

VẤN ĐỀ 1. TẬP XÁC ĐỊNH-TẬP GIÁ TRỊ

Câu 1. Tìm tất cả giá trị của tham số a để tập giá trị của hàm số $y = \frac{x+a}{x^2+1}$ chứa đoạn $[0;1]$.

- A.** $a \in \mathbb{R}$. **B.** $a \geq 2$. **C.** $a \geq \frac{3}{4}$. **D.** $a < 2$.

Lời giải

Chọn C

$$y = \frac{x+a}{x^2+1} \Leftrightarrow yx^2 - x + y - a = 0.$$

Tập giá trị của hàm số chứa đoạn $[0;1] \Leftrightarrow$ với mọi $y \in [0;1]$ thì phương trình trên luôn có nghiệm.

Với $y = 0$ ta có phương trình $x + a = 0 \Leftrightarrow x = -a$. Do đó phương trình luôn có nghiệm.

$$\text{Với } 0 < y \leq 1 \text{ thì phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow 1 - 4y(y-a) \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 1 \leq 4ay \Leftrightarrow \frac{4y^2 - 1}{4y} \leq a.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $\text{Max}_{(0;1]} \frac{4y^2 - 1}{4y} \leq a$.

$$\text{Ta có } \frac{4y^2 - 1}{4y} = y - \frac{1}{4y} = (y-1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4y}\right) + \frac{3}{4} = (y-1)\left(1 + \frac{1}{4y}\right) + \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4} \forall y \in (0;1].$$

$$\text{Kết luận } a \geq \frac{3}{4}.$$

Câu 2. Hàm số $y = \sqrt{9-3|x|} + \frac{x}{\sqrt{9x^2-1}}$ có tập xác định D_1 , hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x|x|+4}$ có tập xác định D_2 .

Khi đó số phần tử của tập $A = \mathbb{Z} \cap (D_1 \cap D_2)$ là:

- A.** 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sqrt{9-3|x|} + \frac{x}{\sqrt{9x^2-1}}$ xác định khi:

$$\begin{cases} 9-3|x| \geq 0 \\ 9x^2-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < x \leq 3 \\ -3 \leq x < -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow D_1 = \left[-3; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$$

Hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x|x|+4}$ xác định khi:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x|x|+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < x \leq 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

$$\Rightarrow D_2 = (-2; +\infty)$$

$$\Rightarrow A = \mathbb{Z} \cap (D_1 \cap D_2) = \{-1; 1; 2; 3\}$$

Vậy tập hợp A gồm 4 phần tử.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+2m-1} + \sqrt{4-2m-\frac{x}{2}}$ xác định với mọi $x \in [0;2]$ khi $m \in [a;b]$.

Giá trị $a+b = ?$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x) = \sqrt{x+2m-1} + \sqrt{4-2m-\frac{x}{2}}$ xác định khi:

$$\begin{cases} x \geq 1-2m \\ x \leq 8-4m \end{cases}$$

Hàm số xác định trên $[0; 2]$ nên

$$1-2m \leq 0 \leq 2 \leq 8-4m \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} \Rightarrow m \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right] \Rightarrow a+b=2$$

Câu 4. Cho $(P_m): y = x^2 - 2mx + m^2 + m$. Biết rằng (P_m) luôn cắt đường phân giác góc phần tư thứ nhất tại hai điểm A, B . Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B lên Ox , A_2, B_2 lần lượt là hình chiếu của A, B lên Oy . Có bao nhiêu giá trị của m khác 0, -1 để tam giác OB_1B_2 có diện tích gấp 4 lần diện tích tam giác OA_1A_2

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 2mx + m^2 + m = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}$$

***TH1:**

$$A(m; m) \Rightarrow A_1(m; 0); A_2(0; m)$$

$$B(m+1; m+1) \Rightarrow B_1(m+1; 0); B_2(0; m+1)$$

$$\text{Khi đó } S_{OB_1B_2} = 4S_{OA_1A_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m+1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{-1}{3} \end{cases}$$

***TH2:**

$$B(m; m) \Rightarrow B_1(m; 0); B_2(0; m)$$

$$A(m+1; m+1) \Rightarrow A_1(m+1; 0); A_2(0; m+1)$$

$$\text{Khi đó } S_{OB_1B_2} = 4S_{OA_1A_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}(m+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=\frac{-2}{3} \end{cases}$$

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$

$$y = \frac{2018x + 2019}{\sqrt{(m-1)x^2 + 2(m-1)x + 4}}$$

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Lời giải

Chọn C

Hàm số có TXĐ là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f(x) = (m-1)x^2 + 2(m-1)x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Với $m=1$, ta có $f(x) = 4 > 0$, mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Do đó $m=1$ thỏa mãn

$$\text{Với } m \neq 1, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m-1)^2 - 4(m-1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m-1)(m-5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 1 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 5$$

Vậy có 4 số nguyên $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ thỏa mãn hàm số có TXĐ là $\mathbb{R}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \sqrt{m+1}x + 2m+3$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-3; -1]$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

+ Hàm số xác định trên $[-3; -1]$ khi và chỉ khi $f(x) = \sqrt{m+1}x + 2m+3 \geq 0, \forall x \in [-3; -1]$.

+ Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; -1]$ là đoạn thẳng AB với

$A(-3; -m)$, $B(-1; m+2)$. Do đó $f(x) \geq 0, \forall x \in [-3; -1]$ khi và chỉ khi đoạn AB không có

điểm nào nằm phía dưới trục hoành $\Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq 0 \\ m+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m là $m \in [-2; -1; 0]$.

Câu 7. Tìm m để các hàm số $y = \sqrt{x-m} + \sqrt{2x-m-1}$ xác định với mọi x thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \leq -1$.

B. $-2 \leq m \leq 2$.

C. $m \leq 0$.

D. $m \leq 1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-m \geq 0 \\ 2x-m-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \geq \frac{m+1}{2} \end{cases} (*)$

• Nếu $m \geq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \geq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \geq m$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = [m; +\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0; +\infty) \subset [m; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 0$: không thỏa mãn $m \geq 1$.

• Nếu $m \leq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \leq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \geq \frac{m+1}{2}$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = \left[\frac{m+1}{2}; +\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0; +\infty) \subset \left[\frac{m+1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$: thỏa mãn điều kiện $m \leq 1$.

Vậy $m \leq -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)} + \frac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$.

A. $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

B. $m \in [-3; 0]$.

C. $m \in [-3; 0] \cup [0; 1]$.

D. $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

*Gọi D là tập xác định của hàm số $y = \frac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)} + \frac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$.

$$* x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x-2m+3 \geq 0 \\ x-m \neq 0 \\ -x+m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m-3 \\ x \neq m \\ x < m+5 \end{cases}.$$

$$* \text{Hàm số } y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}} \text{ xác định trên khoảng } (0;1)$$

$$\Leftrightarrow (0;1) \subset D \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 0 \\ m+5 \geq 1 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq -4 \\ \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-4;0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{16-x^2} + \sqrt{2017x+2018m}$ (m là tham số). Để tập xác định của hàm số chỉ có đúng một phần tử thì $m = \frac{a}{b}$ $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.

A. -3025.

B. 3025.

C. 5043.

D. -5043.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện xác định của hàm số là } \begin{cases} 16-x^2 \geq 0 \\ 2017x+2018m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x \geq -\frac{2018m}{2017} \end{cases}$$

Tập xác định của hàm số chỉ có đúng một phần tử $\Leftrightarrow -4; 4 \cap \left[-\frac{2018m}{2017}; +\infty\right)$ chỉ có đúng

$$\text{một phần tử} \Leftrightarrow \frac{-2018m}{2017} = 4 \Leftrightarrow m = \frac{-4034}{1009}$$

Nên $a+b = -3025$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \sqrt{1-|2x^2+mx+m+15|}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số xác định trên đoạn $[1;3]$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định trên đoạn $[1;3]$ khi

$$1-|2x^2+mx+m+15| \geq 0, \forall x \in [1;3] \Leftrightarrow |2x^2+mx+m+15| \leq 1, \forall x \in [1;3] \quad (1)$$

Bài toán được chuyển về việc tìm m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1;3]$.

Điều kiện cần: Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [1;3]$

$\Rightarrow$ Nghiệm đúng với $x=1, x=2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2m+17| \leq 1 \\ |3m+23| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 2m+17 \leq 1 \\ -1 \leq 3m+23 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq m \leq -8 \\ -8 \leq m \leq -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8.$$

Vậy với $m = -8$ là điều kiện cần để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1;3]$.

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow |2x^2-8x+7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^2-8x+7 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-8x+8 \geq 0 \\ 2x^2-8x+6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x^2-4x+3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

Vậy, với $m = -8$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu 11. Tìm m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4m+3}}{x-2m} + \frac{3x-1}{\sqrt{5+2m-x}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

- A.** $\begin{cases} -2 \leq m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{4} \end{cases}$. **B.** $-2 \leq m \leq 0$. **C.** $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{4}$. **D.** $\begin{cases} -2 < m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m < \frac{3}{4} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi D là tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4m+3}}{x-2m} + \frac{3x-1}{\sqrt{5+2m-x}}$.

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x-4m+3 \geq 0 \\ x-2m \neq 0 \\ 5+2m-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4m-3 \\ x \neq 2m \\ x < 2m+5 \end{cases}.$$

Hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4m+3}}{x-2m} + \frac{3x-1}{\sqrt{5+2m-x}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow (0;1) \subset D \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-3 \leq 0 \\ 2m \notin (0;1) \\ 2m+5 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{4} \\ m \leq 0 \text{ hay } m \geq \frac{1}{2} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x+m} - \frac{1}{2x-m+1}$ xác định trên $(1;2) \cup [4;+\infty)$?

- A.** 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

$$\square \text{Điều kiện xác định của hàm số là: } \begin{cases} x+m \geq 0 \\ 2x-m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ x \neq \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 1 \\ \frac{m-1}{2} \leq 1 \\ 2 \leq \frac{m-1}{2} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 3 \\ 5 \leq m < 9 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-1;3] \cup [5;9)$$

mà m là các số nguyên dương $\Rightarrow m \in \{0;1;2;3;5;6;7;8\}$.

Câu 13. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \sqrt{-m^2x^2 + 2|m|x+3}$ xác định trên khoảng $(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$. Khi đó số các phần tử của S là.

- A.** 0 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 9

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$-m^2x^2 + 2|m|x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -(|m|x - 1)^2 + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |(|m|x - 1)| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq (|m|x - 1) \leq 2$$

$$-1 \leq |m|x \leq 3$$

Nhấy thấy nếu $m = 0$ thì luôn thỏa mãn.

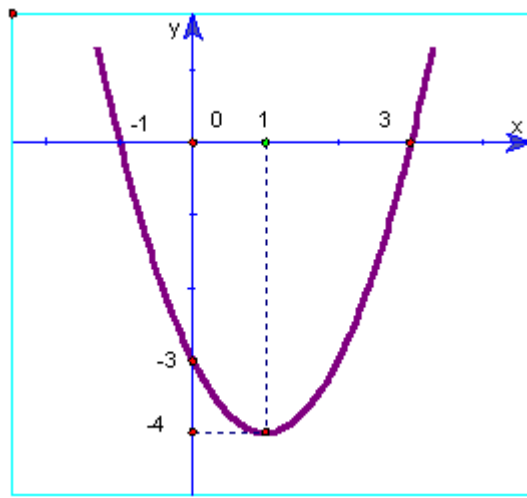
Nếu $m \neq 0$, ta có $-\frac{1}{|m|} \leq x \leq \frac{3}{|m|}$.

Để hàm số xác định trên $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}) \Leftrightarrow (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}) \subset [-\frac{1}{|m|}; \frac{3}{|m|}]$. Ta có $\frac{-1}{|m|} < 0, \forall m \neq 0$ nên

$$\frac{2}{3} \leq \frac{3}{|m|} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq \frac{9}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}. \text{ Do đó số phần tử của S là 8.}$$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị nguyên lớn nhất của m để hàm số

$$y = \frac{1}{\sqrt{f(x) - 2m + 2}} \text{ có TXĐ là } \mathbb{R}.$$



A. $m = -2$.

B. $m = -1$.

C. $m = -4$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn A

+) Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{f(x) - 2m + 2}}$ xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$f(x) - 2m + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow 2m - 2 < \min_{\mathbb{R}} f(x)$$

Từ đồ thị hàm số ta có $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -4$

$$\Rightarrow 2m - 2 < -4 \Rightarrow m < -1$$

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của m là: $m = -2$.

Câu 15. Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để hàm số $y = \sqrt{x - m} + \sqrt{2x - m - 1}$ xác định $\forall x \in (0; +\infty)$.

A. 4038.

B. 2018.

C. 2019.

D. 2020.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x \geq m \\ x \geq \frac{m+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [m; +\infty) \cap \left[\frac{m+1}{2}; +\infty \right)$$

$$\text{Hàm số xác định } \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{m+1}{2} \\ \frac{m+1}{2} \leq 0 \\ \frac{m+1}{2} \leq m \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$$

Vậy có 2018 giá trị nguyên của m cần tìm.

- Câu 16.** Cho hàm số $y = \frac{2mx+4}{\sqrt{x^2+2mx+2018m+2019}} + \sqrt{mx^2+2mx+2020}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử?
A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} x^2 + 2mx + 2018m + 2019 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ mx^2 + 2mx + 2020 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

+) Nếu $m=0$ ta thấy $y = \frac{4}{\sqrt{x^2+2019}} + \sqrt{2020}$ luôn xác định trên $\mathbb{R}$

Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài (1)

+) Nếu $m \neq 0$ để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} m^2 - 2018m - 2019 < 0 \\ m > 0 \\ m^2 - 2020m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2019 \\ m > 0 \\ 0 \leq m \leq 2020 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < m < 2019$ (2)

Kết hợp (1)(2) ta được $0 \leq m < 2019$ thỏa mãn

Vậy ta có 2019 số nguyên m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

- Câu 17.** Cho hàm số $y = \sqrt{x^4 - x^2 + 1 + mx\sqrt{2x^4 + 2}}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có tập xác định là tập số thực $\mathbb{R}$.
A. $m \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. **B.** $m \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$. **C.** $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. **D.** $m \in [-1; 1]$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 1 + mx\sqrt{2x^4 + 2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^4+1}\right)^2 + 2m\left(\sqrt{2x}\right)\sqrt{x^4+1} - \left(\sqrt{2x}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2m \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^4+1}} - \left(\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^4+1}}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^4+1}}\right)^2 - 2m \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^4+1}} - 2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Đặt $t = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^4+1}}$ thì $|t| = \frac{|\sqrt{2x}|}{\sqrt{x^4+1}} = \sqrt{\frac{2x^2}{x^4+1}} \leq 1$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 1$.

(1) trở thành $t^2 - 2mt - 2 \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$ (2)

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2mt - 2$. Đây là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 \leq 0 \\ 2m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}}.$$

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số

$$y = \sqrt{x-m+2} - \frac{x}{\sqrt{-x+1-2m}} \text{ xác định trên } [0; 1).$$

A. 2018.

B. 2019.

C. 4036.

D. 4037.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x \geq m-2 \\ x < 1-2m \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1-2m) \cap [m-2; +\infty)$$

$$\text{Hàm số xác định trên } [0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 < 1-2m \\ m-2 \leq 0 \\ 1-2m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \leq 2 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Vậy có 2019 giá trị m nguyên thỏa YCBT.

Câu 19. Tìm số giá trị nguyên của tham số k để hàm số $y = \sqrt{2x-3k+4} + \frac{x-k}{x+k-1}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x-3k+4 \geq 0 \\ x+k-1 \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Hàm số xác định trên khoảng } (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -k+1 \leq 0 \\ \frac{3k-4}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \left[1; \frac{4}{3}\right].$$

VẤN ĐỀ 2 SỰ BIẾN THIÊN, TÍNH CHẴN, LẼ, TUẦN HOÀN

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 1 - m$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$?

A. 3

B. 5

C. 8

D. Vô số

Lời giải

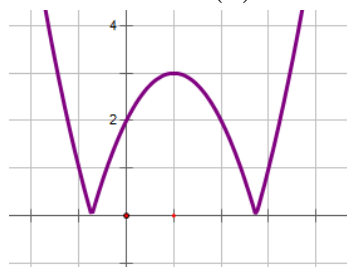
$$\text{Xét } f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 1 - m, \Delta' = m^2 + 3m$$

$$\text{TH1: } \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-3; 0]$$

$$y = |f(x)| = f(x), \text{ khi đó hàm số đồng biến trên khoảng } (m+1; +\infty)$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên khoảng } (-1; 1) \text{ khi } m+1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq -2 \Rightarrow m \in [-3; -2]$$

$$\text{TH2: } \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty). \text{ Khi đó } f(x) \text{ có 2 nghiệm } x_1; x_2 \text{ } (x_1 < x_2)$$



Để hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$ ta có

$$+) x_1 \leq -1 < 1 \leq m+1 \Rightarrow m \geq 0$$

$$x_1 \leq -1 \Leftrightarrow m+1-\sqrt{m^2+3m} \leq -1 \Leftrightarrow m+2 \leq \sqrt{m^2+3m} \Leftrightarrow m \leq -4 \Rightarrow m \in \emptyset$$

$$+) x_2 \leq -1 \Leftrightarrow m+1+\sqrt{m^2+3m} \leq -1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+3m} \leq -m-2 \quad (\Rightarrow m < -3) \\ \Leftrightarrow m \geq -4 \Rightarrow m \in [-4; -3)$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m .

Chọn A

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m+1$, với m là tham số thực.

Có bao nhiêu số tự nhiên $m < 2018$ để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(2; 4)$?

A. 2016.

B. 2018.

C. 2015.

D. 2017.

Lời giải

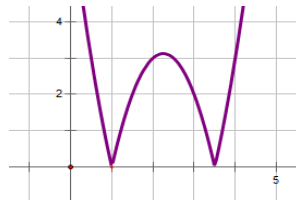
Xét $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m+1$, $\Delta' = m^2 \geq 0, \forall m$

TH1: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0$

$y = |f(x)| = f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Rightarrow$ thỏa mãn.

TH2: $m \neq 0 \Rightarrow m > 0$. Khi đó $f(x)$ có 2 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2m+1$ ($x_1 < x_2$)

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên các khoảng $(1; m+1)$ và $(2m+1; +\infty)$



Để hàm số đồng biến trên $(2; 4)$ ta có

$$+) 1 \leq 2 < 4 \leq m+1 \Rightarrow m \geq 3$$

$$+) 2m+1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$$

Vậy có 2016 giá trị nguyên của m .

Chọn A

Câu 22. Tịnh tiến đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ sang phải bao nhiêu đơn vị để được đồ thị của hàm số lẻ trên tập xác định của nó?

A. -2.

B. 2.

C. 4.

D. -4.

Lời giải

Chọn B

Tịnh tiến (C): $y = f(x) = x + 2 + \frac{1}{x+2}$ sang phải a đơn vị ($a > 0$) được đồ thị (G) có phương

$$\text{trình là: } y = g(x) = f(x-a) = x - (a-2) + \frac{1}{x - (a-2)}$$

Hàm $y = g(x)$ là hàm số lẻ $\Rightarrow$ tập xác định của nó là tập đối xứng

$$\Rightarrow a-2=0 \Leftrightarrow a=2$$

Thử lại, $a=2$ ta được $y = g(x) = x + \frac{1}{x}$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đáp án : B_ tịnh tiến (C) sang phải 2 đơn vị.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{x^2(x^2-2) + (2m^2-2)x}{\sqrt{x^2+1}-m}$ là hàm số chẵn.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

ĐKXĐ: $\sqrt{x^2+1} \neq m$ (*)

Giả sử hàm số chẵn suy ra $f(-x) = f(x)$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$$\text{Ta có } f(-x) = \frac{x^2(x^2-2) - (2m^2-2)x}{\sqrt{x^2+1}-m}$$

Suy ra $f(-x) = f(x)$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x^2-2) - (2m^2-2)x}{\sqrt{x^2+1}-m} = \frac{x^2(x^2-2) + (2m^2-2)x}{\sqrt{x^2+1}-m} \text{ với mọi } x \text{ thỏa mãn điều kiện (*)}$$

$$\Leftrightarrow 2(2m^2-2)x = 0 \text{ với mọi } x \text{ thỏa mãn điều kiện (*)}$$

$$\Leftrightarrow 2m^2-2=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$$

$$\text{* Với } m=1 \text{ ta có hàm số là } f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

ĐKXĐ: $\sqrt{x^2+1} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

Suy ra TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dễ thấy với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ta có $-x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(-x) = f(x)$

Do đó $f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2+1}-1}$ là hàm số chẵn

$$\text{* Với } m=-1 \text{ ta có hàm số là } f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Dễ thấy với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = f(x)$

Do đó $f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2+1}+1}$ là hàm số chẵn.

Vậy $m=\pm 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x) = mx^2 + 2(m-6)x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. vô số.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(x) = mx^2 + 2(m-6)x + 2$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Khi $m=0 \Rightarrow y = f(x) = -12x + 2 \Rightarrow$ hàm $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Khi $m \neq 0$, ta có $y = f(x)$ là hàm số bậc hai nên có đồ thị là Parabol.

Lúc đó, hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{-2(m-6)}{2m} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 2.$$

Vậy $0 \leq m \leq 2$ nên có 3 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x) = |x+1| - |x+m|$ là hàm lẻ?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Hàm số là lẻ $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Xét với $x=0$, suy ra: $f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$

Suy ra: $f(0) = |0+1| - |m+0| = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Thử lại:

Với $m=1 \rightarrow$ hàm số: $y = f(x) = |x+1| - |x+1| = 0$ thỏa mãn hàm lẻ.

Với $m=-1 \rightarrow$ hàm số: $y = f(x) = |x+1| - |x-1|$. Dễ dàng kiểm tra được thỏa mãn hàm lẻ.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án

C.

Câu 26. Biết rằng hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Đặt $A = \left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3 + 2\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)$ và

$B = \frac{8}{(x^2+1)^3} + \frac{4}{x^2+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $A > B$.

B. $A \geq B$.

C. $A < B$.

D. $A \leq B$.

Lời giải

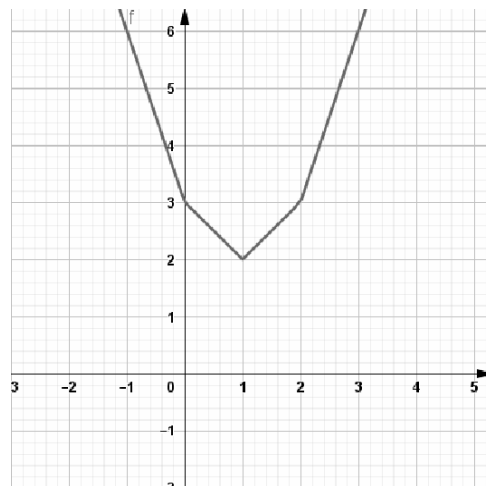
Chọn A

Ta có: $\frac{x^2+3}{x^2+1} = 1 + \frac{2}{x^2+1} > \frac{2}{x^2+1}$.

Vì hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$f\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right) > f\left(\frac{2}{x^2+1}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3 + 2\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right) > \frac{8}{(x^2+1)^3} + \frac{4}{x^2+1} \Rightarrow A > B.$$

Câu 27. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$.

C. $f(2) + f(5) = 15$.

D. $f(10) < 26$.

Lời giải

Chọn D

Nhìn hình ta thấy đáp án A và B đều đúng.

Với $x \geq 2$ đồ thị hàm số là một đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $(2; 3)$ và $(3; 6)$

Dễ dàng tìm được phương trình đường thẳng đó có phương trình là $y = 3x - 3$

$\Rightarrow f(2) + f(5) = 3 + 15 - 3 = 15 \Rightarrow$ đáp án C đúng.

$\Rightarrow f(10) = 3 \cdot 10 - 3 = 27 \Rightarrow$ đáp án D sai.

Câu 28. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^4 + (m^2 - 4)x^3 + (m + 2)x + 1$ là hàm số chẵn?

A. $m = -2$.

B. $m = 0$.

C. $m = 2$.

D. $m = 2, m = -2$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có hàm số là chẵn nếu:

$$y(-x) = y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^4 + (m^2 - 4)x^3 + (m + 2)x + 1 = x^4 - (m^2 - 4)x^3 - (m + 2)x + 1$$
$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + x - 1$ có đồ thị là (C) , biết rằng khi tịnh tiến liên tiếp (C) song song với trục Ox một khoảng có độ dài là $|a|$ rồi tiếp tục tịnh tiến song song với trục Oy một khoảng có độ dài là $|b|$ ta được đồ thị của hàm số $g(x) = 2x^2 - 3x + 3$. Khi đó ta có tổng của $a + b$ bằng:

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có: $g(x) = f(x + a) + b \Leftrightarrow 2(x + a)^2 + (x + a) - 1 + b = 2x^2 - 3x + 3$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (4a + 1)x + 2a^2 + a + b - 1 = 2x^2 - 3x + 3$$

Bằng việc đồng nhất hệ số ta suy ra:

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ 4a + 1 = -3 \\ 2a^2 + a + b - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{m\sqrt{2+x} + (m^2 - 2)\sqrt{2-x}}{(m^2 - 1)x}$ có đồ thị là (C_m) (m là tham số).

Số giá trị của m để (C_m) nhận trục Oy làm trục đối xứng là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện cần: $m \neq \pm 1$. Hàm số có tập xác định là: $D = [-2; 2] \setminus \{0\}$

. $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ là hàm chẵn.

$$\Leftrightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{m\sqrt{2+x} + (m^2 - 2)\sqrt{2-x}}{(m^2 - 1)x} = \frac{m\sqrt{2-x} + (m^2 - 2)\sqrt{2+x}}{(m^2 - 1)(-x)}, (m \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow -m\sqrt{2+x} - (m^2 - 2)\sqrt{2-x} = m\sqrt{2-x} + (m^2 - 2)\sqrt{2+x}$$

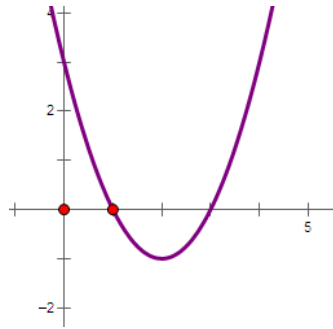
$$\Leftrightarrow (m^2 + m - 2)(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}) = 0, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(L) \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

VẤN ĐỀ 3 ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $ax^2 + b|x| + c = m + 1$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét:

Quan sát đồ thị yếu tố cắt trục hoành và trục tung và dạng đồ thị suy ra hàm số

$$y = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$$

Do đó ta có hướng giải bài toán.

Phương trình có dạng $x^2 - 4|x| + 3 = m + 1$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$.

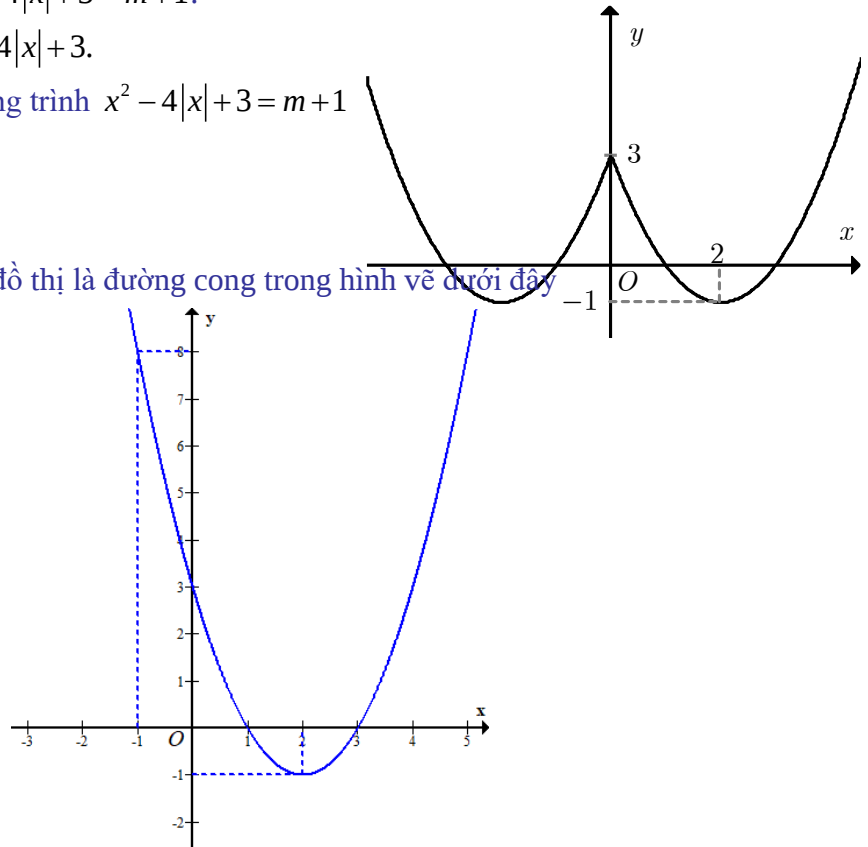
Dựa vào đồ thị ta có phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m + 1$

có bốn nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < m + 1 < 3$$

$$\Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(f(|x|+1)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2; 2]$. Số phần tử của S là

A. 7.

B. 8.

C. 3.

D. 4.

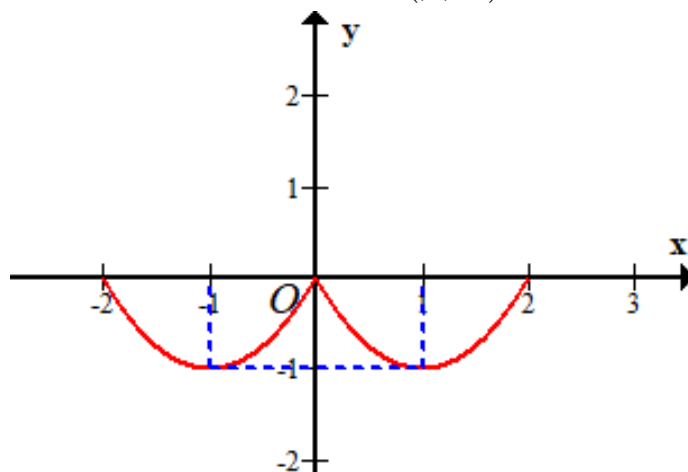
Lời giải

Chọn D

Gọi (P) là đồ thị hàm số $y = f(x)$

Vẽ đồ thị (P_1) của đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ bằng cách: Tịnh tiến đồ thị (P) của hàm số $y = f(x)$ theo phương của trục hoành sang trái 1 đơn vị.

Vẽ đồ thị (P_2) của hàm số $y = f(|x|+1)$ bằng cách: Giữ nguyên đồ thị (P_1) nằm bên phải trục tung rồi lấy đối xứng phần đó chính phần đồ thị đó qua trục tung, ta được đồ thị (P_2) của hàm số $y = f(|x|+1)$. Do đó, ta có đồ thị hàm số $y = f(|x|+1)$



Đặt $t = f(|x|+1)$, với $x \in [-2; 2] \Rightarrow t \in [-1; 0]$.

Ta có phương trình $f(t) = m(1)$.

Nếu $t = 0$ cho ta ba nghiệm phân biệt $x \in [-2; 2]$.

Nếu $t = -1$ cho ta hai nghiệm phân biệt $x \in [-2; 2]$.

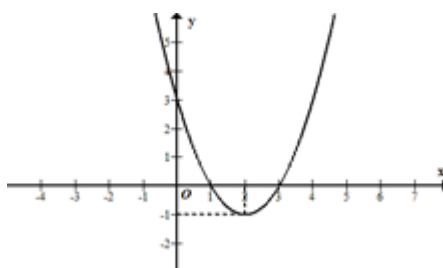
Nếu $t \in (-1; 0)$ thì mỗi giá trị của t cho ta bốn nghiệm phân biệt $x \in [-2; 2]$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in (-1; 0) \Leftrightarrow f(0) < m < f(-1) \Leftrightarrow 3 < m < 8$.

Vậy S có tất cả 4 phần tử.

NHẬN XÉT: Cách giải 2: Chọn hàm $f(x) = (x-1)(x-3)$

Câu 33. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S = (n; p)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2ax^2 + 2b|x| + 2c + m - 6 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt. Tính $2019n + 200p$.



A. 8000.

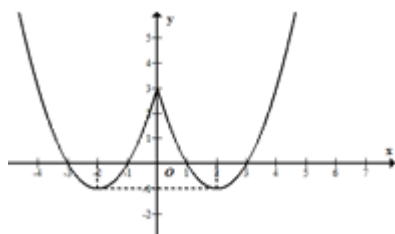
B. 1600.

C. 16000.

D. 800.,

Lời giải

Chọn B



$$2ax^2 + 2b|x| + 2c + m - 6 = 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2b|x| + c = -\frac{m}{2} + 3$$

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$ như hình vẽ bên

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

Điều kiện để có 4 nghiệm phân biệt là

$$-1 < -\frac{m}{2} + 3 < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 8. \text{ Suy ra } n = 0; p = 8.$$

$$\text{Vậy } 2019n + 200p = 1600.$$

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?



A. $m = 4$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn B

* Vẽ đồ thị hàm số (C') của hàm số $y = f(|x|)$: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy, bỏ đi phần đồ thị (C) bên trái trục Oy và lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía bên phải trục Oy qua trục Oy.



$$\text{* Ta có } f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = -1 \\ f(|x|) = 3-m \end{cases}.$$

* Từ đồ thị (C') , ta có:

- Phương trình $f(|x|) = -1$ có hai nghiệm là $x = 2, x = -2$.

- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $f(|x|) = 3-m$ có bốn nghiệm phân biệt khác $\pm 2 \Leftrightarrow$

Đường thẳng $d: y = 3-m$ cắt đồ thị (C') tại bốn điểm phân biệt khác A, B

$$\Leftrightarrow -1 < 3-m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4. \text{ Suy ra } m \in \{1, 2, 3\}.$$

Câu 35. Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị (C) . Giả sử $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng $d: y = 4x - 15$ là nhỏ nhất. Tính $S = x_0 + y_0$.

A. 4.

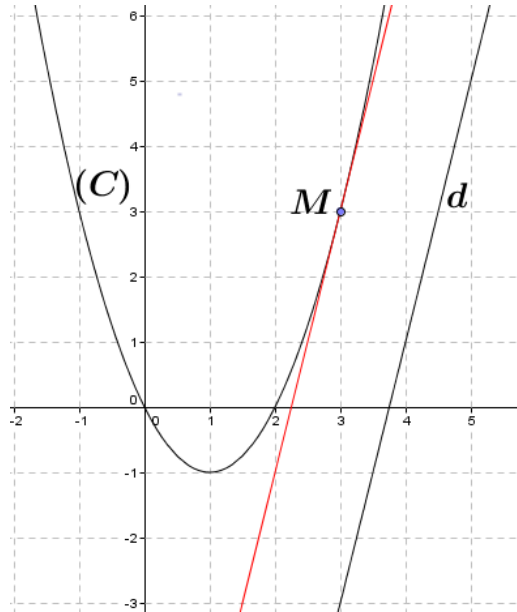
B. 6.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B



Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) sao cho Δ song song với đường thẳng $d: y = 4x - 15$.

Δ có phương trình là $y = 4x - 9$.

Giao điểm của Δ và (C) là $M(3; 3)$.

$M(3; 3)$ là điểm cần tìm.

Do đó $S = x_0 + y_0 = 6$.

Câu 36. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết (P) đi qua điểm $A(1; 5)$ và các điểm cố định của họ parabol $(P_m): y = (m-1)x^2 + x - 3m + 1$. Tính tổng $T = 2a + b + c$.

A. 1.

B. 2

C. 6

D. 4

Lời giải

Cách 1: Gọi $(x_0; y_0)$ là các điểm cố định của (P_m) .

Khi đó:

$$y_0 = (m-1)x_0^2 + x_0 - 3m + 1, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow m(x_0^2 - 3) - x_0^2 + x_0 + 1 - y_0 = 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 3 = 0 \\ -x_0^2 + x_0 + 1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 3 = 0 \\ y_0 = x_0 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt{3}; y_0 = \sqrt{3} - 2 \\ x_0 = -\sqrt{3}; y_0 = -\sqrt{3} - 2 \end{cases}$$

Vì (P) đi qua A và đi qua các điểm cố định của (P_m) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ 3a + \sqrt{3}b + c = \sqrt{3} - 2 \\ 3a - \sqrt{3}b + c = -\sqrt{3} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow T = 2$$

Chọn B

Cách 2: Gọi $(x_0; y_0)$ là các điểm cố định của (P_m) .

$$y_0 = (m-1)x_0^2 + x_0 - 3m + 1, \forall m \in R$$

$$\Leftrightarrow m(x_0^2 - 3) - x_0^2 + x_0 + 1 - y_0 = 0, \forall m \in R$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 3 = 0 \\ -x_0^2 + x_0 + 1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 3 = 0 \\ y_0 = x_0 - 2 \end{cases} \Rightarrow y_0 = k(x_0^2 - 3) + x_0 - 2$$

Vì (P) luôn đi qua các điểm cố định của họ (P_m) nên phương trình parabol (P) có dạng:

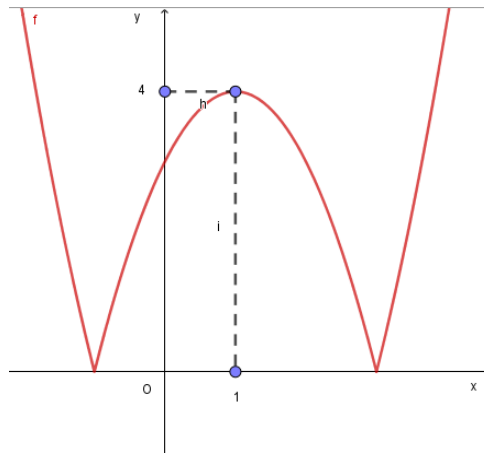
$$y = k(x^2 - 3) + x - 2$$

(P) đi qua A(1;5) nên ta có

$$5 = k(1^2 - 3) + 1 - 2 \Leftrightarrow k = -3 \Rightarrow (P): y = -3(x^2 - 3) + x - 2 \Leftrightarrow y = -3x^2 + x + 7$$

$$\Rightarrow a = -3; b = 1; c = 7 \Rightarrow a + b + c = 5 \quad \text{Chọn B}$$

Câu 37. Hàm số $y = |x^2 + bx + c|$ có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó $S = b - c$ bằng

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

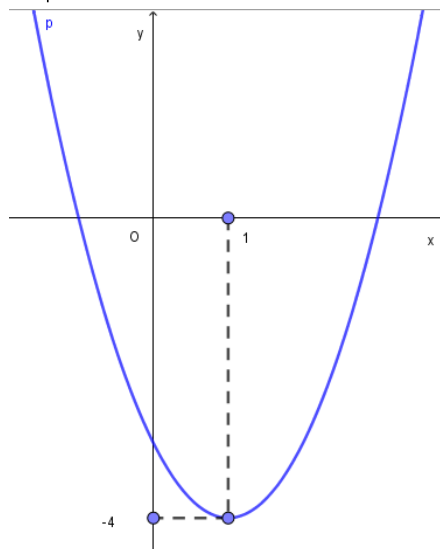
C. $S = 3$.

D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = |x^2 + bx + c|$ như hình trên, ta suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 + bx + c$ như sau



Suy ra parabol $y = x^2 + bx + c$ có đỉnh $I(1; -4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2} = 1 \\ 1 + b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow S = b - c = 1.$$

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là R và đồ thị như hình vẽ

Biểu thức $f(x^2 - 1)$ nhận giá trị dương trên

A. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

B. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

C. $(-2; 2)$

D. $(-1; 3)$

Lời giải

Chọn A

$$f(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < -1 \\ x^2 - 1 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

Câu 39. Cho hai parabol: $(P_1): y = x^2 - mx + n; (P_2): y = (1 - m)x^2 + 2(m + 1)x - 6$ ($m \neq 1$). Có bao nhiêu cặp số $(m; n)$ để hai parabol trên không có cùng trục đối xứng nhưng đi qua đỉnh của nhau?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

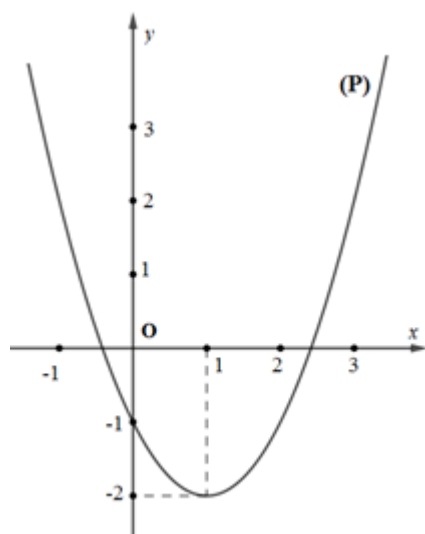
Hoành độ hai đỉnh của $(P_1); (P_2)$ thứ tự là $\frac{m}{2}; \frac{m+1}{m-1}$. Theo yêu cầu đề bài chúng phải phân biệt và là hai nghiệm của phương trình hoành độ: $mx^2 - (3m + 2)x + n + 6 = 0$.

Từ đó theo định lý Viet ta có $\frac{m}{2} + \frac{m+1}{m-1} = \frac{3m+2}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m^2 - 3m - 2 = 0 \end{cases} (*)$

Mà $\frac{m}{2} = \frac{m+1}{m-1} \Leftrightarrow (*)$ nên ta chỉ có giá trị duy nhất của m thỏa mãn là $m = 2$, suy ra $n = 0$

Chọn B

Câu 40. Cho đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ (P) (hình vẽ bên).



Dựa vào đồ thị (P) xác định số giá trị nguyên dương của m để phương trình $x^2 - 2x + 2m - 2 = 0$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

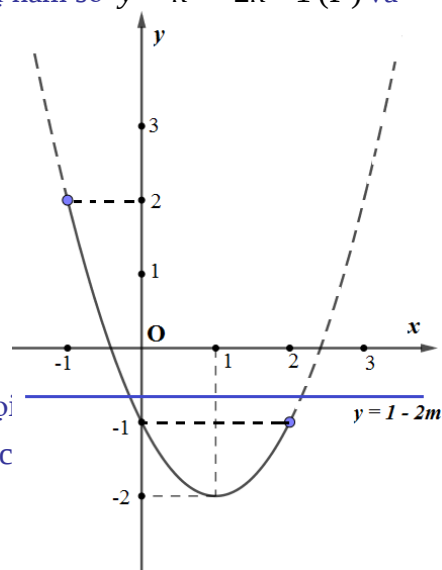
Chọn BPhương trình $x^2 - 2x + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 1 - 2m$ (*)Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ (P) và đường thẳng $y = 1 - 2m$

Quan sát đồ thị hàm số, ta thấy:

với $x \in -1; 2$ thì $y \in -2; 2$.

Do đó, để phương trình (*) có nghiệm thì

$$-2 \leq 1 - 2m \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$$

Mà m là số nguyên dương $\Rightarrow m = 1$ Vậy có duy nhất 1 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 41. Cho hai đường thẳng $d_1: y = mx - 4$ và $d_2: y = -mx - 4$. Gọi S là tập các giá trị của m để tam giác tạo thành bởi d_1, d_2 và trục hoành có diện tích bằng 4. Tính tổng các phần tử của tập S .

A. 1.

B. 2.**C.** 3.

Lời giải

Chọn CTa thấy rằng d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại điểm $A(0; -4)$ nằm trên trục tung.Xét $m = 0$ thì d_1 và d_2 là hai đường thẳng trùng nhau nên d_1, d_2 và trục Ox không tạo thành tam giác (không thỏa mãn ycbt).Xét $m \neq 0$, d_1 cắt Ox tại $B\left(\frac{4}{m}; 0\right)$, d_2 cắt Ox tại $C\left(-\frac{4}{m}; 0\right)$.Tam giác tạo thành bởi d_1, d_2 và trục hoành là tam giác ABC .

$$\text{Diện tích tam giác tạo thành là: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} OA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |x_B - x_C| = 2 \cdot \frac{8}{|m|} = \frac{16}{|m|}.$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{16}{|m|} \geq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq 2 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

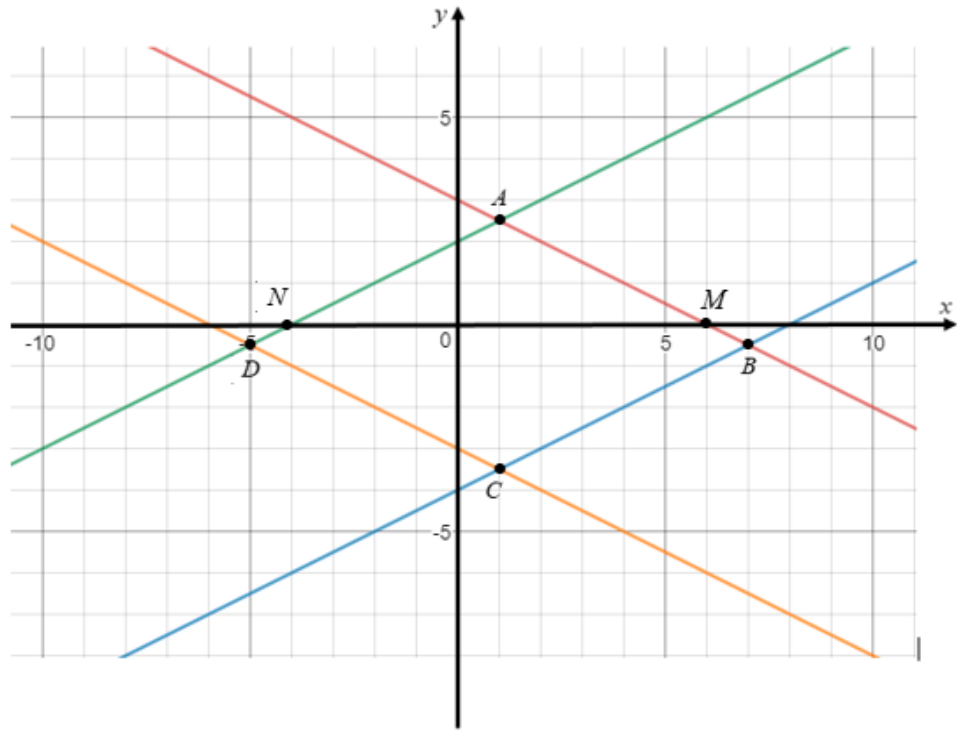
Suy ra $S = \{1; 2\}$. Vậy tổng các phần tử của tập S bằng 3.

Câu 42. Gọi (H) là tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn hệ thức $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{4y^2 + 4y + 1} = 6$, trục Ox chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 trong đó S_1 là phần diện tích nằm phía trên trục hoành. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ là:

A. $\frac{25}{47}$.**B.** $\frac{47}{25}$.**C.** $\frac{25}{36}$.**D.** $\frac{25}{144}$.

Lời giải

Chọn A



Hệ thức $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{4y^2 + 4y + 1} = 6 \Leftrightarrow |x - 1| + |2y + 1| = 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 6 \text{ vs } x \geq 1; y \geq -\frac{1}{2} \\ x - 2y = 8 \text{ vs } x \geq 1; y \leq -\frac{1}{2} \\ -x + 2y = 4 \text{ vs } x \leq 1; y \geq -\frac{1}{2} \\ -x - 2y = 6 \text{ vs } x \leq -1; y \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Hình (H) là hình thoi ABCD với điểm $A\left(1; \frac{5}{2}\right), B\left(7; \frac{1}{2}\right), C\left(1; -\frac{7}{2}\right), D\left(-5; \frac{1}{2}\right)$

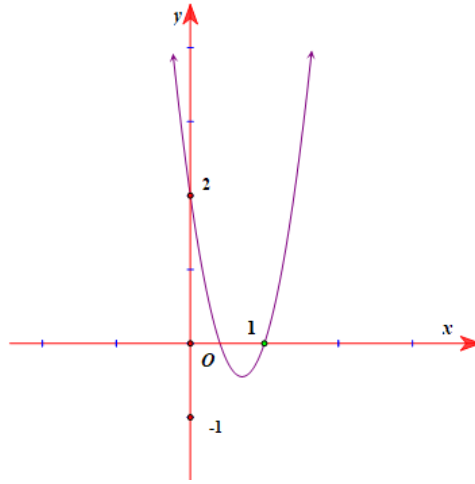
Tọa độ điểm $M(6; 0), N(-4; 0)$

Dễ thấy $BD = 12, AC = 6 \Rightarrow S_{(H)} = S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 36$

Diện tích tam giác AMN: $S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot |y_A| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$

Như vậy $S_1 = \frac{25}{2}, S_2 = 36 - \frac{25}{2} = \frac{47}{2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{25}{47}$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $\frac{4f(|x|)-1}{f(|x|)+1} = 2$ là?

A. 0.

B. 2.

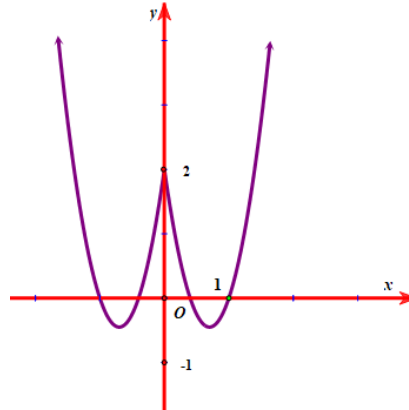
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$



Ta có: $f(|x|) + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình $\frac{4f(|x|)-1}{f(|x|)+1} = 2 \Leftrightarrow 4f(|x|)-1 = 2(f(|x|)+1) \Leftrightarrow f(|x|) = \frac{3}{2}$ (1).

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị $y = f(|x|)$ với đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Câu 44. Tính tổng bình phương các giá trị của m để phương trình $x^2 - 2x = 1 - m - |x - 1|$ có nghiệm duy nhất.

A. $P = 1$.

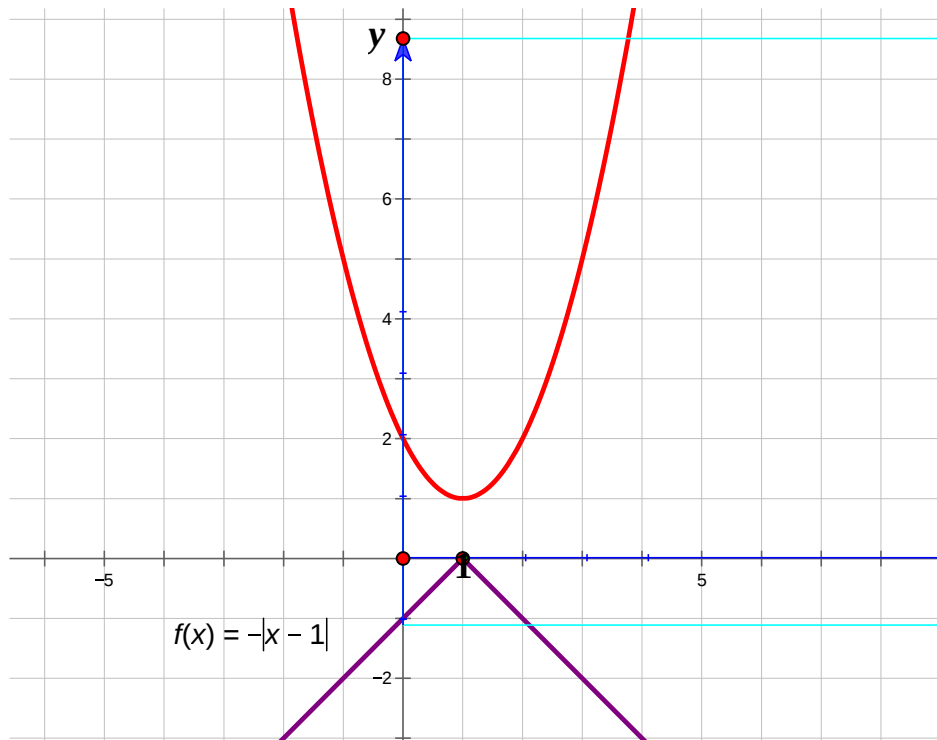
B. $P = 4$.

C. $P = 5$.

D. $P = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



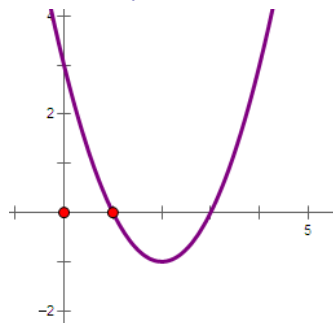
Biến đổi phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = -|x - 1|$.

Mà số nghiệm là số giao điểm của hai đồ thị $y = x^2 - 2x + m - 1$ và $y = -|x - 1|$ trong đó

(P): $y = x^2 - 2x + m - 1$ có trục đối xứng $x = 1$ nên muốn có nghiệm duy nhất thì (1;0) phải là đỉnh của (P). Suy ra $m = 2$.

NHẬN XÉT: Cách giải 2: Gọi a là nghiệm suy ra 2-a cũng là nghiệm...

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $ax^2 + b|x| + c = m + 1$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Phương trình có dạng $x^2 - 4|x| + 3 = m + 1$.

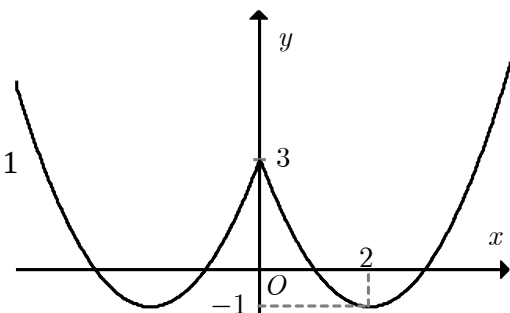
Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$.

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m + 1$

có bốn nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < m + 1 < 3$$

$$\Leftrightarrow -2 < m < 2$$



Câu 46. Cho phương trình $|-x^2 + 2|x| + 3| - 2m + 1 = 0$. Giá trị m để phương trình có bốn nghiệm

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$|-x^2 + 2|x| + 3| - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow |-x^2 + 2|x| + 3| = 2m - 1$$

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |-x^2 + 2|x| + 3|$ và đường thẳng $y = 2m - 1$. Xét hàm số $y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

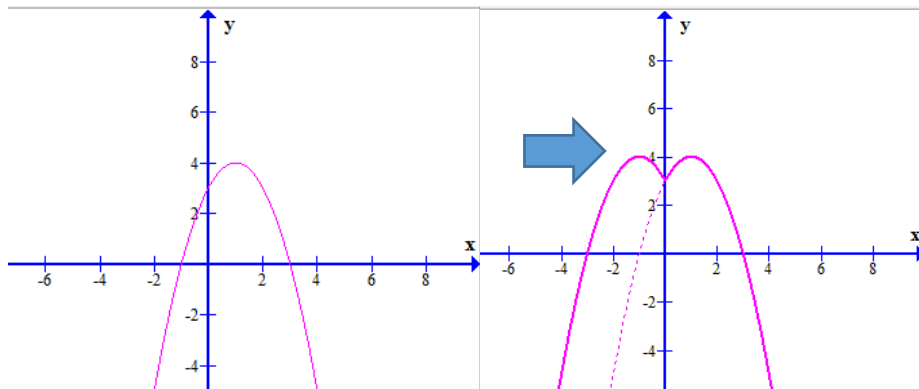
Vẽ từ trong ra ngoài

+ Vẽ đồ thị $y = -x^2 + 2x + 3$ (C)

+ Vẽ đồ thị $y_1 = f(|x|)$ có đồ thị (C_1)

- Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung.

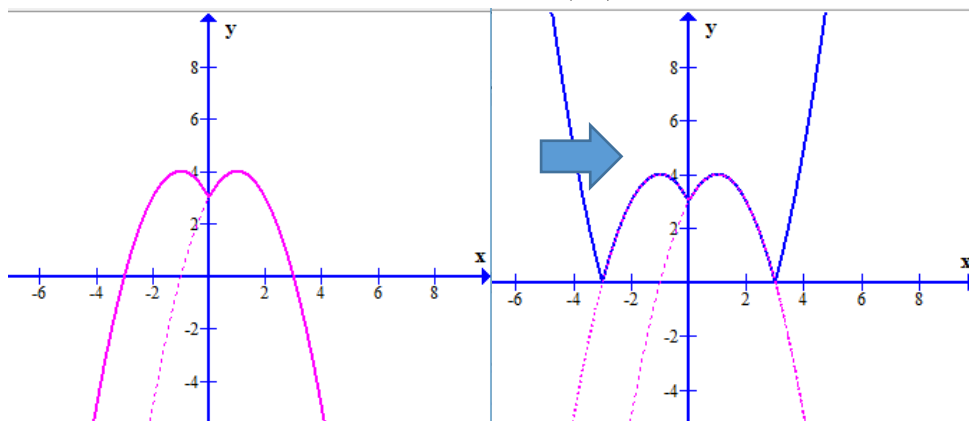
- Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị (C) nằm bên phải trục tung.



+ Vẽ đồ thị hàm số $y_2 = |y_1|$ có đồ thị (C_2)

- Giữ nguyên đồ thị của (C_1) nằm trên trục hoành.

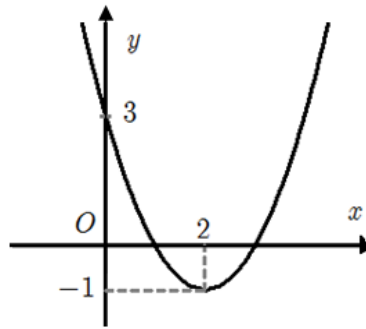
- Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị (C_1) nằm dưới trục hoành.



Từ đồ thị để phương trình có bốn nghiệm khi $\begin{cases} 0 < 2m - 1 < 3 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < m < 2 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}$. Vậy có 1 giá trị

nguyên.

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f(|x - 2018|) = |m - 2018|$ có đúng hai nghiệm phân biệt?



- A. $m \in (-\infty; 2015] \cup [2021; +\infty)$.
 B. $m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty) \cup \{2017; 2019\}$.
 C. $m \in (2015; 2021)$.
 D. $m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

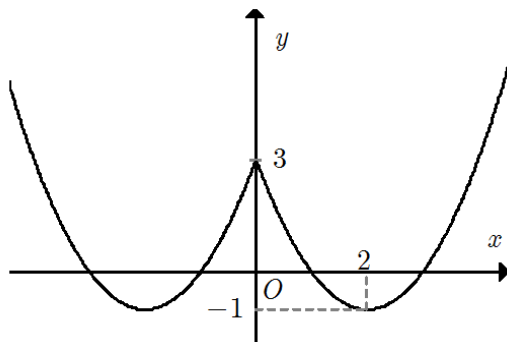
Đặt $t = |x - 2018|, t \geq 0$, phương trình $f(|x - 2018|) = |m - 2018|$ (1) trở thành:

$$f(t) = |m - 2018| \quad (2).$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m - 2018| > 3 \\ |m - 2018| = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty).$$



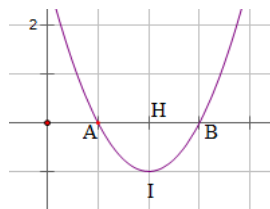
VẤN ĐỀ 4 SỰ TƯƠNG GIAO

Câu 48. Cho Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh I. Biết (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác ABI vuông cân. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $b^2 - 4ac - 4 = 0$ B. $b^2 - 4ac + 6 = 0$ C. $b^2 - 4ac - 16 = 0$ D. $b^2 - 4ac - 8 = 0$

Lời giải

Chọn A



ĐK để (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt: $\Delta > 0$

Khi đó hoành độ của A, B là: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$AB = |x_1 - x_2| = \left| \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

Tọa độ I là: $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Ox thì H là trung điểm AB và $IH = \left|\frac{-\Delta}{4a}\right|$

$$\text{YCBT } \left|\frac{-\Delta}{4a}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Leftrightarrow \frac{\Delta^2}{16a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \Delta = 4$$

Câu 49. Biết đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có điểm chung duy nhất với $y = -2,5$ và cắt đường thẳng $y = 2$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 5 . Tính $P = a + b + c$.

- A. 1. B. 0. C. -1. D. -2.

Lời giải

Chọn D

Gọi (P): $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$).

Ta có:

$$+) (P) \text{ đi qua hai điểm } (-1; 2); (5; 2) \text{ nên ta có } \begin{cases} a - b + c = 2 \\ 25a + 5b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = 2 - 5a \end{cases}$$

+) (P) có một điểm chung với đường thẳng $y = -2,5$ nên

$$\frac{-\Delta}{4a} = -2,5 \Leftrightarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 2,5 \Leftrightarrow 16a^2 - 4a(2 - 5a) = 10a \Leftrightarrow 36a^2 - 18a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó: } b = -2; c = -\frac{1}{2}.$$

Câu 50. Cho parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ biết: (P) đi qua $M(4; 3)$, (P) cắt Ox tại $N(3; 0)$ và Q sao cho ΔINQ có diện tích bằng 1 đồng thời hoành độ điểm Q nhỏ hơn 3 với I là đỉnh của (P). Tính $a + b + c$

- A. 1. B. -2. C. 0. D. -1

Lời giải

Chọn C

Vì (P) đi qua $M(4; 3)$ nên $3 = 16a + 4b + c$ (1)

Mặt khác (P) cắt Ox tại $N(3; 0)$ suy ra $0 = 9a + 3b + c$ (2), (P) cắt Ox tại Q nên $Q(t; 0)$, $t < 3$

$$\text{Theo định lý Viét ta có } \begin{cases} t + 3 = -\frac{b}{a} \\ 3t = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ta có $S_{\Delta INQ} = \frac{1}{2} IH \cdot NQ$ với H là hình chiếu của I $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ lên trục hoành

$$\text{Do } IH = \left|-\frac{\Delta}{4a}\right|, NQ = 3 - t \text{ nên } S_{\Delta INQ} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left|-\frac{\Delta}{4a}\right| \cdot (3 - t) = 1$$

$$\Leftrightarrow (3 - t) \left| \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \right| = \left|\frac{2}{a}\right| \Leftrightarrow (3 - t) \left| \frac{(t + 3)^2}{4} - 3t \right| = \left|\frac{2}{a}\right| \Leftrightarrow (3 - t)^3 = \frac{8}{|a|} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } 7a + b = 3 \Leftrightarrow b = 3 - 7a \text{ suy ra } t + 3 = -\frac{3 - 7a}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{4 - t}{3}$$

$$\text{Thay vào (3) ta có } (3 - t)^3 = \frac{8(4 - t)}{3} \Leftrightarrow 3t^3 - 27t^2 + 73t - 49 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Suy ra } a = 1 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow c = 3.$$

Vậy (P) cần tìm là $y = x^2 - 4x + 3$.

Câu 51. Cho đồ thị hàm số (P): $y = x^2 + mx + 13$ trong đó x là ẩn, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị của $m \in \mathbb{R}$ sao cho khoảng cách từ gốc O của hệ trục tọa độ đến đỉnh của Parabol (P) bằng 5.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. có vô số giá trị.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Tọa độ đỉnh I của (P) là: } \begin{cases} x = -\frac{m}{2} \\ y = \frac{52 - m^2}{4} \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Khoảng cách từ điểm gốc tọa độ đến I: } OI = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{-m}{2}\right)^2 + \left(\frac{52 - m^2}{4}\right)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow m^4 - 100m^2 + 2304 = 0 \text{ Đặt } t = m^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 100t + 2304 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 64 \\ t = 36 \end{cases} \Rightarrow m = \{\pm 8; \pm 6\}$$

Câu 52. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 4$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: y = 2mx - m^2$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

+ Pt hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (1)

+ Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thì pt (1) có $\Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 + 4) > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2} \quad (2). \text{ Theo Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 4 \end{cases}$$

Từ yêu cầu ta có $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16 \Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 \leq 3m^2 + 16$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow (2m+2)^2 - m^2 - 4 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 8m \leq 16$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2$$

So sánh với điều kiện (2) suy ra $\frac{3}{2} < m \leq 2$ do m nguyên nên $m = \{2\}$

Câu 53. Cho hai hàm số bậc hai $y = f(x), y = g(x)$ thỏa mãn $f(x) + 3f(2-x) = 4x^2 - 10x + 10$; $g(0) = 9; g(1) = 10; g(-1) = 4$. Biết rằng hai đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt là A, B. Đường thẳng d vuông góc với AB tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 36. Hỏi điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d?

A. M(-2;1)

B. N(-1;9)

C. P(1;4)

D. Q(3;5)

Lời giải

Chọn B

Gọi hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ ta có $f(x) + 3f(2-x) = 4x^2 - 10x + 10$

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c + 3[a(2-x)^2 + b(2-x) + c] = 4x^2 - 10x + 10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -2b-12a=-10 \\ 12a+6b+4c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2-x+1.$$

Gọi hàm số $g(x)=mx^2+nx+p$ ta có $g(0)=9; g(1)=10; g(-1)=4$ ra hệ giải được

$$m=-2; n=3; p=9 \Rightarrow g(x)=-2x^2+3x+9.$$

Khi đó tọa độ hai điểm A, B thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} y=x^2-x+1 \\ y=-2x^2+3x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2x^2-2x+2 \\ y=-2x^2+3x+9 \end{cases} \Rightarrow 3y=x+11$$

Do đó đường thẳng AB: $y=\frac{1}{3}x+\frac{11}{3} \Rightarrow d: y=-3x+k$. Đường thẳng d cắt hai trục tọa độ tại

$$E(0;k); F\left(\frac{k}{3};0\right). \text{ Diện tích tam giác } OEF \text{ là } \frac{1}{2}|k|\left|\frac{k}{3}\right|=6 \Leftrightarrow k=\pm 6$$

Vậy phương trình đường thẳng d là: $d: y=-3x+6, y=-3x-6$.

Câu 54. Biết rằng đường thẳng $y=mx$ luôn cắt parabol $y=2x^2+x-3$ tại hai điểm phân biệt A và B, khi đó quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng AB là:

A. đường parabol $y=4x^2+1$.

B. đường parabol $y=4x^2+x$.

C. đường thẳng $y=4x+1$.

D. đường thẳng $y=4x+4$.

Lời giải

Chọn B

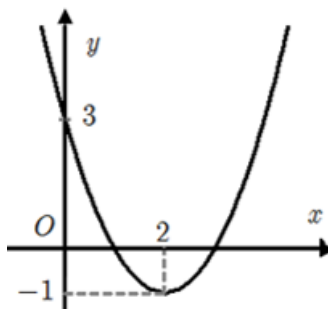
Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường: $2x^2+x-3=mx \Leftrightarrow 2x^2+(1-m)x-3=0$.

Vì $\Delta=m^2-2m+25$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là: } \begin{cases} x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m-1}{4} \\ y=mx \end{cases}$$

Do đó, quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng AB là đường parabol $y=4x^2+x$.

Câu 55. Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f(|x-2018|)=|m-2018|$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in (-\infty; 2015] \cup [2021; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty) \cup \{2017; 2019\}$.

C. $m \in (2015; 2021)$.

D. $m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty)$.

Lời giải

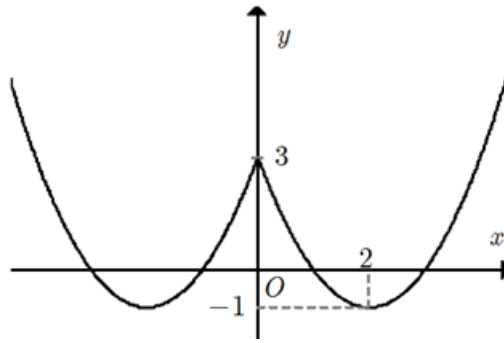
Chọn D

Đặt $t=|x-2018|$, phương trình $f(|x-2018|)=|m-2018|$ (1) trở thành: $f(t)=|m-2018|$ (2).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có đúng một nghiệm t dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m-2018| > 3 \\ |m-2018| = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty).$$



- Câu 56.** Cho đường thẳng $d: y = ax + b$ đi qua điểm $I(3;1)$, cắt hai tia Ox , Oy và cách gốc tọa độ một khoảng bằng $2\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + b^2$
- A.** $P = 16$. **B.** $P = 14$. **C.** $P = 23$. **D.** $P = 19$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $d: y = ax + b$ đi qua điểm $I(1;3) \Leftrightarrow 1 = 3a + b$. (1)

Vì đường thẳng $d: y = ax + b$ cắt hai tia Ox , Oy và cách gốc tọa độ một khoảng bằng $\sqrt{5}$ nên $a < 0, b > 0$.

Ta có $d \cap Ox = A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$; $d \cap Oy = B(0; b)$.

Suy ra $OA = \left|-\frac{b}{a}\right| = -\frac{b}{a}$ và $OB = |b| = b$ (do A, B thuộc hai tia Ox, Oy nên $a < 0, b > 0$).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng d .

Xét tam giác AOB vuông tại O , có đường cao OH nên ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow b^2 = 8a^2 + 8. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $b = 1 - 3a$. Thay vào (2), ta được

$$(1 - 3a)^2 = 8a^2 + 8 \Leftrightarrow a^2 - 6a - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 7 \end{cases} (L)$$

• Với $a = -1$, suy ra $b = 4$. Vậy $P = 2 \cdot (-1) + 4^2 = 14$

- Câu 57.** Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = mx - m$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ

x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1^2 - mx_1 + 2m}{x_2} + \frac{x_2^2 - mx_2 + 2m}{x_1} = -4$. Tổng các phần tử của S là:

- A.** $\frac{13}{3}$. **B.** $-\frac{13}{3}$. **C.** $\frac{14}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 2x - 3 = mx - m \Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + m - 3 = 0 \quad (1)$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+2)^2 - 4(m-3) > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 16 > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 3.$$

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) nên:

$$x_1^2 - (m+2)x_1 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = (m+2)x_1 - m + 3$$

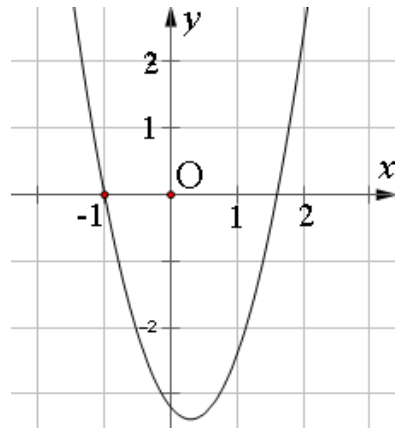
$$x_2^2 - (m+2)x_2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 = (m+2)x_2 - m + 3$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{x_1^2 - mx_1 + 2m}{x_2} + \frac{x_2^2 - mx_2 + 2m}{x_1} = \frac{2x_1 + m + 3}{x_2} + \frac{2x_2 + m + 3}{x_1} \\ &= \frac{2x_1^2 + 2x_2^2 + (m+3)(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + (m+3)(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} \\ &= \frac{2(m+2)^2 - 4(m-3) + (m+3)(m+2)}{m-3} = \frac{3m^2 + 9m + 26}{m-3}. \end{aligned}$$

$$T = -4 \Leftrightarrow \frac{3m^2 + 9m + 26}{m-3} = -4 \Leftrightarrow 3m^2 + 13m + 14 = 0 \Leftrightarrow m = -2; m = -\frac{7}{3}.$$

Tổng các giá trị của m là $-\frac{13}{3}$.

Câu 58. Cho hàm số $y = x^2 + ax + b$ có đồ thị là hình bên dưới. Đặt T là tổng các nghiệm của phương trình: $(x+1)|x+b| = x$. T thuộc tập hợp nào sau đây?



A. $(-3; -1)$

B. $(-1; 1)$

C. $(1; 3)$

D. $(3; 5)$

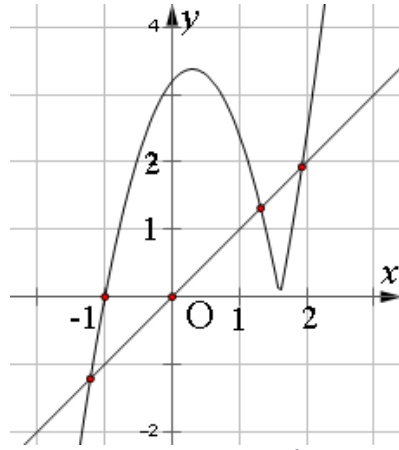
Lời giải

Chọn C

Nhận thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $(-1; 0)$, phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm $-1, -b$. Giao điểm thứ hai của đồ thị và trục hoành là $(-b; 0)$. Ta có thể viết:

$$f(x) = x^2 + ax + b = (x+1)(x+b).$$

$$g(x) = (x+1)|x+b| = \begin{cases} f(x), & \text{khi } x \geq -b \\ -f(x), & \text{khi } x < -b \end{cases}. \text{ Suy ra đồ thị như hình vẽ:}$$



Phương trình đề bài trở thành $g(x) = x$. Vẽ đường thẳng $y = x$, cắt đồ thị $y = g(x)$ tại ba điểm có hoành độ gần bằng $-1, 2, 1, 3, 1, 9$.

Tổng các nghiệm gần bằng 2.

Câu 59. Cho parabol (P): và đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ và có hệ số góc là k . Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d). Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = |x_1^3 - x_2^3|$ bằng:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

+ Đường thẳng (d) có phương trình: $y = kx$

+ PT tương giao (d) và (P): $-x^2 + 1 = kx \Leftrightarrow x^2 + kx - 1 = 0(*)$

+ (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ vì $\Delta = k^2 + 4 > 0 (\forall k)$

Theo Vi et có: $x_1 + x_2 = -k, x_1 x_2 = -1$

Ta có: $|x_1^3 - x_2^3| = |(x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2]| = |x_1 - x_2| \cdot |(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2|$

Có $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = k^2 + 4$

$\Rightarrow |x_1^3 - x_2^3| = \sqrt{k^2 + 4}(k^2 + 1) \geq 2, \forall k \in \mathbb{R}$.

Vậy GTNN của M bằng 2 khi $k = 0$.

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình $|x^2 - 2|x| - m| = m^2$ có đúng 5 nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Chọn A

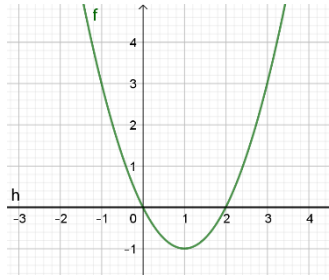
Do hàm số $y = f(x) = |x^2 - 2|x| - m|$ là hàm chẵn nó có đồ thị đối xứng qua trục Oy

Điều kiện cần để phương trình $f(x) = m^2$ có 5 nghiệm phân biệt là:

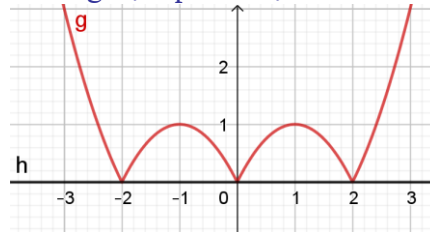
$$f(0) = m^2 \Rightarrow |m| = m^2 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Thử lại: Từ đồ thị hàm số $y = g(x) = x^2 - 2x$ suy ra

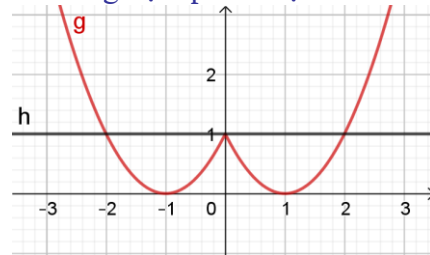
Các dạng đồ thị của hàm $y = f(x)$ cho 3 trường hợp



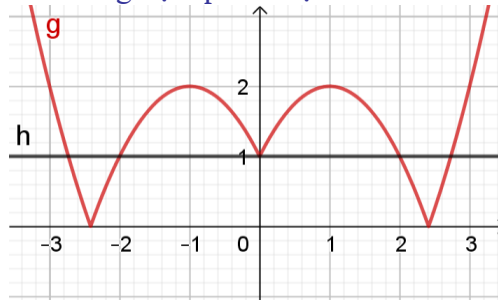
+ $m = 0$, phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt



+ $m = -1$, phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt



+ $m = 1$, phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt



Vậy $m = 1$ thỏa điều kiện.

Câu 61. Cho hai đường thẳng $d_1: y = mx - 4$ và $d_2: y = -mx - 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tam giác tạo thành bởi d_1, d_2 và trục hoành có diện tích lớn hơn hoặc bằng 8?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy rằng d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại điểm $A(0; -4)$ nằm trên trục tung.

Nếu $m = 0$ thì d_1 và d_2 là hai đường thẳng trùng nhau nên d_1, d_2 và trục Ox không tạo thành tam giác (không thỏa mãn ycbt).

Do đó $m \neq 0$, giả sử d_1 cắt Ox tại $B\left(\frac{4}{m}; 0\right)$, d_2 cắt Ox tại $C\left(-\frac{4}{m}; 0\right)$.

Tam giác tạo thành bởi d_1, d_2 và trục hoành là tam giác ABC .

Diện tích tam giác tạo thành là: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} OA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |x_B - x_C| = 2 \cdot \frac{8}{|m|} = \frac{16}{|m|}$.

Ta có $S_{\triangle ABC} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{16}{|m|} \geq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq 2 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Do đó các giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán thuộc tập hợp $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 62. Cho parabol (P): và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$ có hệ số góc là k . Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d). Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là x_1^3 và x_2^3 . Số các giá trị nguyên của k thỏa mãn $|x_1^3 - x_2^3| \leq 2$ là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

(d) có phương trình: $y = kx - 1$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + kx - 1 = 0$ phương trình này luôn có hai nghiệm trái dấu nên Parabol và đường thẳng (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi k .

Ta có: $|x_1^3 - x_2^3| = |(x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2]| \leq 2 \Leftrightarrow k = 0$

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| = |(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 4} \cdot |k^2 + 1| \leq 2 \Leftrightarrow k = 0.$$

Câu 63. Cho đường thẳng (d): $y = -2$ và Parabol $(P_m): y = -x^2 + mx - m^2 + 1$ với $m \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$. (d) cắt (P_m) tại hai điểm phân biệt M, N. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN. Tính tổng $S = a^2 + b^2$.

- A.** $S = \frac{93}{4}$. **B.** $S = 21$. **C.** $S = 22$. **D.** $S = \frac{129}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P_m) là:

$$-x^2 + mx - m^2 + 1 = -2 \Leftrightarrow -x^2 + mx - m^2 + 3 = 0 \quad (1)$$

(d) giao (P_m) tại hai điểm M, N khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-m^2 + 3) > 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

So với điều kiện $m \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$. Vậy (d) cắt (P_m) tại hai điểm phân biệt khi $m \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

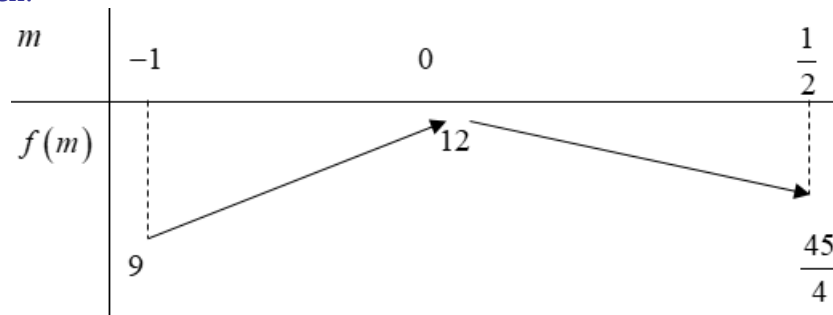
Gọi $M(x_1; -2); N(x_2; -2)$ với $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Ta có: } \overline{MN} = (x_2 - x_1; 0) \Leftrightarrow MN^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$\text{Theo định lí Vi - ét ta có: } MN^2 = m^2 - 4(m^2 - 3) = -3m^2 + 12.$$

Xét hàm số $f(m) = -3m^2 + 12$. Có Đỉnh $S(0; 12)$.

Bảng biến thiên:



$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có } \begin{cases} f(m)_{\min} = 9 \\ f(m)_{\max} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MN^2_{\min} = 9 \\ MN^2_{\max} = 12 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy khi đó } S = a^2 + b^2 = 12 + 9 = 21.$$

Câu 64. Cho Parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2}$ (m là tham số).

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2 - (x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{2}x^2 = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m^2 - 1 = 2m - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2.$$

Vậy với $0 \leq m \leq 2$ thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Theo định lý Viet, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = 2m^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } y_1 = (m+1)x_1 - m^2 - \frac{1}{2}; y_2 = (m+1)x_2 - m^2 - \frac{1}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} T &= y_1 + y_2 - x_1x_2 - (x_1 + x_2) \\ &= (m+1)(x_1 + x_2) - 2m^2 - 1 - x_1x_2 - (x_1 + x_2) \\ &= 2(m+1)^2 - 4m^2 - 2 - 2(m+1) = -2m^2 + 2m - 2. \end{aligned}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị của tham số m để hàm số: $T(m) = -2m^2 + 2m - 2$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có bảng biến thiên:

m	0	$\frac{1}{2}$	2
$-2m^2 + 2m - 2$	-2	$-\frac{3}{2}$	-6

Vậy giá trị nhỏ nhất của $T = -6$ đạt được khi $m = 2$.

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và hai đường thẳng (d): $y = m$; (d'): $y = m^2$ với $0 < m < 1$. Đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B; đường thẳng (d') cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt C, D (với hoành độ điểm A và D là số âm) sao cho diện tích hình thang ABCD gấp 9 lần diện tích tam giác OCD. Khi đó giá trị m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0; \frac{1}{16}\right)$. B. $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{8}\right)$. C. $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right)$. D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$+ \text{ Xét PT hoành độ giao điểm } x^2 = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases} \Rightarrow A(-\sqrt{m}; m), B(\sqrt{m}; m)$$

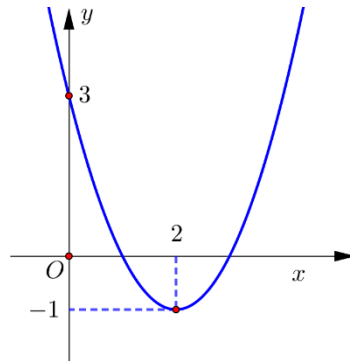
+ Xét PT hoành độ giao điểm $x^2 = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \end{cases} \Rightarrow C(m; m^2), D(-m; m^2)$.

Tính được $S_{\Delta OCD} = m^3; S_{ABCD} = (m - m^2)(\sqrt{m} + m)$. (do) $(0 < m < 1)$

Do $S_{ABCD} = 9.S_{\Delta OCD} \Leftrightarrow (m - m^2)(\sqrt{m} + m) = 9m^3 \Leftrightarrow 10m\sqrt{m} + m - \sqrt{m} - 1 = 0$

$\Rightarrow m = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x|) - 1 = m$ có 4 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là

A. 1.

B. 2.

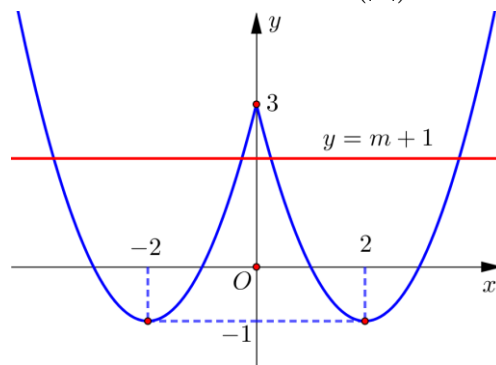
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là



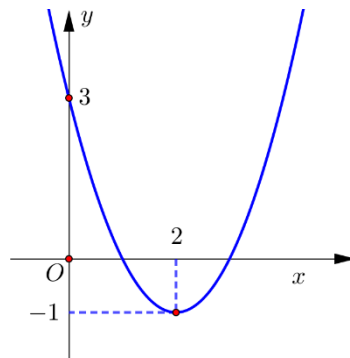
Ta có $f(|x|) - 1 = m \Leftrightarrow f(|x|) = m + 1$

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $S = \{-1; 0; 1\}$

Vậy số phần tử của S là 3.

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(|x|)| + 1 = m$ có 4 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là

A. 1.

B. 2.

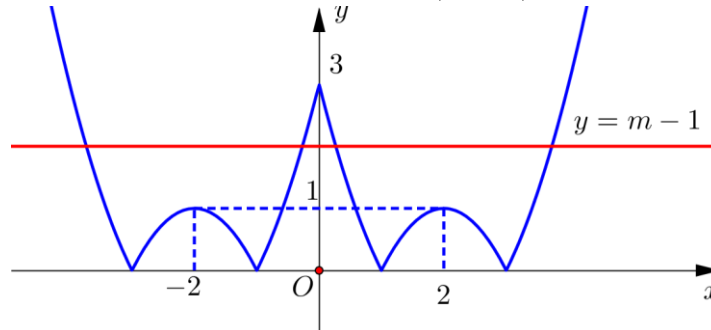
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ là



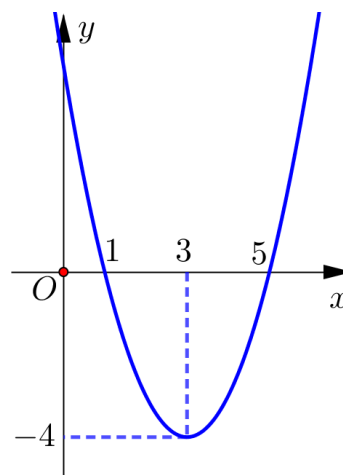
Ta có $|f(|x|)| + 1 = m \Leftrightarrow |f(|x|)| = m - 1$

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m - 1 < 3 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 4 \\ m = 1 \end{cases}$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $S = \{1; 3\}$

Vậy số phần tử của S là 2.

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(x-1)|x-5| + m = 0$ có hai nghiệm. Tổng các phần tử của S bằng

A. -6.

B. -4.

C. 4.

D. -4.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y = (x-1)|x-5| = \begin{cases} (x-1)(x-5) & \text{khi } x \geq 5 \\ -(x-1)(x-5) & \text{khi } x < 5 \end{cases}$

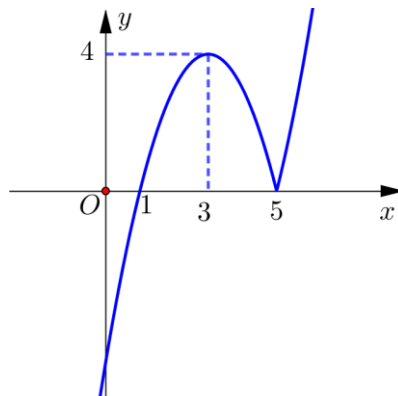
Hay $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{khi } x \geq 5 \\ -(x^2 - 6x + 5) & \text{khi } x < 5 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$ suy ra đồ thị hàm số $y = (x-1)|x-5|$ như sau:

+ Khi $x \geq 5$ giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$.

+ Khi $x < 5$ lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$ qua trục hoành.

Khi đó ta có đồ thị hàm số $y = (x-1)|x-5|$ là



Ta có $(x-1)|x-5| + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)|x-5| = -m$

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m = 0 \\ -m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}$

Vậy tổng các phần tử của S là -4 .

Câu 69. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$. Tính tổng T các phần tử của S .

- A.** $T = 3$. **B.** $T = -15$. **C.** $T = \frac{3}{2}$. **D.** $T = -9$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 4x + m = 0$. (*)

Để (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B thì (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

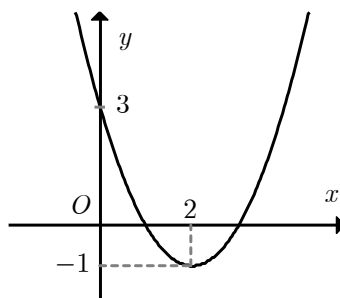
Theo giả thiết $OA = 3OB \Leftrightarrow |x_A| = 3|x_B| \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A = -3x_B \end{cases}$

Với $x_A = 3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A + x_B = 4 \Rightarrow m = x_A \cdot x_B = 3. \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases}$

Với $x_A = -3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = -3x_B \\ x_A + x_B = 4 \Rightarrow m = x_A \cdot x_B = 12 : \text{không thỏa mãn } (*) \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases}$

Do đó (P)

Câu 70. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $f(|x|) - 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



- A.** $m = 3$. **B.** $m > 3$. **C.** $m = 2$. **D.** $-2 < m < 2$.

Lời giải

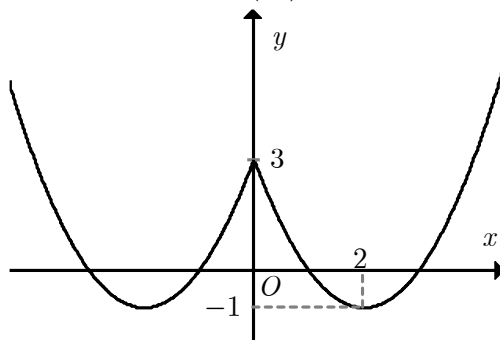
Chọn C

Ta có $f(|x|) = f(x)$ nếu $x \geq 0$. Hơn nữa hàm $f(|x|)$ là hàm số chẵn.

Từ đó suy ra cách vẽ đồ thị hàm số (C) từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:

- Giữ nguyên đồ thị $y = f(x)$ phía bên phải trục tung.
- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ phía bên phải trục tung qua trục tung.

Kết hợp hai phần ta được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ sau:



Phương trình $f(|x|) - 1 = m \Leftrightarrow f(|x|) = m + 1$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = m + 1$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 71. Cho hàm số $y = (m+3)x^2 - 2(m+1)x + m$ biết đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ $x_1; x_2$. Với giá trị nào của a thì biểu thức $F = (x_1 - a)(x_2 - a)$ không phụ thuộc vào m .

A. $a = \frac{1}{4}$.

B. $a = \frac{3}{4}$.

C. $a = 4$.

D. $a = 1$.

Lời giải

Chọn B

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $(m+3)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$

+ Với $\begin{cases} m \neq -3 \\ m \leq 1 \end{cases}$ phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$

+ khi đó theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m+3} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m+3} \end{cases}$, ta có:

$$F = (x_1 - a)(x_2 - a) = x_1 x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2 = \frac{m}{m+3} - \frac{2a(m+1)}{m+3} + a^2$$

$$= \frac{m - 2am - 2a}{m+3} + a^2 = \frac{m+3 - 2a(m+3) + 4a - 3}{m+3} + a^2 = 1 - 2a + a^2 + \frac{4a-3}{m+3}$$

+ F không phụ thuộc vào $m \Leftrightarrow 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$

+ Với $a = \frac{3}{4}$ ta có $F = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 = 2$

Rõ ràng khi đó ta thấy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức trên chẳng

hạn như $m = 0$ ta có $3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ thỏa hệ thức của bài toán.

Ta có thể xử lý theo hướng:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m+3} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - \frac{4}{m+3} \\ x_1 x_2 = 1 - \frac{3}{m+3} \end{cases} \Rightarrow 3(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 = 2$$

Đây là hệ thức không phụ thuộc vào m

Từ yêu cầu bài toán có

$$F = (x_1 - a)(x_2 - a) = x_1 x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2 \Rightarrow 4F = 4x_1 x_2 - 4a(x_1 + x_2) + 4a^2$$

$$\text{Hay } 4F = 3(x_1 + x_2) - 2 - 4a(x_1 + x_2) + 4a^2 = (3 - 4a)(x_1 + x_2) + 4a^2 - 2$$

$$\text{Để } F \text{ không phụ thuộc vào } m \text{ thì } 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$+ \text{ Với } a = \frac{3}{4} \text{ ta có } F = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 = 2$$

Rõ ràng khi đó ta thấy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức trên chẳng

$$\text{hạn như } m = 0 \text{ ta có } 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ thỏa hệ thức của bài toán.}$$

Câu 72. Tìm tham số m để đường thẳng $y = 3x + m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 và $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 1

B. -1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } \frac{x^2}{x-1} = 3x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (m-3)x - m = 0, x \neq 1.$$

Điều kiện có 2 nghiệm phân biệt khác 1:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 9 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} : \text{Đúng } \forall m$$

$$\text{Ta có: } |x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{4} = \frac{\sqrt{m^2 + 2m + 9}}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{(m+1)^2 + 8} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy giá trị $|x_1 - x_2|$ nhỏ nhất khi $m = -1$.

Câu 73. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m, m > 0$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4 - 3x^2 - 2 = m \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 - m = 0$$

Với mọi $m > 0$ thì đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; m)$ và $B(x_B; m)$ đối xứng qua Oy, $x_A < x_B$.

$$\text{Tam giác OAB vuông tại O nên } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A \cdot x_B + m^2 = 0$$

$$\text{Mà } x_A + x_B = 0 \text{ nên } x_A = -m; x_B = m$$

$$\text{Do đó } m^4 - 3m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m^3 + 2m^2 + m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (vì } m > 0)$$

Ý kiến phản biện: bài toán sẽ được xét ở lớp 12 nên có thể không cần thiết đưa vào lớp 10, hơn nữa học sinh lớp 10 chưa học đến tích vô hướng của 2 véc tơ, giải theo lớp 10 cần sửa chút lời giải cho phù hợp

Tam giác OAB vuông tại O

$$\Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow x_A^2 + m^2 + x_B^2 + m^2 = (x_A - x_B)^2 \Leftrightarrow x_A \cdot x_B + m^2 = 0$$

Câu 74. Để đường thẳng $y = 3x + m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 và $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây

A. $(-2; 0)$

B. $(0; 2)$

C. $(2; 4)$

D. $(-4; -2)$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x^2}{x-1} = 3x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (m-3)x - m = 0, x \neq 1.$$

Điều kiện có 2 nghiệm phân biệt khác 1:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 9 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} : \text{Đúng } \forall m$$

$$\text{Ta có: } |x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{4} = \frac{\sqrt{m^2 + 2m + 9}}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{(m+1)^2 + 8} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy giá trị $|x_1 - x_2|$ nhỏ nhất khi $m = -1$.

Câu 75. Cho hàm số $f(x) = 2(m-4)x + \frac{m(x-2)}{|x-2|}$ (m là tham số)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm thuộc khoảng $(1; 2)$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn C

Vì x thuộc $(1; 2)$ nên $f(x) = 2(m-4)x - m$

Giả sử $A(1; m-8)$; $B(2; 3m-16)$

Để đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm thuộc khoảng $(1; 2)$ thì A, B nằm 2 phía với trục Ox.

$$\text{Ta có: (I)} \begin{cases} m-8 > 0 \\ 3m-16 < 0 \end{cases} \quad \text{hoặc (II)} \begin{cases} m-8 < 0 \\ 3m-16 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Hệ (I) vô nghiệm. Hệ (II) } \frac{16}{3} < m < 8 \Rightarrow m = 6; 7.$$

* Có thể mở rộng khoảng xác định $(1; 3)$

$$\text{Khi đó ta có: } f(x) = \begin{cases} 2(m-4)x - m, & x \in (1; 2) \quad (1) \\ 2(m-4)x + m, & x \in (2; 3) \quad (2) \end{cases}$$

TH 1: Tương tự trên

TH2: $C(2; 5m-6)$; $D(3; 7m-24)$. Hai điểm C, D nằm 2 phía trục Ox $\Leftrightarrow \frac{16}{5} < m < \frac{24}{7}$. Không có giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 76. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P) và đường thẳng d: $y = mx + 3$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.

A. 2.

B. 1

C. 0.

D. 3

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 - 4x + 3 = mx + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (4 + m)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m + 4 \end{cases}$$

gọi $A(0;3)$ và $B(m+4; m^2+4m+3)$, ta có OA thuộc Oy nên

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot d(B, Oy) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |m + 4| = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow |m + 4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7 \end{cases}$$

Câu 77. Cho hai hàm số $y = x^2 - 2(m-1)x - 2m$ và $y = 2x + 3$. Tìm m để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm A và B phân biệt sao cho $OA^2 + OB^2$ nhỏ nhất (trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m = \frac{119}{5}$.

B. $m = \frac{11}{10}$.

C. $m = \frac{-11}{10}$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$$x^2 - 2(m-1)x - 2m = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m - 3 = 0 (*)$$

Ta có: $\Delta' = m^2 + 2m + 3 > 0$ với mọi m nên $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt hay hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B .

Gọi x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$. Khi đó $A(x_A; 2x_A + 3), B(x_B; 2x_B + 3)$

Ta có $\overrightarrow{OA} = (x_A; 2x_A + 3), \overrightarrow{OB} = (x_B; 2x_B + 3)$.

$$OA^2 + OB^2 = x_A^2 + (2x_A + 3)^2 + x_B^2 + (2x_B + 3)^2$$

$$= 5(x_A^2 + x_B^2) + 12(x_A + x_B) + 18$$

$$= 5(x_A + x_B)^2 + 12(x_A + x_B) + 18 - 10x_Ax_B \quad (1)$$

Theo định lý Vi-et ta có $x_A + x_B = 2m, x_Ax_B = -2m - 3$

$$\text{Khi đó (1) trở thành } OA^2 + OB^2 = 20m^2 + 44m + 48 = 20\left(m + \frac{11}{10}\right)^2 + \frac{119}{5}$$

Tìm được $OA^2 + OB^2$ nhỏ nhất bằng $\frac{119}{5}$ khi $m = \frac{-11}{10}$.

Vậy $m = \frac{-11}{10}$ là giá trị cần tìm.

Câu 78. Cho hàm số bậc hai $y = 2x^2 - 3x - 5$ có đồ thị là (P) và đường thẳng $(d): y = mx + 2m^2 - 1$.

Gọi S là tập gồm tất cả các giá trị thực của m sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = -3x + 5$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $S = \emptyset$.

B. Tổng của tất cả các phần tử của S là $-\frac{2}{3}$.

C. Tổng của tất cả các phần tử của S là $-\frac{11}{3}$.

D. S có đúng một phần tử.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$2x^2 - (m+3)x - 2m^2 - 4 = 0. (*)$$

Phương trình này có $\Delta = (m+3)^2 + 8(2m^2 + 4)$ luôn nhận giá trị dương nên phương trình (*)

luôn có hai nghiệm phân biệt. Gọi 2 nghiệm đó là x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = \frac{m+3}{2}$.

Như vậy, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B lần lượt có hoành độ là x_1, x_2 .

Trung điểm của đoạn thẳng AB là

$$I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; m\frac{x_1 + x_2}{2} + 2m^2 - 1\right) = \left(\frac{m+3}{4}; \frac{m(m+3)}{4} + 2m^2 - 1\right).$$

A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = -3x + 5$ khi và chỉ khi (d) cắt đường thẳng $y = -3x + 5$ tại I, tương đương $m \neq -3$ và I thuộc đường thẳng $y = -3x + 5$, tương đương $3m^2 + 2m - 5 = 0$.

Vậy S có hai phần tử và tổng của chúng là $-\frac{2}{3}$.

Câu 79. Cho đồ thị hàm số (P): $y = (m-6)x^2 - 2$ và đường thẳng (d) $y = 2mx + 1$ trong đó x là ẩn, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2018; 2018]$ để (d) và (P) có điểm chung.

A. 4037.

B. 4029.

C. 4035.

D. 4031.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $(m-6)x^2 - 2 = 2mx + 1$

$$\Leftrightarrow (m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0 \quad (*)$$

.Nếu $m = 6$ thay vào phương trình () ta được: $-12x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$.

*.Nếu $m \neq 6$ Ta có: $\Delta = m^2 + 3(m-6) = m^2 + 3m - 18$

Đồ thị (P) và đường thẳng (d) có điểm chung khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm thực

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 18 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -6 \\ m \geq 3 \end{cases} \quad (1)$$

Theo giả thiết: $m \in \mathbb{Z} \text{ \& } m \in [-2018; 2018]$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: có 4029 giá trị m thỏa mãn YCBT.

Câu 80. Cho Parabol (P): $y = x^2 + 2mx + 3$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị (P) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho tam giác IAB là tam giác đều (Với I là đỉnh của (P)).

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đỉnh của (P): $I(-m; 3 - m^2)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là: $x^2 + 2mx + 3 = 0$ (*)

Để (P) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{3} \\ m > \sqrt{3} \end{cases}$$

Khi đó phương trình (*) có nghiệm: $x_1 = -m + \sqrt{m^2 - 3}$, $x_2 = -m - \sqrt{m^2 - 3}$

$$\Rightarrow A(-m + \sqrt{m^2 - 3}; 0), B(-m - \sqrt{m^2 - 3}; 0), \overline{AB}(-2\sqrt{m^2 - 3}; 0), \overline{IA}(\sqrt{m^2 - 3}; m^2 - 3)$$

Do (P) nhận đường thẳng $x = -m$ làm trục đối xứng suy ra tam giác IAB cân tại I để tam giác IAB đều

$$\Leftrightarrow AB = IA \Leftrightarrow \sqrt{4(m^2 - 3)} = \sqrt{(m^2 - 3) + (m^2 - 3)^2} \Leftrightarrow 4(m^2 - 3) = (m^2 - 3) + (m^2 - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{6} \quad (tm)$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn

Câu 81. Cho hàm số $y = -x^2 + 2(m+1)x + 1 - m^2$ (1), (m là tham số). Gọi m_1, m_2 giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác KAB vuông tại K , trong đó $K(2; -2)$. Khi đó $m_1^2 + m_2^2$ bằng:

A. 13

B. 12

C. 11

D. 10

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^2 + 2(m+1)x + 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

Đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (2)

$$\text{có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - m^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Gọi các nghiệm của phương trình (2) là x_1, x_2 .

Tọa độ các giao điểm A, B là $A(x_1; 0), B(x_2; 0)$; $\overline{KA} = (x_1 - 2; 2), \overline{KB} = (x_2 - 2; 2)$.

$$KA \perp KB \Leftrightarrow \overline{KA} \cdot \overline{KB} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 - 2 \cdot 2(m+1) + 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $m > -1$, ta được $m = 1, m = 3$.

Ý kiến phản biện: Học sinh chưa học tới tích vô hướng, nên chọn hướng sử dụng pitago để giải quyết tam giác vuông

$$KA \perp KB \Leftrightarrow KA^2 + KB^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + 8 = (x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0$$

Câu 82. Biết (P): $y = m^2x^2 - 2(m+1)x - m^2 + 2m + 2$ luôn đi qua 1 điểm cố định A, đường thẳng (d) đi qua A và cắt (Δ): $y = -\frac{1}{2}x - 1$ tại điểm có tung độ bằng -2. Giả sử (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B. Gọi $I(x_I; y_I)$ là trung điểm của AB. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để $OI = \frac{\sqrt{29}}{6}$. Khi đó tổng của tất cả các phần tử của S thuộc khoảng nào sau đây:

A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(2; \frac{11}{4}\right)$.

C. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{7}{4}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } m^2x^2 - 2(m+1)x - m^2 + 2m + 2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)m^2 - 2(x-1)m - 2x + 2 - y = 0 \quad (*)$$

A là điểm cố định của (P) $\Leftrightarrow$ tọa độ A thỏa (*), $\forall m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Tọa độ A thỏa hệ

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ -2(x-1) = 0 \\ -2x + 2 - y = 0 \end{cases}$$

Suy ra $A(1; 0)$ là điểm cố định của (P).

Gọi $M(x_M; -2) = (d) \cap (\Delta)$. $M \in (\Delta) \Leftrightarrow -2 = -\frac{1}{2}x_M - 1 \Rightarrow M(2; -2)$.

$A, M \in (d) \Rightarrow (d): y = -2x + 2$. Phương trình hoành độ điểm chung của (P) và (d) :

$$m^2x^2 - 2(m+1)x - m^2 + 2m + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow m^2x^2 - 2mx - m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ m^2x + m^2 - 2m = 0 \end{cases}$$

Để (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 \cdot 1 + m^2 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{m} \\ y_I = -2x_I + 2 = -\frac{2}{m} + 2 \end{cases} \Rightarrow OI^2 = x_I^2 + y_I^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{4}{m^2} - \frac{8}{m} + 4 = \frac{29}{36} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{5} \\ m = \frac{30}{23} \end{cases} \text{ (Nhận)}$$

Vậy $S = \frac{6}{5} + \frac{30}{23} \approx 2.5043478$

Câu 83. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 12 & \text{khi } x \geq 2 \\ x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các giá trị nguyên

của tham số m để phương trình $|f(|x|)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là:

A. 0

B. 1

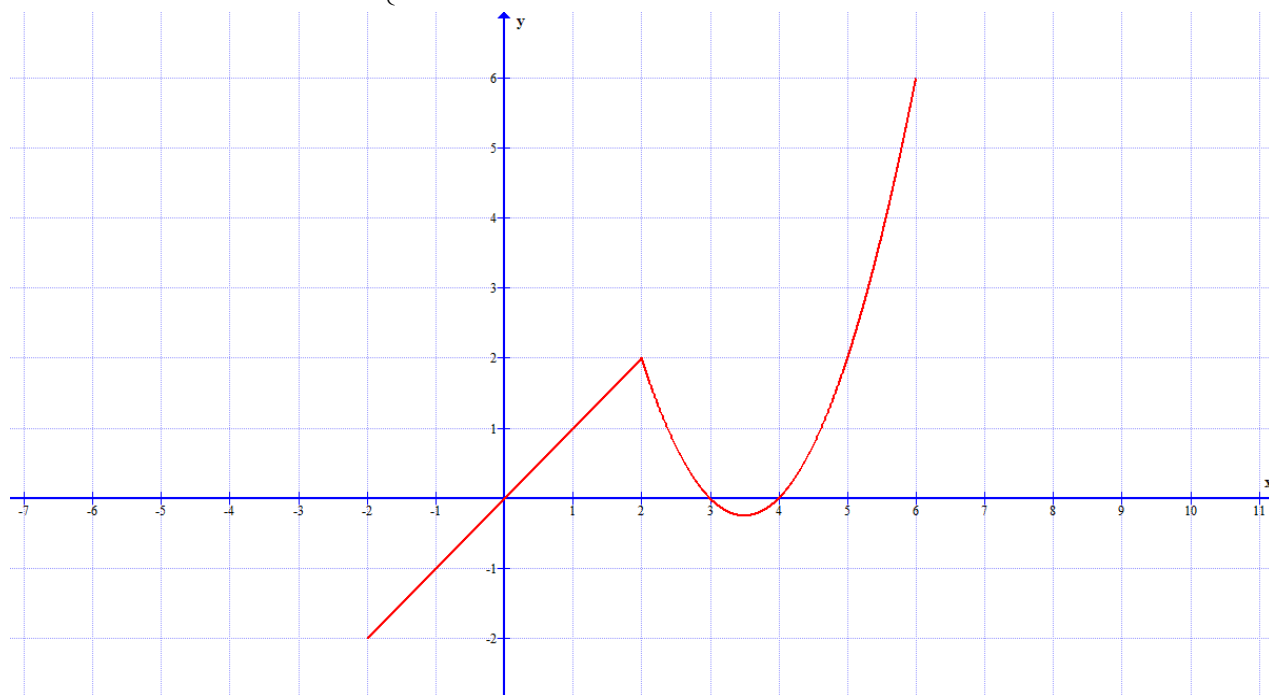
C. 2

D. 3

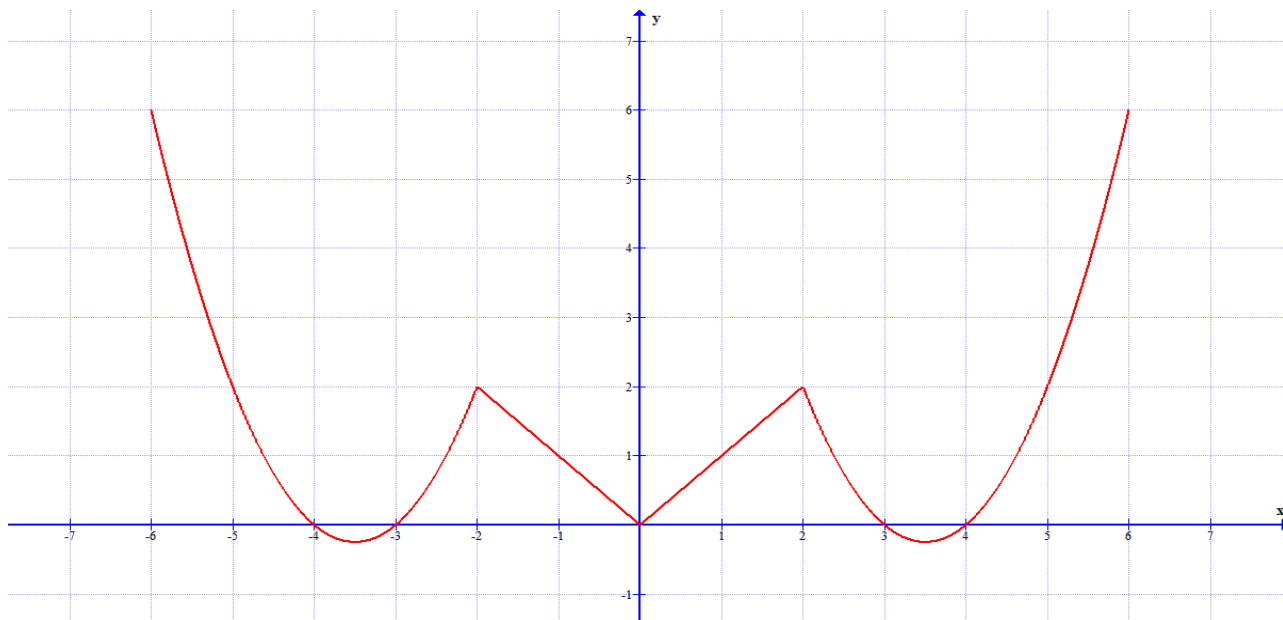
Lời giải

Chọn B

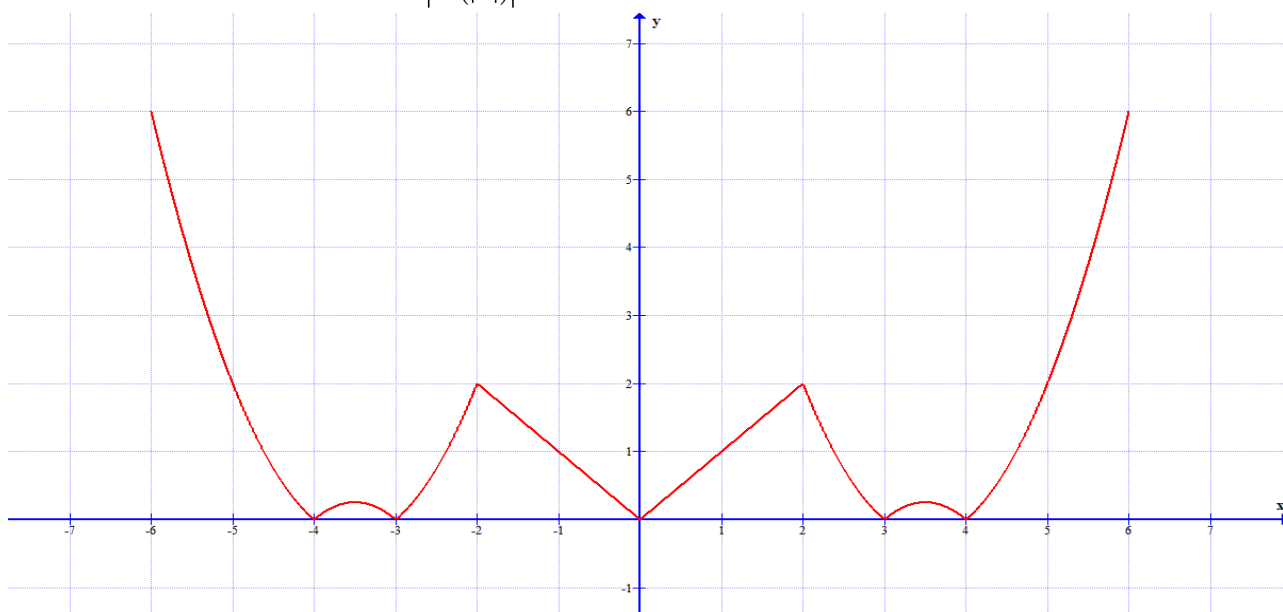
+) Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 12 & \text{khi } x \geq 2 \\ x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$



+) Suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhờ tính chất của hàm số chẵn



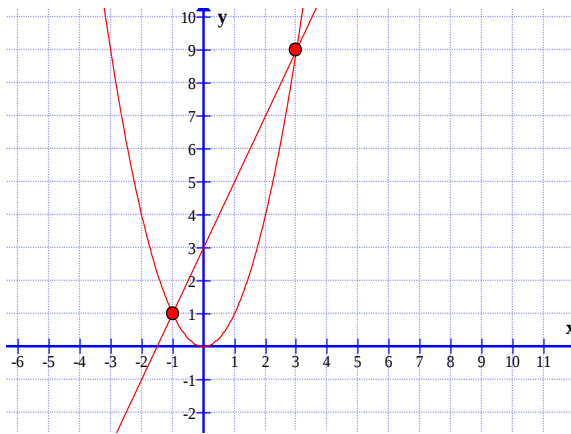
+) Suy ra đồ thị của hàm số $y = |f(|x|)|$



Vậy phương trình $|f(|x|)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in \left(\frac{1}{4}; 2\right) \xrightarrow{M \in \mathbb{Z}} m = 1$

Câu 84. Cho parabol (P) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng d có phương trình $y = g(x)$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) - g(x) \leq 0$ là $[a; b]$. Giả sử $A(a; y_1), B(b; y_2)$ là giao điểm của (P) và d . Gọi $M(m; m^2)$ với $m \in [a; b]$. Để diện tích ΔMAB đạt giá trị lớn nhất thì m phải thỏa mãn:

- A.** $m \in (-1; 0)$ **B.** $m \in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ **C.** $m \in (2; 3)$ **D.** $m \in (0; 1)$



Lời giải

Chọn B

Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) - g(x) \leq 0$ là hoành độ của những điểm thuộc (P) và nằm phía dưới hoặc thuộc đường thẳng $y = g(x)$

Dựa vào đồ thị suy ra tập nghiệm $T = [-1; 3]$

$\Rightarrow a = -1; b = 3 \Rightarrow A(-1; 1); B(3; 9) \Rightarrow$ Đường thẳng d có phương trình là $y = 2x + 3$

$$S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_M - y_A) - (x_M - x_A)(y_B - y_A)|$$

$$= \frac{1}{2} |4 \cdot (m^2 - 1) - (m + 1) \cdot 8| = 2 |m^2 - 2m - 3|$$

$\Rightarrow$ để $S_{\Delta MAB}$ đạt diện tích max thì $|m^2 - 2m - 3|$ đạt max

Mặt khác do $m \in [a; b]$ hay $m \in [-1; 3]$ nên $|m^2 - 2m - 3| = -m^2 + 2m + 3 = 4 - (m - 1)^2 \leq 4$

$\Rightarrow m = 1$ thì $S_{\Delta MAB}$ đạt diện tích lớn

Ý kiến phản biện: Phương pháp giải sử dụng công thức tính diện tích tam giác học sinh lớp 10 chưa học đến. Phương pháp giải hơi dài, tính toán dài. Đề bài cho một số yếu tố không cần thiết như nghiệm của bất phương trình hay tọa độ điểm $M(m; m^2)$ thì lộ ngay phương trình parabol

Có thể giải nhanh hơn: để $S_{\Delta MAB}$ đạt diện tích max khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới đường thẳng AB lớn nhất hay khi tiếp tuyến của (P) tại M song song với AB. Vậy tiếp tuyến của (P) tại M có dạng $y = 2x + n$. Suy ra $n = -1$ và $M(1; 1)$ hay $m = 1$

Câu 85. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + m$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp các giá trị của m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn ΔOAB vuông tại O . Khi đó số các phần tử thuộc S bằng:

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

+) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và $(P): x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0$ (1)

+) d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

+) Khi đó d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt là: $A(x_A; x_A^2)$ và $B(x_B; x_B^2)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} = (x_A; x_A^2), \overrightarrow{OB} = (x_B; x_B^2), (\text{đk } O, A, B \text{ không thẳng hàng}) \Leftrightarrow x_A, x_B \neq 0$$

Với x_A, x_B là các nghiệm của phương trình (1) nên theo vi-ét:
$$\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A \cdot x_B = -m \end{cases}$$

Theo giả thiết ΔOAB vuông tại $O \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + x_A^4 + x_B^2 + x_B^4 = (x_A - x_B)^2 + (x_A^2 - x_B^2)^2 \Leftrightarrow 2x_A \cdot x_B + 2(x_A \cdot x_B)^2 = 0$$

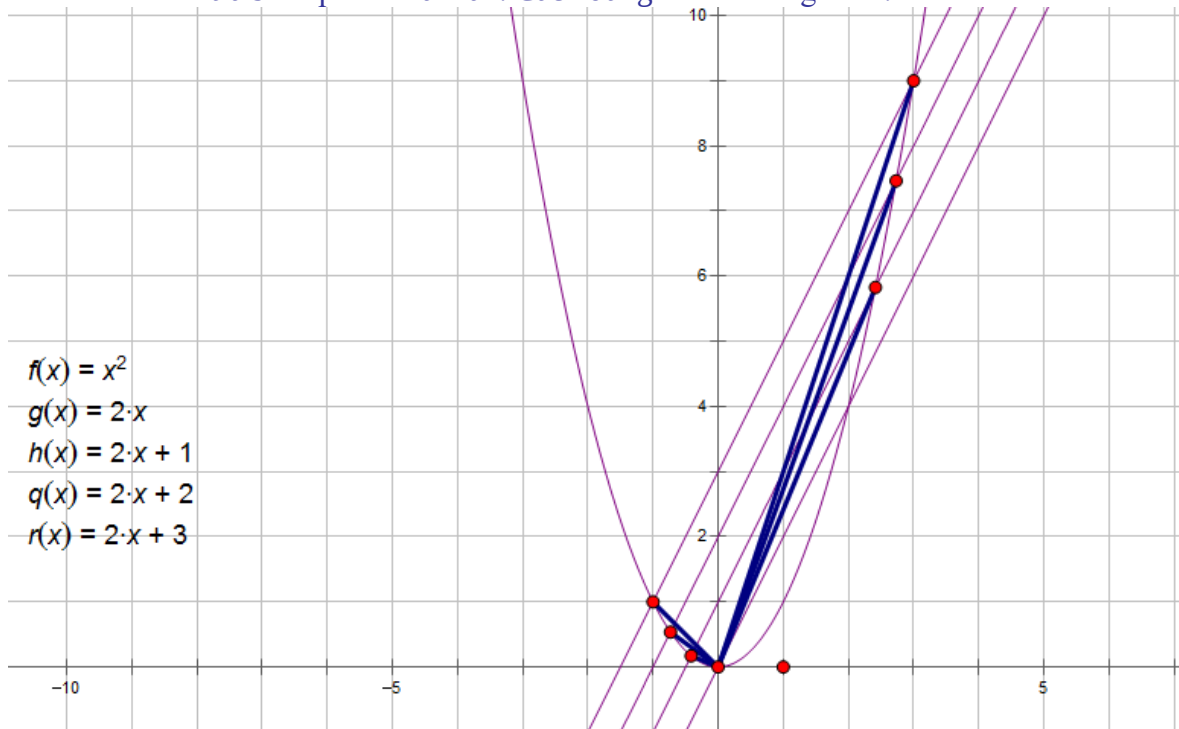
$$\Leftrightarrow -2m + 2m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

So sánh với các đk ta thấy $m = 0$ loại, $m = 1$ thỏa mãn $\Rightarrow S = \{1\}$.

Nội dung phân biện:

- Kiến thức tương quan lớp 10 phần hàm số và tọa độ véc tơ, độ dài véc tơ chưa học kịp cùng nhau. Bài này sử dụng cuối kì 1 thì được. Nếu đến thời điểm đó thì dùng tích vô hướng 2 véc tơ sẽ đơn giản hơn về mặt biến đổi.

- Với điều kiện m nguyên thì có thể dùng hình vẽ đồ thị $y = x^2$ và đồ thị hàm số $y = 2x$ để kiểm tra đáp án được. Bằng cách tịnh tiến đường thẳng $y = 2x$ theo các đơn vị nguyên từ đó nhìn hình kiểm tra số đáp án thỏa mãn. Cách dùng hình ở trang dưới:



Câu 86. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol (P) đỉnh $I(1; 2)$. Biết rằng đường thẳng $(d): y = 4$ cắt (P) tại hai điểm A, B và tam giác IAB đều. Tính $f(2)$.

- A.** $f(2) = \frac{7}{2}$. **B.** $f(2) = \frac{8}{3}$. **C.** $f(2) = \frac{5}{2}$. **D.** $f(2) = 3$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = a(x-1)^2 + 2.$$

Khoảng cách từ đỉnh I đến đường thẳng (d) bằng 2 do đó $AB = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) : $a(x-1)^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{a}}$

(ĐK có nghiệm là) $a > 0$.

Giả sử $A\left(1 - \sqrt{\frac{2}{a}}; 4\right), B\left(1 + \sqrt{\frac{2}{a}}; 4\right)$, ta có $AB = 2\sqrt{\frac{2}{a}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

$$f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2 + 2, f(2) = \frac{7}{2}$$

Câu 87. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 2m = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + m - 2 = 0\}$.

Giả sử các phần tử của A được sơn xanh, các phần tử của B được sơn đỏ. Người ta xếp các phần tử của A và B lên một trục số. Tìm số giá trị nguyên của m để $A \cup B$ có 4 phần tử và 2 phần tử cùng màu không đứng kề nhau.

A. 9.

B. 6.

C. 5.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình $x^2 - x + 2m = 0(1)$ và

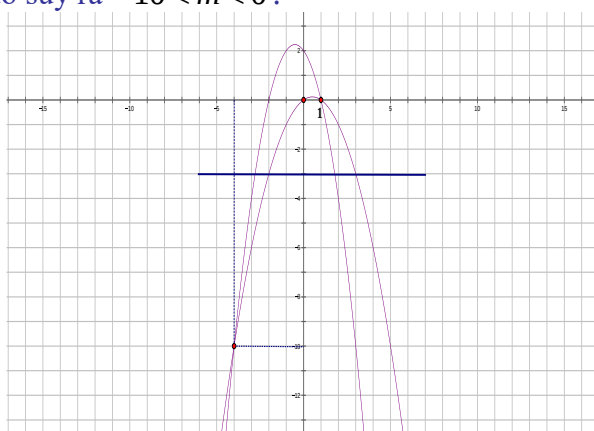
$x^2 + x + m - 2 = 0(2)$ có nghiệm xen kẽ.

Cách 1: Cô lập tham số.

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$(2) \Leftrightarrow m = -x^2 - x + 2$$

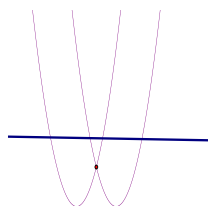
Vẽ parabol $(P_1): y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, parabol $(P_2): y = -x^2 - x + 2$ và đường thẳng $y = m$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Từ đó suy ra $-10 < m < 0$.



Cách 2:

Vẽ 2 parabol $y = x^2 - x + 2m$ và $y = x^2 + x + m - 2$. Thấy 2 parabol có đúng 1 điểm chung

$$M\left(\frac{m+2}{2}; \frac{m^2+10m}{4}\right)$$



Từ đó suy ra $m^2 + 10m < 0 \Leftrightarrow -10 < m < 0$. Các thầy cô có thể tạo ra câu tương tự và vận dụng hai cách giải trên, cũng có thể mở rộng cho bài toán điểm cực trị hàm bậc 3.

Câu 88. Cho các Parabol $(P_1): y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$, $(P_2): y = g(x) = ax^2 - 4ax + b$ ($a > 0$) có các đỉnh lần lượt là I_1, I_2 . Gọi A, B là giao điểm của (P_1) và Ox . Biết rằng 4 điểm A, B, I_1, I_2 tạo thành tứ giác lồi có diện tích bằng 10. Tính diện tích S của tam giác IAB với I là đỉnh của Parabol $(P): y = h(x) = f(x) + g(x)$.

A. $S = 4$.

B. $S = 6$.

C. $S = 7$.

D. $S = 9$.

Lời giải

Chọn B

Dễ dàng tìm được $A(0;0)$, $B(4;0)$, $I_1(2;-1)$, $I_2(2;b-4a)$ với $b-4a > 0$ (vì tứ giác I_1AI_2B lồi). Khi đó tứ giác I_1AI_2B có hai đường chéo vuông góc nên

$$S_{I_1AI_2B} = \frac{1}{2} AB \cdot I_1I_2 = \frac{1}{2} 4 \cdot (1+b-4a) = 2(1+b-4a) = 10 \Leftrightarrow b = 4a + 4.$$

Ta có $h(x) = f(x) + g(x) = \left(a + \frac{1}{4}\right)x^2 - (4a+1)x + 4a+4$ nên tọa độ đỉnh I là

$$\begin{cases} x_I = \frac{4a+1}{2\left(a+\frac{1}{4}\right)} = 2 \\ y_I = h(2) = 4a+1-8a-2+4a+4 = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2;3) \Rightarrow S_{\Delta AB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

Hoàng Trọng Anh

Câu 89. Trong hệ trục Oxy , cho parabol $(P): y = x^2 - 1$ và đường thẳng $d: y = 5x + m$ (với m là tham số). Tổng của tất cả các giá trị m để cho đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho OA vuông góc với OB là:

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2 - 1 = 5x + m \Leftrightarrow x^2 - 5x - m - 1 = 0 (*)$.

Để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt hay

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 25 + 4(m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{29}{4}.$$

Ta có hai trường hợp sau:

TH1: Nếu $m = -1$ thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(0; -1)$ và $B(5; 24)$, dễ thấy OA không vuông góc với OB , nên $m = -1$ loại.

TH2: Nếu $m \neq -1, m > -\frac{29}{4}$ thì đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} OA \perp OB &\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \left(5 + \frac{m}{x_1}\right) \left(5 + \frac{m}{x_2}\right) = -1 \Leftrightarrow 25 + 5m \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{m^2}{x_1 x_2} = -1 \\ &\Leftrightarrow 26x_1 x_2 + m^2 + 5m(x_1 + x_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 26(-1-m) + m^2 + 25m = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1-\sqrt{105}}{2} \\ m = \frac{1+\sqrt{105}}{2} \end{cases} (TM)$$

Vậy tổng của tất cả các giá trị m để cho đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B

sao cho OA vuông góc với OB là: $\frac{1-\sqrt{105}}{2} + \frac{1+\sqrt{105}}{2} = 1$.

Câu 90. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol (P) . Biết rằng đường thẳng $d_1: y = -\frac{5}{2}$ cắt (P) tại một điểm duy nhất, đường thẳng $d_2: y = 2$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -1 và 5 . Tính giá trị $T = a + 2b + 3c$.

A. $T = -2$.

B. $T = -3$.

C. $T = -4$.

D. $T = -5$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $I(x_I; y_I)$ là đỉnh của (P) . Vì đường thẳng $d_1: y = -\frac{5}{2}$ cắt (P) tại một điểm duy nhất nên ta được $y_I = -\frac{5}{2}$. Vì đường thẳng $d_2: y = 2$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -1 và 5 nên ta được $x_I = \frac{-1+5}{2} = 2$ và (P) đi qua điểm $M(-1; 2)$.

Từ các giả thiết trên ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a-b+c=2 \\ -\frac{b}{2a}=2 \\ 4a+2b+c=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=2 \\ 4a+b=0 \\ 4a+2b+c=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-2 \\ c=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $T = a + 2b + 3c = -5$.

Câu 91. Cho hàm số $f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$. Tất cả các giá trị m để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 trên đoạn $[0; 1]$ thuộc tập hợp nào sau đây?

- A. $(-\infty; -3)$. B. $[-3; 1]$. **C. $[-2; 2]$.** D. $[0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ đỉnh của parabol $f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$ là $x_I = -m - \frac{1}{2}$. Ta có các trường hợp sau:

TH1: Nếu $x_I \in [0; 1] \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$ thì

$$\min_{[0;1]} f(x) = f(x_I) = 1 \Leftrightarrow -m - \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4} \text{ (không thỏa mãn)}$$

TH2: Nếu $x_I < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ thì

$$\min_{[0;1]} f(x) = f(0) = 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Do đó $m = \sqrt{2}$ thỏa mãn.

TH3: Nếu $x_I > 1 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$ thì

$$\min_{[0;1]} f(x) = f(1) = 1 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-2 \end{cases}$$

Do đó $m = -2$ thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = \sqrt{2}$ và $m = -2$.

Câu 92. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2x - 3$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B nằm về hai phía của đường thẳng có phương trình $y = 1$?

- A. 3. B. 4. **C. 5.** D. 6.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 2x - 3 = x + m \Leftrightarrow x^2 + x - 3 - m = 0$ (1)

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{13}{4} \quad (2)$$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (1)

Ta phải có $(y_1 - 1)(y_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow (x_1 + m - 1)(x_2 + m - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 + (m - 1)(x_1 + x_2) + m^2 - 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 1 < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < m < 2 + \sqrt{5} \text{ (thỏa (2))}$$

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Ý kiến phản biện: Học sinh chưa học về dấu tam thức bậc 2, do vậy khi cho đề nên để các bất phương trình bậc 2 có nghiệm hữu tỷ

Câu 93. Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 3m - 1$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$(x_1 - m)\sqrt{x_2} + (x_2 - m)\sqrt{x_1} + 2m = 2\sqrt{3m - 1}$ (*). Khi đó tổng các phần tử của S là:

A. $\frac{23 - 6\sqrt{5}}{12}$

B. $\frac{23 + 6\sqrt{5}}{12}$

C. $\frac{41}{12}$

D. 3

Lời giải

Chọn A

$$\text{ĐK: } \begin{cases} m \geq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 3x + 3m - 1 = 0$ (**)

đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow$ pt(**) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4(3m - 1) > 0 \\ 3 > 0 \\ 3m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq m < \frac{13}{12}. \text{ Và theo định lí Viet ta có}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 3m - 1 \end{cases}$$

Ta có

$$(x_1 - m)\sqrt{x_2} + (x_2 - m)\sqrt{x_1} = x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1} - m(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1 x_2} - m)$$

$$\text{Vì } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}}$$

$$\text{Khi đó: } (x_1 - m)\sqrt{x_2} + (x_2 - m)\sqrt{x_1} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}}(\sqrt{3m - 1} - m)$$

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}}(\sqrt{3m - 1} - m) = 2(\sqrt{3m - 1} - m) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3m - 1} = m \\ \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}} = 2 \end{cases}$$

Nếu $\sqrt{3m - 1} = m$, với đk trên ta có hai vế không âm nên pt

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

kết hợp với đk ta được $m = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Nếu $\sqrt{3+2\sqrt{3m-1}} = 2 \Leftrightarrow 3+2\sqrt{3m-1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3m-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{5}{12}$ (thỏa mãn đk)

Vậy $S = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{5}{12} \right\}$, nên tổng các phần tử của S là $\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{12} = \frac{23-6\sqrt{5}}{12} \Rightarrow$ chọn A.

Câu 94. Cho hàm số: $y = (m-2)x^2 - (2m+1)x + 3m-3$ (C). Giả sử m là giá trị để đồ thị hàm số (C) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ sao cho $(2m+1)x_1 + (m-2)x_2^2 = m-2$. Hỏi m gần với giá trị nào sau đây nhất:

A. không tồn tại m . **B.** 0,53. **C.** 1. **D.** 1,5.

Lời giải

Chọn A

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là

$$(m-2)x^2 - (2m+1)x + 3m-3 = 0(1).$$

+ Để đồ thị hàm số (C) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt thì PT (1) phải có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ (2m+1)^2 - 4(m-2)(3m-3) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ -8m^2 + 40m - 23 > 0 \end{cases} (*)$$

+) Theo hệ thức Viet ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{m-2}$ và $x_1 x_2 = \frac{3m-3}{m-2}$.

+) Theo bài ra: $(2m+1)x_1 + (m-2)x_2^2 = m-2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)x_1 + x_2^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m+1}{m-2} \right)^2 - \frac{3m-3}{m-2} = 1 \Leftrightarrow 17m = 9 \Leftrightarrow m = \frac{9}{17} \text{ (Không thỏa mãn(*))}$$

Vậy không có giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 95. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1$ có đồ thị (C). Gọi P là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để cho đồ thị (C) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của P là

A. 5. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 4x - 1 = m \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x - 1, x \geq -1$

Ta có bảng biến thiên

x	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	4	-5	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được $m \in \{1; 2; 3; 4\}$

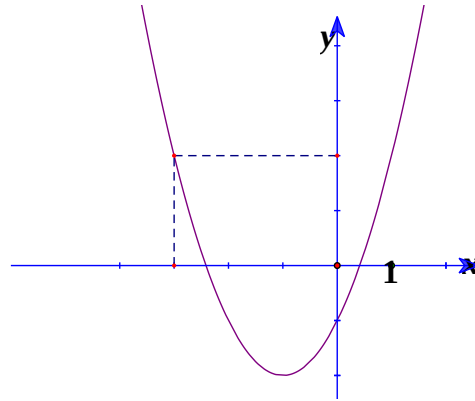
Câu 96. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Tìm m để phương trình $f(|x| + m) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m = -3$

B. $m = -2$

C. $m = 2$

D. $m = 3$



Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x| + m)$ gồm 2 bước:

+ Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang phải m đơn vị nếu $m \geq 0$, hoặc tịnh tiến sang trái $|m|$ đơn vị nếu $m < 0$ được đồ thị hàm số $y = f(x + m)$.

+ Giữ nguyên phần đồ thị trên trục Oy sang phải sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đó qua trục Oy .

Do đó phương trình $f(|x| + m) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị

$y = f(x + m)$ tại một điểm trên Oy và một điểm bên phải Oy khi và chỉ khi $m = 3$.

Ý kiến phản biện: Lời giải bài toán trên bị sai ở việc vẽ đồ thị hàm $y = f(|x| + m)$

Vẽ đúng: + Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái m đơn vị nếu $m > 0$, hoặc tịnh tiến sang phải $|m|$ đơn vị nếu $m < 0$ được đồ thị hàm số $y = f(x + m)$. Sau đó lấy đối xứng qua Oy . Khi đó được đáp án là A

+ Có thể giải trực tiếp theo cách khác: $f(|x| + m) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = -3 - m \\ |x| = 1 - m \end{cases}$.

Từ đó suy ra ngay giá trị $m = -3$ thỏa mãn

VẤN ĐỀ 5. MIN, MAX

Câu 97. Cho parabol (P) $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là tâm của một hình vuông $ABCD$, trong đó C, D nằm trên trục hoành và A, B nằm trên (P) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = ac + 2b$ bằng bao nhiêu?

A. 2.

B. -3.

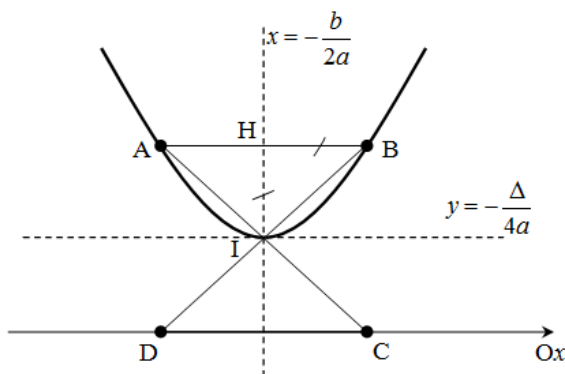
C. 4.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

Phác họa đồ thị như hình vẽ:



Nhận thấy: $HI = HB = -\frac{\Delta}{4a}$

Tọa độ đỉnh của parabol $I = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Suy ra tọa độ điểm $B = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{-\Delta}{4a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Thay tọa độ điểm B vào parabol $(P): y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$; ta được:

$$-\frac{\Delta}{2a} = a\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \Delta = -4 = b^2 - 4ac \rightarrow T = ac + 2b = \frac{b^2}{4} + 2b + 1 = \left(\frac{b}{2} + 2\right)^2 - 3 \geq -3$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là $T_{\min} = -3$

Câu 98. Một gia đình sản xuất cà phê nguyên chất. Do điều kiện nhà xưởng nên mỗi đợt gia đình đó sản xuất được t kg cà phê ($t \leq 30$). Nếu gia đình đó bán sỉ x kg thì giá của mỗi kí được xác định bởi công thức $G = 350 - 5x$ (nghìn đồng) và chi phí để sản xuất x kg cà phê được xác định bởi công thức $C = x^2 + 50x + 1000$ (nghìn đồng).

Tính chi phí để gia đình đó sản xuất kg cà phê thứ 10

- A.** 1600 nghìn. **B.** 69 nghìn. **C.** 1100 nghìn. **D.** 1000 nghìn.

Lời giải

Chọn B

Chi phí để sản xuất kg cà phê thứ 10 là $C(10) - C(9) = (10^2 + 50 \cdot 10) - (9^2 + 50 \cdot 9) = 69$ (nghìn đồng)

(Học sinh thường nhầm lẫn chi phí sản xuất kg thứ 10 với chi phí sản xuất 10kg)

Câu 99. Một gia đình sản xuất cà phê nguyên chất. Do điều kiện nhà xưởng nên mỗi đợt gia đình đó sản xuất được t kg cà phê ($t \leq 30$). Nếu gia đình đó bán sỉ x kg thì giá của mỗi kí được xác định bởi công thức $G = 350 - 5x$ (nghìn đồng) và chi phí để sản xuất x kg cà phê được xác định bởi công thức $C = x^2 + 50x + 1000$ (nghìn đồng).

Để đạt được lợi nhuận tối đa, mỗi đợt gia đình đó nên sản xuất bao nhiêu kg cà phê.

- A.** $P = 20kg$. **B.** $25kg$. **C.** $15kg$. **D.** $30kg$.

Lời giải

Chọn B

Doanh thu khi gia đình bán x kg cà phê là $D = x(350 - 5x) = -5x^2 + 350x$ (nghìn)

Lợi nhuận thu được khi bán được x là

$$L = D(x) - C(x) = -5x^2 + 350x - (x^2 + 50x + 1000) = -6x^2 + 300x - 1000$$

Suy ra lợi nhuận đạt tối đa khi $x = \frac{300}{2 \cdot 6} = 25(kg)$

HS thường sai lầm khi nhầm hàm $D(x)$ với hàm $G(x)$

Câu 100. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$

Có bao nhiêu giá trị của a sao cho giá trị nhỏ nhất của trên đoạn $[0; 2]$ là bằng 5?

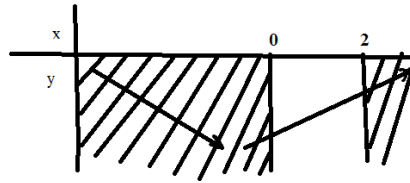
- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Parabol có hệ số của x^2 là $4 > 0$ nên bề lõm hướng lên. Hoành độ đỉnh $x_I = \frac{a}{2}$.

□ Nếu $\frac{a}{2} < 0 \Leftrightarrow a < 0$ thì $x_I < 0 < 2$. Ta có bảng biến thiên



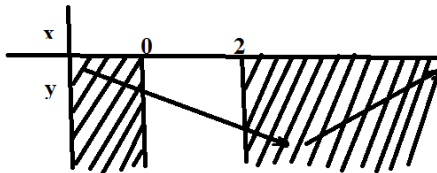
Từ bảng biến thiên ta có $\min_{[0;2]} f(x) = f(0) = a^2 - 2a + 2$. Theo yêu cầu bài toán:

$$a^2 - 2a + 2 = 5 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1(t/m) \\ a = 3(L) \end{cases}$$

□ Nếu $0 \leq \frac{a}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4$ thì $x_I \in [0; 2]$. Suy ra $f(x)$ đạt GTNN tại đỉnh.

Do đó $\min_{[0;2]} f(x) = f(\frac{a}{2}) = -2a + 2$ Theo yêu cầu bài toán: $-2a + 2 = 5 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2} < 0(L)$

□ Nếu $\frac{a}{2} > 2 \Leftrightarrow a > 4$ thì $x_I > 2 > 0$. Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có $\min_{[0;2]} f(x) = f(2) = a^2 - 10a + 18$. Theo yêu cầu bài toán:

$$a^2 - 10a + 18 = 5 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 + 2\sqrt{3}(t/m) \\ a = 5 - 2\sqrt{3}(L) \end{cases}$$

Vậy $a = -1$ hoặc $a = 5 + 2\sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 101. Cho hàm số bậc hai (P): $y = x^2 - 2mx + 3m - 2$, trong đó x là ẩn, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 và $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = -\frac{3}{4}$.

B. $m = \frac{3}{4}$.

C. $m = \pm \frac{3}{4}$.

D. $m = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ (*)

Để (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai

ng nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}$ (**)

Với điều kiện (**), theo định lý Viét ta có: $x_1 + x_2 = 2m, x_1 x_2 = 3m - 2$.

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 - 2(3m - 2) = 4m^2 - 6m + 4$

$x_1^2 + x_2^2 = 4m^2 - 6m + 4 = \left(2m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}, \forall m \in D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$2m - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4} \in D.$$

Vậy biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{7}{4}$ khi và chỉ khi $m = \frac{3}{4}$.

Câu 102. Gọi M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y = \sqrt{5+4x-x^2} + (x-2)^2 + 99$.
Tính $4M + m$.

A. 535.

B. 541.

C. 516.

D. 534.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = \sqrt{5+4x-x^2} = \sqrt{9-(x-2)^2} \quad (1)$$

Khi đó ta có $0 \leq t \leq 3$ hay $t \in [0; 3]$

Xét $y = f(t) = -t^2 + t + 108$ với $t \in [0; 3]$

t	0	$\frac{1}{2}$	3
f(t)	108	$\frac{433}{4}$	102

$$\text{Do vậy } 4M + m = 4 \cdot \frac{433}{4} + 102 = 535.$$

Câu 103. Tìm tham số m để biểu thức $P = 16x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(4x + \frac{1}{x}\right) + 7m + 11$ có giá trị nhỏ nhất bằng 18.

A. $m = -1$.

B. $m = 0$.

C. Đáp án khác.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 4x + \frac{1}{x} \Rightarrow 4x^2 - tx + 1 = 0$. Điều kiện để phương trình có nghiệm là

$$\Delta = t^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -4 \\ t \geq 4 \end{cases}$$

$P = t^2 - 2t + 7m + 3$. Ta có bảng biến thiên của P

t	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
P	$+\infty$	$7m+27$	$7m+11$	$+\infty$

Từ BBT ta có $\min P = 18 \Leftrightarrow 7m + 11 = 18 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 104. Cho $y = x^2 + mx + n$ (m, n là tham số), $f(x_0)$ là giá trị của hàm số tại x_0 . Biết $f(-2 + \sqrt{3} + m + n) = f(8 - \sqrt{3} - m - n)$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -8. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $T = m + n$ có giá trị bằng:

A. -5.

B. -4.

C. -6.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{TH1: } \begin{cases} -2 + \sqrt{3} + m + n = 8 - \sqrt{3} - m - n \\ -\frac{m^2}{4} + n = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + n = 5 - \sqrt{3} \\ -\frac{m^2}{4} + n = -8 \end{cases} \text{ (hệ này có nghiệm). Khi đó}$$

$$T = m + n = 5 - \sqrt{3}$$

TH2:

Theo giả thiết và tính chất đối xứng của đồ thị hàm số bậc 2 ta có

$$\begin{cases} \frac{-m}{2} = 3 \\ f(3) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ 9 + 3m + n = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T = -5$$

Câu 105. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$. Tính $abc = ?$

A. -6

B. 6

C. -2

D. 1

Lời giải

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \frac{-b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b = -2a \\ 3a + b = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } abc = -6 \Rightarrow$$

Chọn A

Câu 106. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0; 1]$. Khi đó giá trị của b là:

A. $|b| \leq 8$

B. $|b| > 8$

C. $0 \leq b \leq 8$

D. $-8 < b < 0$

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} -1 \leq f(0) = c \leq 1 \\ -1 \leq f(1) = a + b + c \leq 1 \\ -1 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq -3c \leq 3 \\ -1 \leq -a - b - c \leq 1 \\ -4 \leq a + 2b + 4c \leq 4 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có: $-8 \leq b \leq 8$

Chọn A

Câu 107. Cho hàm số $y = \left| \sqrt{2x - x^2} - 3m + 4 \right|$. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số y là nhỏ nhất.

A. $m = \frac{3}{4}$.

B. $m = \frac{3}{2}$.

C. $m = \frac{3}{8}$.

D. $m = \frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = [0; 2]$.

Gọi $A = \max_{[0; 2]} y$. Ta đặt $t = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow t = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$ do đó $0 \leq t \leq 1$

Khi đó hàm số được viết lại là $y = |t - 3m + 4|$ với $t \in [0; 1]$ suy ra

$$A = \max_{[0; 1]} |t - 3m + 4| = \max \{ |-3m + 4|, |5 - 3m| \}$$

Ta có $A \geq |-3m+4|$, $A \geq |5-3m|$. Suy ra: $2A \geq |-3m+4| + |5-3m|$

Áp dụng BĐT trị tuyệt đối ta có

$$|-3m+4| + |5-3m| = |3m-4| + |5-3m| \geq 1$$

Do đó $A \geq \frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra $m = \frac{3}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = \frac{3}{2}$.

Phản biện

Về đề bài: Nếu đề đáp án như trên học sinh có thể sử dụng máy tính là dễ dàng. Theo mình nên đổi lại câu hỏi như sau cho phù hợp hơn:

Cho hàm số $y = \left| \sqrt{2x-x^2} - 3m+4 \right|$. Gọi A là giá trị lớn nhất của hàm số. Khi A đạt giá trị nhỏ nhất thì m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $m \in (-2;0)$

B. $m \in (0;1)$

C. $m \in (1;2)$

D. $m \in (2;3)$

Câu 108. Gọi A, B là hai giao điểm của đường thẳng $d : y = -3x + 9$ và parabol

$P : y = -x^2 + 2x + 3$. Gọi điểm K a, b thuộc trục đối xứng của P sao cho $KA + KB$ nhỏ nhất. Tính $a+b$.

A. 1.

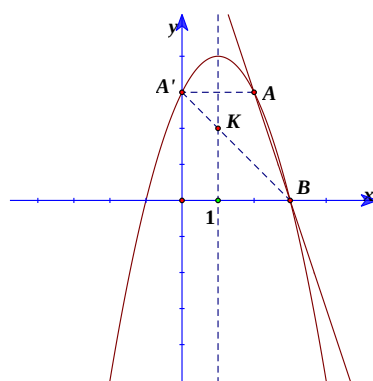
B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C



Tọa độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -3x + 9 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 9 \\ -x^2 + 5x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Suy ra: $A(2;3), B(3;0)$

Hoành độ hai điểm A, B cùng lớn hơn 1 nên chúng nằm cùng phía so với trục đối xứng $x=1$.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua trục đối xứng $x=1$. Khi đó: $A'(0;3)$.

Ta có: $KA + KB = KA' + KB \geq A'B$. Suy ra $KA + KB$ nhỏ nhất khi dấu bằng xảy ra. Lúc đó K, A', B thẳng hàng, tức là K là giao điểm của A'B với trục đối xứng $x=1$.

Phương trình đường thẳng A'B: $y = -x + 3$

Điểm $K(1;2)$

Vậy: $a+b=3$

Câu 109. Cho 2 số x, y thỏa mãn $(x+2y)\left((\sin x + \cos x)^4 + \sin^2 2x\right) = 5\sqrt{5}\sqrt{x^2 + y^2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $P = \sin 2x + \cos y$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn B

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có $x+2y \leq \sqrt{5(x^2+y^2)}$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{2} \\ x+2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } \begin{cases} (\sin x + \cos x)^4 = \left(\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right)^4 \leq 4 \Rightarrow (\sin x + \cos x)^4 + \sin^2 2x \leq 5 \\ \sin^2 2x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x+2y \leq \sqrt{5(x^2+y^2)}$$

$$\Rightarrow (x+2y)((\sin x + \cos x)^4 + \sin^2 2x) \leq \sqrt{5(x^2+y^2)}((\sin x + \cos x)^4 + \sin^2 2x) \leq 5\sqrt{5(x^2+y^2)}. \text{ Nên } VT \leq VP, \text{ dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:}$$

$$\begin{cases} y=2x, x \geq 0 \\ |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \\ y = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \end{cases} \Rightarrow \sin 2x + \cos y = 1 \Rightarrow \text{chọn B}$$

Câu 110. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c là các số thực) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$

và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng 9. Tính $P = abc$.

A. $P = 0$.

B. $P = 6$.

C. $P = 7$.

D. $P = -6$.

Lời giải

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$

$$\text{nên ta có } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ a < 0 \end{cases} \text{ và điểm } \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \text{ thuộc đồ thị} \Rightarrow \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4}.$$

Để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì $b^2 - 4ac \geq 0$

Khi đó giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y = 0$. Theo giả thiết: $x_1^3 + x_2^3 = 9$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \xrightarrow{\text{Viét}} \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9.$$

$$\text{Từ đó ta có hệ } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases} \longrightarrow P = abc = 6.$$

Chọn B

Câu 111. Có hai giá trị của tham số m để cho giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$$

Trên đoạn $[0;1]$ bằng 1. Tổng của hai giá trị của m đó là:

A. 2.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2} - 2$.

D. $2 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét 3 trường hợp

$$\text{TH1: } 0 \leq -\frac{2m+1}{2} \leq 1, \text{ suy ra } GTNN = f\left(-\frac{2m+1}{2}\right) = -m - \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } -\frac{2m+1}{2} < 0 \Rightarrow GTNN = f(0) = m^2 - 1 = 1 \Rightarrow m = \sqrt{2}$$

$$\text{TH3: } -\frac{2m+1}{2} > 1 \Rightarrow GTNN = f(1) = (m+1)^2 = 1 \Rightarrow m = -2$$

Tóm lại $m = -2; m = \sqrt{2}$.**Câu 112.** Tìm các giá trị của tham số m để cho giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$$

Trên đoạn $[0;1]$ bằng 1.

A. $m = 2$.

B. $m = \sqrt{2}$.

C. $\begin{cases} m = \sqrt{2} \\ m = -2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m = -\sqrt{2} \\ m = 2 \end{cases}$.

Lời giải**Chọn C**

Xét 3 trường hợp

$$\text{TH1: } 0 \leq -\frac{2m+1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{2}, \text{ suy ra } GTNN = f\left(-\frac{2m+1}{2}\right) = -m - \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } -\frac{2m+1}{2} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2} \text{ suy ra } GTNN = f(0) = m^2 - 1 = 1 \Rightarrow m = \sqrt{2}$$

$$\text{TH3: } -\frac{2m+1}{2} > 1 \Leftrightarrow m < -1, \text{ suy ra } GTNN = f(1) = (m+1)^2 = 1 \Rightarrow m = -2$$

Vậy $m = -2; m = \sqrt{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.**Câu 113.** Cho hàm số $y = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m, m \neq 0$. Đặt $\min_{[-1;1]} y = y_1; \max_{[-1;1]} y = y_2$. Có bao nhiêu giá trị của m thỏa mãn $y_2 - y_1 = 10$.

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 4

Lời giải

$$\text{Có định } I: x_I = m + \frac{1}{m}, \text{ mà } |x_I| = \left|m + \frac{1}{m}\right| = |m| + \left|\frac{1}{m}\right| \geq 2 \text{ nên } m + \frac{1}{m} \geq 2 \text{ hoặc } m + \frac{1}{m} \leq -2.$$

Do đó $y_1, y_2 \in \left\{ y(1) = 1 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right) + m; y(-1) = 1 + 2\left(m + \frac{1}{m}\right) + m \right\}$. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$|y_2 - y_1| = 10 \Leftrightarrow \left| 4\left(m + \frac{1}{m}\right) \right| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} m + \frac{1}{m} = \frac{5}{2} \\ m + \frac{1}{m} = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left\{ 2; -2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\}. \text{ Chọn D}$$

Câu 114. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $2(x^2 + y^2) = xy + 1$. Giá trị lớn nhất của $P = 3(x^4 + y^4) + 5x^2y^2$ là

A. 3.

B. 2.

C. $\frac{11}{9}$.

D. $\frac{11}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = 3(x^4 + y^4) + 5x^2y^2 = 3[(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2] + 5x^2y^2 = 3(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$

Vì $x^2 + y^2 = \frac{xy+1}{2}$ nên $P = 3\left(\frac{xy+1}{2}\right)^2 - x^2y^2 = -\frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{4}$

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2) = xy + 1 \\ x^2 + y^2 \geq 2xy \end{cases} \Rightarrow xy + 1 \geq 4xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}$$

Mặt khác

$$2(x^2 + y^2) = xy + 1 \Leftrightarrow 2[(x + y)^2 - 2xy] = xy + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(x + y)^2 = 5xy + 1 \Rightarrow 5xy + 1 \geq 0 \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{5}$$

Đặt $t = xy$ ta có $P = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}$ với $-\frac{1}{5} \leq t \leq \frac{1}{3}$

Kết luận: $\max_{\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]} P = \frac{11}{9}$ Khi $t = \frac{1}{3}$

Câu 115. Tham số a thỏa mãn giá trị lớn nhất của hàm số $y = |3x^2 - 6x + 2a - 1|$ với $-2 \leq x \leq 3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị tham số a thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-10; -5)$. **B.** $(-5; 0)$. **C.** $(0; 5)$. **D.** $(5; 10)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = 3x^2 - 6x + 2a - 1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ với $-2 \leq x \leq 3$

Ta có: $2M \geq |f(-2)| + |f(1)| \geq |f(-2) - f(1)| = 27 \Rightarrow M \geq \frac{27}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} |f(-2)| = |f(1)| = M = \frac{27}{2} \\ f(-2) \cdot (-f(1)) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) = -f(1) = \frac{27}{2} \\ f(-2) = -f(1) = -\frac{27}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{-19}{4}$$

Vậy $a = \frac{-19}{4}$ thỏa mãn bài toán. **Chọn B**

Câu 116. Cho hàm số: $f(x) = ax^2 + bx + 2$ ($a > 0$). Biết rằng hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$. Khi đó

giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8a^2}{3a^2 + 2ab + b^2}$ là:

A. 4. **B.** $\frac{8}{11}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Do $a > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ thì: $\frac{-b}{2a} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq 2$

Khi đó: $P = \frac{8a^2}{3a^2 + 2ab + b^2} = \frac{8}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\frac{b}{a} + 3} = \frac{8}{t^2 + 2t + 3}$ với $t = \frac{b}{a} \geq 2$

Ta có $t^2 + 2t + 3 = (t + 1)^2 + 2 \geq 11, \forall t \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $t = 2$

Do đó: $P \leq \frac{8}{11}$. Suy ra $\max P = \frac{8}{11}$ khi $\frac{b}{a} = 2$.

Câu 117. Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = cx^2 + bx + a$, giả sử $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Tính $M = \max_{[-1; 1]} g(x)$.

A. $M = -2$.

B. $M = 2$.

C. $M = 1$.

D. $M = -1$.

Lời giải

Chọn B

Chọn $x = -1, 0, 1$ và đặt:

$$\begin{cases} A = f(1) = a + b + c \\ B = f(-1) = a - b + c \\ C = f(0) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{A+B}{2} - C \\ b = \frac{A-B}{2} \\ c = C \end{cases} \quad \text{và } |A| \leq 1, |B| \leq 1, |C| \leq 1.$$

Nên $g(x) = Cx^2 + \frac{A-B}{2}x + \frac{A+B}{2} - C = C(x^2 - 1) + \frac{1}{2}A(x+1) + \frac{1}{2}B(1-x)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq |C(x^2 - 1)| + \frac{1}{2}|A(x+1)| + \frac{1}{2}|B(1-x)| \\ &\leq |x^2 - 1| + \frac{1}{2}|x+1| + \frac{1}{2}|1-x| \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(1-x) = 2 - x^2 \leq 2, \forall x \in [-1; 1]. \end{aligned}$$

Ta thấy hàm số $f(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow g(x) = -x^2 + 2$ là một hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy $\max_{[-1; 1]} g(x) = 2$.

Câu 118. Cho 2 số thực $x \geq 1, y \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $\max\{|x^2 + 1|; |2x - y + 1|\} = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$.

Hỏi biểu thức $P = 3(x+1)(x^2 + 2y + 1)$ có tất cả bao nhiêu ước số nguyên dương?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có một tính chất cơ bản của hàm trị tuyệt đối $\left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| = \max\{|a|; |b|\}$

Áp dụng ta có $\max\{|x^2 + 1|; |2x - y + 1|\} = \left| \frac{x^2 + 2x - y + 2}{2} \right| + \left| \frac{x^2 - 2x + y}{2} \right|$

Sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối ta có

$$\left| \frac{x^2 + 2x - y + 2}{2} \right| + \left| \frac{x^2 - 2x + y}{2} \right| \geq \left| \frac{2x^2 + 2}{2} \right| = \frac{2x^2 + 2}{2} \geq 2 (x \geq 1)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có $\frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{2(x^2 + y^2)} \right)^2}{x^2 + y^2} = 2$

Vậy $VT \geq 2 \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Khi đó $P = 24$ có tất cả 8 ước số nguyên dương.

Câu 119. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 2(m-1)x + 3m - 5$, m là tham số. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \frac{5}{2}$.

B. $m = \frac{2}{5}$.

C. $m = -\frac{3}{2}$.

D. $m = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $f(x)$ là parabol có hoành độ đỉnh là $x = 1 - m$, mặt khác vì $a = 1 > 0$ nên:

$\min y = f(1 - m) = -m^2 + 5m - 6 = g(m)$, $g(m)$ là parabol có hoành độ đỉnh là $\frac{5}{2}$ và hệ số

$a = -1 < 0$ nên $\max g = g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Vậy $m = \frac{5}{2}$

Email: boigiabao98@gmail.com

NHẬN XÉT:

+ Ta có: $f(x) = (x + m - 1)^2 - \left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

+ Yêu cầu bài toán tương đương $m = \frac{5}{2}$

Câu 120. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c là các số thực) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$

và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng 9. Tính $P = abc$.

A. $P = 0$.

B. $P = 6$.

C. $P = 7$.

D. $P = -6$.

Lời giải

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$

nên ta có $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ a < 0 \end{cases}$ và điểm $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$ thuộc đồ thị (P) $\Rightarrow \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4}$.

Để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì $b^2 - 4ac \geq 0$

Khi đó giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y = 0$. Theo giả thiết: $x_1^3 + x_2^3 = 9$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \xrightarrow{\text{Viét}} \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9$.

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases} \rightarrow P = abc = 6$.

Chọn B

Câu 121. Cho a, b, c là 3 số thực thỏa mãn $\begin{cases} a \neq 0 \\ 4a + 9b + 24c = 0 \end{cases}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ giao điểm

của Parabol (P): $y = 2ax^2 + 3bx + 4c$ với trục hoành. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$T = |x_1 - x_2|$.

A. $T = 0$.

B. $T = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $T = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

D. $T = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4a + 9b + 24c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{4a + 9b}{24}$.

Do đó: $\Delta = 9b^2 - 32ac = 9b^2 + 32a\left(\frac{4a + 9b}{24}\right) = 9\left(b + \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{4a^2}{3} > 0$ (do $a \neq 0$) suy ra pt đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Ta có: $T = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(\frac{-3b}{a}\right)^2 - \frac{8c}{a}} = \sqrt{\frac{9}{4a^2}\left(b + \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Dấu “=” xảy ra khi: $2a = -3b = 24c$. Vậy: $T_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 122. Cho hàm số bậc nhất $y = mx - m + 1$ (m là tham số), có đồ thị là đường thẳng d . Khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ đến d là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

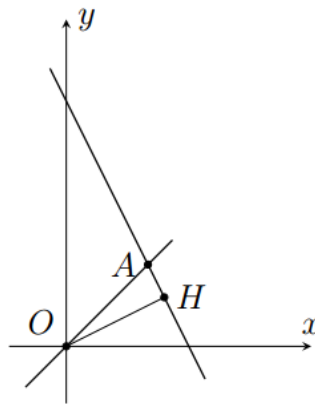
Giải trắc nghiệm: Dễ thấy d luôn đi qua $A(1;1)$. Mà $d(O, d) \leq OA = \sqrt{2}$

Giải tự luận: Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm mà d luôn đi qua với mọi m . Khi đó

$$y_0 = mx_0 - m + 1, \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)m - y_0 + 1 = 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ -y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1. \end{cases}$$



Do đó d luôn đi qua $A(1;1)$.

Gọi $d': y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $A(1;1) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow d': y = x$.

Kẻ $OH \perp d \Rightarrow OH \leq OA$.

Do đó OH lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv A$ hay $d \perp d' \Leftrightarrow m \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 123. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |5 - 2x| - 4|4 + x| + 3x + m^2 - 5m - 1$ trên đoạn $[-5; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

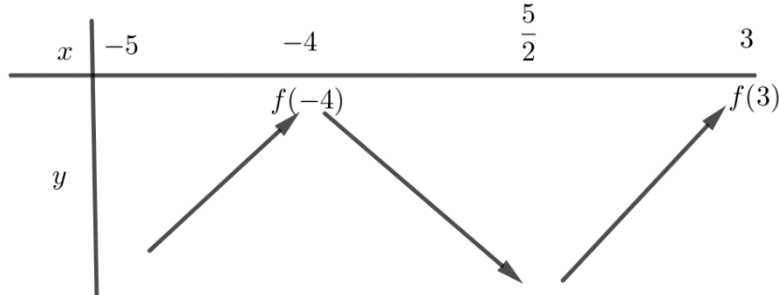
- A. $-\frac{25}{4}$. B. $\frac{25}{2}$. C. $\frac{13}{2}$. D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có
$$y = \begin{cases} 5x + m^2 - 5m + 20 & \text{khi } x \leq -4 \\ -3x + m^2 - 5m - 12 & \text{khi } -4 < x < \frac{5}{2} \\ x + m^2 - 5m - 22 & \text{khi } x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Do đó ta có BBT



$$f(-4) = m^2 - 5m$$

$$f(3) = m^2 - 5m - 19 < f(-4)$$

$$\Rightarrow \max_{[-5;3]} y = m^2 - 5m \geq -\frac{25}{4}, \forall m.$$

$$\Rightarrow \min \left(\max_{[-5;3]} y \right) = -\frac{25}{4} \text{ khi } m = \frac{5}{2}. \text{ Chọn A}$$

Câu 124. Biết rằng parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ thuộc đoạn

$[0; 2]$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1; \sqrt{3})$.

B. $(2; 4)$.

C. $(3; 9)$.

D. $(9; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

PT tương giao: $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ($a \neq 0$)

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của PT(1), theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac} = \frac{8 - 6 \cdot \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{4 - 2 \cdot \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2} \quad (\text{vì } a \neq 0).$$

$$\text{Giả sử } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 \leq x_1 x_2 \\ x_2^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 x_2 + 4 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \leq 3x_1 x_2 + 4.$$

$$\text{Do đó } P \leq \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 + 4}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2} = 3 \Rightarrow P_{\max} = 3$$

$$\text{khi } \begin{cases} x_1 = x_2 = 2 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} = 4 \\ \frac{c}{a} = 4 \\ -\frac{b}{a} = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b = 4a \\ b = -2a \\ c = 0 \end{cases}$$

Câu 125. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1)$ và cắt trục hoành tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông đỉnh A và có diện tích $S \leq \sqrt{2}$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số. Tìm giá trị lớn nhất của M .

- A.** $\text{Max}M = 1$. **B.** $\text{Max}M = 2$. **C.** $\text{Max}M = 3$. **D.** $\text{Max}M = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số đi qua $A(1;1)$ nên ta có $a + b + c = 1$, (1)

Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì $B(x_1; 0), C(x_2; 0)$. Tam giác ABC

vuông đỉnh A nên $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + 1 + (x_2 - 1)^2 + 1 = (x_2 - x_1)^2$

$\Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2a + b + c = 0$, (2)

Từ (1) và (2) ta có $a = -1, c = 2 - b$.

Ta có $BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \sqrt{b^2 - 4b + 8}$. Tam giác ABC có

diện tích $S \leq \sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}BC \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4b + 8} \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow b^2 - 4b \leq 0$.

Ta có $a = -1$ nên hàm số có giá trị lớn nhất là $M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{b^2 - 4b + 8}{4}$.

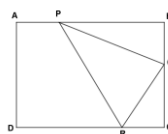
Vì $b^2 - 4b \leq 0$ nên $M \leq 2$, $\text{max}M = 2$, $M = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = -x^2 + 4x - 2 \end{cases}$

Câu 126. Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 10$, $AD = 8$. Trên các cạnh AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm P, Q, R sao cho $AP = BQ = CR$. Độ dài của AP trong khoảng nào sau đây thì diện tích tam giác PQR đạt nhỏ nhất.

- A.** $(2; 3)$. **B.** $(3; 4)$. **C.** $(4; 5)$. **D.** $(5; 6)$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

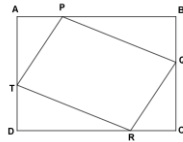
Ta có tứ giác $CRPB$ là hình thang và có diện tích $S = \frac{(CR + BP)BC}{2} = 40$ không đổi nên diện tích hình PQR đạt nhỏ nhất khi và chỉ khi tổng diện tích của 2 tam giác BPQ, CQR đạt lớn nhất.

Đặt $AP = x, 0 \leq x \leq 8$.

$$S_{BPQ} + S_{CQR} = \frac{x(8-x) + x(10-x)}{2} = x(9-x) = \frac{81}{4} - \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{4}, \forall x \in [0; 8]$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{9}{2}$.

Cách 2: Trên cạnh AD lấy điểm T sao cho $DT = AP$. Dễ chứng minh được tứ giác $PQRT$ là hình bình hành và $S_{PRQ} = \frac{1}{2} S_{PQRT}$.



Đặt $AP = x, 0 \leq x \leq 8$. Diện tích hình $PQRT$ đạt nhỏ nhất khi và chỉ khi tổng diện tích của 4 tam giác APT, BPQ, CQR, DTR đạt lớn nhất

$$\begin{aligned} S_{APT} + S_{BPQ} + S_{CQR} + S_{DTR} &= x(8-x) + x(10-x) = x(18-2x) = 2 \cdot x(9-x) \\ &= \frac{81}{2} - 2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{2} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{9}{2}$.

Chú ý: Có thể áp dụng bất Cô si cho hai số không âm x và $9-x$ hoặc xét hàm số $y = -2x^2 + 18x$ trên $[0; 8]$.

Câu 127. Cho hàm số $f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 2$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min_{[0; 2]} f(x) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng:

- A.** $S \subset (-4; 6)$ **B.** $S \subset (-3; 7)$ **C.** $S \subset [-2; 8]$ **D.** $S \subset [-1; 9]$.

Lời giải

Chọn D

Có hoành độ của đỉnh $x_I = \frac{m}{2}; a = 4 > 0$.

Xét 3 trường hợp sau:

TH1: $\frac{m}{2} < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Suy ra hàm số đồng biến trên đoạn khoảng $(0; 2)$.

$$\Rightarrow \min_{[0; 2]} f(x) = f(0) = m^2 - 2m + 2 = 3 \Rightarrow m = 1 - \sqrt{2}.$$

TH2: $0 \leq \frac{m}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4 \Rightarrow \min_{[0; 2]} f(x) = f\left(\frac{m}{2}\right) = -2m + 2 = 3 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ (loại)

TH3: $\frac{m}{2} > 2 \Leftrightarrow m > 4$. Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

$$\Rightarrow \min_{[0;2]} f(x) = f(2) = m^2 - 10m + 18 = 3 \Rightarrow m = 5 + \sqrt{10} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } S = \{1 - \sqrt{2}; 5 + \sqrt{10}\} \subset [-1; 9].$$

Câu 128. Cho hàm số $y = x^2 - 5x + 8$ có đồ thị là (P) và hai điểm $A(4; -1)$, $B(10; 5)$. Biết điểm $M(x_0; y_0)$ trên (P) thỏa mãn diện tích tam giác MAB nhỏ nhất. Tính tổng $x_0 + y_0$.

A. 4.

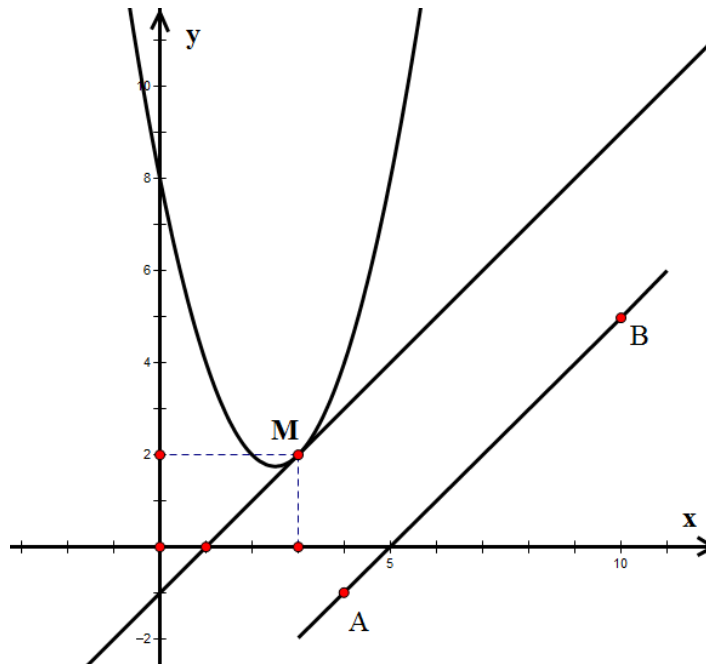
B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn.



+ Vẽ đồ thị (P) , nhận thấy A, B không thuộc bề lõm của (P) , suy ra yêu cầu bài toán thỏa mãn khi M là tiếp điểm của tiếp tuyến với (P) song song với đường thẳng AB .

$$\text{+ Gọi } y = ax + b \text{ là đường thẳng qua } A, B \text{ suy ra } \begin{cases} 4a + b = -1 \\ 10a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow y = x - 5.$$

+ Đường thẳng Δ song song với đt $y = x - 5$ có dạng $y = x + b$, Δ là tiếp tuyến của (P) khi phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 6x + 8 - b = 0$ của (P) và Δ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1. \text{ (chú ý } b = -1 \text{ là điều kiện tiếp xúc)}$$

Khi đó $M(3; 2)$, vậy $x_0 + y_0 = 5$.

Câu 129. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2mx - m^2 + 5m - 2$ đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{a}{b}$, $\left(\frac{a}{b}\right)$ là phân số tối giản, $b > 0$) Tính $a + b$.

A. $a + b = 7$.

B. $a + b = 5$.

C. $a + b = 9$.

D. $a + b = -1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = x^2 - 2mx - m^2 + 5m - 2$ có giá nhỏ nhất là $y(m) = -2m^2 + 5m - 2$.

Biểu thức $y(m) = -2m^2 + 5m - 2$ đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{5}{4}$.

$$\Rightarrow a = 5, b = 4 \Rightarrow a + b = 9.$$

Câu 130. Giả sử phương trình bậc hai ẩn x (m là tham số): $x^2 + 2(m-2)x - 3m^2 - 4m + 8 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 24 \leq 0$. Gọi M và N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 13(x_1 + x_2)$. Tính $M + N$:

- A.** -64 **B.** -44 **C.** $-\frac{87}{2}$ **D.** $-\frac{127}{2}$

Lời giải

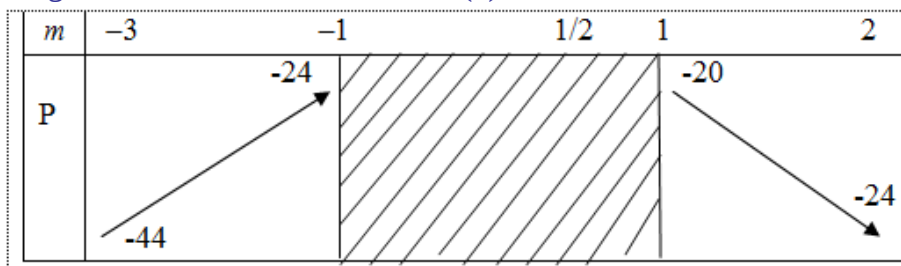
Chọn A

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 24 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 24 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4 \geq 0 \\ 6m^2 + 6m - 36 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \\ -3 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq -1 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases} (*)$$

Vậy $P = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 13(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 - 13(x_1 + x_2) = -2m^2 + 2m - 20$

+ Bảng biến thiên của P với điều kiện (*)



Từ bảng biến thiên ta được: $M = -20$ khi $m = 1$, $N = -44$ khi $m = -3$. Suy ra $M + N = -64$.

Câu 131. Cho hàm số: $f(x) = ax^2 + bx + 2$ ($a > 0$). Biết rằng hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$. Khi đó

giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8a^2}{3a^2 + 2ab + b^2}$ là:

- A.** 4. **B.** $\frac{8}{11}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Do $a > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ thì: $\frac{-b}{2a} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq 2$

Khi đó: $P = \frac{8a^2}{3a^2 + 2ab + b^2} = \frac{8}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\frac{b}{a} + 3} = \frac{8}{t^2 + 2t + 3}$ với $t = \frac{b}{a} \geq 2$

Ta có $t^2 + 2t + 3 = (t+1)^2 + 2 \geq 11, \forall t \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $t = 2$

Do đó: $P \leq \frac{8}{11}$. Suy ra $\max P = \frac{8}{11}$ khi $\frac{b}{a} = 2$.

Câu 132. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2018x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 4$. Biết d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |x_1 - x_2|$?

- A.** $T = 2018$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 4$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d :

$$x^2 + 2018x + 3 = mx + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m - 2018)x - 1 = 0.$$

Nhận thấy phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbb{R}$

Ta có $x_1 \cdot x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{x_1}$. Suy ra $T = \left| x_1 + \frac{1}{x_1} \right| = \left| x_1 \right| + \left| \frac{1}{x_1} \right| \geq 2$ (do $x_1, \frac{1}{x_1}$ cùng dấu).

Dấu “=” xảy ra khi $m = 2018$.

Câu 133. Cho $x, y, z \in [0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = 2(x + y + z) - (xy + yz + zx)$?

- A. $T = 3$. B. $T = 0$. C. $T = 4$. D. $T = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $T = f(x) = (2 - y - z)x + 2(y + z) - yz$

Nếu $y + z = 2$ thì $f(x) = 4 - yz \leq 4$ do $-yz \leq 0$

Nếu $y + z \neq 2$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất

Ta có $f(0) = -(2 - y)(2 - z) + 4 \leq 4$ và $f(2) = -yz + 4 \leq 4$.

Vậy $\text{Max} T = 4$ khi $x = 0, y = z = 2$ hoặc $x = 2, y = z = 0$.

Câu 134. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2ax + 1$ với a là tham số. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 1]$. Biết rằng có hai giá trị của a để $M - m = 4$ khi đó tổng hai giá trị của a bằng

- A. 0. B. 1. C. -1 D. 2

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x) = x^2 - 2ax + 1$ có hệ số của x^2 bằng 1 dương, tọa độ đỉnh $I(a; 1 - a^2)$, $f(0) = 1$
 $f(1) = 2 - 2a$

HT1: Xét $a < 0$ khi đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 1) \Rightarrow M = f(1), m = f(0)$

Khi đó $M - m = 4 \Leftrightarrow a = \frac{-3}{2}$ (thỏa mãn).

TH2: Xét $a > 1$ khi đó hàm số nghịch biến trên $(0; 1) \Rightarrow M = f(0), m = f(1)$

Khi đó $M - m = 4 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

(Đến đây đủ hai giá trị a chọn luôn đáp án).

TH3: Xét $0 \leq a \leq 1$ khi đó $m = f(a) = -a^2 + 1, M = \max\{f(0); f(1)\}$

-Nếu $M = f(0) \Rightarrow M - m = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$ không thỏa mãn

-Nếu $M = f(1) \Rightarrow M - m = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$ không thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị a thỏa mãn là $a = \frac{-3}{2}, a = \frac{5}{2}$

Cách 2:

Đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 2ax + 1$ là một parabol có tọa độ đỉnh $I(a; 1 - a^2)$,

$f(0) = 1, f(1) = 2 - 2a$.

Xét trường hợp $a \notin [0; 1]$ thì $M - m = |f(1) - f(0)| = |2 - 2a - 1| = |2a + 1| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases}$

(Đến đây đủ hai giá trị a chọn luôn đáp án).

Câu 135. Gọi a, b các số thực để biểu thức $F = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b$.

- A. $P = 12$. B. $P = 21$. C. $P = 19$. D. $P = 29$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Các số thực } a, b \text{ thỏa mãn bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{\mathbb{R}}(F-4)=0 \\ \min_{\mathbb{R}}(F+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{\mathbb{R}}(-4x^2+ax+b-4)=0 \\ \min_{\mathbb{R}}(x^2+bx+b+1)=0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } f(x) = -4x^2 + ax + b - 4, \quad g(x) = x^2 + bx + b + 1$$

Để thấy $f(x), g(x)$ là các hàm số bậc hai lần lượt có hệ số bằng -4 và 1. Nên max và min lần lượt đạt tại đỉnh của nó.

$$\text{Từ đó ta có } \begin{cases} a^2 + 16(b-4) = 0 \\ a^2 - 4(b+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b = 3 \end{cases}$$

Câu 136. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ (x là ẩn và m là tham số). Khi đó m thuộc đoạn nào để phương trình đã cho có hai nghiệm không âm x_1, x_2 và giá trị của $P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ là nhỏ nhất.

- A.** $m \in [2; 4]$. **B.** $m \in (4; 5)$. **C.** $m \in [5; 8]$. **D.** $m \in (8; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m^2 + 2m - 4 \geq 0 \\ S = 2m \geq 0 \\ P = m^2 - 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = m^2 - 2m + 4$.

$$\text{Suy ra } P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}}.$$

Mà $P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ nhỏ nhất khi $\sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}}$ nhỏ nhất.

$$\text{Vậy } P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}} \geq \sqrt{8} \text{ dấu bằng xảy ra khi } m = 2.$$

Đáp án : $m \in [2; 4]$

Câu 137. Cho hàm số $y = 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m$ (1). Giá trị m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = \frac{1}{(x_1 + 2)^{2018}} + \frac{1}{(x_2 + 2)^{2018}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.** $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m \in (-3; 0)$. **C.** $m \in (0; 3)$. **D.** $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và trục hoành là nghiệm phương trình

$$2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m = 0 \quad (*).$$

Để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 12 > 0, \forall m$.

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*). Theo Viét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{3-2m}{2} \end{cases}$$

Ta có $\frac{1}{(x_1+2)(x_2+2)} = \frac{1}{(x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4)} = -2$.

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $\frac{1}{(x_1+2)^{2018}} + \frac{1}{(x_2+2)^{2018}} \geq 2\sqrt{\left(\frac{1}{(x_1+2)} \frac{1}{(x_2+2)}\right)^{2018}} = 2^{1010}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{(x_1+2)^{2018}} = \frac{1}{(x_2+2)^{2018}} \Leftrightarrow |x_1+2| = |x_2+2|$.

Do x_1, x_2 phân biệt nên ta có $x_1+2 = -x_2-2 \Leftrightarrow x_1+x_2 = -4 \Rightarrow \frac{m-6}{2} = -4 \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 138. Cho phương trình: $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Tìm GTLN của $A = |x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2)|$.

A. 4.

B. 9

C. 8.

D. $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn D

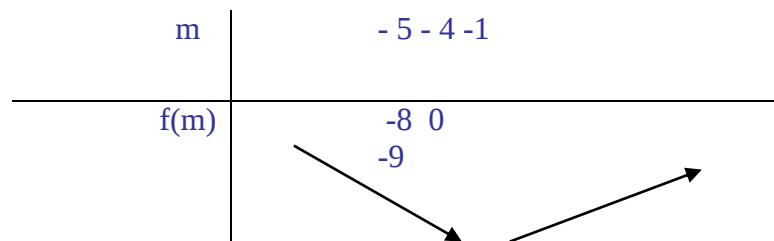
PT: $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$ (1)

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -(m^2 + 6m + 5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3) \end{cases}$$

Ta có: $A = \frac{1}{2}|m^2 + 8m + 7|$

Xét hàm số $f(m) = m^2 + 8m + 7$ có BBT trên $[-5; -1]$ là:



$\Rightarrow \max_{[-5; -1]} |f(m)| = 9 \Rightarrow \max A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = -4$

Câu 139. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x} + m^2 - 2018m$. Tổng S tất cả các giá trị nguyên dương của m thỏa mãn điều kiện: $T \leq 2019$ (với T là giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $x \geq 2$) bằng:

A. $S = 2019.1010$

B. $S = 2019.1009$.

C. $S = 2019.2018$.

D. $S = 2021.1009$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = x^2 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x} + m^2 - 2018m$

Vì $x \geq 2 \Rightarrow t = \sqrt{x^2 - 2x} \geq 0$

Ta có $y = t^2 + 2t + m^2 - 2018m \geq m^2 - 2018m, \forall t \geq 0$

Suy ra $T = \min_{[0; +\infty)} y = m^2 - 2018m$

$T \leq 2019 \Leftrightarrow m^2 - 2018m \leq 2019$

Do m nguyên dương nên $1 \leq m \leq 2019, m \in \mathbb{N}$

Do đó $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2019 = 2019 \cdot 1010$

Câu 140. Cho hàm số: $y = f(x) = mx^2 - 2x - m - 1 \quad (C)$

Khi giá trị lớn nhất của hàm số (C) đạt giá trị nhỏ nhất thì m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0; 3)$. **B.** $(-2; 0)$ **C.** $(-\infty; -2)$. **D.** $(3; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

+) BBT

x	$-\infty$	$\frac{1}{m}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{m^2 + m + 1}{m}$	$-\infty$

+) $m \geq 0$ không có GTLN

+) $m < 0$ từ BBT ta có GTLN là $-\frac{m^2 + m + 1}{m}$

$$\text{Vì } m < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{m} > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{1}{m}\right) + (-m) \geq 2 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{m}\right) + (-m) - 1 \geq 1$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{m}\right) = (-m) \Leftrightarrow m = -1 \text{ do } m < 0$$

Vậy GTNN bằng 1 khi và chỉ khi $m = -1$

Câu 141. Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 2x + m|$ với tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x + \frac{1}{x})$ trên tập $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Số giá trị m nguyên để $M \geq 2$ là:

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 4036. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow |t| \geq 2$, xét hàm số $f(t) = |t^2 - 2t + m|$ với $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

Đặt $a = t^2 - 2t$ với $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ suy ra $a \geq 0$

Xét hàm số $g(a) = |a + m|$. Khi đó $M = \min g(a)$ với $a \geq 0$

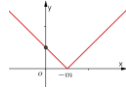
+) Nếu $-m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$



Dựa vào đồ thị

$$M = g(0) = |m| = m \geq 2 \Rightarrow m = \{2; 3; \dots; 2018\}$$

+) Nếu $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$



Dựa vào đồ thị

$M = g(-m) = 0 < 2$ không thỏa mãn bài toán.

Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn bài toán.

(Trong lời giải trên, hệ trục tọa độ phải là Oxy chứ không phải Oxy).

Câu 142. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 6x + 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(f(x))$, với $-3 \leq x \leq 0$. Tổng $S = m + M$.

A. $S = 1$

B. $S = 56$

C. $S = 57$

D. $S = 64$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(f(x)) = f^2(x) + 6f(x) + 5$.

Đặt $t = f(x)$, Xét hàm $t = f(x) = x^2 + 6x + 5$ trên $[-3; 0]$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-3 \quad 0$
$t = x^2 + 6x + 5$	5 -4

Từ bảng biến thiên ta được: $-4 \leq t \leq 5$

Khi đó hàm số được viết lại: $f(t) = t^2 + 6t + 5$,

Lập bảng biến thiên của hàm $f(t) = t^2 + 6t + 5$, trên $[-4; 5]$.

t	$-4 \quad -3 \quad 5$
$f(t) = t^2 + 6t + 5$	$-3 \quad 60$ -4

Ta được $m = -4$, $M = 60$. Vậy $S = 56$

Cách 2: Tìm min, max của $y = f(f(x)) = f^2(x) + 6f(x) + 5$ trên $x \in K = [-3; 0]$ không cần BBT.

Ta có: $y' = 2f(x) \cdot f'(x) + 6f'(x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 6f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 = 0 \\ x^2 + 6x + 5 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \in K \\ x = -2 \in K \\ x = -4 \notin K \end{cases}$$

$$y(-3) = f(f(-3)) = f(-4) = -3$$

$$y(-2) = f(f(-2)) = f(-3) = -4$$

$$y(0) = f(f(0)) = f(5) = 60$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \min y = -4 = m \\ \max y = 60 = M \end{cases} \Rightarrow S = M + m = 56$$

Câu 143. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$ và biểu thức $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $P = 5a + 11b + c$, biết $a > 0$

A. $P = 10$.

B. $P = 9$.

C. $P = 16$.

D. $P = 12$.

Lời giải

Chọn B

Thay $x = -1, x = 0, x = 1$ vào hàm số $f(x)$, ta được

$$\begin{cases} -1 \leq c \leq 1 & (1) \\ -1 \leq a + b + c \leq 1 & (2) \\ -1 \leq a - b + c \leq 1 & (3) \end{cases}$$

Từ (2), (3) ta có $\begin{cases} -1 - c \leq a + b \leq 1 + c \\ -1 - c \leq a - b \leq 1 + c \end{cases}$, kết hợp với (1), ta được $\begin{cases} -2 \leq a + b \leq 2 \\ -2 \leq a - b \leq 2 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 \leq 4 \\ a^2 - 2ab + b^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 4$. Vậy $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2 = \frac{8}{3}(a^2 + b^2) - \frac{2}{3}b^2 \leq \frac{8}{3}(a^2 + b^2) \leq \frac{32}{3}$

Nên $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ lớn nhất khi $b = 0, a = 2$ thay vào (2), ta được $-3 \leq c \leq -1$ kết hợp với (1) thì

$c = -1$. Thử lại với $b = 0, a = 2, c = -1$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Vậy $b = 0, a = 2, c = -1$

Nên $P = 9$.

Cho Parabol $(P): y = ax^2$, trong đó a là một tham số dương, và đường thẳng $d: y = 2x - 1$.

Biết đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B trên trục hoành. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hình thang ABKH có diện tích bằng $6\sqrt{2}$?

A. 1.

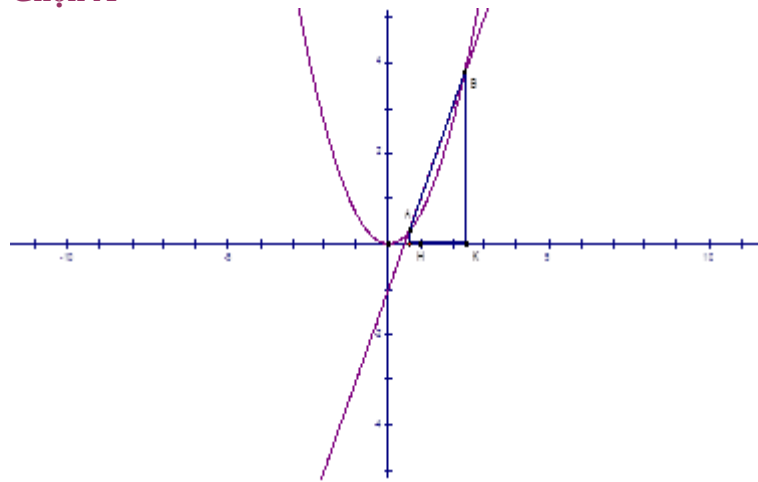
B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm: $ax^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow ax^2 - 2x + 1 = 0$.

Điều kiện: $\Delta' = 1 - a > 0 \Rightarrow 0 < a < 1$.

Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{1}{a} \end{cases}$.

$$S = \frac{1}{2}(AH + BK)HK = \frac{1}{2}(ax_1^2 + ax_2^2)|x_1 - x_2|$$

$$= \frac{a}{2}[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$= \frac{a}{2} \left[\frac{4}{a^2} - \frac{2}{a} \right] \sqrt{\frac{4}{a^2} - \frac{4}{a}} = 2 \left(\frac{2}{a} - 1 \right) \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}} = 6\sqrt{2}$$

Đặt $t = \frac{1}{a}, t > 1$. Ta được

$$(2t-1)\sqrt{t^2-t} = 3\sqrt{2} \Rightarrow (2t-1)^2(t^2-t) = 18 \Rightarrow 4t^4 - 8t^3 + 5t^2 - t - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (t+1)(t-2)(4t^2+5t+9) = 0 \Rightarrow t = 2$$

Vậy chỉ có một giá trị duy nhất thỏa là $a = \frac{1}{2}$.

Câu 144. Cho đồ thị hàm số $(C): y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(-1; 2)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a(2a+6b) - 2b(c+3b) - 4c(3-b)}{a(3c+3b)+2} \text{ là } M \text{ khi hàm số có phương trình:}$$

$$y = a_1x^2 + b_1x + c_1. \text{ Tính } Q = M^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$$

A. $Q = \frac{3739}{27}$ **B.** $Q = 28$ **C.** $Q = -\frac{26}{5}$ **D.** $Q = \frac{520}{27}$

Lời giải

Chọn D

Ta có:
$$\begin{cases} x_I = -\frac{b}{2a} = -1 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 2 + a \end{cases}$$

$$* P = \frac{a \cdot 14a - 4a(2+7a) - 4(2+a)(3-2a)}{a(9a+6)+2} = \frac{-6a^2 - 4a - 24}{9a^2 + 6a + 2} = -\frac{2}{3} - \frac{\frac{68}{3}}{9a^2 + 6a + 2}$$

$$* P_{\min} = -\frac{70}{3} \text{ tại } a = -\frac{1}{3}; b = -\frac{2}{3}; c = \frac{5}{3}.$$

$$* \text{Hàm số có pt: } y = -\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{5}{3} \text{ và } P_{\min} = \frac{520}{27}$$

Câu 145. Cho hai điểm $A(-1; 1); B(2; 4)$ nằm trên Parabol $(P): y = x^2$. Điểm C nằm trên cung AB của Parabol (P) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất. Khi đó độ dài của đoạn thẳng OC là:

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình của đường thẳng $AB: y = x + 2$.

Gọi d là đường thẳng song song với $AB: y = x + 2$ và tiếp xúc với (P) .

Ta có $d: y = x + m$ trong đó $m \neq 2$.

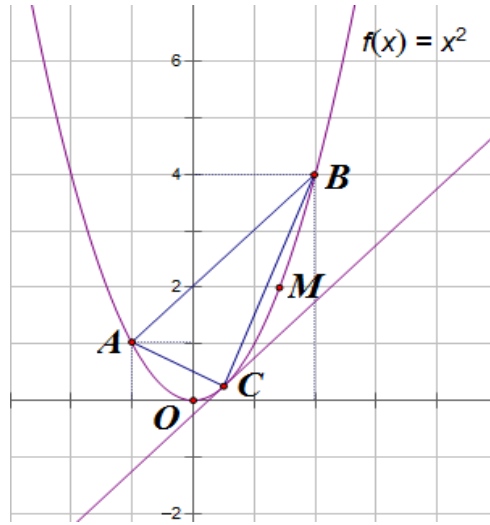
d tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi phương trình $x^2 = x + m$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow x^2 - x - m = 0 \text{ có nghiệm kép} \Leftrightarrow 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$$

Khi đó $d: y = x - \frac{1}{4}$

Gọi C là tiếp điểm của d và (P) , khi đó tọa độ của C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = x - \frac{1}{4} \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$$



Gọi M là một điểm bất kì nằm trên cung AB của Parabol (P) , khi đó điểm M nằm giữa hai đường thẳng d và đường thẳng AB suy ra chiều cao hạ từ M đến đường thẳng AB nhỏ hơn chiều cao hạ từ C đến đường thẳng AB . Vậy tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

$$\text{Khi đó } C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow OC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16} \Rightarrow OC = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Câu 146. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2018x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 4$. Biết d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |x_1 - x_2|$?

A. $T = 2018$.

B. $T = 0$.

C. $T = 2$.

D. $T = 4$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d :

$$x^2 - 2018x + 3 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - (m - 2018)x - 1 = 0.$$

Nhận thấy phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } x_1 \cdot x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{x_1}. \text{ Suy ra } T = \left|x_1 + \frac{1}{x_1}\right| = \left|x_1\right| + \left|\frac{1}{x_1}\right| \geq 2 \text{ (do } x_1, \frac{1}{x_1} \text{ cùng dấu)}$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = 2018$.

Câu 147. Cho $x, y, z \in [0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = 2(x + y + z) - (xy + yz + zx)$?

A. $T = 3$.

B. $T = 0$.

C. $T = 4$.

D. $T = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } T = f(x) = (2 - y - z)x + 2(y + z) - yz$$

$$\text{Nếu } y + z = 2 \text{ thì } f(x) = 4 - yz \leq 4 \text{ do } -yz \leq 0$$

Nếu $y + z \neq 2$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất

$$\text{Ta có } f(0) = -(2 - y)(2 - z) + 4 \leq 4 \text{ và } f(2) = -yz + 4 \leq 4.$$

Vậy $\text{Max} T = 4$ khi $x = 0, y = z = 2$ hoặc $x = 2, y = z = 0$

Câu 148. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^4 - 4x^2 + 5 + m|$ trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = -\frac{3}{2}$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2 \Rightarrow t \in [1; 3]$ ta được hàm số: $y(t) = |t^2 - 4t + 5 + m|, t \in [1; 3]$

Đặt $u = t^2 - 4t + 5, u \in [1; 2]$, hàm số trở thành: $y(u) = |u + m|$

t	1 2 3
$u = t^2 - 4t + 5$	$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 \end{matrix}$

Vì $t \in [1; 3] \Rightarrow u \in [1; 2]$

Hàm số $f(u) = u + m$ đồng biến trên $[1; 2]$ nên hàm số $y = |u + m|$ nhận GTLN, GTNN ở một trong hai điểm nút 1, 2.

Do đó: $\max_{[1; \sqrt{3}]} y = \max\{f(1), f(2)\} = \max\{|1 + m|, |2 + m|\} \geq \frac{|1 + m| + |2 + m|}{2} \geq \frac{1}{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi $m + 1 = -m - 2 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Cách khác:

Đặt $t = x^4 - 4x^2 + 5 \Rightarrow t' = 4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ (do $x \in [1; \sqrt{3}]$)

Bảng biến thiên

x	1 $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$
$t = x^4 - 4x^2 + 5$	$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 \end{matrix}$

Ta có: $t \in [1; 2]$

Hàm số trở thành: $y(t) = |t + m|, t \in [1; 2]$

Hàm số $f(t) = t + m$ đồng biến trên $[1; 2]$ nên hàm số $y = |t + m|$ nhận GTLN, GTNN ở một trong hai điểm nút 1, 2.

Do đó: $\max_{[1; \sqrt{3}]} y = \max\{f(1), f(2)\} = \max\{|1 + m|, |2 + m|\} \geq \frac{|1 + m| + |2 + m|}{2} \geq \frac{1}{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi $m + 1 = -m - 2 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Câu 149. Cho parabol $(P): y = -x^2 + 2mx - 3m^2 + 4m - 3$ (m là tham số) có đỉnh I. Gọi A, B là 2 điểm thuộc Ox sao cho $AB = 2018$. Khi đó $\triangle IAB$ có diện tích nhỏ nhất bằng:

A. 2018.

B. 1009.

C. 4036.

D. 1008.

Lời giải

Chọn B

$y = -x^2 + 2mx - 3m^2 + 4m - 3$ có $\Delta' = m^2 + (-3m^2 + 4m - 3)$

$\Delta' = -2m^2 + 4m - 3 = -2(m - 1)^2 - 1 < 0, \forall m$

$\Rightarrow (P)$ luôn nằm phía dưới Ox.

(P) có đỉnh $I(m; -2m^2 + 4m - 3)$. Gọi H là hình chiếu của I trên Ox. Khi đó ta có:

$$IH = |-2m^2 + 4m - 3| = 2m^2 - 4m + 3.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB.$$

$$S_{\Delta IAB} \text{ đạt GTNN} \Leftrightarrow IH \text{ đạt GTNN} \Leftrightarrow f(m) = 2m^2 - 4m + 3 \text{ đạt GTNN}$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow \text{Min} f(m) = 1 \Rightarrow \text{Min} IH = 1 \Rightarrow \text{Min} S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2018 = 1009.$$

Câu 150. Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + 3m|$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 1]$ bằng 7.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = x^2 + 2x + 3m$, khi đó $y = |g(x)|$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-2; 1]$

x	-2	-1	1
$g(x)$	$3m$		$3m + 3$
		$3m - 1$	

+) Nếu $3m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$ thì $\max_{[-2; 1]} y = 3m + 3$.

Ycbt $\Leftrightarrow 3m + 3 = 7 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$ (loại do m nguyên).

+) Nếu $3m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$ thì $\max_{[-2; 1]} y = -3m + 1$.

Ycbt $\Leftrightarrow -3m + 1 = 7 \Leftrightarrow m = -2$ (chọn do m nguyên và $m \in (-\infty; -1]$).

+) Nếu $3m < 0 < 3m + 3 \Leftrightarrow -1 < m < 0$ thì $\begin{cases} \max_{[-2; 1]} y = 3m + 3 \\ \max_{[-2; 1]} y = -3m + 1 \end{cases}$.

Ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 3 = 7 \\ -3m + 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \notin (-1; 0) \\ m = -2 \notin (-1; 0) \end{cases}$.

+) Nếu $3m - 1 < 0 < 3m \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{3}$ thì $\begin{cases} \max_{[-2; 1]} y = 3m + 3 \\ \max_{[-2; 1]} y = 3m \\ \max_{[-2; 1]} y = -3m + 1 \end{cases}$.

Ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 3 = 7 \\ 3m = 7 \\ -3m + 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \notin \left(0; \frac{1}{3}\right) \\ m = \frac{7}{3} \notin \left(0; \frac{1}{3}\right) \\ m = -2 \notin \left(0; \frac{1}{3}\right) \end{cases}$.

Vậy $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách khác

Ta có: $\max_{[-2; 1]} y = \max \{|3m - 1|; |3m + 3|\}$.

$$\begin{aligned}
 +) |3m-1| = 7 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1=7 \\ 3m-1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{8}{3} \\ m=-2 \end{cases} \\
 +) |3m+3| = 7 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3m+3=7 \\ 3m+3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{4}{3} \\ m=-\frac{10}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vì m nguyên nên $m = -2$.

Câu 151. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1 + xy$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $S = x^4 + y^4 - x^2 y^2$. Khi đó giá trị của $M + m$ là

- A. $\frac{10}{9}$. B. $\frac{29}{18}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$$C\acute{o} \ S = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2 y^2 = (1 + xy)^2 - 3x^2 y^2 = -2x^2 y^2 + 2xy + 1$$

$$Đặt \ t = xy \Rightarrow S = -2t^2 + 2t + 1$$

Có

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 1 + xy \geq 2xy \Rightarrow xy \leq 1, \text{ dấu bằng xảy ra khi } x = y = \pm 1$$

$$x^2 + y^2 \geq -2xy \Rightarrow 1 + xy \geq -2xy \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{3}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}, y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$Suy \ ra \ t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$$

$$Xét \ hàm \ số \ f(t) = -2t^2 + 2t + 1, \ t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(t)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{2}$	1

$$Từ \ bảng \ biến \ thiên \ ta \ thấy \ M = \frac{3}{2}; m = \frac{1}{9} \Rightarrow M + m = \frac{29}{18}$$

Câu 152. Giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |2m - 3x|$ trên $[-1; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn mệnh đề nào sau đây

- A. $m \in [-2; 3]$ B. $m \in [-1; 2]$ C. $m \in [-1; 1]$ D. $m \in [-3; 4]$

Lời giải

Chọn C

Vì đồ thị hàm số bậc nhất $y = 2m - 3x$ là một đường thẳng nên $\max_{[-1; 2]} f(x)$ chỉ có thể đạt được tại $x = -1$ hoặc $x = 2$.

Do đó nếu đặt $M = \max_{[1;2]} f(x)$ thì $M \geq f(-1) = |2m+3|$ và $M \geq f(2) = |2m-6|$.

Ta có

$$M \geq \frac{f(-1) + f(2)}{2} = \frac{|2m+3| + |2m-6|}{2} = \frac{|2m+3| + |6-2m|}{2} \geq \frac{|(2m+3) + (6-2m)|}{2} = \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |2m+3| = |6-2m| \\ (2m+3)(6-2m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{9}{2}$, đạt được chỉ khi $m = \frac{3}{4}$. **Đáp án B.**

Câu 153. Giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = -3x^2 + 6x + 1 - 2m$ trên $[-2; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn mệnh đề nào sau đây

A. $m \in [-6; -4]$ **B.** $m \in [-4; 0]$ **C.** $m \in [0; 3]$ **D.** $m \in [3; 5]$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = g(x) = -3x^2 + 6x + 1 - 2m$ là parabol có hoành độ đỉnh bằng

$$-\frac{b}{a} = 1 \in [-2; 3]$$

Do đó

$$\begin{aligned} M &= \max_{[-2;3]} f(x) = \max \{|g(1)|; |g(-2)|; |g(3)|\} \\ &= \max \{|4-2m|; |-23-2m|; |-8-2m|\} \\ &= \max \{|2m-4|; |2m+23|; |2m+8|\} \\ &= \max \{|2m-4|; |2m+23|\} \quad (\text{do } 2m-4 < 2m+8 < 2m+23 \quad \forall m \in \mathbb{R}) \\ &= \max \{|2m-4|; |2m+23|\} \end{aligned}$$

Suy ra $M \geq |2m-4|$ và $M \geq |2m+23|$

Ta có

$$M \geq \frac{|2m-4| + |2m+23|}{2} = \frac{|2m+23| + |4-2m|}{2} \geq \frac{|(2m+23) + (4-2m)|}{2} = \frac{27}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |2m+23| = |4-2m| \\ (2m+23)(4-2m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{19}{4}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{27}{2}$, đạt được chỉ khi $m = -\frac{19}{4}$. **Đáp án A.**

Câu 154. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (a,b,c là các số thực) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$

và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng 9. Tính $P = abc$.

A. $P = 0$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = -6$.

Lời giải

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ nên ta có $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ a < 0 \end{cases}$ và điểm

$$\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \text{ thuộc đồ thị} \Rightarrow \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4}.$$

Để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì $b^2 - 4ac \geq 0$

Khi đó giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y = 0$. Theo giả thiết: $x_1^3 + x_2^3 = 9$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \xrightarrow{\text{Viét}} \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9.$$

$$\text{Từ đó ta có hệ } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases} \longrightarrow P = abc = 6.$$

Chọn B

Câu 155. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c là các số thực) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$

và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng 9. Tính $P = abc$.

A. $P = 0$.

B. $P = 6$.

C. $P = 7$.

D. $P = -6$.

Lời giải

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ nên ta có $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ a < 0 \end{cases}$ và điểm

$$\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \text{ thuộc đồ thị} \Rightarrow \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4}.$$

Để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì $b^2 - 4ac \geq 0$

Khi đó giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y = 0$. Theo giả thiết: $x_1^3 + x_2^3 = 9$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \xrightarrow{\text{Viét}} \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9.$$

$$\text{Từ đó ta có hệ } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases} \longrightarrow P = abc = 6.$$

Chọn B

Câu 156. Cho đường thẳng $d_m: y = mx - 2m + 1$ và parabol (P): $y = x^2 - 3x + 2$ (m là tham số thực).

Biết $d = \frac{\sqrt{a}}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản) là khoảng cách lớn nhất từ đỉnh I của parabol (P) đến đường thẳng d_m . Tính $P = a^2 + b^2$.

A. $P = 1097$.

B. $P = 45$.

C. $P = 857$.

D. $P = 285$.

Lời giải

Chọn C

Đỉnh của (P) là $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Gọi $M(a; b)$ là điểm cố định của họ đường thẳng d_m

Suy ra $(a - 2)m + 1 - b = 0$ đúng với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \\ 1 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow M(2; 1).$$

Gọi H là hình chiếu của I lên d_m , khi đó IH là khoảng cách từ I đến đường thẳng d_m .
 Có $d(I; d_m) = IH \leq IM$ nên $d(I; d_m)$ đạt giá trị lớn nhất bằng IM khi và chỉ khi
 $H \equiv M(2;1)$

Khi đó $d = IM = \frac{\sqrt{29}}{4} \Rightarrow a = 29, b = 4.$

Vậy $P = a^2 + b^2 = 857.$

Câu 157. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1;1)$ và $B(-2;3)$. Điểm $M\left(0; \frac{m}{n}\right)$ (với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, $n > 0$) nằm trên trục tung thỏa mãn tổng khoảng cách từ M tới hai điểm A và B là nhỏ nhất. Tính $S = m + 2n$.

- A.** $S = 1$ **B.** $S = 11.$ **C.** $S = 4.$ **D.** $S = 3.$

Lời giải

Chọn B

Ta có A, B nằm cùng phía so với Oy .

Lấy điểm $B'(2; 3)$ đối xứng với điểm B qua Oy .

Ta có: $MA + MB = MA + MB'.$

Do đó, để $MA + MB$ nhỏ nhất thì: 3 điểm M, A, B' thẳng hàng.

Phương trình đường thẳng đi qua A và B' là: $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$

Đường thẳng AB' cắt trục tung tại điểm $M\left(0; \frac{5}{3}\right) \Rightarrow m = 5; n = 3 \Rightarrow m + 2n = 11.$

Câu 158. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 6x + 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(f(x))$, với $-3 \leq x \leq 0$. Tổng $S = m + M$.

- A.** $S = 1$ **B.** $S = 56$ **C.** $S = 57$ **D.** $S = 64$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(f(x)) = f^2(x) + 6f(x) + 5.$

Đặt $t = f(x)$, Xét hàm $t = f(x) = x^2 + 6x + 5$ trên $[-3; 0]$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$ -3 0
$t = x^2 + 6x + 5$	$+\infty$ 5
	-4

Từ bảng biến thiên ta được: $-4 \leq t \leq 5$

Khi đó hàm số được viết lại: $f(t) = t^2 + 6t + 5,$

Lập bảng biến thiên của hàm $f(t) = t^2 + 6t + 5$, trên $[-4; 5]$.

t	-4 -3 5
$f(t) = t^2 + 6t + 5$	60
	-3
	-4

Ta được $m = -4, M = 60$. Vậy $S = 56$

Câu 159. Cho Parabol $y = mx^2 - 2mx + 2$ ($m \neq 0$). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -6 trên đoạn $[-2; 3]$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A.** 8 **B.** 7 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Tọa độ đỉnh của Parabol I(1; 2 - m)

Nếu $m > 0$ khi đó giá trị nhỏ nhất là $y(1) = 2 - m \Rightarrow 2 - m = -6 \Leftrightarrow m = 8$ (tm)

Nếu $m < 0$ khi đó $y(-2) = 8m + 2, y(3) = 3m + 2$ vì $8m + 2 < 3m + 2 \forall m < 0 \Rightarrow \min y = 8m + 2$

Ycbt $\Leftrightarrow 8m + 2 = -6 \Leftrightarrow m = -1$ (tm)

Vậy $S = \{-1; 8\}$

Câu 160. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 3. Tính tổng T các phần tử của S .

A. $T = -\frac{3}{2}$.

B. $T = \frac{1}{2}$.

C. $T = \frac{9}{2}$.

D. $T = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Parabol có hệ số theo x^2 là $4 > 0$ nên bề lõm hướng lên. Hoành độ đỉnh $x_I = \frac{m}{2}$.

• Nếu $\frac{m}{2} < -2 \Leftrightarrow m < -4$ thì $x_I < -2 < 0$. Suy ra $f(x)$ tăng trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = m^2 + 6m + 16$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 + 6m + 16 = 3$ (vô nghiệm).

• Nếu $-2 \leq \frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$ thì $x_I \in [0; 2]$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại đỉnh.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f\left(\frac{m}{2}\right) = -2m$.

Theo yêu cầu bài toán $-2m = 3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn $-4 \leq m \leq 0$).

• Nếu $\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì $x_I > 0 > -2$. Suy ra $f(x)$ giảm trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(0) = m^2 - 2m$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 - 2m = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (loại)} \\ m = 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy $S = \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\} \rightarrow T = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$.

Câu 161. Xét các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 1]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$ là

A. $T_{\max} = 3$.

B. $T_{\max} = \frac{3}{2}$.

C. $T_{\max} = \frac{35}{8}$.

D. $T_{\max} = \frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Với các số thực a, b, c làm cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 1]$. Suy

ra aA. 0. Gọi hai nghiệm đó là x_1, x_2 , theo định lí Viet ta được
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{\frac{(a-b)(2a-b)}{a^2}}{\frac{a-b+c}{a}} = \frac{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(2-\frac{b}{a}\right)}{1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}} = \frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \\ &= \frac{2(1+x_1+x_2+x_1x_2)+x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = 2 + \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}. \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$,

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_1^2 \leq x_1x_2 \\ x_2^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 1+x_1+x_2+x_1x_2 \geq 1+x_1+x_2+x_1^2 \geq x_1+x_2+x_1^2+x_2^2$$

$$\text{Suy ra } \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1^2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2} = 1.$$

Suy ra $T \leq 2+1=3$. Vậy $T_{\max} = 3$, dấu “=” xảy ra khi $x_1 = x_2 = 1$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-a; a]$, ($a > 0$) và có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì $\left| \text{Max}_{[-a;a]} f(x) \right| = \left| \text{Max}_{[0;a]} f(x) \right| = \left| \text{Min}_{[-a;a]} f(x) \right|$

Câu 162. Gọi M, m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = x \left(\frac{2017 + \sqrt{2019 - x^2}}{2018} \right)$ trên tập

xác định của nó. Tìm số phần tử của tập hợp $\mathbb{N}^* \cap [m; M]$?

A. 2018.

B. 44.

C. 88.

D. 89

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = [-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]$

Dễ thấy $f(x)$ là hàm số lẻ trên D . Thêm nữa, $f(x) \geq 0, \forall x \in [0; \sqrt{2019}]$.

Do đó,

$$\begin{cases} M = \text{Max}_{[-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]} f(x) = \text{Max}_{[0; \sqrt{2019}]} f(x) \\ m = \text{Min}_{[-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]} f(x) = -\text{Max}_{[0; \sqrt{2019}]} f(x) \end{cases}$$

Ta có

$$f(x) = x \left(\frac{2017 + \sqrt{2019 - x^2}}{2018} \right) = \frac{x}{2018} \sqrt{2017} \sqrt{2017} + \sqrt{2019 - x^2}$$

$$\leq \frac{x}{2018} \sqrt{\sqrt{2017}^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\sqrt{2017}^2 + \sqrt{2019 - x^2}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2018}}{2018} x \sqrt{2017 + 2019 - x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{\sqrt{2018}}{2018} \left(\frac{x^2 + 2017 + 2019 - x^2}{2} \right) = \sqrt{2018}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2017}}{\sqrt{2017}} = \frac{\sqrt{2019 - x^2}}{1} \\ x^2 = 2017 + 2019 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2018} \in [0; \sqrt{2019}]$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} M = \underset{[-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]}{\text{Max}} f(x) = \underset{[0; \sqrt{2019}]}{\text{Max}} f(x) = \sqrt{2018} \\ m = \underset{[-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]}{\text{Min}} f(x) = -\underset{[0; \sqrt{2019}]}{\text{Max}} f(x) = -\sqrt{2018} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } n \cap \mathbb{N}^* \cap m; M = n \cap \mathbb{N}^* \cap [-\sqrt{2018}; \sqrt{2018}] = 44$$

Câu 163. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = |x^2 - 3x + 2| + mx$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 . Tổng các phần tử của tập hợp S bằng

- A. 6. B. $\frac{5}{2} + 2\sqrt{3}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + (m-3)x + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \vee x \geq 2 \quad (P_1) \\ -x^2 + (m+3)x - 2 & \text{nếu } 1 < x < 2 \quad (P_2) \end{cases}$$

Hai parabol (P_1) và (P_2) cắt nhau tại $A(1; m), B(2; 2m)$. Parabol (P_1) có đỉnh

$$S\left(\frac{3-m}{2}; -\frac{(m-3)^2}{4} + 2\right).$$

Trường hợp 1: $\frac{3-m}{2} \leq 1 \vee \frac{3-m}{2} \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -1 \vee m \geq 1$.

Khi đó

$$\min y = y_S = -1 \Leftrightarrow -\frac{(m-3)^2}{4} + 2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 + 2\sqrt{3} \\ m = 3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $1 < \frac{3-m}{2} < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Khi đó

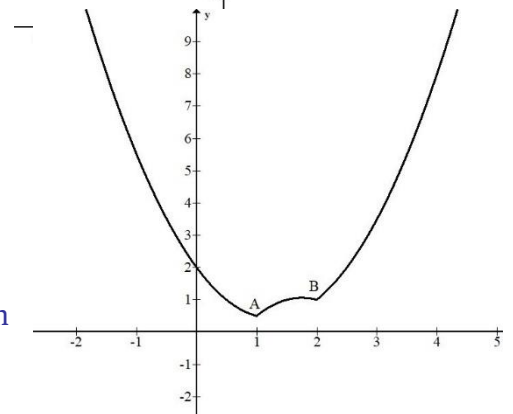
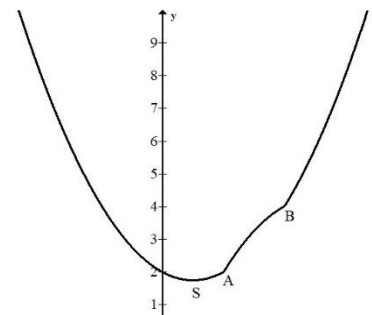
$$\min y = \min\{y_A; y_B\} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m \leq 0 \\ 2m = -1 \\ 0 < m < 1 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Nhận xét: Do $\min y = \min\left\{f(1); f(2); f\left(\frac{3-m}{2}\right)\right\}$ nên

ta có giải bài toán bằng cách lần lượt cho

$f(1), f(2), f\left(\frac{3-m}{2}\right)$ bằng -1 để tìm m , sau đó

kiểm tra lại xem nó có phải là $\min y$ không.



Câu 164. Gọi M, m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + 1}$. Tìm số phần tử của

tập hợp $\mathbb{Z} \cap [m; M]$?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^2+1}^2$. Đặt $t = \frac{x}{x^2+1}$

Vì $x^2+1 \geq 2|x| \Rightarrow -\frac{x^2+1}{2} \leq x \leq \frac{x^2+1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Xét hàm $g(t) = t^2 + t$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Dễ thấy hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Nên $m = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $M = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Vậy $\mathbb{Z} \cap [m; M] = \{0\}$.

Câu 165. Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị (C) . Giả sử $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng $d: y = 4x - 15$ là nhỏ nhất. Tính $S = x_0 + y_0$.

A. 4.

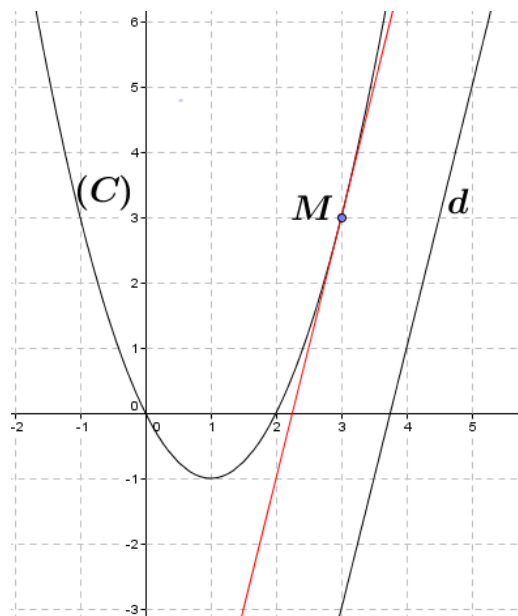
B. 6.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B



Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) sao cho Δ song song với đường thẳng $d: y = 4x - 15$.

Δ có phương trình là $y = 4x - 9$.

Giao điểm của Δ và (C) là $M(3; 3)$.

$M(3; 3)$ là điểm cần tìm.

Do đó $S = x_0 + y_0 = 6$.

Câu 166. Cho hàm số $y = x^2 - 2(m^2 + 1)x + m$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 0]$ lần lượt là $y_1; y_2$. Tính tổng các giá trị của m tìm được, biết $y_1 + 11y_2 = 0$.

A. -1

B. -3

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x^2 - 2(m^2 + 1)x + m$

Gọi $I(x_I; y_I)$ là tọa độ đỉnh của parabol $\Rightarrow x_I = m^2 + 1 \geq 1$. Vậy $x_I \notin [-2; 0]$

Ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; m^2 + 1) \Rightarrow$ hàm số cũng nghịch biến trên $(-2; 0)$

Vậy $y_1 = f(-2) = 4m^2 + m + 8$ và $y_2 = f(0) = m$

Theo bài ra $y_1 + 11y_2 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$

Email: lehongphivts@gmail.com

Câu 167. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$?

A. $\max T = 1$. **B.** $\max T = 3$. **C.** $\max T = 5$. **D.** $\max T = 9$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$|f(1) - f(0)| = |a + b| \leq 2 \Rightarrow (a + b)^2 \leq 4.$$

$$|f(-1) - f(0)| = |a - b| \leq 2 \Rightarrow (a - b)^2 \leq 4.$$

$$\text{Suy ra } (a + b)^2 + (a - b)^2 \leq 8 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \leq 8 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4.$$

$$\text{Ta lại có } |f(0)| = |c| \leq 1 \Rightarrow c^2 \leq 1.$$

Do đó, $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} |a + b| = 2 \\ |a - b| = 2 \\ |c| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{-2; 2\} \\ b = 0 \\ c \in \{-1; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow (a; b; c) \in \{(-2; 0; -1), (-2; 0; 1), (2; 0; -1), (2; 0; 1)\}.$$

Thử lại, chỉ có $(a; b; c) \in \{(-2; 0; 1), (2; 0; -1)\}$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$.

Vậy $\max T = 5$.

VẤN ĐỀ 6 ỨNG DỤNG HÀM SỐ VÀO GIẢI CÁC BÀI TOÁN KHÁC

Câu 168. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hơn đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

A. 30 triệu đồng. **B.** 29 triệu đồng. **C.** 30,5 triệu đồng. **D.** 29,5 triệu đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi x (triệu) đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; ($0 \leq x \leq 4$).

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$ (triệu đồng).

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$ (chiếc).

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

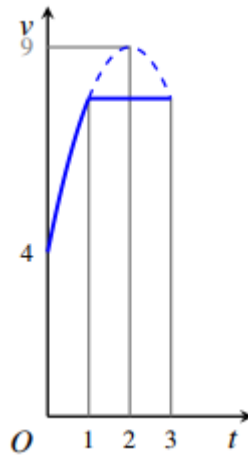
$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$ có bảng biến thiên

$$\text{Vậy } \max_{[0; 4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 169. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị của hàm số vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính vận tốc v của vật tại thời điểm $t = 3$.



A. $v = \frac{121}{4}$.

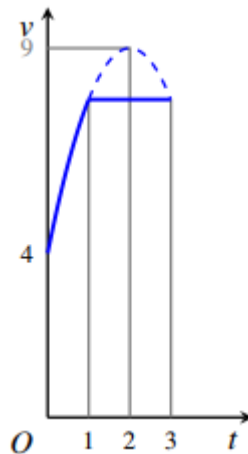
B. $v = \frac{31}{4}$.

C. $v = \frac{89}{4}$.

D. $v = \frac{61}{4}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả: Nguyễn Như Thái Tên FB: Nguyễn Như Thái



Giả sử $v(t) = at^2 + bt + c$ ($t \geq 0$)

Ta có:

$$\begin{cases} v(0) = c = 4 \\ v(2) = 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 5 \\ 4a + b = 0 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4$$

$$\text{Vậy } t = 3 \Rightarrow v_0(t) = \frac{31}{4}$$

Chọn B

Câu 170. Với giá trị nào của a thì bất pt sau nghiệm đúng với mọi giá trị của x :

$$(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 6) \geq a$$

A. $a \geq -2$

B. $a \leq -2$

C. $a \geq -1$

D. $a \leq -1$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt: } t = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow x^2 + 4x + 6 = t + 3$$

$$\text{Ta có: } t = (x + 2)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow t \geq -1$$

Bài toán trở thành: Tìm a để $t(t + 3) \geq a(*) \forall t \geq -1$.

Xét hàm số: $f(t) = t^2 + 3t, (t \geq -1)$

Lập bảng biến thiên của $f(t)$ trên $[-1; +\infty)$

Suy ra $\min f(t) = -2$

$(*) \Leftrightarrow f(t) \geq a, \forall t \geq -1$

Vậy $a \leq -2$

Câu 171. Cho phương trình $2\left(x + \sqrt{4-x^2}\right) = m + x\sqrt{4-x^2}$. Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt. Khi đó:

A. $m_0 \in (1; 2)$.

B. $m_0 \in [3; 4)$.

C. $m_0 \in (5; 6)$.

D. $m_0 \in (-2; 0]$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình: $2\left(x + \sqrt{4-x^2}\right) = m + x\sqrt{4-x^2} \quad (1)$.

+ Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$

+ Đặt $t = x + \sqrt{4-x^2}$, với $-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

Khi đó $t^2 = 4 + 2x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x\sqrt{4-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}$.

Phương trình (1) trở thành:

$$2t = m + \frac{t^2 - 4}{2} \Leftrightarrow t^2 - 4t + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t = 4 - 2m \quad (2)$$

$$+ \text{Ta có } t = x + \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq t \\ x = \frac{t \pm \sqrt{8-t^2}}{2} \end{cases}$$

+ Nhận xét: Với $-2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ thì $\frac{t - \sqrt{8-t^2}}{2} \leq t$

Với $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ thì $\frac{t + \sqrt{8-t^2}}{2} \leq t$

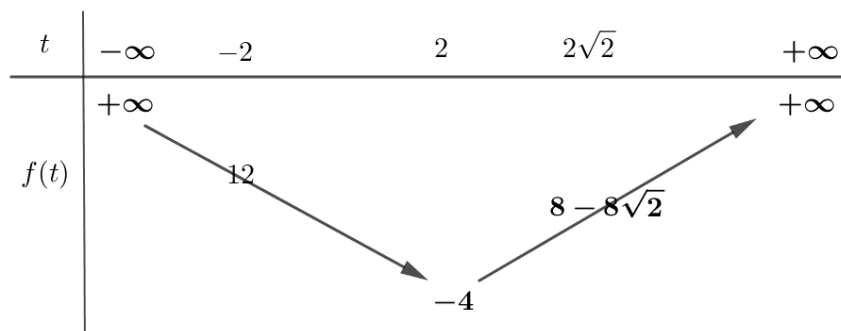
+ Do đó

Với $-2 \leq t < 2$ thì phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{t - \sqrt{8-t^2}}{2}$

Với $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ thì phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{t \pm \sqrt{8-t^2}}{2}$

+ Như vậy, để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $-2 \leq t_1 < 2 \leq t_2 \leq 2\sqrt{2}$

Lập BBT của hàm số $f(t) = t^2 - 4t$,

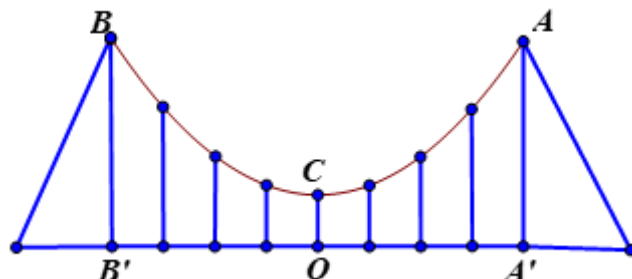


Từ BBT ta thấy phương trình (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $-2 \leq t_1 < 2 \leq t_2 \leq 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow -4 < 4 - 2m \leq 8 - 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 2 \leq m < 4.$$

Do đó $m_0 = 4\sqrt{2} - 2$. Vậy $m_0 \in [3; 4)$.

Câu 172. Dây truyền đỡ nền cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ. Đầu cuối của dây được gắn chặt vào điểm A và B trên trục AA' và BB' với độ cao 30m. Chiều dài nhịp $A'B' = 200m$. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên nền cầu là $OC = 5m$. Xác định tổng các chiều dài các dây cáp treo (thanh thẳng đứng nối nền cầu với dây truyền)?



A. 34,875m.

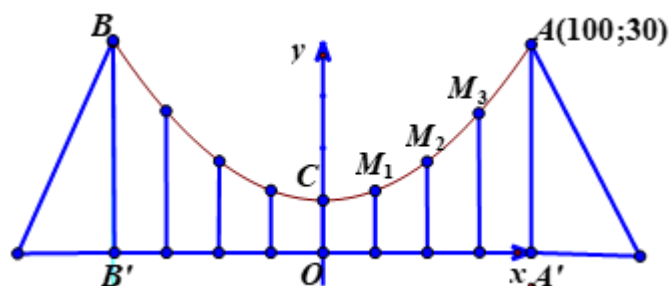
B. 35,875m.

C. 36,875m.

D. 37,875m.

Lời giải

Chọn C



Chọn trục Oy trùng với trục đối xứng của Parabol, trục Ox nằm trên nền cầu như Hình vẽ.

Khi đó ta có $A(100;30), C(0;5)$, ta tìm phương trình của Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$.

Parabol có đỉnh là C và đi qua A nên ta

$$\text{có hệ phương trình: } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 5 \\ a \cdot 100^2 + b \cdot 100 + c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{400} \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases}$$

Suy ra Parabol có phương trình $y = \frac{1}{400}x^2 + 5$. Bài toán đưa việc xác định chiều dài các dây

cáp treo sẽ là tính tung độ những điểm M_1, M_2, M_3 của Parabol. Ta dễ dàng tính được tung độ các

điểm có các hoành độ $x_1 = 25, x_2 = 50, x_3 = 75$ lần lượt là $y_1 = 6,5625(m), y_2 = 11,25(m)$

$y_3 = 19,0625(m)$. Do đó tổng độ dài các dây cáp treo cần tính là

$$6,5625 + 11,25 + 19,0625 = 36,875(m)$$

Câu 173. Khi một quả bóng được đá lên nó sẽ đạt được độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol. Giả thiết rằng bóng được đá từ độ cao 1m. Sau đó 1 giây nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu quả bóng chạm đất (Tính chính xác đến hàng phần trăm).

A. 2,58s.

B. 2,59s.

C. 2,60s.

D. 2,57s.

Lời giải

Chọn A

Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol. Nên có dạng $y = ax^2 + bx + c$

Theo bài ra gán vào hệ tọa độ và sẽ tương ứng các điểm A, B, C. nên ta có

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 12,5 \\ c = 1 \end{cases}$$

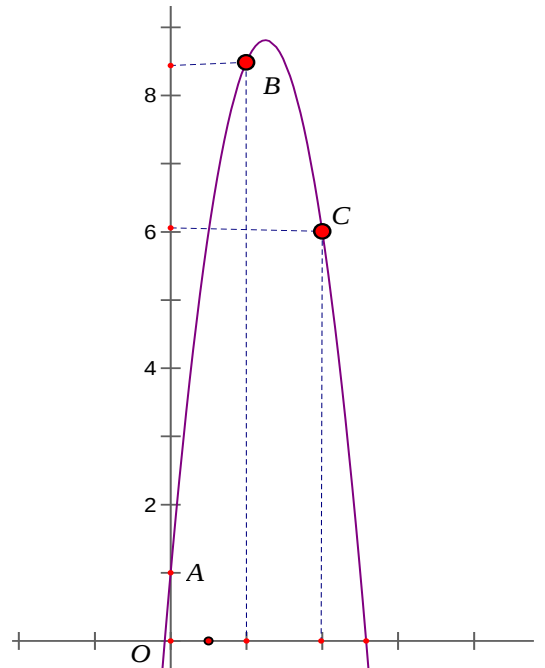
Khi đó parabol có dạng

$$y = -5x^2 + 12,5x + 1$$

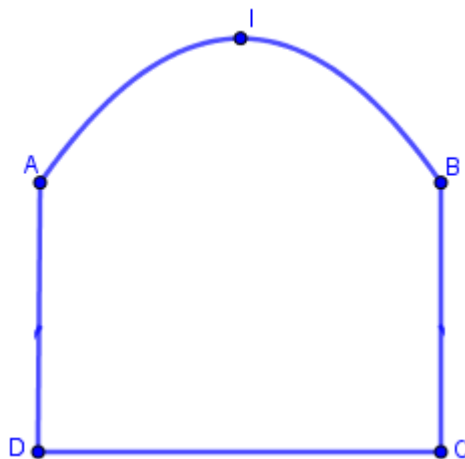
Để quả bóng rơi xuống đất khi

$$y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -0,08(\text{loại}) \\ x \approx 2,58(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy $s = 2,58s$



Câu 174. Một chiếc cổng như hình vẽ, trong đó $CD = 6m, AD = 4m$, phía trên cổng có dạng hình parabol



Người ta cần thiết kế cổng sao cho những chiếc xe container chở hàng với bề ngang thùng xe là $4m$, chiều cao là $5,2m$ có thể đi qua được (chiều cao được tính từ mặt đường đến nóc thùng xe và thùng xe có dạng hình hộp chữ nhật). Hỏi đỉnh I của parabol (theo mép dưới của cổng) cách mặt đất tối thiểu là bao nhiêu?

A. $6,13m$.

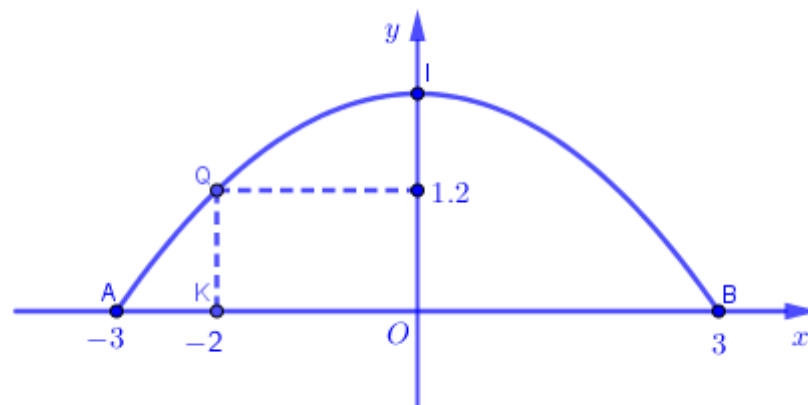
B. $6,14m$.

C. $6,15m$.

D. $6,16m$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là trung điểm của AB , K là điểm thuộc đoạn thẳng OA sao cho $OK = 2m$.

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình của đường cong parabol có dạng $y = ax^2 + c$.

Theo giả thiết ta có parabol đi qua $(-2;1,2), (-3;0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 4a + c = 1,2 \\ 9a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{6}{25} \\ c = \frac{54}{25} = 2,16 \end{cases}.$$

Vậy đỉnh I của parabol (theo mép dưới của công) cách mặt đất tối thiểu là $6,16m$

Câu 175. Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = a(1-b) + b(1-c) + c(1-a)$$

A. $\frac{5}{4}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Biểu thức P được viết lại dưới dạng

$$P = (1-b-c)a + b + c - bc$$

Xét hàm số $f(x) = (1-b-c)x + b + c - bc$ với $x \in [0;1]$.

Do $f(x)$ là hàm số bậc nhất trên đoạn $[0;1]$ nên ta có

$$f(x) \leq \max\{f(0), f(1)\}, \forall x \in [0;1]$$

Lại có

$$f(0) = b + c - bc = -(1-b)(1-c) + 1 \leq 1, \forall b, c \in [0;1]$$

và

$$f(1) = 1 - bc \leq 1, \forall b, c \in [0;1]$$

Do đó

$$f(x) \leq 1, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(a) \leq 1$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $a = 1, b = 0, c \in [0;1]$

Vậy $\max P = 1$.

Email: huanpv@dtdecopark.edu.vn

Câu 176. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 + \sqrt{5+4x-x^2} = 4x + m - 103$ có nghiệm?

A. 7

B. 8

C. 9

D. 6

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{5+4x-x^2} = \sqrt{9-(x-2)^2}$ nên $0 \leq t \leq 3$ hay $t \in [0;3]$

Ta được PT $-t^2 + t + 108 = m$

Khi đó xét $y = f(t) = -t^2 + t + 108$ với $t \in [0;3]$

t		$0 \quad \frac{1}{2} \quad 3$	
f(t)		$\frac{433}{4}$ 108 102	

Từ bảng biến thiên trên ta thấy PT có nghiệm khi và chỉ khi $102 \leq m \leq \frac{433}{4}$ nên có 7 các số nguyên của m thỏa mãn.

Câu 177. Cho phương trình $(x^2 - 2x + m)^2 - 2x^2 + 3x - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

A. 11.

B. 12.

C. 9.

D. 13.

Lời giải

Chọn B

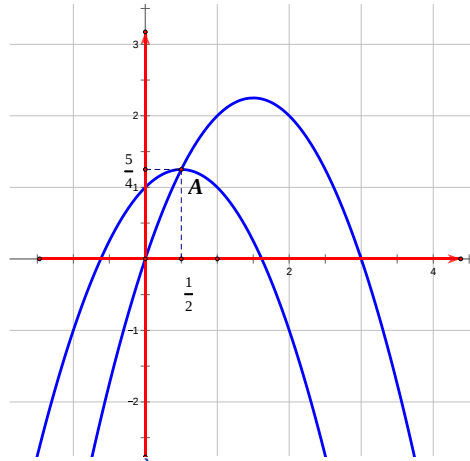
Biến đổi phương trình về dạng: $(x^2 - 2x + m)^2 - 2(x^2 - 2x + m) + m = x$

Đặt $a = x^2 - 2x + m$ ta có hệ:
$$\begin{cases} a = x^2 - 2x + m \\ x = a^2 - 2a + m \end{cases}$$

Từ hệ phương trình có: $(x - a)(x + a - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x + a - 1 = 0 \end{cases}$

Hay có:
$$\begin{cases} x = x^2 - 2x + m \\ x + x^2 - 2x + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 3x \\ m = -x^2 + x + 1 \end{cases}$$

Về trên cùng một đồ thị các Parabol: $(P_1): y = -x^2 + 3x$ $(P_2): y = -x^2 + x + 1$ ta có $m \leq \frac{5}{4}$



Vậy có 12 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu của bài toán

Câu 178. Cho bất phương trình $mx + 4 > 0$ đúng với $|x| < 8$ khi m thuộc đoạn $[a, b]$. Tính $a + b$?

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$.

D. 3

Lời giải

Chọn A

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x) = mx + 4 > 0, \forall x \in (-8; 8) \Leftrightarrow$ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-8; 8)$ nằm phía trên trục hoành $\Leftrightarrow$ hai đầu mút của đoạn thẳng đó đều nằm phía trên trục hoành.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-8) \geq 0 \\ f(8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8m + 4 \geq 0 \\ 8m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

Khi đó $a + b = 0$.

Câu 179. Có tất cả bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình: $\sqrt{9-x} = \sqrt{3m-x^2+9x} - \sqrt{x}$ có đúng bốn nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn A

Đk $0 \leq x \leq 9$

Ta có: $\sqrt{9-x} = \sqrt{3m-x^2+9x} - \sqrt{x} (*) \Leftrightarrow \sqrt{9-x} + \sqrt{x} = \sqrt{3m-x^2+9x}$

$$\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{9x - x^2} = 3m - x^2 + 9x \Leftrightarrow -(-x^2 + 9x) + 9 + 2\sqrt{9x - x^2} = 3m$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{9x - x^2} \left(0 \leq \sqrt{9x - x^2} = \sqrt{\frac{81}{4} - \left(\frac{9}{2} - x\right)^2} \leq \frac{9}{2} \right) \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{9}{2}$$

Phương trình (*) trở thành: $-t^2 + 2t + 9 = 3m$ (1)

Với $t = \sqrt{9x - x^2} \Rightarrow x^2 - 9x + t^2 = 0$ có $\Delta = 81 - 4t^2 > 0, \forall t \in \left[0; \frac{9}{2}\right) \Rightarrow$ Nếu mỗi giá trị của

$t \in \left[0; \frac{9}{2}\right)$ thì ta có 2 giá trị phân biệt của x tương ứng.

Như vậy: pt (*) có 4 nghiệm phân biệt khi pt (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{9}{2}\right)$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 9$ trên $\left[0; \frac{9}{2}\right)$.

t	0	1	$\frac{9}{2}$
$f(t)$	9	10	$-\frac{9}{4}$

Khi đó ta có: $9 \leq 3m < 10 \Leftrightarrow 3 \leq m < \frac{10}{3}$. mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 3$.

Câu 180. Cho (P) $y = 2x^2 - (m+4)x - 2m+1$ và đường thẳng (d): $y = -3x - 3m$, với m là tham số. Biết (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng (Δ): $6x - 2y + 2019 = 0$. Khi đó:

A. $3m + 2020 = 0$ B. $3m - 2020 = 0$ C. $6m + 2021 = 0$ D. $6m - 2021 = 0$

Chọn C

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^2 - (m+4)x - 2m+1 = -3x - 3m \Leftrightarrow 2x^2 - (m+1)x + m+1 = 0$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m+1)^2 - 8(m+1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 7 \end{cases}$$

Khi đó, phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 .

Tọa độ hai điểm A, B lần lượt là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB khi đó

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{m+1}{6} \\ y_G = \frac{y_1 + y_2}{3} = \frac{-3x_1 - 3m - 3x_2 - 3m}{3} = \frac{-3(x_1 + x_2) - 6m}{3} = -(x_1 + x_2) - 2m = -\frac{m+1}{2} - 2m \end{cases}$$

Mà G thuộc (Δ): $6x - 2y + 2019 = 0$ nên ta có

$$6 \cdot \frac{m+1}{6} - 2 \left(-\frac{m+1}{2} - 2m \right) + 2019 = 0 \Leftrightarrow 6m + 2021 = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 181. Tìm số giá trị nguyên của $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình: $|x+2| + m|x-1| = 3$ có nghiệm duy nhất

A. 2017

B. 2018

C. 4034

D. 4036

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = \begin{cases} (-m-1)x + m - 2 & \text{neu } x < -2 \\ (1-m)x + m + 2 & \text{neu } -2 \leq x < 1 \\ (m+1)x + 2 - m & \text{neu } x \geq 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số theo m

Từ bảng biến thiên ta có: Phương trình $f(x) = 3$ có nghiệm duy nhất khi $m > 1$ hoặc $m < -1$ do m nguyên, $m \in [-2018; 2018]$.

Câu 182. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 + 2x - 3\sqrt{x^2 + 2x + m} + m + 2 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $[1; 2]$.

A. 12.

B. 9.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

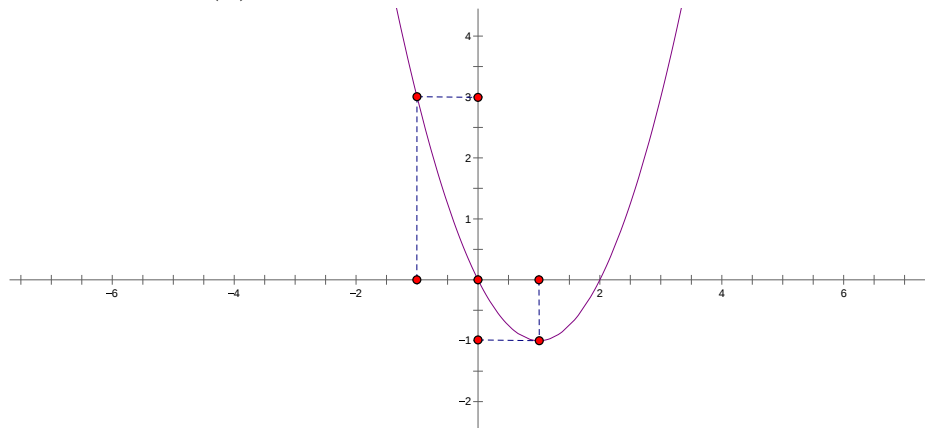
Ta có

$$x^2 + 2x - 3\sqrt{x^2 + 2x + m} + m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + m} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + m} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 1 - m \\ x^2 + 2x = 4 - m \end{cases}$$

Hàm số $y = x^2 + 2x$ đồng biến trên $(-1; +\infty) \supset [1; 2]$ Do đó, phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên $[1; 2]$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1 - m \neq 4 - m \\ y(1) \leq 1 - m \leq y(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq 1 - m \leq 8 \\ 3 \leq 4 - m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq m \leq -2 \\ -4 \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq -2 \end{cases}$$

Câu 183. Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình $f(f(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. $S = 5$.

B. $S = 3$.

C. $P = 6$.

D. $P = +\infty$.

Lời giải

Chọn B

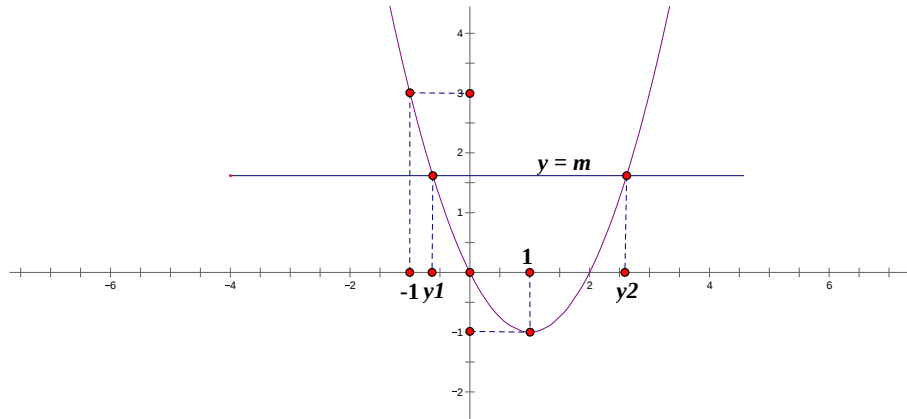
Số nghiệm của pt $f(f(x)) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(f(x))$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị ta có:

+ Nếu $m < -1$ thì pt vô nghiệm

+ Nếu $m = -1$ thì pt tương đương $f(x) = 1$ suy ra pt đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

+ Nếu $-1 < m < 3$ thì pt tương đương với $\begin{cases} f(x) = y_1 \in (-1; 1) \\ f(x) = y_2 > 1 \end{cases}$



Từ đồ thị suy ra pt đã cho có 4 nghiệm phân biệt

+ Nếu $m = 3$ thì pt tương đương với $\begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = y_2 > 1 \end{cases}$

Từ đồ thị suy ra pt đã cho có 3 nghiệm phân biệt

+ Nếu $m > 3$ thì pt tương đương với

$\begin{cases} f(x) = y_1 < -1 \\ f(x) = y_2 > 1 \end{cases}$

Từ đồ thị suy ra pt đã cho có 2 nghiệm phân biệt

Vậy để pt có 4 nghiệm phân biệt thì $-1 < m < 3$

VẤN ĐỀ 7 HÀM HỢP - TÍNH GIÁ TRỊ HÀM SỐ

Câu 184. Cho hàm số f xác định trên tập số nguyên và nhận giá trị cũng trong tập số nguyên, thỏa mãn

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(m+n) = f(m) + f(n) + 3(4mn-1) \end{cases} \text{ với mọi } m, n \text{ là số nguyên.}$$

Tính $f(19)$.

A. $f(19) = 1999$. **B.** $f(19) = 1998$. **C.** $f(19) = 2000$. **D.** $f(19) = 2001$

Lời giải

Chọn B

$$m = n = 1 \Rightarrow f(2) = 2f(1) + 9 = 9$$

$$m = n = 2 \Rightarrow f(4) = 2f(2) + 45 = 63$$

$$m = n = 4 \Rightarrow f(8) = 2f(4) + 189 = 315$$

$$m = n = 8 \Rightarrow f(16) = 2f(8) + 765 = 1395$$

$$m = 2; n = 1 \Rightarrow f(3) = f(2) + f(1) + 21 = 30$$

$$m = 16; n = 3 \Rightarrow f(19) = f(16) + f(3) + 573 = 1998$$

Câu 185. Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ và cũng nhận giá trị trên tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$2f(x) - f(-x) = x^4 - 12x^3 + 4 \text{ với mọi } x, y \text{ thuộc } \mathbb{R}. \text{ Tính giá trị } f(1)$$

A. $f(1) = -1$ **B.** $f(1) = 1$ **C.** $f(1) = 9$ **D.** $f(1) = -9$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Cho } x = 1 \text{ ta được } 2f(1) - f(-1) = 1^4 - 12(1)^3 + 4 = -7$$

$$\text{Cho } x = -1 \text{ ta được } 2f(-1) - f(1) = (-1)^4 - 12(-1)^3 + 4 = 17$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} 2f(1) - f(-1) = -7 \\ -f(1) + 2f(-1) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(-1) = 9 \end{cases}$$

Câu 186. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với $\forall u, v \in \mathbb{R}$. Biết $f(4) = 5$, hỏi giá trị của $f(-6)$ nằm trong khoảng nào dưới đây ?

- A.** $(-8; -7)$. **B.** $(6; 8)$. **C.** $(-5; 0)$. **D.** $(-10; -8)$.

Lời giải

Chọn A

Cho $u = v = 0 \rightarrow f(0+0) = f(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

Cho $v = -u \rightarrow f(u-u) = f(u) + f(-u) = f(0) = 0 \Leftrightarrow f(-u) = -f(u) \rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ.

Lại có: $f(4) = f(2+2) = f(2) + f(2) = 5 \rightarrow f(2) = \frac{5}{2}$

Suy ra: $f(6) = f(4) + f(2) = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2} \rightarrow f(-6) = -f(6) = -\frac{15}{2}$ (vì hàm $y = f(x)$ là hàm lẻ)

Chọn đáp án A.

Câu 187. Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + x + 3) + 2f(x^2 - 3x + 5) = 6x^2 - 10x + 17, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tính $f(2018)$.

- A.** $f(2018) = 2018$. **B.** $f(2018) = 2018^2$.
C. $f(2018) = 4033$. **D.** $f(2018) = 3033$.

Lời giải

Chọn C

Ta cần thay x bởi đại lượng nào đó để bảo toàn được sự xuất hiện của

$f(x^2 + x + 3)$ và $f(x^2 - 3x + 5)$ trong phương trình.

Do đó ta cần có $x^2 + x + 3 = x^2 - 3x + 5 \Leftrightarrow x = 1 - x$.

Như vậy ta thay x bởi $1 - x$.

Cuối cùng ta tính được:

$$f(x^2 + x + 3) = 2x^2 + 2x + 3 = 2(x^2 + x + 3) - 3.$$

Vậy $f(2018) = 2 \cdot 2018 - 3 = 4033$.

Câu 188. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x-10 & \text{khi } x > 2018 \\ f(f(x+11)) & \text{khi } x \leq 2018 \end{cases}$. Tính giá trị $f(1) + f(2018)$.

- A.** 1999. **B.** 2009. **C.** 4018. **D.** 4036.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$f(2018) = f(f(2018+11)) = f(f(2029)) = 2019 - 10 = 2009.$$

$$f(2017) = f(f(2017+11)) = f(f(2028)) = f(2018) = 2009.$$

...

$$f(2009) = f(f(2009+11)) = f(f(2020)) = f(2010) = 2009.$$

$$f(2008) = f(f(2008+11)) = f(f(2019)) = f(2009) = 2009.$$

$$f(2007) = f(f(2007+11)) = f(f(2018)) = f(2009) = 2009.$$

$$f(2006) = f(f(2006+11)) = f(f(2017)) = f(2009) = 2009.$$

...

$$f(1) = f(f(1+11)) = f(f(12)) = 2009.$$

Do đó ta có $f(2018) = f(2017) = \dots = f(1) = 2009$.

Vậy $f(1) + f(2018) = 4018$.

VẤN ĐỀ 8. TIẾP TUYẾN - TIẾP XÚC

Câu 189. Biết rằng $y = ax + b$, $(a, b \in \mathbb{R})$ là tiếp tuyến chung của hai parabol $y = x^2 + 4x + 8$ và $y = x^2 + 8x + 4$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = 2018a + 2019b$ bằng?

- A.** $T = 24224$. **B.** $T = 24220$. **C.** $T = 24022$. **D.** $T = 24242$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ và parabol

$y = x^2 + 4x + 8$ là:

$$x^2 + 4x + 8 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - (a - 4)x + 8 - b = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow (a - 4)^2 - 4(8 - b) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 4b = 16 \quad (*)$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ và parabol

$y = x^2 + 8x + 4$ là:

$$x^2 + 8x + 4 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - (a - 8)x + 4 - b = 0 \quad (2)$$

Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow (a - 8)^2 - 4(4 - b) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 16a + 4b = -48 \quad (**)$$

Kết hợp (*), (**) ta có hệ:
$$\begin{cases} a^2 - 8a + 4b = 16 \\ a^2 - 16a + 4b = -48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8a + 4b = 16 \\ 8a = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy $T = 2018.8 + 2019.4 = 24220$.

Câu 190. Các Parabol $(P_m): y = mx^2 - (4m - 1)x + 4m - 1$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định d khi m thay đổi. Hỏi d đi qua điểm nào trong các điểm sau

- A.** $(0; 0)$. **B.** $(-2; 0)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(3; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Gọi $d: y = ax + b$ là đường thẳng mà họ Parabol luôn tiếp xúc.

Xét phương trình tương giao:

$$mx^2 - (4m - 1)x + 4m - 1 = ax + b$$

$$\Leftrightarrow mx^2 - (4m - 1 - a)x + 4m - 1 - b = 0$$

Khi đó phương trình tương giao phải có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (4m - 1 - a)^2 - 4m(4m - 1 - b) = 0, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow [2(a - 1) + (1 + b)]m + (a - 1)^2 = 0, \forall m \neq 0$$

$$\begin{cases} 2(a - 1) + 1 + b = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy $d: y = x - 1$. Nên d đi qua điểm $(3; 2)$.

Cách 2. (Trắc nghiệm) Ta có: $(P_m): y = mx^2 - (4m - 1)x + 4m - 1 = m(x - 2)^2 + x - 1$

Nên phương trình đường thẳng luôn tiếp xúc với họ Parabol là $d: y = x - 1$

(Chú ý: Mẹo trắc nghiệm thay $m = 0$ vào phương trình họ Parabol ta tìm được phương trình đường thẳng) $d: y = x - 1$.

Câu 191. Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ nhận ba đường thẳng $y = x - 5; y = -3x + 3; y = 3x - 12$ làm các tiếp tuyến. Khi đó giá trị của $M = ab + bc$ là

- A.** -25 **B.** -16 **C.** -1. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

YCBT suy ra các phương trình sau đây đều có nghiệm kép:

$$ax^2 + bx + c = x - 5 \Leftrightarrow ax^2 + (b-1)x + c + 5 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = -3x + 3 \Leftrightarrow ax^2 + (b+3)x + c - 3 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 3x - 12 \Leftrightarrow ax^2 + (b-3)x + c + 12 = 0$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (b-1)^2 - 4a(c+5) = 0 \\ (b+3)^2 - 4a(c-3) = 0 \\ (b-3)^2 - 4a(c+12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2b + 1 - 4ac - 20a = 0(1) \\ b^2 + 6b + 9 - 4ac + 12a = 0(2) \\ b^2 - 6b + 9 - 4ac - 48a = 0(3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $8b + 8 + 32a = 0$

Từ (2) và (3) suy ra: $12b + 60a = 0$

$$\text{Vậy ta có hệ sau: } \begin{cases} 4a + b = -1 \\ 5a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1; b = -5$$

Thay lại vào phương trình (1) ta có $c = 4$

$$\text{Vậy } M = ab + bc = -25$$

Câu 192. Các parabol của họ $(P_m): y = mx^2 + 2(m+1)x + m+1, (m \neq 0)$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định có phương trình là:

A. $2x + y + 1 = 0$. **B.** $2x - y + 1 = 0$. **C.** $x + 2y + 1 = 0$. **D.** $x - 2y + 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$y = mx^2 + 2(m+1)x + m+1 = m(x+1)^2 + 2x+1.$$

$$\Rightarrow d: y = 2x+1.$$

Cách 2:

Gọi $d: y = ax + b$ là đường thẳng cần tìm

ycbt $\Leftrightarrow mx^2 + 2(m+1)x + m+1 = ax + b$ có nghiệm kép với mọi $m \neq 0$.

$$\Leftrightarrow mx^2 + (2m+2-a)x + m+1-b = 0 \text{ có nghiệm kép với mọi } m \neq 0.$$

$$\Delta = (2m+2-a)^2 - 4m(m+1-b) = 0, \forall m \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 4 + a^2 + 8m - 4ma - 4a - 4m^2 - 4m + 4bm = 0, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m(1-a+b) + 4 + a^2 - 4a = 0, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a+b=0 \\ 4+a^2-4a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}. \text{ Vậy } d: y = 2x+1.$$

Câu 193. Cho $(P_m): y = x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2$ luôn tiếp xúc với đường thẳng Δ cố định và

$\Delta_m: y = (2m-1)x + m^2 + 4$ luôn tiếp xúc với một (P) cố định. Khi đó Δ cắt (P) tại A, B thì độ dài AB là:

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } \Delta_m: y = m^2 + 2mx + x^2 - x^2 - x + 4 \Leftrightarrow y = (x+m)^2 - x + 4$$

Do đó Δ_m luôn tiếp xúc với parabol (P): $y = -x^2 - x + 4$.

$$(P_m): y = x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 \Leftrightarrow y = (x-m)^2 - x + 2$$

(P_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: y = -x + 2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$-x^2 - x + 4 = -x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, y = 2 - \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}, y = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}), B(-\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow AB = 4$$

VẤN ĐỀ 9. TẬP HỢP ĐIỂM

Câu 194. Cho Parabol $(P): y = -mx^2 + 2m^2x + m^2 - 2m (m \neq 0)$. Tập hợp đỉnh của Parabol (P) là đường cong C cắt trục hoành tại điểm có tọa độ:

A. $(0;0), (-2;0)$.

B. $(0;0), (-2;0), (1;0)$.

C. $(-2;0), (-1;0), (0;0)$.

D. $(-2;0), (1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có tọa độ đỉnh I của Parabol là $\begin{cases} x_I = m \\ y_I = -m^3 + 2m^3 + m^2 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = m \\ y_I = m^3 + m^2 - 2m \end{cases}$

$$\Rightarrow y_I = x_I^3 + x_I^2 - 2x_I. \text{ Do } m \neq 0 \Rightarrow x_I \neq 0$$

Suy ra tập hợp đỉnh của Parabol (P) là $(C): y = x^3 + x^2 - 2x$ với $(x \neq 0)$.

Ta có $(C) \cap Ox$: Phương trình $x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \text{ do } x \neq 0 \text{ nên} \\ x = 1 \end{cases}$

$$(C) \cap Ox = \{(-2;0), (1;0)\}$$

Câu 195. Cho Parabol (P) có phương trình $y = 4x^2 + 1$. Gọi I là đỉnh của (P) ; A, B là hai điểm phân biệt thuộc (P) và không trùng với I sao cho IA vuông góc với IB . Biết rằng tập hợp trung điểm N của đoạn AB khi A, B thay đổi là một parabol có phương trình $y = mx^2 + n$. Tính $P = m^2 + 16n^2$

A. $P = 98$

B. $P = 89$

C. $P = 97$

D. $P = 79$

Lời giải

Chọn B

Gọi $A(a; 4a^2 + 1)$ nằm trên (P) , đỉnh $I(0;1)$.

Do IA qua $I(0;1)$ và $A(a; 4a^2 + 1)$ nên IA có phương trình $y = 4ax + 1$

Đường thẳng IB vuông góc với IA nên phương trình IB có dạng $y = -\frac{1}{4a}x + 1$. Do đó ta có phương trình đường thẳng IB : $x + 4ay - 4a = 0$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = 4x^2 + 1 \\ x + 4ay - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B\left(\frac{-1}{16a}; \frac{1}{64a^2} + 1\right)$

N là trung điểm của AB , suy ra $N\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{32a}; 2a^2 + \frac{1}{128a^2} + 1\right)$

Nhận xét: Theo giả thiết tập hợp N là một parabol có dạng $y = mx^2 + n$

Từ đó ta xét $x_N^2 = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{32a}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{1024a^2}$. Do đó

$$y_N = 2a^2 + \frac{1}{128a^2} + 1 = 8\left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{1024a^2}\right) + \frac{5}{4}$$

Vậy tập hợp của điểm N là Parabol $y = 8x^2 + \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 8 \\ n = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow P = 89. \text{ Do đó chọn B}$$

Câu 196. Biết rằng đường thẳng $y = mx$ luôn cắt parabol $y = 2x^2 + x - 3$ tại hai điểm phân biệt A và B, khi đó tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là:

A. đường parabol $y = 4x^2 + 1$.

B. đường parabol $y = 4x^2 + x$.

C. đường thẳng $y = 4x + 1$.

D. đường thẳng $y = 4x + 4$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường: $2x^2 + x - 3 = mx \Leftrightarrow 2x^2 + (1-m)x - 3 = 0$.

Vì $\Delta = m^2 - 2m + 25$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là: } \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m-1}{4} \\ y = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4x + 1 \\ y = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4x + 1 \\ y = 4x^2 + x \end{cases}$$

Do đó, tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là đường parabol $y = 4x^2 + x$.

VẤN ĐỀ 10 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

Câu 197. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + a = 0$; x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 12x + b = 0$ và biết rằng $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3}$, b dương. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 1)$.

B. $(-1; 3)$.

C. $(2; 6)$.

D. $(3; 7)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = k, \quad k \neq 0. \text{ Khi đó } \begin{cases} x_2 = kx_1 \\ x_3 = kx_2 = k^2x_1 \\ x_4 = kx_3 \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Viet cho hai phương trình đã cho, ta được

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_3 + x_4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k+1)x_1 = 3 \\ (k+1)x_3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k+1)x_1 = 3 \\ (k+1)k^2x_1 = 12 \end{cases} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -2 \end{cases}$$

Mặt khác $b = x_3 \cdot x_4 = kx_3^2 > 0 \Rightarrow k > 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x_1 = 1, a = kx_1^2 = 2$.

Câu 198. Cho phương trình bậc hai $px^2 + qx + r = 0$ có hai nghiệm α, β . Tính giá trị biểu thức $p^2(\alpha - \beta)^2$.

A. $q^2 - 4p$.

B. $q^2 - 4rp$.

C. $q^2 - 4r$.

D. $q^2 - 2p$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý Vi-et $\alpha + \beta = -\frac{p}{q}, \alpha \cdot \beta = \frac{r}{q}$

Ta có $p^2(\alpha - \beta)^2 = p^2([\alpha + \beta]^2 - 4\alpha\beta) = p^2\left(\left[-\frac{q}{p}\right]^2 - 4\frac{r}{p}\right) = q^2 - 4rp$.

Câu 199. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$.

A. 4.

B. 9.

C. 8.

D. $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn D

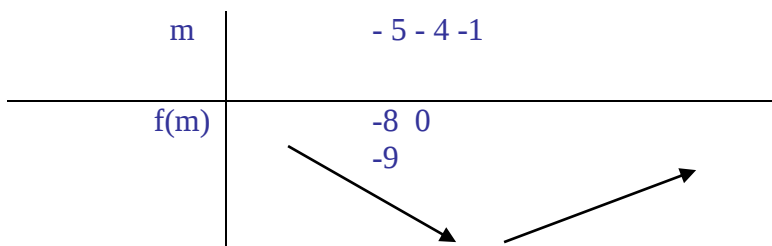
PT: $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0(1)$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -(m^2 + 6m + 5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$

Theo hệ thức viét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3) \end{cases}$

Ta có: $A = \frac{1}{2}|m^2 + 8m + 7|$

Xét hàm số $f(m) = m^2 + 8m + 7$ có BBT trên $[-5; -1]$ là:



$\Rightarrow \max_{[-5; -1]} |f(m)| = 9 \Rightarrow \max A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = -4$