

CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- ❶ $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$
- ❷ $\sqrt{A^2} = |A|$
- ❸ $(\sqrt{A})^2 = A$
- ❹ $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ khi $A, B \geq 0$
- ❺ $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{-A} \cdot \sqrt{-B}$ khi $A, B \leq 0$
- ❻ $\sqrt[2k]{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^{2k} \end{cases}$
- ❼ $\sqrt[2k+1]{A} = B \Leftrightarrow A = B^{2k+1}$

1. Một số dạng phương trình và bất phương trình cơ bản:

- ❶ $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 & (\text{hoac } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$
- ❷ $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- ❸ $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$
- ❹ $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A + B + 2\sqrt{AB} = C \end{cases}$
- ❺ $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C} \Leftrightarrow A + B + 3\sqrt[3]{A \cdot B \cdot C} = C$

II. MỘT SỐ CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN:

1. Áp dụng công thức:

Bài 1: Giải các phương trình sau:

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\sqrt{-x^2 + 2x + 4} = x - 2$ | b) $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3$ |
| c) $\sqrt{3+x} - \sqrt{2-x} = 1$ | d) $\sqrt{x^2 - 6x + 4} = \sqrt{4-x}$ |

Giải:

a) Phương trình: $\sqrt{-x^2 + 2x + 4} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -x^2 + 2x + 4 = (x - 2)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 0 \Leftrightarrow x = 3 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

c) Phương trình: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ 3 + x + 6 - x + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} = 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ \sqrt{(3+x)(6-x)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ (3+x)(6-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases}$$

d) Phương trình: $\sqrt{3+x} - \sqrt{2-x} = 1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{3+x} = 1 + \sqrt{2-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ 3+x = 1 + (2-x) + 2\sqrt{2-x} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{2-x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x = x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

b) Phương trình: $\sqrt{x^2 - 6x + 4} = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 6x + 4 = 4 - x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 2: Giải phương trình:

a) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$

b) $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2}$

c) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}$

Giải:

a) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$

$$\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{3x+4} = \sqrt{x+3} + \sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 + x+3 + 2\sqrt{(2x+1)(x+3)} = 3x+4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

b) Điều kiện: $x \geq 0$

Pt: $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2} \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{4x} - \sqrt{x+3}$

Bình phương hai vế ta có: $\sqrt{6x^2 + 8x + 2} = \sqrt{4x^2 + 12x} \Leftrightarrow x = 1$

c) ĐK $x \geq \frac{2}{3}$; ta có $\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} > 0$

Nhân 2 vế cho $\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}$ ta được phương trình:

$$x+3=\frac{x+3}{5}(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}) \Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3(\text{loại}) \\ \sqrt{4x+1}+\sqrt{x-2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{4x+1}+\sqrt{x-2}=5$$

Giải pt (*): Bình phương 2 vế ta được:

$$2\sqrt{12x^2-5x-2}=26-7x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{26}{7} \\ 4(12x^2-5x-2)=(26-7x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{26}{7} \\ x^2-344x+684=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=22.$$

Phương pháp đặt ẩn phụ :

Bài 3: Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+19}$$

Giải:

Đặt: $t = x^2 + x + 2$, điều kiện: $t \geq \frac{7}{4}$.

phương trình trở thành: $\sqrt{t+5}+\sqrt{t}=\sqrt{3t+13}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(t+5)t}=t+8 \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=-\frac{16}{3}(\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Với } t=4 \text{ Ta có: } x^2+x+2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Bài 4: Giải phương trình:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{-x^2+3x+4}=5$$

Giải:

Đk: $-1 \leq x \leq 4$

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow \sqrt{-x^2+3x+4} = \frac{t^2-5}{2}$.

Phương trình trở thành: $t + \frac{t^2-5}{2} = 5 \Leftrightarrow t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-5 \\ t=3 \end{cases} \Leftrightarrow t=3$

$$\text{Với } t=3, \text{ ta có: } \sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

Bài 5: Giải phương trình:

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$$

Giải:

Đk: $x \geq 1$

$$pt \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=(3x-2)+(x-1)+2\sqrt{3x^2-5x+2}-6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1})^2-6$$

Đặt: $t = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1}$, $t \geq 0$

phương trình trở thành: $t = t^2 - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$

Do đó ta có: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{(3x-2)(x-1)} = 12-4x \Leftrightarrow x = 2$.

Bài 6: Cho phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)} = m$

- a) Giải phương trình khi $m = 2$.
b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải:

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 3$

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \Rightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)} = \frac{t^2 - 4}{2}$

Phương trình trở thành: $-t^2 + 2t + 4 = 2m \quad (2)$

a) Khi $m = 2$ phương trình (2) $\Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$

Thay t vào ta được: $\begin{cases} \sqrt{(x+1)(3-x)} = -2 \\ \sqrt{(x+1)(3-x)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

b) Đặt $t = h(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$, $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}}$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	-1	1	3
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	2	$2\sqrt{2}$	2

$\Rightarrow$ điều kiện có nghiệm x là $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

Đặt $f(t) = -t^2 + 2t + 4$ xét $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

$f'(t) = -2t + 2$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

t	2	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	$4\sqrt{2}-4$	4

Để phương trình (1) có nghiệm $x \in [-1; 3]$ thì phương trình (2) có nghiệm $t \in [2; 2\sqrt{2}]$ khi và chỉ khi

$2\sqrt{2} \leq m \leq 2$.

3. Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn:

Bài 7: Giải phương trình:

a) $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$

b) $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$

c) $x^2 + (3 - \sqrt{x^2 + 2})x = 1 + 2\sqrt{x^2 + 2}$

d) $(x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 1$

Hướng dẫn:

a) ĐK $x \geq -5$.

Đặt $y = \sqrt{x+5} \Rightarrow y^2 - x = 5$; ta được hệ:
$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ y^2 - x = 5 \end{cases}$$

b) Đặt $u = \sqrt{x+1}; v = \sqrt{x^2 - x + 1} \Rightarrow u^2 + v^2 = x^2 + 2$

c) Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2}$, ta có: $t^2 - (2+x)t - 3 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = x - 1 \end{cases}$

d) Đặt: $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3}, t \geq \sqrt{2}$

Khi đó phương trình trở thành: $(x+1)t = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 - (x+1)t = 0$

Bây giờ ta thêm bớt, để được phương trình bậc 2 theo t:

$$x^2 - 2x + 3 - (x+1)t + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow t^2 - (x+1)t + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = x - 1 \end{cases}$$

4. Phương pháp đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình:

Bài 8: Giải phương trình:

a) $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$

b) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x+3} = \sqrt[3]{2x+1}$

c) $\sqrt[4]{629-x} + \sqrt[4]{77+x} = 8$

d) $\sqrt{x^3 - x^2 - 1} + \sqrt{x^3 - x^2 + 2} = 3$

Giải:

a) ĐK $x \geq 1$; đặt $u = \sqrt[3]{2-x}; v = \sqrt{x-1}$ ta có hệ:

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^2=1 \\ v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1-u \\ u^3+(1-u)^2=1 \\ v \geq 0 \end{cases} \text{ và giải tiếp.}$$

b) Đặt: $u = \sqrt[3]{x-2}; v = \sqrt[3]{x+3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u+v=\sqrt[3]{u^3+v^3} \\ v^3-u^3=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3=u^3+v^3 \\ v^3-u^3=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3uv(u+v)=0 \\ v^3-u^3=5 \end{cases}$$

c) Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[4]{629-x} \\ v = \sqrt[4]{77+x} \end{cases} \Rightarrow u+v=8, u^4+v^4=706$

d) Với điều kiện: $x^3 - x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^3 - x^2 + 2 > 0$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^3 - x^2 - 1} \\ v = \sqrt{x^3 - x^2 + 2} \end{cases}$ Với $v > u \geq 0$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u+v=3 \\ v^2-u^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ (v+u)(v-u)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ v-u=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}$$

Bài tập tự luyện: Giải phương trình sau:

- 1) $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$ (ĐHTCKTHN - 2001)
- 2) $\sqrt{3-x+x^2} - \sqrt{2+x-x^2} = 1$
- 3) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x} = 1$ (ĐHDL HP'01)
- 4) $\sqrt[4]{5-x} + \sqrt[4]{x-1} = \sqrt{2}$
- 5) $\sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3$
- 6) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$ (Đ12)
- 7) $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97-x} = 5$
- 8) $\sqrt[3]{14+x} + \sqrt[3]{12-x} = 2$

5. Phương pháp đánh giá hai vế:

Bài 9: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$

b) $\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{2x^2+8x+17} = \sqrt{15+2x-x^2}$

Giải:

a) ĐK $2 \leq x \leq 4$

Sử dụng BĐT Bunhiacôpxki

Ta có $\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)^2 \leq (1^2 + 1^2)(x-2+4-x) = 4 \Rightarrow VT \leq 2$

Mặt khác $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow VP \geq 2$

Vậy từ phương trình ta có $VT = VP \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{x-2}}{1} = \frac{\sqrt{4-x}}{1} \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

Vậy PT có nghiệm $x = 3$.

b) ĐK $-3 \leq x \leq 5$

Ta có

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \geq 1 \\ 2x^2 + 8x + 17 = 2(x+2)^2 + 9 \geq 9 \end{cases} \Rightarrow VT = \sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{2x^2+8x+17} \geq 1+3=4$$

Mặt khác $15+2x-x^2 = 15-(1-x)^2 \leq 16 \Rightarrow VP = \sqrt{15+2x-x^2} \leq 4$

Vậy phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} VT = 4 \\ VP = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Bài tập tự luyện: Giải các phương trình sau:

- 1) $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$
- 2) $\frac{x^2-6x+15}{x^2-6x+11} = \sqrt{x^2-6x+18}$
- 3) $\sqrt{x^2-6x+11} + \sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt[4]{x^2-4x+5} = 3+\sqrt{2}$

$$4) x^2 - 3x + 3,5 = \sqrt{(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 4x + 5)}$$

$$5) \sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 3 - \sqrt[4]{3x^2 - 12x + 13}$$

$$6) \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x - 1} = 2$$

$$7) \sqrt{2(\sqrt{1-x} + \sqrt{x})} = \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{x}$$

$$8) \sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

$$9) \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11 \quad (\text{Đ11})$$

$$10) x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{1+3x-3x^2}$$

$$11) \sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = x^2 - 12x + 52$$

6. Phương pháp đạo hàm:

1. Các bước:

- Tìm tập xác định của phương trình.
- Biến đổi phương trình (nếu cần) để đặt $f(x)$ bằng một biểu thức nào đó.
- Tính đạo hàm $f(x)$, rồi dựa vào tính đồng biến(nghiệm) của hàm số để kết luận nghiệm của phương trình.

2. **Ví dụ.** Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+3} = 0 \quad (1)$

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $f(x) = \sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+3}$

Ta có: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+2)^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}} > 0; \forall x \neq -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập $M = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, -1\right) \cup \left(-1, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$

Ta thấy $f(-1)=0 \Rightarrow x=-1$ là một nghiệm của (1). Ta có: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3; f\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

X	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$					
F(x)	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm $x = -1$.

Bài tập tương tự:

Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2}$$

$$2) (2x+1)\left(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}\right) + 3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) = 0$$

7. Phương pháp lượng giác hóa:

Bài 10: Giải phương trình sau:

a) $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \quad (1)$

b) $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2-2x^2} \quad (1)$

c) $1 + \sqrt{1-x^2} = 2x^2$

Giải:

a) Đặt $\sqrt{x} = \sin \alpha, 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

Phương trình trở thành:

$$1 + \frac{2}{3} \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sin \alpha + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 3(\sin \alpha + \cos \alpha) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha + \cos \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

b) Tập xác định: $D = [-1; 1]$. (2)

Do (2) nên đặt $x = \cos t$ (*), với $0 \leq t \leq \pi$ (A)

Khi đó phương trình (1) trở thành: $\cos^3 t + \sqrt{(1 - \cos^2 t)^3} = \cos t \sqrt{2(1 - \cos^2 t)} \quad (3)$

Với $t \in (A)$, ta có: $(3) \Leftrightarrow \cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2} \cos t \cdot \sin t \Leftrightarrow (\cos t + \sin t)(1 - \sin t \cdot \cos t) = \sqrt{2} \cos t \cdot \sin t \quad (4)$

Đặt $X = \cos t + \sin t$ (5), $|X| \leq \sqrt{2}$ (B) $\Rightarrow X^2 = 1 + 2 \sin t \cdot \cos t \Rightarrow \sin t \cdot \cos t = \frac{X^2 - 1}{2}$

Phương trình (4) trở thành phương trình ẩn X:

$$X \left(1 - \frac{X^2 - 1}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{X^2 - 1}{2} \Leftrightarrow X(3 - X^2) = \sqrt{2}(X^2 - 1) \Leftrightarrow X^3 + \sqrt{2}X^2 - 3X - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - \sqrt{2})(X^2 + 2\sqrt{2}X + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{2} \\ X^2 + 2\sqrt{2}X + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{2} \\ X = -\sqrt{2} - 1 \\ X = -\sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

Ta thấy chỉ có nghiệm $X = \sqrt{2}$ và $X = -\sqrt{2} + 1$ là thỏa mãn điều kiện (B).

+ Với $X = \sqrt{2}$, thay vào (5) ta được:

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $t \in (A)$ nên ta có $t = \frac{\pi}{4}$. Thay vào (*) ta được: $x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn tập xác định D).

+ Với $X = -\sqrt{2} + 1$, thay vào (5) ta được:

$$\sin t + \cos t = -\sqrt{2} + 1 \quad (**) \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}.$$

Khi đó, ta có:

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \sqrt{1 - \left[\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{-\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}} \Rightarrow$$

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos t \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin t \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos t - \sin t) = \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}} \Leftrightarrow \cos t - \sin t = \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1} \quad (6)$$

Từ (**) và (6) suy ra $\cos t = \frac{-\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$. Thay vào (5), ta được $x = \frac{-\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$.

Nhưng chỉ có nghiệm $x = \frac{-\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$ thỏa mãn tập xác định D.

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $x = \frac{-\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$.

c) Đk: $-1 \leq x \leq 1$

Đặt $x = \cos \alpha, 0 \leq \alpha \leq \pi$

Phương trình trở thành

$$1 + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \text{ (loại)} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài tập tương tự. 1) $4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}$ (HVQHQT- 2001)

$$2) x^3 + \sqrt{(1 - x^2)^3} = x \cdot \sqrt{2(1 - x^2)}$$

$$3) \sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} = 1 - 2x^2$$

4)

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1 - x)^3} - \sqrt{(1 + x)^3} \right] = 2 + \sqrt{1 - x^2}$$

III. MỘT SỐ CÁCH GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN:

Bài 8: Giải các bất phương trình sau:

$$\sqrt{x^2 + 3x - 4} < \sqrt{2x^2 - 2x}$$

Giải:

$$d) \sqrt{x^2 + 3x - 4} < \sqrt{2x^2 - 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 2x^2 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \vee x \geq 1 \\ x < 1 \vee x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -4 \vee x > 4$$

Vậy: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; -4] \cup (4; +\infty)$

Bài 9: Giải các bất phương trình sau:

$$\sqrt{2x^2 + x - 3} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

Giải

$$a) \sqrt{2x^2 + x - 3} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ 2x^2 + x - 3 \geq x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ x^2 + 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ x \leq -3 \vee x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Vậy: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$

Bài 10: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 \leq 0$$

Giải:

Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$

Xét phương trình:

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - 4 + 1 - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x+1 = 0 \end{cases}$$

Vì $x \in [-\frac{1}{3}; 6]$ nên $3x+1 \geq 0$. Suy ra pt: $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1) = 0$

(VN)

Đặt $f(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8$, $f(0) = 1 - \sqrt{6} - 8 < 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\frac{1}{3}$	5	6
f(x)	-	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-\frac{1}{3}; 5]$

Bài 11: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{(x-3)(8-x)} + 26 > -x^2 + 11x$$

Giải:

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 11x - 24} > -x^2 + 11x - 24 - 2.$$

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 11x - 24} \geq 0$ ta có

$$t > t^2 - 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 11x - 24} \geq 0 \\ \sqrt{-x^2 + 11x - 24} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 11x - 24 \geq 0 \\ -x^2 + 11x - 24 < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 8 \\ x < 4 \vee x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x < 4 \vee 7 < x \leq 8$$

Vậy: Tập nghiệm của bất phương trình: $S = [3; 4) \cup (4; 7]$

Bài 12: Cho bất phương trình: $mx - \sqrt{x-3} \leq m+1$

a) Giải bất phương trình khi $m = \frac{1}{2}$

b) Tìm m để bất phương trình (1) có nghiệm.

Giải:

Đk: $x \geq 3$

Đặt $t = \sqrt{x-3}$, đk: $t \geq 0$. $x = t^2 + 3$

Bpt(1) trở thành: $m(t^2 + 3) - t \leq m + 1$ (2)

a) Khi $m = \frac{1}{2}$: (2) $\Leftrightarrow t^2 - 2t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{x-3} \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$$

b) (2) $\Leftrightarrow m \leq \frac{t+1}{t^2+2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+1}{t^2+2}$, ($t \geq 0$)

$$f'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 2}{(t^2 + 2)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{3}$$

t	0	$-1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(t)$		+	0
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{4}$	0

Từ bảng biến thiên, ta thấy bất phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$

IV. BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 13: Giải các phương trình sau:

- $\sqrt[3]{6x - 9x^2} < 3x$
- $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$
- $x - \sqrt{x - 1} - 7 = 0$
- (D-06) $\sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0$

Bài 14: Giải bất phương trình sau:

- $\sqrt{x^2 - 4x - 12} \leq x - 4$
- $\sqrt{x^2 - 4x - 12} > 2x + 3$
- (A-04) $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{7 - x}{\sqrt{x - 3}}$
- $\sqrt{x^3 + 1} \leq x + 1$

Bài 15: Giải các phương trình, bất phương trình sau:

- $\sqrt{2x + 9} = \sqrt{4 - x} + \sqrt{3x + 1}$
- $\sqrt{3x - 3} - \sqrt{5 - x} = \sqrt{2x - 4}$
- (A-05) $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4}$
- (CĐ-09) $\sqrt{x + 1} + 2\sqrt{x - 2} \leq \sqrt{5x + 1}$

Bài 16: Giải các phương trình, bất phương trình sau:

- (D-05) $2\sqrt{x + 2} + 2\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 1} = 4$

b) $\sqrt{\frac{x}{4}} + \sqrt{x-4} \geq 8-x$

c) (D-02) $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$

d) $(x-2)\sqrt{x^2+4} < x^2-4.$

Bài 17: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2$

b) $\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt{2-x^3}$

c) $\sqrt{7-x^2} + x\sqrt{x+5} = \sqrt{3-2x-x^2}$

d) $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x.$

Bài 18: Giải các phương trình , bất phương trình sau:

a) $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$

b) $\frac{2x}{\sqrt{2x+1}-1} > 2x+2$

c) $\frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$

d) (A-2010) $\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \geq 1.$

Bài 19: Giải các phương trình , bất phương trình sau:

a) $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$

b) $\sqrt{(x+1)(2-x)} = 1+2x-2x^2$

c) $x^2 + \sqrt{2x^2+4x+3} \geq 6-2x$

d) $x(x+1) - \sqrt{x^2+x+4} + 2 \geq 0$

e) $\frac{x}{x+1} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} > 3$

f) $(x-3)(x+1) + 4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -3.$

Bài 20: Giải các phương trình , bất phương trình sau:

- a) $x + \sqrt{4 - x^2} = 2 + 3x\sqrt{4 - x^2}$
b) $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$
c) (B-2011) $2\sqrt{2 + x} - 6\sqrt{2 - x} + 4\sqrt{4 - x^2} = 10 - 3x$.
d) (B2012) $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}$.

Bài 21: Giải các phương trình sau:

- a) $x^2 - 1 = 2x\sqrt{x^2 - 2x}$
b) $(4x - 1)\sqrt{x^3 + 1} = 2x^3 + 2x + 1$
c) $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$
d) $x^2 + 4x = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + 24}$.

Bài 22: Giải các phương trình sau:

- a) $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$
b) (A-09) $2\sqrt[3]{3x - 2} + 3\sqrt{6 - 5x} - 8 = 0$
c) $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$
d) $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$.

Bài 23: Giải các phương trình sau:

- a) $x^3 + \sqrt{x + 5} = 5$
b) $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x - 2}$
c) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$
d) $x\sqrt[3]{35 - x^3} \left(x + \sqrt[3]{35 - x^3} \right) = 30$.

Bài 24: Giải các phương trình sau:

- a) $x^3 + 4x - (2x + 7)\sqrt{2x + 3} = 0$
b) (CĐ-2012) $4x^3 + x - (x + 1)\sqrt{2x + 1} = 0$
c) $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2})$
d) $x + \sqrt{3(1 - x^2)} = 2(1 - 2x^2)$.