

MỤC LỤC

1. Chuyên đề 1: Biến đổi đồng nhất.....	Trang 2
2. Chuyên đề 2: Các bài toán về đa thức.....	Trang 22
3. Chuyên đề 3: Các bài toán về căn thức.....	Trang 27
4. Chuyên đề 4: Phương trình, hệ phương trình đại số.....	Trang 54
5. Chuyên đề 5: Phương trình, hệ phương trình vô tỷ.....	Trang 91
6. Chuyên đề 6: Phương trình chứa tham số và hệ thức vi-et.....	Trang 135
7. Chuyên đề 7: Hàm số và đồ thị bậc nhất – bậc 2.....	Trang 169
8. Chuyên đề 8: Giải bài toán bằng lập phương trình.....	Trang 195
9. Chuyên đề 9: Chứng minh Bất Đẳng thức, Tìm GTNH và GTLN..	Trang 121

CHUYÊN ĐỀ 1. BIẾN ĐỔI ĐỒNG NHẤT

Bài 1. Cho $a + b + c = 2009$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc} = 2009$

Lời giải.

Ta có hằng đẳng thức: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Do đó: $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc} = \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} = a + b + c = 2009$

Bài 2. Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn: $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ và

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Lời giải.

Ta có: $0 = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz}$. Suy ra: $ayz + byz + cxy = 0$.

Do đó: $1 = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ca}\right) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \left(\frac{ayz + bxz + cxy}{xyz}\right)$

$= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \left(\frac{0}{xyz}\right)$

Vậy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (đpcm)

Bài 3. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = xyz$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{3z}{1+z^2} = \frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Lời giải.

Ta có: $\frac{x}{1+x^2} = \frac{xyz}{yz+x \cdot xyz} = \frac{xyz}{yz+x \cdot (x+y+z)} = \frac{xyz}{x^2+xy+yz+zx} = \frac{xyz}{(x+y)(z+x)}$

Tương tự ta có: $\frac{2y}{1+y^2} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)}$; $\frac{3z}{1+z^2} = \frac{3xyz}{(y+z)(z+x)}$

Do đó:

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{3z}{1+z^2} &= \frac{xyz}{(x+y)(z+x)} + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)} + \frac{3xyz}{(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{xyz(y+z+2x+2z+3x+3y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\end{aligned}$$

Vậy: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{3z}{1+z^2} = \frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Bài 4. Giả sử x, y là những số thực dương phân biệt thỏa mãn:

$$\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 4$$

Chứng minh rằng: $5y = 4x$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}4 &= \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4(x^4-y^4)+8y^8}{(x^4+y^4)(x^4-y^4)} \\ &= \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4-y^4} = \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2(x^2-y^2)+4y^2}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} \\ &= \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2-y^2} = \frac{y(x-y)+2y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{y}{x-y}\end{aligned}$$

Do đó: $\frac{y}{x-y} = 4 \Leftrightarrow y = 4x - 4y \Leftrightarrow 5y = 4x$

Vậy $5y = 4x$ (đpcm)

Bài 5. Cho 3 số thực x, y, z thỏa mỗi điều kiện: $x + y + z = 0$ và $xyz \neq 0$.

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{x^2}{y^2+z^2-x^2} + \frac{y^2}{z^2+x^2-y^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$

Lời giải.

Ta có: $x + y + z = 0 \Rightarrow y + z = -x \Leftrightarrow (y + z)^2 = (-x)^2$

Suy ra: $y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$. Do đó: $\frac{x^2}{y^2+z^2-x^2} = \frac{x^2}{-2yz}$

Tương tự ta có: $\frac{y^2}{z^2+x^2-y^2} = \frac{y^2}{-2xz}$; $\frac{z^2}{x^2+y^2-z^2} = \frac{z^2}{-2xy}$

Do đó:

$$P = \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2} = \frac{x^2}{-2yz} + \frac{y^2}{-2xz} + \frac{z^2}{-2xy} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{-2xyz}$$

$$= \frac{(x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)}{-2xyz} = \frac{0 - 3 \cdot (-z) \cdot (-x) \cdot (-y)}{-2xyz} = \frac{3xyz}{-2xyz} = -\frac{3}{2}$$

Vậy $P = -\frac{3}{2}$

Lưu ý cần nhớ: Khi $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

và ngược lại khi $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ thì $a + b + c = 0$

Bài 6. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ và $x + y + z = 1$.

Chúng minh rằng: $(x-1)(y-1)(z-1) = 0$

Lời giải.

Ta có: $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz}$ Suy ra: $xy + yz + zx = xyz$

Do đó: $(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - (xy + yz + zx) + (x+y+z) - 1$ (*)

Thay $xy + yz + zx = xyz$ và $x + y + z = 1$ vào (*) ta được:

$$(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - (xy + yz + zx) + (x+y+z) - 1$$

$$= (xy + yz + zx) - (xy + yz + zx) + 1 - 1 = 0 \text{ (đpcm)}$$

Bài 7. Cho x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{zx}{y^2 + 2zx} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$

Lời giải.

Ta có: $0 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} \Rightarrow xy + yz + zx = 0$

Do đó: $x^2 + 2xy = x^2 + 2xy - (xy + yz + zx) = (x^2 - xz) + (xy - yz)$

Suy ra: $x^2 + 2xy = (x-y)(x-z)$

Do đó: $\frac{yz}{y^2 + 2zx} = \frac{yz}{(x-y)(x-z)}$

Tương tự ta có: $\frac{zx}{y^2 + 2zx} = \frac{zx}{(y-x)(y-z)}$; $\frac{xy}{z^2 + 2xy} = \frac{xy}{(z-x)(z-y)}$

Do đó:

$$P = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{zx}{y^2 + 2zx} + \frac{xy}{z^2 + 2xy} = \frac{yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{zx}{(y-x)(y-z)} + \frac{xy}{(z-x)(z-y)}$$

$$= \frac{-yz(y-z) - zx(z-x) - xy(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$$

Vậy $P = 1$.

Bài 8. Cho x, y, z là số thực thỏa mãn $xyz = 1$

Chúng minh: $P = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$

Lời giải.

Ta có: $\frac{1}{1+y+yz} = \frac{x}{x+xy+xyz} = \frac{x}{1+x+xy}$; $\frac{1}{1+z+zx} = \frac{xy}{xy+xyz+x^2.yz} = \frac{xy}{1+x+xy}$

Do đó:

$$P = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{1+x+xy} + \frac{xy}{1+x+xy} = \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1 \text{ (đpcm)}$$

Bài 9. Cho $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Chúng minh: $P = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$

Lời giải.

Ta có: $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b-c} = \frac{b}{a-c} + \frac{c}{b-a} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(c-a)}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{(b-c)^2} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(c-a)(b-c)} \quad (1)$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{(c-a)^2} = \frac{c^2 - bc + ba - a^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad (2); \quad \frac{c}{(a-b)^2} = \frac{b^2 - ac + cb - b^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad (3)$

Cộng (1), (2), (3) Vế theo vế ta được điều phải chứng minh.

Bài 10. Cho a là nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + 1 = 0$. Không cần tính a hãy tính

giá trị biểu thức: $Q = \frac{a^2}{a^4 + a^2 + 1}$

Lời giải.

Do a là nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + 1 = 0$ nên $a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a^2 + 1 = 3a$.

Suy ra: $Q = \frac{a^2}{a^4 + a^2 + 1} = \frac{a^2}{(a^2 + 1)^2 - a^2} = \frac{a^2}{(3a)^2 - a^2} = \frac{a^2}{8a^2} = \frac{1}{8}$

Bài 11. Cho các số thực a, b, c khác nhau đôi một thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và

$$abc \neq 0. \text{ Tính: } P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$$

Lời giải.

$$\text{Do } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\text{Do } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0 \text{ với a, b, đôi một khác nhau nên: } a + b + c = 0$$

$$\text{Suy ra: } a + b + c = 0$$

$$\text{Khi đó: } \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{ab^2}{a^2 + (b-c)(b+c)} = \frac{ab^2}{a^2 + (b-c)(-a)} = \frac{b^2}{a+c-b} = \frac{b^2}{-b-b} = \frac{b}{-2}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{c}{-2}; \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{a}{-2}$$

Cộng theo về các đẳng thức trên ta được:

$$P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{b}{-2} + \frac{c}{-2} + \frac{a}{-2} = -\frac{1}{2}(a+b+c) = 0$$

$$\text{Vậy } P = 0.$$

Bài 12. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn: $a + b + c = 6$; $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 8$

$$\text{Tính giá trị biểu thức: } P = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} 6.8 &= (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} \\ &= 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{a+c} = 3 + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } P = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} = 6.8 - 3 = 3.8$$

Bài 13. Cho $\frac{a^4}{x} + \frac{b^4}{y} = \frac{1}{x+y}$ và $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } bx^2 = ay^2$$

$$\text{b) } \frac{x^{2000}}{a^{1000}} + \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{2}{(a+b)^{1000}}$$

Lời giải.

a) Từ $\frac{a^4}{x} + \frac{b^4}{y} = \frac{1}{x+y}$ và $a^2 + b^2 = 1$ suy ra: $\frac{a^4}{x} + \frac{b^4}{y} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{x+y}$

$$\Rightarrow (x+y)(a^4y + b^4x) = (x+y)(a^2 + b^2)^2 \Rightarrow (ay^2 - bx^2)^2 = 0 \Rightarrow bx^2 = ay^2.$$

b) Từ câu a) $bx^2 = ay^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{1000} = \left(\frac{1}{a+b}\right)^{1000}; \left(\frac{y^2}{b}\right)^{1000} = \left(\frac{1}{a+b}\right)^{1000}$$

Do đó: $\frac{x^{2000}}{a^{1000}} + \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{2}{(a+b)^{1000}}$

Bài 14. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$

Chúng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Lời giải.

Ta có:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$
 . Công theo vế các phương trình của hệ ta được:

$$(a+b+c)x + (a+b+c)y = a+b+c \Rightarrow (a+b+c)(x+y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ x+y = 1 \end{cases}$$

Với $a+b+c=0$ thì: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc$ (1)

Với $x+y=1$ thay vào giả thiết ta được: $a=b=c \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 15. Chứng minh rằng nếu: $x = \frac{a-b}{a+b}; y = \frac{b-c}{b+c}; z = \frac{c-a}{c+a}$

Thì: $(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$

Lời giải.

Ta có:

$$1+x = 1 + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2a}{a+b}; 1+y = 1 + \frac{b-c}{b+c} = \frac{2b}{b+c}; 1+z = 1 + \frac{c-a}{c+a} = \frac{2c}{c+a}$$

$$\Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z) = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$1-x=1-\frac{a-b}{a+b}=\frac{2b}{a+b}; 1-y=1-\frac{b-c}{b+c}=\frac{2c}{b+c}; 1-z=1-\frac{c-a}{c+a}=\frac{2a}{c+a}$$

$$\Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z)=\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

Bài 16. Cho a, b, c là ba số không âm thỏa mãn: $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$

Chúng minh rằng: $(ax+by+cz)^2=(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$

Lời giải.

$$\text{Đặt } \frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}=k \Rightarrow k=\frac{cay-cby}{c^2}=\frac{bcx-baz}{b^2}=\frac{abz-acy}{a^2}$$

$$k=\frac{cay-cbx+bcx-abz+abz-acy}{a^2+b^2+c^2}=0 \Rightarrow ay-bx=cx-az=bz-cy=0$$

$$\Rightarrow (ay-bx)^2=(cx-az)^2=(bz-cy)^2=0$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=0$$

$$\text{Suy ra: } (ax+by+cz)^2=(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 17. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn: $b \neq c; a+b \neq c$ và $c^2=2(ac+bc-ab)$

$$\text{Chúng minh rằng: } \frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$$

Lời giải.

Ta có:

$$a^2+(a-c)^2=a^2+c^2-c^2+(a-c)^2=a^2+c^2-2(ac+bc-ab)+(a-c)^2=2(a-c)(a-c+b)$$

$$\text{Tương tự: } b^2+(b-c)^2=2(b-c)(b-c+a)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{2(a-c)(a-c+b)}{2(b-c)(b-c+a)}=\frac{a-c}{b-c} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 18. Cho $a+b+c=0$. Chúng minh rằng: $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$

Lời giải.

$$\text{Từ: } a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a \Rightarrow (b+c)^2=a^2 \Rightarrow b^2+2bc+c^2=a^2$$

$$\Rightarrow a^2-b^2-c^2=2bc \Rightarrow (a^2-b^2-c^2)^2=4b^2c^2 \Rightarrow a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$$

$$\Rightarrow 2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$$

Vậy: $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$

Bài 19. Cho $m = \frac{a+b}{a-b}$; $n = \frac{c+d}{c-d}$; $p = \frac{ac-bd}{ad+bc}$. Chứng minh rằng: $m+n+p = m.n.p$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} m+n+p &= \frac{a+b}{a-b} + \frac{c+d}{c-d} + \frac{ac-bd}{ad+bc} = \frac{(a+b)(c-d) + (c+d)(a-b)}{(a-b)(c-d)} + \frac{ac-bd}{ad+bc} \\ &= \frac{2(ac-bd)}{(a-b)(c-d)} + \frac{ac-bd}{ad+bc} = \frac{(ac-bd)(2(ad+bc) + (a-b)(c-d))}{(a-b)(c-d)(ad+bc)} \\ &= \frac{(ac-bd)(a+b)(a+c)}{(a-b)(c-d)(ad+bc)} = m.n.p \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Bài 20. Cho các số dương x, y thỏa mãn: $7x^2 - 13xy - 2y^2 = 0$ (1)

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{2x-6y}{7x+4y}$.

Lời giải.

Từ (1) ta có: $(7x+y)(x-2y) = 0 \Leftrightarrow x = 2y$ (do x, y > 0)

Thay x = 2y vào A ta được: $A = \frac{2x-6y}{7x+4y} = \frac{4y-6y}{14y+4y} = \frac{-2y}{18y} = \frac{-1}{9}$

Bài 21. Cho các số thực x, y thỏa mãn:
$$\begin{cases} \frac{2010}{x} + 1 = \frac{2010}{y} \\ x + 2y = 2335 \end{cases} \quad (2)$$

Tính giá trị biểu thức: $B = \frac{x}{y}$.

Lời giải.

Đặt $a = \frac{2010}{x}$, $b = \frac{2010}{y}$ với a, b > 0.

Từ (2) suy ra:
$$\begin{cases} a+1=b \\ \frac{2010}{a} + \frac{2.2010}{b} = 2345 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=b \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{a+1} = \frac{7}{6}$$

$$\Leftrightarrow 7a^2 - 11a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ (do } a > 0) \text{ suy ra : } b = 3.$$

Vậy: $B = \frac{x}{y} = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

Bài 22. Cho số thực x, y, z, t thỏa mãn:
$$\begin{cases} 5x = 3y = \frac{5}{2}z & (1) \\ \frac{t}{x} - \frac{t}{y} + \frac{t}{z} = \frac{9}{10} & (2) \end{cases}$$

Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{t^2}{xy} + \frac{t^2}{yz} + \frac{t^2}{zx}$.

Lời giải.

Từ (1) ta có: $y = \frac{5}{3}x, z = 2x$.

Thay $y = \frac{5}{3}x, z = 2x$ vào (2) ta được: $\frac{t}{x} - \frac{t}{\frac{5}{3}x} + \frac{t}{2x} = \frac{9}{10} \Rightarrow t = x$.

Vì thế: $C = \frac{t^2}{xy} + \frac{t^2}{yz} + \frac{t^2}{zx} = \frac{x^2}{xy} + \frac{x^2}{yz} + \frac{x^2}{zx} = \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} + \frac{x}{z} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{5}$.

Bài 23. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn:
$$\begin{cases} (x-y)(x+y) = z^2 \\ 4y^2 = 5 + 7z^2 \end{cases} \quad (4)$$

Tính giá trị biểu thức $D = 2x^2 + 10y^2 - 23z^2$.

Lời giải.

Ta có: (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - x^2 - y^2 = 0 \\ 4y^2 - 7z^2 = 5 \end{cases} \quad (4)$

Ta tìm các số thực a, b thỏa mãn: $a(z^2 - x^2 - y^2) + b(4y^2 - 7z^2) = 2x^2 + 10y^2 - 23z^2$

$\Leftrightarrow ax^2 + (4b - a)y^2 - (7b + a)z^2 = 2x^2 + 10y^2 - 23z^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 4b - a = 10 \\ 7b + a = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

Vậy $D = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$.

Bài 24. Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn:

$$\begin{cases} \frac{t}{x+2y+2z} = 1 \\ \frac{t}{z-3x} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5).$$
 Tính giá trị biểu thức: $E = \frac{t}{x+8y+9z}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: (5)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{t} + 2\frac{y}{t} + 2\frac{z}{t} = 1 \\ \frac{z}{t} - 3\frac{x}{t} = 2 \end{cases}$$

Mặt khác: $\frac{1}{E} = \frac{x}{t} + 8\frac{y}{t} + 9\frac{z}{t}$. Giả sử a, b là các số thực thỏa mãn:

$$a\left(\frac{x}{t} + 2\frac{y}{t} + 2\frac{z}{t}\right) + b\left(-3\frac{x}{t} + \frac{z}{t}\right) = \frac{x}{t} + 8\frac{y}{t} + 9\frac{z}{t}$$

$$\Leftrightarrow (a-3b)\frac{x}{t} + 2a\frac{y}{t} + (2a+b)\frac{z}{t} = \frac{x}{t} + 8\frac{y}{t} + 9\frac{z}{t}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=1 \\ 2a=8 \\ 2a+b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{E} = 4.1 + 1.2 = 6.$$

Vậy $E = 6$

Bài 25. Cho a và b là các số thỏa mãn $a > b > 0$ và $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4}$.

Lời giải.

Ta có: $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0 \Leftrightarrow (a-2b)(a^2 + ab + 3b^2) = 0$ (*)

Vì $a > b > 0 \Rightarrow a^2 + ab + 3b^2 > 0$ nên từ (*) ta có $a = 2b$

Biểu thức $B = \frac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4} = \frac{16b^4 - 4b^4}{b^4 - 64b^4}$. Vậy: $B = \frac{12b^4}{-63b^4} = \frac{-4}{21}$

Bài 26. Cho ba số x, y, z khác 0 và thỏa mãn:

$$\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0 \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức: $P = (y^{2009} + z^{2009})(z^{2011} + x^{2011})(x^{2013} + y^{2013})$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra:

$$4 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2(x+y+z)}{xyz} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2$$

Mà $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$ suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ (1)

Mặt khác $x + y + z = \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{1}{x + y + z} = 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$ (3)

Biến đổi (3) $\Leftrightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2013} = -y^{2013} \\ y^{2009} = -z^{2009} \\ z^{2011} = -x^{2011} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2013} + y^{2013} = 0 \\ y^{2009} + z^{2009} = 0 \\ z^{2011} + x^{2011} = 0 \end{cases} \text{ nên } P = 0$$

Bài 27. Cho các số x, y, z khác 0 thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4$.

Tính giá trị của biểu thức $P = (x + 2y + z)^{2012}$.

Lời giải.

+) Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 4$

+) Do đó $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{z^2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{yz} + \frac{1}{z^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 = 0 \\ \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -\frac{1}{z} \\ \frac{1}{y} = -\frac{1}{z} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -z$

Thay vào $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ ta được $x = y = \frac{1}{2}; z = -\frac{1}{2}$

Khi đó $P = \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{-1}{2}\right)^{2012} = 1^{2012} = 1$

Bài 28. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = a + 2b + 3c = 14$.

Tính giá trị của biểu thức $T = abc$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ a + 2b + 3c = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ 2a + 4b + 6c = 28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b - 6c = -14$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1; b = 2; c = 3$$

$$T = abc = 6.$$

Bài 29. Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$

Tính giá trị biểu thức: $P = a^{2010} + b^{2010}$

Lời giải.

Ta có:

$$0 = a^{100} + b^{100} - (a^{101} + b^{101}) = a^{101} + b^{101} - (a^{102} + b^{102})$$

$$\Leftrightarrow a^{100}(1-a) + b^{100}(1-b) = a^{101}(1-a) + b^{101}(1-b)$$

$$\Leftrightarrow a^{100} \cdot (1-a)^2 + b^{100} \cdot (1-b)^2 = 0$$

Do đó $a = b = 1$ (do a, b dương)

$$\text{Vậy } P = a^{2010} + b^{2010} = 1 + 1 = 2$$

Bài 30. Cho số $x (x \in \mathbb{R}; x > 0)$ thỏa mãn điều kiện: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

Tính giá trị các biểu thức: $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$ và $B = x^5 + \frac{1}{x^5}$

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } (x + \frac{1}{x})^2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \text{ (do } x > 0)$$

$$\Rightarrow 21 = (x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2}) = (x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x + \frac{1}{x}) \Rightarrow A = x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

$$\Rightarrow 7.18 = (x^2 + \frac{1}{x^2})(x^3 + \frac{1}{x^3}) = (x^5 + \frac{1}{x^5}) + (x + \frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow B = x^5 + \frac{1}{x^5} = 7.18 - 3 = 123$$

Câu 31. Giả sử a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2 + 3a = b^2 + 3b = 2$

a) Chứng minh rằng $a + b = -3$

b) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = -45$

Lời giải.

a) Giả sử a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} a^2 + 3b = 2 \\ b^2 + 3a = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 3(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) + 3(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \text{ (loại)} \\ a + b = -3 \end{cases}$$

b) $(a + b)^3 = -27$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -27 \Leftrightarrow a^3 + b^3 - 9ab = -27$$

$$\text{vì } a^2 + 3a + b^2 + 3b = 4 \Leftrightarrow (a + b)^2 - 2ab + 3(a + b) = 4 \Leftrightarrow ab = -2$$

vậy $a^3 + b^3 = -45$

Câu 32. Với a, b, c là các số thực thỏa mãn:

$$(3a + 3b + 3c)^3 = 24 + (3a + b - c)^3 + (3b + c - a)^3 + (3c + a - b)^3$$

Chúng minh rằng: $(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) = 1$

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} 3a + b - c = x \\ 3b + c - a = y \\ 3c + a - b = z \end{cases}$$

Ta có:

$$(3a + 3b + 3c)^3 = 24 + (3a + b - c)^3 + (3b + c - a)^3 + (3c + a - b)^3 \Leftrightarrow (x + y + z)^3 = 24 + x^3 + y^3 + z^3$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^3 = 24 + (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x) \Leftrightarrow 24 - 3(x + y)(y + z)(z + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 24 - 3(2a + 4b)(2b + 4c)(2c + 4a) = 0$$

$$\Leftrightarrow 24 - 24(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) = 1$$

Bài 33. Cho Các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời 2 đẳng thức:

i) $(a + b)(b + c)(c + a) = abc$

ii) $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = a^3b^3c^3$. Chứng minh: $abc = 0$

Lời giải.

Ta có: $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = a^3b^3c^3$

$$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a)(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^3b^3c^3$$

Mà: $(a + b)(b + c)(c + a) = abc$. Do đó:

$$abc(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^3b^3c^3$$

$$\Leftrightarrow abc = 0 \text{ hoặc } (a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^2b^2c^2$$

* Nếu $abc \neq 0$

Thì: $a^2 - ab + b^2 \geq |ab|$; $b^2 - bc + c^2 \geq |bc|$; $c^2 - ca + a^2 \geq |ca|$

Suy ra: $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq a^2b^2c^2$

Mà: $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^2b^2c^2$

Do đó $a = b = c$ thay vào (i) $\Rightarrow 7a^3 = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow abc = 0$ (mâu thuẫn)

Vậy: $abc = 0$ (đpcm)

Bài 34. Cho các số a, b thỏa mãn $2a^2 + 11ab - 3b^2 = 0, b \neq 2a, b \neq -2a$. Tính giá trị biểu

thức: $T = \frac{a-2b}{2a-b} + \frac{2a-3b}{2a+b}$.

Lời giải.

Ta có

$$T = \frac{a-2b}{2a-b} + \frac{2a-3b}{2a+b} = \frac{(a-2b)(2a+b) + (2a-3b)(2a-b)}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{6a^2 - 11ab + b^2}{4a^2 - b^2}$$

Từ giả thiết suy ra $11ab = -2a^2 + 3b^2$, thay vào T ta được:

$$T = \frac{6a^2 - 11ab + b^2}{4a^2 - b^2} = \frac{6a^2 + 2a^2 - 3b^2 + b^2}{4a^2 - b^2} = \frac{2(4a^2 - b^2)}{4a^2 - b^2} = 2.$$

Bài 35. Cho a và b là các số thực thỏa mãn các điều kiện:

$$6a^2 + 20a + 15 = 0; \quad 15b^2 + 20b + 6 = 0; \quad ab \neq 1.$$

Chúng minh rằng: $\frac{b^3}{ab^2 - 9(ab+1)^3} = \frac{6}{2015}$.

Lời giải.

Ta ký hiệu các điều kiện như sau:

$$6a^2 + 20a + 15 = 0 \quad (1); \quad 15b^2 + 20b + 6 = 0 \quad (2); \quad ab \neq 1 \quad (3).$$

Dễ thấy các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt.

Do (3) nên b khác 0. Chia hai vế của (2) cho b^2 ta được

$$6\left(\frac{1}{b}\right)^2 + 20\left(\frac{1}{b}\right) + 15 = 0 \quad (4)$$

Từ (1), (3) và (4) suy ra a và $\frac{1}{b}$ là hai nghiệm khác nhau của phương trình

$$6x^2 + 20x + 15 = 0 \quad (5)$$

Theo định lí Vi-ét: $a + \frac{1}{b} = -\frac{10}{3}; \quad \frac{a}{b} = \frac{5}{2}$.

$$\text{Từ đó : } \frac{ab^2 - 9(ab+1)^3}{b^3} = \frac{a}{b} - 9\left(a + \frac{1}{b}\right)^3 = \frac{5}{2} - 9\left(-\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{2015}{6}$$

$$\text{Suy ra } \frac{b^3}{ab^2 - 9(ab+1)^3} = \frac{6}{2015}, \text{ điều phải chứng minh.}$$

Bài 36. Cho trước $a, b \in \mathbb{R}$; gọi x, y là hai số thực thỏa mãn
$$\begin{cases} x + y = a + b \\ x^3 + y^3 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $x^{2011} + y^{2011} = a^{2011} + b^{2011}$.

Lời giải.

Cho trước $a, b \in \mathbb{R}$; gọi x, y là hai số thực thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y = a + b \\ x^3 + y^3 = a^3 + b^3 \end{cases} (I). \text{ Chứng minh rằng: } x^{2011} + y^{2011} = a^{2011} + b^{2011}.$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a + b \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a + b & (1) \\ xy(a + b) = ab(a + b) & (2) \end{cases} (*)$$

$$+/\text{Nếu } a + b \neq 0 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a + b \\ xy = ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow x, y \text{ là 2 nghiệm của phương trình } X^2 - (a + b)X + ab = 0$$

$$\text{Giải ra ta có } \begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases}; \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \Rightarrow x^{2011} + y^{2011} = a^{2011} + b^{2011}.$$

$$+/\text{Nếu } a + b = 0 \Rightarrow a = -b.$$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^{2011} + b^{2011} = 0 \\ x^{2011} + y^{2011} = 0 \end{cases} \Rightarrow x^{2011} + y^{2011} = a^{2011} + b^{2011}$$

Bài 37. Cho $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$

Gợi ý.

$$\text{Đặt } \frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c} = k \Rightarrow a = \frac{x^2 - yz}{k}, b = \frac{y^2 - zx}{k}, c = \frac{z^2 - xy}{k}$$

Sau đó tính: $a^2 - bc, b^2 - ca, c^2 - ab$ theo x, y, z, k từ đó suy ra: $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$

Bài 38. Phân tích đa thức thành nhân tử: $P = x^4 + 2000x^2 + 1999x + 2000$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} P &= x^4 + 2000x^2 + 1999x + 2000 = x^4 + x^3 + x^2 + 1999(x^2 + x + 1) - (x^3 - 1) \\ &= x^2(x^2 + x + 1) + 1999(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 + 1999 - x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2000) \end{aligned}$$

Bài 39. Cho $a, b \neq 0$ thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh: $\frac{a}{b^3 - 1} + \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(ab - 2)}{a^2b^2 + 3}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} VT &= \frac{a}{b^3 - 1} + \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{a}{(b - 1)(b^2 + b + 1)} + \frac{b}{(a - 1)(a^2 + a + 1)} \\ &= \frac{a}{-a(b^2 + b + 1)} + \frac{b}{-b(a^2 + a + 1)} = \frac{-1}{b^2 + b + 1} + \frac{-1}{a^2 + a + 1} \\ &= \frac{-(a^2 + a + 1) - (b^2 + b + 1)}{(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)} = -\frac{[(a + b)^2 - 2ab + 3]}{a^2b^2 + ab(a + b) + a^2 + b^2 + ab + 2} \\ &= \frac{2(ab - 2)}{a^2b^2 + (a^2 + 2ab + b^2) + 2} = \frac{2(ab - 2)}{a^2b^2 + 3} = VP \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 40. Phân tích đa thức thành nhân tử: $P = a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b) = a^4(b - c) - b^4[(a - b) + (b - c)] + c^4(a - b) \\ &= a^4(b - c) - b^4(a - b) - b^4(b - c) + c^4(a - b) = (a - b)(c^4 - b^4) + (b - c)(a^4 - b^4) \\ &= (a - b)(b - c)(c - a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \\ &= \frac{1}{2}(a - b)(b - c)(c - a)[(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2] \end{aligned}$$

Bài 41. Với a, b, c là số thực thỏa mãn:

$$(3a + 3b + 3c)^3 = 24 + (3a + b - c)^3 + (3b + c - a)^3 + (3c + a - b)^3 (*)$$

Chứng minh rằng: $(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) = 1$

Lời giải.

Đặt: $3a + b - c = x$; $3b + c - a = y$; $3c + a - b = z$. Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (x+y+z)^3 = 24 + x^3 + y^3 + z^3$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y)(y+z)(z+x) = 24 \Leftrightarrow 24(a+2b)(b+2c)(c+2a) = 24$$

$$\Leftrightarrow (a+2b)(b+2c)(c+2a) = 1 \text{ (đpcm)}$$

Bài 42. Cho a, b, c đôi một khác nhau. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-b)(c-a)}$$

Hướng dẫn.

$$P = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-b)(c-a)} = \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Bằng cách tách: $a-c = -[(c-b) + (b-a)]$ ta phân tích được:

$$P = \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$$

Bài 43. Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$$

Lời giải.

Ta có: $a + b + c \neq 0$ do nếu $a + b + c = 0$ thì:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{-a} + \frac{b}{-b} + \frac{c}{-c} = -1 - 1 - 1 = -3 \text{ (trái với giả thiết)}$$

Do đó $a + b + c \neq 0$. Khi đó:

$$\begin{aligned} a+b+c &= (a+b+c) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) = \frac{a^2}{b+c} + \frac{(b+c)a}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{(c+a)b}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{(a+b)c}{a+b} \\ &= a+b+c + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \\ \Rightarrow P &= \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0 \end{aligned}$$

Bài 44. Cho 4 số a, b, c, d nguyên thỏa mãn: $\begin{cases} a+b=c+d \\ ab+1=cd \end{cases}$. Chứng minh: $c = d$.

Lời giải.

Ta có: $a + b = c + d$ suy ra: $a = c + d - b$ thay vào $ab + 1 = cd$

$$\text{Ta có: } (c+d-b).b+1=cd \Leftrightarrow b(d-b)+cd-cd+1=0 \Rightarrow (d-b)(b-c)=-1$$

Vì b, c, d là số nguyên nên: $d - b = -b + c = 1$ hoặc $-d + b = b - c = 1$

Vậy $c = d$

Bài 45. Cho $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ a^3+b^3+c^3=1 \end{cases}$. Tính giá trị biểu thức: $P = a^{2018} + b^{2018} + c^{2018}$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 1 \\ \Rightarrow 1 + 2(ab+bc+ca) &= 1 \Rightarrow ab+bc+ca = 0 \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \Leftrightarrow 1 - 3abc = 1 \cdot (1 - 0) \\ \Rightarrow abc &= 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee c = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Xét } a = 0 \text{ thì } \begin{cases} b+c=1 \\ b^2+c^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2+2bc+c^2=1 \\ b^2+c^2=1 \end{cases} \Rightarrow bc=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Do đó: $a = 0, b = 0, c = 1$ hoặc $a = 0, b = 1, c = 0$

Khi đó: $P = 1$

Lập luận tương tự với các trường hợp $b = 0$ và $c = 0$.

Vậy $P = 1$.

Bài 46. Cho $a + b + c + d = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c+d)(ab-cd)$

Lời giải.

Từ: $a + b + c + d = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a + b &= -(c + d) \Rightarrow (a + b)^3 = -(c + d)^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3 - d^3 - 3cd(c + d) \\ \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 &= -3ab(a + b) - 3cd(c + d) \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3ab(c + d) - 3cd(c + d) \\ \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 &= 3(c + d)(ab - cd) \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 47. Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính giá trị biểu thức: $A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 & a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \\
 \Leftrightarrow & (a+b)^3 - 3ab(a+b) + b^3 = 3abc \\
 \Leftrightarrow & (a+b+c)^3 - 3c(a+b)(a+b+c) = 3abc + 3ab(a+b) \\
 \Leftrightarrow & (a+b+c)^3 = 3c(a+b)(a+b+c) + 3ab(a+b+c) \\
 \Leftrightarrow & (a+b+c)^3 = 3(a+b+c)(ab+bc+ca) \\
 \Leftrightarrow & (a+b+c)\left[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\right] = 0 \\
 \Leftrightarrow & (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a+b+c=0 \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{cases}
 \end{aligned}$$

Với $a+b+c=0$ thì: $P = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+b}{b} \cdot \frac{a+c}{c} = \frac{-c}{a} \cdot \frac{-a}{b} \cdot \frac{-b}{c} = -1$

Với $a=b=c$ thì $P = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$

Bài 48. Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$. Tính giá trị biểu thức:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} & \text{b) } B &= \frac{(a^2+2bc-1)(b^2+2ca-1)(c^2+2ab-1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}
 \end{aligned}$$

Lời giải.

a) Ta có: $1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = (a+b)(a+c)$

Tương tự: $1 + b^2 = (a+b)(b+c)$; $1 + c^2 = (c+a)(b+c)$

Do đó: $A = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} = 1$

b) Ta có: $a^2 + 2bc - 1 = a^2 + 2bc - ab - bc - ca = (a-b)(a-c)$

Tương tự: $b^2 + 2ca - 1 = (b-c)(b-a)$; $c^2 + 2ab - 1 = (c-a)(c-b)$

Do đó: $B = \frac{(a^2+2bc-1)(b^2+2ca-1)(c^2+2ab-1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} = \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} = 1$

Bài 49. Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2}$

Gợi ý.

Ta dễ dàng chứng minh được khi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ thì $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

$$\text{Do đó: } P = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} = \frac{abc}{c^3} + \frac{abc}{a^3} + \frac{abc}{b^3} = abc \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = abc \cdot \frac{3}{abc} = 3$$

Bài 50. Giả sử x, y là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1}$

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{2}{xy+1}$

Lời giải.

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{xy+1} + \frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{xy+1} = 0$$

$$\frac{xy-y^2}{(x^2+1)(xy+1)} + \frac{xy-x^2}{(y^2+1)(xy+1)} = 0 \Rightarrow (xy-y^2)(y^2+1) + (xy-x^2)(x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1) = 0 \Leftrightarrow xy = 1 \text{ (vì } x \neq y) \Rightarrow S = 2$$

CHỦ ĐỀ 2. CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐA THỨC

Bài 1.

Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $P(x)$ chia cho $x + 1$ dư 3, $P(x)$ chia cho x dư 1 và $P(x)$ chia cho $x - 1$ dư 5. Tìm các hệ số a, b, c .

Lời giải.

Vì $P(x)$ chia cho $x + 1$ dư 3 nên $P(x) - 3$ chia hết cho $x + 1$.

$$\Rightarrow P(x) - 3 = f(x) \cdot (x + 1)$$

Thay $x = -1$ vào đẳng thức trên ta có:

$$P(-1) - 3 = f(-1) \cdot (-1 + 1) = 0.$$

$$\Rightarrow P(-1) = 3 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } P(x) \text{ chia cho } x \text{ dư 1 nên } P(0) = 1 \quad (2)$$

$$P(x) \text{ chia cho } x - 1 \text{ dư 5 nên } P(1) = 5 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 3 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 3 \\ c = 1 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(x) = 3x^2 + x + 1$. Thử lại ta thấy $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

$$\text{Vậy } P(x) = 3x^2 + x + 1.$$

Bài 2. Cho đa thức $f(x) = x^2 - (a+3)x + a$. Xác định a để $f(x)$ chia hết cho $(x - 2)$.

Lời giải.

Vì $f(x):(x-2)$ nên $x=2$ là nghiệm của đa thức $f(x)$ hay $f(2)=0$

Do đó: $2^2-(a+3).2+a=0 \Leftrightarrow a=-2$

Bài 3. Cho đa thức $f(x)=x^2-2(a+1)x+b-1$. Xác định a, b để $f(x)$ chia hết cho $(x-1)$ và đa thức $(x+2)$.

Lời giải.

Ta có: $f(x):(x-1); f(x):(x+2)$ nên $x=1$ và $x=-2$ là nghiệm của đa thức $f(x)$

hay $f(1)=0$ và $f(-2)=0$. Do đó:

$$\begin{cases} 1^2-2(a+1).1+b-1=0 \\ (-2)^2-2(a+1).(-2)+b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=-2 \\ 4a+b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}; b=-1$$

Bài 4. Cho đa thức bậc 3 dạng: $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ chia hết cho $(x-2)$ và khi chia cho (x^2-1) dư $2x$.

Lời giải.

Ta có $f(x)$ chia hết cho $(x-2)$ nên $x=2$ là nghiệm của đa thức $f(x)$ hay $f(2)=0$.

Do đó: $2^3+a.2^2+b.2+c=0 \Leftrightarrow 4a+2b+c=-8$ (1)

Mặt khác: $f(x)$ chia cho (x^2-1) dư $2x$ nên $g(x)=f(x)-2x$ nhận (x^2-1) là nghiệm hay $x=1$ và $x=-1$ là nghiệm của $g(x)$. Do đó:

$$\begin{cases} g(1)=0 \\ g(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+b+c-2=0 & (2) \\ -1+a-b+c+2=0 & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (2), (3) ta có: $a=-\frac{10}{3}; b=1; c=\frac{10}{3}$.

Vậy đa thức cần tìm là: $f(x)=x^3-\frac{10}{3}x^2+x+\frac{10}{3}$

Bài 5. Cho đa thức $f(x)$ có bậc 2002 thỏa mãn điều kiện: $f(n)=\frac{1}{n}$ với $x=1; 2; 3; \dots; 2001$. Tính giá trị của $f(2002)$

Lời giải.

Ta có: $f(n)=\frac{1}{n}$ nên $f(n)-\frac{1}{n}=0$ với $x=1; 2; 3; \dots; 2001$. Suy ra: $x=1; 2; 3; \dots; 2001$

là nghiệm của phương trình: $f(x)-\frac{1}{x}=0$ hay $\frac{x.f(x)-1}{x}=0$

Xét phương trình: $G(x)=x.f(x)-1$ có nghiệm là $x=1; 2; 3; \dots; 2001$ và $G(0)=-1$.

Do đó $G(x)$ có dạng: $G(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2001)$

Suy ra: $G(0) = a.(-1)(-2)(-3)\dots(-2001) = -1$ Vì thế: $a = \frac{1}{1.2.3\dots 2001}$.

Do đó:

$$G(x) = \frac{1}{1.2.3\dots 2001}(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2001)$$

$$\Leftrightarrow xf(x) - 1 = \frac{1}{1.2.3\dots 2001}(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2001)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2001) + 1.2.3\dots 2001}{1.2.3\dots 2001.x}$$

$$\Leftrightarrow f(2002) = \frac{(2002-1)(2002-2)\dots(2002-2001) + 1.2.3\dots 2001}{1.2.3\dots 2001.2002} = \frac{2.1.2.3\dots 2001}{1.2.3\dots 2001.2002} = \frac{1}{2002}.$$

Bài 6. Cho đa thức: $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $P(1) = 3, P(3) = 11, P(5) = 27$.

Tính giá trị của: $S = P(-2) + 7.P(6)$.

Lời giải.

Xét đa thức: $f(x) = ax^2 + bx^2 + c$ thỏa mãn: $f(1) = 3, f(3) = 11, f(5) = 27$.

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} a.1^2 + b.1^2 + c = 3 \\ a.3^2 + b.3 + c = 11 \\ a.5^2 + b.5 + c = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \text{ Nên } f(x) = x^2 + 2$$

Suy ra đa thức $Q(x) = P(x) - f(x)$ là đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất là 1 và nhận 1, 3, 5 là nghiệm,

Do đó: $Q(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-m)$. Từ đó ta tính được:

$$\begin{cases} P(-2) = Q(-2) + f(-2) = 216 + 105m \\ 7.P(6) = 7.Q(6) + f(6) = 896 - 105m \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } S = P(-2) + 7.P(6) = 216 + 105m + 896 - 105m = 1112.$$

Bài 7. Thì các đa thức $g(x)$ và $h(x)$ với hệ số nguyên sao cho: $\frac{h(\sqrt{2} + \sqrt{7})}{g(\sqrt{2} + \sqrt{7})} = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $u = \sqrt{2} + \sqrt{7}$ ta cần xác định các đa thức $h(x)$ và $g(x)$ sao cho $\frac{h(u)}{g(u)} = \sqrt{2}$ hay

$$h(u) - g(u).\sqrt{2} = 0$$

Xét tích: $(u - (\sqrt{2} + \sqrt{7}))(u - (\sqrt{2} - \sqrt{7})) = u^2 - 2\sqrt{7}u + 5$.

Do u là nghiệm của phương trình $u^2 - 2\sqrt{7}u + 5 = 0$ nên $\frac{u^2 + 5}{2u} = \sqrt{7}$

$$\text{Mặt khác: } \sqrt{2} = u - \sqrt{7} = u - \frac{u^2 + 5}{2u} = \frac{u^2 - 5}{2u}$$

$$\text{Vậy } h(x) = u^2 - 5; g(x) = 2x$$

Thử lại thấy $h(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 8. Cho $f(x) = \frac{x^3}{1 - 3x + 3x^2}$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2}{2012}\right) + \dots + f\left(\frac{2010}{2012}\right) + f\left(\frac{2011}{2012}\right)$$

Lời giải.

Nhận xét. Nếu $x + y = 1$ thì $f(x) + f(y) = 1$.

$$\text{Thật vậy, ta có } f(x) = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3} \Rightarrow f(y) = f(1-x) = \frac{(1-x)^3}{x^3 + (1-x)^3}$$

$$\text{suy ra } f(x) + f(y) = f(x) + f(1-x) = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3} + \frac{(1-x)^3}{x^3 + (1-x)^3} = 1.$$

Vậy, nhận xét được chứng minh. Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Theo nhận xét trên ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2011}{2012}\right) \right) + \left(f\left(\frac{2}{2012}\right) + f\left(\frac{2010}{2012}\right) \right) + \dots + \\ &\left(f\left(\frac{1005}{2012}\right) + f\left(\frac{1007}{2012}\right) \right) + f\left(\frac{1006}{2012}\right) = 1005 + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1005,5 \end{aligned}$$

Bài 9. Tìm đa thức $P(x)$ bậc 4 thỏa mãn các điều kiện sau:

$$P(-1) = 0 \text{ và } P(x) - P(x-1) = x(x+1)(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải.

$$\text{Với } x = 0 \text{ thì } P(0) = P(-1) = 0$$

$$\text{Với } x = -1 \text{ thì } P(-1) = P(-2) = 0$$

Do đó $P(x)$ nhận $-1, 0, -2$ là nghiệm.

$$\text{Đặt } P(x) = x(x+1)(x+2)(ax+b) \text{ với } a \neq 0.$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ thì } P(1) = P(0) + 6 = 6. \text{ Suy ra: } a + b = 6 \text{ (1)}$$

Với $x = 2$ thì $P(2) = P(1) + 30 = 36$. Suy ra: $2a + b = \frac{3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a = b = \frac{1}{2}$

Vậy $P = \frac{1}{2}x(x+1)^2(x+2)$

Bài 10. Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(1) = 1; P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}P(x), \forall x \neq 0; P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Tính $P\left(\frac{5}{7}\right)$

Lời giải.

Ta có: $P(2) = P(1 + 1) = P(1) + P(1) = 1 + 1 = 2$.

Tương tự: $P(3) = 3; P(5) = 5; P(7) = 7$.

Từ đó: $P\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7^2}P(7) = \frac{1}{7}; P\left(\frac{2}{7}\right) = P\left(\frac{1}{7}\right) + P\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{7}$

Tương tự: $P\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{3}{7}; P\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$

Bài 11. Cho đa thức $P(x) = x^3 - x$ và $Q(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x + 1$.

a) Tìm số dư trong phép chia $Q(x)$ cho $P(x)$

b) Tìm x để $Q(x) : P(x)$

Lời giải.

a) Ta có: $P(x) = x(x^2 - 1); Q(x) = x(x^{80} - 1) + x(x^{48} - 1) + x(x^{24} - 1) + x(x^8 - 1) + 5x + 1$

Vì các đa thức $x^{80} - 1; x^{48} - 1; x^{24} - 1; x^8 - 1$ đều chia hết cho $x^2 - 1$ nên phép chia $Q(x)$ cho $P(x)$ dư $5x + 1$.

b) Để $Q(x) : P(x)$ thì $5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

Bài 12. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện với số nguyên x bất kì thì $P(x)$ là số chính phương. Chứng minh rằng a, b, c là số nguyên và b là số chẵn.

Lời giải.

Do $P(0) = c$ là số chính phương nên $c = m^2$ với m là số nguyên (hiển nhiên c là số nguyên).

Vì $P(1) = a + b + c$; $P(-1) = a - b + c$ là các số nguyên nên $(a + b)$ và $(a - b)$ là các số nguyên hay $2a$ và $2b$ là các số nguyên.

Đặt $2a = n$; $2b = p$; $P(4) = k^2$; $n, p, k \in \mathbb{Z}$. Suy ra: $k^2 - m^2 = 16a + 4b$

hay $(k - m)(k + m) = 2(4n + p)$.

Nếu k, m khác tính chẵn lẻ thì $(k - m)(k + m)$ là số lẻ vô lý.

Do đó: $(k + m)(k - m) : 4$. Do đó $(4n + p) : 2$ hay $p : 2$

Mà $(a + b) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$.

Đặt $P(2) = t^2$ ($t \in \mathbb{Z}$). Ta có: $t^2 - m^2 = 2(2a + b)$.

Lập luận tương tự suy ra b là số chẵn.

CHƯƠNG I. CÁC BÀI TOÁN VỀ CĂN THỨC

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

Lời giải.

Ta có: $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 1 + 3 - \sqrt{5} = 2$

Bài 2. Rút gọn $A = \sqrt{127 - 48\sqrt{7}} - \sqrt{127 + 48\sqrt{7}}$.

Lời giải.

Ta có: $A = \sqrt{127 - 48\sqrt{7}} - \sqrt{127 + 48\sqrt{7}} = \sqrt{(8 - 3\sqrt{7})^2} - \sqrt{(8 + 3\sqrt{7})^2}$
 $= |8 - 3\sqrt{7}| - |8 + 3\sqrt{7}| = 8 - 3\sqrt{7} - 8 - 3\sqrt{7} = -6\sqrt{7} \quad (8 > 3\sqrt{7})$

Bài 3. Cho $a = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng a là một số nguyên.

Lời giải.

$a = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = 6$

Từ đó a là số nguyên.

Bài 4. Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$

Lời giải.

Ta có: $\sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3}-1} =$

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{6}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{2}$$

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức $N = \frac{\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} N &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{8+2\sqrt{13}}} + \sqrt{25-10\sqrt{2}+2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(4+\sqrt{3})+2\sqrt{4+\sqrt{3}}\sqrt{4-\sqrt{3}}+(4+\sqrt{3})}} + \sqrt{(5-\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})^2}} + \sqrt{(5-\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}}} + |5-\sqrt{2}| = \sqrt{2} + 5 - \sqrt{2} = 5 \end{aligned}$$

Bài 6. Không sử dụng máy tính, hãy thực hiện phép tính:

$$A = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{10}}{\sqrt{23-3\sqrt{5}}}$$

Lời giải.

1/ Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{10}}{\sqrt{23-3\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{10})}{\sqrt{2}(\sqrt{23-3\sqrt{5}})} \\ &= \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{46-6\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{(3\sqrt{5}-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1 + \sqrt{5}-\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-1} = \frac{3\sqrt{5}-1}{3\sqrt{5}-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Bài 7. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{B}{\sqrt{2}} &= \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \\ \frac{B}{\sqrt{2}} &= \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) + (3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{B}{\sqrt{2}} &= 1 \Rightarrow B = \sqrt{2}\end{aligned}$$

Bài 8. So sánh $\sqrt{2017^2-1}-\sqrt{2016^2-1}$ và $\frac{2.2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}$

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \sqrt{2017^2-1}-\sqrt{2016^2-1} &= \frac{(\sqrt{2017^2-1}-\sqrt{2016^2-1})(\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1})}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}} \\ &= \frac{(2017^2-1)-(2016^2-1)}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}} = \frac{2017^2-2016^2}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}} = \frac{(2017-2016)(2017+2016)}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}} \\ &= \frac{2017+2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}} > \frac{2.2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}} \\ \text{Vậy } \sqrt{2017^2-1}-\sqrt{2016^2-1} &> \frac{2.2016}{\sqrt{2017^2-1}+\sqrt{2016^2-1}}\end{aligned}$$

Bài 9. Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

Lời giải.

$$\text{Rút gọn biểu thức } A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$$

ĐKXD: $x \neq 4; x \neq 9$

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} &= \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}\end{aligned}$$

Bài 7. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2}{\sqrt[4]{7}} - \sqrt[4]{7} - \frac{\sqrt{7} - \frac{1}{\sqrt{7}}}{\sqrt[4]{7} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{7}}}} + \frac{6}{\sqrt{7} \left(\sqrt[4]{7} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{7}}} \right)} + \frac{7}{\sqrt[4]{343}}.$

Lời giải.

Đặt $a = \sqrt[4]{7} \Rightarrow a^4 = 7$ và $a^2 = \sqrt{7}$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{a} - a - \frac{a^2 - \frac{1}{a^2}}{a - \frac{1}{a}} + \frac{6}{a^2 \left(a + \frac{1}{a} \right)} + \frac{7}{a^3} = \frac{1 - 2a^2}{a} + \frac{13a^2 + 7}{a^3(a^2 + 1)} \\ &= \frac{a^4 + a^2 - 2a^6 - 2a^4 + 13a^2 + a^4}{a^3(a^2 + 1)} = \frac{2a^2(7 - a^4)}{a^3(a^2 + 1)} = 0 \end{aligned}$$

Do $a^4 = 7$

Bài 6. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{25} - \sqrt[4]{125}}}.$

Lời giải.

Đặt $b = \sqrt[4]{5} \Rightarrow b^2 = \sqrt{5}, b^3 = \sqrt[4]{125}, b^4 = 5, b^6 = 5b^2, b^5 = 5b.$

Ta có: $B = \frac{2}{\sqrt{4 - 3b + 2b^2 - 3b^3}}$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^3 - 2b^2 + 3b - 4} &= \frac{1}{(b^3 + 3b) - (2b^2 + 4)} = \frac{(b^3 + 3b) + (2b^2 + 4)}{(b^3 + 3b)^2 - (2b^2 + 4)^2} \\ &= \frac{b^3 + 3b + 2b^2 + 4}{-2b^2 - 6} = -\frac{(b^3 + 2b^2 + 3b + 4)(b^2 - 3)}{2(b^4 - 9)} = \frac{b^5 + 2b^4 - 2b^2 - 9b - 12}{8} \\ &= \frac{-b^2 - 2b - 1}{4} = -\left(\frac{b+1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Vậy $B = 2\sqrt{\left(\frac{2}{b+1}\right)^2} = \frac{4}{b+1} = \frac{4}{\sqrt[4]{5}+1}.$

Bài 7. Rút gọn biểu thức: $A = \left(\sqrt{x - \sqrt{50}} - \sqrt{x + \sqrt{50}} \right) \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 50}}$ với $x \geq \sqrt{50}$

Lời giải.

a) Ta có :

$$A^2 = \left(\sqrt{x - \sqrt{50}} - \sqrt{x + \sqrt{50}} \right)^2 \left(x + \sqrt{x^2 - 50} \right) \Rightarrow A^2 = \left(x - \sqrt{50} + x + \sqrt{50} - 2\sqrt{x^2 - 50} \right) \left(x + \sqrt{x^2 - 50} \right) \\ \Rightarrow A^2 = \left(2x - 2\sqrt{x^2 - 50} \right) \left(x + \sqrt{x^2 - 50} \right) \Rightarrow A^2 = 2 \left(x^2 - x^2 + 50 \right)$$

Vậy: $A^2 = 100$

Nhưng do theo giả thiết ta thấy $A = \left(\sqrt{x - \sqrt{50}} - \sqrt{x + \sqrt{50}} \right) \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 50}} < 0$

$\Rightarrow A = -10$

Bài 8. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \cdot \left(\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \right)}{2 - \sqrt{1 - x^2}}$ với $-1 \leq x \leq 1$.

Lời giải.

a) Ta có: $A = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) (2 - \sqrt{1 - x^2})}{2 - \sqrt{1 - x^2}}$

$$= \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$$

$$= \sqrt{(1 - \sqrt{1 - x^2}) (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2} = \sqrt{(1 - \sqrt{1 - x^2}) (2 + 2\sqrt{1 - x^2})}$$

$$= \sqrt{2x^2} = |x| \sqrt{2}$$

Bài 9. Cho biểu thức $M = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

Rút gọn M và tính giá trị biểu thức M biết $(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1$

Lời giải.

Rút gọn $M = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

$(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 + 2\sqrt{ab} = 1$

$\Leftrightarrow ab = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right| = 1$

+ Nếu $a > b > 0$

$\Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} > 0$

$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right| = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = 1$

+ nếu $0 < a < b$

$$\Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} < 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right| = \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = -1$$

Bài 10. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x:

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3}{2(x-4\sqrt{x}+3)(2-\sqrt{x})} - \frac{3}{-2x+10\sqrt{x}-12} - \frac{1}{3\sqrt{x}-x-2}$$

Điều kiện $x \geq 0$, $x \neq 4$; $x \neq 9$; $x \neq 1$

Lời giải.

Ta có:

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3}{2(x-4\sqrt{x}+3)(2-\sqrt{x})} - \frac{3}{-2x+10\sqrt{x}-12} - \frac{1}{3\sqrt{x}-x-2}$$

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3}{2(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{3}{2(\sqrt{x}-3)(2-\sqrt{x})} - \frac{1}{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}$$

Do $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$; $x \neq 9$

$$A = \frac{6x - (x+6)\sqrt{x} - 3 - 3(\sqrt{x}-1) - 2(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)(2-\sqrt{x})}$$

$$A = \frac{6x - x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} - 3 - 3\sqrt{x} + 3 - 2\sqrt{x} + 6}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)(2-\sqrt{x})}$$

$$A = \frac{(2x-6\sqrt{x}) - 2(\sqrt{x}-3) - x(\sqrt{x}-3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)(2-\sqrt{x})}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)(2-\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)(2-\sqrt{x})} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Bài 11. Cho a, b là số hữu tỉ thỏa mãn $(a^2 + b^2 - 2)(a+b)^2 + (1-ab)^2 = -4ab$

Chứng minh $\sqrt{1+ab}$ là số hữu tỉ

Lời giải

Ta có:

$$(GT) \Rightarrow \left[(a+b)^2 - 2(ab+1) \right] (a+b)^2 + (1+ab)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^4 - 2(a+b)^2(1+ab) + (1+ab)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(a+b)^2 - (1+ab) \right]^2 = 0 \Rightarrow (a+b)^2 - (1+ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 1+ab \Leftrightarrow |a+b| = \sqrt{1+ab} \in \mathbb{Q}; \forall a, b \in \mathbb{Q.KL}$$

Bài 12. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

Lời giải.

a) ĐKXD: $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$.

Mẫu thức chung là $1 - xy$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} : \frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy} \\ &= \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{1 + x + y + xy} \\ &= \frac{2(\sqrt{x} + y\sqrt{x})}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{1 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1} =$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{5 - 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3} + 2}{13}$$

Bài 13. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{3 + \sqrt{x-1}} + \frac{x+8}{10-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)$

1) Rút gọn P

2) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

Lời giải.

ĐK $1 < x \neq 10$

$$1) P = \frac{3\sqrt{x-1}+9}{10-x} : \left[\frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{2\sqrt{x-1}+4}{\sqrt{x-1}-3} \right]$$

$$P = \frac{3(\sqrt{x-1}+3)}{10-x} \cdot \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-3)}{2\sqrt{x-1}+4}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x-1}(x-10)(\sqrt{x-1}-2)}{2(10-x)(x-1-4)} = -\frac{3(x-2)}{2(x-5)}$$

$$2) x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2} - \sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2 \text{ vì } x > 1$$

Vậy $P=0$

Bài 14. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$$

$$= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b) Với $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có:

$$P = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x + \sqrt{x} + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3) = 0$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} + 3 > 0 \text{ nên } \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (t/m)}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{2}{7} \text{ khi } x = 4$$

Bài 15. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x - 1)}{\sqrt{x} - 1}$ ($x > 0, x \neq 1$).

1. Rút gọn P.

2. Tìm giá trị của x để P = 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1/ \text{ Ta có: } P &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - 2\sqrt{x} - 1 + 2(\sqrt{x} + 1) \end{aligned}$$

$$= x - \sqrt{x} + 1$$

$$2/ \text{ Ta có: } P = 3 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t, t \geq 0 \text{ ta được pt } t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (L)} \\ t = 2 \text{ (TM)} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } t = 2 \text{ ta được } \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ thì } P = 3.$$

Bài 16. Cho biểu thức: $P = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})} - \frac{y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{y})}$

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn P = 2.

Lời giải.

1) Điều kiện để P xác định là : $x \geq 0 ; y \geq 0 ; y \neq 1 ; x + y \neq 0$.

$$P = \frac{x(1 + \sqrt{x}) - y(1 - \sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} = \frac{(x - y) + (x\sqrt{x} + y\sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{y}(\sqrt{x} + 1) + y(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\
 &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y - y\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{y})(1 + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(1 - \sqrt{y})}{(1 - \sqrt{y})} \\
 &= \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}
 \end{aligned}$$

2) $P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 2$ với $x \geq 0; y \geq 0; y \neq 1; x + y \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(1 + \sqrt{y}) - (\sqrt{y} + 1) = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{y}) = 1$$

Ta có: $1 + \sqrt{y} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = 0; 1; 2; 3; 4$

Thay vào P ta có các cặp giá trị (4; 0) và (2; 2) thỏa mãn

Bài 17. Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}}$

a. Tìm giá trị của x để biểu thức M có nghĩa và rút gọn biểu thức M

b. Tìm x để $M = 5$

Lời giải.

a/ ĐK $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$\text{Rút gọn } M = \frac{2\sqrt{x}-9-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\text{Biến đổi ta có kết quả: } = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

b/ Ta có: $M = 5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16(TM)$

Bài 18. Cho biểu thức: $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

1) Rút gọn A

2) Chứng tỏ rằng: $A < \frac{1}{3}$

Lời giải.

Ta có:

$$1) A = \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$A = \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

$$2) \text{ Xét } \frac{1}{3} - A = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}$$

Do $x \geq 0, x \neq 1$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 > 0 \text{ và } x+\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - A > 0 \Leftrightarrow A < \frac{1}{3}$$

Bài 19. Cho biểu thức $P = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

a. Tìm ĐKXD và rút gọn P

b. Tìm x để $P < 0$

Lời giải.

a) Tìm được ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{3x+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} \\ & = \frac{3x+3\sqrt{x}-3-x+1-x+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} \\ & = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

b) - Ta có: $P < 0$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \text{ (do } \sqrt{x}+1 > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} < 1$$

$$\Rightarrow x < 1$$

- Kết hợp với ĐKXD ta được: Với $0 \leq x < 1$ thì $P < 0$.

Bài 20. Cho biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh $P \geq 0$.

Lời giải.

a) ĐKXD: $x \geq 0$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}+1-3+2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) $\sqrt{x} \geq 0$

$$x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \geq 0$$

Bài 21. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) So sánh: P^2 và $2P$.

Lời giải.

$$\text{a) Ta có: } P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\
 &= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}
 \end{aligned}$$

c) Vì $x \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < P \leq 2$$

$$\Leftrightarrow P(P-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 - 2P \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 \leq 2P$$

Dấu “=” xảy ra khi $P = 2 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy $P^2 \leq 2P$

Bài 22. Cho biểu thức: $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Chứng minh rằng $M > 4$.

Lời giải.

a/ Ta có:

Do $a > 0, a \neq 1$ nên: $\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ và

$$\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} = \frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + 2$$

Do $a > 0; a \neq 1$ nên: $(\sqrt{a}-1)^2 > 0 \Leftrightarrow a+1 > 2\sqrt{a}$

$$\Rightarrow M > \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 2 = 4$$

Bài 23. Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - 2 \right) : \frac{1}{x - 1}$

- 1) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.
- 2) Rút gọn biểu thức A.
- 3) Tìm giá trị của x để $\frac{2}{A}$ là số tự nhiên.

Lời giải.

1) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ta có: } A &= \left(\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - 2 \right) : \frac{1}{x - 1} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \cdot (x - 1) = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \cdot (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \\ &= (\sqrt{x} + 1)^2 \end{aligned}$$

3) Với điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ta có: $A = (\sqrt{x} + 1)^2$

Vì $A = (\sqrt{x} + 1)^2 \geq 1$ với mọi $x \geq 0$ nên $0 \leq \frac{2}{(\sqrt{x} + 1)^2} \leq 2$

Do đó: $\frac{2}{A} = \frac{2}{(\sqrt{x} + 1)^2} \in \mathbb{N}$ khi $(\sqrt{x} + 1)^2 = 1$ hoặc $(\sqrt{x} + 1)^2 = 2$

Mà $\sqrt{x} + 1 > 0$ nên $\sqrt{x} + 1 = 1$ hoặc $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2}$

Do đó: $x = 0$ hoặc $x = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

Vậy $\frac{2}{A}$ là số tự nhiên khi $x = 0$ hoặc $x = 3 - 2\sqrt{2}$

Bài 24. Cho biểu thức $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải.

Với điều kiện $a > 0; a \neq 1$ thì:

$$M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$$

$$M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}}$$

$$\text{Khi đó } N = \frac{6}{M} = \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} > 0. \text{ Ta thấy với } 0 < a \neq 1 \Rightarrow a - \sqrt{a} + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}+1)^2 > 3\sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} < 2$$

Do $0 < N < 2$

Để N có giá trị nguyên thì $N = 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1} = 1 \Leftrightarrow a - 4\sqrt{a} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-2)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{3} + 2 \\ \sqrt{a} = -\sqrt{3} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 + 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ a = 7 - 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy $a = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

Bài 25. Cho biểu thức: $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải.

Ta có $0 < N = \frac{6}{M} < \frac{3}{2}$ do đó N chỉ có thể nhận được một giá trị nguyên là 1

$$\text{Mà } N = 1 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+1+2\sqrt{a}} = 1 \Leftrightarrow a - 4\sqrt{a} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-2)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = 2 + \sqrt{3} \text{ hay } \sqrt{a} = 2 - \sqrt{3} \text{ (phù hợp)}$$

$$\text{Vậy, } N \text{ nguyên } \Leftrightarrow a = (2 \pm \sqrt{3})^2$$

Bài 26. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left(\frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right)$

1. Rút gọn A
2. Tìm số nguyên x để A nguyên

Lời giải.

1) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 25, x \neq 9$

Rút gọn $A = \frac{5}{\sqrt{x}+3}$

2) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}+3$ là Ư(5) $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+3=1 & (\text{loại}) \\ \sqrt{x}+3=5 \Rightarrow x=4 \end{cases}$

Bài 27. Cho $M = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right)$

- 1) Rút gọn M
- 2) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

Lời giải.

a) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ (*)

1) Rút gọn M: Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

Rút gọn ta được: $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$) (*)

2) $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3: \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in U(3)$

$Ư(3) \in \{\pm 1; \pm 3\}$ Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$

Nên $\sqrt{x}+1 \in \{1; 3\}$

Xảy ra các trường hợp sau:

. $\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (TMĐK (*))

. $\sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$

(không TMĐK (*) loại)

Vậy $x=0$ thì M nhận giá trị nguyên.

Bài 28. Cho biểu thức $P = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$

Tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$. Khi đó ta có

$$\text{Rút gọn biểu thức ta được } P = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}$$

Ta có $Px + (P-1)\sqrt{x} + P - 2 = 0$, ta coi đây là phương trình bậc hai của $\sqrt{x}$. Nếu

$P = 0 \Rightarrow -\sqrt{x} - 2 = 0$ vô lí, suy ra $P \neq 0$ nên để tồn tại x thì phương trình trên có

$$\Delta = (P-1)^2 - 4P(P-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3P^2 + 6P + 1 \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 2P + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (P-1)^2 \leq \frac{4}{3}$$

Do P nguyên nên $(P-1)^2$ bằng 0 hoặc 1

+) Nếu $(P-1)^2 = 0 \Leftrightarrow P = 1 \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn.

+) Nếu $(P-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 \\ P = 0 \end{cases} \Rightarrow P = 2 \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ không thỏa mãn

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn.

Bài 29. Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}}$

a. Tìm giá trị của x để biểu thức M có nghĩa và rút gọn biểu thức M

b. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $M \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

a/ ĐK $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$\text{Rút gọn } M = \frac{2\sqrt{x}-9-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$\text{Biến đổi ta có kết quả: } = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$\text{b/ Ta có: } M = 5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16(TM)$$

Bài 30. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left(\frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right)$

1. Rút gọn A

2. Với $x \geq 0, x \neq 25, x \neq 9$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{A(x+16)}{5}$

Lời giải.

1) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 25, x \neq 9$

$$\text{Rút gọn } A = \frac{5}{\sqrt{x}+3}$$

2) Ta có :

$$B = \frac{A(x+16)}{5} = \frac{5(x+16)}{5(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6$$

$$\Rightarrow B \geq 4 \Rightarrow \min B = 4 \Leftrightarrow x=4$$

Bài 30. Cho biểu thức $A = \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \right)$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa

b) Rút gọn biểu thức A

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Lời giải.

a) Điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa : $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^3+1 \neq 0 \\ \sqrt{x+2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$

b) Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \right) = \frac{x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1-(x+2)} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{1}{x+1} = \frac{x(x-2)-(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{-(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{-1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

$$\text{Ta có } A = \frac{-1}{x^2-x+1} = \frac{-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Ta có A nhỏ nhất khi $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Vậy: Giá trị nhỏ nhất của là A là $\frac{-4}{3}$ khi $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bài 31. Các số thực x, y thỏa mãn đẳng thức :

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1.$$

Chứng minh $x+y=0$

Lời giải.

Ta có :

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2})(x - \sqrt{1+x^2}) = (x - \sqrt{1+x^2})$$

$$\Leftrightarrow -(y + \sqrt{1+y^2}) = (x - \sqrt{1+x^2})(1)$$

$$\text{Tương tự } -(x + \sqrt{1+x^2}) = (y - \sqrt{1+y^2})(2)$$

Cộng (1) và (2) Ta có

$$-y - \sqrt{1+y^2} - x - \sqrt{1+x^2} = x - \sqrt{1+x^2} + y - \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow -y - x = x + y \\ \Leftrightarrow x + y = 0$$

Bài 32. Cho x, y, z đều khác 0 thỏa mã điều kiện: $a + b + c = 0$.

$$\text{Chứng minh: } \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} = \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right|$$

Lời giải.

Ta có:

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)} \\ = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\frac{0}{xyz}} = \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right|$$

$$\text{Vậy: } \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} = \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right|$$

Bài 33. Cho a, b là số dương và c là số khác 0 thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

$$\text{Chứng minh: } \sqrt{x+y} = \sqrt{x+z} + \sqrt{y+z} (*)$$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } 0 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} \Rightarrow xy + yz + zx = 0. \text{ Do đó: } ab + bc + ca = 0$$

$$(*) \Leftrightarrow x + y = (x + z) + (y + z) + 2\sqrt{(x + z)(y + z)}.$$

$$\Leftrightarrow 2z + 2\sqrt{xy + xz + yz + z^2} = 0 \Leftrightarrow (-c) = \sqrt{xy + xz + yz + z^2}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = xy + xz + yz + z^2$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx = 0 \text{ (đúng)} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 34. Chứng minh đẳng thức: $Q = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = 1 + \sqrt{2}.$

Lời giải.

Ta có:

$$Q = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 4} + 2\sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Bài 35. Chứng minh đẳng thức sau :

$$A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n} - 1..$$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

$$\text{Do đó: } A = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sqrt{n} - 1$$

Bài 36. Chứng minh đẳng thức:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}} = \frac{9}{10}.$$

Lời giải.

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} &= \frac{1}{\sqrt{k \cdot (k+1)} \cdot (\sqrt{k} + \sqrt{k+1})} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k \cdot (k+1)} (\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k \cdot (k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

Bài 45. Tính giá trị của biểu thức P

$$P = 3x^{2013} + 5x^{2011} + 2006 \text{ với } x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}}} - \sqrt{3}$$

Lời giải.

Ta có: $x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}} - \sqrt{3}}$

Có $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2} = |4 - \sqrt{2}| = 4 - \sqrt{2}$

$\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4 - \sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{3} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = |\sqrt{3} + 1|$

$x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3} + 1}} - \sqrt{3} = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}} - \sqrt{3} = \sqrt{6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$

$x = \sqrt{6 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}} - \sqrt{3} = \sqrt{6 + 2\sqrt{3} - 2} - \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

$x = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{3} = |\sqrt{3} + 1| - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1$

Với $x = 1$. Ta có $P = 3 \cdot 1^{2013} + 5 \cdot 1^{2011} + 2006 = 3 + 5 + 2006 = 2014$

Vậy với $x = 1$ thì $P = 2014$

Bài 46. Tính giá trị của đa thức $f(x) = (x^4 - 3x + 1)^{2016}$ tại $x = 9 - \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} - \sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} + \sqrt{5}}}$

Lời giải.

Ta có: $x = 9 - \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5} - 2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5} + 2}\right)^2}$

$= 9 - \frac{2}{\sqrt{5} - 2} + \frac{2}{\sqrt{5} + 2} = 9 - \frac{2\sqrt{5} + 4 - 2\sqrt{5} + 4}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 9 - 8 = 1$

$f(x) = f(1) = 1$

Bài 47. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 100$. Tính giá trị của biểu thức:

$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 10} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{10\sqrt{z}}{\sqrt{xz} + 10\sqrt{z} + 10}$

Lời giải.

Vì x, y, z là các số dương nên từ $xyz = 100 \Rightarrow \sqrt{xyz} = 10$

Thay vào biểu thức đã cho ta được:

$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{xyz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{\sqrt{xyz} \cdot \sqrt{z}}{\sqrt{xz} + \sqrt{xyz} \cdot \sqrt{z} + \sqrt{xyz}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1+\sqrt{yz})} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{\sqrt{xz}.\sqrt{yz}}{\sqrt{xz}(1+\sqrt{yz}+\sqrt{y})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{y}+1+\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{\sqrt{yz}}{1+\sqrt{yz}+\sqrt{y}} \\
 &= \frac{1+\sqrt{y}+\sqrt{yz}}{1+\sqrt{y}+\sqrt{yz}} = 1
 \end{aligned}$$

Bài 48. Cho a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7$; $a+b+c=23$; $\sqrt{abc}=3$

Tính giá trị biểu thức $H = \frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6} + \frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6} + \frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{b}-6}$

Lời giải.

Ta có $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 = a+b+c+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

mà $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7$; $a+b+c=23$ nên $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=13$

Ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7 \Rightarrow \sqrt{c}-6 = -\sqrt{a}-\sqrt{b}+1$

nên $\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6 = \sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1 = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)$

Tương tự $\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6 = (\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1)$; $\sqrt{ac}+\sqrt{b}-6 = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{c}-1)$

Vậy $H = \frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6} + \frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6} + \frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{b}-6}$

$$= \frac{1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)} + \frac{1}{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1)} + \frac{1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{c}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{c}-1+\sqrt{a}-1+\sqrt{b}-1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})-3}{\sqrt{abc}+(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})-(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})-1} = \frac{7-3}{3+7-13-1} = -1$$

Bài 49. Với $x = \frac{(\sqrt{5}+2)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$. Tính giá trị của biểu thức: $B = (3x^3+8x^2-2)^{2015}$

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3}(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}} = \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}} = \frac{1}{3}$.

Từ tính được $B = -1$.

Bài 50. Cho x, y, z thoả mãn: $xy + yz + xz = 1$.

Tính giá trị biểu thức: $A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$

Lời giải.

Cho x, y, z thoả mãn: $xy + yz + xz = 1$.

Hãy tính: $A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$

Gợi ý: $xy + yz + xz = 1 \Leftrightarrow 1 + x^2 = xy + yz + xz + x^2 = y(x+z) + x(x+z) = (x+z)(x+y)$

Bài 51. Cho hàm số : $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2012}$. Tính $f(a)$ tại $a =$

$$\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

Lời giải.

Từ $a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow a^3 = 32 + 3\sqrt{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})} \left[\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} \right] = 32 - 12a \text{ nên } a^3 + 12a = 32.$$

Vậy $f(a) = 1$

Bài 52. Cho $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65}-1}$. Tính $Q = x^3 + 12x + 2009$.

Lời giải.

$Q = x^3 + 12x + 2009$, với $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65}-1}$:

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } x^3 &= \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65}-1} \right)^3 \\ &= (1+\sqrt{65}) - (\sqrt{65}-1) - 3\sqrt{(1+\sqrt{65})(\sqrt{65}-1)} \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65}-1} \right) \\ &= 2 - 12 \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{65}} - \sqrt[3]{\sqrt{65}-1} \right) = 2 - 12x. \end{aligned}$$

Do đó: $Q = 2 - 12x + 12x + 2009 = 2011$.

Bài 53. Cho x, y thoả mãn $0 < x < 1, 0 < y < 1$ và

$$\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$$

Tính giá trị của biểu thức $P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}$

Lời giải.

Ta có .

$$\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow 2(x+y) = 1+3xy$$

$$\Leftrightarrow x+y = \frac{1+3xy}{2}$$

Thay $x+y = \frac{1+3xy}{2}$ Ta có

$$P = x+y + \sqrt{x^2 - xy + y^2} = x+y + \sqrt{(x+y)^2 - 3xy}$$

$$= \frac{1+3xy}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+3xy}{2}\right)^2 - 3xy} = \frac{1+3xy}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-3xy}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1+3xy}{2} + \left| \frac{1-3xy}{2} \right|$$

Nếu $xy > 1/3$ Thì $P = 2$

Nếu $xy < 1/3$ thì $P = 3xy$

Bài 54. Cho $x = \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{12+\sqrt{135}}{3}} + \sqrt[3]{\frac{12-\sqrt{135}}{3}} \right)$.

Tính $M = (9x^3 - 9x^2 - 3)^2$

Lời giải.

$$\text{Từ } x = \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{12+\sqrt{135}}{3}} + \sqrt[3]{\frac{12-\sqrt{135}}{3}} \right)$$

$$\Rightarrow (3x-1) = \left(\sqrt[3]{\frac{12+\sqrt{135}}{3}} + \sqrt[3]{\frac{12-\sqrt{135}}{3}} \right)$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^3 = \left(\sqrt[3]{\frac{12+\sqrt{135}}{3}} + \sqrt[3]{\frac{12-\sqrt{135}}{3}} \right)^3$$

$$\Rightarrow (3x-1)^3 = 8 + 3(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow 9x^3 - 9x^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow M = (-1)^2 = 1$$

Bài 55. Cho các số thực dương a, b ; $a \neq b$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} + \frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a} = 0$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a} \\
 &= \frac{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\
 &= \frac{a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\
 &= \frac{3a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} - 3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} \\
 &= 0(DPCM)
 \end{aligned}$$

Bài 56. Tìm x, y nguyên sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18}$

Lời giải.

Ta có : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18} (x \geq 0; y \geq 0)$

Pt viết: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{2} (1) (0 \leq \sqrt{x} \leq 3\sqrt{2}; 0 \leq \sqrt{y} \leq 3\sqrt{2})$

Pt viết:

$$\sqrt{x} = 3\sqrt{2} - \sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (3\sqrt{2} - \sqrt{y})^2 \Leftrightarrow 6\sqrt{2y} = y - x + 18$$

$$\Rightarrow \sqrt{2y} = \frac{y - x + 18}{6} \in Q$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y} = a \in Q \Leftrightarrow 2y = a^2 \in Q \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \in N (\forall i \ 2y \in Z \text{ và } a \geq 0) \\ a : 2 \end{cases}$$

$$a = 2m (m \in N)$$

$$\Rightarrow 2y = (2m)^2 \Leftrightarrow y = 2m^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = m\sqrt{2} \text{ TT} \Rightarrow \sqrt{x} = n\sqrt{2}$$

Pt (1) viết: $n\sqrt{2} + m\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m + n = 3 (m; n \in N)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} n=0 \\ m=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases} \\ \begin{cases} n=1 \\ m=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} n=2 \\ m=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} n=3 \\ m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=18 \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy Pt đã cho có 4 nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}; \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=18 \\ y=0 \end{cases}$

Bài 57. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a + b = 3, ab = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a^2 - b^2)}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a^2 - b^2)}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a - b)(a + b)}{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - \sqrt{ab})} = \frac{(a + b - 2\sqrt{ab})(a + b)}{a + b - \sqrt{ab}} \end{aligned}$$

Thay $a + b = 3, ab = 1$ ta được:

$$P = \frac{(3 - 2 \cdot 1) \cdot 3}{3 - 1} = \frac{3}{2}$$

Bài 58. 1) Cho $a - b = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = a^2(a + 1) - b^2(b - 1) - 11ab + 2015$$

2) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy + \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} = 1$.

Chứng minh rằng $x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} = 0$.

Lời giải.

$$1) a - b = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \sqrt{(3 + 2\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5} = 3$$

$$\begin{aligned} A &= a^3 - b^3 + a^2 + b^2 - 11ab + 2015 \\ &= (a - b)(a^2 + b^2 + ab) + a^2 + b^2 - 11ab + 2015 \\ &= 3(a^2 + b^2 + ab) + a^2 + b^2 - 11ab + 2015 \\ &= 4(a^2 - 2ab + b^2) + 2015 = 4(a - b)^2 + 2015 = 2051 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad xy + \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} &= 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} = 1 - xy \\ \Rightarrow (1 + x^2)(1 + y^2) &= (1 - xy)^2 \\ \Leftrightarrow 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 &= 1 - 2xy + x^2y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy &= 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -x \\ \Rightarrow x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} &= x\sqrt{1 + x^2} - x\sqrt{1 + x^2} = 0 \end{aligned}$$

Bài 59. Cho biểu thức $P = \frac{(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1)(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^2}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})}$ với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

1. Chứng minh $P = \frac{1}{ab}$

2. Giả sử a, b thay đổi sao cho $4a + b + \sqrt{ab} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải.

Ta có:

$$P = \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)} = \frac{\left(\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} + \frac{ab}{ab}\right)\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2}{\frac{a^4}{a^2b^2} + \frac{b^4}{a^2b^2} - \left(\frac{a^3b}{a^2b^2} + \frac{ab^3}{a^2b^2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2 + b^2 + ab}{ab}\right) \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2b^2}}{\frac{a^4 + b^4 - a^3b - ab^3}{a^2b^2}} = \frac{(a^3 - b^3)(a-b)}{a^3b^3} = \frac{1}{ab}$$

Vậy $P = \frac{1}{ab}$.

2. Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương 4a và b ta có:

$$4a + b \geq 2\sqrt{4a \cdot b} = 4\sqrt{ab} \Rightarrow 1 = 4a + b + \sqrt{ab} \geq 5\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 0 < ab \leq \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{ab} \geq 25$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} b = 4a > 0 \\ 4a + b + \sqrt{ab} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a > 0 \\ 10a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$

Vậy $\min P = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$

Bài 60. Chứng minh rằng:

$$A = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1998^2} + \frac{1}{1999^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1999^2} + \frac{1}{2000^2}}.$$

Là số hữu tỷ.

Lời giải.

Xét $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Ta có:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k-1} - \frac{2}{(k-1)k} - \frac{2}{k} \\ &= 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k-1} + \frac{2}{k} - \frac{2}{k} \\ &\Rightarrow 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} = \left(1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{1^2 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2}} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Cho $k = 3, 4, 5, \dots, 1999, 2000$. Ta có:

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{1998} - \frac{1}{1999}\right) + \left(1 + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000}\right).$$

$$A = 1998 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2000}$$

Do đó A là số hữu tỷ

Chủ đề 3. PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Bài 1. Giải phương trình: $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$

Lời giải.

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0 &\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + 5x - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \cdot (x-2) + x \cdot (x-2) + 5 \cdot (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + x + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Do $x^2 + x + 5 > 0 \quad \forall x$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Bài 2. Giải phương trình: $x^2(2x + 3) = 2(3x - 2) \quad (1)$

Lời giải.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{5} \cdot x)^3 = (x-2)^3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{5} \cdot x = x-2 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{\sqrt[3]{5}-1} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{-2}{\sqrt[3]{5}-1}$

Bài 3. Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

Lời giải.

Ta có: $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 4x^3 - 8x^2 + 4x^2 - 8x + 3x - 6 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^3(x-2) + 4x^3(x-2) + 4x(x-2) + 3(x-2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-2)(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-2)(x^3 + 3x^2 + x^2 + 3x + x + 3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-2)[x^2(x+3) + x(x+3) + (x+3)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-2)(x+3)(x^2 + x + 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(Do $x^2 + x + 1 > 0$)

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$ và $x = -3$.

Bài 4. Giải phương trình: $x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$ (1)

Phân tích ra nháp: Ta nghĩ đến việc phân tích:

$$\begin{aligned}
 x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 &= (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s) \\
 &= x^4 + (p+r)x^3 + (s+pr+q)x^2 + (ps+qr)x + qs = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số: } \begin{cases} p+r = -4 \\ s+pr+q = -10 \\ ps+qr = 37 \\ qs = -14 \end{cases} \text{ . Nhâm nghiệm ta được: } p = -5, q = 2, r = 1, s = -7$$

Từ đó có lời giải: $x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7)$

Suy ra:

$$x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x^2 + x - 7 = 0 \end{cases}$$

Giải hai phương trình bậc 2 này ta được nghiệm: $x_1 = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}; x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$

Bài 5. Giải phương trình: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Lời giải.

Đặt $y = x^2$ ($y \geq 0$) khi đó phương trình trở thành:

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = -1, x = 1, x = 2, x = -2$.

Bài 6. Giải phương trình: $(x-2004)^4 + (x-2006)^4 = 2$

Lời giải.

Đặt $y = x - \frac{2004+2006}{2} = x - 2005$. Khi đó phương trình trở thành:

$$(y+1)^4 + (y-1)^4 = 2 \Leftrightarrow \left[(y+1)^2 + (y-1)^2 \right]^2 - 2(y+1)^2 \cdot (y-1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left[2y^2 + 2 \right]^2 - 2(y^2 - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow 4y^4 + 8y^2 + 4 - 2y^4 + 4y^2 - 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 = 0 \Leftrightarrow 2y^2(y^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2005 = 0 \Leftrightarrow x = 2005$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2005$

Bài 7. Giải phương trình: $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.

Lời giải.

Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình

Chia cả 2 vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

$$\text{Đặt } y = x + \frac{1}{x} \text{ thì: } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$\text{Ta được pt: } 6y^2 - 5y - 50 = 0 \Leftrightarrow (3y - 10)(2y + 5) = 0$$

$$\text{Do đó: } y = \frac{10}{3} \text{ và } y = -\frac{5}{2}$$

$$* \text{ Với } y = \frac{10}{3} \text{ thì: } x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$* \text{ Với } y = -\frac{5}{2} \text{ thì: } x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm: $x = \frac{1}{3}, x = \frac{-1}{2}, x = -2, x = 3$

Bài 8. Giải phương trình: $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$ (1)

Lời giải.

– Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của Phương trình.

- Chia hai vế của Phương trình (1) cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9 \quad (*)$$

Đặt $t = 2x + \frac{1}{x}$. Khi đó phương trình (*) trở thành: $(t - 3)(t + 5) = 9$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow (t + 6)(t - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -6 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -6 \text{ ta có: } 2x + \frac{1}{x} = -6 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Với } t = 4 \text{ ta có: } 2x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: } x = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}, x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Bài 9. Giải phương trình: $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6(x - 1)^2$ (2)

Lời giải.

Đặt $a = x - 1$ thay $x = a + 1$ và rút gọn ta được:

$$(u^2 - 7u - 3)(u^2 - 2u - 3) = 6u^2 \quad (*)$$

Đến đây có thể giải tiếp như bài 8 trên.

$$\text{Giải ra ta được 4 nghiệm là: } x = 3 \pm \sqrt{7}; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Bài 10. Giải phương trình: $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 18) = 168x^2$ (1)

Lời giải.

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 18) &= 168x^2 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2)(x + 6)(x + 3) = 168x^2 \\ \Leftrightarrow [(x + 1)(x + 6)][(x + 2)(x + 3)] &= 168x^2 \Leftrightarrow (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 6) = 168x^2 \end{aligned}$$

– Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình:

$$\text{Chia hai vế của phương trình cho } x^2 \text{ ta được: } \left(x + \frac{6}{x} + 7\right)\left(x + \frac{6}{x} + 5\right) = 168$$

Đặt $y = x + \frac{6}{x}$ phương trình trở thành: $(y+7)(y+5)=168$

$$\Leftrightarrow y^2 + 12y - 133 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ y = -19 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x + \frac{6}{x} = 7 \\ x + \frac{6}{x} = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0 \\ x^2 + 19x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \\ x = \frac{-19 + \sqrt{337}}{2} \\ x = \frac{-19 - \sqrt{337}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = 1, x = 6, x = \frac{-19 + \sqrt{337}}{2}, x = \frac{-19 - \sqrt{337}}{2}$

Bài 11. Giải phương trình: $(x+2)(x-3)(x+4)(x-6) + 6x^2 = 0$

Lời giải.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 12)(x^2 + x - 12) + 6x^2 = 0$$

Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được:

$$\left(x - \frac{12}{x} - 4\right)\left(x - \frac{12}{x} + 1\right) + 6 = 0. \text{ Đặt } t = x - \frac{12}{x}, \text{ ta có:}$$

$$(t-4)(t+1) + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$* t = 1 \Leftrightarrow x - \frac{12}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$* t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{13}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm: $x = -3; x = 4; x = 1 \pm \sqrt{13}$

Bài 12. Giải phương trình:

a) Giải phương trình: $3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x+1)^2 = 5(x^3 + 1)$

b) Giải phương trình: $x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 21x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$

c) Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5) = 360$

d) Giải phương trình: $(x^3 + 5x + 5)^3 + 5x^3 + 24x + 30 = 0.$

Lời giải.

a) Vì $x = -1$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho $x^3 + 1$ ta được:

$$3 \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} - 2 \frac{x + 1}{x^2 - x + 1}. \text{ Đặt } t = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \Rightarrow 3t - \frac{2}{t} = 5 \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2, t = -\frac{1}{3}$$

$$* t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$* t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 4 = 0 \text{ phương trình vô nghiệm}$$

b) Đây là phương trình bậc 6 và ta thấy các hệ số đối xứng do đó ta có thể áp dụng cách giải mà ta đã giải đối với phương trình bậc bốn có hệ số đối xứng.

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia 2 vế của phương trình cho x^3 ta được:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 21 = 0. \text{ Đặt } t = x + \frac{1}{x}, |t| \geq 2. \text{ Ta có:}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2; x^3 + \frac{1}{x^3} = t(t^2 - 3) \text{ nên phương trình trở thành:}$$

$$t(t^2 - 3) + 3(t^2 - 2) - 6t - 21 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - 9t - 27 = 0 \Leftrightarrow (t + 3)^2(t - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \end{cases}$$

$$* t = 3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$* t = -3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ Vậy phương trình có bốn nghiệm}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}; x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{c) Phương trình } \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 360$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 6x, \text{ ta có phương trình: } (y + 5)(y + 8)(y + 9) = 360$$

$$\Leftrightarrow y(y^2 + 22y + 157) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 0; x = -6$.

$$\text{d) Ta có: } x^3 + 5x + 30 = 5(x^3 + 5x + 5) - x + 5 \text{ nên phương trình tương đương}$$

$$(x^3 + 5x + 5)^3 + 5(x^3 + 24x + 30) = 0. \text{ Đặt } u = x^3 + 5x + 5. \text{ Ta được hệ:}$$

$$\begin{cases} u^3 + 5u + 5 = x \\ x^3 + 5x + 5 = u \end{cases} \Rightarrow (u-x)(u^2 + ux + x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow u = x.$$

$\Leftrightarrow x^3 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 13. Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+5x+4} + \frac{1}{x^2+11x+28} + \frac{1}{x^2+17x+70} = \frac{3}{4x-2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+5x+4} + \frac{1}{x^2+11x+28} + \frac{1}{x^2+17x+70} &= \frac{3}{4x-2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+7)} + \frac{1}{(x+7)(x+10)} &= \frac{3}{4x-2} \quad (*) \end{aligned}$$

Từ suy ra điều kiện để phương trình có nghĩa là: $x \neq -1; -4; -7; -10; \frac{1}{2}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+10} \right) = \frac{3}{4x-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10} = \frac{9}{4x-2} \Leftrightarrow x^2 + 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = -3$.

Bài 14. Giải phương trình: $\frac{1}{2008x+1} - \frac{1}{2009x+2} = \frac{1}{2010x+4} - \frac{1}{2011x+5}$

Lời giải.

ĐK: $x \neq -\frac{1}{2008}; -\frac{2}{2009}; -\frac{4}{2010}; -\frac{5}{2011}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2008x+1} + \frac{1}{2011x+5} &= \frac{1}{2010x+4} + \frac{1}{2009x+2} \\ \Leftrightarrow \frac{4019x+6}{(2008x+1)(2011x+5)} &= \frac{4019x+6}{(2009x+2)(2010x+4)} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4019x+6=0 \\ \frac{1}{(2008x+1)(2011x+5)} = \frac{1}{(2009x+2)(2010x+4)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{4019} \\ (2009x+2)(2010x+4) - (2008x+1)(2011x+5) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{4019} \\ 4019x+6=0 \\ 2x^2+5x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{4019} \\ x = -1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x = -\frac{6}{4019}; x = -1; x = -\frac{3}{2}$.

Bài 15. Giải phương trình: $\frac{2x}{3x^2-4x+1} + \frac{13x}{3x^2+2x+1} = 6$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3x^2-4x+1 \neq 0 \\ 3x^2+2x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, do đó chia chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x ta được:

$$\frac{2}{3x-4+\frac{1}{x}} + \frac{13}{3x+2+\frac{1}{x}} = 6.$$

Đặt $3x + \frac{1}{x} - 4 = t$ khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{2}{t} + \frac{13}{t+6} = 6 \Leftrightarrow 2t^2 + 7t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -4. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \text{ thì } 3x + \frac{1}{x} - 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6x^2 - 11x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $t = -4$ thì $3x + \frac{1}{x} - 4 = -4 \Leftrightarrow 6x^2 + 1 = 0$ (loại)

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{4}{3}, x = \frac{1}{2}$

Bài 16. Giải phương trình: $\frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^3 + x^2 - x} = 3$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } x^3 + x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Chia chia tử và mẫu của phân thức cho $x^2 \neq 0$ ta được phương trình tương đương:

$$\frac{x^2 + 3 + \frac{1}{x^2}}{x + 1 - \frac{1}{x}} = 3. \text{ Đặt } t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Rightarrow t^2 + 5 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3$$

Khi đó, phương trình trở thành: $\frac{t^2 + 5}{t + 1} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 2$

Với $t = 1$ thì $x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Với $t = 2$ thì $x - \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Vậy phương trình có bốn nghiệm là: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ và $x = 1 \pm \sqrt{2}$

Bài 17. Giải phương trình: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = 15$.

Lời giải.

ĐK: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = 15 &\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 + x^2}{x^2(x+1)^2} = 15 \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + 2x(x+1)}{x^2(x+1)^2} = 15 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x(x+1)} \right)^2 + \frac{2}{x(x+1)} = 15 \end{aligned}$$

Đặt $\frac{1}{x(x+1)} = t$ khi đó phương trình trở thành:

$$t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -5 \end{cases}$$

Với $t = 3$ ta có: $\frac{1}{x(x+1)} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$.

Với $t = -5$ suy ra: $\frac{1}{x(x+1)} = -5 \Leftrightarrow 5x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm $x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}, x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$

Bài 18. Giải các phương trình:

a) $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$. (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa

2013).

b) $\frac{12x}{x^2 + 4x + 2} - \frac{3x}{x^2 + 2x + 2} = 1$. (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Đại học Vinh 2010).

c) $\frac{x^2}{(x+2)^2} = 3x^2 - 6x - 3$ (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSPT Hà Nội 2008).

d) $x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0$

Lời giải.

a) Điều kiện $x \neq -5$

Ta viết lại phương trình thành $\left(x - \frac{5x}{x+5}\right)^2 + \frac{10x^2}{x+5} - 11 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2 + \frac{10x^2}{x+5} - 11 = 0$. Đặt

$t = \frac{x^2}{x+5}$ thì phương trình có dạng $t^2 + 10t - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -11 \end{cases}$

Nếu $t = 1$ ta có: $\frac{x^2}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. Nếu $t = -11 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+5} = -11$

$\Leftrightarrow x^2 + 11x + 55 = 0$ phương trình vô nghiệm.

b) Để ý rằng nếu x là nghiệm thì $x \neq 0$ nên ta chia cả tử số và mẫu số về trái

cho x thì thu được: $\frac{12}{x+4+\frac{2}{x}} - \frac{3}{x+2+\frac{2}{x}} = 1$. Đặt $t = x + \frac{2}{x} + 2$ thì phương trình trở

thành: $\frac{12}{t+2} - \frac{3}{t} = 1 \Leftrightarrow 12t - 3t - 6 = t^2 + 2t \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 6 \end{cases}$.

Với $t=1$ ta có: $x + \frac{2}{x} + 2 = 1 \Leftrightarrow t^2 + t + 2 = 0$ vô nghiệm. Với $t=6$ ta có:

$$x + \frac{2}{x} + 2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}.$$

$$c) \left(\frac{x}{x+2} - (x+2) \right)^2 - (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+2} + x - 3 \right) \left(\frac{x}{x+2} - 3x - 1 \right) = 0.$$

Giải 2 phương trình ta thu được các nghiệm là $x = \pm\sqrt{6}; x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$.

d) Sử dụng HĐT $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ ta viết lại phương trình thành:

$$x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[x + \frac{x}{x-1} \right]^3 - 3 \frac{x^2}{x-1} \left(x + \frac{x}{x-1} \right) + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \text{ hay}$$

$$\left(\frac{x^2}{x-1} \right)^3 - 3 \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^2 + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1} - 1 \right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0. \text{ Suy}$$

ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 19. Giải phương trình: $\left(\frac{x+1}{x-2} \right)^2 + \frac{x+1}{x-3} = 12 \left(\frac{x-2}{x-3} \right)^2$.

Lời giải.

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{x+1}{x-2} \\ v = \frac{x-2}{x-3} \end{cases} \Rightarrow uv = \frac{x+1}{x-3}. \text{ Khi đó, phương trình đã cho trở thành:}$$

$$u^2 + uv = 12v^2 \Leftrightarrow u^2 + uv - 12v^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u-3v)(u+4v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3v \\ u = -4v \end{cases}$$

Với $u = 3v$ ta có:

$$\frac{x+1}{x-2} = 3 \cdot \frac{x-2}{x-3} \Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{46}}{2}.$$

$$\text{Với } u = -4v \text{ ta có: } \frac{x+1}{x-2} = -4 \cdot \frac{x-2}{x-3} \Leftrightarrow 5x^2 - 12x + 19 = 0 \text{ (VN)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \frac{8 \pm \sqrt{46}}{2}$

Bài 20. Giải phương trình: $\frac{3}{x^2+x+3} - \frac{4}{x^2+3x+9} = \frac{1}{2x^2}$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2+x+3 \neq 0 \\ x^2+3x+9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0. \\ 2x^2 \neq 0 \end{cases}$$

Với điều kiện $x \neq 0$ phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{2x^2} + \frac{4}{x^2+3x+9} = \frac{3}{x^2+x+3}$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ (*)

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức bu-nhi-a-cốp-xki cho hai bộ số $(\sqrt{x}; \sqrt{y})$ và $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}; \frac{b}{\sqrt{y}}\right)$

$$\text{ta có: } \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 \right) \left(\left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{y}} \right)^2 \right) \geq (a+b)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Vậy BĐT (*) được chứng minh.

$$\text{Áp dụng BĐT (*) ta có: } \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{x^2+3x+9} = \frac{1}{2x^2} + \frac{(2)^2}{x^2+3x+9} \geq \frac{(1+2)^2}{2x^2+x^2+3x+9} = \frac{3}{x^2+x+3}$$

Do đó phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{1}{2x^2} = \frac{2}{x^2+3x+9} \Leftrightarrow x^2+3x+9 = 4x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Bài 21. Giải phương trình : $\frac{x+11}{115} + \frac{x+22}{104} = \frac{x+33}{93} + \frac{x+44}{82}$

Lời giải.

$$\frac{x+11}{115} + \frac{x+22}{104} = \frac{x+33}{93} + \frac{x+44}{82}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+11}{115} + 1 \right) + \left(\frac{x+22}{104} + 1 \right) = \left(\frac{x+33}{93} + 1 \right) + \left(\frac{x+44}{82} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+126}{115} + \frac{x+126}{104} = \frac{x+126}{93} + \frac{x+126}{82}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+126}{115} + \frac{x+126}{104} - \frac{x+126}{93} - \frac{x+126}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+126=0$$

$$\Leftrightarrow x=-126$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -126$

Câu 22. Giải phương trình:

$$1. \quad x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0$$

$$2. \quad 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2$$

Lời giải.

1) ta có:

$$x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0 \quad (1)$$

+ Nếu $x \geq 1$: $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$).

+ Nếu $x < 1$: $(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x=1; x=3$ (cả hai đều không bé hơn 1, nên bị loại)

Vậy: Phương trình (1) có một nghiệm duy nhất là $x=1$.

2) ta có:

$$8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ hay } x=-8 \text{ và } x \neq 0.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=-8$

Bài 23. Giải phương trình: $(1005-x)^3 + (1007-x)^3 + (2x-2012)^3 = 0$

Lời giải.

Giải phương trình: $(1005-x)^3 + (1007-x)^3 + (2x-2012)^3 = 0$

Đặt $X = 1005 - x; Y = 1007 - x; Z = 2x - 2012$

Để chứng minh với: $X + Y + Z = 0$ thì: $X^3 + Y^3 + Z^3 = 3XYZ$

Phương trình đã cho trở thành:

$$3(1005 - x)(1007 - x)(2x - 2012) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1005 \\ x = 1006 \\ x = 1007 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = 1005, x = 1006, x = 1007$.

Bài 24. Giải phương trình: $\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+2)^2} = 3$ (*)

Lời giải.

Đk : $x \neq -1; x \neq -\frac{1}{2}$. Đặt $2x+1=t$

$$PT(*) \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)^2 + \frac{2}{t(t+1)} - 3 = 0 \quad (0,25d)$$

Đặt $y = \frac{1}{t(t+1)}$ ta có pt:

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Với $y=1$ suy ra:

$$\frac{1}{t(t+1)} = 1 \Rightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3+\sqrt{5}}{4} \\ t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3-\sqrt{5}}{4} \end{cases} (TM)$$

Với $y = -3$ $\frac{1}{t(t+1)} = -3 \Rightarrow t^2 + t + \frac{1}{3} = 0$ (VN)

Vậy pt có hai nghiệm $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{4}$

Bài 25. Giải phương trình:

a) $|3x-4| + |3y+5| = 0$.

b) $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 3$

c) $|x+1|^{2016} + |x+2|^{2017} = 1$

Lời giải.

a) Vì $|3x-4| \geq 0$ và $|3y+5| \geq 0$ nên

$$|3x-4|+|3y+5|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4=0 \\ 3y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4/3 \\ y=-5/3 \end{cases}$$

Vậy $x = 4/3$ và $y = -5/3$.

b) Ta có bảng xét dấu:

x	-3	-2	-1	
x+1	- ↓	- ↓	- 0	+
x+2	- ↓	- 0	+	↓
x+3	- 0	+	↓	+

Xét $x \leq -3$:

Phương trình trở thành:

$$-(x+1)-(x+2)-(x+3)=3$$

$$\Leftrightarrow -3x-6=3$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Xét $-3 < x \leq -1$:

Phương trình trở thành:

$$-(x+1)-(x+2)+(x+3)=3$$

$$\Leftrightarrow -x=3$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \text{ (Không thỏa mãn điều kiện)}$$

Xét $-2 < x \leq -1$:

Phương trình trở thành:

$$-(x+1)+(x+2)+(x+3)=3$$

$$\Leftrightarrow x+4=3$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Xét: $x > -1$:

Phương trình trở thành:

$$x+1+x+2+x+3=3$$

$$\Leftrightarrow 3x+6=3$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$ và $x = -3$

c) Dễ thấy $x = -2$ và $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

* Xét $x < -2$:

Ta có: $x+1 < -1$ và $x+2 < 0$. Suy ra: $|x+1| > 1$; $|x+2| > 0$

Do đó: $|x+1|^{2016} > 1$; $|x+2|^{2017} > 0$

Vì thế: $|x+1|^{2016} + |x+2|^{2017} > 1$

Vậy với $x < -2$ phương trình vô nghiệm.

* Xét $-2 < x < -1$:

Ta có: $-1 < x + 1 < 0$ và $0 < x + 2 < 1$. Suy ra: $0 < |x + 1| < 1$; $0 < |x + 2| < 1$

Và $|x+1| = -x - 1$; $|x + 2| = x + 2$

Vì thế: $|x + 1|^{2016} < |x+1|$; $|x + 2|^{2017} < |x+2|$

Vậy: $|x + 1|^{2016} + |x + 2|^{2017} < |x+1| + |x + 2| = -x - 1 + x + 2 = 1$

Do đó với $-2 < x < -1$ phương trình vô nghiệm.

* Xét: $x > -1$:

Ta có: $x + 1 > 0$ và $x + 2 > 1$. Suy ra: $|x+1| > 0$ và $|x + 2| > 1$.

Vậy: $|x + 1|^{2016} + |x + 2|^{2017} > 1$

Do đó với $x > -1$ phương trình vô nghiệm.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-2; -1\}$

Bài 25. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 + 1 = y^2 - 4x \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2 = y^2 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 2x+1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2 + x(2x+1) + (2x+1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ 7x^2 + 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{5}{7} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} y = -2x-1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ x^2 - x(2x+1) + (2x+1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ 3x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ là: $(0;1)$, $\left(-\frac{5}{7}; -\frac{3}{7}\right)$, $(0;-1)$, $(-1;1)$

Bài 26. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & (1) \\ 3x^2 - y^2 + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

Từ (1) ta có $x = \frac{5-3y}{2}$ thế vào (2) ta được $3\left(\frac{5-3y}{2}\right)^2 - y^2 + 2y - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 3(25 - 30y + 9y^2) - 4y^2 + 8y - 16 \Leftrightarrow 23y^2 - 82y + 59 = 0 \Leftrightarrow y = 1, y = \frac{59}{23}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\left\{(1;1); \left(-\frac{31}{23}; \frac{59}{23}\right)\right\}$

Bài 27. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 & (1) \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

TH 1 : $x = 0$ không thỏa mãn (2)

TH 2 : $x \neq 0$, (2) $\Leftrightarrow y = \frac{6x+6-x^2}{2x}$ thế vào (1) ta được

$$x^4 + 2x^3\left(\frac{6x+6-x^2}{2x}\right) + x^2\left(\frac{6x+6-x^2}{2x}\right)^2 = 2x + 9$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2(6x+6-x^2) + \frac{(6x+6-x^2)^2}{4} = 2x+9 \Leftrightarrow x(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$$

Do $x \neq 0$ nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(-4; \frac{17}{4}\right)$

Cách khác: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 2x + 9 \\ x^2 + xy = \frac{x^2 + 6x + 6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^2 + 6x + 6}{2}\right)^2 = 2x + 9 \\ x^2 + xy = \frac{x^2 + 6x + 6}{2} \end{cases}$

Tính được x sau đó suy ra y.

Bài 28. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $xy \neq 0$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 & (1) \\ 3y^2x = x^2 + 2 & (2) \end{cases}.$$

Trừ vế hai phương trình ta được

$$3x^2y - 3xy^2 = y^2 - x^2 \Leftrightarrow 3xy(x - y) + (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3xy + x + y = 0 \end{cases}$$

TH 1. $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$ thế vào (1) ta được $3x^3 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

TH 2. $3xy + x + y = 0$. Từ $3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \Rightarrow y > 0$, $3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \Rightarrow x > 0$

$\Rightarrow 3xy + x + y > 0$. Do đó TH 2 không xảy ra.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (1 ; 1)

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = -1 \\ x^2 + y^2 - xy = 7 \end{cases}$

Lời giải.

Đây là hệ đối xứng loại I đơn giản nên ta giải theo cách phổ biến.

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y) + xy = -1 \\ (x + y)^2 - 3xy = 7 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ ($\exists x, y \Leftrightarrow S^2 \geq 4P$) ta được $\begin{cases} S + P = -1 \\ S^2 - 3P = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1, P = -2 \\ S = -4, P = 3 \end{cases}$

$$\text{TH 1.} \begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y = 2 \\ x = 2, y = -1 \end{cases}$$

$$\text{TH 2.} \begin{cases} S = -4 \\ P = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y = -3 \\ x = -3, y = -1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của hệ là: $S = \{(-1; 2); (2; -1); (-1; -3); (-3; -1)\}$

Bài 30. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$$

Lời giải.

Đặt $x + y = a$; $xy = b$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a^3 + b^3 - 3ab = 17 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b \\ b^2 - 5b + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b \\ (b - 2)(b - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{Hoặc} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

+) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ (y - 1)(y - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{Hoặc} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

+) $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ y^2 - 2y + 3 = 0 \end{cases} \quad (\text{Vô nghiệm})$$

Hệ này vô nghiệm

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x; y) = (1; 2); (2; 1)$

Bài 31. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$.

Lời giải.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \quad (1) \\ y^3 + 1 = 2x \quad (2) \end{cases}$

Lấy pt (1) trừ pt (2) ta được: $x^3 - y^3 = 2(y - x)$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 - xy + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(\text{do } x^2 - xy + y^2 + 2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0)$$

Với $x = y$ ta có phương trình: $x^3 - 2x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Vậy hệ có ba nghiệm: $(x; y) = (1; 1), \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 32. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$.

Lời giải.

Từ hệ ta có $x^3(2y+x) = y^3(2x+y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2)(2xy + x^2 + y^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3(x-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$$

* Với $x = y$ ta tìm được $(x; y) = (0; 0); (\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

* Với $x = -y$ ta tìm được $(x; y) = (0; 0); (1; -1); (-1; 1)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$$(x; y) = (0; 0); (\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (-1; 1); (1; -1)$$

Bài 33. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{- Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} 45x^2 + 75xy - 60y^2 = 570 \\ 190x^2 - 342xy - 114y^2 = 570 \end{cases} \Rightarrow -145x^2 + 417xy + 54y^2 = 0 \quad (1)$$

Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Chia hai vế phương trình (1) cho y^2 ta được $-145 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 417 \cdot \left(\frac{x}{y}\right) + 54 = 0$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ ($t > 0$) Khi đó: $-145t^2 + 417t + 54 = 0$

Giải phương trình bậc 2 này ta được $t = 3; t = -\frac{18}{145}$

- Vậy $x = 3y, x = -\frac{18}{145}y$ thế vào một trong hai phương trình của hệ ta thu được kết quả $(3; 1); (-3; -1)$

Bài 34. Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 12 \\ x^2 - xy + 3y^2 = 11 \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} 22x^2 + 33xy + 11y^2 = 121 \\ 12x^2 - 12xy + 36y^2 = 121 \end{cases}$$

Suy ra : $10x^2 + 45xy - 25y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - y)(x + 5y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ x = -5y \end{cases}$$

Với $x = \frac{y}{2}$ ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Với $x = -5y$ ta được $\begin{cases} x = \frac{-5\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Bài 35. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $xy \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x - y - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow x - y + \frac{x - y}{xy} = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 0$$

TH 1. $x = y$ thế vào (2) ta được $x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (t/m)

TH 2. $1 + \frac{1}{xy} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x}$ thế vào (2) ta được

$$x^4 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 0.$$

PT này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = \left\{ (1; 1); \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$

Bài 36. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ 4x^2 + 2xy + 6y - 27 = 0 \end{cases}$

Lời giải.

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x-2y)(x-3y) = 0 \\ 4x^2 + 2xy + 6y - 27 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2y \\ 20y^2 + 6y - 27 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3y \\ 42y^2 + 6y - 27 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2y \\ y = \frac{\sqrt{549}-3}{20} \\ y = \frac{-3-\sqrt{549}}{20} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3y \\ y = \frac{1+\sqrt{127}}{14} \\ y = \frac{-1-\sqrt{127}}{14} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{549}}{10} \\ y = \frac{-3+\sqrt{549}}{20} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-3-\sqrt{549}}{10} \\ y = \frac{-3-\sqrt{549}}{20} \end{cases} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{-3+3\sqrt{127}}{14} \\ y = \frac{-1+\sqrt{127}}{14} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-3-3\sqrt{127}}{14} \\ y = \frac{-1-\sqrt{127}}{14} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ có bốn nghiệm:

$$(x, y) = \left(\frac{-3+\sqrt{549}}{10}; \frac{-3+\sqrt{549}}{20} \right); \left(\frac{-3-\sqrt{549}}{10}; \frac{-3-\sqrt{549}}{20} \right); \left(x = \frac{-3+3\sqrt{127}}{14}; \frac{-1+\sqrt{127}}{14} \right);$$

$$\left(x = \frac{-3-3\sqrt{127}}{14}; \frac{-1-\sqrt{127}}{14} \right).$$

Bài 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + 6 = 0 \\ x^2 + 3x + y = 1. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + 6 = 0 \\ x^2 + 3x + y = 1 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Ta có } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x)(2x + y) = -6 \\ (x^2 + x) + (2x + y) = 1 \end{cases}$$

Đặt $u = x^2 + x; v = 2x + y$. Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} uv = -6 \\ u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = -2 \\ v = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3 \\ v = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Với $\begin{cases} u = -2 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$. Hệ PT này vô nghiệm.

Với $\begin{cases} u = 3 \\ v = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 3 \\ 2x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$.

Giải hệ này được 2 nghiệm: $\begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \\ y = \sqrt{13}-1 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ y = -\sqrt{13}-1 \end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \sqrt{13}-1\right); \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; -\sqrt{13}-1\right)$.

Bài 38. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$$

Hướng dẫn.

$y = 0$ không là nghiệm của hệ chia 2 vế PT(1) cho y^3 PT(2) cho y^2 Ta có hệ

$$\begin{cases} 8x^3 + \frac{27}{y^3} = 18 \\ 4\frac{x^2}{y} + 6\frac{x}{y^2} = 1 \end{cases} \quad \text{Đặt } \begin{cases} 2x = a \\ \frac{3}{y} = b \end{cases} \text{ ta có hệ } \begin{cases} a^3 + b^3 = 18 \\ a^2b + ab^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 1 \end{cases}$$

Hệ có 2 nghiệm $(x, y) \in \left\{ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3+\sqrt{5}} \right); \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3-\sqrt{5}} \right) \right\}$

Bài 39. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 3x^3 + (6-y)x^2 - 2xy - 18 = 0 \\ x^2 - x + y = -3 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x^3 + (6-y)x^2 - 3xy - 18 = 0 \\ x^2 + x + y = -7 \end{cases}$
---	---

Gợi ý.

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2)(3x-y) - 18 = 0 \\ x(x+2) - (3x+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Đặt } \begin{cases} a = x(x+2) \\ b = 3x-y \end{cases}$ Nghiệm $x = 1; -3$

$$b) \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+3)(2x-y)-18=0 \\ x(x+3)-(2x+y)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Đặt} \begin{cases} a=x(x+3) \\ b=2x-y \end{cases} \Rightarrow \text{Nghiem}$$

Bài 40. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\frac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện. $x \neq 0$.

Khi đó: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1-3.\frac{1}{x}=0 \\ (x+y)^2-5.\left(\frac{1}{x}\right)^2+1=0 \end{cases}$ Đặt $x+y=a, \frac{1}{x}=b$ ta được hệ :

$$\begin{cases} a+1-3b=0 \\ a^2-5b^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b-1 \\ (3b-1)^2-5b^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2, b=1 \\ a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=2, y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Bài 41. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\frac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có:

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y)+xy(x^2+y+1)=-\frac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\frac{5}{4} \end{cases} \text{ . Đặt } \begin{cases} x^2+y=a \\ xy=b \end{cases} \text{ ta được :}$$

$$\begin{cases} a+b(a+1)=-\frac{5}{4} \\ a^2+b=-\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a-ab=0 \\ b=-\frac{5}{4}-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, b=-\frac{5}{4} \\ a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ pt là $S = \left\{ \left(1; -\frac{3}{2}\right); \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right) \right\}$

Bài 42. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=7 \\ y(y-2x)-2x=10 \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 7 \\ y(y-2x) - 2x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9 \\ (y-x)^2 - (x+1)^2 = 9 \end{cases}.$$

Đặt $a = x+1, b = y+1 \Rightarrow b-a = y-x$ ta được hệ
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ (b-a)^2 - a^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (b-a)^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = -2ab \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = -2b$$

Với $a = 0 \Rightarrow b = \pm 3 \Rightarrow x = -1, y = 2$ hoặc $x = -1, y = -4$

Với $a = -2b \Rightarrow 5b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \mp \frac{6}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow x = -1 - \frac{6}{\sqrt{5}}, y = -1 + \frac{3}{\sqrt{5}} \text{ hoặc } x = -1 + \frac{6}{\sqrt{5}}, y = -1 - \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Cách 2 : Thế (1) vào PT (2) và rút gọn ta được :

$$x^2 + 2xy + 4x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2y+3) = 0$$

Bài 43. Tìm x, y thỏa mãn:
$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 = -y^3 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 = -y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad (1) \\ y^3 = -2(x-1)^2 - 1 \end{cases}$$

Ta có: $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \quad (1)$

Mặt khác: $-2(x-1)^2 - 1 \leq -1 \Rightarrow y^3 \leq -1 \Rightarrow y \leq -1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow y = -1$ nên $x = 1$. Thay vào hệ đã cho thử lại thì thỏa mãn.

Vậy $x = 1$ và $y = -1$ là các số cần tìm.

Bài 44. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^3 + y^3 + 3(x^2 + y^2) + 3(x + y) = 70 \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có:

$$\text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + y + x + 1 = 8 \\ (x+1)^3 + (y+1)^3 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) = 8 \\ (x+1)^3 + (y+1)^3 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^3(y+1)^3 = 512 \\ (x+1)^3 + (y+1)^3 = 72 \end{cases}$$

Đặt $(x+1)^3 = a$ và $(y+1)^3 = b$ ta có hệ $\begin{cases} ab = 512 \\ a + b = 72 \end{cases}$

Giải hệ (2) ta được : $(a;b) = (64;8)$ hoặc $(a;b) = (8;64)$

Với $(a;b) = (64;8) \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^3 = 64 \\ (y+1)^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 4 \\ y+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Với $(a;b) = (8;64) \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^3 = 8 \\ (y+1)^3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \\ y+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(3;1); (1;3)$

Bài 45. Giải hệ phương trình $\begin{cases} -5x^2 - 14x + y^2 - 8 = 0 \\ -5x^2 + 16x + y^2 - 4xy - 8y + 16 = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} y^2 = 5x^2 + 14x + 8 & (1) \\ y^2 - 4(x+2)y - 5x^2 + 16x + 16 = 0 & (2) \end{cases}$

Coi (2) là phương trình bậc 2 ẩn y , suy ra: $\Delta = 9x^2 \Rightarrow \begin{cases} y = 5x + 4 \\ y = 4 - x \end{cases}$

Với $y = 5x + 4$ suy ra: $(5x + 4)^2 = 5x^2 + 14x + 8$ ta được nghiệm $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}); (-\frac{4}{5}; 0)$

Với $y = 4 - x$ suy ra: $(4 - x)^2 = 5x^2 + 14x + 8$ ta được nghiệm

$(\frac{-11+3\sqrt{17}}{4}; \frac{27-3\sqrt{17}}{4}); (\frac{-11-3\sqrt{17}}{4}; \frac{27+3\sqrt{17}}{4})$

Bài 46. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ 4x^2 + y^2 = 5xy^2 \end{cases}$

Lời giải.

Ta thấy $x-y=0$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $y \neq 0$ nhân hai vế của phương trình với y

$\begin{cases} 2xy + 3y^2 = 5xy^2 \\ 4x^2 + y^2 = 5xy^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ 4x^2 + y^2 = 5xy^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ 2x^2 - xy - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ 4x^2 + y^2 = 5xy^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ (x-y)(2x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ (x-y)(2x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ (x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \\ \begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ (x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}, y = -\frac{4}{5} \end{cases}$

Bài 47. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 2y + xy = 5 \\ 27(x + y) + y^3 + 7 = 26x^3 + 27x^2 + 9x \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + 2y + xy = 5 \\ 27(x + y) + y^3 + 7 = 26x^3 + 27x^2 + 9x \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)(y + 2) = 9 \\ 27(x + y) + y^3 + 7 = 26x^3 + 27x^2 + 9x \end{cases} \\ & \Leftrightarrow y^3 + x^3 + 7 + 3(x + y)(x + 2)(y + 2) = 27x^3 + 27x^2 + 9x \\ & \Leftrightarrow y^3 + x^3 + 8 + 3xy(x + y) + 12(x + y) + 6(x + y)^2 = (3x + 1)^3 \\ & \Leftrightarrow (x + y + 2)^3 = (3x + 1)^3 \Rightarrow x + y + 2 = 3x + 1 \\ & \Leftrightarrow y + 1 = 2x \\ & \Rightarrow (x + 2)(2x + 1) = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3,5 \Rightarrow y = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $(x, y) \in \{(1, 1); (-3, 5, -8)\}$

Câu 48. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 & (1) \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 & (1) \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra: $x^4 \leq 1 \Rightarrow x \leq 1$. Tương tự $y \leq 1$ (3).

(2) $\Leftrightarrow x^2(1 - x) + y^2(1 - y) = 0$ (4), Từ (3) suy ra vế trái của (4) không âm. nên

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1 - x) = 0 \\ y^2(1 - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Thử lại thì hệ chỉ có 2 nghiệm là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Bài 49. Giải các hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x = 5 + y^2 + y \\ x^3 + y^3 = x^2y + xy^2 + 6 \end{cases}$$

Lời giải.

Đặt: $x - y = a$; $x + y = b$

Hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} ab + a = 5(1) \\ a^2b = 6(2) \end{cases}$$

Từ PT (2) ta suy ra $a \neq 0$. Do đó: $b = \frac{6}{a^2}$

Thế vào (1) ta được: $\frac{6}{a} + a = 5 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 = 0$ (Vì $a \neq 0$)

$$\Leftrightarrow (a-2)(a-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

$$+) a = 2 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \quad \text{Hay} \quad \begin{cases} x + y = \frac{3}{2} \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{4} \\ y = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

$$+) a = 3 \Rightarrow b = \frac{2}{3} \quad \text{Hay} \quad \begin{cases} x + y = \frac{2}{3} \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{6} \\ y = \frac{-7}{6} \end{cases}$$

Tóm lại hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $(x; y) = \left(\frac{7}{4}; \frac{-1}{4}\right); \left(\frac{11}{6}; \frac{-7}{6}\right)$

Bài 50. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+y)^4 = 6x^2y^2 - 215 \\ xy(x^2 + y^2) = -78 \end{cases}$$

Lời giải.

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^4 + 4x^3y + 4xy^3 + y^4 = -215 \\ x^3y + xy^3 = -78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 78x^4 + 312x^3y + 312xy^3 + 78y^4 = -16770 \\ 215x^3y + 215xy^3 = -16770 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 78x^4 + 97x^3y + 97xy^3 + 78y^4 = 0(1) \\ x^3y + xy^3 = -78 \end{cases}$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ PT (1) trở thành $78t^4 + 97t^3 + 97t + 78 = 0$

$$\Leftrightarrow (3t+2)(2t+3)(13t^2-12t+13) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-2}{3} \\ t = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$+) t = \frac{-2}{3} \Rightarrow x = \frac{-2}{3}y$. Thế vào (2) ta được $\frac{26}{27}y^4 = 78$

$$\Leftrightarrow y^4 = 81 \Leftrightarrow y = 3 \quad \text{Hoặc} \quad y = -3$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{Hoặc} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$+) \quad t = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = \frac{-3}{2}y. \text{ Thế vào (2) ta được } \frac{39}{8}y^4 = 78$$

$$\Leftrightarrow y^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \quad \text{Hoặc} \quad y = -2$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{Hoặc} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Tóm lại hệ đã cho có nghiệm là:

$$(x;y) = (-2;3); (2;-3); (-3;2); (3;-2)$$

Bài 51. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \\ 3xy = x + y + 1 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Đặt } u = \frac{x}{y+1}; v = \frac{y}{x+1}, \text{ hệ đã cho trở thành } \begin{cases} u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \\ uv = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 + 2uv = 1 \\ u^2 + v^2 - 2uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 1 \\ (u-v)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = v = \frac{1}{2} \\ u = v = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } u = v = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y+1 = 2x \\ x+1 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \text{ (TM)}$$

$$\text{Nếu } u = v = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y+1 = -2x \\ x+1 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{3} \text{ (TM)}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $x = y = 1, x = y = -\frac{1}{3}$

Bài 52. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0(1) \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0(2) \end{cases} \quad (I)$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (2x - y)(x + 2y) - 5(2x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)(x + 2y - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 5 - 2y \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 2x \cdot 2x - 3(2x)^2 + 15 = 0 \end{cases} \quad (II) \text{ hoặc } \begin{cases} x = 5 - 2y \\ (5 - 2y)^2 - 2(5 - 2y)y - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases} \quad (III)$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -15x^2 + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -1; y = -2 \end{cases}$$

$$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 5y^2 - 30y + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2; x = 1 \\ y = 4; x = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm $(1;2)$, $(-1;-2)$, $(-3;4)$

Bài 53. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 96y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases} \quad (I)$

Lời giải.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 48 \cdot 2y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 2y(x^2 + 32y^2) (*) \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + 8xy^2 - 64y^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - (4y)^3 - 2xy(x - 4y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4y)(x^2 + 2xy + 16y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x^2 + 2xy + 16y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ (x + y)^2 + 15y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x = y = 0 \end{cases}$$

Vì $x = y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình nên $x = 4y$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 16y^2 + 32y^2 = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(4;1)$, $(-4;-1)$

Bài 54. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{x} \\ x + y - \frac{4}{x} = \frac{4y}{x^2} \end{cases}$$

Lời giải.

ĐKXD: $x, y \neq 0$

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{x} & (1) \\ x + y - \frac{4}{x} = \frac{4y}{x^2} & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\frac{1}{y} + \frac{4}{x} = \frac{9}{x} - \frac{4y}{x^2} \Leftrightarrow \frac{4y}{x^2} - \frac{5}{x} + \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4y)(x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 4y \end{cases}$$

Với $x = y$, thế vào (1) có $2x - \frac{8}{x} = 0 \Leftrightarrow x = y = \pm 2$

Với $x = 4y$, thế vào (1) có $5y - \frac{5}{4y} = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 2$

Vậy $S = \left\{ (2; 2); (-2; -2); (2; \frac{1}{2}); (-2; -\frac{1}{2}) \right\}$

Bài 55. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \\ x^{2003} + y^{2003} + z^{2003} = 3^{2004} \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx & (1) \\ x^{2003} + y^{2003} + z^{2003} = 3^{2004} & (2) \end{cases}$$

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z$$

Thế vào (2) ta có: $3x^{2003} = 3^{2004}$

$$\Leftrightarrow x^{2003} = 3^{2003}$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Do đó $x = y = z = 3$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x; y; z) = (3; 3; 3)$

Bài 56. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= \frac{x^4 + y^4}{2} + \frac{y^4 + z^4}{2} + \frac{z^4 + x^4}{2} \geq x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 = \\ &= \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2}{2} + \frac{y^2 z^2 + z^2 x^2}{2} + \frac{z^2 x^2 + x^2 y^2}{2} \geq xyz + yzx + zxy = \\ &= xyz (x + y + z) = xyz \text{ (vì } x + y + z = 1 \text{)}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{3}; z = \frac{1}{3} \right)$

Bài 57. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + z^2 = 2 \\ yz + x^2 = 2 \\ xz + y^2 = 2 \end{cases}$$

Lời giải.

Từ (1) ; (2) ta có : $(x - z)(x - y + z) = 0$ (4)

Từ (2) và (3) ta có: $(y - x)(x + y - z) = 0$ (5)

Từ (3) ; (4) ; (5) ta có hệ :

$$\begin{cases} (x - z)(x - y + z) = 0 \\ (y - x)(x + y - z) = 0 \\ xz + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Để giải hệ trên ta giải 4 hệ : } \begin{cases} x - z = 0 \\ y - x = 0 \\ xz + y^2 = 2 \end{cases} \quad (\text{A}) \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ xz + y^2 = 2 \end{cases} \quad (\text{B})$$

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x - y + z = 0 \\ xz + y^2 = 2 \end{cases} \quad (C) \qquad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ xz + y^2 = 2 \end{cases} \quad (D)$$

Giải 4 hệ trên ta được 8 bộ nghiệm của hệ phương trình :

$$(1; 1; 1); (-1; -1; -1); (\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; 0; -\sqrt{2}) \\ (\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0); (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0); (0; \sqrt{2}; \sqrt{2}); (0; -\sqrt{2}; -\sqrt{2})$$

Bài 58. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - x - y \\ z^2 = 2xy - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - x - y)^2 = 2xy - 4 \\ z = 2 - x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 0 \\ z = 2 - x - y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

Bài 59. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 3 \\ y + \frac{1}{z} = 3 \\ z + \frac{1}{x} = 3 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 3 \quad (1) \\ y + \frac{1}{z} = 3 \quad (2) \\ z + \frac{1}{x} = 3 \quad (3) \end{cases}$$

Từ (3)

$$\Rightarrow z = \frac{3x-1}{x}$$

thay vào (2)

$$\Rightarrow 3xy+3 = 8x+y \quad (4)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow xy + 1 = 3y \Leftrightarrow 3xy+3 = 9y \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5)} \Rightarrow 8x+y = 9y \Rightarrow x = y$$

Chứng minh tương tự : $y = z$

$$\text{Từ đó} \Rightarrow x = y = z$$

Thay vào (1)

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{hệ có 2 nghiệm} \quad x = y = z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Bài 60. Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn:
$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ y - z - x = 3. \\ z - x - y = 5 \end{cases}$$

Lời giải.

Cộng vế với vế các phương trình đã cho ta được $x + y + z = -9$.

Phương trình đầu có dạng $2x - (x + y + z) = 1 \Rightarrow x = -4$.

Phương trình thứ hai có dạng $2y - (x + y + z) = 3 \Rightarrow y = -3$.

Phương trình thứ ba có dạng $2z - (x + y + z) = 5 \Rightarrow z = -2$.

Thử lại thỏa mãn. Vậy $x = -4, y = -3, z = -2$.

Bài 61. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy = x + y + 1 \\ yz = y + z + 5 \\ zx = z + x + 2 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} xy = x + y + 1 \\ yz = y + z + 5 \\ zx = z + x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1) = 2 \\ (y-1)(z-1) = 6 \\ (z-1)(x-1) = 3 \end{cases}$$

Nhân từng vế các phương trình của hệ trên ta được

$$((x-1)(y-1)(z-1))^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1)(z-1) = 6 \\ (x-1)(y-1)(z-1) = -6 \end{cases}$$

+) Nếu $(x-1)(y-1)(z-1) = 6$, kết hợp với hệ trên ta được

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=2 \\ z-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

+) Nếu $(x-1)(y-1)(z-1) = -6$, kết hợp với hệ trên ta được

$$\begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-2 \\ z-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}. \text{ Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm } (x; y; z) = (2; 3; 4), (0; -1; -2).$$

Bài 62. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 4 \\ z + zx + x = 9 \end{cases} \quad \text{trong đó } x, y, z > 0$$

Lời giải.

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 5 \\ (z+1)(x+1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(x+1)(y+1)(z+1)]^2 = 100 \\ (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 5 \\ (z+1)(x+1) = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = 10 \\ (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 5 \\ (z+1)(x+1) = 10 \end{cases} \quad (\text{Do } x, y, z > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z+1=5 \\ x+1=2 \\ y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $(x; y; z) = (1; 0; 4)$

Bài 63. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2 + x + 1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2 + y + 1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2 + z + 1)x^2y^2 \end{cases}$$

Lời giải.

Nếu chia hai vế của mỗi phương trình cho $x^2y^2z^2$ thì ta được hệ mới đơn giản hơn.

TH 1. $xyz = 0$. Nếu $x = 0$ thì hệ $\Leftrightarrow y^2z^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z = 0 \\ y = t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

- Tương tự với $y = 0$ và $z = 0$ ta thu được các nghiệm là $(0; 0; t), (0; t; 0), (t; 0; 0), t \in \mathbb{R}$

TH 2. $xyz \neq 0$. Chia hai vế của mỗi pt trong hệ cho $x^2y^2z^2$ ta được

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y}\right)^2 = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} & (1) \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 = 4 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} & (2). \text{ Cộng vế 3 phương trình của hệ ta được :} \\ \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)^2 = 5 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} & (3) \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 & (4) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -3 & (5) \end{cases}$$

- Từ (4) và (1) ta có $\left(4 - \frac{1}{x}\right)^2 = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{9}{x} = 13 \Leftrightarrow x = \frac{9}{13}$

- Từ (4) và (2) ta có $y = \frac{3}{4}$. Từ (4) và (3) ta có $z = \frac{9}{11}$

- Tương tự, từ (5), (1), (2), (3) ta có $x = -\frac{5}{6}, y = -1, z = -\frac{5}{4}$.

- Vậy hệ có tập nghiệm là

$$S = \left\{ (t; 0; 0); (0; t; 0); (0; 0; t); \left(\frac{9}{13}; \frac{3}{4}; \frac{9}{11} \right); \left(-\frac{5}{6}; -1; -\frac{5}{4} \right), t \in \mathbb{R} \right\}$$

CHỦ ĐỀ 4. PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Bài 1.

a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2 \quad (1)$

b) $3(x^2 - x + 1) = (x + \sqrt{x-1})^2 \quad (2)$

c) $\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-2} = -1 \quad (3)$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x \geq \frac{3}{2}$

Với $x \geq \frac{3}{2}$ PT (1) $\Leftrightarrow x-1 + 2x-3 + 2\sqrt{2x^2-5x+3} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-5x+3} = 8-3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x^2-5x+3) = 64+9x^2-48x & (3) \\ x \leq \frac{8}{3} \end{cases}$$

PT (3) $\Leftrightarrow x^2 - 28x + 52 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \quad (TM) \\ x = 26 \quad (Loại) \end{cases}$$

Vậy PT đã cho có nghiệm $x=2$

b) Điều kiện: $x \geq 1$

Với $x \geq 1$ PT (2) $\Leftrightarrow 3(x^2 - x + 1) = x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 4 = 2x\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = x\sqrt{x-1}$$

Do $x \geq 1$ nên 2 vế của PT này không âm vì vậy PT này

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 4 - 4x^3 - 8x + 4x^2 = x^3 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad (TM)$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) Pt (3)} &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-2}\right)^3 = -1 \\
 &\Leftrightarrow x-2 - 2x+2 - 3\sqrt[3]{(x-2)(2x-2)} \cdot (\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-2}) = -1 \\
 &\Rightarrow 1-x = 3\sqrt[3]{2x^2-6x+4} \\
 &\Leftrightarrow 1-3x+3x^2-x^3 = 27(2x^2-6x+4) \\
 &\Leftrightarrow x^3+51x^2-159x+107=0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+52x-107)=0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-52x+107=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-26+\sqrt{783} \\ x=-26-\sqrt{783} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2\sqrt{x^2}$ (1).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2(*) \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2x^2 + x + 2\sqrt{x^2(x-1)(x+2)} = 4x^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(x-1)(x+2)} = x(2x-1) \\ &\Leftrightarrow 4x^2(x^2+x-2) = x^2(2x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2(8x-9) = 0 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0$, $x=\frac{9}{8}$.

Bài 3. Giải phương trình: $x^2 - 4x + 2 = 2\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ (1)

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, ($t \geq 0$). Phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 & (\text{loại}) \\ t = 3. \end{cases}$$

Với $t = 3$ thì $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{2}$

Vậy $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$ là nghiệm của PT (1).

Bài 4. Giải phương trình: $(x+5)(x-2) - 4(x+5)\sqrt{\frac{x-2}{x+5}} + 3 = 2$ (2)

$$\text{Lời giải. Điều kiện: } \begin{cases} \frac{x-2}{x+5} \geq 0 \\ x+5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Đặt $t = (x+5)\sqrt{\frac{x-2}{x+5}} \Rightarrow t^2 = (x+5)(x-2)$. Phương trình (2) trở thành:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3. \end{cases}$$

Với $t = 1$ thì $(x+5)\sqrt{\frac{x-2}{x+5}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 > 0 \\ (x+5)(x-2) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x^2 + 3x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{53}}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Với $t = 3$ thì $(x+5)\sqrt{\frac{x-2}{x+5}} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 > 0 \\ (x+5)(x-2) = 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x^2 + 3x - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{85}}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Bài 5. Giải phương trình: $\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{49x^2 + 7x - 42} = 181 - 14x$ (3)

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq \frac{6}{7}$. Đặt $t = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}$ ($t \geq 0$). Phương trình (3) trở thành:

$$t^2 + t - 182 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -14 \text{ (loại)} \\ t = 13. \end{cases}$$

Với $t = 13$ thì $\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} = 13 \Leftrightarrow \sqrt{49x^2 + 7x - 42} = 84 - 7x \Leftrightarrow x = 6$.

Do đó phương trình (3) có nghiệm là $x = 6$

Bài 6. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 1$ (2)

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ ($t \geq \sqrt{2}$). Phương trình (2) trở thành:

$$(x+1)t = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 - (x+1)t + 2(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - (x+1)t + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = x-1. \end{cases}$$

Với $t = 2$ ta có: $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Với $t = 1$ thì ta có: $2 = 0$ (vô lý)

Vậy PT (2) có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{2}$

Bài 7. Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2 + 16}$ (1)

Lời giải.

Điều kiện: $|x| \leq 2$

$$(1) \Leftrightarrow 4(2x+4) + 16\sqrt{2(4-x^2)} + 16(2-x) = 9x^2 + 16 \Leftrightarrow 8(4-x^2) + 16\sqrt{2(4-x^2)} = x^2 + 8x$$

Đặt $t = \sqrt{2(4-x^2)}$ ($t \geq 0$). Phương trình (1) trở thành: $4t^2 + 16t - x^2 - 8x = 0$

Giải phương trình trên với ẩn t ta được: $t_1 = \frac{x}{2}; t_2 = -\frac{x}{2} - 4$

Do $|x| \leq 2$ nên $t_2 < 0$ không thỏa mãn đk $t \geq 0$.

Với $t = \frac{x}{2}$ thì: $\sqrt{2(4-x^2)} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 8(4-x^2) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài 8. Giải phương trình: $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -1$

Đặt $t = \sqrt{x+1}$ ($t \geq 0$) Phương trình đã cho trở thành:

$$xt^2 + 12t - 36 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm 6t}{x}$$

Với $t = \frac{-6+6t}{x}$ ta có: $6 = (6-x)t$

Do $x = 6$ không là nghiệm của PT nên: $t = \frac{6}{6-x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \frac{6}{6-x}$

Bình phương và rút gọn ta được $x = 3$.

Với $t = \frac{-6-6t}{x}$ ta có: $(x+6)t = -6$ (vô nghiệm vì VT ≥ 0 , VP < 0)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài 9. Giải phương trình: $2x^2 - 3x + 2 = x\sqrt{3x-2}$

Lời giải.

ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$.

PT(4) $\Leftrightarrow 2x^2 - (3x-2) = x\sqrt{3x-2}$. Đặt $y = \sqrt{3x-2}$ ($y \geq 0$). Ta có: $2x^2 - y^2 = xy$ (*)

Phương trình (*) là phương trình đẳng cấp đối với x và y .

Đặt $y = xt$ thì (*) trở thành: $2x^2 - x^2t^2 = x^2t \Leftrightarrow x^2(t^2 + t - 2) = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$

(do $x \geq \frac{2}{3}$.)

Suy ra: $\begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x-2} = x \\ \sqrt{3x-2} = -2x \text{ (loại)} \end{cases}$

Giải ra ta được $x = 1$ và $x = 2$ là nghiệm của PT.

Bài 10. Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+1} = 3(x^2+2)$

Lời giải. Đk: $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (1).

Đặt: $a = \sqrt{x+1}$; $b = \sqrt{x^2 - x + 1}$, ($a \geq 0$; $b > 0$) (2) $\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 2$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $10.ab = 3.(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a - 3b)(3a - b) = 0$
 $\Leftrightarrow a = 3b$ hoặc $b = 3a$.

+) Nếu $a = 3b$ thì từ (2) suy ra: $\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 9x^2 - 10x + 8 = 0$ (vô nghiệm).

+) Nếu $b = 3a$ thì từ (2) suy ra: $3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 9x + 9 = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 8 = 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 5 + \sqrt{33}$; $x_2 = 5 - \sqrt{33}$ (thỏa mãn (1)).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 5 + \sqrt{33}$ và $x_2 = 5 - \sqrt{33}$.

Bài 11. Giải phương trình: $\sqrt{5x^2 - 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x+1}$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 5$

$$\sqrt{5x^2 - 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 - 14x + 9} = \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(5x-1) = x^2 + 24x + 5 + 10\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 4x - 5) + 3(x+4) - 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x+4)} = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow 2u^2 + 3v^2 - 5uv = 0 \Leftrightarrow (u-v)(2u-3v) = 0$$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$, $v = \sqrt{x+4}$, $u, v \geq 0$ thì:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2u = 3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 9 = 0 \\ 4x^2 - 25x - 56 = 0 \end{cases}$$

Giải ra ta được hai nghiệm là: $x_1 = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$; $x_2 = 8$

Bài 12. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} = \sqrt[3]{4x-3}$ (4)

Lời giải.

Đặt:
$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{3x+1} \\ b = \sqrt[3]{5-x} \\ c = \sqrt[3]{2x-9} \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 4x - 3$$

Khi đó từ (4) ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$

Từ đây suy ra:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{3x+1} = -\sqrt[3]{5-x} \\ \sqrt[3]{5-x} = -\sqrt[3]{2x-9} \\ \sqrt[3]{2x-9} = -\sqrt[3]{3x+1} \end{cases}$$

Giải ra ta được nghiệm $x = -3$; $x = 4$; $x = \frac{8}{5}$

Bài 13. Giải hệ phương trình: $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$ (1)

Lời giải.

ĐK: $x \leq 12$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt[3]{24+x} \\ v = \sqrt{12-x} \quad (v \geq 0) \end{cases} \text{ suy ra: } u^3 + v^2 = 36$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = 6 \\ u^3 + v^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - u \\ u^3 + (6 - u)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - u \\ u(u^2 + u - 12) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - u \\ u = 0; u = -4; u = 3. \end{cases}$$

Giải ra ta được: $x = -24$

Bài 14. Giải hệ phương trình: $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt[4]{97-x} \\ v = \sqrt[4]{x} \end{cases} \quad (u, v \geq 0)$$

$$\text{Khi đó, ta có hệ phương trình: } \begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 97 \end{cases}$$

Giải hệ này bằng phương pháp thế ta được nghiệm $u = 2, v = 3$ và $u = 3, v = 2$

Từ đó có thể tính được nghiệm $x = 81$ hoặc $x = 16$.

Bài 15. Giải phương trình: $x^2 - \sqrt{x+5} = 5$ (1)

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -5$

Đặt: $\sqrt{x+5} = y$ ($y \geq 0$) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ y^2 - x = 5 \end{cases} \Rightarrow (x^2 - y^2) + (x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$+) \quad x = y \Rightarrow \sqrt{x+5} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \quad (\text{Ko T/m})$$

$$+) \quad x + y + 1 = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x+5} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=-\sqrt{x+5} \quad \Leftrightarrow \sqrt{x+5}=-(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x^2+2x+1=x+5(*) \end{cases}$$

PT (*) $x^2+x-4=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad (\text{ko t/m})$$

Vậy PT vô nghiệm

Bài 16. Giải phương trình: $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+1=2t \\ t^3+1=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2t \\ x^3-t^3=2(t-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2t \\ (x-1)(x^2+t^2+tx+2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ x^3-2t+1=0 \end{cases}$$

Giải hệ này được nghiệm $x=1$ và $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 17. Giải phương trình sau : $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

Lời giải.

Ta nhận thấy :

$$(3x^2-5x+1)-(3x^2-3x-3)=-2(x-2)$$

$$(x^2-2)-(x^2-3x+4)=3(x-2)$$

Ta có thể chuyển về rồi trục căn thức 2 vế :

$$\frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x-1)}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

Dễ dàng nhận thấy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình .

Bài 17. Giải phương trình sau $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

Lời giải.

Để phương trình có nghiệm thì : $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$

Ta nhận thấy : $x = 2$ là nghiệm của phương trình , như vậy phương trình có thể phân tích về dạng

$(x-2)A(x)=0$, để thực hiện được điều đó ta phải nhóm , tách các số hạng như sau :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+12}-4 &= 3x-6+\sqrt{x^2+5}-3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4} = 3(x-2) + \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3} \\ &\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2\end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh được : $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3 < 0, \forall x > \frac{5}{3}$

Bài 18 . Giải phương trình : $\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}$

Lời giải.

Đk $x \geq \sqrt[3]{2}$

Nhận thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình , nên ta biến đổi phương trình

$$\sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3 = \sqrt{x^3-2}-5 \Leftrightarrow (x-3)\left[1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1}+4}\right] = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Ta chứng minh : $1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1}+4} = 1 + \frac{x+3}{(\sqrt[3]{x^2-1}+1)^2+3} < 2 < \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$

Vậy pt có nghiệm duy nhất $x=3$

Bài 19 . Giải phương trình : $x = \sqrt{2-x}.\sqrt{3-x} + \sqrt{3-x}.\sqrt{5-x} + \sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}$

Lời giải.

$$\begin{cases} u = \sqrt{2-x} \\ v = \sqrt{3-x} \\ w = \sqrt{5-x} \end{cases}, \text{ ta có : } \begin{cases} 2-u^2 = uv+vw+wu \\ 3-v^2 = uv+vw+wu \\ 5-w^2 = uv+vw+wu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)(u+w) = 2 \\ (u+v)(v+w) = 3 \\ (v+w)(u+w) = 5 \end{cases}$$

giải hệ ta được: $u = \frac{\sqrt{30}}{60} \Leftrightarrow x = \frac{239}{120}$

Bài 20 . Giải phương trình sau: $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}$

Lời giải.

Ta đặt :
$$\begin{cases} a = \sqrt{2x^2 - 1} \\ b = \sqrt{x^2 - 3x - 2} \\ c = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} \\ d = \sqrt{x^2 - x + 2} \end{cases}, \text{ khi đó ta có : } \begin{cases} a + b = c + d \\ a^2 - b^2 = c^2 - d^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Bài 21. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2 + x}$

Lời giải.

+ $x = 0$, không phải là nghiệm

+ $x \neq 0$, ta chia hai vế cho x :

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} + \sqrt[3]{x} = 1 + \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1 \right) (\sqrt[3]{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 22. Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

Lời giải.

Đk $x \geq -1$

$$\text{pt} \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2x)(\sqrt{x+1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Bài 23. Giải phương trình : $\sqrt{x+3} + \frac{4x}{\sqrt{x+3}} = 4\sqrt{x}$

Lời giải.

Đk: $x \geq 0$

$$\text{Chia cả hai vế cho } \sqrt{x+3}: 1 + \frac{4x}{x+3} = 2\sqrt{\frac{4x}{x+3}} \Leftrightarrow \left(1 - \sqrt{\frac{4x}{x+3}} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 24. Giải phương trình : $\sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}$

Lời giải.

Đk: $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ khi đó pt đã cho tương đương: $x^3 + \sqrt{3}x^2 + x - \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{10}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{\sqrt{3}}$$

Bài 25. Giải phương trình sau : $2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4$

Lời giải.

Đk: $x \geq -3$ phương trình tương đương :

$$(1 + \sqrt{3+x})^2 = 9x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + 1 = 3x \\ \sqrt{x+3} + 1 = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{18} \end{cases}$$

Bài 26. Giải phương trình sau : $2 + 3\sqrt[3]{9x^2(x+2)} = 2x + 3\sqrt[3]{3x(x+2)^2}$

Gợi ý:

$$\text{pt} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{3x})^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 27. Giải phương trình: $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2$

Lời giải.

Đk: $x \geq 1$

$$\text{Nhận xét. } \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \text{ thì phương trình có dạng: } t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t = 1$$

Thay vào tìm được $x = 1$

Bài 28. Giải phương trình: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } x \geq -\frac{5}{4}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4x + 5} (t \geq 0) \text{ thì } x = \frac{t^2 - 5}{4}. \text{ Thay vào ta có phương trình sau:}$$

$$2 \cdot \frac{t^4 - 10t^2 + 25}{16} - \frac{6}{4}(t^2 - 5) - 1 = t \Leftrightarrow t^4 - 22t^2 - 8t + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2 + 2t - 7)(t^2 - 2t - 11) = 0$$

$$\text{Ta tìm được bốn nghiệm là: } t_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}; t_{3,4} = 1 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\text{Do } t \geq 0 \text{ nên chỉ nhận các giá trị } t_1 = -1 + 2\sqrt{2}, t_3 = 1 + 2\sqrt{3}$$

$$\text{Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình l: } x = 1 - \sqrt{2} \text{ và } x = 2 + \sqrt{3}$$

Bài 29. Giải phương trình sau: $x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } 1 \leq x \leq 6$$

Đặt $y = \sqrt{x-1}$ ($y \geq 0$) thì phương trình trở thành:

$$y^2 + \sqrt{y+5} = 5 \Leftrightarrow y^4 - 10y^2 - y + 20 = 0 \text{ (với } y \leq \sqrt{5}) \Leftrightarrow (y^2 + y - 4)(y^2 - y - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \text{ (loại), } y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của $x = \frac{11-\sqrt{17}}{2}$

Bài 30. Giải phương trình sau : $x = (2004 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{1-\sqrt{x}})^2$

Lời giải:

đk $0 \leq x \leq 1$

$$\text{Đặt } y = \sqrt{1-\sqrt{x}} \text{ pt} \Leftrightarrow 2(1-y)^2(y^2 + y - 1002) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 31. Giải phương trình sau : $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$

Lời giải.

Điều kiện: $-1 \leq x < 0$

$$\text{Chia cả hai vế cho } x \text{ ta nhận được: } x + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3 + \frac{1}{x}$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, ta giải được.

Bài 32. Giải phương trình : $x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1$

Lời giải.

$$x = 0 \text{ không phải là nghiệm, Chia cả hai vế cho } x \text{ ta được: } \left(x - \frac{1}{x}\right) + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = 2$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}}, \text{ Ta có : } t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Bài 33. Giải phương trình sau : $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$

Lời giải.

Đk: $x \geq 1$

$$\text{Nhận xét : Ta viết } \alpha(x-1) + \beta(x^2 + x + 1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\text{Đồng nhất thức ta được } 3(x-1) + 2(x+x+1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

Đặt $u = x - 1 \geq 0, v = x^2 + x + 1 > 0$, ta được: $3u + 2v = 7\sqrt{uv} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 9u \\ v = \frac{1}{4}u \end{cases}$

Nghiệm: $x = 4 \pm \sqrt{6}$

Bài 34. Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$

Lời giải.

Nhận xét: Đặt $y = \sqrt{x+2}$ ta biến pt trình về dạng phương trình thuần nhất bậc 3 đối với x và y :

$$x^3 - 3x^2 + 2y^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y \end{cases}$$

Pt có nghiệm: $x = 2, x = 2 - 2\sqrt{3}$

Bài 35. Giải các phương trình sau:

1) $18x^2 - 18x\sqrt{x} - 17x - 8\sqrt{x} - 2 = 0.$

2) $x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}.$

3) $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right).$

4) $2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1.$

Lời giải.

1) Đặt $\sqrt{x} = y$ với $y \geq 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$(3y^2 - 4y - 2)(6y^2 + 2y + 1) = 0$, suy ra $(3y^2 - 4y - 2) = 0$, ta được $y = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$. Từ đó

phương trình có nghiệm là $x = \frac{14 + 4\sqrt{10}}{9}$.

2) Ta có $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > 0$, với mọi x .

Mặt khác $x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)$.

Đặt $y = \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}$ (có thể viết đk $y \geq 0$ hoặc chính xác hơn là $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \sqrt{3}$), ta được

$$2y^2 - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}y = 0 \Leftrightarrow 6y^2 + \sqrt{3}y - 3 = 0, \text{ ta được } y = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (loại } y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{)}.$$

Từ đó phương trình có nghiệm là $x = 1$.

3) Ta thấy $x < 0$ không thỏa mãn.

Khi đó phương trình tương đương với hệ
$$\begin{cases} x > 0 \\ 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right) > 0 \\ \left(\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\right)^2 = \left(4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2 \end{cases}.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$, ta được
$$\begin{cases} 2 \leq y < 4(1) \\ 4 - (y^2 - 2) + 2\sqrt{5 - 2(y^2 - 2)} = (4 - y)^2(2) \end{cases}.$$

Xét (2) $\Leftrightarrow \sqrt{9 - 2y^2} = y^2 - 4y + 5 \Leftrightarrow y^4 - 8y^3 + 28y^2 - 40y + 16 = 0$ (do hai vế không âm).

$$\Leftrightarrow (y - 2)(y^3 - 6y^2 + 16y - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)((y - 2)(y^2 - 4y + 8) + 8) = 0$$

Dẫn đến $y = 2$ (do $((y - 2)(y^2 - 4y + 8) + 8) > 0$ với mọi y thỏa mãn (1)).

Từ đó phương trình có nghiệm là $x = 1$.

Nhận xét: Bài toán này ta có thể giải bằng *Phương pháp đánh giá* trong phần sau.

4) Ta có phương trình tương đương với

$$\sqrt{1-x} = 1 - 2x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1 - x = 1 + 4x^4 + 4x^2(1-x^2) - 4x^2 - 4x\sqrt{1-x^2} + 8x^3\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x(1 - 4\sqrt{1-x^2} + 8x^2\sqrt{1-x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - 4\sqrt{1-x^2} + 8x^2\sqrt{1-x^2} = 0(1) \end{cases}$$

Xét (1), đặt $y = \sqrt{1-x^2}$, suy ra $y \geq 0$ và $x^2 = 1 - y^2$.

Ta được $1 - 4y + 8y(1 - y^2) = 0 \Leftrightarrow 8y^3 - 4y - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (2y + 1)(4y^2 - 2y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}. \text{ Từ đó suy ra } x = \pm \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}.$$

Thử lại ta được nghiệm của phương trình là $x = 0$ và $x = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}.$

Bài 36. Giải phương trình $\frac{16}{\sqrt{x-1996}} + \frac{1}{\sqrt{y-2008}} = 10 - (\sqrt{x-1996} + \sqrt{y-2008}).$

Nhận xét: Với bài toán này, ta thấy đây là một phương trình gồm hai ẩn. Do đó ta nghĩ đến biến đổi phương trình thành phương trình mới có Vt là tổng các bình phương, còn Vp bằng 0.

Lời giải.

Biến đổi phương trình thành

$$\left(\sqrt[4]{x-1996}-\frac{4}{\sqrt[4]{x-1996}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{y-2008}-\frac{1}{\sqrt[4]{y-2008}}\right)^2=0.$$

Từ đó ta được phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2012; 2009)$.

Bài 38. Giải phương trình $x\sqrt{y-1}+2y\sqrt{x-1}=\frac{3}{2}xy$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1; y \geq 1$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } x\sqrt{y-1}+2y\sqrt{x-1} &= -y(x-2\sqrt{x-1})-\frac{1}{2}x(y-2\sqrt{y-1})+\frac{3}{2}xy \\ &= -y(\sqrt{x-1}-1)^2-\frac{1}{2}x(\sqrt{y-1}-1)^2+\frac{3}{2}xy.\end{aligned}$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x \geq 1; y \geq 1 \\ y(\sqrt{x-1}-1)^2+\frac{1}{2}x(\sqrt{y-1}-1)^2=0 \end{cases}$$

Từ đó ta được phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2; 2)$.

Bài 39. Giải phương trình $\sqrt{x^2-3\sqrt{2}.x+9}+\sqrt{x^2-4\sqrt{2}.x+16}=5$.

Lời giải.

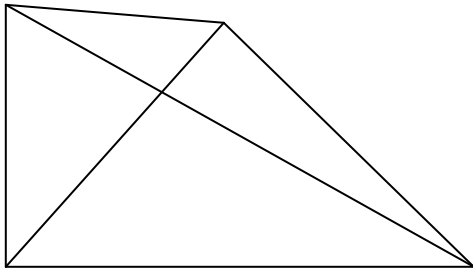
Nếu $x \leq 0$ thì $Vt \geq 3+4=7 > 5 = Vp$ (phương trình không có nghiệm).

Nếu $x > 0$ thì ta xét tam giác vuông ABC với $A=90^\circ$, $AB=4$; $AC=3$.

Gọi AD là phân giác của góc A , lấy M thuộc tia AD .

Đặt $AM=x$, xét $\triangle ACM \Rightarrow CM^2=x^2+9-3\sqrt{2}.x$ và xét $\triangle ABM \Rightarrow BM^2=x^2+16-4\sqrt{2}.x$.

Từ đó suy ra $Vt = CM + BM \geq BC = 5$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $M \equiv D$, hay



$$\frac{CM}{BM} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 16CM^2 = 9BM^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 16.9 - 48\sqrt{2}.x = 9x^2 + 16.9 - 36\sqrt{2}.x$$

$$\Leftrightarrow 7x - 12\sqrt{2}.x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{12\sqrt{2}}{7}$.

Bài 40. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} = 6$ (1)

Lời giải.

ĐK: $x < 2$

Để thấy $x = \frac{3}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Với $x < \frac{3}{2}$ ta có: $\sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} < 6$

Với $x > \frac{3}{2}$ ta có: $\sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} > 6$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$.

Bài 41. Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} = x^2 - 6x + 13$

Lời giải.

ĐK: $-1 \leq x \leq 7$

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có:

$$VT = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(x+1+7-x)} = 4 \quad (1)$$

$$VP = x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4 \geq 4$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $VT = VP = 4$ hay $x = 3$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

Cách 2. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4(x+1)} \leq \frac{4+(x+1)}{4} = \frac{5+x}{4}$$

$$\sqrt{7-x} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4(7-x)} \leq \frac{4+(7-x)}{4} = \frac{11-x}{4}$$

Do đó: $VT = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \leq \frac{5+x}{4} + \frac{11-x}{4} = 4$ (1)

Mặt khác: $VP = x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4 \geq 4$ (2)

Vậ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $VT = VP = 4$ hay $x = 3$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

Cách 3. Đặt $A = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}$ ($A > 0$). Bình phương A và áp dụng BĐT Cauchy ta có: $A^2 = x+1+7-x+2\sqrt{(x+1)(7-x)} \leq x+1+7-x+[(x+1)+(7-x)] = 16$.

Do đó $A \leq 4$

Dấu “=” xảy ra khi $x+1 = 7-x \Leftrightarrow x = 3$

Mặt khác: $VP = x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4 \geq 4$

Vậ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $VT = VP = 4$ hay $x = 3$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

Bài 42. Giải phương trình: $\frac{2}{x^2+17} + \frac{1}{2x^2+7} = \frac{2}{1+\sqrt{(x^2+3)(x^2+15)}}$ ($x \in R$)

(Tác giả: AD Page “Tài liệu toán học” 03/12/2017)

Lời giải.

Với $ab \geq 1$ ta có: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$ (*)

Thật vậy, biến đổi tương đương (*) ta được: $(ab-1)(a-b)^2 \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$ hoặc $ab = 1$

Bất đẳng thức này đúng với mọi $ab \geq 1$.

Biến đổi và áp dụng BĐT (*) ta được:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{2}{x^2+17} + \frac{1}{2x^2+7} = \frac{1}{1+\frac{x^2+15}{2}} + \frac{1}{1+2(x^2+3)} \\ &\geq \frac{2}{1+\sqrt{\left(\frac{x^2+15}{2}\right) \cdot 2(x^2+3)}} = \frac{2}{1+\sqrt{(x^2+15)(x^2+3)}} = VP \end{aligned}$$

Dễ thấy $\left(\frac{x^2+15}{2}\right) \cdot 2(x^2+3) > 1$ với mọi x nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$\frac{x^2+15}{2} = 2(x^2+3)$. Giải phương trình này ta được nghiệm $x = \pm 1$

Bài 43. Giải các phương trình

$$a) \sqrt{2x+4} + 6\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x-4-2\sqrt{2x-5}} = 4 \quad (1)$$

$$b) \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27 \quad (2)$$

$$c) \sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} = x^2 - x + 2 \quad (3)$$

$$d) \sqrt{x^2+48} = 4x-3 + \sqrt{x^2+35} \quad (4)$$

$$e) b) \sqrt{5-x^6} - \sqrt[3]{3x^4-2} = 1 \quad (5)$$

Lời giải.

$$a) \text{ĐK: } x \geq \frac{5}{2}$$

$$\text{Với ĐK: } x \geq \frac{5}{2} \text{ PT (1)} \Leftrightarrow |\sqrt{2x-5}+3| + |\sqrt{2x-5}-1| = 4$$

$$\text{Ta có: } |\sqrt{2x-5}+3| + |\sqrt{2x-5}-1| \geq 4$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2x-5}+3)(\sqrt{2x-5}-1) \leq 0 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 3$$

$$\text{Vậy nghiệm của PT đã cho là } \frac{5}{2} \leq x \leq 3$$

$$b) \text{ĐK } 4 \leq x \leq 6$$

$$\text{Trên TXĐ } \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(x-4+6-x)} \Leftrightarrow \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} \leq 2$$

$$\text{Lại có } x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \geq 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 27 \geq \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4} = \sqrt{6-x} \\ x = 5 \\ 4 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{Vậy PT (2) có nghiệm là } x=5$$

$$c) \text{ĐK: } \begin{cases} x^2 + x - 1 \geq 0 \\ -x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

áp dụng BĐT cô si cho các số không âm ta có

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(x^2+x-1).1} &\leq \frac{x^2+x-1+1}{2} \\ \sqrt{(-x^2+x+1).1} &\leq \frac{-x^2+x+1+1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{-x^2+x+1} \leq x+1$$

Ta có $x^2 - x + 2 \geq x + 1$ (Vì $(x-1)^2 \geq 0$)

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} \leq x^2 - x + 2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$; Vậy pt có nghiệm là $x = 1$

d) TXĐ: $\forall x$

$$\text{PT(4)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 48} - \sqrt{x^2 + 35} = 4x - 3 \Leftrightarrow \frac{13}{\sqrt{x^2 + 48} + \sqrt{x^2 + 35}} = 4x - 3$$

Thấy $x = 1$ là nghiệm của PT (4)

$$+) \ x > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 48} + \sqrt{x^2 + 35} > 13 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{13}{\sqrt{x^2 + 48} + \sqrt{x^2 + 35}} < 1 \\ 4x - 3 > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{PT vô nghiệm}$$

$$+) \ \frac{3}{4} \leq x < 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 48} + \sqrt{x^2 + 35} < 13 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{13}{\sqrt{x^2 + 48} + \sqrt{x^2 + 35}} > 1 \\ 4x - 3 < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{PT vô nghiệm}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$

e) Ta có:

$$|x| > 1 \text{ thì } x^4; x^6 > 1$$

$$|x| < 1 \text{ thì } x^4; x^6 < 1$$

$$+) \ \text{Xét } |x| > 1 \Rightarrow 5 - x^6 < 4; 3x^4 - 2 > 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{5 - x^6} - \sqrt[3]{3x^4 - 2}$$

□ PT (1) vô nghiệm

Xét $|x| < 1$ tương tự ta suy ra phúng trởnh vậ nghiệm

Thấy $x = 1$ hoặc $x = -1$ là nghiệm của PT (5)

Bài 44. Giải phương trình: $\sqrt{x-2} + \sqrt{y+2009} + \sqrt{z-2010} = \frac{1}{2}(x+y+z)$

Lời giải.

ĐK: $x \geq 2, y \geq -2009, z \geq 2010$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$x + y + z = 2\sqrt{x-2} + 2\sqrt{y+2009} + 2\sqrt{z-2010}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - 1)^2 + (\sqrt{y+2009} - 1)^2 + (\sqrt{z-2010} - 1)^2 = 0$$

Ta phải có:

$$\sqrt{x-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\sqrt{y+2009} - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2008$$

$$\sqrt{z-2010} - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 2011$$

Vậy $x = 3, y = -2008, z = 2011$

Bài 45. Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} = x^2 - 6x + 13$

Lời giải.

ĐK: $-1 \leq x \leq 7$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} = x^2 - 6x + 13 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 2) + (\sqrt{7-x} - 2) - (x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{(\sqrt{7-x}-2)(\sqrt{7-x}+2)}{\sqrt{7-x}+2} - (x-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{3-x}{\sqrt{7-x}+2} - (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} - \frac{1}{\sqrt{7-x}+2} + 3-x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} - \frac{1}{\sqrt{7-x}+2} + 3-x = 0 \end{cases} \quad (*) \quad (1)$$

Giải (*):

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{7-x}+2)} = x-3 \Leftrightarrow \frac{6-2x}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{7-x}+2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})} = x-3$$

$$\Leftrightarrow (3-x) \left(\frac{2}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{7-x}+2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x=3$$

$$(do \frac{2}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{7-x}+2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})} + 1 > 0) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

Câu 46. Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x+2010} = 2010$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + \sqrt{x+2010} = 2010$ (1) Điều kiện: $x \geq -2010$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} - x - 2010 + \sqrt{x+2010} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{x+2010} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2} = \sqrt{x+2010} - \frac{1}{2} & (2) \\ x + \frac{1}{2} = -\sqrt{x+2010} + \frac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

$$\text{Giải (2): (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (x+1)^2 = x+2010 \end{cases} \quad (4)$$

$$(4) \Leftrightarrow (x+1)^2 = x+2010 \Leftrightarrow x^2 + x - 2009 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 2009 = 8037$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{8037}}{2}; \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{8037}}{2} \quad (\text{loại})$$

$$\text{Giải (3): (3)} \Leftrightarrow x = -\sqrt{x+2010} \Leftrightarrow \begin{cases} -2010 \leq x \leq 0 \\ x^2 = x+2010 \end{cases} \quad (5)$$

$$(5) \Leftrightarrow x^2 - x - 2010 = 0. \Delta = 1 + 4 \cdot 2010 = 8041,$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{8041}}{2}; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{8041}}{2} \quad (\text{loại nghiệm } x_1)$$

$$\text{Vậy phương trình có 2 nghiệm: } x = \frac{-1 + \sqrt{8037}}{2}; \quad x = \frac{1 - \sqrt{8041}}{2}.$$

Câu 47. Giải phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x \neq 0 \text{ và } 2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ và } |x| < \sqrt{2} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt{2-x^2} > 0$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) ta có: } x + y = 2xy. \text{ Thay vào (1) Có: } xy = 1 \text{ hoặc } xy = -\frac{1}{2}$$

$$* \text{ Nếu } xy = 1 \text{ thì } x + y = 2. \text{ Giải ra, ta có: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$* \text{ Nếu } xy = -\frac{1}{2} \text{ thì } x + y = -1. \text{ Giải ra, ta có: } \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Đối chiếu đk } (*), \text{ phương trình đã cho có 2 nghiệm: } x = 1; \quad x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Câu 48. Tìm nghiệm dương của phương trình: $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}.$

Lời giải.

Đặt $\sqrt{\frac{4x+9}{28}} = y + \frac{1}{2}$, $y \geq -\frac{1}{2}$ ta có $\frac{4x+9}{28} = y^2 + y + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 7y^2 + 7y = x + \frac{1}{2}$.

Cùng với phương trình ban đầu ta có hệ:
$$\begin{cases} 7x^2 + 7x = y + \frac{1}{2} \\ 7y^2 + 7y = x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Trừ vế cho vế của hai phương trình ta thu được

$$7(x^2 - y^2) + 7(x - y) = y - x \Leftrightarrow (x - y)(7x + 7y + 8) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \text{ (vì } x > 0 \text{ và } y \geq -\frac{1}{2} \text{ nên } 7x + 7y + 8 > 0) \text{ hay } x = y.$$

Thay vào một phương trình trên ta được $7x^2 + 6x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-6 - \sqrt{50}}{14} \\ x = \frac{-6 + \sqrt{50}}{14} \end{cases}$. Đối chiếu

với điều kiện của x, y ta được nghiệm là $x = \frac{-6 + \sqrt{50}}{14}$.

Câu 49. Giải phương trình: $(\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x^2+11x+24} + 1) = 5$.

Lời giải.

ĐK: $x \geq -3$ (1)

Đặt $\sqrt{x+8} = a$; $\sqrt{x+3} = b$ ($a \geq 0$; $b \geq 0$) (2)

Ta có: $a^2 - b^2 = 5$; $\sqrt{x^2+11x+24} = \sqrt{(x+8)(x+3)} = ab$

Thay vào phương trình đã cho ta được:

$$(a - b)(ab + 1) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b)(1 - a)(1 - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 1 - a = 0 \\ 1 - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+8} = \sqrt{x+3} \text{ (vn)} \\ \sqrt{x+8} = 1 \\ \sqrt{x+3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = -2 \end{cases}$$

Đối chiếu với (1) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -2$.

Câu 50. Giải phương trình: $2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{5-x} = 2\sqrt{13}$.

Lời giải.

Điều kiện: $1 \leq x \leq 5$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có:

$$(2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{5-x})^2 \leq (2^2 + 3^2)(x-1 + 5-x) = 13.4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{5-x} \leq 2\sqrt{13}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $3\sqrt{x-1} = 2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow x = \frac{29}{13}$

Thay vào pt đã cho thử lại thì thỏa mãn..

Vậy pt có nghiệm $x = \frac{29}{13}$

Câu 51. Giải phương trình: $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -\frac{10}{3}$ (2)

$$(1) \Leftrightarrow (3x + 10 - 2\sqrt{3x+10} + 1) + (x^2 + 6x + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+10} - 1)^2 + (x + 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+10} - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 \text{ (thỏa mãn đk (2)).}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $x = -3$.

Câu 52. Giải phương trình: $2(x+1)\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})(2 - \sqrt{1-x^2})$.

Lời giải.

ĐKXD: $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{1-x}$ thì ta có $a^2 + b^2 = 2$.

Mặt khác VT = $2a^3$ nên phương trình trở thành

$$2a^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 = a^3 + b^3 \Leftrightarrow a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$$

Khi đó: $\sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x+1 = 1-x \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$.

Câu 53. Giải phương trình: $x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

Lời giải.

Cách 1. Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$2x^4 - 18x^3 + 32x^2 - 18x + 2 = 0.$$

Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho

$$x^2 \text{ ta được: } 2x^2 - 18x + 32 - \frac{18}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2}) - 9(x + \frac{1}{x}) + 16 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ (ĐK: $|t| \geq 2$). Khi đó: $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Thế vào phương trình (1) ta được: $t^2 - 9t + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2.(\text{nhan}) \\ t = 7.(\text{loai}) \end{cases}$

Với $t = 2$ suy ra $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thế lại ta thấy $x = 1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x = 1$.

Cách 2: Phương trình đã cho tương đương:

$$(x^2 - x + 1) - 2x = \frac{-\sqrt{3}}{3} \sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}.$$

Đặt $x^2 + x + 1 = a$ và $x^2 - x + 1 = b$ ($a, b > 0$). Khi đó, $a - b = 2x$ và phương trình đã cho trở thành: $2a - b = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{ab}$. (2)

Do VT ≤ 0 nên $b \geq 2a$. Khi đó (2) tương đương với:

$$(2a - b)^2 = \frac{ab}{3} \Leftrightarrow 12a^2 - 13ab + 3b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4a - 3b)(3a - b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{3}a.(\text{loai}) \\ b = 3a.(\text{nhan}) \end{cases}$$

Với $b = 3a$ thế vào $2a - b = 2x$ ta được $a = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 54. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1-2x}{x}} = \frac{3x+x^2}{x^2+1}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\frac{1-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{2}]$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1-2x}{x}} &= \frac{3x+x^2}{x^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-2x}{x}} - 1 = \frac{3x+x^2}{x^2+1} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1-2x}{x} - 1}{\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1} &= \frac{3x-1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1\right)} = \frac{3x-1}{x^2+1} \\ \Leftrightarrow (1-3x)\left(\frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1\right)} + \frac{1}{1+x^2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}. \text{ Vì } \frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1\right)} + \frac{1}{1+x^2} > 0, \forall x \in (0; \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

Câu 55. Giải phương trình: $x^2 - \sqrt{x^3 + x} = 6x - 1$.

Lời giải.

Với $x \geq 0$, đặt $t = \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương với $t^2 - \sqrt{x}t - 6x = 0$.

Do $x = 0$ không là nghiệm của PT chia hai vế PT cho $x \neq 0$ ta được:

$$\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{t}{\sqrt{x}} - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{\sqrt{x}} = 3 \text{ (thỏa mãn } t, x \geq 0) \text{ hoặc } \frac{t}{\sqrt{x}} = -2 \text{ (không thỏa mãn } t, x \geq 0).$$

$$\text{Với } \frac{t}{\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 3\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 9x \Leftrightarrow x^2 - 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}$$

Kiểm tra lại ta thấy cả 2 nghiệm $x = \frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}$ đều thỏa mãn.

$$\text{Vậy nghiệm của PT là } x = \frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}$$

Bài 56. Giải phương trình $x^2(x^2 + 2) = 4 - x\sqrt{2x^2 + 4}$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = x\sqrt{2x^2 + 4} \Rightarrow t^2 = 2(x^4 + 2x^2) \Rightarrow x^2(x^2 + 2) = \frac{t^2}{2}$$

$$\text{ta được phương trình } \frac{t^2}{2} = 4 - t \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -4 \text{ ta có } x\sqrt{2x^2 + 4} = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2(x^4 + 2x^2) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4 + 2x^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$$

$$\text{Với } t=2 \text{ ta có } x\sqrt{2x^2+4}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2(x^4+2x^2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4+2x^2-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = \sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{3}-1}. \text{ Kết luận nghiệm của phương trình.}$$

Bài 57. Giải phương trình: $\sqrt{(1+x^2)^3} - 4x^3 = 1 - 3x^4$

Lời giải.

$$\sqrt{(1+x^2)^3} - 4x^3 = 1 - 3x^4 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } 4x^3 + 1 - 3x^4 = -3x^4 + 4x^3 + x^2 - x^2 + 1 = 1 + x^2 - x^2(3x^2 - 4x + 1) \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(1+x^2)^3} - (1+x^2) = -x^2(3x^2 - 4x + 1) \quad (3)$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt{1+x^2}, \text{ với } y \geq 1. \text{ Suy ra } x^2 = y^2 - 1$$

$$\text{Thay vào (3): } y^3 - y^2 = (1 - y^2)(3x^2 - 4x + 1)$$

$$\Leftrightarrow y^2(y-1) - (1-y^2)(3x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)[y^2 + (y+1)(3x^2 - 4x + 1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ y+(y+1)(3x^2 - 4x + 1)=0 \end{cases}$$

* Với $y = 1$ thì $x = 0$ thỏa mãn phương trình.

$$\text{* Với } y \neq 1 \text{ và } y \geq 1, \text{ ta có: } y^2 + (y+1)(3x^2 - 4x + 1) = 0 \quad (4)$$

$$\text{Vì } 3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3} \text{ và } y > 1 \text{ thay vào vế trái của (4)}$$

$$y^2 - (y+1)\frac{1}{3} = \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{36} > \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{36} = \frac{1}{3} \text{ lớn hơn.}$$

Do đó (4) vô nghiệm

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$

Bài 58. Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1$ (*).

Ta có:

$$x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

Đặt $x + \sqrt{x-1} = y$ (Điều kiện: $y \geq 1$ (**)), phương trình trở thành $y^2 - 2y - 3 = 0$.

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

+ Với $y = -1$ không thỏa mãn điều kiện (**).

+ Với $y = 3$ ta có phương trình:

$$x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 = 9-6x+x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Bài 59. Giải phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} = 1$.

Lời giải.

ĐK: $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ và $x \neq 0$

Đặt $y = \sqrt{3-x^2}$, ($y > 0$)

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = xy \\ (x+y)^2 - 2xy = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = xy \\ (x+y)^2 - 2(x+y) - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 3 \end{cases} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ (thoả mãn)} \\ \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

Bài 60. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

$$13x + 2(3x+2)\sqrt{x+3} + 42 = 0$$

Lời giải.

Điều kiện : $x \geq -3$ (*).

Đặt $t = \sqrt{x+3}$, $t \geq 0$, suy ra $x = t^2 - 3$

Phương trình trở thành: $6t^3 + 13t^2 - 14t + 3 = 0$

Giải ra ta được: $t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{1}{3}$; $t = -3$ (loại).

Với $t = \frac{1}{2}$, ta có: $\sqrt{x+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{4}$;

Với $t = \frac{1}{3}$, ta có: $\sqrt{x+3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{26}{9}$.

Cả hai nghiệm đều thỏa điều kiện (*).

Vậy tập nghiệm phương trình đã cho là: $S = \left\{ -\frac{11}{4}; -\frac{26}{9} \right\}$

Câu 61. Giải phương trình: $2\sqrt[4]{\frac{x^2}{3}} + 4 = 1 + \sqrt{\frac{3x}{2}}$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0$

Ta có $4\sqrt{\frac{x^2}{3} + 4} = 1 + \frac{3x}{2} + \sqrt{6x}$.

Do $\sqrt{6x} \leq \frac{x+6}{2}$, suy ra $4\sqrt{\frac{x^2}{3} + 4} \leq 2x + 4$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 48 \leq 3x^2 + 12x + 12$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

Thử lại $x = 6$ vào thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm $x = 6$.

Câu 62. Giải phương trình $4\sqrt{x^2 + 3x} + 2\sqrt{2x-1} = 7x + 3$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$

Ta có : $4\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{2x-1}=7x+3 \Leftrightarrow 4\sqrt{x(x+3)}+2\sqrt{2x-1}=7x+3$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$4x + (x+3) \geq 2\sqrt{4x(x+3)} = 4\sqrt{x(x+3)}$$

$$(2x-1)+1 \geq 2\sqrt{2x-1}$$

Suy ra $7x+3 \geq 4\sqrt{x(x+3)} + 2\sqrt{2x-1}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 2\sqrt{x} = \sqrt{x+3} \\ \sqrt{2x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$

Câu 63. Giải phương trình: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1$ (*).

Ta có: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x) \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$

Đặt $x + \sqrt{x-1} = y$ (Điều kiện: $y \geq 1$ (**)), phương trình trở thành $y^2 - 2y - 3 = 0$.

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

+ Với $y = -1$ không thỏa mãn điều kiện (**).

+ Với $y = 3$ ta có phương trình:

$$x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x-1 = 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x=2 \Leftrightarrow x= \\ x=5 \end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện (*). Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Câu 64. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-6x-6} = 3\sqrt{(2-x)^5} + (7x-19)\sqrt{2-x}$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} 3x^2-6x-6 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1-\sqrt{3}$$

Với $x \leq 1-\sqrt{3}$, phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2-6x-6} &= 3(2-x)^2\sqrt{2-x} + (7x-19)\sqrt{2-x} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-6x-6} &= \sqrt{2-x}(3x^2-5x-7) \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-6x-6} - \sqrt{2-x} = \sqrt{2-x}(3x^2-5x-8) \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2-5x-8}{\sqrt{3x^2-6x-6} + \sqrt{2-x}} &= \sqrt{2-x}(3x^2-5x-8) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-5x-8=0 \\ 1 = \sqrt{2-x}(\sqrt{3x^2-6x-6} + \sqrt{2-x}) \end{cases} \end{aligned}$$

(do $\sqrt{3x^2-6x-6} + \sqrt{2-x} > 0, \forall x \leq 1-\sqrt{3}$).

$$+) \ 3x^2-5x-8=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ (thỏa mãn đk) hoặc } x=\frac{8}{3} \text{ (không thỏa mãn đk)}$$

$$+) \ 1 = \sqrt{2-x}(\sqrt{3x^2-6x-6} + \sqrt{2-x}) \Leftrightarrow 1 = 2-x + \sqrt{3x^2-6x-6}.\sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{3x^2-6x-6}.\sqrt{2-x} \quad (*)$$

Vì $x \leq 1-\sqrt{3}$ nên $x-1 < 0 \leq \sqrt{3x^2-6x-6}.\sqrt{2-x}$ do đó (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$

Câu 65. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{x^2-2\sqrt{3}.x+3} = 0$$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{x^2-2\sqrt{3}.x+3} = 0$$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương: } \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(x-\sqrt{3})^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

$$\Leftrightarrow |x-\sqrt{3}| = |1-\sqrt{3}|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{3} = \sqrt{3}-1 \\ x-\sqrt{3} = 1-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3}-1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương là: $x = 1$

Câu 66. Giải phương trình: $x^2 + 4x - 7 = (x+4)\sqrt{x^2 - 7}$

Lời giải.

Giải phương trình: $x^2 + 4x - 7 = (x+4)\sqrt{x^2 - 7}$. Điều kiện $\begin{cases} x \geq \sqrt{7} \\ x \leq -\sqrt{7} \end{cases}$

$$x^2 + 4x - 7 = (x+4)\sqrt{x^2 - 7} \Leftrightarrow (x^2 - 7) + 4(x+4) - 16 = (x+4)\sqrt{x^2 - 7}$$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 7} = a \geq 0 \\ x + 4 = b \end{cases}$, ta có phương trình

$$a^2 + 4b - 16 = ab \Leftrightarrow a^2 - 16 + 4b - ab = 0 \Leftrightarrow (a+4)(a-4) - b(a-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-4)(a+4-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = b - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 7} = 4 \\ \sqrt{x^2 - 7} = x + 4 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 7} = 4 \\ \sqrt{x^2 - 7} = x \end{cases} \Rightarrow x \pm \sqrt{23}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x \pm \sqrt{23}$

Câu 67. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 1} + 6 = 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x-1}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \geq 1$. Khi đó ta có

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 1} + 6 = 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+2)} + \sqrt{(x-1)(x+1)} + 6 = 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+2)} + \sqrt{(x-1)(x+1)} - 3\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+2} - 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} - 3) = 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} - 3)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}-3)=0$$

$$*) \sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}-3=0 \Leftrightarrow x+2+x-1+2\sqrt{(x+2)(x-1)}=9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2}=4-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2+x-2=x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

$$*) \sqrt{x+1}=2 \Leftrightarrow x+1=4 \Leftrightarrow x=3.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{2, 3\}$.

Bài 68. Giải phương trình : $\sqrt{(x^2+2x)^2+4(x+1)^2}-\sqrt{x^2+(x+1)^2+(x^2+x)^2}=2017$

Lời giải.

ĐKXD $\forall x \in R$

$$\sqrt{(x^2+2x)^2+4(x+1)^2}-\sqrt{x^2+(x+1)^2+(x^2+x)^2}=2017$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^4+2x^3+4x^2+4x^2+8x+8}-\sqrt{x^2+x^2+2x+1+x^4+2x^3+x^2}=2017$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+2x+2)^2}-\sqrt{(x^2+x+1)^2}=2017 \Leftrightarrow x^2+2x+2-x^2-x-1=2017 \Leftrightarrow x=2016$$

Bài 69. Giải hệ phương trình: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} |x-1|+2\sqrt{y+2}=5 \\ 3\sqrt{y+2}-|x-1|=5 \end{cases}$$

Lời giải.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} |x-1|+2\sqrt{y+2}=5 \\ 3\sqrt{y+2}-|x-1|=5 \end{cases}$$
 đặt $A = |x-1| \geq 0; B = \sqrt{y+2} \geq 0$

Ta có
$$\begin{cases} A+2B=5 \\ 3B-A=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+2B=5 \\ -A+3B=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+2B=5 \\ 5B=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases} \text{ Thỏa mãn}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|=1 \\ \sqrt{y+2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|=1 \\ y+2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases} \\ y=2 \end{cases}$$

vậy $(x;y) = \{(2;2);(0;2)\}$ là nghiệm của hệ

Bài 70. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy^2+2y^2-2=x^2+3x \\ x+y=3\sqrt{y-1} \end{cases}$$

Lời giải.

ĐKXD: $y \geq 1$

Từ phương trình (1) của hệ ta có

$$\Rightarrow y^2(x+2) = (x+1)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(y^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Xét $x = -2$ thay vào (2) được $y - 2 = 3\sqrt{y-1} \Leftrightarrow y^2 - 13y + 13 = 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{117}}{2} \text{ (với } y \geq 2)$$

Xét $x = y^2 - 1$ thay vào (2) được $y^2 + y - 1 = 3\sqrt{y-1}$

Đặt $\sqrt{y-1} = a \geq 0 \Rightarrow y = a^2 + 1$

$$y^2 + y - 1 = 3\sqrt{y-1}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 1)^2 + a^2 = 3a$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 3a^2 - 3a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 3\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

Đối chiếu ĐKXD ta có $\begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{13 + \sqrt{117}}{2} \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho

Bài 71. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = xy + x + y \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - y + 1 \end{cases}$$

Lời giải.

ĐK: $x \geq 1, y \geq 0$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = x + y \Leftrightarrow (x+y)(x-2y) = x+y$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+y)}_{\geq 1+0=1>0} (x-2y-1) = 0 \Leftrightarrow x-2y-1 = 0$$

Do đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ (2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2(2y+1) - y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ (y+1)\sqrt{2y} = 2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ (y+1)(\sqrt{2y} - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{2y} = 3 \text{ (Do } y+1 > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{2} \\ x = 10 \end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(10; \frac{9}{2}\right)$

Bài 72. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(1+x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2(1+y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2(1+x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2(1+y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases} \quad (I)$$

ĐK: $x \geq 0, y \geq 0$

Đặt $a = x\sqrt{y}; b = y\sqrt{x}$, điều kiện $a \geq 0, b \geq 0$. Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} 2(1+a)^2 = 9b(1) \\ 2(1+b)^2 = 9a(2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$2(1+a)^2 - 2(1+b)^2 = 9(b-a)$$

$$\Leftrightarrow 2(a-b)(a+b+2) + 9(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(\underbrace{2a+2b+13}_{>0 \forall a, b > 0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

Thay $a = b$ vào (1) ta có

$$2(1+a)^2 = 9a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = 2(TM) \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = 2 \\ y\sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{4} \\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(TM) \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = \frac{1}{2} \\ y\sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}); (\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; \sqrt[3]{\frac{1}{4}})$

Bài 72. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt{x+2y} = 4-x-2y & (1) \\ \sqrt[3]{2x+6} + \sqrt{2y} = 2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+2y \geq 0 \\ 2y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Đặt $\sqrt{x+2y} = t \geq 0$, thay vào phương trình (1) ta có:

$$3t = 4 - t^2 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$$

$1 + 3 - 4 = 0$, nên phương trình có hai nghiệm $t = 1$ và $t = -4$ (loại)

Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{x+2y} = 1 \Rightarrow x+2y=1 \Rightarrow x=1-2y$ thay vào phương trình (2) ta có

$$\sqrt[3]{2(1-2y)+6} + \sqrt{2y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-4y+8} + \sqrt{2y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-4y+8} = 2 - \sqrt{2y}$$

$$\Leftrightarrow -4+8 = 8 - 12\sqrt{2y} + 12y - 2y\sqrt{2y}$$

$$\Leftrightarrow 16y - 12\sqrt{2y} - 2y\sqrt{2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8y - 6\sqrt{2y} - y\sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}(-\sqrt{2y} + 8\sqrt{y} - 6\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{2})(\sqrt{2}\sqrt{y} - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1(TM(*)) \\ \sqrt{y} = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -3(TM(*)) \\ \sqrt{y} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = 18 \Rightarrow x = -35(TM(*)) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm $(x;y)=(1;0);(-3;2);(-35;18)$

Bài 73. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (y-x)(y-x-4) = x^2 - 4x & (1) \\ x(y-4) + 4\sqrt[3]{x^2-y} = 6 & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

Biến đổi phương trình (1):

$$(1) \Leftrightarrow (y-x)(y-4) - x(y-x) = x(x-4)$$

$$\Leftrightarrow (y-x)(y-4) = x(x-4+y-x)$$

$$\Leftrightarrow (y-x)(y-4) = x(y-4)$$

$$\Leftrightarrow (y-4)(y-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = 2x \end{cases}$$

• Với $y = 4$, thay vào (2) được:

$$(2) \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{x^2-4} = 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2\sqrt[3]{x^2-2x} - 3 = 0$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2-2x}$, phương trình trở thành:

$$t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t + 3 = 0(3) \end{cases}$$

Phương trình (3) có $\Delta = 1 - 4.3 = -11 < 0$ nên vô nghiệm.

Do đó

$$t = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 - 2\sqrt{2}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm

$$\left(\frac{\sqrt{118}}{4}; 4\right), \left(-\frac{\sqrt{118}}{4}; 4\right), (1 + \sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}; 2 - 2\sqrt{2})$$

Bài 74. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+2}(x-y+3) = \sqrt{y} \\ x^2 + (x+3)(2x-y+5) = x+16 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} \sqrt{x+2}(x-y+3) = \sqrt{y} & (1) \\ x^2 + (x+3)(2x-y+5) = x+16 & (2) \end{cases} \quad \text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Với $x \geq -2; y \geq 0$, phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}(x-y+2) + \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}[(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{y})^2] + \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{y})[\underbrace{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} + \sqrt{y}) + 1}_{>0 \forall x \geq -2; y \geq 0}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2 = y$$

Thay $y = x+2$ vào phương trình (2) ta được phương trình:

$$x^2 + (x+3)(2x - (x+2) + 5) = x+16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (x+3)^2 = x+16$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(TM) \\ x = \frac{-7}{2}(L) \end{cases}$$

+) Với $x=1 \Rightarrow y=3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;3)$

Bài 75. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y-2x+1} - \sqrt{3-3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x+y+5} - \sqrt{x+2y-2} \end{cases}$$

Lời giải.

ĐK: $y-2x+1 \geq 0, 4x+y+5 \geq 0, x+2y-2 \geq 0, x \leq 1$

$$\text{TH 1. } \begin{cases} y-2x+1=0 \\ 3-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ -1=\sqrt{10}-1 \end{cases} \text{ (Không TM hệ)}$$

TH 2. $x \neq 1, y \neq 1$ Đưa pt thứ nhất về dạng tích ta được

$$(x+y-2)(2x-y-1) = \frac{x+y-2}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}}$$

$$(x+y-2) \left[\frac{1}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}} + y-2x+1 \right] = 0 \text{ . Do } y-2x+1 \geq 0$$

$$\text{nên } \frac{1}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}} + y-2x+1 > 0 \Rightarrow x+y-2=0$$

Thay $y = 2-x$ vào pt thứ 2 ta được $x^2 + x - 3 = \sqrt{3x+7} - \sqrt{2-x}$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = \sqrt{3x+7} - 1 + 2 - \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = \frac{3x+6}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{2+x}{2+\sqrt{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1-x \right] = 0$$

$$\text{Do } x \leq 1 \text{ nên } \frac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1-x > 0$$

$$\text{Vậy } x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=4 \text{ (TMĐK)}$$

Bài 76. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 \quad (1) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{x^2+3x}) = 3 \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 \quad (1) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{x^2+3x}) = 3 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x^2+3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y-x}{y\sqrt{x}} = (x-y)(x+2y) \Leftrightarrow (x-y) \left(x+2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow x=y \text{ do}$$

$$x+2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} > 0, \forall x, y > 0$$

Thay $y = x$ vào phương trình (2) ta được:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x^2+3x}) &= 3 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2+3x} = \frac{3}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2+3x} &= \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x+3} - \sqrt{x} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 1 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(L) \\ x = 1(tm) \end{cases} \Rightarrow x = y = 1 \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1;1)

Bài 77. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + y^2 = 3 \\ 3\sqrt{x} - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Lời giải.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + y^2 = 3 \\ 3\sqrt{x} - 2y^2 = 1 \end{cases}$$
 Điều kiện : $x, y \geq 0$

Đặt $\sqrt{x} = a, y^2 = b (a, b \geq 0)$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 3a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 6 \\ 3a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a = 7 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} (TMDK) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Bài 78. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 2 \end{cases}$$

Gợi ý.

Từ hệ suy ra
$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}} \quad (2)$$

Nếu $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{y}}$ thì $\sqrt{2 - \frac{1}{y}} > \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$ nên (2) xảy ra khi và chỉ khi $x=y$

thế vào hệ ta giải được $x=1, y=1$

Bài 79. Giải phương trình và hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+9} + y = 9 \\ \sqrt{y^2+9} + x = 9 \end{cases}$$

Lời giải.

Với điều kiện $x, y < 9$, hệ đã cho là:
$$\begin{cases} x^2 + 9 = (9 - y)^2 & (1) \\ y^2 + 9 = (9 - x)^2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được: $(x - y)(x + y - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 9 - x \end{cases}$.

+ Với $x = y$, thế vào (1) ta được: $18x - 72 = 0 \Leftrightarrow x = y = 4$.

+ Với $y = 9 - x$, thế vào (2) thì phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $(x; y) = (4; 4)$.

Bài 80. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -1, y \geq -1, xy \geq 0$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ x + y + 2 + 2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ x + y + 2\sqrt{x + y + xy + 1} = 14 \end{cases}$$

Đặt $x + y = a, \sqrt{xy} = b$. $a \geq -2, b \geq 0, a^2 \geq 4b^2$ ta được hệ pt

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ a + 2\sqrt{a + b^2 + 1} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + b \\ 2\sqrt{b^2 + b + 4} = 11 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + b \\ 3b^2 + 26b - 105 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn đk)}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(2; 2); (-6; -6)\}$

Bài 81. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x + y > 0$. (1) $\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x + y) + 8xy = 16(x + y)$

$$\Leftrightarrow [(x+y)^2 - 2xy](x+y) + 8xy = 16(x+y)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)[(x+y)^2 - 16] - 2xy(x+y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)[(x+y)(x+y+4) - 2xy] = 0$$

TH 1. $x+y-4=0$ thế vào (2) ta được $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = 7 \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$

TH 2. $(x+y)(x+y+4) - 2xy = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4(x+y) = 0$ vô nghiệm do ĐK

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = \{(-3; 7); (2; 2)\}$

Bài 82. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} \\ (x+1)(y + \sqrt{xy} + x - x^2) = 4 \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện : $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2) \geq 0 \end{cases}$

PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} - y + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(y + \sqrt{xy} - 2)}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} + \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{y + \sqrt{xy} - 2}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) = 0 \quad (3)$$

Từ PT (2) ta có $y + \sqrt{xy} = x^2 - x + \frac{4}{x+1} = (x-1)^2 + \left(x+1 + \frac{4}{x+1}\right) - 2 \geq 2$

$$\Rightarrow \frac{y + \sqrt{xy} - 2}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0$$

PT (3) $\Leftrightarrow x = y$, thay vào PT (2) ta được : $x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $x = 1$, $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$

KL: Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là : $(1; 1); \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right)$

Bài 83. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-2} - y\sqrt{y} = \sqrt{y-2} - x\sqrt{x} & (1) \\ 3x^2 - xy - 7x - y^2 + y - 9 = 0 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Lời giải.

ĐK: $x \geq 2, y \geq 2$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - \sqrt{y-2}) + (x\sqrt{x} - y\sqrt{y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x-2} + \sqrt{y-2}} + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{y-2}} + x + \sqrt{xy} + y \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(Do $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{y-2}} + x + \sqrt{xy} + y > 0$ với mọi $x \geq 2, y \geq 2$).

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được: $3x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (TMĐK: } x \geq 2 \text{)} \text{ hoặc } x = -1 \text{ (loại)}$$

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 3)$.

Bài 84. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{y-2} = 5 & (1) \\ \sqrt{y+3} + \sqrt{x-2} = 5 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Lời giải.

ĐK: $x \geq 2, y \geq 2$. Trừ theo vế các PT (1) và (2) ta được:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-2} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}} = \frac{5}{\sqrt{y+3} + \sqrt{y-2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{y+3} + \sqrt{y-2}$$

- Nếu $x > y \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} > \sqrt{y+3} + \sqrt{y-2}$

- Nếu $y > x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} < \sqrt{y+3} + \sqrt{y-2}$

Do đó: $x = y$. Thay vào (1) ta được: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 5 - \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x = 6 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x, y) = (6, 6)$.

Bài 85. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - x = x^2 y - y \\ \sqrt{2(x^4 + 1)} - 5\sqrt{|x|} + \sqrt{y} + 2 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện : $y \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

+/Nếu $x = \pm 1$ thay vào phương trình (2) ta có : $\sqrt{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$.

+/Nếu $x = y \geq 0$: Khi đó (2) $\Leftrightarrow \sqrt{2(x^4 + 1)} - 4\sqrt{x} + 2 = 0$ (3)

do $2(x^4 + 1) \geq 2.2\sqrt{x^4.1} = 4x^2 \Rightarrow \sqrt{2(x^4 + 1)} \geq 2|x| = 2x$.

nên VT(3) $\geq 2(x - 2\sqrt{x} + 1) = 2(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$.

Do đó Pt (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ \sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 86. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32 - x} = y^2 - 3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32 - x} = 24 - 6y \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $0 \leq x \leq 32$

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{32 - x}) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32 - x}) = y^2 - 6y + 21 \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{32 - x} = y^2 - 3 \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức BunhiaCốp xki ta có

$$(\sqrt{x} + \sqrt{32 - x})^2 \leq (1^2 + 1^2)(x + 32 - x) = 64 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{32 - x} \leq 8$$

$$(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32 - x})^4 \leq [2(\sqrt{x} + \sqrt{32 - x})]^2 \leq 256 \Rightarrow \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32 - x} \leq 4$$

$$\text{Suy ra } (\sqrt{x} + \sqrt{32 - x}) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32 - x}) \leq 12$$

$$\text{Mặt khác } y^2 - 6y + 21 = (y - 3)^2 + 12 \geq 12$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 16$ và $y = 3$ (t/m)

Vậy hệ đã có nghiệm là $(x;y) = (16;3)$

Bài 87. Giải hệ :
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y & (1) \\ \sqrt{x^2-2y-1} + \sqrt[3]{x^3+x-y-14} = y-2 & (2) \end{cases}$$

Gợi ý .

Từ (1) VT $\geq$ VP, dấu bằng khi $x = y$ thay vào PT (2) ta có :

$$\sqrt{x^2-2x-1} + \sqrt[3]{x^3-14} = x-2$$

Ta có :
$$\begin{cases} x^2-2x-1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{x^2-14} \leq x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-1 \geq 0 \\ x^2-2x-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \pm \sqrt{2}$$

Bài 88. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0, x+y \neq 0$.

Dễ thấy $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn hệ pt. Vậy $x > 0, y > 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = \frac{2}{\sqrt{3x}} \\ \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{2}{\sqrt{3x}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ \frac{2}{x+y} = \frac{2}{\sqrt{3x}} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} = \frac{1}{x+y} \end{cases} \quad (1)$

Nhân theo vế hai pt trong hệ ta được
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \right) = \frac{1}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3x} - \frac{8}{7y} = \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow 7y^2 - 38xy - 24x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6x \\ y = -\frac{4}{7}x \end{cases}$$

- TH 1. $y = 6x$ thế vào pt (1) ta được

$$\frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2}{\sqrt{21x}} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{11+4\sqrt{7}}{21} \Rightarrow y = \frac{22+8\sqrt{7}}{7}$$

- TH 2. $y = -\frac{4}{7}x$ không xảy ra do $x > 0, y > 0$.

- Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{11 + 4\sqrt{7}}{21}; \frac{22 + 8\sqrt{7}}{7} \right)$.

CHỦ ĐỀ 5. PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ VÀ HỆ THỨC VI-ET

Bài 1. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$, (với m là tham số)

- Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.
- Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu.
- Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm khác dấu.
- Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm dương
- Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm âm.

Lời giải.

a) Để phương trình đã cho có nghiệm thì:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow 6m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}.$$

Vậy khi $m \geq \frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu khi:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) > 0 \\ m^2 - 4m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m < 1 \cup m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$$

Vậy khi $m > 3$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

c) Phương trình có hai nghiệm khác dấu khi và chỉ khi: $P < 0$

$$P = x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Kết hợp với điều kiện: $m \geq \frac{1}{3}$

Ta được điều kiện phương trình có hai nghiệm trái dấu là: $1 < m < 3$.

d) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm dương là:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m > -1 \\ m < 1 \cup m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < m < 1 \\ m > 3 \end{cases}$$

e) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm âm là:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m < -1 \\ m < 1 \cup m > 3 \end{cases}$$

Vậy không tồn tại giá trị của m.

Bài 2. Cho phương trình: $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình trên khi $m = 6$.

b) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1 - x_2| = 3$.

Lời giải.

a) Với $m = 6$, ta có phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4.6 = 1$. Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3; x_2 = 2$.

b) Ta có: $\Delta = 25 - 4.m$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{4}$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 5$ (1); $x_1.x_2 = m$ (2).

Mặt khác theo bài ra thì $|x_1 - x_2| = 3$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra $x_1 = 4; x_2 = 1$ hoặc $x_1 = 1; x_2 = 4$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra: $m = 4$. Thử lại thì thỏa mãn.

Bài 3. Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x - m - 3 = 0$ (1)

1) Giải phương trình với $m = -3$

2) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Lời giải.

1) Với $m = -3$ ta có phương trình: $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$

2) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m+3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 4 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ đúng } \forall m$$

Chúng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\forall m$

Theo hệ thức Vi ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = -m-3 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 + 2(m+3) = 10$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 6m + 10 = 10 \Leftrightarrow 2m(2m-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Bài 4. Cho phương trình ẩn x : $x^2 - 2mx + 4 = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho khi $m = 3$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2.$$

Lời giải.

a) Với $m = 3$ ta có phương trình: $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Giải ra ta được hai nghiệm: $x_1 = 3 + \sqrt{5}; x_2 = 3 - \sqrt{5}$.

b) Ta có: $\Delta' = m^2 - 4$. Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases} (*)$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = 4$. Suy ra: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$
 $\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 8 + 4m = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -2 \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy chỉ có nghiệm $m_2 = -2$ thỏa mãn.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Bài 5. Cho phương trình: $x^2 - 2x + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = -3$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$.

Lời giải.

a) Khi $m = -3$, ta có phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$

Vì $a - b + c = 1 - (-2) + (-3) = 0$ nên $x_1 = -1; x_2 = 3$

b) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Khi đó theo hệ thức Viét, ta có: $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = m$ (1)

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = 1 \quad (2)$$

Từ (1), (2), ta được: $4 - 2m = m^2 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 4 = 0$

$\Delta' = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{5}$ nên $m = -1 + \sqrt{5}$ (loại); $m = -1 - \sqrt{5}$ (T/m vì $m \leq 1$).

Vậy giá trị m cần tìm là: $m = -1 - \sqrt{5}$

Bài 6. Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + m + 1 = 0$. (1)

a) Giải phương trình khi $m = -1$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$.

Lời giải.

a) Với $m = -1$ ta được phương trình:

$$x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -4$$

b) Phương trình (1) có nghiệm khi :

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 - (m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m \geq 0 \Leftrightarrow m(m - 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq 3; m \leq 0. \quad (1)$$

Khi đó theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = 2(m - 1)$ và $x_1 x_2 = m + 1$ (2)

$$\text{Ta có: } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}.$$

$$\text{nên } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 6x_1 x_2 \quad (3)$$

Từ (2), (3) ta được: $4(m - 1)^2 = 6(m + 1) \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 6m + 6$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 7m - 1 = 0 \text{ do } \Delta_m = 49 + 8 = 57 \text{ nên } m = \frac{7 - \sqrt{57}}{4} < 0; m = \frac{7 + \sqrt{57}}{4} > 0.$$

Đôi chiếu đk (1) thì cả 2 nghiệm đều thỏa mãn.

Bài 7. Cho phương trình: $x^2 - 6x - m = 0$ (Với m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 - x_2^2 = 12$

Lời giải.

Để phương trình có nghiệm $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -9$ (*)

Mặt khác ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \\ x_1^2 - x_2^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \\ x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -8 \text{ TM ĐK (*)}$$

Bài 8. Cho phương trình $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 2m + 4 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{15m}$.

Lời giải. PT đã cho có hai nghiệm phân biệt có điều kiện:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - (m^2 - 2m + 4) > 0 \Leftrightarrow m < 0 \quad (*)$$

Với $m < 0$ theo Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 2m + 4 \end{cases}$$

Ta có
$$\frac{2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{15m} \Leftrightarrow \frac{2}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2} - \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{15m} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m^2 - 6m + 4} - \frac{1}{m^2 - 2m + 4} = \frac{1}{15m} \Leftrightarrow \frac{1}{m + \frac{4}{m} - 6} - \frac{1}{m + \frac{4}{m} - 2} = \frac{1}{15}$$

Đặt $m + \frac{4}{m} = t$ do $m < 0 \Rightarrow t < 0$

Ta cos (1) trở thành
$$\frac{1}{t-6} - \frac{1}{t-2} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 12 \end{cases} \Rightarrow t = -4 \quad (\text{do } t < 0)$$

Với $t = -4$ ta có $m + \frac{4}{m} = -4 \Leftrightarrow m = -2$ thỏa mãn (*)

Bài 9. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 26m$

Lời giải.

$$x^2 - 2mx + m - 4 = 0$$

Ta có:
$$\Delta' = m^2 - m + 4 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \quad \forall m$$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

Theo định lý Viet: $x_1 + x_2 = 2m; \quad x_1 x_2 = m - 4$

$$\begin{aligned}x_1^3 + x_2^3 &= 26m \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 26m \\ \Leftrightarrow 8m^3 - 6m(m-4) &= 26m \Leftrightarrow m(8m^2 - 6m - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow m &= 0; m = 1; m = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Bài 10. Cho phương trình $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số).

1. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1). Tìm m để $|x_1 - x_2| = 17$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \Delta &= (4m+1)^2 - 8(m-4) \\ &= 16m^2 + 8m + 1 - 8m + 32 = 16m^2 + 33\end{aligned}$$

Vì $\Delta = 16m^2 + 33 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

2) Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với $\forall m$ nên

$$\text{theo định lý Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -(4m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2(m-4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Theo ycbt: } |x_1 - x_2| &= 17 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 289 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 289 \\ \Leftrightarrow (4m+1)^2 - 8(m-4) &= 289 \Leftrightarrow 16m^2 + 33 = 289 \Leftrightarrow 16m^2 = 256 \Leftrightarrow m = \pm 4\end{aligned}$$

Vậy $m = \pm 4$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, trong đó m là tham số, x là ẩn số.

- a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm.
- b) Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm là x_1, x_2 . Chứng minh rằng

$$|x_1 + x_2 + x_1x_2| \leq \frac{9}{8}.$$

Lời giải.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm.

$$\text{PT có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - (2m^2 - 3m + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m(m-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-1 < 0 \\ m < 0 \\ m-1 > 0 \\ m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$$

b) Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 3m + 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow P = |x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2| = |2m^2 - m - 1| = 2 \left| \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \right|$$

$$\text{Có } 0 \leq m \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{9}{16}$$

$$\text{Suy ra } P = 2 \left(\frac{9}{16} - \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 \right) \leq \frac{9}{8}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } m = \frac{1}{4}.$$

Bài 12. Cho phương trình $x^2 + ax + b + 1 = 0$ với a, b là tham số.

1) Giải phương trình khi $a = 3$ và $b = -5$.

2) Tìm giá trị của a, b để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{thoả mãn điều kiện: } \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases}$$

Lời giải.

1) Khi $a = 3$ và $b = -5$ ta có phương trình: $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Do $a + b + c = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -4$.

2) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4(b+1) > 0$ (*)

$$\text{Khi đó theo định lý Vi-et, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b + 1 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Bài toán yêu cầu } \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ (x_1 - x_2)^3 + 3x_1 x_2 (x_1 - x_2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases} \quad (2).$$

Từ hệ (2) ta có: $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1 x_2 = 3^2 + 4(-2) = 1$, kết hợp với (1) được :

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = -3 \\ a = -1, b = -3 \end{cases}$$

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện (*) nên chúng là các giá trị cần tìm.

Bài 13. Cho phương trình $x^2 - 2x - 3m^2 = 0$, với m là tham số.

- 1) Giải phương trình khi $m = 1$.
- 2) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khác 0 và thỏa điều kiện $\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} = \frac{8}{3}$.

Lời giải.

1) Khi $m = 1$, phương trình thành : $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 3$ (có dạng $a - b + c = 0$)

2) Với $x_1, x_2 \neq 0$, ta có : $\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3(x_1^2 - x_2^2) = 8x_1x_2$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 8x_1x_2$$

Ta có : $a.c = -3m^2 \leq 0$ nên $\Delta \geq 0, \forall m$

Khi $\Delta \geq 0$ ta có : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2$ và $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -3m^2 \leq 0$

Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm $\neq 0$ mà $m \neq 0 \Rightarrow \Delta > 0$ và $x_1.x_2 < 0 \Rightarrow x_1 < x_2$

Với $a = 1 \Rightarrow x_1 = -b' - \sqrt{\Delta'}$ và $x_2 = -b' + \sqrt{\Delta'} \Rightarrow x_1 - x_2 = 2\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{1+3m^2}$

Do đó, ycbt $\Leftrightarrow 3(2)(-2\sqrt{1+3m^2}) = 8(-3m^2)$ và $m \neq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+3m^2} = 2m^2$ (hiển nhiên $m = 0$ không là nghiệm)

$\Leftrightarrow 4m^4 - 3m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1$ hay $m^2 = -1/4$ (loại) $\Leftrightarrow m = \pm 1$

Bài 14. Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 8$?

Lời giải.

a) Phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm thì:

$$\Delta' = m^2 - (m^2 - m - 6) = m + 6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -6.$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - m - 6 \end{cases}$$

Ta có:

$$|x_1| + |x_2| = 8 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = 64 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 64 \quad (1)$$

$$\text{Trường hợp 1: Nếu } x_1 \text{ và } x_2 \text{ cùng dấu thì: } x_1 x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -6 \\ m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 4 \text{ (thỏa mãn } (*)).$$

Trường hợp 2: Nếu x_1 và x_2 trái dấu thì:

$$x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3 \quad (**)$$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - m - 6) = 64$$

$$\Leftrightarrow m + 6 = 16 \Leftrightarrow m = 10 \text{ (không thỏa mãn điều kiện } (**)).$$

Kết luận: $m = \pm 4$

Bài 15. Cho phương trình bậc 2 ẩn x , tham số m : $x^2 + mx + m + 3 = 0$ (1)

Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn: $2x_1 + 3x_2 = 5$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi $\Delta \geq 0$

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -m & (1) \\ x_1 x_2 = m + 3 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Mà: } 2x_1 + 3x_2 = 5.$$

$$\text{Nên ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3m - 5 \\ x_2 = 2m + 5 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } x_1 x_2 = m + 3 \Leftrightarrow (-3m - 5)(2m + 5) = m + 3$$

$$\text{Giải ra ta được: } m = -2 \text{ và } m = -\frac{7}{3} \text{ để thỏa mãn điều kiện: } \Delta \geq 0$$

$$\text{Vậy: với } m = -2 \text{ và } m = -\frac{7}{3} \text{ phương trình có hai nghiệm thỏa mãn: } 2x_1 + 3x_2 = 5.$$

Bài 16. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (m là tham số)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

Lời giải.

$$\text{Để phương trình có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ thì: } \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2} \quad (*).$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 4 \\ x_1^2 = 2(m+1)x_1 - m^2 - 4. \end{cases}$$

Theo đề bài: $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16 \Leftrightarrow 2(m+1)x_1 + 2(m+1)x_2 \leq 4m^2 + 20$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) \leq 3m^2 + 16 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 \leq 4m^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow 8m - 16 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Vậy $m \leq 2$ là giá trị m cần tìm.

Bài 17. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2 - 2) \leq 0$$

Lời giải.

$$x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$$

Ta có: $\Delta' = (m-1)^2 - 2m + 5 = m^2 - 4m + 6 = (m-2)^2 + 2 > 0$ với mọi m , nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

Theo vi ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = 2m - 5 \end{cases}$$

$$\text{Đề } (x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2 - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow [x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2m - 5 - 2x_1 + 4](x_2 - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow (4 - 2x_1)(x_2 - 2) \leq 0 \Rightarrow (2 - x_1)(x_2 - 2) \leq 0 \Rightarrow 2x_2 - 4 - x_1x_2 + 2x_1 \leq 0$$

$$\Rightarrow 2(x_2 + x_1) - x_1x_2 - 4 \leq 0$$

Thay vào ta có :

$$2(2m - 2) - (2m - 5) - 4 \leq 0 \Rightarrow 4m - 4 - 2m + 5 - 4 \leq 0 \Rightarrow 2m - 3 \leq 0 \Rightarrow m \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } m \leq \frac{3}{2}$$

Bài 18. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ với m là tham số.

1) Giải phương trình khi $m = 3$.

2) Tìm giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = -12$.

Lời giải.

1) Khi $m = 3$ phương trình trở thành $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$

2) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 1 - (m - 3) > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Khi đó theo định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = 2$ (1) và $x_1 x_2 = m - 3$ (2).

Điều kiện bài toán $x_1^2 - 2x_2 + x_1 x_2 = -12 \Leftrightarrow x_1(x_1 + x_2) - 2x_2 = -12$

$\Leftrightarrow 2x_1 - 2x_2 = -12$ (do (1)) $\Leftrightarrow x_1 - x_2 = -6$ (3).

Từ (1) và (3) ta có: $x_1 = -2, x_2 = 4$. Thay vào (2) ta được: $(-2) \cdot 4 = m - 3$

$\Leftrightarrow m = -5$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy $m = -5$.

Bài 19. Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x - m - 3 = 0$ (1)

1) Giải phương trình với $m = -3$

2) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc giá trị của m .

Lời giải.

1) Với $m = -3$ ta có phương trình: $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$

2) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi:

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + (m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m + 4 > 0 \Leftrightarrow (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$ đúng $\forall m$

Chúng ta phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\forall m$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) & (1) \\ x_1 - x_2 = -m - 3 & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có $m = -x_1 x_2 - 3$ thế vào (1) ta có:

$x_1 + x_2 = 2(-x_1 x_2 - 3 - 1) = -2x_1 x_2 - 8$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 + 8 = 0$

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m .

Bài 20. Cho phương trình $x^2 + (3 - m)x + 2(m - 5) = 0$ với m là tham số.

1) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luôn có nghiệm $x = 2$.

2) Tìm giá trị của m để phương trình trên có nghiệm $x = 5 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

1) Thay $x = 2$ vào vế trái của phương trình ta được:

$$2^2 + (3-m).2 + 2(m-5) = 4 + 6 - 2m + 2m - 10 = 0 \text{ đúng với mọi } m$$

nên phương trình có nghiệm $x = 2$ với mọi m

2) Vì phương trình luôn có nghiệm $x = 2$ nên để nó có nghiệm $x = 5 - 2\sqrt{2}$ thì theo định lý Vi-et ta có: $2(5 - 2\sqrt{2}) = 2(m - 5) \Leftrightarrow 5 - 2\sqrt{2} = m - 5 \Leftrightarrow m = 10 - 2\sqrt{2}$

Bài 21. Cho phương trình $2x^2 - (m+3)x + m = 0$ (1) với m là tham số.

1) Giải phương trình khi $m = 2$.

2) Chứng tỏ phương trình (1) có nghiệm với mọi giá trị của m . Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = |x_1 - x_2|$.

Lời giải.

1) Với $m = 2$ phương trình trở thành $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

$\Delta = 5^2 - 4.2.2 = 9$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$.

2) Phương trình có biệt thức $\Delta = (m+3)^2 - 4.2.m = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8 > 0$ với mọi m .

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó theo định lý Viet thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+3}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Biểu thức } A = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\left(\frac{m+3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{m}{2}} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{m^2 - 2m + 9} = \frac{1}{2} \sqrt{(m-1)^2 + 8}.$$

Do $(m-1)^2 \geq 0$ nên $\sqrt{(m-1)^2 + 8} \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, suy ra $A \geq \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\sqrt{2}$, đạt được khi $m = 1$.

Bài 22. Định m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 = 0$

có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $T = x_1(x_1 - x_2) + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 1)$

$$\Delta' = 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0. \text{ Theo hệ thức Vi-et thì: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 1 \end{cases}$$

$$T = x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2$$

$$T = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2 = m^2 + 8m + 1$$

Do $m \geq 0$ nên $T \geq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 1, khi $m = 0$.

Bài 23. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (x là ẩn số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

Tìm m để biểu thức $M = \frac{-24}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải.

a/ Phương trình (1) có $\Delta' = m^2 - 4m + 8 = (m - 2)^2 + 4 > 0$ với mọi m nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

b/ Do đó, theo Viet, với mọi m , ta có: $S = -\frac{b}{a} = 2m$; $P = \frac{c}{a} = m - 2$

$$M = \frac{-24}{(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2} = \frac{-24}{4m^2 - 8m + 16} = \frac{-6}{m^2 - 2m + 4}$$

$$= \frac{-6}{(m-1)^2 + 3}. \text{ Khi } m = 1 \text{ ta có } (m-1)^2 + 3 \text{ nhỏ nhất}$$

$$\Rightarrow -M = \frac{6}{(m-1)^2 + 3} \text{ lớn nhất khi } m = 1 \Rightarrow M = \frac{-6}{(m-1)^2 + 3} \text{ nhỏ nhất khi } m = 1$$

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất là -2 khi $m = 1$

Bài 24. Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{2a^2 - 3ab + b^2}{2a^2 - ab + ac}$$

Lời giải.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } Q &= \frac{2a^2 - 3ab + b^2}{2a^2 - ab + ac} = \frac{2 - 3 \cdot \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{2 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} \quad (\text{Vì } a \neq 0) \\ &= \frac{2 + 3(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{2 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Vì } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2 \text{ nên } x_1^2 \leq x_1 x_2 \text{ và } x_2^2 \leq 4 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 x_2 + 4 \\ \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \leq 3x_1 x_2 + 4\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } Q \leq \frac{2 + 3(x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 + 4}{2 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2} = 3$$

Bài 25. Cho phương trình $x^2 - x + m = 0$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 2$.

Lời giải.

Ta có: $\Delta = 1 - 4m$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$

$$\text{Ta có: } x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2} \text{ và } x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{2}$$

$$\text{Vì } x_1 < x_2 < 2 \text{ nên } \frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{2} < 2 \text{ Suy ra } \sqrt{1 - 4m} < 3 \Rightarrow m > -2$$

$$\text{Giá trị của } m \text{ cần tìm là } -2 < m < \frac{1}{4}$$

Bài 26. Tìm m để phương trình: $(2m - 1)x^2 + (m^2 - 1)x + 2 = 0$ tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 < 1 < x_2$

Lời giải.

Từ $x_1 < 1 < x_2$ suy ra: $x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$

Đặt $y = x - 1$ thay $x = y + 1$ vào phương trình ta được:

$$(2m - 1)(y + 1)^2 + (m^2 - 1)(y + 1) + 2 = 0 \Leftrightarrow (2m - 1)y^2 + (m^2 + 4m - 3)y + m^2 + 3m = 0 \quad (*)$$

Ta cần tìm m sao cho phương (*) có hai nghiệm trái dấu:

$$P < 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 + 3m}{2m - 1} < 0 \Leftrightarrow (m^2 + 3m)(2m - 1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 27. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$. Tìm m nguyên để phương trình có hai nghiệm nguyên.

Lời giải.

Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm nguyên của phương trình.

Ta có: $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1 x_2 = m - 4$.

Suy ra $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 8 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 - 1 = 15 \Leftrightarrow (2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = -15$.

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x_1 - 1 = -1 \\ 2x_2 - 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow m = 4$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x_1 - 1 = -5 \\ 2x_2 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow m = 0$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2x_1 - 1 = -15 \\ 2x_2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = -3$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2x_1 - 1 = -3 \\ 2x_2 - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow m = 1$$

Thử lại $m=0, m=1, m=-3, m=4$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 28. Cho phương trình: $a(a+3)x^2 - 2x - (a+1)(a+2) = 0$ (a là tham số, nguyên).

- Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm hữu tỷ.
- Xác định a để phương trình có các nghiệm đều nguyên.

Lời giải.

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm hữu tỷ:

- Với $a(a+3) = 0$ hay $a = 0$ hoặc $a = -3$:

Phương trình trở thành: $-2x - 2 = 0$ có nghiệm là $x = -1$

- Với $a(a+3) \neq 0$ hay $a \neq 0$ và $a \neq -3$ thì p/t cho là phương trình bậc hai.

Ta có: $a(a+3) + 2 - (a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2 - a^2 - 3a^2 - 2 = 0$

Nên phương trình cho có 2 nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{(a+1)(a+2)}{a(a+3)} = 1 + \frac{2}{a(a+3)}$

Vì a nguyên nên suy ra phương trình cho luôn có nghiệm hữu tỷ.

b) Xác định a để các nghiệm của phương trình đều là nghiệm nguyên:

(1) Nếu $a = 0$ hoặc $a = -3$: phương trình có 1 nghiệm nguyên $x = -1$.

(2) Nếu $a \neq 0, a \neq -3$: Theo câu a), phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ nguyên nên để p/trình có các nghiệm đều nguyên thì x_2 cũng phải là nghiệm nguyên.

Nghĩa là: 2 phải chia hết cho $a(a+3)$.

Khi đó ta có các khả năng xảy ra :

$$\begin{cases} a(a+3) = -2 \\ a(a+3) = -1 \\ a(a+3) = 2 \\ a(a+3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 3a + 2 = 0 \\ a^2 + 3a + 1 = 0 \\ a^2 + 3a - 2 = 0 \\ a^2 + 3a - 1 = 0 \end{cases}$$

Vì a nguyên nên chỉ có phương trình $a^2 + 3a + 2 = 0$ có hai nghiệm nguyên $a = -1$ hoặc $a = -2$.

Vậy: $a \in \{-3; -2; -1; 0\}$ thì phương trình cho có các nghiệm đều nguyên.

Bài 29. Cho phương trình: $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ (m là tham số).

1) Giải phương trình với $m = 2$.

2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu ($x_1 < 0 < x_2$). Khi đó nghiệm nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn?

Lời giải.

a) $m = 2$, phương trình đã cho thành: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Phương trình này có $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên có hai nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

Vậy $m = 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1.$$

Theo định lí Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m + 1 \end{cases}.$$

Xét hiệu: $|x_1| - |x_2| = -x_1 - x_2 = -4 < 0$ (vì $x_1 < 0 < x_2$) $\Rightarrow |x_1| < |x_2|$.

Vậy nghiệm x_1 có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn nghiệm x_2 .

Bài 30. Cho phương trình: $x^3 + ax^2 + bx - 1 = 0$ (1)

1) Tìm các số hữu tỷ a và b để phương trình (1) có nghiệm $x = 2 - \sqrt{3}$.

2) Với giá trị a, b tìm được ở trên; gọi x_1 ; x_2 ; x_3 là ba nghiệm của phương trình (1).

Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{1}{x_1^5} + \frac{1}{x_2^5} + \frac{1}{x_3^5}$.

Lời giải.

1) $x^3 + ax^2 + bx - 1 = 0$ (1). Tìm $a, b \in \mathbb{Q}$ để (1) có nghiệm $x = 2 - \sqrt{3}$.

Thay $x = 2 - \sqrt{3}$ vào (1) ta có: $(2 - \sqrt{3})^3 + a(2 - \sqrt{3})^2 + b(2 - \sqrt{3}) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(4a + b + 15) = 7a + 2b + 25$$

$$+/\text{Nếu } (4a + b + 15) \neq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{7a + 2b + 25}{(4a + b + 15)} \text{ (vô lí vì VT là số vô tỷ, VP là số hữu tỷ).}$$

$$+/\text{ Suy ra } (4a + b + 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 7a + 2b + 25 = 0 \\ 4a + b + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải hpt, kết luận: } \begin{cases} a = -5 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$2) \text{ Với } a = -5; b = 5. \text{ Tính giá trị của biểu thức } S = \frac{1}{x_1^5} + \frac{1}{x_2^5} + \frac{1}{x_3^5}.$$

$$+/\begin{cases} a = -5 \\ b = 5 \end{cases} \text{ (1) có dạng } x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4x + 1) = 0.$$

Không mất tính tổng quát coi $x_3 = 1$ thì x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình

$$(x^2 - 4x + 1) = 0 \text{ (có } \Delta' = 3 > 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

$$+/\ x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 14.$$

$$+/\ x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = 52.$$

$$+/\ x_1^5 + x_2^5 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^3 + x_2^3) - x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) = 724$$

$$\Rightarrow S = 725$$

Bài 31. Tìm m để phương trình: $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } (x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = m \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x - 15) = m \text{ (1)}$$

Đặt $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = y$ ($y \geq 0$), phương trình (1) trở thành:

$$(y-9)(y-16) = m \Leftrightarrow y^2 - 25y + 144 - m = 0 \text{ (2)}$$

Nhận xét: Với mỗi giá trị $y > 0$ thì phương trình: $(x+1)^2 = y$ có 2 nghiệm phân

biệt, do đó phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m + 49 > 0 \\ 25 > 0 \\ 144 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-49}{4} < m < 144.$$

Vậy với $-\frac{49}{4} < m < 144$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 32. Cho hai số thực a, b không âm thỏa mãn $18a + 4b \geq 2013$. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm: $18ax^2 + 4bx + 671 - 9a = 0$.

Lời giải.

Cho hai số thực a, b thỏa mãn $18a + 4b \geq 2013$ (1)

Cho hai số thực a, b thỏa mãn $18a + 4b \geq 2013$ (1)

Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm: $18ax^2 + 4bx + 671 - 9a = 0$ (2)

TH1 : Với $a = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow 4bx + 671 = 0$

Từ (1) $\Rightarrow b \neq 0$. Vậy (2) luôn có nghiệm $x = -\frac{671}{4b}$

TH2 : Với $a \neq 0$, ta có : $\Delta' = 4b^2 - 18a(671 - 9a) = 4b^2 - 6a \cdot 2013 + 162a^2$

$\geq 4b^2 - 6a(18a + 4b) + 162a^2 = 4b^2 - 24ab + 54a^2 = (2b - 6a)^2 \geq 0, \forall a, b$

Vậy pt luôn có nghiệm

Bài 33. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn: $b + d \neq 0$ và $\frac{ac}{b+d} \geq 2$. Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$ (x là ẩn) luôn có nghiệm.

Lời giải.

Xét 2 phương trình:

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad x^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = (a^2 - 4b) + (c^2 - 4d) = a^2 - 2ac + c^2 + 2[ac - 2(b + d)] = (a - c)^2 + 2[ac - 2(b + d)]$$

+ Với $b + d < 0 \Rightarrow b, d$ có ít nhất một số nhỏ hơn 0

$\Rightarrow \Delta_1 > 0$ hoặc $\Delta_2 > 0 \Rightarrow$ pt đã cho có nghiệm

+ Với $b + d \geq 0$. Từ $\frac{ac}{b+d} \geq 2 \Rightarrow ac > 2(b + d) \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$

$\Rightarrow$ Ít nhất một trong hai biểu giá trị $\Delta_1, \Delta_2 \geq 0 \Rightarrow$ Ít nhất một trong hai pt (1) và (2) có nghiệm.

Vậy với a, b, c, d là các số thực thỏa mãn: $b + d \neq 0$ và $\frac{ac}{b+d} \geq 2$,

phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$ (x là ẩn) luôn có nghiệm

Bài 33. Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(x)$ là một biểu thức đại số xác định với mọi số thực x khác không. Biết rằng: $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \forall x \neq 0$. Tính giá trị của $f(2)$.

Lời giải. Xét đẳng thức: $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \forall x \neq 0$ (1)

Thay $x = 2$ vào (1) ta có: $f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào (1) ta có: $f\left(\frac{1}{2}\right) + 3.f(2) = \frac{1}{4}$

Đặt $f(2) = a, f\left(\frac{1}{2}\right) = b$ ta có. $\begin{cases} a + 3b = 4 \\ 3a + b = \frac{1}{4} \end{cases}$. Giải hệ, ta được $a = -\frac{13}{32}$

Vậy $f(2) = -\frac{13}{32}$.

Bài 34. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm thì $5(a^2 + b^2) \geq 4$.

Lời giải.

Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình, dễ thấy $x_0 \neq 0$.

Suy ra $x_0^2 + ax_0 + b + \frac{a}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b = 0$

Đặt $x_0 + \frac{1}{x_0} = y_0 \Rightarrow x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} = y_0^2 - 2, |y_0| \geq 2 \Rightarrow y_0^2 - 2 = -ay_0 - b$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski ta có:

$$(y_0^2 - 2)^2 = (ay_0 + b)^2 \leq (a^2 + b^2)(y_0^2 + 1) \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(y_0^2 - 2)^2}{y_0^2 + 1} \quad (1)$$

Ta chứng minh $\frac{(y_0^2 - 2)^2}{y_0^2 + 1} \geq \frac{4}{5} \quad (2)$

Thực vậy: $(2) \Leftrightarrow 5(y_0^4 - 4y_0^2 + 4) \geq 4(y_0^2 + 1) \Leftrightarrow 5y_0^4 - 24y_0^2 + 16 \geq 0$

$\Leftrightarrow 5(y_0^2 - 4)(y_0^2 - \frac{4}{5}) \geq 0$ đúng với $|y| \geq 2$ nên (1) đúng

Từ (1), (2) suy ra $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5} \Rightarrow 5(a^2 + b^2) \geq 4$, đpcm.

Bài 35. Cho phương trình: $x^2 - 2(3-m)x - 4 - m^2 = 0$ (x là ẩn, m là tham số) (1).

a. Giải phương trình (1) với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $||x_1| - |x_2|| = 6$.

Lời giải.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' = (3-m)^2 + (4+m^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 6m + 13 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) + \frac{17}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{2} > 0 \text{ (luôn đúng } \forall x)$$

Do đó (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức Vi-ét $x_1 + x_2 = 2(3-m)$; $x_1x_2 = -4 - m^2$

*Ta có:

$$||x_1| - |x_2|| = 6 \Leftrightarrow (|x_1| - |x_2|)^2 = 36 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2|x_1| \cdot |x_2| = 36$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2|x_1x_2| = 36$$

$$\Leftrightarrow [2(3-m)]^2 - 2(-m^2 - 4) - 2|-m^2 - 4| = 36$$

$$\Leftrightarrow 4(3-m)^2 - 2(-m^2 - 4) - 2(m^2 + 4) = 36 \text{ (do } -m^2 - 4 < 0 \forall m \Rightarrow |-m^2 - 4| = m^2 + 4)$$

$$\Leftrightarrow (3-m)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m=3 \\ 3-m=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=6 \end{cases}.$$

Vậy $m \in \{0; 6\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 36. Cho phương trình $8x^2 - 8x + m^2 + 1 = 0$ (*) (x là ẩn số)

a) Định m để phương trình (*) có nghiệm $x = \frac{1}{2}$

b) Định m để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện:

$$x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$$

Lời giải.

a/ Phương trình (*) có nghiệm

$$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - 4 + m^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1$$

$$b/ \Delta' = 16 - 8m^2 - 8 = 8(1 - m^2)$$

Khi $m = \pm 1$ thì ta có $\Delta' = 0$ tức là: $x_1 = x_2$ khi đó $x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$ thỏa

Điều kiện cần để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt là:

$|m| < 1$ hay $-1 < m < 1$. khi $|m| < 1$ hay $-1 < m < 1$ ta có:

$$x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 \text{ (Do } x_1 \neq x_2)$$

$$\Leftrightarrow S(S^2 - 2P) = S^2 - P$$

$$\Leftrightarrow 1(1^2 - 2P) = 1^2 - P$$

$$\Leftrightarrow P = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 1 = 0 \text{ (VN)}$$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = \pm 1$

Cách khác

Khi $\Delta \geq 0$ ta có:

$$x_1 + x_2 = 1; x_1x_2 = \frac{m^2 + 1}{8}$$

$$x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$$

$$\Leftrightarrow x_1^3(x_1 - 1) - x_2^3(x_2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = 0 \text{ (Do } x_1 - 1 = -x_2; x_2 - 1 = -x_1)$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \text{ (do } x_1x_2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1$$

Bài 37. Cho phương trình : $x^2 + x + m - 5 = 0$ (1) (m là tham số, x là ẩn)

- Giải phương trình (1) với $m = 4$.
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ thỏa mãn:

$$\frac{6 - m - x_1}{x_2} + \frac{6 - m - x_2}{x_1} = \frac{10}{3}$$

Lời giải.

1) Giải phương trình $x^2 + x + m - 5 = 0$ (1) với $m = 4$.

Thay $m = 4$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 + 4.1.1 = 5 > 0$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm : } x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của (1) là } \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

2) *Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4(m-5) > 0 \\ 0^2 + 0 + m - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{21}{4} \\ m \neq 5 \end{cases}$$

Theo định lí Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = -1$; $x_1 x_2 = m - 5$ (*)

Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned} \frac{6-m-x_1}{x_2} + \frac{6-m-x_2}{x_1} &= \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{(6-m)x_1 + (6-m)x_2 - x_1^2 - x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{(6-m)(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2}{x_1 x_2} &= \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{(6-m)(-1) - (-1)^2 + 2(m-5)}{m-5} = \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3m-17}{m-5} &= \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3(3m-17) = 10(m-5) \\ \Leftrightarrow m &= -1(TM) \end{aligned}$$

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Bài 38. Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1):

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } P = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2}$$

Lời giải.

Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (2) luôn có 2 nghiệm trái dấu

Ta có $a.c = -1 < 0$, với mọi m nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1):

Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= mx_1 + 1; x_2^2 = mx_2 + 1 \\ \Rightarrow P &= \frac{mx_1 + 1 + x_1 - 1}{x_1} - \frac{mx_2 + 1 + x_2 - 1}{x_2} \\ &= \frac{(m+1)x_1}{x_1} - \frac{(m+1)x_2}{x_2} = 0 \text{ (Do } x_1, x_2 \neq 0) \end{aligned}$$

Câu 39. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m = 0$ (m là tham số).

1) Giải phương trình với $m=1$.

2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2}$

Lời giải.

Với $m=1$, phương trình trở thành $x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\Delta' = 2$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{2}; x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

Điều kiện PT có 2 nghiệm không âm x_1, x_2 là

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 1 \geq 0 \\ 2(m+1) \geq 0 \\ 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0$$

Theo hệ thức Vi-ét $x_1 + x_2 = 2(m+1); x_1 x_2 = 2m$

Ta có:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2m + 2 + 2\sqrt{2m} = 2$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ (TM)}$$

Bài 40. Giả sử phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có 2 nghiệm lớn hơn 1. Chứng minh

$$\text{rằng: } \frac{a^2 - a - 2b}{b - a + 1} \geq \frac{2\sqrt{b}}{1 + \sqrt{b}}.$$

Lời giải:

Theo định lý Vi et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = b \end{cases}$. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng :

$$\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{1+\sqrt{x_1x_2}}. \text{ Hay } \frac{x_1}{1+x_2} + 1 + \frac{x_2}{1+x_1} + 1 \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{1+\sqrt{x_1x_2}} + 2$$

$$(x_1 + x_2 + 1) \left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \right) \geq \frac{2(1+2\sqrt{x_1x_2})}{1+\sqrt{x_1x_2}}. \text{ Theo bất đẳng thức Cô si ta có:}$$

$x_1 + x_2 + 1 \geq 2\sqrt{x_1x_2} + 1$. Để chứng minh (*) ta quy về chứng minh:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \geq \frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}} \text{ với } x_1, x_2 > 1. \text{ Quy đồng và rút gọn bất đẳng thức trên tương}$$

đương với $(\sqrt{x_1x_2} - 1)(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$ (Điều này là hiển nhiên đúng). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^2 = 4b$.

Bài 41. a) Tìm m để phương trình $x^2 + x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và biểu thức:

$Q = x_1^2(x_1 + 1) + x_2^2(x_2 + 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $P = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2x^2 - (3a-1)x - 2 = 0$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2$

Lời giải:

a) Phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$ (*).

Khi đó theo định lý Viet: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -1 \\ P = x_1x_2 = m \end{cases}$. Ta có: $Q = S(S^2 - 3P) + S^2 - 2P = m \leq \frac{1}{4}$ (do

(*)) $\Rightarrow \max Q = \frac{1}{4}$ đạt được khi $m = \frac{1}{4}$. Vậy $m = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1$

Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$ (*). Theo định lý Viet ta có:

$x_1 + x_2 = 2m + 2$ và $x_1x_2 = m^2 + 2$. Ta có $P = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6 = m^2 + 2 - 2(2m + 2) - 6$

$= m^2 - 4m - 8 = (m-2)^2 - 12 \geq -12$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m=2$ thỏa mãn điều kiện (*). Vậy với $m=2$ thì biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất bằng -12 .

c) Ta có: $\Delta = (3a-1)^2 + 16 > 0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt. Theo

định lý Viet thì: $x_1 + x_2 = \frac{3a-1}{2}; x_1 x_2 = -1$. Ta có

$$P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2 \left[\frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2)}{2x_1 x_2} \right]^2 = 6(x_1 - x_2)^2$$

$$= 6[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 6 \left[\left(\frac{3a-1}{2} \right)^2 + 4 \right] \geq 24. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } 3a-1=0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}.$$

Vậy $\min P = 24$.

Bài 42. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$, với m là tham số. tìm tất cả các giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức

$P = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải:

Ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + 1) = 4m - 3$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$. Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2m+1$ và $x_1 x_2 = m^2 + 1$. Do đó

$$P = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 + 1}{2m+1} = \frac{2m-1}{4} = \frac{5}{4(2m+1)}. \text{ Suy ra } 4P = 2m-1 + \frac{5}{2m+1}. \text{ Do } m > \frac{3}{4} \text{ nên}$$

$$2m+1 > 1$$

Để $P \in \mathbb{Z}$ thì ta phải có $(2m+1)$ là ước của 5, suy ra $2m+1=5 \Leftrightarrow m=2$

Thử lại với $m=2$, ta được $P=1$ (thỏa mãn).

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm thỏa mãn bài toán.

Bài 43. Cho phương trình $(m^2 + 5)x^2 - 2mx - 6m = 0$ (1) với m là tham số.

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16$$

Lời giải.

a) Phương trình (1) có hệ số $a = m^2 + 5 > 0$ nên là phương trình bậc hai ẩn x . Do đó

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + (m^2 + 5).6m > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m^3 + 30m > 0$$

$$\Leftrightarrow m(6m^2 + m + 30) > 0$$

$$\Leftrightarrow m \underbrace{\left[5m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{119}{4} \right]}_{>0 \forall m} > 0$$

$$\Leftrightarrow m > 0$$

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5}$

Xét $m^2 + 5 - 2m = (m - 1)^2 + 4 > 0$. Mà $m > 0 \Rightarrow m^2 + 5 > 2m > 0$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2m}{m^2 + 5} < 1 \Rightarrow 0 < x_1 + x_2 < 1$$

Vậy tổng hai nghiệm của (1) không thể là số nguyên.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \left[5m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{119}{4} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq 0$$

$$\text{Khi đó, theo định lý Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5} \\ x_1 x_2 = \frac{-6m}{m^2 + 5} \end{cases}$$

Ta có:

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2 \\ x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \end{cases}$$

$$TH1: x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2 + 5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = 2 \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}}; t \geq 0$ phương trình (2) trở thành $-3t^2 - t - 2 = 0$

Xét $\Delta = 1^2 - 4(-3)(-2) = -23 < 0 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

$$TH2: x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2 + 5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = -2 \quad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2+5}}; t \geq 0$ phương trình (3) trở thành $-3t^2 - t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+1)(3t-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(L) \\ t = \frac{2}{3}(TM) \Rightarrow \frac{2m}{m^2+5} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 4m^2 - 18m + 20 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(4m-10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(TM) \\ m = \frac{5}{2}(TM) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là $m \in \left\{2; \frac{5}{2}\right\}$

Bài 44. Cho phương trình: $2013x^2 - (m-2014)x - 2015$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2$

Lời giải.

Ta có: $\Delta = (m-2014)^2 + 4.2013.2015 > 0$ với mọi m. Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Vi – et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-2014}{2013} \\ x_1 x_2 = \frac{-2015}{2013} \end{cases}$$

Từ $\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2014 = (\sqrt{x_1^2 + 2014} + x_1)(\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2) \\ 2014 = (\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1)(\sqrt{x_2^2 + 2014} - x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2014 = (\sqrt{(x_1^2 + 2014)(x_2^2 + 2014)} + x_2\sqrt{x_1^2 + 2014} + x_1\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_1x_2) \\ 2014 = (\sqrt{(x_1^2 + 2014)(x_2^2 + 2014)} - x_2\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_1x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2 + 2014}(x_1 + x_2) + \sqrt{x_2^2 + 2014}(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)(\sqrt{x_1^2 + 2014} + \sqrt{x_2^2 + 2014}) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m-2014}{2013} = 0$$

$$\Rightarrow m = 2014$$

Vậy $m=2014$ là giá trị thỏa mãn đề bài.

Bài 43. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + 4y = 20 & (1) \\ x + my = 10 & (2) \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Với giá trị nào của m hệ đã cho:

- a) Vô nghiệm
- b) Có nghiệm duy nhất
- c) Vô số nghiệm

Lời giải.

Cách 1. Với $m = 0$ hệ có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}$$

Với $m \neq 0$ hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} y = \frac{-m}{4}x + 5 & (a) \\ y = \frac{-1}{m}x + \frac{10}{m} & (b) \end{cases}$$

Để thấy (a) và (b) là hai đường thẳng trong hệ tọa độ Oxy, số nghiệm của hệ là số giao điểm của hai đường thẳng (a) và (b).

a) Hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi (a) và (b) song song tức là:

$$\begin{cases} \frac{-m}{4} = \frac{-1}{m} \\ 5 \neq \frac{10}{m} \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy $m = -2$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

b) Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (a) và (b) cắt nhau tức là:

$$\frac{-m}{4} \neq \frac{-1}{m} \Leftrightarrow m \neq \pm 2$$

c) Hệ đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi (a) và (b) trùng nhau tức là:

$$\begin{cases} \frac{-m}{4} = \frac{-1}{m} \\ 5 = \frac{10}{m} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy khi $m = 2$ hệ đã cho có vô số nghiệm.

Cách 2. từ PT(2) suy ra: $x = 10 - my$ thay vào (1) ta được:

$$y(4 - m^2) = 20 - 10m \quad (3)$$

Ta có số nghiệm của hệ đã cho chính là số nghiệm của Phương trình (3)

a) Hệ đã cho vô nghiệm khi: $\begin{cases} 20-10m \neq 0 \\ 4-m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$

Vậy với $m = -2$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

b) Hệ có nghiệm duy nhất khi: $4-m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

c) Hệ đã cho vô số nghiệm khi: $\begin{cases} 20-10m = 0 \\ 4-m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

Bài 44. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y = 2m+1 \\ x^2y+y^2x = 2m^2-m-1 \end{cases}$, với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình với $m=2$.

b) Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi m .

Lời giải.

a) Giải hệ phương trình với $m=2$

Với $m=2$, hệ phương trình là:

$$\begin{cases} x+y = 5 \\ x^2y+y^2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 5 \\ xy(x+y) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 5 \\ xy = 1 \end{cases}.$$

Do đó, x, y là nghiệm của phương trình $X^2-5X+1=0$

Giải ra ra được $X_1 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}, X_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

Vậy hpt có hai nghiệm: $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}; \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}; \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

b) Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi m

Hệ đã cho viết lại là: $\begin{cases} x+y = 2m+1 \\ xy(x+y) = (2m+1)(m-1) \end{cases}$

(1) Nếu $m = -\frac{1}{2}$ thì hệ trở thành:

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ xy(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \end{cases}.$$

Hệ có vô số nghiệm.

(2) Nếu $m \neq -\frac{1}{2}$ thì hệ trở thành: $\begin{cases} x+y = 2m+1 \\ xy = m-1 \end{cases}$

Nên x, y là nghiệm phương trình: $X^2 - (2m+1)X + m-1 = 0 (*)$.

P/t (*) có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m-1) = 4m^2 + 5 > 0, \forall m$ nên luôn có nghiệm.

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

Bài 45. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = m \end{cases}$, trong đó m là tham số và x, y là các ẩn số.

a) Giải hệ phương trình với $m = 7$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Lời giải.

a) Giải hệ phương trình với $m = 7$.

Với $m = 7$ ta có: $\begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2 - 1}{x} = y \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = 7 \end{cases}$ (do $x = 0$ không thỏa mãn).

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x \frac{2x^2 - 1}{x} - \left(\frac{2x^2 - 1}{x} \right)^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + 4x^2(2x^2 - 1) - (2x^2 - 1)^2 = 7x^2 \Leftrightarrow 8x^4 - 7x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)\left(x^2 + \frac{1}{8}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = -1$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = (-1; -1), (1; 1)$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Ta có $x = 0$ không thỏa mãn suy ra $x \neq 0$.

Rút y từ PT thứ nhất rồi thế vào PT thứ hai ta có:

$$4x^2 + 4x \frac{2x^2 - 1}{x} - \left(\frac{2x^2 - 1}{x} \right)^2 = m$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 4x^4 + 4x^2(2x^2 - 1) - (2x^2 - 1)^2 = mx^2$ có nghiệm khác 0.

$\Leftrightarrow 8x^4 - mx^2 - 1 = 0$ có nghiệm khác 0. Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Thay vào phương trình trên ta được $8t^2 - mt - 1 = 0$ (1). Như vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm dương.

Dễ thấy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu do $ac < 0$ suy ra (1) luôn có một nghiệm dương. Do đó với mọi số thực m hệ phương trình luôn có nghiệm.

Bài 46. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x + y = 3m - 4 & (1) \\ x + (m-1)y = m & (2) \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x + y = 2$.

Lời giải.

Bước 1. Tìm điều kiện để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Từ (2) suy ra: $x = m - (m-1)y$. Thế vào $x = m - (m-1)y$ vào (1) ta được:

$$(m-1)(m - (m-1)y) = 3m-1 \Leftrightarrow y(m^2-2m) = m^2-4m+3 \quad (3)$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất tức là:

$$m^2-2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} (*)$$

Bước 2. Tìm m thỏa mãn điều kiện $x + y = 2$.

Với điều kiện $m \neq 0$ và $m \neq 2$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất là:
$$\begin{cases} x = \frac{3m-2}{m} \\ y = \frac{m-2}{m} \end{cases}$$

Với điều kiện $x + y = 2$ ta có: $\frac{3m-2}{m} + \frac{m-2}{m} = 2 \Leftrightarrow 4m-4 = 2m \Leftrightarrow m = 2 \quad (**)$

Từ (*) và (**) suy ra không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 47. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m \end{cases}$$

Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn: $y = x^2$

Lời giải.

Từ phương trình thứ 2 suy ra: $y = -m - x$. Thế vào phương trình thứ nhất ta được:

$$mx - m - x = -1 \Rightarrow x(m-1) = m-1 \quad (*)$$

Hệ có nghiệm duy nhất phương trình (*) phải có nghiệm duy nhất tức là $m \neq 1$.

Khi đó, hệ có nghiệm duy nhất là
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -m-1 \end{cases}$$

Ta có: $y = x^2 \Leftrightarrow -m-1=1 \Leftrightarrow m=-2$

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Bài 48. Tìm nghiệm nguyên a để hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x-3y=2-a \\ x+2y=3a+1 \end{cases}$$

Có nghiệm $(x; y)$ sao cho $T = \frac{y}{x}$ là số nguyên.

Lời giải.

Ta có:
$$\begin{cases} 2x-3y=2-a \\ x+2y=3a+1 \end{cases}$$
 hệ đã cho có nghiệm (x, y) với
$$\begin{cases} x = a+1 \\ y = a \end{cases}$$

$$\text{Mà } T = \frac{y}{x} = \frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1}$$

Vì a nguyên, để T nguyên thì điều kiện là $\begin{cases} a+1=1 \\ a+1=-1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a=0 \\ a=-2 \end{cases}$

Bài 49. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m \end{cases}$.

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 & (1) \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow x^3y^2 - x^2y^2 - 2x^2y + 2xy + 3x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2y^2 - 2xy + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (xy-1)^2 + 2 = 0 \quad (\text{Vô lý}) \end{cases}$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào phương trình (2) ta được } y^2 - y - 3m + 1 = 0 \quad (3)$$

Để phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt thì:

$$\Delta = 1 + 4(3m-1) > 0 \Leftrightarrow 12m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

$$\text{Theo đề bài: } (x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4 + y_1 + y_2 + y_1y_2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{do } x_1 = x_2 = 1.$$

Với $m > \frac{1}{4}$ theo hệ thức Vi-ét cho phương trình (3) ta có :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1y_2 = 1 - 3m \end{cases} \text{ thay vào (4) ta có: } 5 + 1 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận: $m = 2$.

Bài 50. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = \sqrt{2}$.

b) Tìm giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) thỏa mãn hệ thức

$$x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}.$$

Lời giải.

a) Khi $m = \sqrt{2}$ ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2 \\ 3x + \sqrt{2}y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \\ 3x + \sqrt{2}y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2} + 5}{5} \\ y = \sqrt{2}x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2} + 5}{5} \\ y = \frac{5\sqrt{2} - 6}{5} \end{cases}$$

b) Giải tìm được: $x = \frac{2m+5}{m^2+3}$; $y = \frac{5m-6}{m^2+3}$

Thay vào hệ thức $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2+3}$; ta được $\frac{2m+5}{m^2+3} + \frac{5m-6}{m^2+3} = 1 - \frac{m^2}{m^2+3}$

Giải tìm được $m = \frac{4}{7}$

Bài 51. Tìm m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx + 4y = 2m + 2 \\ 2mx + m^2y = 2m^2 - m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 4)y = 2m^2 - 3m - 2 = (m - 2)(2m + 1) \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì $m^2 - 4 \neq 0$ hay $m \neq \pm 2$

Vậy với $m \neq \pm 2$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} y = \frac{(m-2)(2m+1)}{m^2-4} = \frac{2m+1}{m+2} = 2 - \frac{3}{m+2} \\ x = \frac{m-1}{m+2} = 1 - \frac{3}{m+2} \end{cases}$$

Để x, y là những số nguyên thì $m + 2 \in U(3) = \{1; -1; 3; -3\}$

Vậy: $m + 2 = \pm 1, \pm 3 \Rightarrow m = -1; -3; 1; -5$

Bài 52. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases}$ (m là tham số)

- 1) Giải hệ phương trình khi $m = 2$
- 2) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn: $2x + y \leq 3$

Lời giải.

1) Giải hệ phương trình khi $m = 2$. Ta có $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

2) $y = 2 - (m-1)x$ thế vào phương trình còn lại ta có:

$mx + 2 - (m-1)x = m + 1 \Leftrightarrow x = m - 1$ suy ra $y = 2 - (m-1)^2$ với mọi m

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y) = (m-1; 2-(m-1)^2)$

$2x + y = 2(m-1) + 2 - (m-1)^2 = -m^2 + 4m - 1 = 3 - (m-2)^2 \leq 3$ với mọi m

Vậy với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm thỏa mãn: $2x + y \leq 3$

CHUYÊN ĐỀ 6. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ BẬC NHẤT – BẬC HAI

Bài 1. Tìm m để hàm số bậc nhất $y = \frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3}x - 2011$ là hàm số nghịch biến.

Lời giải.

Để hàm số $y = \frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3}x - 2011$ nghịch biến thì $\frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3} < 0$ (1).

$$m^2 - 2\sqrt{2}m + 3 = (m - \sqrt{2})^2 + 1 > 0 \forall m$$

$$(1) \Leftrightarrow m^2 - 2013m + 2012 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-2012) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m-2012 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 2012 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ m-2012 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2012 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 < m < 2012$$

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = (3m^2 - 7m + 5)x - 2011$ (*). Chứng minh hàm số (*) luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ với mọi m .

Lời giải.

$$\begin{aligned} 3m^2 - 7m + 5 &= 3\left(m^2 - \frac{7}{3}m + \frac{5}{3}\right) \\ &= 3\left[\left(m - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} + \frac{60}{36}\right] \\ &= 3\left[\left(m - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right] > 0 \quad \forall m \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ với mọi m

Bài 3. Cho đường thẳng: $(m-2)x + (m-1)y = 1$ (m là tham số) (1)

Chứng minh rằng đường thẳng (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(m-2)x + (m-1)y = 1$ đi qua điểm cố định $N(x_0; y_0)$ với mọi m là :

$$\begin{aligned} (m-2)x_0 + (m-1)y_0 &= 1 \quad \text{với mọi } m \\ \Leftrightarrow mx_0 - 2x_0 + my_0 - y_0 - 1 &= 0 \quad \text{với mọi } m \\ \Leftrightarrow (x_0 + y_0)m - (2x_0 + y_0 + 1) &= 0 \quad \text{với mọi } m \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 = 0 \\ 2x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy các đường thẳng (1) luôn đi qua điểm cố định $N(-1; 1)$

Bài 4. Cho hai đường thẳng $(d_1): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0, (d_2): (1-m)x + my - 4m + 1 = 0$

- Tìm các điểm cố định mà $(d_1), (d_2)$ luôn đi qua.
- Tìm m để khoảng cách từ điểm $P(0;4)$ đến đường thẳng (d_1) là lớn nhất.
- Chứng minh hai đường thẳng trên luôn cắt nhau tại điểm I . Tìm quỹ tích điểm I khi m thay đổi.
- Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IAB với A, B lần lượt là các điểm cố định mà $(d_1), (d_2)$ đi qua.

Lời giải.

a) Ta viết lại $(d_1): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m(x + y - 2) + 1 - y = 0$. Từ đó dễ dàng suy ra đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm cố định: $A(1;1)$.

Tương tự viết lại $(d_2): (1-m)x + my - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m(y - x - 4) + 1 + x = 0$ suy ra (d_2) luôn đi qua điểm cố định: $B(-1;3)$.

b) Để ý rằng đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm cố định: $A(1;1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên (d_1) thì khoảng cách từ A đến (d_1) là $PH \leq PA$. Suy ra khoảng cách lớn nhất là PA khi $P \equiv H \Leftrightarrow PH \perp (d_1)$. Gọi $y = ax + b$ là phương trình đường thẳng đi qua $P(0;4), A(1;1)$ ta có hệ: $\begin{cases} a \cdot 0 + b = 4 \\ a \cdot 1 + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -3 \end{cases}$ suy ra phương trình đường thẳng $PA: y = -3x + 4$.

Xét đường thẳng $(d_1): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0$. Nếu $m=1$ thì $(d_1): x-1=0$ không thỏa mãn điều kiện. Khi $m \neq 1$ thì: $(d_1): y = \frac{m}{1-m}x + \frac{2m-1}{m-1}$. Điều kiện để $(d_1) \perp PA$ là $\frac{m}{1-m}(-3) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

c) Nếu $m=0$ thì $(d_1): y-1=0$ và $(d_2): x+1=0$ suy ra hai đường thẳng này luôn vuông góc với nhau và cắt nhau tại $I(-1;1)$. Nếu $m=1$ thì $(d_1): x-1=0$ và $(d_2): y-3=0$ suy ra hai đường thẳng này luôn vuông góc với nhau và cắt nhau tại $I(1;3)$. Nếu

$m \neq \{0;1\}$ thì ta viết lại $(d_1): y = \frac{m}{1-m}x + \frac{2m-1}{m-1}$ và $(d_2): y = \frac{m-1}{m}x + \frac{4m-1}{m}$. Ta thấy $\left(\frac{m}{1-m}\right)\left(\frac{m-1}{m}\right) = -1$ nên $(d_1) \perp (d_2)$.

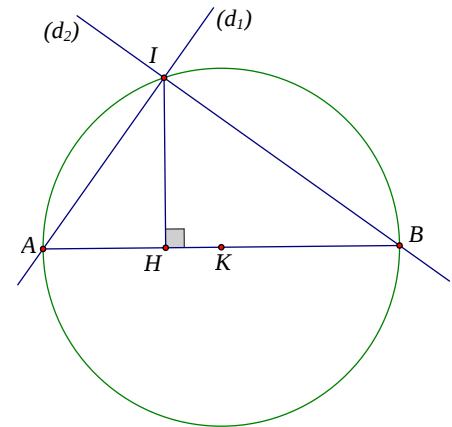
Do đó hai đường thẳng này luôn cắt nhau tại 1 điểm I .

Tóm lại với mọi giá trị của m thì hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ luôn vuông góc và cắt nhau tại 1 điểm I . Mặt khác theo câu a) ta có $(d_1), (d_2)$ lần lượt đi qua 2

điểm cố định A, B suy ra tam giác IAB vuông tại A . Nên I nằm trên đường tròn đường kính AB .

d) Ta có $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$. Dựng $IH \perp AB$ thì

$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB \leq \frac{1}{2} IK \cdot AB = \frac{1}{2} \frac{AB}{2} \cdot AB = \frac{AB^2}{4} = 2$. Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IAB là 2 khi và chỉ khi $IH = IK$. Hay tam giác IAB vuông cân tại I .



Bài 5. Cho góc $\widehat{xOy}$. Một đường thẳng d thay đổi luôn cắt các tia Ox ; Oy tại M và N . Biết giá trị biểu thức $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ không thay đổi khi đường thẳng d thay đổi. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

Giả sử $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{a}$ (1) (a là số dương cho trước). Lấy điểm D trên Oy sao cho $OD = a$ thì $OD < ON$. Vẽ DI song song với Ox ($I \in$ đoạn MN). Lấy E trên Ox sao cho $OE = ID$. Khi đó $OEID$ là hình bình hành.

$$\text{Ta có } \frac{OE}{OM} + \frac{OD}{ON} = \frac{NI}{NM} + \frac{EI}{ON} = \frac{NI}{NM} + \frac{MI}{MN} = 1 \Rightarrow \frac{1}{ON} + \frac{OE}{OD \cdot OM} = \frac{1}{OD} = \frac{1}{a} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{OM} = \frac{OE}{OD \cdot OM} \Rightarrow \frac{OE}{OD} = 1 \Rightarrow OE = OD = a$ không đổi, mà $D \in Oy$; $E \in Ox$ nên D ; E cố định.

Mặt khác O cố định và $OEID$ là hình bình hành nên I cố định.

Vậy d luôn đi qua I cố định (ĐPCM)

Bài 6. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m^2 - 1)x + 2m$ (m là tham số) và $(d_2): y = 3x + 4$. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau

Lời giải.

a/ Để đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau thì

$$\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 3 \\ 2m \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \Rightarrow m = -2 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Vậy với $m = -2$ thì đường thẳng (d_1) song song với đường thẳng (d_2)

Bài 7. Trong cùng mặt phẳng tọa độ, cho $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 1$ (m là tham số). Xác định m để:

- (d) tiếp xúc (P)
- (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
- (d) và (P) không có điểm chung.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 + mx + 1 = 0$ (*)

$$\Delta = m^2 - 4$$

a) (d) tiếp xúc (P) khi phương trình (*) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

b) (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$$

c) (d) và (P) không có điểm chung khi (*) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Bài 10. Cho hai hàm số bậc nhất $y = -x + 2$ và $y = (m+3)x + 4$. Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho là:

a) Hai đường thẳng cắt nhau

b) Hai đường thẳng song song.

Gợi ý.

a) Để hàm số $y = (m+3)x + 4$ là hàm số bậc nhất thì $m + 3 \neq 0$ suy ra $m \neq -3$.

Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow a \neq a'$

$$\Leftrightarrow -1 \neq m+3 \Leftrightarrow m \neq -4$$

Vậy với $m \neq -3$ và $m \neq -4$ thì đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau.

b) Đồ thị của hàm số đã cho là Hai đường thẳng song song

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = m+3 \\ 2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4 \text{ thỏa mãn điều kiện } m \neq -3$$

Vậy với $m = -4$ thì đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song

Bài 11. Cho đường thẳng $(m-2).x + (m-1).y = 1$ (d).

Tính giá trị của m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Lời giải.

+ Với $m = 2$, ta có đường thẳng $y = 1$

Do đó khoảng cách từ O đến (d) là 1 (1)

+ Với $m = 1$, ta có đường thẳng $x = -1$

Do đó khoảng cách từ O đến (d) là 1 (2)

+ Với $m \neq 1$ và $m \neq 2$

Gọi A là giao điểm của đường thẳng (d) với trục tung.

$$\text{Ta có: } x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{m-1}, \text{ do đó } OA = \frac{1}{|m-1|}$$

Gọi B là giao điểm của đường thẳng (d) với trục hoành.

$$\text{Ta có: } y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{m-2}, \text{ do đó } OB = \frac{1}{|m-2|}$$

Gọi h là khoảng cách Từ O đến đường thẳng (d). Ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = (m-1)^2 + (m-2)^2 = 2m^2 - 6m + 5 = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \text{ Suy ra } h^2 \leq 2,$$

$$\max h = \sqrt{2} \text{ khi và chỉ khi } m = \frac{3}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\max h = \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $m = \frac{3}{2}$

Bài 12. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho M và N là hai điểm phân biệt, di động lần lượt trên trục hoành và trên trục tung sao cho đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định I(1; 2). Tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ của M và tung độ của N; từ đó, suy

ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $Q = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$.

Lời giải.

Đặt $m = x_M$ và $n = y_N \Rightarrow m \cdot n \neq 0$ và $m \neq 1$ (*)

Nên đường thẳng qua ba điểm M, I, N có dạng: $y = ax + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = am + b \\ 2 = a + b \\ n = b \end{cases} \Rightarrow \text{hệ thức liên hệ giữa } m \text{ và } n \text{ là } 2m + n = mn$$

Chia hai vế cho $m \cdot n \neq 0$ ta được: $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1$ (**)

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n} \right)^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{mn} = 5 \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) - \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{n} \right)^2$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{5}; \text{ dấu “=” xảy ra khi } \frac{2}{m} = \frac{1}{n}; \text{ kết hợp (**): } m = 5, n = 2,5$$

(thỏa (*))

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{1}{5}$

Bài 13. Trong cùng một hệ tọa độ, cho đường thẳng d: $y = x - 2$ và parabol (P): $y = -x^2$. Gọi A và B là giao điểm của d và (P).

1) Tính độ dài AB.

2) Tìm m để đường thẳng d': $y = -x + m$ cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho $CD = AB$.

Lời giải.

1) Hoành độ giao điểm là nghiệm phương trình

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2$$

Vậy A(1; -1) và B(-2; -4) hoặc A(-2; -4) và B(1; -1)

2) Đẻ (d') cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình $x^2 - x + m = 0$ (1)

có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$

Ta có khoảng cách $AB^2 = 18$

Đẻ $CD = AB \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 18$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4m - 9 = 0 \Rightarrow m = -2 \text{ (TM)}$$

Vậy C(-1,-3) và D(2;0) hoặc D(-1;-3) hoặc C(2;0)

Bài 14. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = \frac{-1}{2}x^2$; điểm I(0; -2) và

điểm M(m; 0) (với m là tham số, $m \neq 0$). Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm I và M.

Chúng minh đường thẳng (d) luôn cắt đường thẳng (P) tại hai điểm phân biệt A, B với độ dài đoạn thẳng AB lớn hơn 4.

Lời giải.

PT đường thẳng (d) đi qua hai điểm I(0;-2) và M(m; 0) là $y = \frac{2}{m}x - 2$. Phương

trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $\frac{-1}{2}x^2 = \frac{2}{m}x - 2 \Leftrightarrow mx^2 + 4x - 4m = 0$ (*).

Có $\Delta' = 4 + 4m^2 > 0$ ($\forall m$).

Vậy phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 phân biệt. Chúng tỏ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó tọa độ hai điểm phân biệt A, B là

$$\begin{aligned} & A(x_1; -\frac{(x_1)^2}{2}), B(x_2; -\frac{(x_2)^2}{2}). \text{ Từ đó: } AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + \frac{(x_1 - x_2)^2 (x_1 + x_2)^2}{4} \\ & = \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \right] \left[1 + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right] \text{ (1)}. \end{aligned}$$

Áp dụng hệ thức Vi – et cho phương trình (*) ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{4}{m}$; $x_1 \cdot x_2 = -4$. Thay

vào (1) ta được:

$$AB^2 = \left[\left(-\frac{4}{m} \right)^2 - 4 \cdot (-4) \right] \left(1 + \frac{16}{4m^2} \right) = \left(1 + \frac{16}{m^2} \right) \left(1 + \frac{4}{m^2} \right) > 16 \text{ (}\forall m\text{)}$$

Suy ra $AB > 4$ (đpcm).

Bài 15. Cho (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và (d): $y = (m-1)x + \frac{m+3}{2} (m \in R)$

Xác định m để (d) cắt (P) tại 2 điểm $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ sao cho: $x_A^2 + x_B^2 \geq 10$

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{x^2}{2} = (m-1)x + \frac{m+3}{2} (*) \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0$$

$$\Delta' = m^2 - m + \frac{1}{4} + \frac{15}{4} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$$

Vậy phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt là x_A ; x_B

Theo Viét ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2(m-1) \\ x_A \cdot x_B = -3 - m \end{cases}$$

$$\text{Do } x_A^2 + x_B^2 \geq 0 \Rightarrow (x_A + x_B)^2 - 2x_A \cdot x_B \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 6m \geq 0 \Leftrightarrow 2m(m-3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0; m \geq 3 \\ m \leq 0; m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 0 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 0 \end{cases}$ thì (P) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt.

Bài 16. Trong cùng mặt phẳng toạ độ, cho (P): $y = \frac{x^2}{2}$, điểm $M(0;2)$.

Đường thẳng (d) đi qua M và không trùng với Oy. Chứng minh rằng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

Lời giải.

- Vì (d) đi qua M (0;2) và không trùng với Oy nên có dạng $y=ax+b$

- $M \in (d)$ nên: $2=a \cdot 0+b$ $b=2$ và (D): $y=ax+2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$\text{là: } \frac{x^2}{2} = ax + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2ax - 4 = 0 (*)$$

Vì phương trình (*) có hệ số $a=1$; $c = 4$ ($a \cdot c < 0$) nên (*) có 2 nghiệm phân biệt $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$

$$\text{Theo hệ thức Viét ta có: } \begin{cases} x_A + x_B = 2a \\ x_A \cdot x_B = -4 \end{cases}$$

$$\text{Vì } A \in (P) \Leftrightarrow y_A = \frac{x_A^2}{2}; B \in (P) \Leftrightarrow y_B = \frac{x_B^2}{2}$$

$$\Rightarrow OA^2 = (x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2 = x_A^2 + \frac{x_A^4}{4}; OB^2 = (x_B - 0)^2 + (y_B - 0)^2 = x_B^2 + \frac{x_B^4}{4}$$

$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (x_A - x_B)^2 + \left(\frac{x_A^2}{2} - \frac{x_B^2}{2} \right)^2 = x_A^2 + x_B^2 + \frac{x_A^4 + x_B^4}{4}$$

$$\text{Ta có: } OA^2 + OB^2 = x_A^2 + x_B^2 + \frac{x_A^4 + x_B^4}{4}$$

$$\text{Vậy } OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow \Delta AOB \text{ vuông tại } O$$

Bài 17. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m + 1$ ($m \neq 0$). Tìm m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải.

PT hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2 = 2mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ (*).

Có $\Delta' = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m$. Vậy phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B .

Theo định lý Vi – et ta có: $x_1 + x_2 = 2m, x_1 \cdot x_2 = m - 1$.

$$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2 - 4(m - 1) = 4 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (do } m \neq 0).$$

Bài 18. Cho Parabol $(P): y = ax^2$ ($a > 0$) và đường thẳng $(d): 2x - y - a^2 = 0$.

a) Tìm a để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B .

b) Gọi x_A, x_B là hoành độ hai điểm A, B . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{4}{x_A + x_B} + \frac{1}{x_A \cdot x_B}.$$

Lời giải.

a) PT hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $ax^2 = 2x - a^2 \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a^2 = 0$ (1).

Điều kiện cần và đủ để đường thẳng (d) cắt parabol tại hai điểm phân biệt A, B là phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \Leftrightarrow 1 - a^3 > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1 \text{ (do } a \neq 0).$$

b) Áp dụng hệ thức Vi – et cho phương trình (1) ta có $x_A + x_B = \frac{2}{a}$, $x_A \cdot x_B = a$ Thay

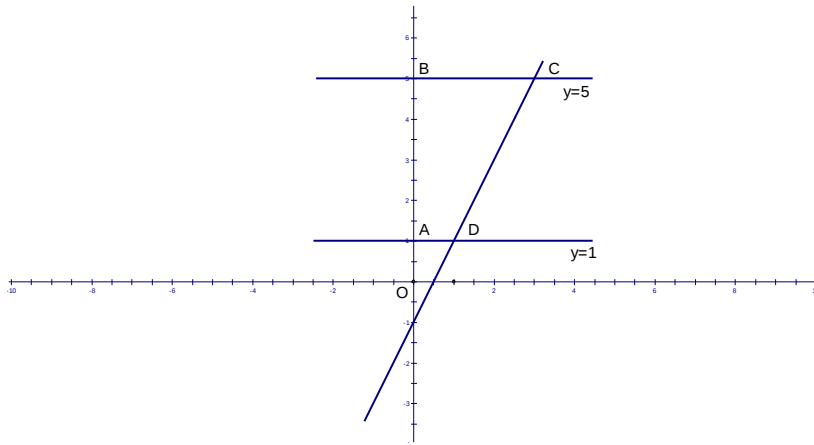
vào T thu được: $T = \frac{4}{x_A + x_B} + \frac{1}{x_A \cdot x_B} = 2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $2a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $2\sqrt{2}$ đạt được khi

Bài 19. Tìm hệ số $a > 0$ sao cho các đường thẳng $y = ax - 1$; $y = 1$; $y = 5$ và trục tung tạo thành hình thang có diện tích bằng 8 (đơn vị diện tích).

Lời giải.



+) Kí hiệu hình thang ABCD cần tìm như hình vẽ.

+) Tính được $C(\frac{6}{a}; 5)$; $D(\frac{2}{a}; 1)$

$$BC = \frac{6}{a}; AD = \frac{2}{a}$$

+) $S_{ABCD} = \left(\frac{6}{a} + \frac{2}{a}\right) \cdot 4 : 2 = 8$

$\Rightarrow a = 2$ (Thỏa ĐK $a > 0$)

+) Vậy phương trình đường thẳng là $y = 2x - 1$.

Bài 20. Cho hàm số $y = (m-1)x + m^2 - 1$ (m : tham số). Tìm m để đồ thị hàm số là đường thẳng cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB cân.

Lời giải.

Để đồ thị hàm số là đ-ờng thẳng cắt 2 trục tọa độ tại 2 điểm A và B sao cho tam giác OAB cân thì đồ thị hàm số đã cho song song với đ-ờng thẳng $y = x$ (hoặc $y = -x$)

Từ đó dẫn đến $\begin{cases} m-1=1 \\ m^2-1 \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m-1=-1 \\ m^2-1 \neq 0 \end{cases}$ giải 2 hệ PT đó tìm đ-ợc

$m = 2$ hoặc $m = 0$ và trả lời bài toán.

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2x + 3$

1. Chứng minh rằng (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt
2. Gọi A và B là các điểm chung của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ)

Lời giải.

1. Chứng minh rằng (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt

Hoành độ giao điểm đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình $x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ có $a - b + c = 0$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\frac{-c}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

$$x_1 = -1 \text{ và } x_2 = 3$$

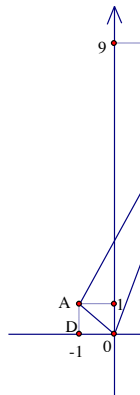
$$\text{Với } x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$$

$$\text{Với } x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3^2 = 9 \Rightarrow B(3; 9)$$

Vậy (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt A và B

2. Gọi A và B là các điểm chung của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ)

Ta biểu diễn các điểm A và B trên mặt phẳng tọa độ Oxy như hình vẽ



$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot DC = \frac{1 + 9}{2} \cdot 4 = 20$$

$$S_{BOC} = \frac{BC \cdot CO}{2} = \frac{9 \cdot 3}{2} = 13,5$$

$$S_{AOD} = \frac{AD \cdot DO}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0,5$$

Theo công thức cộng diện tích ta có:

$$\begin{aligned} S_{(ABC)} &= S_{(ABCD)} - S_{(BCO)} - S_{(ADO)} \\ &= 20 - 13,5 - 0,5 = 6 \quad (\text{đvdt}) \end{aligned}$$

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (D) và (L) lần lượt là đồ thị của hai hàm

$$\text{số: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ và } y = |x|.$$

a) Vẽ đồ thị (D) và (L).

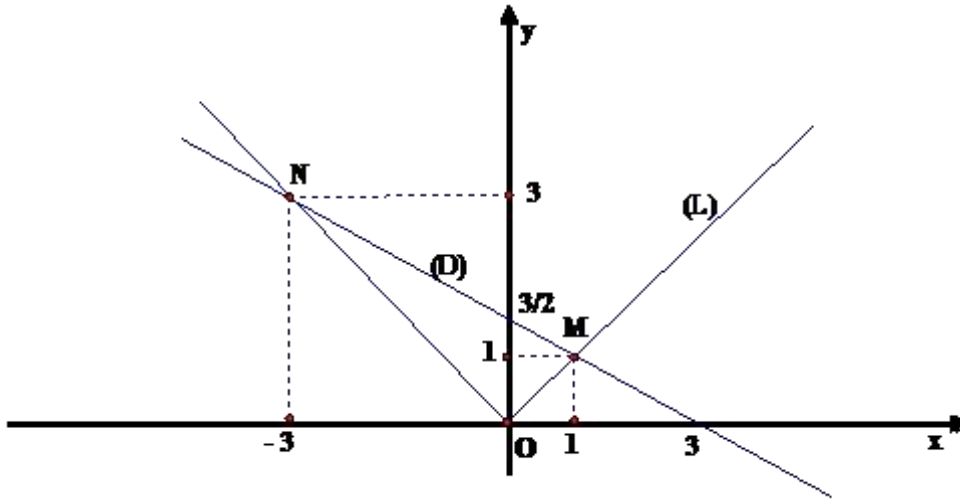
b) (D) và (L) cắt nhau tại M và N. Chứng minh OMN là tam giác vuông.

Lời giải.

$$\text{Đồ thị a) } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ có: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \\ y = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Đồ thị } y = |x| = \begin{cases} x \text{ khi } x \geq 0 \\ -x \text{ khi } x \leq 0 \end{cases}$$

Đồ thị như hình vẽ:



b) Đồ thị (D) và (L) cắt nhau tại hai điểm có tọa độ M(1; 1) và N(- 3; 3)

$$\text{Ta có: } OM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow OM^2 = 2$$

$$ON = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow ON^2 = 18$$

$$MN = \sqrt{(1-3)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow MN^2 = 20$$

$$\text{Vì: } OM^2 + ON^2 = MN^2$$

Vậy: tam giác OMN vuông tại O

Bài 23. a) Cho các hàm số bậc nhất: $y = 0,5x + 3$, $y = 6 - x$ và $y = mx$ có đồ thị lần lượt là các đường thẳng (d_1) , (d_2) và (Δ_m) . Với những giá trị nào của tham số m thì đường thẳng (Δ_m) cắt hai đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt tại hai điểm A và B sao cho điểm A có hoành độ âm còn điểm B có hoành độ dương?

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho M và N là hai điểm phân biệt, di động lần lượt trên trục hoành và trên trục tung sao cho đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $I(1; 2)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ của M và tung độ của N; từ đó, suy ra

giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $Q = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$.

Lời giải.

a) Điều kiện để (Δ_m) là đồ thị hàm số bậc nhất là $m \neq 0$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (Δ_m) là:

$$0,5x + 3 = mx \Leftrightarrow (m - 0,5)x = 3$$

Điều kiện để phương trình này có nghiệm âm là $m - 0,5 < 0$ hay $m < 0,5$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_2) và (Δ_m) là:

$$6 - x = mx \Leftrightarrow (m + 1)x = 6$$

Điều kiện để phương trình này có nghiệm dương là $m + 1 > 0$ hay $m > -1$

Vậy điều kiện cần tìm là: $-1 < m < 0,5$; $m \neq 0$

b) Đặt $m = x_M$ và $n = y_N \Rightarrow m \cdot n \neq 0$ và $m \neq 1$ (*)

Nên đường thẳng qua ba điểm M, I, N có dạng: $y = ax + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = am + b \\ 2 = a + b \\ n = b \end{cases} \Rightarrow \text{hệ thức liên hệ giữa } m \text{ và } n \text{ là } 2m + n = mn$$

Chia hai vế cho $m \cdot n \neq 0$ ta được: $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1$ (**)

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n} \right)^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{mn} = 5 \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) - \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{n} \right)^2$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{5}; \text{ dấu “=” xảy ra khi } \frac{2}{m} = \frac{1}{n}; \text{ kết hợp (**): } m = 5, n = 2,5$$

(thỏa (**))

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{1}{5}$

Bài 24. Trên cùng mặt phẳng tọa độ cho Parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m-2)x + 1$ và (d'): $y = -x + 3$ (m là tham số). Xác định m để (P), (d) và (d') có điểm chung.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d'):

$$2x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \quad (a+b+c=0)$$

$$\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -\frac{3}{2}$$

+ Khi $x=1$ thì $y=2$

+ Khi $x = -\frac{3}{2}$ thì $y = \frac{9}{2}$

Vậy (d') cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(1; 2)$ & $B(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2})$

Để (P), (d) và (d') có điểm chung thì (d) qua A hoặc B:

$$\begin{cases} 2 = (m-2) \cdot 1 + 1 \\ \frac{9}{2} = (m-2) \cdot (-\frac{3}{2}) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{11}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m=3$ hay $m=\frac{11}{2}$ thì (P), (d) và (d') có 1 điểm chung

Bài 25. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $I(0; 1)$ và cắt parabol (P): $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho độ dài đoạn thẳng $MN = 2\sqrt{10}$.

Lời giải.

Vì đường thẳng $x=0$ đi qua điểm $I(0; 1)$ và tiếp xúc với parabol (P) tại điểm $O(0;0)$ nên phương trình đường thẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài là $y = ax + 1$. PT hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2 = ax + 1 \Leftrightarrow x^2 - ax - 1 = 0(*)$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi PT (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = a^2 + 4 > 0$. Khi đó tọa độ giao điểm là $M(x_1; x_1^2)$,

$$N(x_2; x_2^2). \text{ Ta có: } MN = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow MN^2 = (2\sqrt{10})^2 \Leftrightarrow [(x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2]^{\frac{1}{2}} = (2\sqrt{10})^2$$

$$\Leftrightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2][1 + (x_1 + x_2)^2] = 40(1) \text{ Áp dụng hệ thức Vi - et cho phương trình (*) ta được: } x_1 + x_2 = a; x_1x_2 = -1. \text{ Thay vào (1), thu được:}$$

$$(a^2 + 4)(a^2 + 1) = 40 \Leftrightarrow a^4 + 5a^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow a = 2. \text{ Vậy phương trình đường thẳng cần lập là } y = 2x + 1 \text{ và } y = -2x + 1.$$

Bài 26. Cho Parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x - m + 1$. Tìm m để (d) để (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ mà $x_1 \cdot x_2 (y_1 + y_2) = -48$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $\frac{1}{2}x^2 = 2x - m + 1$ (1)

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3$. Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 2(m-1) \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y_1 = 2x_1 - m + 1 \\ y_2 = 2x_2 - m + 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 (y_1 + y_2) &= -48 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 (2x_1 - m + 1 + 2x_2 - m + 1) = -48 \\ &\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 (2(x_1 + x_2) - 2m + 2) = -48 \Leftrightarrow 2(m-1)(2 \cdot 4 - 2m + 2) = -48 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (chọn)} \\ m = 7 \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 27. Cho Parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = (3-m)x + 2 - 2m$. Tìm giá trị của m để (d) Cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thỏa mãn $|y_A - y_B| = 2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 + (3-m)x + 2 - 2m = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$, ta thấy x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình

$$(2). \text{ Lại có: } \begin{cases} x_A + x_B = m - 3 \\ x_A \cdot x_B = 2 - 2m \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y_A = (3-m)x_A + 2 - 2m \\ y_B = (3-m)x_B + 2 - 2m \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } |y_A - y_B| = 2 \Leftrightarrow |(3-m)(x_A - x_B)| = 2 \Leftrightarrow (3-m)^2 [(x_A + x_B)^2 - 4x_A \cdot x_B] = 4$$

$$\Leftrightarrow (m-3)^2 (m+1)^2 = 4.$$

$$\text{Giải ra ta được: } m = 1 \pm \sqrt{6}; m = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Bài 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = -\frac{1}{2}x^2$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm $I(0; -2)$ có hệ số góc k.

a) Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi k thay đổi.

b) Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu hai điểm A, B trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác HKI vuông tại I.

Lời giải.

a) Phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc k đi qua điểm I(0; -2) là $y = kx - 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$-\frac{1}{2}x^2 = kx - 2 \Leftrightarrow x^2 + kx - 4 = 0 (*) \text{ Có } \Delta' = k^2 + 4 > 0 (\forall k). \text{ Vậy } (*) \text{ có hai}$$

nghiệm phân biệt x_1 và x_2 .

Chúng ta tìm (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Theo hệ thức Vi – et, ta có $x_1 \cdot x_2 = -4$. Giả sử tọa độ các điểm A, B là $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Vì H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục hoành nên tọa độ H, K là $H(x_1; 0)$, $K(x_2; 0)$.

$$\text{Do đó: } IH^2 = x_1^2 + 4; KI^2 = x_2^2 + 4; HK^2 = (x_1 - x_2)^2. \text{ Suy ra: } IH^2 + KI^2 = x_1^2 + x_2^2 + 8 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (x_1 - x_2)^2 = HK^2.$$

Chúng ta tìm tam giác HIK vuông tại I (theo định lý Py- ta- go đảo).

Bài 29. Cho hai đường thẳng: $y = x + 3$ (d_1); $y = 3x + 7$ (d_2)

1) Gọi A và B lần lượt là giao điểm của (d_1) và (d_2) với trục Oy. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

2) Gọi J là giao điểm của (d_1) và (d_2). Tam giác OIJ là tam giác gì? Tính diện tích của tam giác đó.

Lời giải.

1) Tìm được $A(0;3)$; $B(0;7)$ Suy ra $I(0;5)$

2) Hoành độ giao điểm J của (d_1) và (d_2) là nghiệm của PT: $x + 3 = 3x + 7$

$$\Rightarrow x = -2 \Rightarrow y_J = 1 \Rightarrow J(-2;1)$$

$$\text{Suy ra: } OI^2 = 0^2 + 5^2 = 25; OJ^2 = 2^2 + 1^2 = 5; IJ^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$\Rightarrow OJ^2 + IJ^2 = OI^2 \Rightarrow \text{tam giác OIJ là tam giác vuông tại J}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OIJ} = \frac{1}{2} OI \cdot OJ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 5(\text{đvdt})$$

Bài 30. Cho đường thẳng (d) có phương trình: $2(m - 1)x + (m - 2)y = 2$

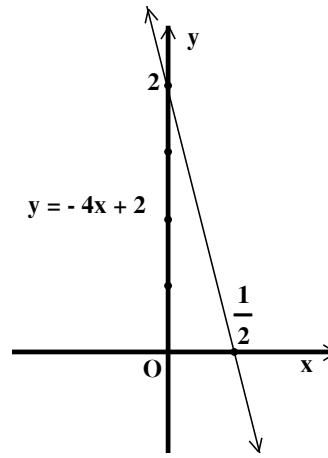
a/ Vẽ (d) với $m = 3$.

b/ Chứng minh rằng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi m, tìm điểm cố định ấy.

c/ Tìm giá trị của m để (d) cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất

Lời giải.

- a/ Với $m = 3$ ta có $y = -4x + 2$
 Giao với trục tung Oy tại điểm $(0; 2)$
 Giao với trục hoành Ox tại điểm $(0,5; 0)$
 Ta có đồ thị hàm số như hình bên



- b/ Gọi điểm cố định mà mọi đường thẳng(d) đi qua là $M(x_0; y_0)$ ta có:
 $2(m-1)x_0 + (m-2)y_0 = 2$ với mọi $m \Leftrightarrow (2x_0 + y_0)m - 2(x_0 + y_0 + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + y_0 = 0 \\ x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -2 \end{cases} \quad \forall m$ vậy tọa độ điểm cố định là $M(1; -2)$

Cách khác: Với $m = 2$ ta có đường thẳng $x = 1$, với $m = 1$ ta có đường thẳng $y = -2$; thay $x = 1$; $y = -2$ vào phương trình ta có:
 $2(m-1).1 + (m-2).(-2) = 2 \Leftrightarrow 2m - 2 - 2m + 4 - 2 = 0$ điều này luôn đúng với mọi m . Vậy các đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định có tọa độ $(1; -2)$ với mọi m .

- c/ $2(m-1)x + (m-2)y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{-2(m-1)}{m-2} \cdot x + \frac{2}{m-2}$. Vì (d) không đi qua gốc

$O(0; 0)$

Gọi A, B lần lượt là giao của (d) với hai trục tọa độ Oy và Ox ta có tọa độ giao điểm là

$A(0; \frac{2}{m-2})$ và $B(\frac{1}{m-1}; 0)$. Gọi H là hình chiếu của O trên AB, xét $\triangle AOB$ vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OA^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{1}{\frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OA^2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{m-1}\right)^2 + \left(\frac{2}{m-2}\right)^2} = \frac{4}{4(m-1)^2 + (m-2)^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{2}{\sqrt{(m-2)^2 + 4(m-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5\left(m-\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}} \leq \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{5}}} = \sqrt{5}; \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow m =$$

$$\frac{6}{5}$$

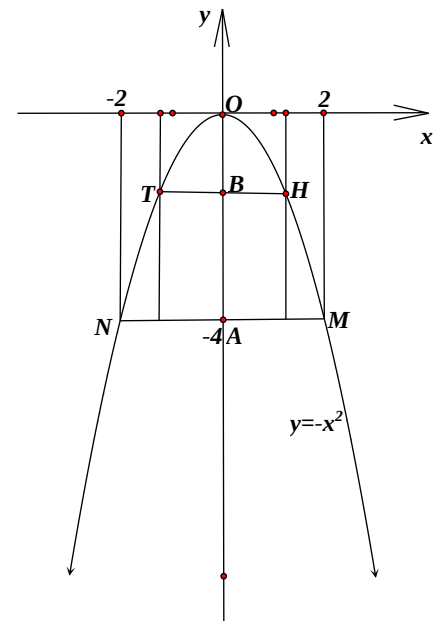
Vậy độ dài OH lớn nhất $\Leftrightarrow m = \frac{6}{5}$, khi đó ta có $OH = \sqrt{5}$ (đv dài)

Bài 31. Một xe tải có chiều rộng 2,4m và chiều cao 2,5m muốn đi qua một cái cổng có hình parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh parabol) tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (bỏ qua độ dày của cổng)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi parabol (P) $y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$
2. Hỏi xe tải có thể qua cổng được không? Tại sao?

Lời giải.

1) Giả sử trên mặt phẳng tọa độ, độ dài các đoạn thẳng được tính theo đơn vị mét. Do khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m nên $MA = NA = 2m$. Theo giả thiết ta có $OM = ON = 2\sqrt{5}$, áp dụng định lý Pitago ta tính được: $OA = 4$ vậy $M(2; -4), N(-2; -4)$. Do $M(2; -4)$ thuộc parabol nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $(P): y = ax^2$ hay $-4 = a.2^2 \Rightarrow a = -1$ và $(P): y = -x^2$.



- 2) Để đáp ứng chiều cao trước hết xe tải phải đi vào chính giữa cổng.

Xét đường thẳng $(d): y = -\frac{3}{2}$ (ứng với chiều cao

của xe). Đường thẳng này cắt Parabol tại 2 điểm có tọa độ thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

suy ra tọa độ hai giao điểm là $T\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\right); H\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow HT = 3\sqrt{2} > 2,4$. Vậy xe tải có thể đi qua cổng.

Bài 32. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$, có đồ thị là (P). Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm M và N nằm trên (P) lần lượt có hoành độ là -2 và 1 .

Gợi ý.

Tìm được $M(-2; -2); N(1; -\frac{1}{2})$

Phương trình đường thẳng có dạng $y = ax + b$, đường thẳng đi qua M và N nên

$$\begin{cases} -2a + b = -2 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Tìm được $a = \frac{1}{2}$; $b = -1$. Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $y = \frac{1}{2}x - 1$

Bài 33. Cho đường thẳng (d): $y = 2x + m - 1$

- Khi $m = 3$, tìm a để điểm $A(a; -4)$ thuộc đường thẳng (d).
- Tìm m để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại M và N sao cho tam giác OMN có diện tích bằng 1.

Lời giải.

a) Thay $m = 3$ vào phương trình đường thẳng ta có: $y = 2x + 2$.

Để điểm $A(a; -4)$ thuộc đường thẳng (d) khi và chỉ khi: $-4 = 2a + 2$ suy ra $a = -3$.

b) Cho $x = 0$ suy ra $y = m - 1$ suy ra: $ON = |m - 1|$, cho $y = 0$ suy ra $x = \frac{1 - m}{2}$

$$\text{suy ra } OM = \left| \frac{1 - m}{2} \right| \text{ hay } OM = \left| \frac{m - 1}{2} \right|$$

Để diện tích tam giác OMN = 1 khi và chỉ khi: $OM \cdot ON = 2$ khi và chỉ khi $|m - 1|$.

$$\left| \frac{m - 1}{2} \right| = 2$$

Khi và chỉ khi $(m - 1)^2 = 4$ khi và chỉ khi: $m - 1 = 2$ hoặc $m - 1 = -2$ suy ra $m = 3$ hoặc $m = -1$

Vậy để diện tích tam giác OMN = 1 khi và chỉ khi $m = 3$ hoặc $m = -1$.

Bài 34. Cho parabol $y = x^2$ (P) và đường thẳng $y = mx$ (d), với m là tham số.

- Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.
- Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm, mà khoảng cách giữa hai điểm này bằng $\sqrt{6}$

Gợi ý.

1/ P.trình hoành độ giao điểm (P) và (d) :

$$x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow x(x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = m \end{cases}$$

Vì giao điểm $\in (P)$: $y = x^2 \Rightarrow y = m^2$. Với $y = 9 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow (m = 3 \vee m = -3)$

Vậy với $m = \pm 3$ thì (P) và (d) cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.

2/ Từ câu 1 $\Rightarrow$ (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi $m \neq 0$.

Khi đó giao điểm thứ nhất là gốc tọa độ O ($x = 0$; $y = 0$), giao điểm thứ 2 là điểm A có ($x = m$; $y = m^2$).

Khoảng cách giữa hai giao điểm: $AO = \sqrt{m^2 + m^4} = \sqrt{6} \Leftrightarrow m^4 + m^2 - 6 = 0$ (1)

Đặt $t = m^2; (t \geq 0)$ (1) $\Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t_1 = 3 \text{ (nhận)} \vee t_2 = -2 \text{ (loại)})$

Với $t_1 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 3, \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$ (nhận)

Vậy với $m = \pm\sqrt{3}$ thì (P) cắt (d) tại hai điểm có khoảng cách bằng $\sqrt{6}$.

Bài 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 2$ (m là tham số).

1) Tìm m để (d) cắt (P) tại một điểm duy nhất.

2) Cho hai điểm A(-2; m) và B(1; n). Tìm m, n để A thuộc (P) và B thuộc (d).

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến (d). Tìm m để độ dài đoạn OH lớn nhất.

Lời giải.

1) (d) cắt (P) tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow$ Phương trình hoành độ của (d) và (P):

$$-x^2 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 + mx + 2 = 0 \text{ có nghiệm duy nhất.}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}.$$

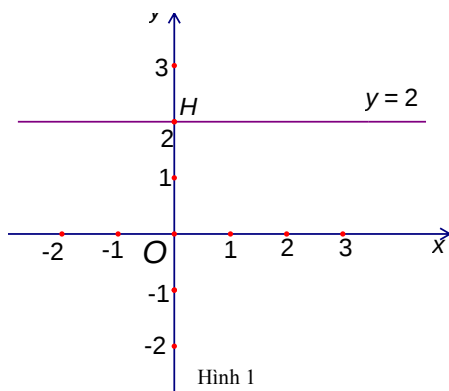
Vậy giá trị m cần tìm là $m = \pm 2\sqrt{2}$.

b) ta có:

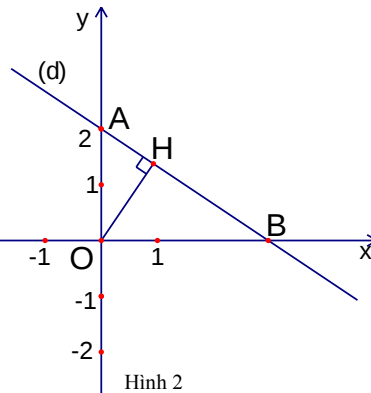
$$\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -(-2)^2 \\ n = m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = -2 \end{cases}$$

Vậy $m = -4, n = -2$.

- Nếu $m = 0$ thì (d) thành: $y = 2 \Rightarrow$ khoảng cách từ O đến (d) = 2 $\Rightarrow OH = 2$ (Hình 1).



Hình 1



Hình 2

- Nếu $m \neq 0$ thì (d) cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$ và cắt trục hoành tại điểm $B(-\frac{2}{m}; 0)$ (Hình 2).

$$\Rightarrow OA = 2 \text{ và } OB = \left| -\frac{2}{m} \right| = \frac{2}{|m|}.$$

ΔOAB vuông tại O có $OH \perp AB \Rightarrow$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{4} + \frac{m^2}{4} = \frac{m^2 + 1}{4}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}. \text{ Vì } m^2 + 1 > 1 \forall m \neq 0 \Rightarrow \sqrt{m^2 + 1} > 1 \Rightarrow OH < 2.$$

So sánh hai trường hợp, ta có $OH_{\max} = 2 \Leftrightarrow m = 0$.

Bài 36. Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = (3 - m)x + 2 - 2m$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng với $m \neq -1$ thì (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B.

b) Gọi y_A, y_B lần lượt là tung độ các điểm A, B. Tìm m để $|y_A - y_B| = 2$.

Lời giải

a) ta có:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$-x^2 = (3 - m)x + 2 - 2m.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3 - m)x + 2 - 2m = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (3 - m)^2 - 4(2 - 2m) = m^2 + 2m + 1$$

Viết được: $\Delta = (m + 1)^2 > 0$, với $m \neq -1$ và kết luận đúng.

b) Tìm m để $|y_A - y_B| = 2$.

Giải PT (1) được hai nghiệm: $x_1 = -2$ và $x_2 = m - 1$

$$\text{Tính được: } y_1 = -4, y_2 = -(m - 1)^2$$

$$|y_A - y_B| = |y_1 - y_2| = |m^2 - 2m - 3|$$

$$|y_A - y_B| = 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 2 \text{ hoặc } m^2 - 2m - 3 = -2$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{6} \text{ hoặc } m = 1 \pm \sqrt{2}$$

Bài 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng

(d): $y = -\frac{2}{3}(m+1)x + \frac{1}{3}$ (m là tham số).

1) Chứng minh rằng mỗi giá trị của m thì (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

2) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm (P) và (d), đặt $f(x) = x^3 + (m+1)x^2 - x$.

Chứng minh rằng: $f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^3$.

Lời giải.

a) Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{-2(m+1)}{3} + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x^2 + 2(m+1)x - 1 = 10 \end{cases} \quad (1)$$

(1) Có hệ số a và c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt mọi m nên (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m .

a) Theo hệ thức Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(m+1)}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = \frac{-3(x_1 + x_2)}{2} \\ 3x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

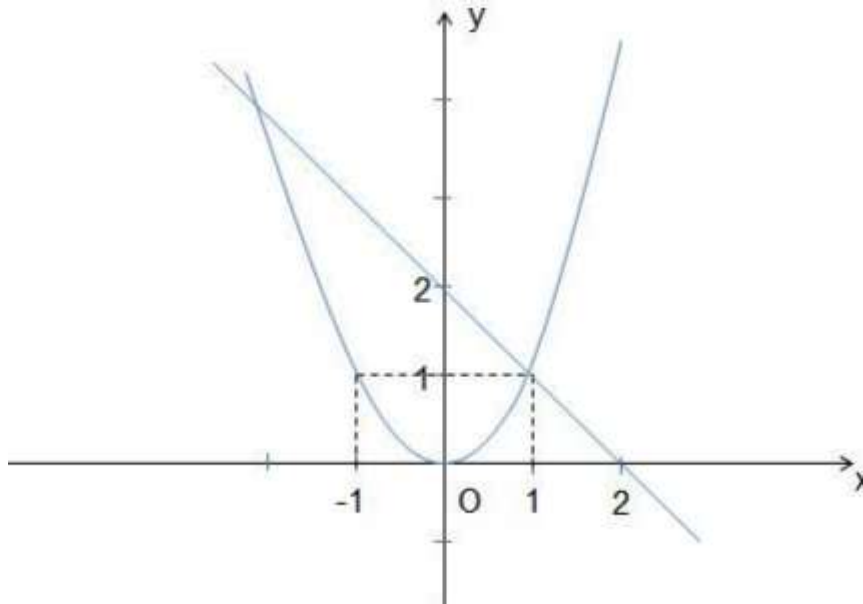
Ta có: $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 + (m+1)(x_1^2 - x_2^2) - x_1 + x_2$
 $\Rightarrow 2(f(x_1) - f(x_2)) = 2x_1^3 - 2x_2^3 - 3(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_2^2) - 2x_1 + 2x_2$
 $= -x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2(x_2 - x_1) - 2(x_1 - x_2) = -x_1^3 + x_2^3 + (x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2)$
 $= -(x_1^3 - x_2^3 - 3x_1 x_2(x_1 - x_2)) = [(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2)] = -(x_1 - x_2)^3$. Nên
 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{-1}{2}(x_1 - x_2)^3$.

Bài 38. Trong cùng một hệ toạ độ, gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$ và (d) là đồ thị của hàm số $y = -x + 2$

- 1) Vẽ các đồ thị (P) và (d). Từ đó, xác định toạ độ giao điểm của (P) và (d) bằng đồ thị.
- 2) Tìm a và b để đồ thị Δ của hàm số $y = ax + b$ song song với (d) và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1

Lời giải.

- 1) Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị hàm số:



Dựa vào đồ thị ta có giao điểm của d và (P) là 2 điểm $M(1; 1)$; $N(-2; 4)$

2) Do đồ thị Δ của hàm số $y = ax + b$ song song với (d) $y = -x + 2$

Nên ta có: $a = -1$.

Δ cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1 nên ta thay $x = -1$ vào pt (P) ta được:
 $y = 1$

Thay $x = -1$; $y = 1$ vào pt Δ ta được $a = -1$; $b = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình của Δ là $y = -x$

Bài 39. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$

a) Vẽ đồ thị (P) .

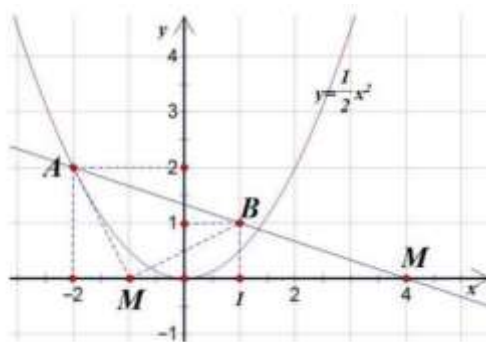
b) Trên (P) lấy điểm A có hoành độ $x_A = -2$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất, biết rằng $B(1; 1)$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$

a) Bạn đọc tự lập bảng giá trị

Đồ thị:



b) Vì $A \in (P)$ có hoành độ $x_A = -2$ nên $y_A = 2$. Vậy $A(-2; 2)$

Lấy $M(x_M; 0)$ bất kì thuộc Ox,

Ta có: $|MA - MB| \leq AB$ (Do M thay đổi trên O và BĐT tam giác)

Dấu “=” xảy ra khi điểm A, B, M thẳng hàng khi đó M là giao điểm của đường thẳng AB và trục Ox.

- Lập pt đường thẳng AB :

Gọi phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = ax + b$

Do A, B thuộc đường thẳng AB nên ta có:

$$\begin{cases} -2a + b = 2 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = \frac{-1}{3}x + \frac{4}{3}$

- Tìm giao điểm của đường thẳng AB và O ($y = 0$) $\Rightarrow x = 4 \Rightarrow M(4; 0)$

Bài 40.

- a) Xác định điểm M thuộc đường Parabol $(P): y = x^2$ sao cho độ dài đoạn IM là nhỏ nhất, trong đó $I(0;1)$.
- b) Giả sử điểm A chạy trên Parabol $(P): y = x^2$. Tìm tập hợp trung điểm J của đoạn OA .

Lời giải.

a) Giả sử điểm M thuộc đường Parabol $(P): y = x^2$ suy ra $M(m; m^2)$. Khi đó

$$IM^2 = m^2 + (m^2 - 1)^2 = m^4 - m^2 + 1. \text{ Vậy } IM = \sqrt{\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ta thấy IM nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ khi $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $M\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

b) Giả sử điểm $A(a; a^2)$ thuộc $(P): y = x^2$. Gọi $I(x_1; y_1)$ là trung điểm đoạn OA .

Suy ra
$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \\ y_1 = \frac{a^2}{2} = 2x_1^2 \end{cases}.$$

Vậy tập hợp các trung điểm I của đoạn OA là đường Parabol $(P_1): y = 2x^2$.

Bài 41. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m-1)x + m + 4$ (tham số m)

- 1) Với $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .
- 2) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Lời giải.

1) Với $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .
 $m = 2$ ta có phương trình đường thẳng (d) là: $y = x + 6$
 Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$+) x = -2 \Rightarrow y = 4$$

$$+) x = 3 \Rightarrow y = 9$$

Vậy $m = 2$ thì (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm $A(-2; 4)$ và $B(3; 9)$

2) Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = (m-1)x + m + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m-1)x - m - 4 = 0(*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow 1. (-m-4) < 0$$

$$\Leftrightarrow m > -4$$

Bài 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm A và B chạy trên parabol

$(P): y = x^2$ sao cho $A, B \neq O(0;0)$ và $OA \perp OB$. Giả sử I là trung điểm của đoạn AB .

- Tìm quỹ tích điểm trung điểm I của đoạn AB .
- Đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.
- Xác định tọa độ điểm A và B sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Giả sử $A(a;a^2)$ và $B(b;b^2)$ là hai điểm thuộc (P) . Để $A, B \neq O(0;0)$ và $OA \perp OB$ ta cần điều kiện: $ab \neq 0$ và $OA^2 + OB^2 = AB^2$ hay $ab \neq 0$ và

$a^2 + a^4 + b^2 + b^4 = (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2$. Rút gọn hai vế ta được: $ab = -1$. Gọi $I(x_1; y_1)$ là

trung điểm đoạn AB . Khi đó: $\begin{cases} x_1 = \frac{a+b}{2} \\ y_1 = \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{2} = 2x_1^2 + 1 \end{cases}$. Vậy tọa độ điểm

I thỏa mãn phương trình $y = 2x^2 + 1$.

Ta cũng có thể tìm điều kiện để $OA \perp OB$ theo cách sử dụng hệ số góc: Đường

thẳng OA có hệ số góc là $k_1 = \frac{a^2}{a} = a$, đường thẳng OB có hệ số góc là $k_2 = \frac{b^2}{b} = b$.

Suy ra điều kiện để $OA \perp OB$ là $a.b = -1$

b) Phương trình đường thẳng đi qua A và B là $(AB): \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a^2}{b^2-a^2}$ hay

(AB): $y = (a+b)x - ab = (a+b)x + 1$. Từ đây ta dễ dàng suy ra đường thẳng

$(AB): y = (a+b)x + 1$ luôn luôn đi qua điểm cố định $(0;1)$.

c) Vì $OA \perp OB$ nên $ab = -1$. Độ dài đoạn $AB = \sqrt{(a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2}$ hay

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + a^4 + b^4 - 2a^2b^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab|, \quad a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2. \text{ Ta có: } AB \geq \sqrt{2|ab| + 2 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2} = 2. \text{ Vậy}$$

AB ngắn nhất bằng 2 khi $a^2 = b^2, ab = -1$. Ta có thể chỉ ra cặp điểm đó là: $A(-1;1)$ và $B(1;1)$.

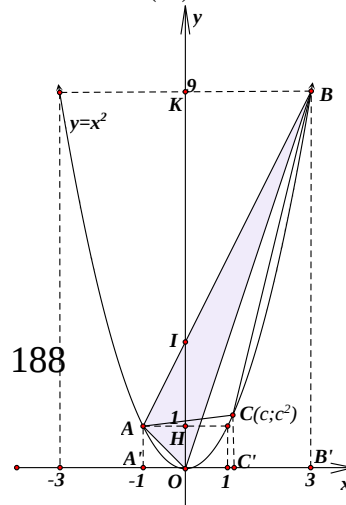
Bài 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$, trên (P) lấy hai điểm $A(-1;1), B(3;9)$.

- a) Tính diện tích tam giác OAB .
- b) Xác định điểm C thuộc cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải:

a) Gọi $y = ax + b$ là phương

trình đường thẳng AB .



$$\text{Ta có } \begin{cases} a \cdot (-1) + b = 1 \\ a \cdot 3 + b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

suy ra phương trình đường thẳng AB

$(d): y = 2x + 3$. Đường thẳng AB cắt

trục Oy tại điểm $I(0;3)$. Diện tích tam giác OAB là:

$$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2}AH.OI + \frac{1}{2}BK.OI. \text{ Ta có } AH = 1; BK = 3, OI = 3. \text{ Suy ra } S_{OAB} = 6$$

(đvdt).

b) Giả sử $C(c; c^2)$ thuộc cung nhỏ (P) với $-1 < c < 3$. Diện tích tam giác:

$S_{ABC} = S_{ABB'A'} - S_{ACC'A'} - S_{BCC'B'}$. Các tứ giác $ABB'A', AA'C'C, CBB'C'$ đều là hình thang

vuông nên ta có: $S_{ABC} = \frac{1+9}{2} \cdot 4 - \frac{1+c^2}{2} \cdot (c+1) - \frac{9+c^2}{2} \cdot (3-c) = 8 - 2(c-1)^2 \leq 8$. Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng 8 (đvdt) khi $C(1;1)$.

Bài 44. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$ và parabol $(P): y = x^2$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB .

Lời giải:

1) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$. Ta có $y(2) = 4; y(-3) = 9$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $B(2;4)$ và $A(-3;9)$.

2) Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B xuống trục hoành.

Ta có $S_{\Delta OAB} = S_{AA'B'B} - S_{\Delta OAA'} - S_{\Delta OBB'}$

Ta có $A'B' = |x_{B'} - x_{A'}| = x_{B'} - x_{A'} = 5; AA' = y_A = 9; BB' = y_B = 4$

$$S_{AA'BB'} = \frac{AA' + BB'}{2} \cdot A'B' = \frac{9+4}{2} \cdot 5 = \frac{65}{2} \text{ (đvdt)}, S_{\Delta OAA'} = \frac{1}{2} A'A \cdot A'O = \frac{27}{2} \text{ (đvdt)}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = S_{AA'B'B} - S_{\Delta OAA'} - S_{\Delta OBB'} = \frac{65}{2} - \left(\frac{27}{2} + 4 \right) = 15$$

CHỦ ĐỀ 7. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Tóm tắt phương pháp

Bước 1 : Lập hệ phương trình (phương trình)

- 1) Chọn ẩn và tìm điều kiện của ẩn (thông thường ẩn là đại lượng mà bài toán yêu cầu tìm).
- 2) Biểu thị các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- 3) Lập hệ phương trình, (phương trình) biểu thị mối quan hệ giữa các lượng.

Bước 2 : Giải hệ phương trình, (phương trình)

Bước 3 : Kiểm tra nghiệm của phương trình và hệ phương trình.

Bước 4 : Đưa ra kết luận cho bài toán.

Dạng 1: Chuyển động

(trên đường bộ, trên đường sông có tính đến dòng nước chảy)

Bài 1. Hai ô tô đi từ A đến B dài 200km. Biết vận tốc xe thứ nhất nhanh hơn vận tốc xe thứ hai là 10km/h nên xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải.

Gọi vận tốc xe thứ hai là x (km/h). Đk: $x > 0$

Vận tốc xe thứ nhất là $x + 10$ (km/h)

Thời gian xe thứ nhất đi quãng đường từ A đến B là : $\frac{200}{x+10}$ (giờ)

Thời gian xe thứ hai đi quãng đường từ A đến B là : $\frac{200}{x}$ (giờ)

Xe thứ nhất đến B sớm 1 giờ so với xe thứ hai nên ta có phương trình:

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+10} = 1$$

Giải phương trình ta có $x_1 = 40$, $x_2 = -50$ (loại)

$x_1 = 40$ (TMĐK). Vậy vận tốc xe thứ nhất là 50km/h, vận tốc xe thứ hai là 40km/h.

Bài 2. Cho quãng đường từ địa điểm A tới địa điểm B dài 90 km. Lúc 6 giờ một xe máy đi từ A để tới B Lúc 6 giờ 30 phút cùng ngày, một ô tô cũng đi từ A để tới B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h (Hai xe chạy trên cùng một con đường đã cho). Hai xe nói trên đều đến B cùng lúc. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải.

Xe máy đi trước ô tô thời gian là : 6 giờ 30 phút - 6 giờ = 30 phút = $\frac{1}{2}h$.

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) ($x > 0$)

Vì vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h nên vận tốc của ô tô là $x + 15$ (km/h)

Thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là : $\frac{90}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là : $\frac{90}{x+15}$ (h)

Do xe máy đi trước ô tô $\frac{1}{2}$ giờ và hai xe đều tới B cùng một lúc nên ta có phương trình :

$$\frac{90}{x} - \frac{1}{2} = \frac{90}{x+15}$$

$$\Rightarrow 90.2.(x+15) - x(x+15) = 90.2x$$

$$\Leftrightarrow 180x + 2700 - x^2 - 15x = 180x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 15x - 2700 = 0$$

Ta có :

$$\Delta = 15^2 - 4.(-2700) = 11025 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{11025} = 105$$

$$x_1 = \frac{-15-105}{2} = -60 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

$$x_2 = \frac{-15+105}{2} = 45 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy vận tốc của xe máy là 45 (km/h) , vận tốc của ô tô là $45 + 15 = 60$ (km/h).

Bài 3. Một ca nô chạy xuôi dòng từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B đến A hết tất cả 4 giờ. Tính vận tốc ca nô khi nước yên lặng, biết rằng quãng sông AB dài 30 km và vận tốc dòng nước là 4 km/giờ.

Lời giải.

Gọi vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là x km/giờ ($x > 4$)

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $x + 4$ (km/giờ), khi ngược dòng là $x - 4$

(km/giờ). Thời gian ca nô xuôi dòng từ A đến B là $\frac{30}{x+4}$ giờ, đi ngược dòng

từ B đến A là $\frac{30}{x-4}$ giờ.

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{30}{x+4} + \frac{30}{x-4} = 4$ (4)

(4) $\Leftrightarrow 30(x-4) + 30(x+4) = 4(x+4)(x-4) \Leftrightarrow x^2 - 15x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 16$. Nghiệm $x = -1 < 0$ nên bị loại

Vậy vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 16km/giờ.

Bài 4. Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30 km. Một ca nô đi xuôi dòng từ bến A đến bến B rồi lại ngược dòng từ bến B về bến A. Tổng thời gian ca nô đi xuôi dòng và ngược dòng là 4 giờ. Tìm vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Lời giải.

Gọi vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là x (km/h) (đk: $4 < x < 30$)

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng: $x + 4$ (km/h)

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng: $x - 4$ (km/h)

Thời gian ca nô đi xuôi dòng: $\frac{30}{x+4}$ (h)

Thời gian ca nô đi ngược dòng: $\frac{30}{x-4}$ (h)

Tổng thời gian ca nô đi xuôi dòng và ngược dòng là 4h nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x+4} + \frac{30}{x-4} = 4 \Rightarrow x^2 - 15x - 16 = 0$$

Giải phương trình trên ta được: $\begin{cases} x_1 = -1(\text{không thỏa ĐK}) \\ x_2 = 16(\text{thỏa ĐK}) \end{cases}$

Vậy vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 16km/h

Bài 5. Quãng đường từ Quy Nhơn đến Bồng Sơn dài 100 km. Cùng một lúc, một xe máy khởi hành từ Quy Nhơn đi Bồng Sơn và một xe ô tô khởi hành từ Bồng Sơn đi Quy Nhơn. Sau khi hai xe gặp nhau, xe máy đi 1 giờ 30 phút nữa mới đến Bồng Sơn. Biết vận tốc hai xe không thay đổi trên suốt quãng đường đi và vận tốc của xe máy kém vận tốc xe ô tô là 20 km/h. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải.

Đổi $1\text{h}30' = 1,5\text{h}$

Đặt địa điểm :

- Quy Nhơn là A
- Hai xe gặp nhau là C
- Bồng Sơn là B



Gọi vận tốc của xe máy là $x(km/h)$. ĐK : $x > 0$.

Suy ra :

Vận tốc của ô tô là $x + 20(km/h)$.

Quãng đường BC là : $1,5x(km)$

Quãng đường AC là : $100 - 1,5x(km)$

Thời gian xe máy đi từ A đến C là : $\frac{100 - 1,5x}{x}(h)$

Thời gian ô tô máy đi từ B đến C là : $\frac{1,5x}{x + 20}(h)$

Vì hai xe khởi hành cùng lúc, nên ta có phương trình : $\frac{100 - 1,5x}{x} = \frac{1,5x}{x + 20}$

Giải pt :

$$\begin{aligned}\frac{100 - 1,5x}{x} &= \frac{1,5x}{x + 20} \Rightarrow (100 - 1,5x)(x + 20) = 1,5x^2 \Rightarrow 100x + 2000 - 1,5x^2 - 30x = 1,5x^2 \\ &\Rightarrow 3x^2 - 70x - 2000 = 0\end{aligned}$$

$$\Delta' = 35^2 + 3.2000 = 1225 + 6000 = 7225 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{7225} = 85$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = \frac{35 + 85}{3} = 40$ (thỏa mãn ĐK)

$$x_2 = \frac{35 - 85}{3} = -\frac{50}{3} \text{ (không thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy vận tốc của xe máy là $40 km/h$.

Vận tốc của ô tô là $40 + 20 = 60(km/h)$.

Bài tập vận dụng:

Bài 7. Một ô tô đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

Bài 8. Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120 km với vận tốc dự định

trước. Sau khi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h trên

quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

Bài 9. Một canô xuôi từ bến sông A đến bến sông B với vận tốc 30 km/h, sau đó lại ngược từ B trở về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian đi ngược 1 giờ 20 phút. Tính

khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết rằng vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của canô lúc xuôi và lúc ngược bằng nhau.

Bài 10. Một canô xuôi một khúc sông dài 90 km rồi ngược về 36 km. Biết thời gian xuôi dòng sông nhiều hơn thời gian ngược dòng là 2 giờ và vận tốc khi xuôi dòng hơn vận tốc khi ngược dòng là 6 km/h. Hỏi vận tốc canô lúc xuôi và lúc ngược dòng.

Dạng 2: Toán làm chung – làm riêng (toán vôi nước)

Bài 11. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

Lời giải.

Gọi thời gian người thứ nhất hoàn thành một mình xong công việc là x (giờ), ĐK $x > \frac{12}{5}$

Thì thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là x + 2 (giờ)

Mỗi giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (cv), người thứ hai làm được $\frac{1}{x+2}$ (cv)

Vì cả hai người cùng làm xong công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ nên mỗi giờ cả hai đội làm được 1: $\frac{12}{5} = \frac{5}{12}$ (cv)

Do đó ta có phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0$$

$$\Delta' = 49 + 120 = 169, \sqrt{\Delta'} = 13$$

$$\Rightarrow x = \frac{7-13}{5} = \frac{-6}{5} \text{ (loại)} \text{ và } x = \frac{7+13}{5} = \frac{20}{5} = 4 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy người thứ nhất làm xong công việc trong 4 giờ,

người thứ hai làm xong công việc trong $4+2 = 6$ giờ.

Bài 12. Hai vòi nước cùng chảy đầy một bể không có nước trong 3h 45ph . Nếu chảy riêng rẽ , mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể ? biết rằng vòi chảy sau lâu hơn vòi trước 4 h .

Lời giải.

Gọi thời gian vòi đầu chảy chảy một mình đầy bể là x ($x > 0$, x tính bằng giờ)

Gọi thời gian vòisau chảy chảy một mình đầy bể là y ($y > 4$, y tính bằng giờ)

1 giờ vòi đầu chảy được $\frac{1}{x}$ (bể)

1 giờ vòi sau chảy được $\frac{1}{y}$ (bể)

1 giờ hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (bể) (1)

Hai vòi cùng chảy thì đầy bể trong 3h 45ph = $\frac{15}{4}$ h

Vậy 1 giờ cả hai vòi chảy được 1: $\frac{15}{4} = \frac{4}{15}$ (bể) (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{15}$

Mất khác ta biết nếu chảy một mình thì vòi sau chảy lâu hơn vòi trước 4 giờ tức là $y - x = 4$

Vậy ta có hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{4}{5} \\ y = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 14x - 60 = 0 \\ y = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x - 30 = 0 \\ y = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 6 \\ x = -2,5 \end{cases} \\ y = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 6 \\ y = 10 \end{cases} (a) \\ \begin{cases} x = -2,5 \\ y = 1,5 \end{cases} (b) \end{cases}$$

Hệ (a) thoả mãn đk của ẩn

Hệ (b) bị loại vì $x < 0$

Vậy Vòi đầu chảy một mình đầy bể trong 6 h

Vòi sau chảy một mình đầy bể trong 10 h

Bài 13. Hai người thợ cùng làm một công việc . Nếu làm riêng rẽ , mỗi người nửa việc thì tổng số giờ làm việc là 12h 30ph . Nếu hai người cùng làm thì hai người

chỉ làm việc đó trong 6 giờ. Như vậy , làm việc riêng rẽ cả công việc mỗi người mất bao nhiêu thời gian ?

Lời giải.

Gọi thời gian người thứ nhất làm riêng rẽ để xong nửa công việc là x ($x > 0$)

Gọi thời gian người thứ hai làm riêng rẽ để xong nửa công việc là y ($y > 0$)

Ta có pt : $x + y = 12\frac{1}{2}$ (1)

thời gian người thứ nhất làm riêng rẽ để xong công việc là $2x \Rightarrow 1$ giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{2x}$ công việc

Gọi thời gian người thứ hai làm riêng rẽ để xong công việc là $2y \Rightarrow 1$ giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{2y}$ công việc

1 giờ cả hai người làm được $\frac{1}{6}$ công việc nên ta có pt : $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{6}$ (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ pt : } \begin{cases} x + y = 12\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{15}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{15}{2} \\ y = 5 \end{cases}$$

Vậy nếu làm việc riêng rẽ cả công việc một người làm trong 10 giờ còn người kia làm trong 5 giờ

Bài 14. Hai người thợ cùng làm công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ, người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì trong bao lâu làm xong công việc?

Lời giải.

Gọi x, y là thời gian người thợ thứ nhất và người thợ thứ 2 làm một mình ($x, y > 0$, tính bằng giờ).

- Một giờ mỗi người làm được $\frac{1}{x}; \frac{1}{y}$ công việc cả 2 người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$.

(vì 2 người làm trong 16 giờ thì xong công việc)

- Trong 3 giờ người thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ (CV), 6 giờ người 2 làm được $\frac{6}{y}$ (CV)

vì cả hai làm được $\frac{1}{4}$ (CV) nếu ta có $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$

Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases}.$$

Vậy người thứ nhất hoàn thành công việc trong 24 giờ

người thứ hai hoàn thành công việc trong 48 giờ

Bài 15. Hai tổ thanh niên tình nguyện cùng sửa một con đường vào bản trong 4 giờ thì xong . Nếu làm riêng thì tổ 1 làm nhanh hơn tổ 2 6 giờ . Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu sẽ xong việc ?

Lời giải.

Gọi thời gian một mình tổ 1 sửa xong con đường là x (giờ) ($x \geq 4$)

Thời gian một mình tổ 2 sửa xong con đường là $x + 6$ (giờ)

Trong 1 giờ tổ 1 sửa được $\frac{1}{x}$ (con đường)

Trong 1 giờ tổ 2 sửa được $\frac{1}{x+6}$ (con đường)

Trong 1 giờ cả hai tổ sửa được $\frac{1}{4}$ (con đường)

Vậy ta có pt: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(x+6) + 4x = x(x+6) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 6; x_2 =$

-4

$x_2 = -4 < 4$, không thoả mãn điều kiện của ẩn

Vậy một mình tổ 1 sửa xong con đường hết 6 ngày

một mình tổ 2 sửa xong con đường hết 12 ngày

Bài 16. Hai đội công nhân làm một đoạn đường . Đội 1 làm xong một nửa đoạn đường thì đội 2 đến làm tiếp nửa còn lại với thời gian dài hơn thời gian đội 1 đã đã làm là 30 ngày . Nếu hai đội cùng làm thì trong 72 ngày xong cả đoạn đường .Hỏi mỗi đội đã làm bao nhiêu ngày trên đoạn đường này ?

Lời giải.

Gọi thời gian đội 1 làm là x ngày ($x > 0$) thì thời gian đội 2 làm việc là $x + 30$ (ngày)

Mỗi ngày đội 1 làm được $\frac{1}{2x}$ (đoạn đường)

Mỗi ngày đội 2 làm được $\frac{1}{2(x+30)}$ (đoạn đường)

Mỗi ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{72}$ (đoạn đường)

Vậy ta có pt : $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+30)} = \frac{1}{72}$

Hay $x^2 - 42x - 1080 = 0$

$$\Delta' = 21^2 + 1080 = 1521 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 39$$

$$x_1 = 21 + 39 = 60 ; x_2 = 21 - 39 = -18 < 0 \text{ không thỏa mãn đk của ẩn}$$

Vậy đội 1 làm trong 60 ngày , đội 2 làm trong 90 ngày .

Bài 17. Hai đội công nhân trồng rừng phải hoàn thành kế hoạch trong cùng một thời gian . Đội 1 phải trồng 40 ha , đội 2 phải trồng 90 ha . Đội 1 hoàn thành công việc sớm hơn 2 ngày so với kế hoạch .Đội 2 hoàn thành muộn hơn 2 ngày so với kế hoạch . Nếu đội 1 làm công việc trong một thời gian bằng thời gian đội 2 đã làm và đội 2 làm trong thời gian bằng đội 1 đã làm thì diện tích trồng được của hai đội bằng nhau . Tính thời gian mỗi đội phải làm theo kế hoạch ?

Lời giải.

Gọi thời gian mỗi đội phải làm theo kế hoạch là x (ngày) , $x > 0$

Thời gian đội 1 đã làm là $x - 2$ (ngày)

Thời gian đội 2 đã làm là $x + 2$ (ngày)

Mỗi ngày đội 1 trồng được $\frac{40}{x-2}$ (ha)

Mỗi ngày đội 2 trồng được $\frac{90}{x+2}$ (ha)

Nếu đội 1 làm trong $x + 2$ ngày thì trồng được $\frac{40}{x-2}(x+2)$ (ha)

Nếu đội 2 làm trong $x - 2$ ngày thì trồng được $\frac{90}{x+2}(x-2)$ (ha)

Theo đầu bài diện tích rừng trồng được của hai đội trong trường này là bằng nhau nên ta có pt:

$$\frac{40}{x-2}(x+2) = \frac{90}{x+2}(x-2)$$

Hay $5x^2 - 52x + 20 = 0$

$$\Delta' = 26^2 - 5.20 = 576 , \sqrt{\Delta'} = 24$$

$$x_1 = \frac{26+24}{5} = 10 ; x_2 = \frac{26-24}{5} = \frac{2}{5}$$

$x_2 < 2$, không thoả mãn đk của ẩn Vậy theo kế hoạch mỗi đội phải làm việc 10 ngày .

Bài 18. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong . Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được 25% công việc . Hỏi mỗi người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong .

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số giờ người thứ nhất người thứ hai một mình làm xong công việc đó ($x > 0, y > 0$)

$$\text{Ta có hệ pt } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 28 \end{cases}$$

Bài 19. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không chứa nước thì sau 6 giờ đầy bể . Nếu vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ , vòi thứ 2 chảy trong 3 giờ thì được $\frac{2}{5}$ bể . Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu thì đầy bể ?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số giờ vòi thứ nhất , vòi thứ hai chảy đầy bể một mình ($x > 0, y > 0$)

$$\text{Ta có hệ pt } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$$

$x = 10, y = 15$ thoả mãn đk của ẩn . Vậy vòi thứ nhất chảy một mình mất 10 giờ, vòi thứ hai chảy một mình mất 15 giờ .

Bài 20. Hai người dự định làm một công việc trong 12 giờ thì xong . Họ làm với nhau được 8 giờ thì người thứ nhất nghỉ , còn người thứ hai vẫn tiếp tục làm . Do cố gắng tăng năng suất gấp đôi , nên người thứ hai đã làm xong công việc còn lại trong 3giờ 20phút . Hỏi nếu mỗi người thợ làm một mình với năng suất dự định ban đầu thì mất bao lâu mới xong công việc nói trên ?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là thời gian người thợ thứ nhất và người thợ thứ hai làm xong công việc với năng suất dự định ban đầu .

Một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Một giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Một giờ cả hai người làm được $\frac{1}{12}$ (công việc)

Nên ta có pt : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ (1)

trong 8 giờ hai người làm được $8 \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$ (công việc)

Công việc còn lại là $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (công việc)

Năng suất của người thứ hai khi làm một mình là $2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$ (Công việc)

Mà thời gian người thứ hai hoàn thành công việc còn lại là $\frac{10}{3}$ (giờ) nên ta có pt

$\frac{1}{3} : \frac{2}{y} = \frac{10}{3}$ hay $\frac{y}{6} = \frac{10}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ pt :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{y}{6} = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=30 \\ y=20 \end{cases}$$

Vậy theo dự định người thứ nhất làm xong công việc hết 30 giờ và người thứ hai hết 20 giờ .

Bài 21. Hai người A và B làm xong công việc trong 72 giờ , còn người A và C làm xong công việc trong đó trong 63 giờ và người B và C làm xong công việc ấy trong 56 giờ . Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì trong bao lâu thì trong bao lâu sẽ làm xong công việc?

Nếu ba người cùng làm sẽ hoàn thành công việc trong mấy giờ ?

Lời giải.

Gọi người A một mình làm xong công việc trong x (giờ), $x > 0$ thì mỗi giờ làm được $\frac{1}{x}$ (công việc). Người B một mình làm xong công việc trong y (giờ), $y > 0$ thì mỗi giờ làm được $\frac{1}{y}$ (công việc). Người C một mình làm xong công việc trong z (giờ), $z > 0$ thì mỗi giờ làm được $\frac{1}{z}$ (công việc)

$$\text{Ta có hpt : } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{72} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{63} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{56} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{504}{3} = 168 \\ y = \frac{504}{4} = 126 \\ z = \frac{504}{5} = 100\frac{5}{4} \end{cases}$$

Nếu cả ba người cùng làm thì mỗi giờ làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{12}{504}$ (công việc)

Vậy cả ba người cùng làm sẽ hoàn thành công việc trong $\frac{504}{12} = 42$ (giờ)

Bài 22. Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc. Thời gian để đội I làm một mình xong công việc ít hơn thời gian để đội II làm một mình xong công việc đó là 4 giờ. Tổng thời gian này gấp 4,5 lần thời gian hai đội cùng làm chung để xong công việc đó. Hỏi mỗi đội làm một mình thì phải bao lâu mới xong.

Lời giải.

Gọi thời gian đội I làm một mình xong công việc là x giờ ($x > 0$)

Suy ra thời gian đội II làm một mình xong công việc là $x + 4$ giờ

Trong 1 giờ hai đội làm chung được : $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{2x+4}{x(x+4)}$ (công việc)

Thời gian để hai đội làm chung xong công việc là $\frac{x(x+4)}{2x+4}$ (giờ)

Vậy ta có pt : $2x + 4 = 4,5 \cdot \frac{x(x+4)}{2x+4}$ hay $x^2 + 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -8$ (loại) $x_2 = 4$ (

thỏa mãn điều kiện của ẩn).

Vậy Đội I làm một mình xong công việc hết 4 giờ, đội hai hết 8 giờ.

Bài tập vận dụng.

Bài 23. Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai

người chỉ làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi một người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong?

Bài 24. Nếu vòi A chảy 2 giờ và vòi B chảy trong 3 giờ thì được $\frac{4}{5}$ hồ. Nếu vòi A chảy trong 3 giờ và vòi B chảy trong 1 giờ 30 phút thì được $\frac{1}{2}$ hồ. Hỏi nếu chảy một mình mỗi vòi chảy trong bao lâu mới đầy hồ.

Bài 25. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi II cần nhiều thời gian hơn vòi I là 5 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể?

Dạng 3: Toán liên quan đến tỉ lệ phần trăm.

Bài 26. Tháng giêng hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy; tháng hai do cải tiến kỹ thuật tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% so với tháng giêng, vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng giêng mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Lời giải.

Gọi x, y số chi tiết máy của tổ 1, tổ 2 sản xuất trong tháng giêng ($x, y \in \mathbb{N}^*$), ta có $x + y = 900$ (1) (vì tháng giêng 2 tổ sản xuất được 900 chi tiết). Do cải tiến kỹ thuật nên tháng hai tổ 1 sản xuất được: $x + 15\%x$, tổ 2 sản xuất được: $y + 10\%y$.

$$\text{Cả hai tổ sản xuất được: } 1,15x + 1,10y = 1010 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 900 \\ 1,15x + 1,1y = 1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,1x + 1,1y = 990 \\ 1,15x + 1,1y = 1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,05x = 20 \\ x + y = 900 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 400 \text{ và } y = 500 \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy trong tháng giêng tổ 1 sản xuất được 400 chi tiết máy, tổ 2 sản xuất được 500 chi tiết máy.

Bài 27. Trong tháng thanh niên Đoàn trường phát động và giao chỉ tiêu mỗi chi đoàn thu gom 10kg giấy vụn làm kế hoạch nhỏ. Để nâng cao tinh thần thi đua bí thư chi đoàn 10A chia các đoàn viên trong lớp thành hai tổ thi đua thu gom giấy vụn. Cả hai tổ đều rất tích cực. Tổ 1 thu gom vượt chỉ tiêu 30%, tổ hai gom vượt

chỉ tiêu 20% nên tổng số giấy chi đoàn 10A thu được là 12,5 kg. Hỏi mỗi tổ được bí thư chi đoàn giao chỉ tiêu thu gom bao nhiêu kg giấy vụn?

Lời giải.

Gọi số kg giấy vụn tổ 1 được bí thư chi đoàn giao là x (kg)

(Đk : $0 < x < 10$)

Số kg giấy vụn tổ 2 được bí thư chi đoàn giao là y (kg) (Đk : $0 < x < 10$)

Theo đầu bài ta có hpt:
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 1,3x + 1,2y = 12,5 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được : $(x; y) = (5; 5)$

Trả lời : số giấy vụn tổ 1 được bí thư chi đoàn giao là 5 kg

Số giấy vụn tổ 2 được bí thư chi đoàn giao là 5 kg

Bài tập vận dụng.

Bài 28. Trong tháng giêng hai tổ sản xuất được 720 chi tiết máy. Trong tháng hai, tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt mức 12% nên sản xuất được 819 chi tiết máy. Tính xem trong tháng giêng mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Bài 29. Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu người. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2%, còn tỉnh B tăng 1,1%. Tổng số dân của cả hai tỉnh năm nay là 4 045 000 người. Tính số dân của mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay?

Dạng 4: Toán có nội dung hình học.

Bài 30. Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng một nửa chiều dài. Biết rằng nếu giảm mỗi chiều đi 2m thì diện tích hình chữ nhật đã cho giảm đi một nửa. Tính chiều dài hình chữ nhật đã cho.

Lời giải.

Gọi chiều dài của hình chữ nhật đã cho là x (m), với $x > 4$.

Vì chiều rộng bằng nửa chiều dài nên chiều rộng là: $\frac{x}{2}$ (m)

=> diện tích hình chữ nhật đã cho là: $x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$ (m²)

Nếu giảm mỗi chiều đi 2 m thì chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là:

$x - 2$ và $\frac{x}{2} - 2$ (m)

khi đó, diện tích hình chữ nhật giảm đi một nửa nên ta có phương trình:

$$(x-2)\left(\frac{x}{2}-2\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2}-2x-x+4=\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2-12x+16=0$$

$$\Rightarrow x_1=6+2\sqrt{5} \text{ (thỏa mãn } x>4\text{);}$$

$$x_2=6-2\sqrt{5} \text{ (loại vì không thỏa mãn } x>4\text{)}$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật đã cho là $6+2\sqrt{5}$ (m).

Bài 31. Một phòng họp có 320 ghế ngồi được xếp thành từng dãy và số ghế mỗi dãy đều bằng nhau. Nếu số dãy ghế tăng thêm 1 và số ghế mỗi dãy tăng thêm 2 thì trong phòng có 374 ghế. Hỏi trong phòng có bao nhiêu dãy ghế và mỗi dãy có bao nhiêu ghế?

Lời giải.

Gọi số dãy ghế trong phòng họp là x (dãy) ($x \in \mathbb{N}^*$)

Gọi số ghế trong mỗi dãy là y (ghế) ($y \in \mathbb{N}^*$)

Vì phòng họp có 320 ghế ngồi được xếp thành từng dãy và số ghế mỗi dãy đều bằng nhau nên ta có phương trình: $xy=320$ (1)

Vì số dãy ghế tăng thêm 1 và số ghế mỗi dãy tăng thêm 2 thì trong phòng có 374 ghế nên ta có phương trình: $(x+1)(y+2)=374$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy=320 \\ (x+1)(y+2)=374 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=320 \\ xy+2x+y+2=374 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=320 \\ 2x+y=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{320}{x} \\ 2x+\frac{320}{x}=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{320}{x} \\ x^2-26x+160=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{320}{x} \\ x^2-26x+160=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{320}{x} \\ x^2-26x+160=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=32 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=16 \\ y=20 \end{cases}$$

Vậy trong phòng họp có 10 dãy ghế và mỗi dãy có 32 ghế

Hoặc là trong phòng họp có 16 dãy ghế và mỗi dãy có 20 ghế

Bài tập vận dụng.

Bài 32. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 280 m. Người ta làm lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng 2 m. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là 4256 m^2 .

Bài 33. Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài lên 10 m, tăng chiều rộng lên 5 m thì diện tích tăng 500 m^2 . Nếu giảm chiều dài 15 m và giảm chiều rộng 9 m thì diện tích giảm 600 m^2 . Tính chiều dài, chiều rộng ban đầu.

Bài 34. Cho một tam giác vuông. Nếu tăng các cạnh góc vuông lên 2 cm và 3 cm thì diện tích tam giác tăng 50 cm^2 . Nếu giảm cả hai cạnh đi 2 cm thì diện tích sẽ giảm đi 32 cm^2 . Tính hai cạnh góc vuông.

Dạng 5: Toán về tìm số.

Bài 35. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên cần tìm là: $\overline{ab}$ ($a \neq 0$)

Tổng các chữ số bằng 11 nên: $a + b = 11$ (1)

Nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị do đó: $\overline{ba} - \overline{ab} = 27 \Leftrightarrow (10b + a) - (10a + b) = 27 \Leftrightarrow 9a - 9b = 27 \Leftrightarrow a - b = 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b = 11 \\ a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 74.

Bài tập vận dụng:

Bài 36. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng số đó gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị của nó và nếu số cần tìm chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và số dư là 3.

Bài 37. Nếu tử số của một phân số được tăng gấp đôi và mẫu số thêm 8 thì giá trị của phân số bằng $\frac{1}{4}$. Nếu tử số thêm 7 và mẫu số tăng gấp 3 thì giá trị phân số bằng $\frac{5}{24}$.

Tìm phân số đó.

Bài 38. Nếu thêm 4 vào tử và mẫu của một phân số thì giá trị của phân số giảm 1. Nếu bớt 1 vào cả tử và mẫu, phân số tăng $\frac{3}{2}$. Tìm phân số đó.

CHỦ ĐỀ 8. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực dương $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}$$

Lời giải.

$$\text{Đặt } a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$$

$$P = \frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} = \frac{yz}{xy+xz+2yz} + \frac{zx}{xy+yz+2xz} + \frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

Thì

$$3-P = 1 - \frac{yz}{xy+xz+2yz} + 1 - \frac{zx}{xy+yz+2xz} + 1 - \frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$3-P = (xy+yz+xz) \left(\frac{1}{xy+xz+2yz} + \frac{1}{xy+yz+2xz} + \frac{1}{xz+yz+2xy} \right)$$

$$\text{Áp dụng Bất đẳng thức } \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}$$

$$(\text{Do ta áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương: } A+B+C \geq 3\sqrt[3]{ABC}; \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{ABC}})$$

Nhân theo vế 2 bất đẳng thức trên, ta được:

$$(A+B+C) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}$$

$$\text{Khi đó Ta có } 3-P \geq (xy+yz+xz) \frac{9}{4xy+4yz+4xz} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} xy+yz+2xz = xy+2yz+xz = 2xy+yz+xz \\ xyz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Bài 2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4+yz} + \frac{y^2}{y^4+xz} + \frac{z^2}{z^4+xy} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Vì x, y, z dương, áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$+) 2x^2\sqrt{yz} \leq x^4 + yz \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2\sqrt{yz}} \geq \frac{1}{x^4 + yz} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}} \quad (1)$$

$$+) \frac{2}{\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow : \frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Tương tự:

$$\frac{y^2}{y^4 + xz} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right); \quad \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{xy + yz + zx}{xyz} \quad (3)$$

Mà lại có : $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad (4)$

Từ (3) và (4) có : $A \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3xyz}{xyz} = \frac{3}{2}$ đpcm

Dấu “=” xảy ra khi $x=y=z=1$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$

Lời giải.

Ta có:

$$y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{1-x} - 2 + \frac{1}{x} - 1 + 3 = \frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + 3$$

Vì $0 < x < 1 \Rightarrow \frac{2x}{1-x} > 0; \frac{1-x}{x} > 0$

Ta có: $\frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x}} = 2\sqrt{2}$ (Bất đẳng thức Cô si)

Dấu “=” xảy ra khi: $\frac{2x}{1-x} = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} (TM) \\ x = -1 - \sqrt{2} (L) \end{cases}$

$\Rightarrow y \geq 2\sqrt{2} + 3$

Dấu “=” xảy ra khi $x = -1 + \sqrt{2}$

Vậy $y_{\min} = 2\sqrt{2} + 3$ khi $x = -1 + \sqrt{2}$

Câu 4. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2}$$

Lời giải.

Xét

$$\begin{aligned} \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} - (2b - a) &= \frac{5b^3 - a^3 - (ab + 3b^2)(2b - a)}{ab + 3b^2} \\ &= \frac{5b^3 - a^3 - (2ab^2 - a^2b + 6b^3 - 3b^2a)}{ab + 3b^2} = \frac{-b^5 - a^3 + a^2b + b^2a}{ab + 3b^2} \\ &= \frac{-(a+b)(a-b)^2}{ab + 3b^2} \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} &\leq 2b - a \end{aligned}$$

Ta có 2 BĐT tương tự:

$$\frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} \leq 2c - b; \quad \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq 2a - c$$

Cộng từng vế 3 BĐT trên ta được

$$P \leq 2(a+b+c) - (a+b+c) = a+b+c = 3$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Câu 5. Chứng minh rằng: $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$

Lời giải.

$$\text{Đặt } S = \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} 2S &= \frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2014}{2^{2012}} + \frac{2015}{2^{2013}} \\ \Rightarrow 2S - S &= \frac{3}{2} + \frac{4-3}{2^2} + \frac{5-4}{2^3} + \dots + \frac{2015-2014}{2^{2013}} - \frac{2015}{2^{2014}} \\ \Rightarrow S &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2013}}\right) - \frac{2015}{2^{2014}} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2013}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2014}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{2013}}$$

Do đó:

$$S = 2 - \frac{1}{2^{2013}} - \frac{2015}{2^{2014}} < 2 \Rightarrow 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$$

Câu 6. Cho x; y là hai số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy}$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy} \\ &= 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{xy} + 2 \\ &= 3 + \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{2xy} \right) + \frac{x^2+y^2}{2xy} \end{aligned}$$

Do x, y là các số dương nên ta có:

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{2xy} \geq 2\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{2xy}} = 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{2xy} \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 = 4x^2y^2 \Leftrightarrow (x^2-y^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y^2$$

$$\Leftrightarrow x = y (x, y > 0)$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2xy} \geq 1 \Leftrightarrow x = y$$

Cộng các bất đẳng thức ta được $S \geq 6$

$S = 6 \Leftrightarrow x = y$. Vậy Min $S = 6$ khi và chỉ khi $x = y$

Bài 7. Cho các số a, b, c không âm. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 2(ab + bc + ca)$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Đặt

$$\sqrt[3]{a^2} = x; \sqrt[3]{b^2} = y; \sqrt[3]{c^2} = z.$$

$$\Rightarrow a^2 = x^3; b^2 = y^3; c^2 = z^3, a = \sqrt{x^3}; b = \sqrt{y^3}; c = \sqrt{z^3}; x, y, z \geq 0$$

Bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}) \quad (1)$$

Vì vai trò của x; y; z bình đẳng nên có thể giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$

Khi đó

$$x(x-y)^2 + z(y-x)^2 + (z+x-y)(x-y)(y-z) \geq 0$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(z+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \quad (2)$$

$$\text{Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có } xy(x+y) \geq 2xy\sqrt{xy} = 2\sqrt{x^3y^3} \quad (3)$$

Tương tự ta có:

$$yz(y+z) \geq 2\sqrt{y^3z^3} \quad (4)$$

$$zx(z+x) \geq 2\sqrt{z^3x^3} \quad (5)$$

Cộng về theo về các bất đẳng thức (3), (4), (5) ta được

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}) \quad (6)$$

Từ (2) và (6) ta có

$$x^3 + y^3 + z^2 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3})$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$ hay $a=b=c$.

Bài 8. Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn: $x(x+1) + y(y+1) + z(z+1) \leq 18$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1}$

Lời giải.

Với mọi $a, b, c > 0$, ta có:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \quad (*)$$

Với mọi $a, b, c > 0$, áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương, ta có:

$$\begin{cases} a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} > 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} > 0 \end{cases} \Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad (**)$$

Áp dụng BĐT (*) với $a = x, b = y, c = z$ và từ điều kiện của x, y, z ta có:

$$18 \geq x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} + x + y + z$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2 + 3(x+y+z) - 54 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+y+z+9)(x+y+z-6) \leq 0$$

$$\Rightarrow x+y+z \leq 6 \quad (\text{do } x+y+z+9 > 0) \quad (***)$$

Áp dụng BĐT (**) với $a = x+y+1, b = y+z+1, c = z+x+1$, ta có:

$$B = \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \geq \frac{9}{x+y+1+y+z+1+z+x+1} = \frac{9}{2(x+y+z)+3}$$

$$\text{Áp dụng (***) ta có: } B \geq \frac{9}{2.6+3} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x + y + 1 = y + z + 1 = z + x + 1 \Leftrightarrow x = y = z = 2 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Bài 9. Cho a, b, c là ba số thực dương và có tổng bằng 1.

$$\text{Chứng minh: } \frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Thay $1 = a + b + c$ ta có: $a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$

$$\text{Do đó: } \frac{a-bc}{a+bc} = \frac{a+bc-2bc}{a+bc} = 1 - \frac{2bc}{a+bc} = 1 - \frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$$

Ta có 2 đẳng thức tương tự

$$\frac{b-ca}{b+ca} = 1 - \frac{2ca}{(b+c)(b+a)}; \quad \frac{c-ab}{c+ab} = 1 - \frac{2ab}{(c+a)(c+b)}$$

Cộng từng vế của 3 đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} = 3 - 2 \left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \right]$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} &\leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \right] \geq \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4(b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2) \geq 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc)$$

$$\Leftrightarrow b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2 \geq 6abc(*)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ta có:

$$\begin{cases} b^2c + c^2a + a^2b \geq 3abc \\ bc^2 + ca^2 + ab^2 \geq 3abc \end{cases} \Rightarrow (*) \text{ đúng}$$

Vậy BĐT đã cho được chứng minh.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } a = b = c = \frac{1}{3}$$

Bài 10. a) Cho x, y là 2 số thực khác 0. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

b) Cho a, b là hai số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$

Lời giải.

$$a) \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} (x \neq 0; y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4 + y^4 - x^3y - xy^3}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(x^3 - y^3)}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x^2 + xy + y^2)}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right]}{x^2y^2} \geq 0$$

b) Tìm minP (a, b > 0)

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}(a+b)} = \frac{(a+b)^2 + ab}{\sqrt{ab}(a+b)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(a+b)^2 + ab + \frac{3}{4}(a+b)^2}{\sqrt{ab}(a+b)} = \frac{\frac{1}{4}(a+b)^2 + ab}{\sqrt{ab}(a+b)} + \frac{\frac{3}{4}(a+b)}{\sqrt{ab}} \\ &\geq \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2 \cdot ab}}{\sqrt{ab}(a+b)} + \frac{\frac{3}{4}\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \\ &= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}(a+b)^2 = ab \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = b$$

*Cách khác

$$P = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}(a+b)} = \frac{(a+b)^2 + ab}{\sqrt{ab}(a+b)} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \right) \geq \frac{3}{4} \cdot 2 + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}$$

Câu 11. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 2014$

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

Lời giải.

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x^2 + y^2}; b = \sqrt{y^2 + z^2}; c = \sqrt{z^2 + x^2} (*) \Rightarrow a + b + c = 2014(1)$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}; y^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}; z^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Áp dụng BĐT Cau chy ta có:

$$y + z \leq \sqrt{2(y^2 + z^2)} = b\sqrt{2}$$

$$z + x \leq \sqrt{2(z^2 + x^2)} = c\sqrt{2} \quad (0,25đ)$$

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = a\sqrt{2}$$

Từ đó ta có:

$$T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c} + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a} \right)$$

$$T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} - a - b - c \right) (2) \quad (0,25đ)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta lại có:

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a; \frac{c^2}{b} + b \geq 2c; \frac{a^2}{c} + c \geq 2a; \frac{b^2}{c} + c \geq 2b; \frac{b^2}{a} + a \geq 2b; \frac{c^2}{a} + a \geq 2c \quad (0,25đ)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} \geq 4(a+b+c) - 2(a+b+c) = 2(a+b+c) (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} (a+b+c) (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4)} \Rightarrow T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2014.$$

$$\text{Vậy } T_{\min} = \frac{2014}{2\sqrt{2}} \text{ khi } x=y=z = \frac{2014}{3\sqrt{2}}$$

Bài 12. Cho ba số thực x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức $S = \frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}$

Lời giải.

Theo Bunhia:

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow x+y+z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{xyz(\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} = \frac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xy+yz+zx)}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}\sqrt{x^2y^2z^2}\sqrt{x^2y^2z^2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}} \text{ khi } x=y=z$$

Bài 13. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$.

Chứng minh $ab + ac + bc \leq \frac{3}{4}$

Lời giải.

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$. Chứng minh $ab + ac + bc \leq \frac{3}{4}$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$(a + b) + (b + c) + (c + a) \geq 3\sqrt{(a + b)(b + c)(c + a)} = 3 \Rightarrow a + b + c \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$\begin{cases} a + b \geq 2\sqrt{ab} \\ b + c \geq 2\sqrt{bc} \\ c + a \geq 2\sqrt{ca} \end{cases} \Rightarrow 1 = (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8} \quad (3)$$

Biến đổi (1), chú ý 2 BĐT (2) và (3), ta được:

$$\begin{aligned} (a + b)(b + c)(c + a) &= 1 \\ \Leftrightarrow (a + b)(bc + ba + c^2 + ca) &= 1 \\ \Leftrightarrow (a + b)(bc + ba + ca) + ac^2 + bc^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (a + b)(ab + bc + ca) + c(ab + bc + ca) - abc &= 1 \\ \Leftrightarrow (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc &= 1 \\ \Leftrightarrow ab + bc + ca &= \frac{1 + abc}{a + b + c} \leq \frac{1 + \frac{1}{8}}{3} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Bài 14. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(a + 2)(b + 2)} + \frac{b^4}{(b + 2)(c + 2)} + \frac{c^4}{(c + 2)(a + 2)} \geq \frac{1}{3}$$

Lời giải.

Áp dụng BĐT Cô-si cho 4 số không âm, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{(a + 2)(b + 2)} + \frac{a + 2}{27} + \frac{b + 2}{27} + \frac{1}{9} &\geq 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{(a + 2)(b + 2)} \cdot \frac{a + 2}{27} \cdot \frac{b + 2}{27} \cdot \frac{1}{9}} = 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{9^4}} = \frac{4a}{9} \\ \Rightarrow \frac{a^4}{(a + 2)(b + 2)} &\geq \frac{11a}{27} - \frac{b}{27} - \frac{7}{27} \quad (1) \end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^4}{(b+2)(c+2)} \geq \frac{11b}{27} - \frac{c}{27} - \frac{7}{27} \quad (2)$$

$$\frac{c^4}{(c+2)(a+2)} \geq \frac{11c}{27} - \frac{a}{27} - \frac{7}{27} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)} + \frac{b^4}{(b+2)(c+2)} + \frac{c^4}{(c+2)(a+2)} \geq \frac{11(a+b+c)}{27} - \frac{a+b+c}{27} - \frac{21}{27}$$

Thay điều kiện $a + b + c = 3$ ta được:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)} + \frac{b^4}{(b+2)(c+2)} + \frac{c^4}{(c+2)(a+2)} \geq \frac{1}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 15. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức cô si: $a^5 + 1/a \geq 2a^2$; $b^5 + 1/b \geq b^2$; $c^5 + 1/c \geq c^2$.

$$\text{Suy ra } a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{Mặt khác } a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b; c^2 + 1 \geq 2c$$

$$\text{Suy ra } a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a + 2b + 2c - 3 = 3$$

Bài 16. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } P = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có $1+b^2 \geq 2b$

Thay vào (1) ta được:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2} \quad (2)$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2} \quad (3)$$

$$\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2} \quad (4)$$

Cộng từng vế ba BĐT (2), (3), (4) ta được:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a + b + c - \left(\frac{ab+bc+ca}{2} \right) \quad (5)$$

Mặt khác

$$(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3 \quad (6)$$

Thay điều kiện $a+b+c=3$ và BĐT (6) vào (5) ta có

$$P = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$, đạt được khi $a=b=c=1$.

Bài 17. Tìm giá trị lớn nhất của $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2}$, biết $x+y=4$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số $(1;1)$ và $(\sqrt{x-1}; \sqrt{y-2})$ ta có

$$A^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-2})^2 \leq (1^2 + 1^2)(x-1 + y-2) = 2(x+y-3) = 2 \Rightarrow A \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{y-2}} \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=y-2 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy GTLN của A là $\sqrt{2}$

Bài 18. Cho $\begin{cases} x>0, y>0, z>0 \\ xyz=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \leq 1$

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x=a^3 \\ y=b^3 \\ z=c^3 \end{cases}, \text{ vì } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc=1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x+y+1 = a^3+b^3+1 = (a+b)(a^2-ab+b^2)+1 \geq (a+b)ab+1 = ab(a+b+c) = \frac{a+b+c}{c}$$

Do đó

$$\frac{1}{x+y+1} \leq \frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{y+z+1} \leq \frac{a}{a+b+c}$$

$$\frac{1}{z+x+1} \leq \frac{b}{a+b+c}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

Bài 19. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{y^2 z^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{z^2 x^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{x^2 y^2}{z(x^2 + y^2)}$

Lời giải.

Ta có: $P = \frac{1}{x(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2})} + \frac{1}{y(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2})} + \frac{1}{z(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2})}$

Đặt $\frac{1}{x} = a; \frac{1}{y} = b; \frac{1}{z} = c$ thì $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} = \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có:

$$a^2(1-a^2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2a^2(1-a^2)(1-a^2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a^2 + 1 - a^2 + 1 - a^2}{3} \right) = \frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{b(1-b^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 (2); \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2 (3)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3) ta có } P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $x = y = z = \sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bài 20. Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4b^2 + (c-a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{4c^2 + (a-b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 3.$$

Lời giải.

Ta có: $\frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2(2a^2 + b^2 + c^2) - (b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} = 2 - \frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2}$

Có hai đẳng thức tương tự.

BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2} \leq 3.$$

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz cho 4 số dương $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} \geq \frac{(x+y)^2}{m+n}$, ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} \leq \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}$$

Ta có hai BĐT tương tự, cộng từng vế ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2} \\ & \leq \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} \right) + \left(\frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} \right) + \left(\frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{b^2}{c^2+b^2} \right) \\ & = \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} \right) + \left(\frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+b^2} \right) + \left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} \right) \\ & = 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ BĐT đã cho được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 21. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{a}{b^4+c^4+a} + \frac{b}{a^4+c^4+b} + \frac{c}{a^4+b^4+c}$$

Lời giải.

Ta có: $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2) \forall a, b \in \mathbb{R}$

Thật vậy:

$$a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^3 - b^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \text{ (luôn đúng } \forall a, b \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c \geq ab(a^2 + b^2) + c \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c \geq ab(a^2 + b^2) + abc^2 > 0 \text{ (vì } a, b, c > 0 \text{ và } abc=1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c}{ab(a^2 + b^2) + abc^2} \text{ (vì } c > 0) \Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c}{ab(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c^2}{abc(a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (1)$$

Tương tự:

$$\frac{b}{a^4 + c^4 + b} \leq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (2)$$

$$\frac{a}{b^4 + c^4 + a} \leq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (3)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1),(2) và (3) ta có:

$$\frac{a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{b}{a^4 + c^4 + b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

Vậy $T \leq 1 \quad \forall a; b; c > 0$ thỏa mãn $abc=1$

Với $a=b=c=1$ thì $T=1$

Vậy GTLN của T là 1

Bài 22. Cho hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện: $a+b \leq 1$. Chứng minh rằng: $a^2 - \frac{3}{4a} - \frac{a}{b} \leq \frac{-9}{4}$

Tự giải.

Bài 23. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq 3$$

Lời giải.

Ta chứng minh BĐT

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9(*)$$

$$(*) \Leftrightarrow 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 9$$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số dương ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$$

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$$

$\Rightarrow (*)$ đúng

$$\Rightarrow \frac{9}{a+b+c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

Trở lại bài toán: Áp dụng BĐT Cô si cho hai số dương ta có $1+b^2 \geq 2b$

Ta có:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2} \quad (2)$$

$$\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} &\geq a+b+c - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \\ \Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) &\geq a+b+c \geq 3 \\ \Rightarrow \text{đpcm} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 24. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{350}{xy + yz + zx} + \frac{386}{x^2 + y^2 + z^2} > 2015$$

Lời giải.

Với mọi $a, b > 0$ và x, y, z thỏa điều kiện đề bài, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương:

$$\begin{aligned} (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) &\geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (*) \\ (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) &\geq 2xy + 2yz + 2zx \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx &\geq 3(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Áp dụng 2 bất đẳng thức trên ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{350}{xy + yz + zx} + \frac{386}{x^2 + y^2 + z^2} = 386 \left(\frac{1}{2xy + 2yz + 2zx} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) + \frac{157}{xy + yz + zx} \\ &\geq 386 \cdot \frac{4}{2xy + 2yz + 2zx + x^2 + y^2 + z^2} + \frac{157}{xy + yz + zx} \\ &= \frac{1544}{(x+y+z)^2} + \frac{157}{xy + yz + zx} = 1544 + \frac{157}{xy + yz + zx} \geq 1544 + \frac{157}{\frac{1}{3}} = 2015 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \\ 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (\text{không xảy ra})$$

Vậy $P > 2015$ (đpcm)

Bài 25. Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$.

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$.

Lời giải.

Ta có $12 \geq (a+b)^3 + 4ab \geq (2\sqrt{ab})^3 + 4ab$. Đặt $t = \sqrt{ab}, t > 0$ thì

$$12 \geq 8t^3 + 4t^2 \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + 3t + 3) \leq 0$$

Do $2t^2 + 3t + 3 > 0, \forall t$ nên $t-1 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$. Vậy $0 < ab \leq 1$

Chứng minh được $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

Thật vậy, BĐT $\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \leq 0$

$$\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})} \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \leq 0. \text{ Do } 0 < ab \leq 1 \text{ nên BĐT này đúng}$$

Tiếp theo ta sẽ CM $\frac{2}{1+\sqrt{ab}} + 2015ab \leq 2016, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

Đặt $t = \sqrt{ab}, 0 < t \leq 1$ ta được $\frac{2}{1+t} + 2015t^2 \leq 2016$

$$2015t^3 + 2015t^2 - 2016t - 2014 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2015t^2 + 4030t + 2014) \leq 0. \text{ BĐT này đúng } \forall t: 0 < t \leq 1$$

Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$. Đẳng thức xảy ra $a = b = 1$

Bài 26. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 11$. Tìm GTNN

$$P = \frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12(a^2+11)} + \sqrt{12(b^2+11)} + \sqrt{c^2+11}}$$

Lời giải.

Thay $11 = ab + bc + ca$ vào P , ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12(a^2+11)} + \sqrt{12(b^2+11)} + \sqrt{c^2+11}} \\ &= \frac{5a+5b+5c}{\sqrt{12(a^2+ab+bc+ca)} + \sqrt{12(b^2+ab+bc+ca)} + \sqrt{c^2+ab+bc+ca}} \\ &= \frac{5a+5b+5c}{2\sqrt{3(a+b)(a+c)} + 2\sqrt{3(b+a)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(c+b)}} (*) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)} \leq 3(a+b) + (a+c) = 4a + 3b + c \quad (1)$$

Tương tự:

$$2\sqrt{3(b+a)(b+c)} \leq 4b + 3a + c \quad (2)$$

$$\sqrt{(c+a)(c+b)} \leq \frac{1}{2}(a+b+2c) \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)} + 2\sqrt{3(b+a)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(c+b)} \leq \frac{15}{2}a + \frac{15}{2}b + 3c \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có

$$P \geq \frac{5a + 5b + 2c}{\frac{15}{2}a + \frac{15}{2}b + 3c} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(a+b) = a+c \\ 3(b+a) = b+c \\ c+a = c+b \\ ab+bc+ca = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{c}{5} \\ ab+bc+ca = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = 5 \end{cases}$$

Vậy GTNN của P là $\frac{2}{3}$, đạt được khi $a = b = 1, c = 5$.

Bài 27. Cho ba số thực x; y; z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z - (xy + yz + zx)$

Lời giải.

Ta có:

$$(x + y + z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \leq 9 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \geq \frac{(x + y + z)^2 - 9}{2}$$

$$\Rightarrow P \leq x + y + z + \frac{9 - (x + y + z)^2}{2}$$

$$\text{Đặt } x + y + z = t \Rightarrow P \leq t + \frac{9 - t^2}{2} = -\frac{t^2 - 2t + 1}{2} + 5 = -\frac{1}{2}(t - 1)^2 + 5 \leq 5$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9, \end{cases} \text{ chẳng hạn khi } x = 1, y = 2, z = -2$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 5.

Bài 28. 1. Cho a, b là 2 số thực dương. Chứng minh rằng $\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1 + \sqrt{ab}$

2. Cho a, b là 2 số thực dương thỏa mãn $a + b = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + 2a} + \frac{1}{b^2 + 2b} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$$

Lời giải.

1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(1+a)(1+b) \geq (1+\sqrt{ab})^2 \Leftrightarrow 1+a+b+ab \geq 1+2\sqrt{ab}+ab$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

(luôn đúng với mọi a, b > 0)

$$2. \text{ Áp dụng bất đẳng thức trên ta có } \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 1+ab = 1+a+b \quad (1)$$

Với mọi x, y > 0, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y) \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \cdot 2\sqrt{xy} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \quad (2)$$

Áp dụng (1) và (2) ta có:

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{4}{a^2 + 2a + b^2 + 2b} + 1 + a + b = \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} + 1 + a + b \\ &= \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{a+b}{8} + \frac{7(a+b)}{8} + 1 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$a+b = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4(a+b) \Rightarrow a+b \geq 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$\frac{4}{(a+b)^2} + \frac{a+b}{16} + \frac{a+b}{16} \geq 3\sqrt{\frac{4}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{16} \cdot \frac{a+b}{16}} = \frac{3}{4}$$

Suy ra $P \geq \frac{3}{4} + \frac{7}{8} \cdot 4 + 1 = \frac{21}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi a = b = 2. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{21}{4}$

Bài 29. Cho a, b là hai số thay đổi thỏa mãn các điều kiện a > 0, a + b ≥ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $A = \frac{8a^2 + b}{4a} + b^2$

Lời giải.

$$A = \frac{8a^2 + b}{4a} + b^2 = 2a + \frac{b}{4a} + b^2 = (a+b^2) + (a + \frac{b}{4a})$$

Vì

$$a > 0; a+b \geq 1 \Rightarrow \frac{b}{4a} \geq \frac{1-a}{4a}; a \geq 1-b \Rightarrow a + \frac{b}{4a} \geq \frac{1}{4a} - b + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A \geq (a+b^2) + (\frac{1}{4a} - b + \frac{3}{4}) = (a + \frac{1}{4a}) + (b - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$$

Ta có $a + \frac{1}{4a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{4a}} = 1$ (BĐT Cô-si cho hai số không âm); $(b - \frac{1}{2})^2 \geq 0$

$$\Rightarrow A \geq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}$

Bài 30. Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn

$$(a^2 + b + \frac{3}{4})(b^2 + a + \frac{3}{4}) = (2a + \frac{1}{2})(2b + \frac{1}{2})$$

Lời giải.

Với mọi x, y không âm, ta có:

$$(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4} \geq x(*) \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

mà

$$(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy(**)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Áp dụng BĐT (*) với $x = a$ và $x = b$ ta được

$$\begin{cases} a^2 + b + \frac{3}{4} = (a^2 + \frac{1}{4}) + b + \frac{1}{2} \geq a + b + \frac{1}{2} > 0 \\ b^2 + a + \frac{3}{4} = (b^2 + \frac{1}{4}) + a + \frac{1}{2} \geq b + a + \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^2 + b + \frac{3}{4})(b^2 + a + \frac{3}{4}) \geq (a + b + \frac{1}{2})^2 (1)$$

Áp dụng BĐT (**) ta được:

$$(a + b + \frac{1}{2})^2 = \left[\left(a + \frac{1}{4} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{4} \right)^2 \right] \geq 4(a + \frac{1}{4})(b + \frac{1}{4})$$

$$= (2a + \frac{1}{2})(2b + \frac{1}{2}) (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $(a^2 + b + \frac{3}{4})(b^2 + a + \frac{3}{4}) = (2a + \frac{1}{2})(2b + \frac{1}{2})$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ a + \frac{1}{4} = b + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Vậy $a = b = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 31. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Giả sử $a \geq b \geq c$, từ giả thiết suy ra $ab \geq 1$. Ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

$$\text{Vậy ta cần chứng minh: } \frac{2}{1+ab} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow c^2 + 3 - ab \geq 3abc^2 \Leftrightarrow c^2 + ca + bc \geq 3abc^2 \Leftrightarrow a + b + c \geq 3abc$$

$$\text{Bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì } \begin{cases} (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \\ ab+bc+ca \geq 3\sqrt{(abc)^2} \end{cases}$$

$$\text{Hay } a+b+c \geq 3 \geq 3abc$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Ta có: } \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3$$

Ta có

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}} = \frac{ab}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right)$$

$$\text{VT} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{c+a} + \frac{bc}{b+a} + \frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{a+b} \right) = \frac{1}{2} (a+b+c) = \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$

Bài 32. Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Từ điều kiện đề bài ta có $\frac{ab+bc+ca}{abc} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$

Áp dụng hai lần bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$a^2 + bc \geq 2\sqrt{a^2 \cdot bc} = 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{2}{2a\sqrt{bc}} = \frac{1}{2\sqrt{bc}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Rightarrow \frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{b^2 + ca} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right); \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

Suy ra $\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{3}{2}$.

Bài 33. Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq 7$$

Lời giải.

Vì a, b, c không âm và có tổng bằng 1 nên $0 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a(1-a) \geq 0 \\ b(1-b) \geq 0 \\ c(1-c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq a^2 \\ b \geq b^2 \\ c \geq c^2 \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{5a+4} \geq \sqrt{a^2 + 4a + 4} = \sqrt{(a+2)^2} = a+2$

Tương tự $\sqrt{5b+4} \geq b+2; \sqrt{5c+4} \geq c+2$

Do đó $\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq (a+b+c) + 6 = 7$ (đpcm)

Bài 34. Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng trong 4 số

$$a^2 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; b^2 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}; c^2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a}; d^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ Có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.}$$

Lời giải. Giả sử cả bốn số đều nhỏ hơn 3 thì

$$P = a^2 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + b^2 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + c^2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + d^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 3$$

Mặt khác

$$P = a^2 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + b^2 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + c^2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + d^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

Trái điều giả sử suy ra có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

$$\begin{aligned}
&\text{Do } 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{4}{a + b + c + d} \\
&\Rightarrow P \geq \frac{(a + b + c + d)^2}{4} + \frac{16}{a + b + c + d} + \frac{16}{a + b + c + d} \\
&\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a + b + c + d)^2}{4} \cdot \frac{16}{a + b + c + d} \cdot \frac{16}{a + b + c + d}} \\
&= 12
\end{aligned}$$

Bài 35. a) Cho các số dương a, b, c tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

b) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2009}{ab + bc + ca} \geq 670$$

Lời giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương

$$a + b + c \geq \sqrt[3]{abc}; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\text{Suy ra} \quad (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

$$\text{b) Ta có} \quad ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} \leq 3$$

$$\text{Suy ra} \quad \frac{2009}{ab + bc + ca} \geq 669$$

Áp dụng bất đẳng thức trong câu a, ta có

$$\left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \right) (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \geq 9$$

$$\text{Suy ra} \quad \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{9}{(a + b + c)^2} \geq 1$$

$$\text{Do đó ta được} \quad \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2009}{ab + bc + ca} \geq 670.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 36. Với số tự nhiên $n \geq 3$. Chứng minh rằng $S_n < \frac{1}{2}$.

$$\text{Với } S_n = \frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n+1} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}} \\ &< \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$S_n < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < \frac{1}{2}$$

Bài 37. Chứng minh rằng $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$, với mọi số nguyên m, n

Lời giải.

Vì m, n là các số nguyên nên $\frac{m}{n}$ là số hữu tỉ và $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên $\frac{m}{n} - \sqrt{2} \neq 0$.

Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Với $\frac{m}{n} > \sqrt{2}$, khi đó ta được

$$m^2 > 2n^2 \Rightarrow m^2 \geq 2n^2 + 1 \text{ hay } m \geq \sqrt{2n^2 + 1}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| &\geq \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{n} - \sqrt{2} = \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{2} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{n^2} - 2}{\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2}} = \frac{1}{n^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2} \right)} \geq \frac{1}{n^2 (\sqrt{3} + \sqrt{2})} \end{aligned}$$

+ Trường hợp 2: Với $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$, khi đó ta được

$$m^2 < 2n^2 \Rightarrow m^2 \leq 2n^2 - 1 \text{ hay } m \leq \sqrt{2n^2 - 1}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| &= \sqrt{2} - \frac{m}{n} \geq \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2n^2 - 1}}{n} = \sqrt{2} - \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - 2 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{1}{n^2 \left(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}} \right)} \geq \frac{1}{n^2 (\sqrt{3} + \sqrt{2})} \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 38. Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)^2 \geq 2 + 2 \left(\frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)} \right)$$

Mà ta lại có

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)} \\ &= \frac{ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1 \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức trên trở thành $\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)^2 \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 39. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Lời giải.

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ và giá trị nhỏ nhất của P là 4. Ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 4$$

Thật vậy, kết hợp với giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 3(a^2 + b^2 + c^2) &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3 + ab^2 \geq 2a^2b; b^3 + bc^2 \geq 2b^2c; c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$$

Suy ra
$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) > 0$$

Do đó ta được
$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4$$

Hay
$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \geq 4$$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$.

Từ giả thiết $a + b + c = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, do đó ta được $t \geq 3$

Bất đẳng thức trên trở thành

$$t + \frac{9-t}{2t} \geq 4 \Leftrightarrow 2t^2 + 9 - t \geq 8t \Leftrightarrow (t-3)(2t-3) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t \geq 3$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 40. Cho biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$, trong đó $ad - bc = 1$.

Chứng minh rằng: $P \geq \sqrt{3}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } ad - bc = 1 \text{ nên } 1 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + ac + bd$$

Suy ta $P \geq 2\sqrt{1 + (ac + bd)^2} + ac + bd$. Rõ ràng $P > 0$ vì

$$2\sqrt{1 + (ac + bd)^2} > |ac + bd|^2$$

Đặt $x = ac + bd$, khi đó ta được

$$P \geq 2\sqrt{1 + x^2} + x \Leftrightarrow P^2 \geq 4(1 + x^2) + 4x\sqrt{1 + x^2} + x^2 = (1 + x^2) + 4x\sqrt{1 + x^2} + 4x^2 + 3$$

Hay $P^2 \geq (\sqrt{1 + x^2} + 2x)^2 + 3 \geq 3$. Do đó ta được $P \geq \sqrt{3}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ad - bc = 1 \\ 2a = \sqrt{3}d - c \\ 2b = -\sqrt{3}c - d \end{cases}$$

Bài 41. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta luôn có:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lời giải.

Vì $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ nên ta có

$$\begin{aligned} & \left(a^2 + b^2 + c^2 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \\ &= x^2 \left(2 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \right) + y^2 \left(2 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2} \right) + z^2 \left(2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2} \right) \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x^2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \right) + y^2 \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Giả sử $a \leq b \leq c$, khi đó $c^2 - a^2 \geq 0$; $c^2 - b^2 \geq 0$. Với c là cạnh lớn nhất và các góc đều nhọn nên $c^2 < a^2 + b^2$. Do đó ta có

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0; a^2 + c^2 - b^2 > 0; a^2 + b^2 - c^2 > 0$$

Suy ra

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x^2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \right) + y^2 \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2} \right) > 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

Hay
$$\left(a^2 + b^2 + c^2 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) > 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

Hay $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$. Bài toán được chứng minh xong

Bài 42. a) Cho k là số nguyên dương bất kì. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2010\sqrt{2009}} < \frac{88}{45}$

Lời giải.

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \frac{2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}} \Leftrightarrow 2k+1 - 2\sqrt{k(k+1)} > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \right)^2 > 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi k nguyên dương.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Áp dụng kết quả câu a ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2010\sqrt{2009}} \\ &< 2\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2009}} - \frac{1}{\sqrt{2010}}\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2010}}\right) < 2\left(1 - \frac{1}{45}\right) = \frac{88}{45} = VP \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 43. Với a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca}} \geq \frac{a + b + c}{5}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3a^2 + 8b^2 + 14ab = 3a^2 + 8b^2 + 12ab + 2ab \leq 4a^2 + 9b^2 + 12ab = (2a + 3b)^2$$

Suy ra
$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} \geq \frac{a^2}{(2a + 3b)^2} = \frac{a^2}{2a + 3b}$$

Áp dụng tương tự ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca}} \\ \geq \frac{a^2}{2a + 3b} + \frac{b^2}{2b + 3c} + \frac{c^2}{2c + 3a} \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{2a + 3b} + \frac{b^2}{2b + 3c} + \frac{c^2}{2c + 3a} \geq \frac{(a + b + c)^2}{5(a + b + c)} = \frac{a + b + c}{5}$$

Do đó ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca}} \geq \frac{a + b + c}{5}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 44. Giả sử x, y, z là những số thực thỏa mãn điều kiện $0 \leq x, y, z \leq 2$ và

$x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức:

$$M = x^4 + y^4 + z^4 + 12(1 - x)(1 - y)(1 - z)$$

Lời giải.

Đặt $a = x - 1$; $b = y - 1$; $c = z - 1$, ta được $-1 \leq a$; b ; $c \leq 1$ và $a + b + c = 0$. Biểu thức M được viết lại thành

$$M = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3 + b^3 + c^3) + 6(a^2 + b^2 + c^2) + 4(a + b + c) + 3 - 12abc$$

Đề ý là khi $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ nên biểu thức trên thử thành

$$M = a^4 + b^4 + c^4 + 6(a^2 + b^2 + c^2) + 3$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c) = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = 0$$

Do đó suy ra $M \geq 3$ hay giá trị nhỏ nhất của M là 3.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$ hay $x = y = z = 1$.

Mặt khác do $-1 \leq a$; b ; $c \leq 1$ nên ta có $|a|$; $|b|$; $|c| \leq 1$. Từ đó ta có

$$a^4 \leq a^2 \leq |a|; b^4 \leq b^2 \leq |b|; c^4 \leq c^2 \leq |c|$$

$$\text{Suy ra } M = a^4 + b^4 + c^4 + 6(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \leq 7(|a| + |b| + |c|) + 3$$

Mà ta lại có $a + b + c = 0$ nên trong ba số a , b , c có một hoặc hai số âm, tức là luôn tồn tại hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là b và c . Khi đó ta được

$$|b| + |c| = |b + c| = |a|$$

Đến đây ta có $M \leq 14|a| + 3 \leq 17$ hay giá trị lớn nhất của M là 17. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$; $b = -1$; $c = 0$ và các hoán vị hay $x = 2$; $y = 0$; $z = 1$ và các hoán vị

Bài 45. a) Cho 3 số thực a , b , c bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + \frac{(a - b)^2}{26} + \frac{(b - c)^2}{6} + \frac{(c - a)^2}{2009}$$

$$\text{b) Cho } a > 0; b < 0. \text{ Chứng minh rằng } \frac{1}{a} \geq \frac{2}{b} + \frac{8}{2a - b}$$

Lời giải.

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(b-c)^2}{2} + \frac{(c-a)^2}{2} \geq \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}$$

Hay

$$\frac{12(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2007(c-a)^2}{2} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{-b} \geq \frac{8}{2a-b}$$

Đặt $c = -b$, do $b < 0$ nên ta được $c > 0$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{c} \geq \frac{8}{2a+c}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{c} = \frac{2}{2a} + \frac{2}{c} \geq \frac{2.4}{2a+c} = \frac{8}{2a+c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a = -b$.

Bài 46. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} = 1$. Chứng minh $ab^2 \leq \frac{1}{8}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $\frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} = 1$. Đặt $x = \frac{a}{1+a}$; $y = \frac{b}{1+b}$ Suy ra $a = \frac{x}{1-x}$; $b = \frac{y}{1-y}$.

Khi đó ta được $x + 2y = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{xy^2}{(1-x)(1-y)^2} \leq \frac{1}{8}$$

Từ giả thiết ta suy ra $1-x = 2y$; $1-y = x+y$ nên lại viết bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{xy^2}{2y(x+y)^2} \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4xy \leq (x+y)^2$$

Đánh giá cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài 47. Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz = x + y + z + 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$.

Đặt $a = \frac{1}{x+1}$; $b = \frac{1}{y+1}$; $c = \frac{1}{z+1}$. Khi đó ta được $a + b + c = 1$. Từ đó suy ra

$$x = \frac{1-a}{a} = \frac{b+c}{a}; y = \frac{1-b}{b} = \frac{c+a}{b}; z = \frac{1-c}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} + \sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}} + \sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}} \leq \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) \\ \sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+a} + \frac{b}{a+b} \right) \\ \sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} \right) \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} + \sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}} + \sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}} \leq \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$

Bài 48. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq 1$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Bài 49. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + 2y + 3z = 18$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2y+3z+5}{1+x} + \frac{3z+x+5}{1+2y} + \frac{x+2y+5}{1+3z} \geq \frac{51}{7}$$

Lời giải.

Đặt $a = x$; $b = 2y$; $c = 3z$, khi đó giả thiết trở thành $a + b + c = 18$ và bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{b+c+5}{1+a} + \frac{c+a+5}{1+b} + \frac{a+b+5}{1+c} \geq \frac{51}{7}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{b+c+5}{1+a} + 1 + \frac{c+a+5}{1+b} + 1 + \frac{a+b+5}{1+c} + 1 \geq \frac{51}{7} + 3$$

Hay
$$(a+b+c+6) \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right) \geq \frac{72}{7}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{3}{7}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{9}{3+a+b+c} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 6$ hay $x = 6$; $y = 3$; $z = 2$.

Bài 50. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{\sqrt{xy+z} + \sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}} \geq 1$$

Lời giải.

Ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh bất đẳng thức cùng bậc là

$$\frac{\sqrt{xy + z(x + y + z)} + \sqrt{2x^2 + 2y^2}}{x + y + z + \sqrt{xy}} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + z)(y + z)} + \sqrt{2x^2 + 2y^2} \geq x + y + z + \sqrt{xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{2x^2 + 2y^2} \geq x + y$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{(z + x)(z + y)} \geq z + \sqrt{xy}$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$z^2 + xy + z(x + y) \geq z^2 + xy + 2z\sqrt{xy} \Leftrightarrow z(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}; z = 0$.

Bài 51. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 18\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x(y + z)}} + \frac{1}{\sqrt{y(z + x)}} + \frac{1}{\sqrt{z(x + y)}} \geq \frac{1}{4}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y + z)}} + \frac{1}{\sqrt{2y(z + x)}} + \frac{1}{\sqrt{2z(x + y)}} \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2\sqrt{2x(y + z)} \leq 2x + y + z$, do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y + z)}} \geq \frac{2}{2x + y + z}$$

Hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y + z)}} + \frac{1}{\sqrt{2y(z + x)}} + \frac{1}{\sqrt{2z(x + y)}} \geq 2 \left(\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \geq \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \geq \frac{9}{4(x+y+z)} = \frac{9}{4 \cdot 18\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = y = z = 6\sqrt{2}.$$

Bài 52. a) Cho 2 số dương a và b. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2010$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức:
$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$$

Lời giải.

a) Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

b) Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right); \quad \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{2010}{4} = \frac{1005}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1005}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 670$

Bài 53. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tính giá trị lớn nhất

của biểu thức:
$$P = \frac{ab}{\sqrt{ab+2c}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+2a}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}$$

Lời giải.

Để ý đến giả thiết $a + b + c = 2$ ta có $ab + 2c = ab + c(a + b + c) = (b + c)(c + a)$

Do đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{ab + 2c}} = \frac{ab}{\sqrt{(b + c)(c + a)}} \leq \frac{2ab}{b + c} + \frac{2ab}{c + a}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{bc}{\sqrt{bc + 2a}} \leq \frac{2bc}{a + b} + \frac{2bc}{c + a}$; $\frac{ca}{\sqrt{ca + 2b}} \leq \frac{2ca}{a + b} + \frac{2ca}{b + c}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{ab}{\sqrt{ab + 2c}} + \frac{bc}{\sqrt{bc + 2a}} + \frac{ca}{\sqrt{ca + 2b}} &\leq \frac{2ab}{b + c} + \frac{2ab}{c + a} + \frac{2bc}{a + b} + \frac{2bc}{c + a} + \frac{2ca}{a + b} + \frac{2ca}{b + c} \\ &= 2(a + b + c) = 4 \end{aligned}$$

Hay $P \leq 4$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 4.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$

Bài 54. Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + 8b^3}} + \sqrt{\frac{4b^3}{b^3 + (a + b)^3}}$$

Lời giải.

Biểu thức P được viết lại là
$$P = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{8b^3}{a^3}}} + \sqrt{\frac{\frac{4b^3}{a^3}}{\frac{b^3}{a^3} + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^3}}$$

Đặt $t = \frac{b}{a} > 0$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại là

$$P = \sqrt{\frac{1}{1 + 8t^3}} + \sqrt{\frac{4t^3}{t^3 + (1 + t)^3}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$1 + 8t^3 = (1 + 2t)(1 - 2t + 4t^2) \leq \frac{(2 + 4t^2)^2}{2} = (1 + 2t^2)^2$$

Suy ra
$$\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}} \geq \sqrt{\frac{1}{(1+2t^2)^2}} = \frac{1}{1+2t^2}$$

Ta sẽ chứng minh
$$\sqrt{\frac{4t^3}{t^3 + (1+t)^3}} \geq \frac{2t^2}{1+2t^2}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{4t^3}{t^3 + (1+t)^3} \geq \left(\frac{2t^2}{1+2t^2} \right)^2 \Leftrightarrow (1+2t^2)^2 \geq t^4 + t(1+t)^3 \Leftrightarrow (t-1)^2(2t^2+t+1) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi t .

Do đó ta được

$$P = \sqrt{\frac{1}{1+8t^3}} + \sqrt{\frac{4t^3}{t^3 + (1+t)^3}} \geq \frac{1}{1+2t^2} + \frac{2t^2}{1+2t^2} = 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Bài 55. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 5$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3a + 3b + 2c}{\sqrt{6(a^2 + 5)} + \sqrt{6(b^2 + 5)} + \sqrt{c^2 + 5}}$$

Lời giải.

Từ giả thiết $ab + bc + ca = 5$ ta có

$$a^2 + 5 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(c+a)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{6(a^2 + 5)} = \sqrt{6(a+b)(c+a)} \leq \frac{3(a+b) + 2(c+a)}{2} = \frac{5a + 3b + 2c}{4}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{6(b^2 + 5)} \leq \frac{3a + 5b + 2c}{2}; \quad \sqrt{c^2 + 5} \leq \frac{a + b + 2c}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{6(a^2 + 5)} + \sqrt{6(b^2 + 5)} + \sqrt{c^2 + 5} \leq \frac{9a + 9b + 6c}{2}$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{3a + 3b + 2c}{\sqrt{6(a^2 + 5)} + \sqrt{6(b^2 + 5)} + \sqrt{c^2 + 5}} \geq \frac{2(3a + 3b + 2c)}{9a + 9b + 6c} = \frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{2}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1; c = 2$.

Bài 56. Cho a, b, c là số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{3a + 8b + 6c} + \frac{3bc}{3b + 6c + a} + \frac{3ca}{9c + 4a + 4b} \leq \frac{a + 2b + 3c}{9}$$

Lời giải.

Đặt $x = a; y = 2b; z = 3c$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{xy}{3x + 4y + 2z} + \frac{yz}{3y + 4z + 2x} + \frac{zx}{3z + 4x + 2y} \leq \frac{x + y + z}{9}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{xy}{3x + 4y + 2z} &= \frac{xy}{x + 2y + x + y + z + x + y + z} \leq \frac{xy}{9} \left(\frac{1}{x + 2y} + \frac{2}{x + y + z} \right) \\ &\leq \frac{xy}{9} \left(\frac{1}{9x} + \frac{2}{9y} + \frac{2}{x + y + z} \right) = \frac{2x + y}{81} + \frac{2xy}{9(x + y + z)} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{yz}{3y + 4z + 2x} \leq \frac{2y + z}{81} + \frac{2yz}{9(x + y + z)}; \quad \frac{zx}{3z + 4x + 2y} \leq \frac{2z + x}{81} + \frac{2zx}{9(x + y + z)}$$

Cộng theo các vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{3x + 4y + 2z} + \frac{yz}{3y + 4z + 2x} + \frac{zx}{3z + 4x + 2y} \leq \frac{x + y + z}{27} + \frac{2(xy + yz + zx)}{9(x + y + z)}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc ta lại có $xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3}$

$$\text{Do đó ta có } \frac{x + y + z}{27} + \frac{2(xy + yz + zx)}{9(x + y + z)} \leq \frac{x + y + z}{27} + \frac{2(x + y + z)}{27} = \frac{x + y + z}{9}$$

$$\text{Suy ra } \frac{xy}{3x + 4y + 2z} + \frac{yz}{3y + 4z + 2x} + \frac{zx}{3z + 4x + 2y} \leq \frac{x + y + z}{9}$$

Hay bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2b = 3c$.

Bài 57. Chứng minh rằng: $\left(1 + \frac{1}{a^3}\right)\left(1 + \frac{1}{b^3}\right)\left(1 + \frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{729}{512}$

Trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = 6$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{a^3}\right)\left(1 + \frac{1}{b^3}\right)\left(1 + \frac{1}{c^3}\right) &\geq \frac{729}{512} \geq \frac{729}{512} \\ \Rightarrow A &= 1 + \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) + \left(\frac{1}{a^3b^3} + \frac{1}{b^3c^3} + \frac{1}{c^3a^3}\right) + \frac{1}{a^3b^3c^3} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai tổng trong dấu ngoặc ta được:

$$A \geq 1 + \frac{3}{abc} + \frac{3}{a^2b^2c^2} + \frac{1}{a^3b^3c^3} = \left(1 + \frac{1}{abc}\right)^3$$

Lại theo bất đẳng thức Cô – si ta được:

$$A \geq 1 + \frac{3}{abc} + \frac{3}{a^2b^2c^2} + \frac{1}{a^3b^3c^3} = \left(1 + \frac{1}{abc}\right)^3$$

Lại theo BĐT Cô – si ta có: $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 8$, hay $\frac{1}{abc} \geq \frac{1}{8}$.

Suy ra: $A \geq \left(1 + \frac{1}{8}\right)^3 = \frac{729}{512}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 2$.

Bài 58. Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 2$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$.

Lời giải.

Giải sử $a = \max(a, b, c)$; $c = \min(a, b, c)$.

$$0 \leq c \leq 1 \leq a \leq 2.$$

$$1 \leq a \leq 2 \Rightarrow (a-2)(a-1) \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 3a-2$$

$$\text{Vì } a + b + c = 6 \Rightarrow a^3 \leq 3a^2 - 2a \leq 3(3a-2) - 2a = 7a-6 \Rightarrow a^3 \leq 7a-6. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } 0 \leq c \leq 1 \Rightarrow c^3 \leq c. \quad (2)$$

$$\text{Nếu } 0 \leq b \leq 1 \Rightarrow b^3 \leq b \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta được: } a^3 + b^3 + c^3 \leq 7a - 6 + c + b = 6a - 3 \leq 9$$

$$\text{Nếu } 1 \leq b \leq 2 \text{ thì tương tự ta có: } b^3 \leq 7b - 6 \quad (4)$$

Từ (1), (2) và (4) ta được:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 7a + c + 7b - 12 = 21 - 6c - 12 \leq 9.$$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$.

Bài 59. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq 1$$

Bài làm.

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki cho hai cặp số: $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ và $(\sqrt{c}, \sqrt{a})$ ta có:

$$\sqrt{(b+c)(b+a)} \geq \sqrt{(\sqrt{ac} + \sqrt{ab})^2} = \sqrt{ac} + \sqrt{ab},$$

Do đó: $a + \sqrt{(b+c)(b+a)} \geq a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, và

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{a}{a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}, \quad \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$

Cộng theo về các BĐT trên ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \\ & \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki trở thành đẳng thức khi $a^2 = bc, b^2 = ac, c^2 = ab$, suy ra $a = b = c$.

Vậy dấu “=” của Bất đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 60. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau: $x + y + z = 0$, $x+1 > 0, y+1 > 0, y+4 > 0$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+4}$$

Lời giải.

Đặt $a = x+1, b = y+1, c = z+4$ thì $a > 0, b > 0, c > 0$ và $a + b + c = 4$

$$Q = \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-4}{c} = 3 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \right); \quad S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{a+b+c} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow Q = 3 - S \leq 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $\text{Max} A = \frac{1}{3}$ khi $x = y = -\frac{1}{2}$ và $z = 1$.

Bài 61. Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$

Bài làm.

$$\text{Ta có } 3 = x + y + z \geq \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{3} \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 3$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \geq \frac{9}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} \geq \frac{9}{3} = 3$$

Vậy: $\min P = 3$

Bài 62. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ac} \geq \frac{9}{2}$$

Bài làm.

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + ac} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ac} \\ &= \frac{a^2 + bc}{2bc} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{b^2 + ac}{2ac} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ac} + \frac{c^2 + ab}{2ab} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$A \geq \left(\frac{a^2 + bc}{2bc} + \frac{2bc}{a^2 + bc} \right) + \left(\frac{b^2 + ac}{2ac} + \frac{2ac}{b^2 + ac} \right) + \left(\frac{c^2 + ab}{2ab} + \frac{2ab}{c^2 + ab} \right) - \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho các cặp số trong ngoặc ra có:

$$A \geq 2 + 2 + 2 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 63. Cho a, b, c là các số thực khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{a^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{c^2 + (a+b)^2}$$

Lời giải.

Áp dụng các bất đẳng thức:

$$(b+c)^2 \leq 2(b^2 + c^2); \quad (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2); \quad (c+a)^2 \leq 2(c^2 + a^2), \text{ ta có:}$$

$$T \geq \frac{a^2}{a^2 + 2(b^2 + c^2)} + \frac{b^2}{b^2 + 2(a^2 + c^2)} + \frac{c^2}{c^2 + 2(a^2 + b^2)} \text{ hay}$$

$$\begin{aligned} T+3 &\geq \left(\frac{a^2}{a^2+2(b^2+c^2)}+1 \right) + \left(\frac{b^2}{b^2+2(a^2+c^2)}+1 \right) + \left(\frac{c^2}{c^2+2(a^2+b^2)}+1 \right) \\ &= \frac{2}{5} \cdot 5(a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a^2+2(b^2+c^2)} + \frac{1}{b^2+2(a^2+c^2)} + \frac{1}{c^2+2(a^2+b^2)} \right). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho ba bộ số dương m, n, p và $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}$ ta được:

$$(m+n+p) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{mnp} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} = 9. \text{ Suy ra: } T+3 \geq \frac{2}{5} \cdot 9 \Leftrightarrow T \geq \frac{3}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{3}{5}$ khi $a = b = c$.

Bài 64. Giả sử x, y, z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$xy^2z^2 + x^2z + y = 3z^2. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } P = \frac{z^4}{1+z^4(x^4+y^4)}.$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện có thể viết lại là: } xy^2 + x^2 \cdot \frac{1}{z} + y \cdot \frac{1}{z^2} = 3$$

$$\text{Biểu thức } P \text{ có dạng: } P = \frac{1}{\frac{1}{z^4} + x^4 + y^4}. \text{ Đặt } \frac{1}{z} = t \text{ ta thu được bài toán sau:}$$

$$\text{“Với } x, y, t \text{ là các số dương thỏa mãn: } xy^2 + yt^2 + tx^2 = 3.$$

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } P = \frac{1}{t^4 + x^4 + y^4} \text{”}$$

Theo BĐT Cô – si Cô – si cho 4 số dương ta có:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + y^4 + 1 \geq 4xy^2 \\ y^4 + t^4 + t^4 + 1 \geq 4yt^2 \Rightarrow 3(x^4 + y^4 + t^4) + 3 \geq 4(xy^4 + yt^4 + tx^4) = 12 \\ t^4 + x^4 + x^4 + 1 \geq 4tx^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{x^4 + y^4 + z^4} \leq \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{1}{3} \text{ đạt được khi } x = y = z = 1$$

Bài 65. Giả sử x, y là các số không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

1. Chứng minh rằng: $1 \leq x + y \leq \sqrt{2}$.
2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
 $P = \sqrt{1+2x} + \sqrt{1+2y}$.

Lời giải.

Từ $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) = 2$ suy ra: $x+y \leq \sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Mặt khác: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 1+2xy \geq 1$ Suy ra:

$$x+y \geq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=0$ hoặc $y=0$.

2. Ta có: $P^2 = 2 + 2(x+y) + 2\sqrt{1+2(x+y)+4xy}$.

Do $x+y \leq \sqrt{2}$ và $4xy \leq 2(x^2+y^2) = 2$ suy ra:

$$P^2 \leq 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{1+2\sqrt{2}+2} \Rightarrow P \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}} \text{ Đạt được khi } x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mặt khác: $x+y \geq 1$ và $4xy \geq 0$ nên $P^2 \geq 2+2+2\sqrt{1+2+0} \Rightarrow P \geq \sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

Vậy $P_{\min} = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$ đạt được khi $x=0$ hoặc $y=0$

Bài 66. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = 2ac + bd + cd$, trong đó các số thực a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $4a^2 + b^2 = 2$ và $c + d = 4$.

Lời giải.

Với mọi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{cases} (2a - \frac{c}{2})^2 \geq 0 \\ (b - \frac{d}{2})^2 \geq 0 \\ (c - d)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ac \leq 4a^2 + \frac{c^2}{4} & (1) \\ bd \leq b^2 + \frac{d^2}{4} & (2) \\ cd \leq \frac{(c+d)^2}{8} + \frac{cd}{2} & (3) \end{cases}$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được:

$$T = 2ac + bd + cd \leq 4a^2 + b^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} + \frac{cd}{2} + \frac{(c+d)^2}{8} = (4a^2 + b^2) + \frac{3(c+d)^2}{8} = 2 + \frac{3 \cdot 4^2}{8} = 8.$$

$T = 8$ khi và chỉ khi xảy ra đồng thời các dấu “=” ở các BĐT (1), (2), (3). Tức là khi $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = d = 2$. Vậy giá trị lớn nhất của T là 8.

Bài 67. Cho a, b, c là độ dài các cạnh và p là nửa chu vu tam giác. Chứng minh rằng: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Lời giải.

Nhận xét: Với x, y là các số dương thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Từ nhận xét này ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a)+(p-b)} = \frac{4}{c};$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}; \quad \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}.$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Bài 68. Ba số dương x, y, z thỏa mãn hệ thức: $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 6$. Xét biểu thức:

$$P \geq x + y^2 + z^3.$$

- 1) Chứng minh rằng: $P \geq x + 2y + 3z - 3$.
- 2) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Lời giải.

1. Theo bất đẳng thức Cô – si, ta có: $P + 3 \geq x + (y^2 + 1) + (z^3 + 1 + 1) \geq x + 2y + 3z$

Suy ra $P \geq x + 2y + 3z - 3$. (đpcm)

2. Áp dụng kết quả trên kết hợp bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có:

$$6(P + 3) \geq (x + 2y + 3z) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \right) \geq \left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2y} \cdot \sqrt{\frac{2}{y}} + \sqrt{3z} \cdot \sqrt{\frac{3}{z}} \right)^2 = 36$$

Hay $P \geq 3$. Vậy $\text{Min} P = 3$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

Bài 69. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y}$

Lời giải.

Sử dụng BĐT Cô – si cho ba số dương ta có:

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y+z}{2} + 2 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x^3}{y+z} \cdot \frac{y+z}{2} \cdot 2} = 3x$$

Tương tự ta có: $\frac{y^3}{z+x} + \frac{z+x}{2} + 2 \geq 3y$; $\frac{z^3}{x+y} + \frac{x+y}{2} + 2 \geq 3z$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$Q + x + y + z + 6 \geq 3(x + y + z) \Rightarrow Q \geq 2(x + y + z) - 6 \geq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$.

Vậy $Q_{\min} = 6$ khi $x = y = z = 2$.

Bài 70. 1) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$.

2) Cho ba số thực x, y, z đều lớn hơn 2 và thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1. \text{ Chứng minh rằng: } (x-2)(y-2)(z-2) \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

1) Tập xác định của hàm số y là R . Nhận thấy $y > 0$ với mọi giá trị của x nên để tìm giá trị nhỏ nhất của y ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của y^2 .

$$\text{Mà: } y^2 = 2x^2 + 2 + 2\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = 2x^2 + 2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \geq 4.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Vậy $y_{\min} = 4$ khi $x = 0$.

2) Đặt $a = x - 2, b = y - 2, c = z - 2$. Ta phải chứng minh: $abc \leq 1$.

$$\text{Thật vậy từ: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1$$

Theo bất đẳng thức Cô – si:

$$\frac{1}{a+2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b+2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c+2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2}\right) \geq \sqrt{\frac{bc}{(b+2)(c+2)}} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{b+2} \geq \sqrt{\frac{ca}{(c+2)(a+2)}} \quad (2); \quad \frac{1}{c+2} \geq \sqrt{\frac{ab}{(a+2)(b+2)}} \quad (3)$$

Nhân (1), (2) và (3) theo vế ta được điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hay $x = y = z = 3$.

Bài 71. Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $(x+y+z)xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = (x+y)(x+z)$

Lời giải.

Ta có:

$$T = (x+y)(x+z) = x(x+y+z) + yz \geq 2\sqrt{x(x+y+z) \cdot yz} = 2$$

$$T = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y+z) = 1. \\ yz = 1 \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

Chọn $y = z = 1$. Thì điều kiện trở thành: $\begin{cases} x(x+2) = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 2 chẳng hạn khi $(x; y; z) = (\sqrt{2} - 1; 1; 1)$

Bài 72. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

Lời giải.

Nhận thấy với x, y, z là các số thực dương ta có:

$$i) (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad (1)$$

$$ii) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(x+y+z) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 9. \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \quad (2) \text{ Dấu}$$

$$iii) (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad (3)$$

“=” xảy ra ở (1), (2) và (3) khi và chỉ khi $x = y = z$.

Áp dụng các bất đẳng thức (1), (2), (3) vào bài toán ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + (a+b+c) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + (a^2+b^2+c^2) \cdot \frac{9}{ab+bc+ca} + 18 \\ &= \left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \right) + \frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} + 18 \geq 2 + 8 + 18 = 28. \end{aligned}$$

$$P = 28 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \\ ab = bc = ca \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 28 khi $a = b = c$.

Bài 73. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $\frac{8-x^4}{16+x^4} + \frac{8-y^4}{16+y^4} + \frac{8-z^4}{16+z^4} \geq 0 \quad (1)$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xyz$

Lời giải.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{8-x^4}{16+x^4} + 1 \right) + \left(\frac{8-y^4}{16+y^4} + 1 \right) + \left(\frac{8-z^4}{16+z^4} + 1 \right) \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{16+x^4} + \frac{1}{16+y^4} + \frac{1}{16+z^4} \geq \frac{1}{8} \quad (2)$$

Từ (2) suy ra: $\frac{1}{16+x^4} \geq \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16+y^4} \right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16+z^4} \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{y^4}{16+y^4} + \frac{z^4}{16+z^4} \right)$

$$= \frac{1}{16} \left(\frac{y^4}{16+y^4} + \frac{z^4}{16+z^4} \right) \geq \frac{1}{8} \cdot \frac{y^2 z^2}{\sqrt{(16+y^4)(16+z^4)}} \quad (\text{BĐT Cauchy})$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{16+y^4} \geq \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2 z^2}{\sqrt{(16+x^4)(16+z^4)}} \quad (4); \quad \frac{1}{16+z^4} \geq \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2 y^2}{\sqrt{(16+x^4)(16+y^4)}} \quad (5)$$

Nhân theo từng vế các bất đẳng thức (3), (4), (5) và rút gọn lại ta được:

$$x^4 y^4 z^4 \leq 8^3 \Leftrightarrow |xyz| \leq 4\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow -4\sqrt[4]{2} \leq xyz \leq 4\sqrt[4]{2}.$$

Giá trị lớn nhất của P là $4\sqrt[4]{2}$ đạt được khi x, y, z có hai số bằng $-\sqrt[4]{8}$ số còn lại bằng $\sqrt[4]{8}$.

Giá trị nhỏ nhất của P là $-4\sqrt[4]{2}$ đạt được khi x, y, z có hai số bằng $\sqrt[4]{8}$ số còn lại bằng $-\sqrt[4]{8}$, hoặc cả 3 số bằng $-\sqrt[4]{8}$.

Bài 74. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{2}{9} \leq a^3 + b^3 + c^3 < \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt: $T = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$. Do $a+b+c=3$ nên:

$$T = (a+b)^3 + c^3 + 3abc - 3ab(a+b) = (a+b+c)^3 - 3c(a+b)(a+b+c) + 3abc - 3ab(a+b) \\ = 1 - 3c(a+b) + 3abc - 3ab(1-c)$$

$$\text{Vậy } T = 1 - 3(ab+bc+ca) + 6abc \quad (1)$$

Lại có:

$$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c); \quad b^2 \geq b^2 - (a-c)^2 = (a+b-c)(-a+b+c); \\ c^2 \geq c^2 - (a-b)^2 = (a-b+c)(-a+b+c).$$

Hơn nữa a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác nên:

$$a+b-c > 0, \quad a-b+c > 0, \quad -a+b+c > 0;$$

$$abc > (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = (1-2c)(1-2b)(1-2a) = 1 + 4(ab+bc+ca) - 2(a+b+c) - 8abc \\ = -1 + 4(ab+bc+ca) - 7abc > 0;$$

$$\text{Do đó: } 6abc \geq -\frac{2}{3} + \frac{8}{3}(ab+bc+ca) \quad (2) \quad \text{và} \quad ab+bc+ca - 2abc > \frac{1}{4} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) áp dụng BĐT $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ ta có:

$$T \geq \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(ab+bc+ca) \geq \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9};$$

$$T = \frac{2}{9} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} a+b+c=1 \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Từ (1) và (3) dẫn đến: $T = 1 - 3[(ab+bc+ca)] - 2abc < 1 - 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Bài 75. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3 + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + 1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\begin{aligned} \frac{ab+bc+ca}{ab} - 1 + \frac{ab+bc+ca}{bc} - 1 + \frac{ab+bc+ca}{ca} - 1 &\geq \sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{c^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{c(a+b)}{ab} + \frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(c+a)}{ca} &\geq \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{a^2}} + \sqrt{\frac{(b+c)(b+a)}{b^2}} + \sqrt{\frac{(c+a)(c+b)}{c^2}} \end{aligned}$$

Do $(ab+bc+ca=1)$ (1)

Đặt $\frac{c(a+b)}{ab} = x, \frac{a(b+c)}{bc} = y$ và $\frac{b(c+a)}{ca} = z$, . Khi đó (1) trở thành bất đẳng thức quen

thuộc: $x+y+z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ (luôn đúng với mọi số dương x, y, z)

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 76. Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng: $\frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(1+b^3)} \leq 2$.

Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{(a+1)(1+b^2)(1+a^2b)}{(a+1)(a^2-a+1)(1+b^3)} \leq 2 \Leftrightarrow a+b^2+b^2a+a^2b+b^3a^2+ba^3 \leq 1+2a^3+2b^3+a^3b^3$$

Từ đó áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho ba số dương:

$$2b^3+1 \geq 3b^2; 3(a^3+b^3) \geq 3(a^2b+ab^2); a^3b^3+a^3+a^3 \geq 3a^3b; a^3b^3+a^3b^3+b^3 \geq 3a^2b^3.$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức (*).

Bài 77. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\frac{x-y}{x^4+y^4+6}$ (1)

Lời giải. Ta có: $x^4+1 \geq 2x^2; y^4+1 \geq 2y^2$.

Do đó: $x^4 + y^4 + 6 \geq 2x^2 + 2y^2 + 4 = (x-y)^2 + (x+y)^2 + 4 \geq (x-y)^2 + 4 \geq 2\sqrt{(x-y)^2 \cdot 4} = 4|x-y|$.

Suy ra: $-\frac{1}{4} \leq \frac{x-y}{x^4+y^4+6} \leq \frac{1}{4}$. Với $x = 1, y = -1$ thì: $\frac{x-y}{x^4+y^4+6} = \frac{1}{4}$.

Với $x = -1, y = 1$ thì $\frac{x-y}{x^4+y^4+6} = -\frac{1}{4}$.

Vậy biểu thức (1) có giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}$ và giá trị nhỏ nhất là $-\frac{1}{4}$.

Bài 78. Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x + \frac{1}{y} \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương ta có:

$$1 \geq x + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ suy ra } \frac{y}{x} \geq 4 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức (1) và bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương ta có:

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{16x} + \frac{15y}{16x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{16x}} + \frac{15 \cdot 4}{16} = \frac{17}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{4}$ đạt được khi $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$.

Bài 79. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1.$$

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết } ab + bc + ca = abc \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

$$\text{Từ } a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3 \text{ suy ra: } 2(a^4 + b^4) \geq a^4 + a^3b + b^4 + ab^3 = (a+b)(a^3 + b^3)$$

$$\text{Vậy } \frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} \geq \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Làm tương tự sau đó cộng theo vế và kết hợp với giả thiết ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 80. Cho x, y thỏa mãn $16x^2 - 9y^2 \geq 144$. Chứng minh rằng: $|2x - y + 1| \geq 2\sqrt{5} - 1$.

Lời giải.

$$\text{Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức: } (ax - by)^2 \geq (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) \quad (1)$$

Thật vậy: $(1) \Leftrightarrow -2axby \geq a^2x^2 + b^2y^2 \Leftrightarrow (ax - by)^2 \geq 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi $ax = by$. Sử dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$(2x - y)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4x - \frac{1}{3} \cdot 3y \right)^2 \geq \frac{5}{36} (16x^2 - 9y^2) \geq 20 \text{ (do } 16x^2 - 9y^2 \geq 144 \text{)}. \text{ Suy ra:}$$

$$2x - y + 1 \geq 2\sqrt{5} + 1 \text{ hoặc } 2x - y + 1 \leq -2\sqrt{5} + 1. \text{ Từ đó suy ra: } |2x - y + 1| \geq 2\sqrt{5} - 1.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} 8x = 9y \\ 2x - y = -2\sqrt{5} \\ 16x^2 - 9y^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{8}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Bài 81. Cho các số thực a thỏa mãn $0 \leq a \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{a}{2-a} + \frac{1-a}{1+a}$.

Lời giải. Ta có:

$$T = \frac{a}{2-a} + 1 + \frac{1-a}{1+a} + 1 - 2 = \frac{2}{2-a} + \frac{2}{1+a} - 2 = 2 \left(\frac{3}{(2-a)(1+a)} - 1 \right) \leq 2 \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = 1 \text{ (do } 0 \leq a \leq 1 \text{)}.$$

Vậy $\max T = 1$, đạt được khi và chỉ khi $a = 0 \vee a = 1$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $a(1-a) \leq \frac{(a+1-a)^2}{4} = \frac{1}{4}$.

$$\text{Suy ra: } T \geq 2 \left(\frac{3}{2 + \frac{1}{4} - 1} \right) = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } \min T = \frac{2}{3} \text{ đạt được khi } a = 1 - a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Bài 82. Cho a, b là số dương thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2 + b^2} \geq 14$.

Lời giải.

Với hai số thực dương x, y bất kì ta có: $(x + y)^2 \geq 4xy \forall x, y > 0$, suy ra: $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x + y)^2}$

và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$. Từ đó ta có:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{(a+b)^2} = 2 \quad (1); \quad \frac{3}{2ab} + \frac{3}{a^2 + b^2} \geq 3 \cdot \frac{4}{2ab + a^2 + b^2} = 12 \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 83. Các số thực x, y, z khác nhau và thỏa mãn $(z+x)(z+y)=1$. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{1}{(z+y)^2} \geq 4$.

Lời giải. Đặt $a = z+x, b = z+y$ từ giả thiết suy ra: $a > 0, b > 0$ và $ab=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{(a-b)^2} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a^2}{(a^2-1)^2} + \frac{1}{a^2} + a^2 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a^2}{(a^2-1)^2} + \frac{(a^2-1)^2}{a^2} \geq 2. \quad (*)$$

Áp dụng BĐT Cô-si Cho hai số dương ta thấy (*) luôn đúng. Vậy BĐT được chứng minh.

Bài 84. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(a+c)} + \frac{1}{1+c^2(b+a)} \leq \frac{1}{abc}$.

Lời giải.

Chứng minh: $abc \leq 1$. Từ đó suy ra: $1+a^2(b+c) \geq a(bc+ca+ab) = 3a$.

Do đó: $\frac{1}{1+a^2(b+c)} \leq \frac{1}{3a}$. Tương tự ta có: $\frac{1}{1+b^2(a+c)} = \frac{1}{3b}; \frac{1}{1+c^2(b+a)} \leq \frac{1}{3c}$.

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(a+c)} + \frac{1}{1+c^2(b+a)} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{ab+bc+ca}{3abc} = \frac{3}{3abc} = \frac{1}{abc}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 85.

1) Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng: $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$.

2) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2009}{ab+bc+ca} \geq 670.$$

Lời giải.

1) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} = 9$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

2) Do $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq 3$ nên $\frac{2009}{ab+bc+ca} \geq 669$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức phần 1 ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2}{ab+bc+ca} &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \\ &\geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq \frac{9}{9} = 1. \end{aligned}$$

Vậy $\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2009}{ab+bc+ca} \geq 670.$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c.$

Bài 86. Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x > 8y > 0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = x + \frac{1}{y(x-8y)}.$

Lời giải.

Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có:

$$P = (x-8y) + 8y + \frac{1}{y(x-8y)} \geq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x-8y=8y \\ 8y=\frac{1}{y(x-8y)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16y \\ y^3=\frac{1}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=\frac{1}{4}. \end{cases}$

Vậy $\min P = 6$. khi và chỉ khi $x = 4$ và $y = \frac{1}{4}.$

Bài 87. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = \frac{9}{1-2(ab+bc+ca)} + \frac{2}{abc}.$

Lời giải.

Theo giả thiết:

$$P = \frac{9}{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)} + \frac{2(a+b+c)}{abc} = \frac{9}{a^2+b^2+c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right).$$

Áp dụng BĐT quen thuộc với các số dương: $\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{d} \geq \frac{(a+c)^2}{b+d}. (*)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, suy ra:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{4}{ab+bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Lại sử dụng BĐT (*) cho các số dương ta có:

$$P \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{36}{2(ab + bc + ca)} \geq \frac{9^2}{(a + b + c)^2} = 81.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Vậy $P_{\min} = 81$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 88. Cho ba số thực a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2.$$

Lời giải.

Để thấy: $\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1.$

Từ đó suy ra: $\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} = \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)^2 + 2 \geq 2.$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$

Bài 89. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2x + \sqrt{1 - 4x - x^2}.$

Lời giải.

Điều kiện: $1 - 4x - x^2 \geq 0$. Ta có: $P \leq 2x + \frac{(1 - 4x - x^2) + 1}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} \leq 1.$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1 đạt được khi $x = 0$.

Bài 90. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện: $\sqrt{xy}(x-y) = x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x+y$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra: $x > y > 0$, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(x+y)^2 = xy(x-y)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4xy \left((x+y)^2 - 4xy \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4xy + (x+y)^2 - 4xy}{2} \right)^2 = \frac{1}{16} (x+y)^4.$$

Do đó $x+y \geq 4$. Vậy $\min A = 4$ khi $x = 2 + 2\sqrt{2}; y = 2 - \sqrt{2}.$

Bài 91. Cho các số thực dương thỏa mãn: $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^3 + xy + y^3} + \frac{4x^2y^2 + 2}{xy}$

Lời giải.

Ta có:

$$A = \frac{1}{x^3 + xy + y^3} + \frac{4x^2y^2 + 2}{xy} = \frac{1}{(x+y)(x^2 - xy + y^2) + xy} + 4xy + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x^2 + y^2} + 4xy + \frac{2}{xy}$$

$$= \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \left(4xy + \frac{1}{4xy} \right) + \frac{5}{4xy} \geq \frac{4}{x^2 + 2xy + y^2} + 2\sqrt{4xy \cdot \frac{1}{4xy}} + \frac{5}{(x+y)^2} = 4 + 2 + 5 = 11$$

Vậy $\min A = 11$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

Bài 92. Cho x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 0$; $x + 1 > 0$; $y + 1 > 0$ và $z + 4 > 0$.

Tìm GTLN của $A = \frac{xy-1}{(x+1)(y+1)} + \frac{z}{z+4}$

Lời giải.

Đặt
$$\begin{cases} x+1=a \\ y+1=b \\ z+4=c \end{cases} \Leftrightarrow a+b+c=6$$

$$A = \frac{(a-1)(b-1)-1}{ab} + \frac{c-4}{c} = \frac{ab-a-b+1-1}{ab} + \frac{c-4}{c} = 2 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \right)$$

$$\leq 2 - \left(\frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} \right) \leq 2 - \frac{16}{a+b+c} = 2 - \frac{16}{6} = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\max A = -\frac{2}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi
$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ a=b, a+b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{3}{2} \\ c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{1}{2} \\ z=-1 \end{cases}$$

Bài 93. Cho các dương a, b, c thỏa mãn $2a + 3b \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$Q = \frac{2002}{a} + \frac{2017}{b} + 2996a - 5501b.$$

Lời giải.

$$Q = \frac{2002}{a} + \frac{2017}{b} + 2996a - 5501b.$$

$$= \left(\frac{2002}{a} + 8008a \right) + \left(\frac{2017}{b} + 2017b \right) - 2506(2a + 3b).$$

Áp dụng BĐT Cô- si và sử dụng giả thiết $2a + 3b \leq 4$ ta có :

$$Q \geq 2\sqrt{\frac{2002}{a}} \cdot 8008a + 2\sqrt{\frac{2017}{b}} \cdot 2017b - 2506.4 \geq 8008 + 4034 - 10024 = 2018.$$

$$\text{Dấu « = » xảy ra khi : } \begin{cases} \frac{2002}{a} = 8008a \\ \frac{2017}{b} = 2017b \\ 2a + 3b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy $Q_{\min} = 2018$ khi $a = \frac{1}{2}; b = 1$.

Bài 94. Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{35}{xy} + 2xy$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{35}{xy} + 2xy \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{32} + \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} + 2xy - \frac{x^2 + y^2}{32} - \frac{35xy}{16} \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{32} + \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} - \frac{(x + y)^2}{32} - \frac{xy}{8}. \end{aligned}$$

Sử dụng Cô – si cho các cặp $(\frac{x^2 + y^2}{32}; \frac{2}{x^2 + y^2})$ và $(\frac{35}{xy}; \frac{35xy}{16})$ ta có:

$$\frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{32} \geq 2\sqrt{\frac{2}{32}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} \geq 2\sqrt{\frac{35^2}{16}} = \frac{35}{2}$$

$$\text{Mặt khác: } x + y \leq 4 \Rightarrow x \cdot y \leq 4 \text{ nên } \frac{xy}{8} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{(x + y)^2}{32} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{1}{2} + \frac{35}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 17. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } x = y = 2$$

Bài 95. Cho a, b là số các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = (a + b)\left(\frac{1}{a^3 + b} + \frac{1}{a + b^3}\right) - \frac{1}{ab}$$

Lời giải.

Ta có :

$$(a^3 + b)\left(\frac{1}{a} + b\right) \geq (a + b)^2; (b^3 + a)\left(\frac{1}{b} + a\right) \geq (a + b)^2.$$

Khi đó :

$$\frac{1}{a^3 + b} + \frac{1}{a + b^3} \leq \frac{a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{(a + b)^2} \Leftrightarrow VT \leq \frac{a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{a + b} - \frac{1}{ab} = 1 + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ab} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi $a = b = 1$.

Bài 96. Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} + (a + b)(4 + 5c)$.

Lời giải.

$$\text{Áp dụng BĐT : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y} \quad (\forall x, y \neq 0)$$

Ta có :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} + (a + b)(5c + 4) \geq \frac{4}{(a + b)(c + 1)} + (a + b)(5c + 4) \\ &= \frac{4}{(1 - c)(1 + c)} + (1 - c)(5c + 4) \geq 4\sqrt{\frac{5c + 4}{c + 1}} = 4\sqrt{\frac{c}{c + 1}} + 4 \geq 8 \end{aligned}$$

Vậy $\min P = 8$. Dấu « = » xảy ra khi $c = 0, a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 97. Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{2(x^2 + y^2)}.$$

Lời giải.

Ta có : $x^2 + y^2 \geq 2xy$ nên : $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$. Do đó :

$$\begin{aligned} P &= \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + y) \geq \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2 \\ &\geq \frac{4xy}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2 - \frac{3xy}{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{4} + 2 - \frac{3(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} \\ &\geq 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Dấu « = » xảy ra khi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ \frac{4xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{xy} \Leftrightarrow x = y. \end{cases}$

Vậy $\min P = \frac{9}{2}$ khi $x = y$.

Bài 98. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}} \geq \frac{1}{2}$ với a, b là các số dương.

Lời giải.

Ta có:
$$\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}} = \frac{2(a+b)}{\sqrt{4a(3a+b)} + \sqrt{4b(3b+a)}} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương ta được:

$$\sqrt{4a(3a+b)} \leq \frac{4a + (3a+b)}{2} = \frac{7a+b}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{4b(3b+a)} \leq \frac{4b + (3b+a)}{2} = \frac{7b+a}{2} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $\sqrt{4a(3a+b)} + \sqrt{4b(3b+a)} \leq 4a + 4b \quad (4)$

Từ (1) và (4) suy ra:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}} \geq \frac{2(a+b)}{4a+4b} = \frac{1}{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = b.$$

Bài 99. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $x + xy \leq 3y - 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+xy+2y^2}} + \frac{x}{y}$

Lời giải.

Ta có: $x + xy \leq 3y - 1 \Rightarrow \frac{x}{y} + x \leq 3 - \frac{1}{y} \quad (\text{do } y > 0)$

Do đó: $3 \geq x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}} \Rightarrow 0 < \frac{x}{y} \leq 1.$

Mặt khác: $P = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+xy+2y^2}} + \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{y}-1}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y}+2}} + \frac{x}{y}$

Đặt $t = \frac{x}{y} \quad (0 < t \leq 1)$. khi đó bài toán trở thành:

Cho $0 < t \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+2}} + t$

Để thấy do: $0 < t \leq 1$ nên: $\begin{cases} \frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+2}} \leq 0 \\ t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+2}} + t \leq 0 + 1 = 1$

Vậy $P_{\max} = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ x = \frac{x}{y} = \frac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$

Bài 100.

Cho số thực $x, y (x+y \neq 0)$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2$.

Lời giải :

Đặt $z = -\frac{1+xy}{x+y}$ ta có : $xy + yz + zx = -1$ và BĐT đã trở thành:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx) \Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy BĐT được chứng minh.