

SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

Lời giải

$a^4 - 2a^3 - (8a - 16) = (a - 2)^2(a^2 - 2a + 4) \geq 0 \Rightarrow a^4 - 2a^3 \geq 8a - 16$. Hoàn toàn tương tự ta có
 $(a^4 - 2a^3) + (b^4 - 2b^3) + (c^4 - 2c^3) \geq 8(a + b + c) - 48 = 0$ hay $a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^3 + b^3 + c^3)$.

Câu hỏi đặt ra là làm thế nào ta nghĩ ra được chứng minh $a^4 - 2a^3 - (8a - 16) \geq 0$, hay nói cách khác đại lượng $8a - 16$ vì sao xuất hiện. Điểm cốt lõi ở đây chính là **phương pháp tiếp tuyến**. Trong phương pháp chứng minh trên ta thực hiện như sau

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3$, phương trình tiếp tuyến của hàm số tại $x = 2$ là $y = 8x - 16$. Để chứng minh $x^4 - 2x^3 \geq 8x - 16$ ta biến nghĩ ngay đến phép biến đổi
 $x^4 - 2x^3 - (8x - 16) = (x - 2)^2 \cdot g(x)$. Vì $x = 2$ chính là nghiệm kép của phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm số.

Bài 2. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}$

Định hướng giải $\frac{a}{1+bc} \geq \frac{a}{1+\frac{(b+c)^2}{4}} = \frac{4a}{4+(1-a)^2}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 2x + 5}$; $x_0 = \frac{1}{3}$. PTTT là $y = \frac{99x - 3}{100}$

Ta có $\frac{4x}{x^2 - 2x + 5} - \frac{99x - 3}{100} = \frac{(3x - 1)^2(15 - 11x)}{100(x^2 - 2x + 5)} \geq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$

Bài 3. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

HD. Bất đẳng thức đã cho thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa $a + b + c = 1$. Ta cần chứng minh

bất đẳng thức $\left(\frac{1}{a} - \frac{4}{1-a} + 3 \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{4}{1-b} + 3 \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{4}{1-c} + 3 \right) \geq 0$. Xét hàm số

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{1-x} + 3$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $x = \frac{1}{3}$ là $y = 18x - 3$. Chú ý a, b, c là

3 cạnh của một tam giác nên $1 = a + b + c > 2a \Rightarrow a < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{1}{2}$. Từ đó suy ra

$$f(x) - (18x - 3) \geq 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$$

Bài 4. Cho $a, b, c \geq -\frac{3}{4}$, thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$$

HD. Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, pttt tại $x = \frac{1}{3}$ là $y = \frac{36x+3}{50}$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

HD. Chuẩn hóa $a + b + c = 1$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức $\sum \frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} \geq \frac{3}{5}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{(1-2x)^2}{2x^2-2x+1}$. Pttt của hàm số tại điểm $x = \frac{1}{3}$ là $y = \frac{-54x+23}{25}$

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(b+c+2a)^2}{(b+c)^2+2a^2} + \frac{(c+a+2b)^2}{(c+a)^2+2b^2} + \frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2+2c^2} \leq 8$$

HD. Chuẩn hóa $a + b + c = 1$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0, a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$

HD. $9 = (a + b + c)^2 \Leftrightarrow 9 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow ab + bc + ca = \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$. Ta

phải chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 9$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x} - 3$

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

HD. Chuẩn hóa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq a+b+c+1. \text{ Xét hàm số } f(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}x} - x, \quad x \in (0,1), \text{ pttt tại } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ là}$$

$$y = -\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x + \frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Bài 9. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$

HD. Chuẩn hóa $a + b + c = 1$.

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$

HD. Do $a, b, c > 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \leq (a + b + c)^2 \leq 9$. Từ đó nếu có một trong ba số a, b, c nhỏ hơn $\frac{1}{3}$, chẳng hạn $a < \frac{1}{3}$ thì $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} > 9 > a^2 + b^2 + c^2$ nên bất đẳng thức được chứng minh.

Bây giờ ta xét trường hợp $a, b, c \geq \frac{1}{3}$, kết hợp điều kiện $a + b + c = 3$ suy ra $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$, $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$. Phương trình tiếp tuyến của $f(x)$ tại điểm $x = 1$ là $y = -4x + 4$

Bài 11. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + ab + b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{2b^2 + bc + c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{2c^2 + ca + a^2}} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

HD. Chuẩn hóa $a + b + c = 1$. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$. Phương trình tiếp tuyến của

$f(x)$ tại $x = 1$ là $y = \frac{11x - 3}{16}$. Ta chứng minh $\frac{x^2}{\sqrt{2x^2 + x + 1}} \geq \frac{11x - 3}{16}$; $\forall x > 0$. Thật vậy với mọi

$x \in \left(0, \frac{3}{11}\right)$ thì bất đẳng thức luôn đúng.

Với $x \geq \frac{3}{11}$ thì $\frac{x^2}{\sqrt{2x^2 + x + 1}} \geq \frac{11x - 3}{16} \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^3(14x^2 + 39x - 9)}{2x^2 + x + 1} \geq 0$, $\forall x \geq \frac{3}{11}$. Từ đó ta chọn

x lần lượt là $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ rồi cộng 3 bất đẳng thức theo vế ta có đpcm.

Bài 12. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{29a^3 - b^3}{ab + 6a^2} + \frac{29b^3 - c^3}{bc + 6b^2} + \frac{29c^3 - a^3}{ca + 6c^2} \leq 4(a + b + c)$

Lời giải

Chuẩn hóa $a + b + c = 3$. Xét hàm số $f(x) = \frac{29x^3 - 1}{x + 6x^2}$. Phương trình tiếp tuyến tại $x = \frac{1}{3}$ là

$y = 5x - 1$. Ta có $\frac{29x^3 - 1}{x + 6x^2} \geq 5x - 1 \Leftrightarrow \frac{-(x - 1)^2(x + 1)}{x + 6x^2} \leq 0$, $\forall x > 0$. Từ đó ta chọn x lần lượt là

$\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ rồi cộng 3 bất đẳng thức theo vế ta có đpcm

Bài 13. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

HD. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2+x+1}$. Phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = 1$ là $y = \frac{2x-1}{3}$. Ta có

$$\frac{x^3}{x^2+x+1} \geq \frac{2x-1}{3} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x+1)}{3(x^2+x+1)} \geq 0, \forall x > 0 \text{ Từ đó ta chọn } x \text{ lần lượt là } \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \text{ rồi cộng}$$

3 bất đẳng thức theo vế ta có đpcm

Bài 14. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+2b^2} + \frac{b^3}{b^2+2c^2} + \frac{c^3}{c^2+2a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

HD. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$. Phương trình tiếp tuyến tại $x = 1$ là $y = \frac{7x-4}{9}$

Bài 15. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+a}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[3]{2}}$$

HD. Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$ Ta chứng minh $\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} \geq \frac{5x^2-1}{4\sqrt[3]{2}}$

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh

$$\frac{a^3+b^3}{3a^2-4ab+11b^2} + \frac{b^3+c^3}{3b^2-4bc+11c^2} + \frac{c^3+a^3}{3c^2-4ca+11a^2} \geq \frac{3}{5}$$

Định hướng giải

$$\text{Ta cần xác định } m, n \text{ thỏa mãn } \frac{a^3+b^3}{3a^2-4ab+11b^2} \geq ma+nb \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3}{3\left(\frac{a}{b}\right)^2-4\left(\frac{a}{b}\right)+11} \geq m\left(\frac{a}{b}\right)+n$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^3+1}{3t^2-4t+11}$$

Phương trình tiếp tuyến của $f(x)$ tại điểm $x = 1$ là $y = \frac{13}{50}x - \frac{3}{50}$

Bài 17. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}$$

HD: Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Phương trình tiếp tuyến của $f(t)$ tại điểm $t = \frac{1}{3}$ là

$$y = -\frac{27}{5x}t + \frac{27}{25}$$

Bài 18. Cho $a, b, c \in (0,1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2}$

Bài 19. Cho $x, y, z < 1, x + y + z = 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{27}{10}$ Cho

$$\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \cdot \text{Chứng minh } 6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}$$

Bài 20. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}ab + b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}bc + c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + \frac{1}{4}ca + a^2}} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)$$

Bài 21. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+a}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} \right)$$

Bài 22. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Chứng minh $10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1$

Bài 23. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$. CMR: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - (a + b + c) \geq 2\sqrt{3}$

Bài 24. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$. CMR: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{4}{3}(a + b + c) \geq 7$

Bài 25. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a + b + c + d = 2 \end{cases}$. CM: $\frac{1}{1+3a^2} + \frac{1}{1+3b^2} + \frac{1}{1+3c^2} + \frac{1}{1+3d^2} \geq \frac{16}{7}$

Bài 26. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. CM $\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} + \frac{1}{b^5 + 3 - b^2} + \frac{1}{c^5 + 3 - c^2} \leq 1$

Bài 27. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. CM $\frac{1}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - 3b + 3}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - 3c + 3}} \leq 3$

Bài 28. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$ CM $\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$

Bài 29. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^4 + b^4 + c^4 = 3 \end{cases}$ CM $\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$

Bài 30. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b}$$

Bài 31. Cho $a, b, c > 0$ Chứng minh $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 4 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$

Bài 32. Chứng minh $\frac{2x^2}{2x^2 + (y+z)^2} + \frac{2y^2}{2y^2 + (x+z)^2} + \frac{2z^2}{2z^2 + (y+x)^2} \leq 1$

Bài 33. Cho $a, b, c > 0$ Chứng minh $\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(a+c-3b)^2}{2b^2 + (a+c)^2} + \frac{(a+b-3c)^2}{2c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{1}{2}$

Bài 34. Cho $a, b, c > 0$ CM $\frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} \leq 1$

Bài 35. Cho $x, y, z > 0$. CM $\frac{xyz(x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)} \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{9}$

Bài 36. Cho $a, b, c > 0$. CM $\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b + c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (a + c)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (b + a)^3}} \leq 1$

Bài 37. Cho $a, b, c > 0$. CM $\frac{a}{\sqrt{b + c}} + \frac{b}{\sqrt{c + a}} + \frac{c}{\sqrt{a + b}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}(a + b + c)$