

20 BÀI TẬP TỰ LUYỆN PHẦN RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN

Câu 1 Cho biểu thức :

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)^2 \cdot \frac{x^2-1}{2} - \sqrt{1-x^2}$$

- 1) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa .
- 2) Rút gọn biểu thức A .
- 3) Giải phương trình theo x khi $A = -2$.

Câu 2 Cho biểu thức : $A = \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức .
- b) Tính giá trị của $\sqrt{A}$ khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

Câu 3 Cho biểu thức : $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Coi A là hàm số của biến x vẽ đồ thị hàm số A .

Câu 4 Cho biểu thức : $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Tính giá trị của A khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$
- c) Với giá trị nào của x thì A đạt giá trị nhỏ nhất .

Câu 5 Cho biểu thức : $A = \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \frac{a+2}{a-2}$

- a. Tìm ĐKXĐ
- b) Rút gọn biểu thức A
- c) Tìm giá trị nguyên của a để A nguyên.

Câu 6 Cho biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) - 1$

- a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn P
- b) Tìm giá trị nguyên của x để $P - \sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên.

Câu 7 Cho $P = \left(1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) \left(1 - \frac{a-\sqrt{a}}{-1+\sqrt{a}} \right)$; $a \geq 0, a \neq 1$

- a) Rút gọn P.
- b) Tìm a biết $P > -\sqrt{2}$.
- c) Tìm a biết $P = \sqrt{a}$.

Câu 8 Cho $P = \frac{(1-2x)^2 - 16x^2}{1-4x^2}$; $x \neq \pm \frac{1}{2}$

a) Chứng minh $P = \frac{-2}{1-2x}$

b) Tính P khi $x = \frac{3}{2}$

2. Tính $Q = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5 - \sqrt{24}}}{\sqrt{12}}$

Câu 9 Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{8\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-x-3}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$

a) Rút gọn B.

b) Tính giá trị của B khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

c) Chứng minh rằng $B \leq 1$ với mọi giá trị của x thỏa mãn $x \geq 0$; $x \neq 1$.

Câu 10 Cho $M = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right)$

a) Tìm TXĐ

b) Rút gọn biểu thức M.

c) Tính giá trị của M tại $a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$.

Câu 11 Cho biểu thức: $A = \left(\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} + 1 \right) \cdot \left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - 1 \right)$; $a \geq 0$, $a \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Tìm $a \geq 0$ và $a \neq 1$ thỏa mãn đẳng thức: $A = -a^2$

Câu 12 Cho biểu thức: $S = \left(\frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}} \right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}$; $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$.

1. Rút gọn biểu thức trên.

2. Tìm giá trị của x và y để $S=1$.

Câu 13 Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$; $x > 0$, $x \neq 1$.

a. Chứng minh $Q = \frac{2}{x-1}$

b. Tìm số nguyên x lớn nhất để Q có giá trị là số nguyên.

Câu 14 Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \right)$; $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$.

1. Rút gọn A.

2. Tìm x để $A = 0$.

Câu 15 Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2+a}} + \frac{1}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a^3}-a}{\sqrt{a}-1}; a > 1.$

Câu 16 Cho biểu thức: $T = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}; x > 0, x \neq 1.$

1. Rút gọn biểu thức T.
2. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ và $x \neq 1$ luôn có $T < 1/3$.

Câu 17 Cho biểu thức: $M = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} - \frac{1-(\sqrt{x})^3}{1+\sqrt{x}+x}; x \geq 0; x \neq 1.$

1. Rút gọn biểu thức M.
2. Tìm x để $M \geq 2$.

Bài 18: Cho biểu thức :

$$A = \left(\sqrt{m + \frac{2mn}{1+n^2}} + \sqrt{m - \frac{2mn}{1+n^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \quad \text{với } m \geq 0; n \geq 1$$

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm giá trị của A với $m = \sqrt{56 + 24\sqrt{5}}$.
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Bài 19: Cho biểu thức $P = \left[\frac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)} - \frac{a+\sqrt{a}}{a-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right)$

- a) Rút gọn P.
- b) Tìm a để $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{a}+1}{8} \geq 1$

Bài 20: Cho biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) - 1$

- a) Tìm ĐKXĐ và Rút gọn P
- b) Tìm các giá trị nguyên của x để $P - \sqrt{x}$ nhận giá trị nguyên.