(x)dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx + \dots + \int_{b_{n-1}}^b f(x)dx$

(Trong đó $a < b_1 < b_2 < \dots < b_n < b$)

II- Phương pháp tính tích phân**1) Sử dụng nguyên hàm cơ bản.**

+) **Nắm rõ định nghĩa tích phân.**

+) **Nắm được các nguyên hàm cơ bản.**

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx$; b) $\int_0^2 x(x-1)^2 dx$

Giải:

a)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx = -\frac{1}{-1} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{4} = 0$$

(Áp dụng $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$)

b)
$$\int_0^2 x(x-1)^2 dx = \int_0^2 x(x^2 - 2x + 1)dx = \int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2 \cdot 2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{2 \cdot 0^3}{3} + \frac{0^2}{2}\right)$$

$$= 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$$

(Lưu ý: $\int (x^3 - 2x^2 + x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$)

BÀI TẬP: Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 (2x+1)^5 dx$ ĐS: $I = 40$

b) $J = \int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2}$ ĐS: $J = \frac{1}{3}$

c) $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)dx$ ĐS: $K = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)dx$; e) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

f) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 x - \sin^4 x)dx$

2) Phương pháp đổi biến số.

B1: Đặt ẩn ($t = u(x)$ hoặc $x = u(t)$)

B2: Đổi cận

B3: Chuyển tích phân sang ẩn mới

Tìm nguyên hàm và tính tích phân.

a) Đổi biến số dạng 1: Đặt $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$

Định lý: Nếu

1) Hàm $x = u(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$,

2) Hàm hợp $f(u(t))$ được xác định trên $[\alpha; \beta]$,

3) $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$,

$$\text{Thì } I = \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt.$$

Chú ý 1: Đối với hàm lượng giác, các hàm tuần hoàn khi đặt $x = u(t)$ nên lấy t thuộc một phần chu kỳ.

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	Đặt $x = a \sin t$; với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x = a \cos t$; với $t \in [0; \pi]$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	Đặt $x = \frac{ a }{\sin t}$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \frac{ a }{\cos t}$ với $t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
$\sqrt{a^2 + x^2}$	Đặt $x = a \tan t$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

	hoặc $x = a \cot t$; với $t \in (0; \pi)$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	Đặt $x = a \tan t$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Chú ý 2: Đối với các hàm không tuần hoàn khi đặt $x = u(t)$ ta lấy t thuộc tập xác định của $u(t)$.

Ví dụ 1: Tính: a) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$; b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Giải:

a) Đặt $x = 2 \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\Rightarrow dx = (2 \sin t)' dt = 2 \cos t dt$$

* Đổi cận:

+) $x = 0$ thì $\begin{cases} 2 \sin t = 0 \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$

+) $x = 2$ thì $\begin{cases} 2 \sin t = 2 \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2t + t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dots = \pi \end{aligned}$$

b) Đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\Rightarrow dx = (\tan t)' dt = \frac{dt}{\cos^2 t} = (1 + \tan^2 t) dt.$$

Khi $x = 0$ thì $\begin{cases} \tan t = 0 \\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow t = 0,$

khi $x = 1$ thì $\begin{cases} \tan t = 1 \\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + \tan^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

b) Đổi biến số dạng 2: Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$

Định lý: Nếu hàm số $u = u(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ sao cho

$$f(x) dx = g(u(x)) u'(x) dx = g(u) du \text{ thì}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du.$$

Chú ý 1: Dạng này không phải xác định miền xác định của t .

Chú ý 2: Nếu $f(t) = g(x) \Rightarrow f'(t) dt = g'(x) dx$

Ví dụ 1: Hãy tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx$; b) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + 1) \cos x dx$

Giải:

a) C1: * Đặt $u = x^3 + 5 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{du}{3} = x^2 dx$

* Khi $x = 0 \Rightarrow u(0) = 5$; $x = 1 \Rightarrow u(1) = 6$

* Ta có: $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx = \int_5^6 \sqrt{u} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int_5^6 (u)^{\frac{1}{2}} dt$
 $= \frac{1}{3} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) \Big|_5^6 = \frac{2}{9} u \sqrt{u} \Big|_5^6 = \frac{4}{3} \sqrt{6} - \frac{10}{9} \sqrt{5}.$

C2: Đặt $u = \sqrt{x^3 + 5} \Rightarrow u^2 = x^3 + 5$

$$\Rightarrow 2u du = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{2u du}{3} = x^2 dx$$

b) * Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = (\sin x)' dx = \cos x dx$

* Khi $x = 0 \Rightarrow u(0) = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

* Ta có $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + 1) \cos x dx = \int_0^1 (u^4 + 1) du$
 $= \left(\frac{u^5}{5} + u \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + 1 - 0 = \frac{6}{5}$

* Vậy $J = \frac{6}{5}$

Ví dụ 3: Tính a) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ b) $\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx$;

a) Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

Khi $x = e$ thì $u = 1$.

Khi $x = e^2$ thì $u = 2$.

$$\Rightarrow \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln u \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

b) Đặt $u = x^2 + x + 1 \Rightarrow du = (2x + 1)dx$

Khi $x = 0$ thì $u = 1$.

Khi $x = 1$ thì $u = 3$.

Ta có: $\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx = \int_1^3 \frac{2du}{u} = 2 \ln u \Big|_1^3$
 $= 2(\ln 3 - \ln 1) = 2 \ln 3$

BÀI TẬP:

Bài 1: Tính các tích phân sau:

1/ $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}$

5/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$

2/ $I = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx$

6/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos x} dx$

3/ $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$

7/ $I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{7} x \sqrt{x^2+9}} dx$

4/ $I = \int_0^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}} dx$

Bài 2: Tính các tích phân sau:

1/ $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

5/ $I = \int_2^4 \frac{1}{x \sqrt{16-x^2}} dx$

2) $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{2-x^2} dx$

6*/ $I = \int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{1}{x \sqrt{x^2-9}} dx$

3) $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$

7/ $I = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

4/ $I = \int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx$

8/ $I = \int_0^2 x \sqrt{(x^2+4)^3} dx$

Bài 3: Tính các tích phân sau:

1) $I = \int_0^1 x^3 (1+x^4)^3 dx$ 5*/ $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} dx$

2) $I = \int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx$

6/ $I = \int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx$

3/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$

7/ $I = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx$

4/ $I = \int_0^1 x^3 (x^4-1)^5 dx$

8/ $I = \int_0^1 (1+2x)(1+3x+3x^2)^3 dx$

Bài 4: Tính các tích phân sau:

1/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x} + 2}{\cos^2 x} dx$

3/ $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x+1)\sqrt{e^x-1}} dx$

2/ $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$

4/ $I = \int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$

5/ $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx$

Bài 5: Tính các tích phân sau:

1/ $I = \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

4/ $I = \int_e^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

2/ $I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx$

5/ $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$

3/ $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3 \ln x \ln x}}{x} dx$

Bài 6: Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} . dx$;

b) $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1} . dx$

c) $\int_1^{\sqrt{6}} \sqrt{3+x^2} . dx$;

d) $\int_1^{\sqrt{6}} \frac{3}{6+2x^2} . dx$

3. Phương pháp tích phân từng phần.

Định lý. Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

$$\text{hay } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

* **Các bước:**

Bước 1: Viết tích phân dưới dạng $\int_a^b f(x).g(x)dx$

($f(x)$ và $g(x)$ là 2 trong 4 loại hàm: $P(x)$; $a^{Q(x)}$; $\log_\alpha Q(x)$; $\sin Q(x)$ (hoặc $\cos Q(x)$)). $P(x)$ và $Q(x)$ là các hàm đa thức)

Bước 2: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx \quad (C=0) \end{cases}$

Bước 3: Tính $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

Bước 4: Kết luận

* **Thứ tự ưu tiên đặt u :** $\ln x \gg x \gg \sin x$; $\cos x \gg e^x$

(Nhất lô, nhì đa, tam lượng, tứ mũ)

Ví dụ 1: Tính $\int_1^e x \ln x dx$

Giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Ví dụ 2: Tính: a) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.

Giải:

$$\text{a) Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^5} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{4x^4} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx = -\frac{\ln x}{4x^4} \Big|_1^2 + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{dx}{x^5}$$

$$= -\frac{\ln 2}{64} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4x^4} \right) \Big|_1^2 = \frac{15 - 4 \ln 2}{256}$$

$$\text{b) Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = (x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ví dụ 2: Tính: a) $I = \int_0^1 x e^x dx$; b) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

Giải:

$$\text{a) Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } I = \int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

$$\text{b) Đặt } \begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - J$$

$$\Rightarrow J = 1 + (e^{\frac{\pi}{2}} - J) \Leftrightarrow 2J = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \Leftrightarrow J = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}.$$

BÀI TẬP: Tính tích phân sau

$$1) \quad I = \int_0^1 x(x + e^x) dx \quad \text{ĐS: } I = \frac{4}{3}$$

$$2) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + e^{x^2}) \cdot 2x dx \quad \text{ĐS: } I = e^{\frac{\pi}{4}} + 1$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad I &= \int_1^e (x+1) \cdot \ln x dx & \text{ĐS: } I &= \frac{e^2 + 5}{4} \\
 4) \quad I &= \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx. & \text{ĐS: } I &= 2 \\
 5) \quad I &= \int_1^2 (2x+1) \ln x dx & \text{ĐS: } I &= 5 \ln 2 - \frac{5}{2} \\
 6) \quad I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx & \text{ĐS: } & \\
 7) \quad I &= \int_0^1 \ln(1+x^2) dx & \text{ĐS: } I &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \\
 8) \quad I &= \int_1^e x \ln x dx & \text{ĐS: } I &= \frac{e^2 + 1}{4}
 \end{aligned}$$

C - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN.

I- Diện tích hình phẳng

CƠ SỞ LÝ THUYẾT:

$$\text{Dạng 1. } S = S_{(H)} \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \text{ (trục Ox)} \\ x = a \\ x = b (a < b) \end{cases} = \int_a^b |f(x)| dx$$

❖ Nếu giả thiết không cho các cận a, b thì giải pt hoành độ giao điểm $f(x)=0$ ta tìm các cận tích phân. Nhiều trường hợp đặc biệt ta phải sử dụng hình vẽ để xác định cụ thể các cận tích phân và lập các công thức tính diện tích.

❖ Cách khử giá trị tuyệt đối (xem thêm Tích phân hàm trị tuyệt đối - Trang 15):

+) Nếu phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm trên $[a; b]$ thì ta đưa giá trị tuyệt đối ra ngoài tích phân:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

+) Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ thuộc $[a; b]$ thì ta tách S thành tổng các tích phân trên từng đoạn hoặc xét dấu $f(x)$ để khử giá trị tuyệt đối.

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_k}^b f(x) dx \right|$$

$$\text{Dạng 2. } S = S_{(H)} \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b (a < b) \end{cases} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Việc khử giá trị tuyệt đối dưới dấu tích phân ta thực hiện tương tự dạng 1.

Dạng 3. $S = S_{(H)} \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ với điều kiện pt:

$f(x) = g(x)$ có ít nhất 2 nghiệm

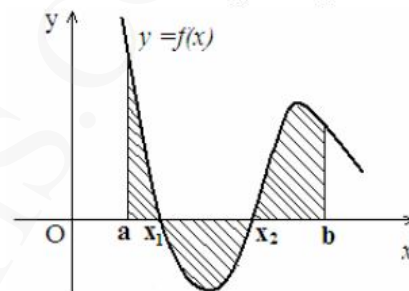
Bước 1. Giải pt: $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

Bước 2. ta có: $S = \left| \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx \right| + \dots + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} [f(x) - g(x)] dx \right|$

Chú ý: Nếu diện tích không có 3 dạng trên

C₁: Dựa vào phương trình hoành độ giao điểm để đưa về một trong các dạng trên.

C₂: Dựa vào hình vẽ để tách diện tích cần tính thành các diện tích nhỏ hơn mà có 1 trong 3 dạng trên.



CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = -1$; $x = 3$; $y = 0$; $y = \frac{1}{81}x^4 + \frac{1}{9}x^2 + 1$.

Giải:

Diện tích hình phẳng cần tìm:

$$S = \int_{-1}^3 \left(\frac{1}{81}x^4 + \frac{1}{9}x^2 + 1 - 0 \right) dx$$

Xét phương trình: $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ (Vô nghiệm)

$$\Rightarrow S = \left| \int_{-1}^3 \left(\frac{1}{81}x^4 + \frac{1}{9}x^2 + 1 \right) dx \right| = \left| \left(\frac{1}{81} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3} + x \right) \right|_{-1}^3 =$$

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = -1$; $x = 2$; trục Ox; $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Giải:

Diện tích:

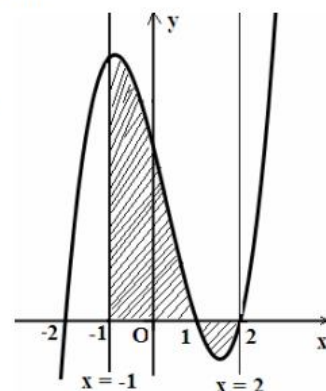
$$S = \int_{-1}^2 |x^3 - x^2 - 4x + 4| dx$$

Xét phương trình:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

trên $[-1; 2]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{nhân}) \\ x = -2 & (\text{loại}) \\ x = 2 & (\text{nhân}) \end{cases}$$



$$\Rightarrow S = \left| \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - 4x + 4) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - x^2 - 4x + 4) dx \right|$$

$$=$$

Ví dụ 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 12x + 28$ và $y = 6x - x^2$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$(x^2 - 12x + 28) - (6x - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases}$$

Diện tích cần tìm

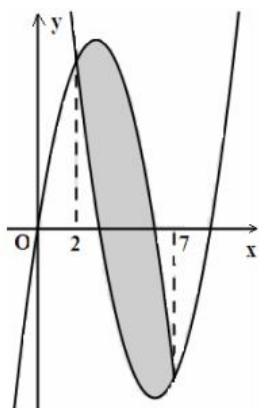
$$S = \int_2^7 [(x^2 - 12x + 28) - (6x - x^2)] dx$$

$$= \int_2^7 |2(x^2 - 9x + 14)| dx$$

$$= 2 \left| \int_2^7 (x^2 - 9x + 14) dx \right|$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 9 \frac{x^2}{2} + 14x \right]_2^7$$

$$=$$



Ví dụ 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 1$; $x = 3$; $y = \sqrt{x-1} + 4$; $y = x^3 - 2x^2 + \sqrt{x-1} + 4$.

Giải:

$$S = \int_1^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^3 [(x^3 - 2x^2 + \sqrt{x-1} + 4) - (\sqrt{x-1} + 4)] dx$$

$$= \int_1^3 |x^3 - 2x^2| dx$$

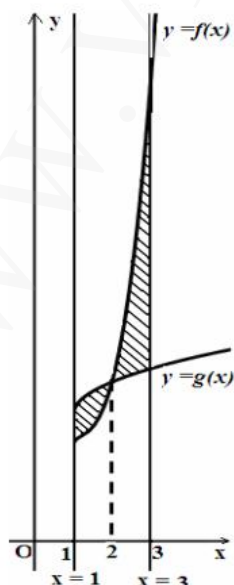
Xét trên $[1; 3]$ phương trình:

$$x^3 - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{loại}) \\ x = 2 & (\text{nhận}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left| \int_1^2 (x^3 - 2x^2) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^3 - 2x^2) dx \right|$$

$$=$$



Ví dụ 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^4 - 3x^2 + 6x + 4$ và $y = 6x + 2x^2$.

Giải:

$$\text{Ta có } f(x) - g(x) = (x^4 - 3x^2 + 6x + 4) - (6x + 2x^2) = x^4 - 5x^2 + 4$$

$$\text{Pt hoành độ giao điểm: } x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ hoặc } x = \pm 2$$

Diện tích:

$$S = \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^2 |x^4 - 5x^2 + 4| dx$$

$$= \left| \int_{-2}^{-1} (x^4 - 5x^2 + 4) dx \right| + \left| \int_{-1}^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4) dx \right|$$

$$=$$

Chú ý: Các ví dụ trên không yêu cầu vẽ hình

BÀI TẬP

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

$$1) y = x^3 + 3x^2 + 1, y = 1. \quad 2) y = -x^4 + 2x^2 + 3, \text{ Ox.}$$

$$3) y = x^3 - 2x^2 + 1 \text{ và } y - x + 1 = 0.$$

$$4) y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{x-1}, \text{ Ox, } x = 2, x = 4.$$

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

$$a) x^2 + y^2 = 8, y^2 = 2x$$

b) (P): $y = x^2 - 4x + 5$. Và 2 tiếp tuyến của (P) tại 2 điểm A(1;2) và B(4;5). (nên vẽ hình)

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường

$$y = \frac{1}{4}x^3 - 3x \text{ và tiếp tuyến của nó tại } x = 2\sqrt{3}$$

II - Tính thể tích vật thể tròn xoay

CƠ SỞ LÝ THUYẾT:

$$V_{Ox} = \int_a^b s(x) dx$$

Trong đó $S(x)$ là diện tích của thiết diện của vật thể K bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$)

$$\text{Dạng 1: } V = V_{(H)}^{Ox} = \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b (a < b) \end{cases} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$\text{Dạng 2: } V = V_{(H)}^{Ox} = \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b (a < b) \end{cases} = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

Chú ý: Nếu thể tích cần tính không rơi vào 2 dạng trên thì có thể vào pt hoành độ giao điểm hoặc dựa vào hình vẽ để biến đổi đa về 2 dạng trên.

CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0$; $x = \pi$; $y = 0$; $y = \sin x$ khi quay quanh trục Ox.

Giải:

Áp dụng công thức ta có:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

Ví dụ 2: Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$; $y = 1 - x^2$ khi quay quanh trục Ox.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Vậy } V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \frac{16}{15} \pi$$

BÀI TẬP

Bài 1: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục Ox

a) $y = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 1$; b) $y = x^2(4 - x^2), y = 0$

c) $y = \frac{-2x+1}{x+3}, y = 0, x = 0$; d) $x^2 + y - 5 = 0; x + y - 3 = 0$

Bài 2:

a) Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục Ox:

$$y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}, y = 0, x = 2, x = 3$$

b) Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục Ox:

$$y = x^2, y = -3x + 10, y = 1$$

Bài 3: Cho miền D giới hạn bởi hai đường :

$x^2 + x - 5 = 0$; $x + y - 3 = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox.

D- MỘT SỐ TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT

(Nâng cao theo chương trình chuẩn)

1) Tích phân hàm hữu tỉ.

a) Dạng 1: $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx, \quad (a \neq 0) .$

Xét $\Delta = b^2 - 4ac$.

*) Nếu $\Delta = 0$ thì $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{m(x - x_0) + (n + mx_0)}{a(x - x_0)^2} dx$

*) Nếu $\Delta > 0$ thì

$$I = \frac{1}{a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(mx + n) dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{a} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right) dx,$$

*) Nếu $\Delta < 0$ thì

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{A(2ax + b)}{ax^2 + bx + c} + \frac{B}{ax^2 + bx + c} \right) dx.$$

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \right)^2 \right]}$$

Đặt $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\Delta}{a^2}} (1 + \tan^2 t) dt$,
ta tính được J.

b) Dạng tổng quát $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

với P(x) và Q(x) là đa thức của x.

• Nếu bậc của P(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của Q(x) thì dùng phép chia đa thức.

• Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn bậc của Q(x) thì có thể xét các trường hợp:

+) Khi Q(x) chỉ có nghiệm đơn $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}.$$

+) Khi $Q(x) = (x - \alpha)(x^2 + px + q), \Delta = p^2 - 4q < 0$

$$\text{thì đặt } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}.$$

+ Khi $Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)^2$ với $\alpha \neq \beta$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{(x - \beta)^2}.$$

Ví dụ 1: Tính tích phân: $\int_0^1 \frac{4x + 11}{x^2 + 5x + 6} dx$.

Giải:

$$\text{Vì } x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

$$\text{Tìm A, B sao cho: } \frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{(A+B)x+3A+B}{x^2+5x+6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ 3A+2B=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx &= 3 \int_0^1 \frac{dx}{x+2} + \int_0^1 \frac{dx}{x+3} \\ &= 3 \ln|x+2| \Big|_0^1 + \ln|x+3| \Big|_0^1 = \ln \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ví dụ 2: Tính tích phân: } \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t) dt$$

$$\text{Vậy: } \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t) dt}{\frac{3}{4} (1 + \tan^2 t)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{Ví dụ 3: Tính tích phân: } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2-1} dx$$

Giải:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2-1} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{x}{x^2-1} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{x^2-1} \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm các họ nguyên hàm sau:

$$1) \int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)} \quad \underline{DS:} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x+\frac{1}{2}| + C$$

$$2) \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)} dx \quad \underline{DS:} 4\ln|x-1| + 5\ln|x-4| + 7\ln|x+3| + C$$

Bài 2: Tính các tích phân sau:

$$1) \int_0^1 \frac{xdx}{(2x-3)^3} \quad \underline{DS:} \frac{1}{18} \quad 2) \int_0^1 \frac{x^4-1}{x^6-1} dx \quad \underline{DS:} \frac{\pi}{3}$$

$$3) \int_0^4 \frac{dx}{x^2(x+1)} \quad \underline{DS:} \frac{3}{4} + \ln \frac{5}{8}$$

2) Tích phân hàm lượng giác.

Biến đổi về tích phân cơ bản

→ sử dụng các công thức biến đổi lượng giác.

$$\text{Ví dụ 1: Tính: a) } J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 7x dx;$$

$$\text{b) } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx; \quad \text{c) } M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx.$$

$$\text{a) } J = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 9x dx$$

$$= \frac{1}{10} \sin 5x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{18} \sin 9x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{45}$$

$$\text{b) Ta có: } \cos x (\sin^4 x + \cos^4 x)$$

$$= \cos x \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \right]$$

$$= \cos x \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) = \cos x \left[1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) \right]$$

$$= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos x \cos 4x$$

$$= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{8} (\cos 5x + \cos 3x)$$

$$\Rightarrow K = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x dx + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx$$

$$= \frac{3}{4} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{40} \sin 5x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{24} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{40} - \frac{1}{24} = \frac{11}{15}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} &= \frac{4 \sin^2 x \sin x}{1 + \cos x} = \frac{4(1 - \cos^2 x) \sin x}{1 + \cos x} \\ &= 4(1 - \cos x) \sin x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M = \int_0^{\pi} 4(1 - \cos x) \sin x dx = \dots = 2.$$

Hữu tỉ hóa tích phân hàm lượng giác

$$\text{Tính } I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$$

Phương pháp:

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\text{Ta có: } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \int \frac{2dt}{(c-b)t^2 + 2at + b+c} \text{ đã}$$

biết cách tính.

$$\text{Ví dụ 2: Tính } \int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x + 5}$$

Giải:

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx \Leftrightarrow \frac{2dt}{1+t^2} = dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos x + 3 \sin x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \frac{2t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2}$$

$$= \ln \left| \frac{t+1}{t+2} \right| + C = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} + 2} \right| + C.$$

$$\text{Ví dụ 3: Tìm } F(x) = \int \frac{\sin 2x dx}{3 + 4 \sin x - \cos 2x}$$

Giải:

$$\text{Ta có: } \int \frac{\sin 2x dx}{3 + 4 \sin x - (1 - 2 \sin^2 x)} = \int \frac{2 \sin x \cos x dx}{2 \sin^2 x + 4 \sin x + 2}$$

$$\text{Đặt } u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$F(x) = \int \frac{u du}{(u+1)^2} = \int \frac{du}{u+1} - \int \frac{du}{(u+1)^2}$$

$$= \ln |u+1| + \frac{1}{u+1} + C$$

$$\text{Vậy } F(x) = \ln |\sin x + 1| + \frac{1}{\sin x + 1} + C$$

$$\text{Tính } I = \int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d}$$

Phương pháp:

$$I = \int \frac{dx}{(a+d) \sin^2 x + b \sin x \cos x + (c+d) \cos^2 x}$$

$$= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{(a+d) \tan^2 x + b \tan x + (c+d)}$$

$$\text{Đặt: } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{(a+d)t^2 + bt + (c+d)}$$

$$\text{Ví dụ 3. Tính: } I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x}.$$

Giải:

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2 \tan x - 3}$$

$$\text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 3} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+3)}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+3} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\tan x - 1}{\tan x + 3} \right| + C$$

$$\text{Tính } I = \int \frac{m \sin x + n \cos x + p}{a \sin x + b \cos x + c} dx.$$

Phương pháp:

+) Tìm A, B, C sao cho:

$$m \sin x + n \cos x + p$$

$$= A(a \sin x + b \cos x + c) + B(a \cos x - b \sin x) + C, \forall x$$

$$+ \text{) Vậy } I = A \int dx + B \int \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x + c} dx$$

$$+ C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$$

$$= Ax + \ln |a \sin x + b \cos x + c| + \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$$

$$\text{Ví dụ 4: Tính: } I = \int \frac{\cos x + 2 \sin x}{4 \cos x + 3 \sin x} dx.$$

Giải:

Giả sử:

$$\cos x + 2 \sin x = A(4 \cos x + 3 \sin x) + B(-4 \sin x + 3 \cos x), \forall x$$

$$\Leftrightarrow \cos x + 2 \sin x = (4A + 3B) \cos x + (3A - 4B) \sin x, \forall x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A + 3B = 1 \\ 3A - 4B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$I = \int \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{-4 \sin x + 3 \cos x}{4 \cos x + 3 \sin x} \right) dx.$$

$$= \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \ln |4 \cos x + 3 \sin x| + C$$

Đổi biến số để đưa về tích phân hàm lượng giác đơn giản hơn

Tính $\int R(\sin x, \cos x) dx$,

với $R(\sin x, \cos x)$ là một hàm hữu tỉ theo $\sin x, \cos x$

Để tính nguyên hàm trên ta đổi biến số và đưa về dạng tích phân hàm hữu tỉ mà ta đã biết cách tính tích phân.

• Trường hợp chung: Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\text{Ta có } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

• Những trường hợp đặc biệt:

+) Nếu $R(\sin x, \cos x)$ chẵn với $\sin x$ và $\cos x$ nghĩa là $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$, sau đó đưa tích phân về dạng hữu tỉ theo biến t .

+) Nếu $R(\sin x, \cos x)$ lẻ đối với $\sin x$ nghĩa là:

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$.

+) Nếu $R(\sin x, \cos x)$ là hàm số lẻ đối với $\cos x$ nghĩa là: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$.

Ví dụ 5: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$.

Giải:

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot \cos x dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 (1-t^2)^2 dt = \left(\frac{1}{5} t^5 - \frac{2t^3}{3} + t \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

$$\text{Vậy } I = I_1 - I_2 = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$$

❖ **Một số tích phân dạng khác.**

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{(2 \sin x + \cos x)^3} dx$.

Giải:

Chia tử và mẫu biểu thức dưới dấu căn cho

$$\cos^3 x \neq 0 \text{ ta được } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x + 1}{(2 \operatorname{tg} x + 1)^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	0	1

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 \frac{t+1}{(2t+1)^3} dt$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{(2t+1) + \frac{1}{2}}{(2t+1)^3} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(2t+1)^2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(2t+1)^3} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(2t+1)}{(2t+1)^2} + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(2t+1)}{(2t+1)^3} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(2t+1)} \Big|_0^1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(2t+1)^2} \Big|_0^1 = \frac{5}{18} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cdot \cos x}{\sin^3 x} dx$.

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx \end{cases} \text{ ta có: } \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2 \sin^2 x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó: } I &= -\frac{x}{2 \sin^2 x} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x} \\ &= -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \cot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3) Tích phân hàm vô tỉ.

Dạng 1: Biến đổi về tích phân vô tỉ cơ bản

Ví dụ 1: Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.

Giải:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \int_0^1 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx = \frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 2)$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x + \sqrt{1+x^2}}$.

Giải:

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x + \sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 (x^3 \sqrt{1+x^2} - x^4) dx = \dots = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}.$$

Dạng 2: Biến đổi về tích phân hàm lượng giác

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	Đặt $x = a \sin t$; với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x = a \cos t$; với $t \in [0; \pi]$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	Đặt $x = \frac{ a }{\sin t}$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \frac{ a }{\cos t}$ với $t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
$\sqrt{a^2 + x^2}$	Đặt $x = a \tan t$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x = a \cot t$; với $t \in (0; \pi)$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	Đặt $x = a \cos 2t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	Đặt $x = a + (b-a) \sin^2 t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	Đặt $x = a \tan t$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Ví dụ 1: Tính $I = \int_{-1}^2 \sqrt{4x - x^2 + 5} dx$

Giải:

$$I = \int_{-1}^2 \sqrt{4x - x^2 + 5} dx = \int_{-1}^2 \sqrt{(x+1)(5-x)} dx$$

Đặt $x = -1 + 6 \sin^2 t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin t > 0$ và $\cos t > 0$

$$\Rightarrow dx = 12 \sin 2t dt$$

$$\text{Đổi cận } x = -1 \Rightarrow -1 + 6 \sin^2 t = -1 \Rightarrow t = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow -1 + 6 \sin^2 t = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_{-1}^2 \sqrt{(6 - 6 \sin^2 t) 6 \sin^2 t} \cdot 12 \sin 2t dt = 12 \int_{-1}^2 \sqrt{6^2 \sin^2 t \cos^2 t} \cdot \sin 2t dt$$

$$= 72 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin t \cos t| \sin 2t dt = 36 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt$$

Dạng 3: Đổi biến làm mất căn

Gồm: Đổi biến số t là toàn bộ căn thức

Viết biểu thức trong căn dưới dạng bình phương đúng

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

Giải:

$$I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \cdot x dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow t^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1-t^2$$

$$\text{Ta có: } x dx = -t dt,$$

$$\text{Khi } x = 0 \text{ thì } t = 1,$$

$$\text{khi } x = 1 \text{ thì } t = 0$$

$$\text{Vậy } I = - \int_1^0 (1-t^2) t^2 dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$

Giải:

$$\text{Đặt } u = x + \sqrt{1+x^2} \text{ thì } u - x = \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2ux + u^2 = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{u^2 - 1}{2u} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) du$$

$$\text{Đổi cận } x = -1 \text{ thì } u = \sqrt{2} - 1$$

$$x = 1 \text{ thì } u = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow I = \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) du}{1+u} = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{du}{(1+u)u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u+1} \right) du$$

$$= 1$$

Chú ý: Bài toán trên nếu dùng nhân liên hợp khử căn dưới mẫu sẽ đơn giản hơn

4) Tích phân hàm trị tuyệt đối.**Phương pháp:**

Phương pháp chung:

B1: Lập bảng phá dấu giá trị tuyệt đối

B1: Chia cận: sao cho trong mỗi khoảng của các cận đã chia biểu thức dưới dấu tích phân không đổi dấu.

B1: Tính các tích phân trong các cận đã chia.

Đặc biệt để tính tích phân $S = \int_a^b |f(x)| dx$

+) Nếu phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm là a hoặc b trên $[a; b]$ thì ta đưa giá trị tuyệt đối ra ngoài tích phân :

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

+) Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ thuộc $[a; b]$ thì ta tách S thành tổng các tích phân trên từng đoạn hoặc xét dấu $f(x)$ để khử giá trị tuyệt đối.

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_k}^b f(x) dx \right|$$

Ví dụ 1: Tính $J = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$

Giải:

Cách 1:

Lập bảng xét dấu của $x^2 - 1$ trên đoạn $[-2; 2]$

x	-2	-1	1	2	
x^2-1	+	0	-	0	+

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} |x^2 - 1| dx + \int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^2 |x^2 - 1| dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = 4 \end{aligned}$$

Cách 2:

Xét phương trình $x^2 - 1 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ (nhận)}$$

$$\Rightarrow I = \left| \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx \right| + \left| \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^2 - 1) dx \right| = \dots = 4$$

Ví dụ 2: Tính $J = \int_{-1}^2 |x|(\sqrt{x^2 + 3} - 1) dx$

HD:

$$\forall |x| = \begin{cases} x & \text{voi } x \geq 0 \\ -x & \text{voi } x < 0 \end{cases}$$

$$J = \int_{-1}^0 |x|(\sqrt{x^2 + 3} - 1) dx + \int_0^2 |x|(\sqrt{x^2 + 3} - 1) dx$$

$$\begin{aligned} &= -\int_{-1}^0 x(\sqrt{x^2 + 3} - 1) dx + \int_0^2 x(\sqrt{x^2 + 3} - 1) dx \\ &= -\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2 + 3} dx + \int_0^2 x\sqrt{x^2 + 3} dx + \int_{-1}^0 x dx - \int_0^2 x dx \\ &= -\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2 + 3} dx + \int_0^2 x\sqrt{x^2 + 3} dx - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } t &= \sqrt{x^2 + 3} \Rightarrow t^2 = x^2 + 3 \\ &\Rightarrow t dt = x dx \end{aligned}$$

Đổi cận :

x	-1	0	2
t	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$

5) Tích phân hàm mũ, lôgrit.

Ví dụ 1: Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \frac{1 - e^x + e^x}{e^x - 1} dx = -\int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{e^x}{e^x - 1} dx \\ &= -2 + \left(\ln |e^x - 1| \right) \Big|_1^3 \\ &= -2 + \ln(e^3 - 1) - \ln(e - 1) = -2 + \ln(e^2 + e + 1) \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{\log_2^3 x}{x\sqrt{1 + 3 \ln^2 x}} dx$.

Giải:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{\log_2^3 x}{x\sqrt{1 + 3 \ln^2 x}} dx = \int_1^e \frac{\left(\frac{\ln x}{\ln 2} \right)^3}{x\sqrt{1 + 3 \ln^2 x}} dx \\ &= \frac{1}{\ln^3 2} \int_1^e \frac{\ln^3 x}{\sqrt{1 + 3 \ln^2 x}} \cdot \frac{\ln x dx}{x} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{1 + 3 \ln^2 x} = t \Rightarrow \ln^2 x = \frac{1}{3}(t^2 - 1) \Rightarrow \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} t dt.$$

$$\text{Khi } x = 1 \text{ thì } t = 1$$

$$\text{Khi } x = e \text{ thì } t = 2$$

Suy ra:

$$I = \int_1^e \frac{\log_2^3 x}{x\sqrt{1 + 3 \ln^2 x}} dx = \frac{1}{\ln^3 2} \int_1^2 \frac{\frac{1}{3}(t^2 - 1)}{t} \cdot \frac{1}{3} t dt$$

$$= \frac{1}{9 \ln^3 2} \int_1^2 (t^2 - 1) dt = \frac{1}{9 \ln^3 2} \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{27 \ln^3 2}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x \sqrt{1 + \ln x}} + 3x^2 \ln x \right) dx$

Giải:

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + \ln x}} dx + 3 \int_1^e x^2 \ln x dx = I_1 + 3I_2$$

+) Tính $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + \ln x}} dx$.

Đặt $t = \sqrt{1 + \ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + \ln x; 2t dt = \frac{1}{x} dx$

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = e \Rightarrow t = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}(t^2 - 1)}{t} \cdot 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{3}$$

+) Tính $I_2 = \int_1^e x^2 \ln x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

$$I = I_1 + 3I_2 = \frac{5 - 2\sqrt{2} + 2e^3}{3}$$

Ví dụ 5: Tính $I = \int_1^e \frac{\ln(1 + \ln^2 x)}{x} dx$.

HD:

Đặt $\ln x = t$, ta có $I = \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(1 + t^2) \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2t}{1 + t^2} dt \\ v = t \end{cases}$

Từ đó có :

$$\begin{aligned} I &= t \ln(1 + t^2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2} dt \\ &= \ln 2 - 2 \left(\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} \right) (*). \end{aligned}$$

Tiếp tục đặt $t = \tan u$, ta tính được $\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}$.

Thay vào (*) ta có : $I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.