

Câu I: (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $x^2 + 8x + 7 = 0$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = -6 \\ 5x + y = 20 \end{cases}$$

Câu II: (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 4\sqrt{x} + 4} : \left(\frac{x}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x} + 2} \right)$, với $x > 0$.

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

Câu III: (2,0 điểm)

1. Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a, b để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d'): y = 2x + 3$ và đi qua điểm $A(1; -1)$.

2. Cho phương trình $x^2 - (m - 2)x - 3 = 0$ (m là tham số). Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m . Tìm m để các nghiệm đó thỏa mãn hệ thức

$$\sqrt{x_1^2 + 2018} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2018} + x_2.$$

Câu IV: (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B , I là trung điểm của đoạn thẳng OA , E là điểm thay đổi trên đường tròn (O) sao cho E không trùng với A và B . Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với đường thẳng EI cắt d_1, d_2 lần lượt tại M, N .

1. Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh $IB.NE = 3.IE.NB$.

3. Khi điểm E thay đổi, chứng minh tích $AM.BN$ có giá trị không đổi và tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MNI theo R .

Câu V: (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} \geq 30.$$

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký giám thị 1: Chữ ký giám thị 2:

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu I.1: PT $x^2 + 8x + 7 = 0$ có $a - b + c = 1 - 8 + 7 = 0$ nên có hai nghiệm $x = -1$; $x = -7$.

Câu I.2: $\begin{cases} 2x - y = -6 \\ 5x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 5x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 5x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 10 + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases}$.

Câu II.1: Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right) = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$
 $= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right) = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$

Câu II.2: Với $x > 0$ ta có $A = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$ và $\sqrt{x} > 0$; $\sqrt{x}+2 > 0$.

Khi đó $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$

Suy ra: $0 < x \leq 1$.

Câu III.1: Do $(d) \parallel (d')$ nên $\begin{cases} a = 2 \\ b \neq 3 \end{cases}$. Do (d) đi qua điểm $A(1; -1)$ nên:

$-1 = 2.1 + b \Leftrightarrow b = -3$ (thỏa mãn điều kiện $b \neq 3$).

Vậy $a = 2$, $b = -3$.

Câu III.2: Điều kiện có nghiệm: $\Delta = (m-2)^2 + 12 > 0, \forall m$

Ta có: $\sqrt{x_1^2 + 2018} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2018} + x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 2018} - \sqrt{x_2^2 + 2018} = x_2 + x_1$

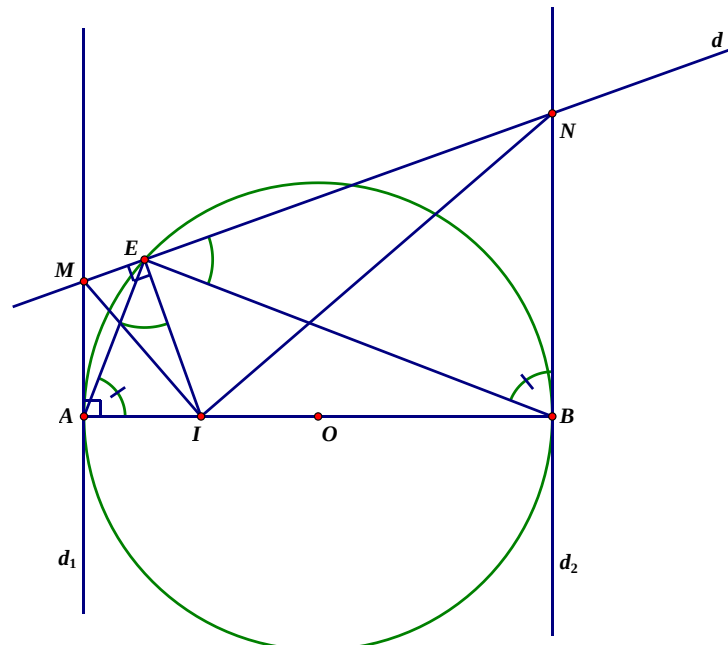
$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 2018} + \sqrt{x_2^2 + 2018}} = x_2 + x_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ \sqrt{x_1^2 + 2018} + \sqrt{x_2^2 + 2018} = x_1 - x_2 \end{cases} \quad (1)$

Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = m - 2$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Do $\sqrt{x_1^2 + 2018} > |x_1|$; $\sqrt{x_2^2 + 2018} > |x_2|$ suy ra $\sqrt{x_1^2 + 2018} + \sqrt{x_2^2 + 2018} > |x_1| + |x_2| \geq x_1 - x_2$ nên (2) không xảy ra.

Vậy $m = 2$.

Câu IV.1:



Ta có $\angle MAI = \angle MEI = 90^\circ$. Suy ra $\angle MAI + \angle MEI = 180^\circ$. Vậy $AMEI$ nội tiếp.

Câu IV.2:

Ta có $EAI = EBN$ (cùng phụ với EBA)

mà $AEI = BEN$ (cùng phụ với IEB). Suy ra $\triangle IAE \sim \triangle NBE$.

$$\Rightarrow \frac{IA}{IE} = \frac{NB}{NE} \Rightarrow IA \cdot NE = IE \cdot NB \Rightarrow \frac{IB}{3} \cdot NE = IE \cdot NB \Rightarrow IB \cdot NE = 3IE \cdot NB \text{ (đpcm)}.$$

Câu IV.3:

Do tứ giác $AMEI$ nội tiếp nên $AMI = AEI$ (1).

Tương tự ta có tứ giác $BNEI$ nên $BIN = BEN$ (2).

Theo trên ta có $AEI = BEN$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $AMI = BIN$ (4).

Do tam giác AMI và BIN vuông tại A và B , suy ra $\triangle AMI \sim \triangle BIN$.

$$\text{Suy ra: } \frac{AM}{BI} = \frac{AI}{BN} \Rightarrow AM \cdot BN = AI \cdot BI \text{ không đổi.}$$

Từ (4) ta có: $BIN + AIM = AMI + AIM = 90^\circ \Rightarrow MIN = 90^\circ$ hay $\triangle MNI$ vuông tại I . Khi đó:

$$S_{\triangle MNI} = \frac{1}{2} IM \cdot IN = \frac{1}{2} \sqrt{AM^2 + AI^2} \cdot \sqrt{BN^2 + BI^2} \\ \geq \frac{1}{2} \sqrt{2AM \cdot AI} \cdot \sqrt{2BN \cdot BI} = \sqrt{AM \cdot BN \cdot AI \cdot BI} = AI \cdot BI = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $AM = AI, BN = BI$. Vậy $S_{\triangle MNI}$ đạt GTNN bằng $\frac{3R^2}{4}$

Câu V.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} > 0 \\ ab + bc + ca \geq 3\sqrt{(abc)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow ab + bc + ca \geq 9abc > 0 \Rightarrow \frac{1}{abc} \geq \frac{9}{ab + bc + ca}$$

Khi đó:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca} = \\ = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{7}{ab + bc + ca} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$ với mọi $x, y, z > 0$ ta được

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} \\ = \frac{9}{(a + b + c)^2} = 9 \quad (2)$$

$$\text{Lại có } 1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca) \quad (3)$$

$$\text{Thay (2), (3) vào (1) ta được } \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} \geq 9 + 7 \cdot 3 = 30.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

----- Hết -----