

Câu 1: (1,0 điểm). Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $A = \sqrt{16 + 9} - 2$;
b) $B = \sqrt{\sqrt{3} - 1}^2 + 1$.

Câu 2: (1,5 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-6}{x+3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{2\sqrt{x}-6}{x+1}$ với $x > 0; x \neq 9$.

- a) Rút gọn biểu thức P;
b) Tìm giá trị của x để $P = 1$.

Câu 3: (2,5 điểm).

1) Cho đường thẳng $d : y = -\frac{1}{2}x + 2$

a) Tìm m để đường thẳng $\Delta : y = m - 1x + 1$ song song với đường thẳng d .

b) Gọi A, B là giao điểm của d với parabol $P : y = \frac{1}{4}x^2$. Tìm điểm N nằm trên trục hoành sao cho $NA + NB$ nhỏ nhất.

2) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + ay = 3a \\ -ax + y = 2 - a^2 \end{cases}$ I với a là tham số.

a) Giải hệ phương trình I khi $a = 1$;

b) Tìm a để hệ phương trình I có nghiệm duy nhất $x; y$ thỏa mãn $\frac{2y}{x^2 + 3}$ là số nguyên.

Câu 4: (2,0 điểm). Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ (*) với m là tham số.

a) Giải phương trình (*) khi $m = 0$;

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2 + 12 = 2x_2 - x_1x_2.$$

Câu 5: (3,0 điểm). Cho O đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C . Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM (K khác B, M), H là giao điểm của AK và MN .

a) Chứng minh rằng $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AH \cdot AK = AM^2$

c) Xác định vị trí của điểm K để $KM + KN + KB$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

----- **Hết** -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Ghi chú:

- Thí sinh không sử dụng tài liệu.
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

I. Hướng dẫn chấm:

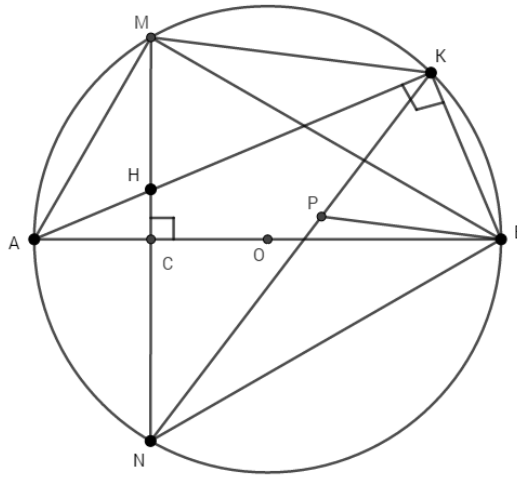
1. Cho điểm lẻ tới 0,25;
2. Điểm toàn bài là tổng điểm thành phần, không làm tròn;
3. Chỉ cho điểm tối đa khi bài làm của thí sinh chính xác về mặt kiến thức;
4. Thí sinh giải đúng bằng cách khác cho điểm tương ứng ở các phần.
5. Nếu thí sinh vẽ sai hình thì không cho điểm câu hình học.
6. Thí sinh chỉ viết qui trình bấm phím máy tính câu nào thì không cho điểm câu đó.

II. Biểu điểm

Câu	Nội dung	Điểm
1 (1,0 điểm)	a. (0,5 điểm) Tính giá trị của các biểu thức sau: $A = \sqrt{16+9} - 2$	
	$A = \sqrt{16+9} - 2 = \sqrt{25} - 2$	0,25
	$= 5 - 2 = 3$	0,25
	b. (0,5 điểm) $B = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + 1$	
	$B = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + 1 = \sqrt{3}-1 + 1$	0,25
	$= \sqrt{3} - 1 + 1 = \sqrt{3}$	0,25
2 (1,5 điểm)	a. (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x-6}{x+3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{2\sqrt{x}-6}{x+1}$	
	Với điều kiện $x > 0; x \neq 9$, ta có :	
	$P = \left(\frac{x-6}{x+3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{2\sqrt{x}-6}{x+1} = \left(\frac{x-6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{x+1}{2(\sqrt{x}-3)}$	0,25
	$= \frac{x-6-\sqrt{x}-3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{x+1}{2(\sqrt{x}-3)}$	0,25
	$= \frac{x-9}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{x+1}{2(\sqrt{x}-3)}$	0,25
	$= \frac{(x-9)(x+1)}{2\sqrt{x}(x-9)} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$	0,25
	b. (0,5 điểm) Tìm giá trị của x để $P = 1$.	
	Ta có: $P = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x+1 = 2\sqrt{x}$	0,25
	$\Leftrightarrow x+1-2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$	
	Kết hợp với điều kiện ta thấy $x = 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.	0,25
3 (2,5 điểm)	1. (1,0 điểm) Cho đường thẳng $(d): y = -\frac{1}{2}x + 2$	
	Tìm m để đường thẳng $(\Delta): y = (m-1)x + 1$ song song với đường thẳng (d)	
	1.a) (0,5 điểm)	

	Đường thẳng song song với đường thẳng (d) khi và chỉ khi: $\begin{cases} m-1 = -\frac{1}{2} \\ 1 \neq 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ Vậy, với $m = \frac{1}{2}$, hai đường thẳng $(\Delta), (d)$ song song với nhau.	0.25 0.25
	1.b) (0,5 điểm) Gọi A,B là giao điểm của (d) với Parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$. Tìm điểm N nằm trên trục hoành sao cho $NA + NB$ nhỏ nhất. Phương trình hoành độ điểm chung của (P) và (d): $\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$ Do đó: $A(-4;4), B(2;1)$. Lấy $B'(2;-1)$ đối xứng với B qua trục hoành. Ta có: $NB = NB'$, khi đó: $NA + NB = NA + NB' \geq AB'$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A,N,B thẳng hàng. Điểm N cần tìm chính là giao điểm của AB' và trục Ox.	0.25
	Phương trình AB' có dạng $y = mx + n$. Do hai điểm A,B' thỏa mãn phương trình đường thẳng nên phương trình AB': $y = -\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}$. Từ đó tọa độ giao điểm của AB' và Ox là $N\left(\frac{4}{5}; 0\right)$	0,25
	2.a) (1,0 điểm) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + ay = 3a \\ -ax + y = 2 - a^2 \end{cases}$ (I) với a là tham số. Giải hệ phương trình (I) khi $a = 1$;	
	Khi $a = 1$, hệ (I) có dạng $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y = 2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$.	0,25
	2.b) (0,5 điểm) Tìm a để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất thỏa mãn $\frac{2y}{x^2 + 3}$ là số nguyên.	
	$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay = 3a \\ -ax + y = 2 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2 \end{cases}$ Hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = a \\ y = 2 \end{cases}$ với mọi a.	0,25

	Khi đó: $\frac{2y}{x^2+3} = \frac{4}{a^2+3}$. Do $x^2+3 \geq 3$ với mọi x nên: $\frac{4}{a^2+3}$ là số nguyên khi và chỉ khi $a^2+3=4 \Leftrightarrow a=\pm 1$.	0,25
4 (2,0 điểm)	a.(1,0 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ (1) với m là tham số. Giải phương trình (1) khi $m = 0$;	
	Khi $m = 0$, (1) có dạng $x^2 - 2x - 3 = 0$	0,25
	$\Delta = 16 > 0$. Khi đó (1) có 2 nghiệm phân biệt là	0,25
	$x_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3;$ $x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1$	0,5
	b.(1,0 điểm) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + 12 = 2x_2 - x_1x_2$.	
	Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$	0,25
	Với điều kiện trên, giả sử phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , theo định lý Vi-étta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (2) \\ x_1x_2 = m - 3 & (3) \end{cases}$	0,25
	$x_1^2 + 12 = 2x_2 - x_1x_2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2 + 12 = 0$ Áp dụng tính được: $\Leftrightarrow x_1(x_1 + x_2) - 2x_2 + 12 = 0 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2) = -12$ $\Leftrightarrow x_1 - x_2 = -6$	0,25
	Kết hợp với (2),(3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = m - 3 \\ x_1 - x_2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \\ m = -5 \end{cases}$	0,25
	Kết hợp với điều kiện ta thấy $m = -5$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.	
5 (3,0 điểm)	Cho O đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C . Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM (K khác B, M), H là giao điểm của AK và MN . a) Chứng minh rằng $BCHK$ là tứ giác nội tiếp. b) Chứng minh $AH.AK = AM^2$ c) Xác định vị trí của điểm K để $KM + KN + KB$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.	



a) (1,0 điểm) Chứng minh rằng $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $BKH = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$$HCB = 90^0 \text{ (giả thiết)}$$

Tứ giác $BCHK$ có $BKH + HCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ và hai góc này ở vị trí đối nhau.

Vậy $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

b.(1,0điểm) Chứng minh $AH.AK = AM^2$

Ta có $AB \perp MN \Rightarrow AM = AN$ (tính chất đường kính vuông góc với dây cung) (1)

Xét (O) có : $AMN = \frac{1}{2} \text{ sđ } AN$ (góc có đỉnh nằm trên đường tròn) (2)

$$AKM = \frac{1}{2} \text{ sđ } AM \text{ (góc có đỉnh nằm trên đường tròn) } (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $AMN = AKM$ hay $AMH = AKM$

Xét ΔAHM và ΔAMK có

$$AMH = AKM \text{ (chứng minh trên)}$$

A chung

$$\Rightarrow \Delta AHM \sim \Delta AMK \text{ (g-g)}$$
$$\Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AK}$$
$$\Rightarrow AH.AK = AM^2$$

c) (1,0 điểm) Xác định vị trí của điểm K để $KM + KN + KB$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Ta có : $AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$$\Rightarrow \Delta AMB \text{ vuông tại M có đường cao MC ; } AC = \frac{R}{2}; BC = \frac{3R}{4}, AB = 2R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MC^2 = AC \cdot CB = \frac{3R^2}{4} \\ MB^2 = BA \cdot BC = 3R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MC = \frac{R\sqrt{3}}{2} \\ MB = R\sqrt{3} \end{cases}$$

$$MN = 2MC = R\sqrt{3} \Rightarrow MN = MB = R\sqrt{3} \quad (1)$$

Mặt khác: AB là đường trung trực của MN (tính chất đường kính vuông góc dây cung)

$$\Rightarrow BM = BN \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác BMN đều

	Trên đoạn KN lấy điểm P sao cho $KP = KB$ suy ra tam giác KBP cân tại K. $\angle PKB = \angle MNB = 60^0 \Rightarrow$ tam giác KBP đều $\Rightarrow BP = BK$	0,25
	Ta có : $\angle NBP = \angle KBM (= \angle NBK - 60^0)$ Dễ dàng chứng minh được: $\triangle BPN = \triangle BKM$ c.g.c $\Rightarrow NP = MK$ $\Rightarrow KM + KN + KB = 2KN$	0,25
	Do đó $KM + KN + KB$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ KN lớn nhất $\Leftrightarrow$ KN là đường kính của (O) $\Leftrightarrow$ K là điểm chính giữa của cung MB. Khi đó $KM + KN + KB$ đạt giá trị lớn nhất bằng 4R. Chú ý: <i>Nếu thí sinh giải bài toán bằng cách áp dụng định lý Ptoleme vào tứ giác BKMN để có: $KM.BN + KB.MN = KN.BM$ (mà không chứng minh định lý) thì cho 0,5 điểm toàn bài.</i>	0,25