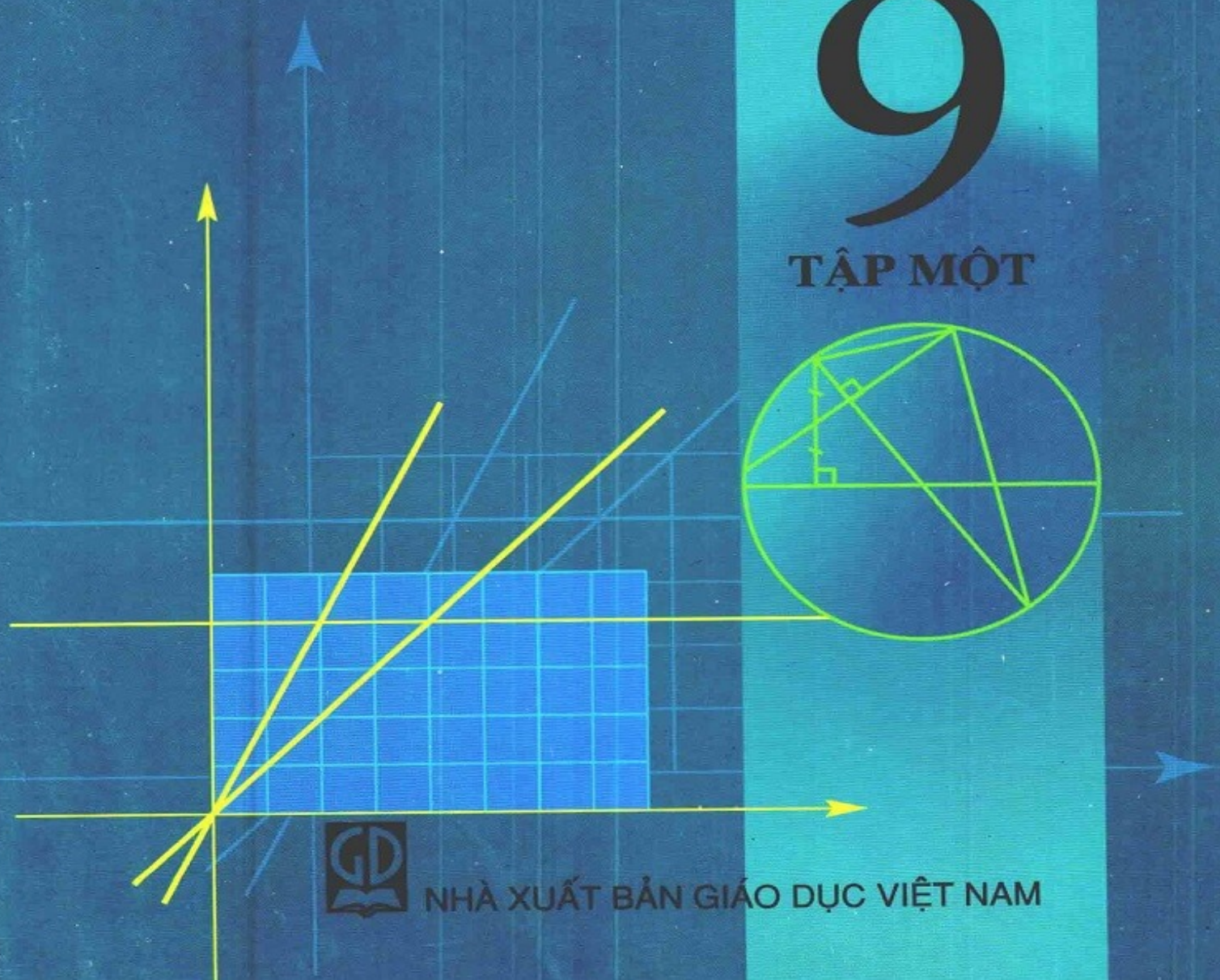
VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 9

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 9

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ bảy)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I

CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

§1. ÔN TẬP KIẾN THỨC ĐẠI SỐ 8

Trong mục này, chúng ta ôn lại các kiến thức về bất đẳng thức và bất phương trình, chúng được sử dụng nhiều để tìm điều kiện xác định của căn thức bậc hai.

1. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Với a là hằng số dương, ta có :

$$|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \ ;$$

$$|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -a \\ f(x) > a \end{array}\right. .$$

2. Bất phương trình tích

Để giải bất phương trình tích, ta thường sử dụng định lí về dấu của nhị thức bậc nhất : *Nhị thức* $ax + b$ $(a \neq 0)$ *cùng dấu với* a *với mọi giá trị của* x *lớn hơn nghiệm của nhị thức, trái dấu với* a *với mọi giá trị của* x *nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.*

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình :

a) $x^2 - 4x - 5 < 0$; b) $x^2 - 2x - 1 > 0$; c) $2x^2 - 6x + 5 > 0$.

Giải

a) *Cách 1.* $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 5x - 5 < 0$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) - 5(x + 1) < 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 5) < 0.$$

Lập bảng xét dấu :

x		-1		5	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nghiệm của bất phương trình là $-1 < x < 5$.

Cách 2. $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 9 \Leftrightarrow (x-2)^2 < 9 \Leftrightarrow |x-2| < 3$

$$\Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5.$$

b) $x^2 - 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 2 \Leftrightarrow |x-1| > \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 < -\sqrt{2} \\ x - 1 > \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2} \end{array}\right..$$

c) $2x^2 - 6x + 5 > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 10 > 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 + 1 > 0.$

Vì bất phương trình cuối nghiệm đúng với mọi x nên bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x.

Bài tập

1. Giải các bất phương trình :

a) $x^2 - 4x - 21 > 0$; b) $x^2 - 4x + 1 < 0$;

c) $3x^2 - x + 1 > 0$; d) $2x^2 - 5x + 4 < 0$.

~ **Ví dụ** đến 36, 38, 43, 44, 50, 65.

Bài tập : 91, 109, 110, 114, 122, 142, 145, 146, 149, 150, 152, 160, 161, 189 đến 193, 195, 197.

§2. CĂN BẬC HAI VÀ SỐ VÔ TỈ

Cho số a không âm. Ta định nghĩa căn bậc hai số học của a, kí hiệu $\sqrt{a}$, là số không âm x mà $x^2 = a$.

Ta biết dạng biểu diễn thập phân của số hữu tỉ là hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn, dạng biểu diễn thập phân của số vô tỉ là vô hạn không tuần hoàn.

Số hữu tỉ nào cũng viết được dưới dạng

$$a = \frac{m}{n} \text{ với } m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*.$$

Tổng, hiệu, tích, thương của hai số hữu tỉ (số chia khác 0) là một số hữu tỉ.

Để chứng minh số a là một số vô tỉ, ta thường dùng phương pháp phản chứng : giả sử a là số hữu tỉ thì dẫn đến mâu thuẫn.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng tổng của một số hữu tỉ với một số vô tỉ là một số vô tỉ.

Giải : Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tổng của số hữu tỉ a với số vô tỉ b là số hữu tỉ c. Ta có $b = c - a$.

Hiệu của hai số hữu tỉ c và a là một số hữu tỉ nên b là số hữu tỉ, trái với giả thiết.

Vậy c phải là số vô tỉ.

Ví dụ 3. Xét xem các số a và b có thể là số vô tỉ hay không, nếu :

a) $a + b$ và $a - b$ là các số hữu tỉ ;

b) $a - b$ và ab là các số hữu tỉ.

Giải

a) a và b không thể là số vô tỉ. Thật vậy,

$$\frac{(a + b) + (a - b)}{2} \text{ là số hữu tỉ, nên a là số hữu tỉ ;}$$

$$\frac{(a + b) - (a - b)}{2} \text{ là số hữu tỉ, nên b là số hữu tỉ.}$$

b) a và b có thể là số vô tỉ. Chẳng hạn

$$a = b = \sqrt{2}. \text{ Khi đó } a - b = 0, ab = 2.$$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.

Giải : Giả sử $\sqrt{a}$ là số hữu tỉ thì nó viết được dưới dạng :

$$\sqrt{a} = \frac{m}{n} \text{ với } m, n \in N, n \neq 0, (m, n) = 1.$$

Do a không là số chính phương nên $\frac{m}{n}$ không là số tự nhiên, do đó $n > 1$.

Ta có $m^2 = an^2$. Vì a là số tự nhiên nên $m^2 \vdots n^2$. Gọi p là một ước nguyên tố nào đó của n, thế thì $m^2 \vdots p$, do đó $m \vdots p$. Như vậy p là ước nguyên tố của m và n, trái với $(m, n) = 1$.

Vậy $\sqrt{a}$ phải là số vô tỉ.

Bài tập

2. Chứng minh rằng các số sau là số vô tỉ :

a) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$;

b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với m, n là các số hữu tỉ, $n \neq 0$.

3. Xét xem các số a và b có thể là số vô tỉ hay không nếu :

a) ab và $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỉ ;

b) $a + b$ và $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỉ $(a + b \neq 0)$;

c) $a + b$, a^2 và b^2 là các số hữu tỉ $(a + b \neq 0)$.

4. So sánh hai số :

a) $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$;

b) $6\sqrt{5}$ và $5\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ và 12 ;

d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ và 2.

5. a) Cho một ví dụ để chứng tỏ rằng khẳng định $\sqrt{a} \leq a$ với mọi số a không âm là sai.

b) Cho $a \geq 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a} > a$?

6*. a) Hãy chỉ ra một số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên $(x \neq \pm 1)$.

b) Chứng minh rằng nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên và $x \neq \pm 1$ thì x và $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỉ. Khi đó $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ và $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ là số hữu tỉ hay số vô tỉ ?

~ Ví dụ : 64.

Bài tập : 126 đến 128, 140, 141.

§3. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

Cho A là một biểu thức đại số. Điều kiện xác định của $\sqrt{A}$ là $A \geq 0$.

Khi lấy căn bậc hai của một biểu thức không âm, ta sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

Ví dụ 5. Cho biểu thức

$$A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}.$$

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A.

b) Rút gọn biểu thức A.

Giải

a) Biến đổi biểu thức được

$$A = \sqrt{x - \sqrt{(x-2)^2}} = \sqrt{x - |x-2|}.$$

Điều kiện xác định của A là

$$x \geq |x-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

b) Nếu $x \geq 2$ thì $A = \sqrt{x - (x-2)} = \sqrt{2}$.

Nếu $1 \leq x < 2$ thì $A = \sqrt{x - (x-2)} = \sqrt{2x - 2}$.

Ví dụ 6. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức :

a) $A = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$; b) $B = \dfrac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x+1}}}$.

Giải

a) Điều kiện xác định của A là $x^2 - 2x - 1 > 0$.

Giải bất phương trình này (xem Ví dụ 1b), ta được $\left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$.

b) Điều kiện xác định của B là

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 & (1) \\ x > \sqrt{2x+1} & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta được $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Giải (2) ta có

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 2x + 1 \end{cases} \quad (3)$$

Giải (3) ta được $\left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$ (xem Ví dụ 1b).

Kết hợp với $x \geq -\dfrac{1}{2}$ và $x > 0$, ta được $x > 1 + \sqrt{2}$ là điều kiện xác định của B.

Chú ý : Sẽ sai lầm nếu cho rằng $(2) \Leftrightarrow x^2 > 2x + 1$, khi đó sẽ đi đến đáp số sai là

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leq x < 1 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ví dụ 7. Tìm các giá trị của x sao cho

$$\sqrt{x+1} < x + 3. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện xác định của $\sqrt{x+1}$ là $x \geq -1$. (2)

Với điều kiện (2) thì $x + 3 > 0$ nên (1) tương đương với

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 < (x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow x + 1 < x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 8 > 0. \qquad (3)$$

Bất phương trình (3) đúng với mọi x, vì

$$x^2 + 5x + 8 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} + \frac{7}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0.$$

Vậy các giá trị phải tìm của x là $x \geq -1$.

Bài tập

7. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức :

a) $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$;

b) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$;

c) $\sqrt{8x - x^2 - 15}$;

d) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$;

e) $A = \dfrac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$;

g) $B = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$.

8. Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.

9. Tìm các giá trị của x sao cho :

a) $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$;

b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$.

10. Cho $a + b + c = 0$ và a, b, c khác 0. Chứng minh hằng đẳng thức :

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|.$$

~ **Bài tập :** 123, 129.

§4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

Công thức $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ (a, b là những số không âm) cho ta quy tắc khai phương một tích và nhân các căn thức bậc hai.

Công thức $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a \geq 0, b > 0)$ cho ta quy tắc khai phương một thương và chia hai căn thức bậc hai.

Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$.

Giải : Điều kiện xác định của A là $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x \geq \sqrt{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Cách 1

$$A\sqrt{2} = \sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}}$$

$$= \sqrt{2x - 1 + 1 + 2\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x - 1 + 1 - 2\sqrt{2x-1}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2x-1} - 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{2x-1} + 1 - \left|\sqrt{2x-1} - 1\right|.$$

Nếu $x \geq 1$ thì $A\sqrt{2} = \sqrt{2x-1} + 1 - \left(\sqrt{2x-1} - 1\right) = 2$.

Do đó $A = \sqrt{2}$.

Nếu $\frac{1}{2} \leq x < 1$ thì $A\sqrt{2} = \sqrt{2x-1} + 1 - \left(1 - \sqrt{2x-1}\right) = 2\sqrt{2x-1}$.

Do đó $$A = \frac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4x-2}.$$

Cách 2. Đặt $\sqrt{2x-1} = y \geq 0$, ta có $2x - 1 = y^2$.

$$A = \frac{\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{y^2 + 1 + 2y}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{y^2 + 1 - 2y}}{\sqrt{2}} = \frac{y+1}{\sqrt{2}} - \frac{|y-1|}{\sqrt{2}}.$$

Với $y \geq 1$ (tức là $x \geq 1$) thì $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + 1 - y + 1) = \sqrt{2}$.

Với $0 \leq y < 1$ (tức là $\frac{1}{2} \leq x < 1$) thì

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + 1 + y - 1) = \frac{2y}{\sqrt{2}} = y\sqrt{2} = \sqrt{4x - 2}.$$

Cách 3. Xét A^2, ta có

$$A^2 = \left(x + \sqrt{2x - 1}\right) + \left(x - \sqrt{2x - 1}\right) - 2\left(\sqrt{\left(x + \sqrt{2x - 1}\right)\left(x - \sqrt{2x - 1}\right)}\right)$$

$$= 2x - 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x - 2|x - 1|.$$

Với $x \geq 1$ thì $A^2 = 2$, do đó $A = \sqrt{2}$ (chú ý rằng $A \geq 0$).

Với $\frac{1}{2} \leq x < 1$ thì $A^2 = 4x - 2$, do đó $A = \sqrt{4x - 2}$.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng số $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỉ.

Giải : Giả sử $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = a$ (a là số hữu tỉ). Thế thì

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = a - \sqrt{5}.$$

Bình phương hai vế : $5 + 2\sqrt{6} = a^2 + 5 - 2a\sqrt{5}$ suy ra $\sqrt{6} + a\sqrt{5} = \frac{a^2}{2}$.

Lại bình phương hai vế ta có

$$6 + 5a^2 + 2a\sqrt{30} = \frac{a^4}{4} \Rightarrow \sqrt{30} = \frac{\frac{a^4}{4} - 6 - 5a^2}{2a} \text{ (hiển nhiên } a \neq 0).$$

Suy ra $\sqrt{30}$ là số hữu tỉ, vô lí (dễ chứng minh điều này, chẳng hạn xem ví dụ 2).

Vậy $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ phải là số vô tỉ.

Bài tập

11. Rút gọn các biểu thức :

a) $\sqrt{11 - 2\sqrt{10}}$; b) $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$;

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$;

e) $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$;

g) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$;

h) $\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$;

i) $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$;

k) $\sqrt{94-42\sqrt{5}}-\sqrt{94+42\sqrt{5}}$.

12. Thực hiện các phép tính :

a) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$;

b) $\sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(3+\sqrt{5})$;

c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

13. Chứng minh các hằng đẳng thức sau với $b \geq 0$, $a \geq \sqrt{b}$:

a) $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2-b})}$;

b) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

14. Rút gọn biểu thức : $A = \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$.

15. Cho biểu thức : $A = \dfrac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x-\sqrt{x^2-2x}} - \dfrac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x+\sqrt{x^2-2x}}$.

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A.

b) Rút gọn biểu thức A.

c) Tìm giá trị của x để $A < 2$.

16. Lập một phương trình bậc hai với các hệ số nguyên, trong đó :

a) $2+\sqrt{3}$ là một nghiệm của phương trình ;

b) $6-4\sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình.

17. Chứng minh rằng các số sau là số vô tỉ :

a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; b) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

18. Có tồn tại các số hữu tỉ dương a, b hay không nếu :

a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$; b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

19. Cho ba số x, y, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ là các số hữu tỉ. Chứng minh rằng mỗi số $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ đều là số hữu tỉ.

20. Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng tồn tại một số dương trong hai số $2a + b - 2\sqrt{cd}$ và $2c + d - 2\sqrt{ab}$.

21*. a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$ với $a > 0$.

b) Tính giá trị của tổng

$$B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + ... + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}.$$

22*. a) Nêu một cách tính nhẩm 997^2.

b) Tính tổng các chữ số của A, biết rằng $\sqrt{A} = 99...96$ (có 100 chữ số 9).

~ Ví dụ : 26, 27, 29, 30, 33, 37, 39, 40, 47, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 60.

Bài tập : 90, 102 đến 108, 113, 118, 130 đến 134, 136 đến 139, 148, 151, 153 đến 156, 158, 159, 169 đến 174.

§5. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

Nhân tử A^2 có thể đưa ra ngoài dấu căn bậc hai thành $|A|$:

$$\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} \text{ với } B \geq 0.$$

Nhân tử A không âm có thể đưa vào trong dấu căn bậc hai thành A^2 :

$$A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B} \text{ với } A \geq 0, B \geq 0.$$

Nếu A có giá trị âm thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ với $A < 0, B \geq 0$.

Để khử mẫu của biểu thức lấy căn, ta biến đổi mẫu thành một bình phương rồi đưa ra ngoài dấu căn :

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|} \text{ với } AB \geq 0, B \neq 0.$$

Để trục căn thức ở mẫu, ta nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu :

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \text{ với } B > 0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{A-B} \text{ với } A \geq 0, B \geq 0, A \neq B.$$

$$\frac{1}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{A-B} \text{ với } A \geq 0, B \geq 0, A \neq B.$$

Ví dụ 10. Rút gọn biểu thức

$$A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}.$$

Giải : Thực hiện các phép biến đổi đưa một thừa số vào trong dấu căn, ra ngoài dấu căn, ta được :

$$A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{20 + 9 - 6\sqrt{20}}} = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(\sqrt{20} - 3)^2}}$$
$$= \sqrt{5} - \sqrt{3 - (\sqrt{20} - 3)} = \sqrt{5} - \sqrt{6 - \sqrt{20}}$$
$$= \sqrt{5} - \sqrt{5 + 1 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1) = 1.$$

Ví dụ 11. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{25\sqrt{24}+24\sqrt{25}}.$$

Giải : Với mọi $n \in \mathbf{N}^*$, ta có

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Do đó

$$M = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{24}} - \frac{1}{\sqrt{25}} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Bài tập

23. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}$.

24. Chứng minh các hằng đẳng thức :

a) $\sqrt{10+\sqrt{60}-\sqrt{24}-\sqrt{40}} = \sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{6+\sqrt{24}+\sqrt{12}+\sqrt{8}} - \sqrt{3} = \sqrt{2}+1$.

25. Cho $$A = \sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$$

Hãy biểu diễn A dưới dạng tổng của ba căn thức.

26. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$.

27. Rút gọn biểu thức $B = \dfrac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$.

28. Rút gọn các biểu thức

a) $A = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$;

b) $B = \dfrac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - ... - \dfrac{1}{\sqrt{24}-\sqrt{25}}$.

~ **Ví dụ :** 41, 42, 45, 46.

Bài tập : 92 đến 94, 111, 112, 135, 143, 144, 147, 157, 175.

§6. RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

Ví dụ 12. Thực hiện phép tính

$$A = \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) : \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right).$$

Giải : Điều kiện xác định của A là $\begin{cases}(1+a)(1-a)>0\\ \dfrac{1+a}{1-a}\neq\dfrac{1-a}{1+a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|a|<1\\ a\neq 0\end{cases}$.

Đặt $\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}=x$. Ta có :

$$A=(x+\frac{1}{x}):(x-\frac{1}{x})=\frac{x^2+1}{x^2-1}=\left(\frac{1+a}{1-a}+1\right):\left(\frac{1+a}{1-a}-1\right)$$
$$=\frac{1+a+1-a}{1-a}:\frac{1+a-1+a}{1-a}=\frac{1}{a}.$$

Ví dụ 13. Rút gọn biểu thức

$$A=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Giải : Trước hết ta tính $\dfrac{A}{\sqrt{2}}$ được

$$\frac{A}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2+(\sqrt{3}+1)}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3}$$
$$=\frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3+6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

Vậy $A=\sqrt{2}$.

Ví dụ 14. Cho $$M=\frac{\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}+1}.$$

a) Tìm các số nguyên a để M là số nguyên.

b) Chứng minh rằng với $a=\dfrac{4}{9}$ thì M là số nguyên.

c) Tìm các số hữu tỉ a để M là số nguyên.

Giải :

a) Ta có $M = 1 + \frac{5}{\sqrt{a}+1}$. Để M là số nguyên thì $\frac{5}{\sqrt{a}+1}$ phải là số nguyên.

Ta biết rằng khi a là số nguyên thì $\sqrt{a}$ hoặc là số nguyên (nếu a là số chính phương) hoặc là số vô tỉ (nếu a không là số chính phương). Để $\frac{5}{\sqrt{a}+1}$ là số nguyên thì $\sqrt{a}$ không thể là số vô tỉ, do đó $\sqrt{a}$ là số nguyên, suy ra $\sqrt{a}+1$ là ước tự nhiên của 5.

Ta có

$\sqrt{a}+1$	1	5
$\sqrt{a}$	0	4
a	0	16
M	6	2

b) Với $a = \frac{4}{9}$ thì $M = \dfrac{\frac{2}{3}+6}{\frac{2}{3}+1} = 4$.

c) Ta có $M = 1 + \frac{5}{\sqrt{a}+1}$. Để M là số nguyên thì $\frac{5}{\sqrt{a}+1}$ phải là số nguyên.

Đặt $\frac{5}{\sqrt{a}+1} = n \in \mathbf{Z}$, ta có

$$n\sqrt{a} + n = 5 \text{ do đó } \sqrt{a} = \frac{5-n}{n} \text{ (do } n \neq 0).$$

Giải điều kiện $\frac{5-n}{n} \geq 0$, ta được $0 < n \leq 5$.

Do $n \in \mathbf{Z}$ nên $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$. Ta có

n	1	2	3	4	5
$\sqrt{a}$	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
a	16	$\frac{9}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{16}$	0
M	2	3	4	5	6

Bài tập

Rút gọn các biểu thức (bài 29 – 35) :

29. a) $A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$;

b) $B = \left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2$;

c) $C = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right).\dfrac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \dfrac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3}.\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)\right]$

với $x = 2-\sqrt{3}$ và $y = 2+\sqrt{3}$.

30. $P = \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.

31. $Q = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}} - \sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$ với $x > y > 0$.

32. $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$ với $x = \dfrac{a^2+b^2}{2ab}$ và $b > a > 0$.

33. $B = \dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ với $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{a}} - \sqrt{\dfrac{a}{1-a}}\right)$ và $0 < a < 1$.

34. $M = (a+b) - \sqrt{\dfrac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$ với $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$.

35. $A = \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}.\sqrt{2x-1}$.

36. Chứng minh hằng đẳng thức sau với $x \geq 2$

$$\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

37. Cho $a = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$, $b = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$. Tính $a^7 + b^7$.

38. Cho biết $\sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} = 1.$

Tính $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}.$

39. Cho biểu thức $M = \dfrac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2}$.

a) Tìm các số nguyên a để M là số nguyên.

b) Tìm các số hữu tỉ a để M là số nguyên.

40. Cho $a = \sqrt{2} - 1$.

a) Viết a^2, a^3 dưới dạng $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ trong đó m là số tự nhiên.

b*) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số a^n viết được dưới dạng trên.

~ **Ví dụ :** 28, 61 đến 63.

Bài tập : 95 đến 101, 120, 124, 125, 176, 182 đến 186, 188, 196.

§7. CĂN BẬC BA, CĂN BẬC n

Căn bậc ba của một số a là một số x mà lập phương của nó bằng a :

$$\sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = a.$$

Căn bậc n ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) của một số a là số mà luỹ thừa bậc n của nó bằng a.

Với $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) ta có một căn bậc n của a là $\sqrt[2k+1]{a}$.

$$\sqrt[2k+1]{a} = x \Leftrightarrow x^{2k+1} = a.$$

Với $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) và $a \geq 0$ ta có hai căn bậc n của a là $\pm\sqrt[2k]{a}$, trong đó $\sqrt[2k]{a}$ gọi là căn số học.

$$\sqrt[2k]{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^{2k} = a. \end{cases}$$

Ta cũng có các công thức nhân, chia hai căn thức cùng chỉ số :

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \ ;$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0).$$

Để quy đồng chỉ số căn thức, cần chú ý : $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Ví dụ 15. Hãy chứng tỏ rằng số $m = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ là một nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Giải : Áp dụng hằng đẳng thức $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$, ta được

$$m^3 = (\sqrt{5}+2) - (\sqrt{5}-2) - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}.m$$
$$= 4 - 3\sqrt[3]{1}.m = 4 - 3m.$$

Suy ra : $m^3 + 3m - 4 = 0$.

Vậy m là một nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Ví dụ 16. Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

Giải

Cách 1. $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} = 1+\sqrt{2}$.

Tương tự $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$.

Do đó $$A = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2.$$

Cách 2. Áp dụng $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(a+b).ab$, ta có

$$A^3 = (7+5\sqrt{2}) + (7-5\sqrt{2}) + 3.A.\sqrt[3]{49-50}$$
$$= 14 - 3A.$$

Giải phương trình

$$A^3 + 3A - 14 = 0 \Leftrightarrow A^3 - 8 + 3A - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow (A-2)(A^2+2A+4) + 3(A-2) = 0 \Leftrightarrow (A-2)(A^2+2A+7) = 0.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $A = 2$.

Bài tập

Căn bậc ba

41. Tính giá trị của các biểu thức :

a) $\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$; b) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$; c) $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$.

42. Số m dưới đây có phải là nghiệm của phương trình $x^3 + 12x - 8 = 0$ không ?

$$m = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4}.$$

43. Lập một phương trình bậc ba với các hệ số nguyên, trong đó :

a) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là một nghiệm của phương trình ;

b) $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$ là một nghiệm của phương trình.

44. Tính giá trị của các biểu thức :

a) $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$;

b) $B = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$;

c) $C = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$;

d) $D = \sqrt[3]{2 + 10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2 - 10\sqrt{\frac{1}{27}}}$;

e) $E = \sqrt[3]{4 + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4 - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$.

45. Tìm x biết :

a) $\sqrt[3]{2 + x} + \sqrt[3]{2 - x} = 1$; b) $2x^3 = (x - 1)^3$.

46. Cho $am^3 = bn^3 = cp^3$ và $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}.$$

Căn bậc n

47. Tính giá trị của các biểu thức :

a) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.\left(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right)$; b) $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$;

c) $\sqrt[4]{56 - 24\sqrt{5}}$; d) $1 + \sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}}$;

e*) $\dfrac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt[4]{125}}}$.

~ Ví dụ : 31, 32, 48, 53, 56, 59.

Bài tập : 115 đến 117, 119, 121, 162 đến 168, 177 đến 181, 187, 194.

Chương II

HÀM SỐ BẬC NHẤT

§8. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị số tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x ; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ.

Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì y được gọi là *hàm hằng*. Chẳng hạn $y = 2$ là một hàm hằng, đồ thị của hàm số này là đường thẳng vuông góc với trục tung, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi giá trị của x thuộc **R**. Với x_1, x_2 bất kì thuộc **R** :

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì ta nói hàm số đó đồng biến trên **R**,

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì ta nói hàm số đó nghịch biến trên **R**.

Ví dụ 17. Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 5$ (a, b, c là hằng số).

Cho biết $f(-3) = 208$. Tính $f(3)$.

Giải : Ta có $f(-3) = a(-3)^5 + b(-3)^3 + c(-3) - 5$;

$$f(3) = a.3^5 + b.3^3 + c.3 - 5$$

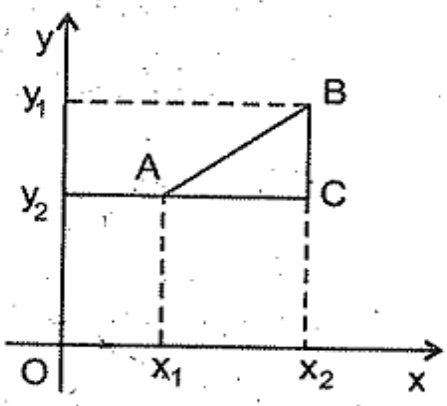
nên $f(-3) + f(3) = -10$. Do đó $208 + f(3) = -10$.

Vậy $f(3) = -10 - 208 = -218$.

Ví dụ 18. Chứng minh công thức tính khoảng cách d giữa hai điểm $A(x_1 ; y_1)$ và $B(x_2 ; y_2)$ là

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Giải : (h.1) Khoảng cách giữa hai điểm x_1, x_2 trên trục hoành bằng $|x_2 - x_1|$. Khoảng cách giữa hai điểm y_1, y_2 trên trục tung bằng $|y_2 - y_1|$.



Hình 1

Trong tam giác vuông ABC ta có

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Vậy $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Bài tập

48. Cho biết : Nếu các điểm A, B theo thứ tự có toạ độ là $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ thì trung điểm M của đoạn thẳng AB có toạ độ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Hãy vẽ các điểm A, B, M trong từng trường hợp dưới đây để minh hoạ khẳng định trên :

a) A(1 ; 2), B(4 ; 4) ; b) A(–1 ; 1), B(3 ; –1) ;

c) A(–2 ; –2), B(1 ; –1).

49. Tìm tập hợp các điểm M có toạ độ như sau với mọi số thực m :

a) M (m ; –1) ; b) M(2 ; m) ;

c) M (m ; m) ; d) M (m ; –m).

50. Xác định hàm số f(x) biết rằng $f(x + 1) = x^2 - 2x + 3$.

51. Xác định hàm số g(x) biết rằng $g(x - 5) = 2x - 1$.

52. Chứng minh rằng trên tập hợp số thực, các hàm số sau đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$:

a) $y = ax + b$ $(a \neq 0)$; b) $y = ax^3$ $(a \neq 0)$.

53. Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x - 3} + \sqrt{3 - x}$ chỉ là một điểm.

54. Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm nêu ở ví dụ 18, hãy xác định dạng của tam giác ABC và tính diện tích của tam giác đó biết rằng :

a) A(3 ; –1), B(–1 ; –3), C(2 ; –4) ;

b) A(–2 ; 2), B(0 ; 3), C(1 ; 1).

55. Cho hàm số $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 3$ (a, b là hằng số).

Cho biết f(2) = 17. Tính f(–2).

§9. HÀM SỐ y = ax

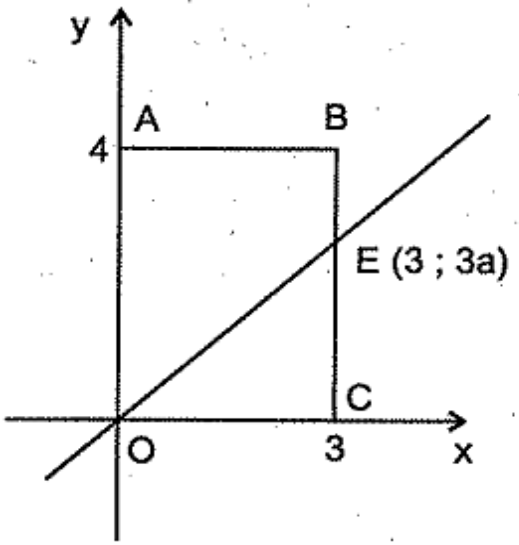
Hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi số thực x.

Đồ thị của hàm số $y = ax$ là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ.

Trên tập hợp số thực, hàm số $y = ax$ đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$.

Ví dụ 19. Trên mặt phẳng toạ độ, cho các điểm A, B, C có tọa độ A(0 ; 4), B(3 ; 4), C(3 ; 0). Hãy tìm hệ số a sao cho đường thẳng $y = ax$ chia hình chữ nhật OABC thành hai phần, trong đó diện tích phần chứa điểm A gấp đôi diện tích phần chứa điểm C.

Giải : (h.2) Đường thẳng $y = ax$ phải cắt cạnh BC của hình chữ nhật OABC, gọi giao điểm đó là E có tọa độ (3 ; 3a).



Hình 2

$S_{OABC} = OA.OC = 4.3 = 12.$

$S_{OCE} = \frac{1}{3}S_{OABC} = \frac{1}{3}.12 = 4.$

$CE = 2.S_{OCE} : OC = 2.\ 4 : 3 = \frac{8}{3}.$

Từ $3a = \frac{8}{3}$ được $a = \frac{8}{9}.$

Đường thẳng phải tìm là $y = \frac{8}{9}x.$

Ví dụ 20. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}.$

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Dùng đồ thị tìm giá trị nhỏ nhất của y, giá trị lớn nhất của y.

Giải

a) $y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} = |x+1| - |x-1|$. Lập bảng xét dấu

x		−1		1	
x + 1	−	0	+		+
x − 1	−		−	0	+

Với $x \le -1$ thì $y = (-x - 1) - (1 - x) = -2$.

Với $-1 < x < 1$ thì $y = (x + 1) - (1 - x) = 2x$.

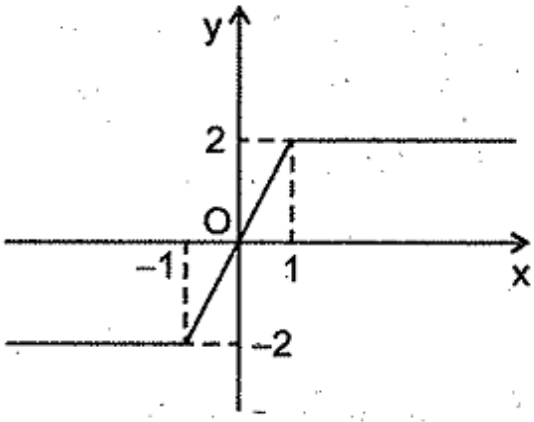
Với $x \ge 1$ thì $y = (x + 1) - (x - 1) = 2$.

Đồ thị của hàm số được vẽ trên hình 3.

b) Trên đồ thị, ta thấy :

$\min y = -2 \Leftrightarrow x \le -1$;

$\max y = 2 \Leftrightarrow x > 1$.

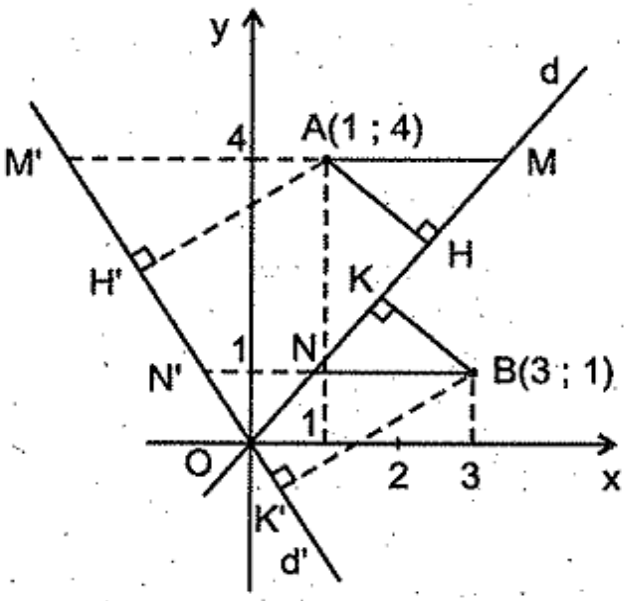


Hình 3

Ví dụ 21. Cho các điểm A(1 ; 4) và B(3 ; 1). Xác định đường thẳng $y = ax$ sao cho A và B nằm về hai phía của đường thẳng và cách đều đường thẳng đó.

Giải : (h.4). Kí hiệu đường thẳng phải tìm là d.

Gọi AH và BK là các khoảng cách từ A và B đến đường thẳng d. Đường thẳng đi qua A và song song với Ox cắt d tại điểm $M\left(\frac{4}{a}; 4\right)$. Đường thẳng đi qua B và song song với Ox cắt d tại điểm $N\left(\frac{1}{a}; 1\right)$.



Hình 4

Ta có $AH = BK \Leftrightarrow AM = NB$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{a} - 1 = 3 - \frac{1}{a} \qquad (1)$$

Giải (1) ta được $a = \frac{5}{4}$, khi đó đường thẳng d phải tìm là $y = \frac{5}{4}x$.

Chú ý

a) Nếu đề bài không có điều kiện "A và B nằm về hai phía của đường thẳng $y = ax$" thì thay cho (1) ta phải viết $\left|\frac{4}{a} - 1\right| = \left|3 - \frac{1}{a}\right|$. Khi đó ngoài (1), ta còn phải giải $\frac{4}{a} - 1 = \frac{1}{a} - 3$. Trường hợp này cho kết quả $a = -\frac{3}{2}$, các điểm A và B nằm cùng phía đối với đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x$ và cách đều đường thẳng đó (đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x$ là đường thẳng d' trên hình 4).

b) Nếu sử dụng công thức tính toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB (xem Bài tập 48) thì đường thẳng y = ax trong Ví dụ 21 đi qua điểm M (2 ; 2,5), ta tìm được $a = \frac{2,5}{2} = \frac{5}{4}$.

Bài tập

56. Vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = |x| - x$; b) $y = |2x| - x$.

57. Ba đường thẳng $y = \sqrt{2}x$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2$ cắt nhau tạo thành một tam giác. Tính diện tích tam giác đó.

58. Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ rồi dùng đồ thị tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y.

59. Trên mặt phẳng toạ độ, cho đa giác OABCDE (không lồi) có tọa độ các đỉnh A(0 ; 3), B(3 ; 3), C(3 ; 1), D(5 ; 1), E(5 ; 0). Tìm hệ số a để đường thẳng y = ax chia đa giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

60. Cho các điểm A(2 ; 8) và B(4 ; 2). Xác định đường thẳng y = ax sao cho A và B nằm về hai phía của đường thẳng và cách đều đường thẳng đó.

61. Cho biết đường thẳng $y = \frac{1}{2}x$ chia mặt phẳng toạ độ thành hai miền : một miền gồm các điểm có toạ độ (x ; y) mà $y > \frac{1}{2}x$, miền kia gồm các điểm có toạ độ (x ; y) mà $y < \frac{1}{2}x$. Hãy vẽ đường thẳng $y = \frac{1}{2}x$ và chỉ rõ miền nào gồm các điểm (x ; y) mà $y > \frac{1}{2}x$.

§10. HÀM SỐ BẬC NHẤT

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức y = ax + b, trong đó a và b là các số thực xác định, $a \neq 0$.

Hàm số y = ax + b ($a \neq 0$) xác định với mọi số thực x.

Trên tập hợp số thực, hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$.

Đồ thị của hàm số bậc nhất là một đường thẳng cắt cả hai trục toạ độ.

Hàm số $y = ax$ là trường hợp đặc biệt của hàm số $y = ax + b$ khi $b = 0$.

Ví dụ 22. Cho hai điểm $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$ với $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Chứng minh rằng nếu đường thẳng $y = ax + b$ đi qua A và B thì

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Giải : Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(x_1 ; y_1)$ nên $y_1 = ax_1 + b$, suy ra

$$y - y_1 = a(x - x_1). \qquad (1)$$

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $B(x_2 ; y_2)$ nên $y_2 = ax_2 + b$, suy ra

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ do đó $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Ví dụ 23. Cho đường thẳng

$$y = mx + m - 1 \text{ (m là tham số).} \qquad (1)$$

a) Chứng minh rằng đường thẳng (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

b) Tính giá trị của m để đường thẳng (1) tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2.

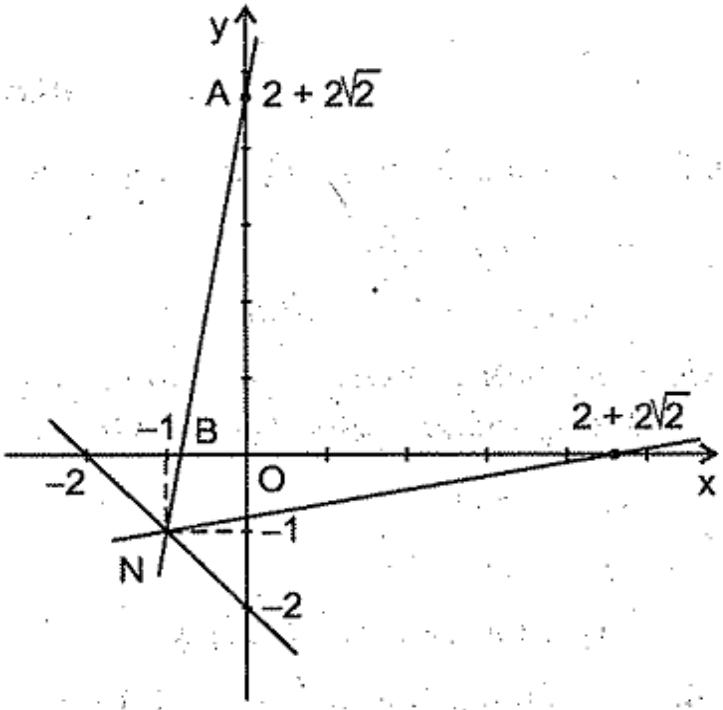
Giải : (h.5) a) Điều kiện để đường thẳng (1) đi qua điểm cố định $N(x_o ; y_o)$ với mọi m là :

$$y_o = mx_o + m - 1 = 0 \text{ với mọi m}$$

$\Leftrightarrow (x_o + 1)m - (y_o + 1) = 0$ với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o + 1 = 0 \\ y_o + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = -1 \end{cases}$$

Vậy các đường thẳng (1) đi qua điểm cố định $N(-1 ; -1)$.



Hình 5

b) Gọi A là giao điểm của đường thẳng (1) với trục tung. Với $x = 0$ thì $y = m - 1$, do đó $OA = |m - 1|$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng (1) với trục hoành. Với $y = 0$ thì $x = \frac{1-m}{m}$ nên $OB = \left|\frac{1-m}{m}\right|$.

$$S_{AOB} = 2 \Leftrightarrow \frac{OA.OB}{2} = 2 \Leftrightarrow OA.OB = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)^2}{|m|} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m^2 - 2m + 1 = 4m & (2) \\ m^2 - 2m + 1 = -4m & (3) \end{array}\right.$$

Giải (2) ta có $m^2 - 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 = 8$

$$\Leftrightarrow |m - 3| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Giải (3) ta có $m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Có ba đường thẳng đi qua N tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2 :

Với $m = 3 + 2\sqrt{2}$, ta có đường thẳng $y = (3 + 2\sqrt{2})x + (2 + 2\sqrt{2})$.

Với $m = 3 - 2\sqrt{2}$, ta có đường thẳng $y = (3 - 2\sqrt{2})x + (2 - 2\sqrt{2})$.

Với $m = -1$, ta có đường thẳng $y = -x - 2$.

Bài tập

62. Tìm điểm cố định mà mỗi đường thẳng sau luôn đi qua với mọi giá trị của m :

a) $y = (m - 2)x + 3$; b) $y = mx + (m + 2)$;

c) $y = (m - 1)x + (2m - 1)$.

63. Cho đường thẳng d xác định bởi $y = 2x + 11$. Đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua trục hoành là :

A) $y = -2x + 11$; B) $y = -2x - 11$;

C) $y = 2x - 11$; D) Đáp số khác.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

64. Cho đường thẳng d xác định bởi $y = 2x + 4$. Đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua đường thẳng $y = x$ là :

A) $y = \frac{1}{2}x + 2$; B) $y = x - 2$;

C) $y = \frac{1}{2}x - 2$; D) $y = -2x - 4$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

65. Xác định đường thẳng đi qua hai điểm A và B, biết rằng :

a) A(–2 ; 0), B(0 ; 1) ; b) A(1 ; 4), B(3 ; 0) ;

c) A(–2 ; 2), B(1 ; 5) ; d) A(2 ; –33), B(–1 ; 18).

66. a) Cho bốn điểm : A(0 ; –5), B(1 ; –2), C(2 ; 1), D(2,5 ; 2,5).

Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

b) Tìm x sao cho ba điểm A(x ; 14), B (–5 ; 20), C(7 ; –16) thẳng hàng.

67. Điểm M(x ; y) cách đều trục tung, trục hoành và đường thẳng $y = -x + 2$. Giá trị x bằng :

A) $\sqrt{2} - 1$; B) $\frac{1}{2}$;

C) $2 - \sqrt{2}$; D) Không xác định được duy nhất.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

68. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng không đi qua gốc tọa độ, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng a, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b thì đường thẳng đó có phương trình là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

69. Xác định các số nguyên a, b sao cho đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm A(4 ; 3), cắt trục tung tại điểm có tung độ là một số nguyên dương, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là một số nguyên dương.

70*. Xác định đường thẳng đi qua A(4 ; 3), cắt trục tung tại điểm có tung độ là một số nguyên dương, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là một số nguyên tố.

71. Vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = |x| - 2$; b) $y = |2x + 1|$.

72. Vẽ đồ thị hàm số $y = |x - 1| + |x - 3|$

rồi dùng đồ thị tìm giá trị nhỏ nhất của y.

73. Dùng đồ thị để chứng minh bất đẳng thức sau $\sqrt{x^2 - 4x + 4} > x - 3$.

74. Cho hàm số $f(x) = ax + b$ có tính chất $f(3) \leq f(1) \leq f(2)$ và $f(4) = 2$. Chứng minh rằng $a = 0$ và $f(0) = 2$.

75*. Cho các điểm A(6 ; 0) và B(0 ; 4). Một điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB. Gọi C, D theo thứ tự là hình chiếu của M trên OA, OB. Gọi N là điểm thuộc đoạn thẳng CD sao cho DN = 2NC. Chứng minh rằng điểm N nằm trên một đường thẳng.

76. Tìm hệ số $a > 0$ sao cho các đường thẳng $y = ax - 1$, $y = 1$, $y = 5$ và trục tung tạo thành một hình thang có diện tích bằng 8.

77. Cho đường thẳng $y = (m - 2)x + 2$. (d)

a) Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng d bằng 1.

c) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d có giá trị lớn nhất.

78*. Cho các điểm A(7 ; 2), B(2 ; 8), C(8 ; 4). Xác định đường thẳng d đi qua A sao cho các điểm B, C nằm về hai phía của d và cách đều d.

79*. Với mỗi số thực x, ta gọi f(x) là giá trị nhỏ nhất trong các số $4x + 1$, $x + 2$, $-2x + 6$.

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$; b) Tìm giá trị lớn nhất của f(x).

§11. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG y = ax + b

Xét hai đường thẳng d và d' theo thứ tự có phương trình là $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$. Ta có :

$d \parallel d' \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$.

d trùng d' $\Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.

d cắt d' $\Leftrightarrow a \neq a'$.

$d \perp d' \Leftrightarrow aa' = -1$ (xem Ví dụ 25).

Xét đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Gọi A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox, T là điểm thuộc đường thẳng $y = ax + b$ và có tung độ dương. Ta gọi góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc tạo bởi tia AT và tia Ax. Đặt góc đó là α, nếu $a > 0$ thì $0^o < \alpha < 90^o$ và $tg\alpha = a$, nếu $a < 0$ thì $90^o < \alpha < 180^o$ và $tg(180^o - \alpha) = -a$. Cho biết a, ta tính được α, hệ số a được gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$.

Ví dụ 24. Tìm các số dương m, n sao cho hệ số góc của đường thẳng $y = mx$ gấp bốn hệ số góc của đường thẳng $y = nx$, góc tạo bởi đường thẳng $y = mx$ với trục Ox gấp đôi góc tạo bởi đường thẳng $y = nx$ với trục Ox.

Giải : (h.6) Qua điểm C (1 ; 0) kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành, cắt các đường thẳng $y = nx$, $y = mx$ theo thứ tự tại A, B. Ta có A(1 ; n), B(1 ; m).

Do $m = 4n$ nên $BC = 4n$, $AB = 3n$.

Theo tính chất đường phân giác của tam giác OBC, ta có

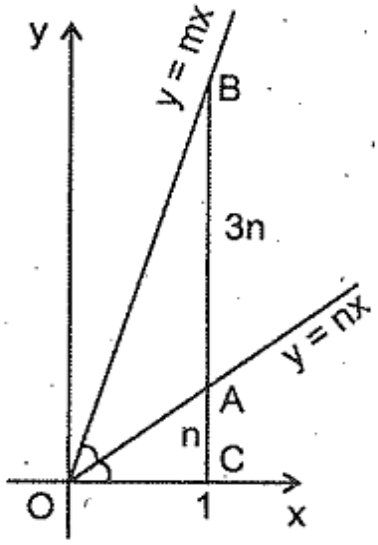
$$\frac{AB}{AC} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow \frac{3n}{n} = \frac{OB}{1} \Rightarrow OB = 3.$$

Theo định lí Py-ta-go trong tam giác OBC vuông tại C có

$$BC^2 = OB^2 - OC^2 = 3^2 - 1^2 = 8$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{8} \Rightarrow m = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$n = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

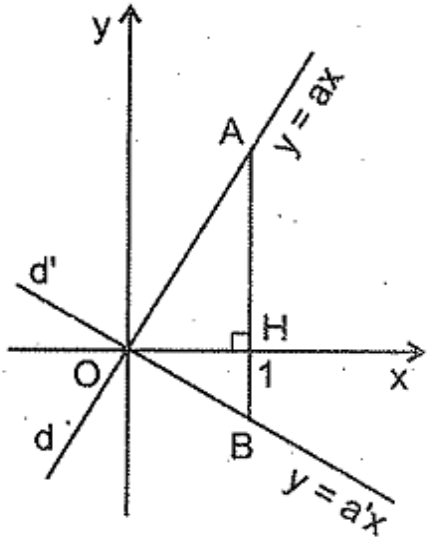


Hình 6

Ví dụ 25. Cho hai đường thẳng d và d' xác định bởi $y = ax$ ($a \neq 0$) và $y = a'x$ ($a' \neq 0$). Chứng minh rằng điều kiện để các đường thẳng d và d' vuông góc với nhau là $aa' = -1$.

Giải : (h.7)

Ta thấy khi $d \perp d'$ thì trong hai đường thẳng d và d', có một đường (giả sử là d) nằm trong góc vuông phần tư I và III, đường kia (là d') nằm trong góc vuông phần tư II và IV, khi đó $a > 0$ và $a' < 0$.



Hình 7

Qua điểm H (1 ; 0), kẻ đường thẳng vuông góc với Ox, cắt d và d' theo thứ tự ở A và B, ta có $HA = |a| = a$, $HB = |a'| = -a$.

Chú ý rằng H nằm giữa A và B nên điều kiện để tam giác OAB vuông tại O là

$$HA.HB = OH^2 \Leftrightarrow a(-a') = 1 \Leftrightarrow aa' = -1.$$

Chú ý : Ta biết rằng hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi hai đường thẳng $y = ax$ và $y = a'x$ vuông góc với nhau. Do đó từ bài toán trên suy ra : Điều kiện để hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ ($a \neq 0$, $a' \neq 0$) vuông góc với nhau là $aa' = -1$.

Bài tập

80. Tìm giá trị của m để hai đường thẳng $y = 2x + 3$ và $y = (m-1)x + 2$:

a) Song song ; b) Cắt nhau ; c) Vuông góc với nhau.

81. Tìm giá trị của m để hai đường thẳng $y = mx + 1$ và $y = (3m - 4)x - 2$:

a) Song song ; b) Cắt nhau ; c) Vuông góc với nhau.

82. Xác định các hệ số a và b để đường thẳng $y = ax + b$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 và song song với đường thẳng OA, trong đó O là gốc tọa độ, $A(\sqrt{2}; 1)$.

83. Xác định đường thẳng đi qua gốc O và song song với đường thẳng AB biết rằng :

a) A(–1 ; 1), B(–1 ; 3) ; b) A(1 ; 2), B(3 ; 2) ; c) A(1 ; 5), B(4 ; 3).

84. Cho ba điểm A(–1 ; 6), B(–4 ; 4), C(1 ; 1). Tìm toạ độ đỉnh D của hình bình hành ABCD.

85. Cho bốn điểm A(1 ; 4), B(3 ; 5), C(6 ; 4), D(2 ; 2). Tứ giác ABCD là hình gì ?

86. Các bộ ba đường thẳng sau có cắt nhau tạo thành tam giác vuông hay không?

a) $y = 2x - 5$, $y = \frac{1}{2}x + 1$; $y = 2x + 3$;

b) $y = 2x - 5$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; $y = x - 2$;

c) $y = -x + 1$, $y = x + 3$; $y = -2x + 6$.

87. Tính hệ số góc của đường thẳng $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

88. Các điểm A (m ; 3) và B (1 ; m) nằm trên đường thẳng có hệ số góc $m > 0$. Tìm giá trị của m.

89. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng đi qua điểm A (x_1, y_1) và có hệ số góc bằng a thì đường thẳng đó có phương trình là $y - y_1 = a(x - x_1)$.

CHUYÊN ĐỀ

BẤT ĐẲNG THỨC

Bất đẳng thức đã được giới thiệu trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8 tập hai*. Sau đây là các phương pháp chứng minh bất đẳng thức và các ví dụ có liên quan đến căn thức.

I – PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 26 (4). Chứng minh rằng trung bình cộng của căn bậc hai số học của hai số dương khác nhau nhỏ hơn căn bậc hai số học của trung bình cộng của hai số ấy.

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} < \sqrt{\frac{a+b}{2}} \quad \text{với } a > 0, b > 0, a \neq b. \qquad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{4} < \frac{a+b}{2}$$

$$\Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{ab} < 2a + 2b \Leftrightarrow 0 < a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow 0 < (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2. \qquad (2)$$

Do $a \neq b$ nên bất đẳng thức (2) đúng, vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Ví dụ 27 (4). Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}. \qquad (1)$$

Giải : Biến đổi tương đương

$$(1) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq a^2+c^2+2ac+b^2+d^2+2bd$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac+bd. \qquad (2)$$

Nếu $ac + bd < 0$ thì (2) được chứng minh.

Nếu $ac + bd \geq 0$ thì (2) tương đương với

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq a^2c^2+b^2d^2+2abcd$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \geq a^2c^2+b^2d^2+2abcd$$

$$\Leftrightarrow (ad-bc)^2 \geq 0. \qquad (3)$$

Bất đẳng thức (3) đúng, vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

II – PHƯƠNG PHÁP LÀM TRỘI, LÀM GIẢM

Ví dụ 28 (6). Chứng minh bất đẳng thức sau với $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

$$2\sqrt{n}-3 < \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-2.$$

Giải : Đặt $\quad A = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$

a) Chứng minh $A > 2\sqrt{n}-3$ bằng cách làm giảm mỗi số hạng của A :

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \text{ với mọi } k \in \mathbf{N}^*$$

Do đó $A > 2\left[\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)+\ldots+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right] =$

$$= 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2} > 2\sqrt{n+1}-3 > 2\sqrt{n}-3.$$

b) Chứng minh $A < 2\sqrt{n}-2$ bằng cách làm trội mỗi số hạng của A :

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) \text{ với mọi } k \in \mathbf{N}^*.$$

Do đó

$$A < 2[(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+\ldots+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})] =$$

$$= 2(\sqrt{n}-\sqrt{1}) = 2\sqrt{n}-2.$$

III – PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ĐÃ BIẾT

Ta nhắc lại ở đây ba bất đẳng thức quan trọng :

1. Tổng của hai số nghịch đảo nhau

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \text{ với x, y là hai số cùng dấu.}$$

Dễ dàng chứng minh bất đẳng thức này.

2. Bất đẳng thức Cô-si(*)

Cho a, b, c là các số không âm. Khi đó :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ ;$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \ .$$

Tổng quát : Trung bình cộng của n số không âm lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \text{ với } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ là các số không âm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Chứng minh bất đẳng thức Cô-si với ba số không âm : xem Bài tập 115.

Chứng minh bất đẳng thức Cô-si với n số không âm : xem Ví dụ 32.

3. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki(**)

Cho hai bộ số a, b, c và x, y, z. Khi đó :

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2,$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2.$$

Tổng quát : Cho hai bộ n số : $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Tích của tổng các bình phương n số của bộ số này và tổng các bình phương n số của bộ số kia lớn hơn hoặc bằng bình phương của tổng n tích hai số tương ứng của hai bộ số đó.

(*) Cauchy (1789 – 1857), nhà toán học Pháp.

(**) Bu-nhi-a-cốp-xki (1804 – 1889), nhà toán học Nga.

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ là hai bộ số tỉ lệ với nhau tức là $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước rằng nếu mẫu bằng 0 thì tử bằng 0.

Chứng minh

Đặt $A = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$, $B = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2$, $C = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$. Cần chứng minh $AB \geq C^2$.

Nếu $A = 0$ thì $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, bất đẳng thức được chứng minh. Cũng vậy nếu $B = 0$. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp A và B khác 0.

Với mọi x ta có :

$$(a_1x - b_1)^2 \geq 0 \Rightarrow a_1^2x^2 - 2a_1b_1x + b_1^2 \geq 0$$

$$(a_2x - b_2)^2 \geq 0 \Rightarrow a_2^2x^2 - 2a_2b_2x + b_2^2 \geq 0$$

...

$$(a_nx - b_2)^2 \geq 0 \Rightarrow a_n^2x^2 - 2a_nb_nx + b_n^2 \geq 0.$$

Cộng từng vế n bất đẳng thức trên được

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq 0$$

tức là $$Ax^2 - 2Cx + B \geq 0. \quad (1)$$

Vì (1) đúng với mọi x nên thay $x = \frac{C}{A}$ vào (1) ta được

$$A \cdot \frac{C^2}{A^2} - 2 \cdot \frac{C^2}{A} + B \geq 0 \Rightarrow B - \frac{C^2}{A} \geq 0 \Rightarrow AB - C^2 \geq 0 \Rightarrow AB \geq C^2.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a_1x = b_1$, $a_2x = b_2$, ..., $a_nx = b_n$ tức là $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước rằng nếu mẫu bằng 0 thì tử phải bằng 0.

Ví dụ 29 (4). Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Giải

Cách 1. Ta nhớ đến bất đẳng thức Cô-si : $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ với x, y là các số không âm. Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}.\frac{b+c}{4}} = 2 \cdot \frac{a}{2} = a.$$

Suy ra $$\frac{a^2}{b+c} \geq a - \frac{b+c}{4}.$$

Tương tự $\frac{b^2}{a+c} \geq b - \frac{a+c}{4}$, $\frac{c^2}{a+b} \geq c - \frac{a+b}{4}$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức ta được

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq (a+b+c) - \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2}.$$

Cách 2. Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

ta có

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a+c}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right] \cdot \left[(\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{a+c})^2 + (\sqrt{a+b})^2\right]$$

$$\geq \left(\frac{a}{\sqrt{b+c}} \cdot \sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} \cdot \sqrt{a+c} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \cdot \sqrt{a+b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b}\right)[2(a+b+c)] \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{b+c} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Ví dụ 30 (4). Cho a, b, c là các số không âm và $a + b + c = 1$. Chứng minh :

a) $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < 3{,}5$;

b) $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$.

Giải

a) *Cách 1*. Ta nhìn tổng a + 1 dưới dạng một tích 1(a + 1) và áp dụng bất đẳng thức Cô-si $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ với x, y là các số không âm.

Ta có $\sqrt{a+1} = \sqrt{1(a+1)} \le \frac{(a+1)+1}{2} = \frac{a}{2} + 1.$

Tương tự : $\sqrt{b+1} \le \frac{b}{2} + 1$, $\sqrt{c+1} \le \frac{c}{2} + 1.$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} \le \frac{a+b+c}{2} + 3 = 3,5.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a + 1 = b + 1 = c + 1 = 1 ⇔ a = b = c = 0, trái với giả thiết a + b + c = 1.

Vậy $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < 3,5.$

Cách 2. Đặt $\sqrt{a+1} = x$, $\sqrt{b+1} = y$, $\sqrt{c+1} = z$. Áp dụng bất đẳng thức $(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$ (xem Bài tập 91a) ta được

$$(\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1})^2 \le 3(a + 1 + b + 1 + c + 1)$$
$$= 3 . 4 = 12 < 12,25$$

nên $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < 3,5.$

b) *Cách 1*. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki với hai bộ ba số được

$$(1.\sqrt{a+b} + 1.\sqrt{b+c} + 1.\sqrt{c+a})^2 \le$$
$$(1 + 1 + 1).\left[(\sqrt{a+b})^2 + (\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2\right]$$

$\Rightarrow (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})^2 \le 3(a + b + b + c + c + a) = 6$

$\Rightarrow \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{6}.$

Cách 2. Đặt $\sqrt{a+b} = x$, $\sqrt{b+c} = y$, $\sqrt{c+a} = z$.

Áp dụng bất đẳng thức $(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$ có

$$(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})^2 \le 3(a + b + b + c + c + a) = 3.2 = 6$$

$\Rightarrow \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{6}.$

IV – PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

Ví dụ 31 (7). Cho a + b = 2. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \le 2.$$

Giải : Đặt $\sqrt[3]{a} = m$, $\sqrt[3]{b} = n$ thì $a = m^3$, $b = n^3$. Ta có $m^3 + n^3 = 2$.

Cần chứng minh $m + n \le 2$.

Giả sử $m + n > 2$ thì

$$(m + n)^3 > 8 \Rightarrow m^3 + n^3 + 3mn(m + n) > 8 \Rightarrow 2 + 3mn(m + n) > 8$$

$\Rightarrow mn(m + n) > 2 \Rightarrow mn(m + n) > m^3 + n^3$ (vì $m^3 + n^3 = 2$).

Chia hai vế cho số dương m + n (theo giả thiết phản chứng) :

$$mn > m^2 - mn + n^2 \Rightarrow 0 > (m - n)^2, \text{ vô lí.}$$

Vậy phải có $m + n \le 2$.

V – PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Ví dụ 32 (7). Chứng minh bất đẳng thức Cô-si với n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Giải

Hiển nhiên mệnh đề đúng với n = 2 tức là $\frac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}$.

Giả sử mệnh đề đúng với n = k tức là $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \ge \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$. Ta sẽ chứng minh mệnh đề cũng đúng với n = k + 1.

Giả sử $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \le a_{k+1}$ thì $a_{k+1} \ge \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$.

Đặt $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} = x$ thì $x \ge 0$, ta có $a_{k+1} = x + y$ với $y \ge 0$ và $x^k \ge a_1 a_2 \ldots a_k$ (do giả thiết quy nạp). Ta có

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} = \left(\frac{kx + x + y}{k+1}\right)^{k+1} =$$

$$= \left(x + \frac{y}{k+1}\right)^{k+1} \geq x^{k+1} + (k+1).\frac{y}{k+1}.x^k =$$

$$= x^{k+1} + x^k y = x^k(x+y) \geq a_1a_2...a_ka_{k+1}.$$

Suy ra $$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1a_2...a_{k+1}}.$$

Vậy mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

VI – PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

Ví dụ 33(4). Chứng minh bất đẳng thức sau với a, b, c, d > 0

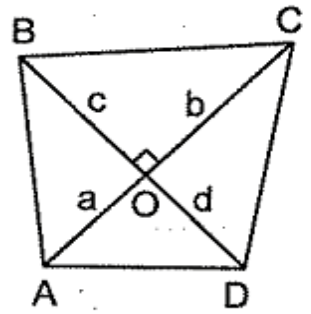
$$\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} + \sqrt{(a^2 + d^2)(b^2 + d^2)} \geq (a + b)(c + d),$$

trong đó a, b, c, d là những số thực dương.

Giải : Xét tứ giác ABCD có $AC \perp BD$, O là giao điểm hai đường chéo ; OA = a, OC = b, OB = c, OD = d với a, b, c, d là các số dương (h.8). Theo định lí Py-ta-go :

$AB = \sqrt{a^2 + c^2}$, $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$, $AD = \sqrt{a^2 + d^2}$, $CD = \sqrt{b^2 + d^2}$. AC = a + b, BD = c + d.

Cần chứng minh $AB.BC + AD.CD \geq AC.BD$.



Hình 8

Thật vậy, ta có $AB.BC \geq 2S_{ABC}$

$AD.CD \geq 2S_{ADC}$.

Suy ra $AB.BC + AD.CD \geq 2S_{ABCD} = AC.BD$.

Vậy

$$\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} + \sqrt{(a^2 + d^2)(b^2 + d^2)} \geq (a + b)(c + d).$$

Cách giải khác. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

$(m^2 + n^2)(x^2 + y^2) \geq (mx + ny)^2$ với m = a, n = c, x = c, y = b

ta có $(a^2 + c^2)(c^2 + b^2) \geq (ac + cb)^2 \Rightarrow \sqrt{(a^2 + c^2)(c^2 + b^2)} \geq ac + cb.$ (1)

Tương tự $\sqrt{(a^2 + d^2)(d^2 + b^2)} \geq ad + db.$ (2)

Cộng (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập

90(4). Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $x^2 + x\sqrt{2} + 1 > 0$;

b) $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} < 2\sqrt{a}$ với $a > b > 0$.

91(1). Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$;

b) $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$ với các số dương a, b, c.

92(5). Cho $a = \sqrt{2004} - \sqrt{2003}$, $b = \sqrt{2005} - \sqrt{2004}$.

So sánh a và b, số nào lớn hơn?

93(5). Tìm số dương nhỏ nhất trong các số sau :

$a = 4\sqrt{5} - 9$, $b = 9 - 4\sqrt{5}$, $c = 7 - 4\sqrt{3}$, $d = 18 - 5\sqrt{13}$, $e = 2\sqrt{30} - 11$.

94(5). a) Cho $a = \sqrt{37} - \sqrt{35}$. Tìm số lớn nhất nhỏ hơn a, số nhỏ nhất lớn hơn a trong các số sau :

$$\frac{2}{13}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{11}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{2}{9}.$$

b) Cho $a = \sqrt{65} - \sqrt{63}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{8} < a < \frac{2}{15}$, rồi tìm xem phần thập phân của a gần nhất với số nào trong các số 0,12 ; 0,13 ; 0,14 ; 0,15?

95(6). Cho $A = \frac{1}{\sqrt{1.1999}} + \frac{1}{\sqrt{2.1998}} + \frac{1}{\sqrt{3.1997}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1999.1}}$.

Chứng minh rằng $A > 1,999$.

96(6). Chứng minh với mọi số nguyên dương n :

a) $\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} < 1$;

b) $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$

97(6). Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ đều có

$$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

98*(6). Cho 25 số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_{25}$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} = 9.$$

Chứng minh rằng trong 25 số tự nhiên đó, tồn tại hai số bằng nhau.

99*(6). Chứng minh với mọi số nguyên dương n :

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n} \leq n.\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

100*(6). Cho $a = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{1+2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2+3} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{3+4} + ... + \frac{\sqrt{25}-\sqrt{24}}{24+25}.$

Chứng minh rằng $a < \frac{2}{5}$.

101*(6). Cho $A = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.....\frac{2n-1}{2n}$ $(n \in N, n \geq 2)$.

Chứng minh rằng :

a) $A < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; b*) $A < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

102(4). Chứng minh bất đẳng thức sau bằng phương pháp hình học :

$\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{b^2+c^2} \geq b(a+c)$ với các số dương a, b, c.

103(4). Chứng minh bất đẳng thức sau với các số dương a, b, c, d :

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}.$$

104(4). Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$ với các số dương a, b, c.

b) $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{a+b+c+d}{2}$ với các số dương a, b, c, d.

105(4). Chứng minh rằng nếu các đoạn thẳng có độ dài a, b, c lập được thành một tam giác thì các đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ cũng lập được thành một tam giác.

106*(4). Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh :

$$\sqrt{2}(a+b+c) \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} < \sqrt{3}(a+b+c).$$

107*(4). Chứng minh bất đẳng thức với a và b không âm

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

108(4). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

109(1). Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

110(1). Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

111(5). Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0{,}01$.

112(5). Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để có bất đẳng thức

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \leq n(a^4+b^4+c^4).$$

113(4). Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b} \text{ với } a > b > 0.$$

114(1). Một máy tính thực hiện các lệnh sau :

(1) Cho x bằng 3 và S bằng 0.

(2) Cộng 2 vào x.

(3) Cộng x vào S.

(4) Nếu $S \geq 10\ 000$ thì thực hiện lệnh (5), còn ngược lại thì trở lại lệnh (2) và tiến hành tiếp từ đó.

(5) In giá trị của x.

(6) Dừng lại.

Tính giá trị của x được in ra.

115*(7). Chứng minh bất đẳng thức Cô-si với ba số không âm a, b, c

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

116*(7). Cho các số dương a, b, c, d. Biết $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \leq 1.$

Chứng minh rằng $abcd \leq \frac{1}{81}$.

117*(7). Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \text{ với các số dương x, y, z}$$

bằng cách vận dụng các bất đẳng thức Cô-si và Bu-nhi-a-cốp-xki.

118(4). Cho $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 = 1$.

119*(7). Cho $a = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$, $b = 2\sqrt[3]{3}$. Chứng minh rằng $a < b$.

120(6). a) Chứng minh $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} < 2$ (vế trái có 100 dấu căn).

b) Chứng minh $\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} > \frac{1}{4}$ (tử có 100 dấu căn, mẫu có 99 dấu căn)

121*(7). a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n, ta có $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

b) Chứng minh rằng trong các số có dạng $\sqrt[n]{n}$ (n là số tự nhiên, $n \geq 2$), số $\sqrt[3]{3}$ có giá trị lớn nhất.

122*(1). Cho hai dãy số sắp thứ tự : $a \geq b \geq c$ và $x \leq y \leq z$.

Chứng minh bất đẳng thức $(a + b + c)(x + y + z) \geq 3(ax + by + cz)$

Bất đẳng thức Trê-bư-sép(*).

123*(3). Tìm 20 chữ số thập phân đầu tiên của số

$$\sqrt{0,\underbrace{99\ldots9}_{20 \text{ chữ số } 9}}.$$

124*(6). Chứng minh rằng :

a) Số $(8 + 3\sqrt{7})^7$ có bảy chữ số 9 liền sau dấu phẩy ;

b) Số $(7 + 4\sqrt{3})^{10}$ có mười chữ số 9 liền sau dấu phẩy.

125*(6). Kí hiệu a_n là số nguyên gần $\sqrt{n}$ nhất ($n \in \mathbf{N}^*$).

Chẳng hạn : $\sqrt{1} = 1 \Rightarrow a_1 = 1$; $\sqrt{2} \approx 1,4 \Rightarrow a_2 = 1$;

$\sqrt{3} \approx 1,7 \Rightarrow a_3 = 2$; $\sqrt{4} = 2 \Rightarrow a_4 = 2$;

$\sqrt{5} \approx 2,2 \Rightarrow a_5 = 2$; $\sqrt{6} \approx 2,4 \Rightarrow a_6 = 2$;

$\sqrt{7} \approx 2,6 \Rightarrow a_7 = 3\ldots$

Tính $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_{1980}}$.

TÌM CỰC TRỊ

I – ĐỊNH NGHĨA GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức đã được trình bày trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8 tập hai*. Ta nhắc lại các định nghĩa sau :

Định nghĩa giá trị lớn nhất. Cho biểu thức f(x) xác định trên D. Ta nói M là giá trị lớn nhất của f(x) trên D, kí hiệu M = maxf(x), nếu hai điều kiện sau được thoả mãn :

(*) Trê-bư-sép (1821 – 1894), nhà toán học Nga.

– Với mọi x thuộc D thì $f(x) \leq M$, với M là hằng số.

– Tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = M$.

Định nghĩa giá trị nhỏ nhất. Cho biểu thức f(x) xác định trên D. Ta nói m là giá trị nhỏ nhất của f(x) trên D, kí hiệu $m = \min f(x)$ nếu hai điều kiện sau được thoả mãn :

– Với mọi x thuộc D thì $f(x) \geq m$, với m là hằng số.

– Tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = m$.

Ta cũng định nghĩa giá trị lớn nhất của biểu thức f(x, y,...). giá trị nhỏ nhất của biểu thức f(x, y,...) bằng cách tương tự.

II – NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI TOÁN CỰC TRỊ

1. Sai lầm trong chứng minh điều kiện 1

Ví dụ 34(1). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A = \frac{1}{x^2 - 6x + 17}.$$

Lời giải sai. Phân thức A có tử không đổi nên A có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất.

Ta có $$x^2 - 6x + 17 = (x-3)^2 + 8 \geq 8.$$

$$\min(x^2 - 6x + 17) = 8 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy $\max A = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 3$.

Phân tích sai lầm. Tuy đáp số không sai nhưng lập luận sai khi khẳng định "A có tử số không đổi nên có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất" mà chưa đưa ra nhận xét tử và mẫu là các số dương.

Chẳng hạn, xét biểu thức $B = \frac{1}{x^2 - 4}$. Với lập luận "phân thức B có tử không đổi nên có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất", do mẫu nhỏ nhất bằng –4 khi x = 0, ta sẽ đi đến $\max B = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0$. Điều này không đúng vì $\frac{1}{4}$ không phải là giá trị lớn nhất của B, chẳng hạn với x = 3 thì $B = \frac{1}{5} > -\frac{1}{4}$.

Mắc sai lầm trên là do không nắm vững tính chất của bất đẳng thức, đã máy móc áp dụng quy tắc so sánh hai phân số có tử và mẫu là số tự nhiên sang hai phân số có tử và mẫu là số nguyên.

Lời giải đúng. Bổ sung thêm nhận xét $x^2 - 6x + 17 = (x - 3)^2 + 8 \geq 8$ nên tử và mẫu của A là các số dương ; hoặc từ nhận xét trên suy ra $A > 0$, do đó A lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{1}{A}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 17$ nhỏ nhất.

Ví dụ 35(1). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \text{ với các số dương x, y, z.}$$

Lời giải sai. Giả sử $x \geq y \geq z > 0$. Ta suy ra

$$x - z \geq 0 \Rightarrow y(x - z) \geq z(x - z) \Rightarrow xy - yz + z^2 \geq xz.$$

Chia hai vế cho số dương xz được

$$\frac{y}{z} - \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \geq 1. \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có $$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2. \qquad (2)$$

Cộng (1) với (2) ta được $$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3. \qquad (3)$$

$\min A = 3 \Leftrightarrow x = y = z$.

Phân tích sai lầm. Khi hoán vị vòng quanh x thay bởi y, y thay bởi z, z thay bởi x thì biểu thức A trở thành $\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}$ tức là biểu thức không đổi. Điều đó cho phép ta được giả sử x là số lớn nhất (hoặc số nhỏ nhất), nhưng không cho phép giả sử $x \geq y \geq z$. Thật vậy, sau khi chọn x là số lớn nhất ($x \geq y$, $x \geq z$) thì vai trò của y và z lại không bình đẳng : giữ nguyên x, thay y bởi z, thay z bởi y ta được $\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}$, không bằng biểu thức A.

(Ta đưa ra một ví dụ khác cho phép được giả sử $x \geq y \geq z$. Chẳng hạn : $B = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$. Sau khi chọn x là số lớn nhất thì vai trò của y và z là bình đẳng vì giữ nguyên x, thay y bởi z, thay z bởi y ta được $x^2 + z^2 + y^2 + xz + yz + yx$, vẫn bằng B).

Cách giải đúng

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$:

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3 . \sqrt[3]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}} = 3$$

Do đó min $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) = 3$ khi và chỉ khi $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$, tức là $x = y = z$.

Cách 2. Ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} - \frac{y}{x}\right)$.

Ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (do $x, y > 0$) nên để chứng minh $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$ chỉ cần chứng minh

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{x} - \frac{y}{x} \geq 1. \qquad (1)$$

(1) $\Leftrightarrow xy + z^2 - yz - xz \geq 0$ (nhân hai vế với số dương xz)

$\Leftrightarrow y(x - z) - z(x - z) \geq 0 \Leftrightarrow (x - z)(y - z) \geq 0.$ (2)

(2) đúng với giả thiết rằng z là số nhỏ nhất trong ba số x, y, z, do đó (1) đúng.

Từ đó tìm được giá trị nhỏ nhất của $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

Ví dụ 36(1). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = x^2 + y^2 \text{ biết } x + y = 4.$$

Lời giải sai. Ta có $A = x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Do đó A nhỏ nhất $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2xy \Leftrightarrow x = y = 2$.

Khi đó min $A = 2^2 + 2^2 = 8$.

Phân tích sai lầm. Đáp số tuy không sai nhưng lập luận mắc sai lầm. Ta mới chứng minh được $f(x, y) \geq g(x, y)$ chứ chưa chứng minh được $f(x, y) \geq m$ với m là hằng số.

Chẳng hạn, với lập luận như trên, từ bất đẳng thức đúng $x^2 \geq 4x - 4$ sẽ suy ra :

x^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$;

đi đến min $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Dễ thấy kết quả đúng phải là min $x^2 = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Cách giải đúng. Ta có

$$x + y = 4 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 16. \quad (1)$$

Ta lại có $\quad (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\quad 2(x^2 + y^2) \geq 16 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 8$.

min A = 8 khi và chỉ khi $x = y = 2$.

2. Sai lầm trong chứng minh điều kiện 2

Ví dụ 37(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = x + \sqrt{x}.$$

Lời giải sai

$$A = x + \sqrt{x} = \left(x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}.$$

Vậy min $A = -\frac{1}{4}$.

Phân tích sai lầm. Sau khi chứng minh $f(x) \geq -\frac{1}{4}$, chưa chỉ ra trường hợp xảy ra $f(x) = -\frac{1}{4}$. Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$, vô lí.

Lời giải đúng. Để tồn tại $\sqrt{x}$ phải có $x \geq 0$. Do đó $A = x + \sqrt{x} \geq 0$.

min A = 0 khi và chỉ khi $x = 0$.

Ví dụ 38(1). Tìm giá trị lớn nhất của

$$A = xyz(x + y)(y + z)(z + x)$$

với x, y, z là các số không âm và $x + y + z = 1$.

Lời giải sai. Áp dụng bất đẳng thức $4ab \leq (a + b)^2$ ta có

$$4(x + y).z \leq (x + y + z)^2 = 1 ;$$

$$4(y + z).x \leq (y + z + x)^2 = 1 ;$$

$$4(z + x).y \leq (z + x + y)^2 = 1.$$

Nhân từng vế (do hai vế đều không âm) được

$$64xyz(x + y)(y + z)(z + x) \le 1.$$

Vậy max $A = \frac{1}{64}$.

Phân tích sai lầm. Sai lầm cũng ở chỗ chưa chỉ ra được trường hợp xảy ra đẳng thức. Điều kiện để $A = \frac{1}{64}$ là :

$$\begin{cases} x + y = z \\ y + z = x \\ z + x = y \\ x + y + z = 1 \\ x, y, z \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x, y, z \ge 0 \end{cases} \quad \text{(mâu thuẫn).}$$

Cách giải đúng. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm được

$$1 = x + y + z \ge 3.\sqrt[3]{xyz}. \qquad (1)$$

$$2 = (x + y) + (y + z) + (z + x) \ge 3.\sqrt[3]{(x + y)(y + z)(z + x)}. \qquad (2)$$

Nhân từng vế (1) và (2) (do hai vế đều không âm) được

$$2 \ge 9.\sqrt[3]{A} \Rightarrow A \le \left(\frac{2}{9}\right)^3$$

max $A = \left(\frac{2}{9}\right)^3$ khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 39(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{(x + a)(x + b)}{x}$$

với $x > 0$, a và b là các hằng số dương cho trước.

Lời giải sai. Ta có

$$x + a \ge 2\sqrt{ax} \qquad (1)$$

$$x + b \ge 2\sqrt{bx}. \qquad (2)$$

Do đó

$$\frac{(x + a)(x + b)}{x} \ge 2\,\frac{2\sqrt{ax}.2\sqrt{bx}}{x} = 4\sqrt{ab}.$$

$$\min A = 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow x = a = b.$$

Phân tích sai lầm. Chỉ xảy ra $A = 4\sqrt{ab}$ khi (1) và (2) là những đẳng thức, tức là $x = a$ và $x = b$. Như vậy đòi hỏi phải có $a = b$. Nếu $a \neq b$ thì không có $A = 4\sqrt{ab}$.

Cách giải đúng. Ta thực hiện phép nhân và tách ra các hằng số :

$$A = \frac{(x+a)(x+b)}{x} = \frac{x^2 + ax + bx + ab}{x} = \left(x + \frac{ab}{x}\right) + (a+b).$$

Ta có $$x + \frac{ab}{x} \geq 2\sqrt{ab} \text{ (bất đẳng thức Cô-si)}$$

nên $$A \geq 2\sqrt{ab} + a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

$\min A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = \dfrac{ab}{x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}.$$

Ví dụ 40(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = 2x + 3y \text{ biết } 2x^2 + 3y^2 \leq 5.$$

Lời giải sai. Gọi $B = 2x^2 + 3y^2$, ta có $B \leq 5$.

Xét $$A + B = 2x + 3y + 2x^2 + 3y^2 = 2(x^2 + x) + 3(y^2 + y)$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}. \quad (1)$$

Ta lại có $B \leq 5$ nên $-B \geq -5$. (2)

Cộng (1) với (2) ta được $A \geq -\dfrac{25}{4}$.

$$\min A = -\frac{25}{4} \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{2}.$$

Phân tích sai lầm. Sai lầm ở chỗ với $x = y = -\dfrac{1}{2}$ thì chỉ xảy ra dấu "=" ở (1), còn dấu "=" ở (2) không xảy ra. Thật vậy với $x = y = -\dfrac{1}{2}$ thì

$$B = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \neq 5.$$

Do đó $-B \neq -5$.

Cách giải đúng. Xem Ví dụ 47.

III – MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ

Một số phương pháp và kinh nghiệm giải toán cực trị đã được giới thiệu trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8 tập hai*. Sau đây là một số phương pháp và kinh nghiệm khác.

1. Xét biểu thức phụ

Ví dụ 41(5). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$$A = \frac{1}{2 - \sqrt{3 - x^2}}.$$

Giải : Ta phải có $|x| \leq \sqrt{3}$. Dễ thấy $A > 0$. Ta xét biểu thức

$$B = \frac{1}{A} = 2 - \sqrt{3 - x^2}.$$

Ta có $$0 \leq \sqrt{3 - x^2} \leq \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq -\sqrt{3 - x^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3} \leq 2 - \sqrt{3 - x^2} \leq 2.$$

$$\min B = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3 - x^2} \Leftrightarrow x = 0.$$

Khi đó $\max A = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$.

$\max B = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Khi đó $\min A = \dfrac{1}{2}$.

Nhận xét : Trong ví dụ trên, để tìm cực trị của A, do $A > 0$ nên ta xét biểu thức phụ $\dfrac{1}{A}$. Các biểu thức phụ thường xét có thể là $-A$, A^2, $|A|$. Trong ví dụ dưới đây, ta xét biểu thức phụ B sai khác với A một hằng số.

Ví dụ 42*(5). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} \text{ với } 0 < x < 1.$$

Giải

Cách 1. Để áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta xét biểu thức

$$B = \frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với hai số dương $\frac{2x}{1-x}$ và $\frac{1-x}{x}$ có

$$B \geq 2 \,.\, \sqrt{\frac{2x}{1-x} . \frac{1-x}{x}} = 2\sqrt{2}.$$

$$B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{1-x} = \dfrac{1-x}{x} & (1) \\ 0 < x < 1 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta được $\quad 2x^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow |x\sqrt{2}| = |1-x|$.

Do $0 < x < 1$ nên $x\sqrt{2} = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$.

Như vậy min $B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$.

Bây giờ ta xét hiệu $A - B$

$$A - B = \left(\frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x}\right) = \frac{2-2x}{1-x} + \frac{1-1+x}{x} = 2 + 1 = 3.$$

Do đó min $A = 2\sqrt{2} + 3$ khi và chỉ khi $x = \sqrt{2} - 1$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki đối với hai cặp số

$$(a^2 + b^2)(m^2 + n^2) \geq (am + bn)^2, \text{ ta có}$$

$$\left[\left(\sqrt{\frac{2}{1-x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2\right] . \left[(\sqrt{1-x})^2 + (\sqrt{x})^2\right] \geq \left(\sqrt{\frac{2}{1-x}} . \sqrt{1-x} + \sqrt{\frac{1}{x}} . \sqrt{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}\right)(1 - x + x) \geq (\sqrt{2} + \sqrt{1})^2 \Rightarrow A.1 \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi :

$$\frac{\frac{2}{1-x}}{1-x} = \frac{\frac{1}{x}}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = (1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{2} = 1 - x \text{ (vì } 0 < x < 1) \Leftrightarrow x(\sqrt{2}+1) = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1.$$

Vậy min $A = 3 + 2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $x = \sqrt{2} - 1$.

2. Đổi biến và tìm cực trị đối với biến mới

Ví dụ 43(1). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{a^2}{a-1} + \frac{b^2}{b-1} \text{ với } a > 1, b > 1.$$

Giải : Đặt $a - 1 = x > 0$, $b - 1 = y > 0$, ta có

$$A = \frac{(x+1)^2}{x} + \frac{(y+1)^2}{y} = \frac{x^2+2x+1}{x} + \frac{y^2+2y+1}{y}$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + 4.$$

Với $x > 0$, $y > 0$ ta có $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $y + \frac{1}{y} \geq 2$, nên $A \geq 8$.

min $A = 8 \Leftrightarrow x = y = 1 \Leftrightarrow a = b = 2$.

Ví dụ 44*(1). Cho các số x, y không âm thoả mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của

$$A = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}.$$

Giải

$$A = \frac{x^2+x+y^2+y}{xy+x+y+1} = \frac{x^2+y^2+1}{xy+2} = \frac{(x+y)^2-2xy+1}{xy+2} = \frac{2-2xy}{xy+2}.$$

Ta có $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}$ nên $xy \leq \frac{1}{4}$.

Đặt xy = t thì $0 \le t \le \frac{1}{4}$, $A = \frac{2-2t}{2+t} = -2 + \frac{6}{t+2}$.

A nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{6}{t+2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ t + 2 lớn nhất $\Leftrightarrow$ t lớn nhất $\Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Khi đó min $A = \frac{2}{3}$.

A lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{6}{t+2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ t + 2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ t nhỏ nhất $\Leftrightarrow t = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 1 \\ x = 1, y = 0 \end{cases}$. Khi đó max A = 1.

3. Vận dụng các bất đẳng thức đã biết

Ví dụ 45(5). Tìm giá trị lớn nhất của

$$A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} \text{ biết } x + y = 4.$$

Giải

Cách 1. Bất đẳng thức Cô-si cho phép làm giảm một tổng

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \text{ với a và b không âm.}$$

Ở đây ta lại muốn làm tăng một tổng. Ta dùng bất đẳng thức

$a + b \le \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ (bạn đọc tự chứng minh bất đẳng thức này).

$$A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} \le \sqrt{2(x-1+y-2)} = \sqrt{2}.$$

$$\max A = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = y - 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ y = 2,5. \end{cases}$$

Cách 2

$$A^2 = (x-1) + (y-2) + 2\sqrt{(x-1)(y-2)} = 1 + 2\sqrt{(x-1)(y-2)}.$$

Ta lại có

$$2\sqrt{(x-1)(y-2)} \le (x-1) + (y-2) = 1 \text{ nên } A^2 \le 2.$$

$$\max A = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = y - 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ y = 2,5. \end{cases}$$

Cách 3. Áp dụng bất đẳng thức $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \le \sqrt{\frac{a+b}{2}}$ (xem Ví dụ 26)

$$\frac{A}{2} \le \sqrt{\frac{x-1+y-2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\max A = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = y-2 \\ x+y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ y = 2,5 \end{cases}.$$

Ví dụ 46(5). Tìm giá trị lớn nhất của

$$B = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y}.$$

Giải

Bất đẳng thức Cô-si cho phép làm trội một tích $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ với a và b không âm. Ta xem các biểu thức $\sqrt{x-1}$, $\sqrt{y-2}$ là các tích $\sqrt{x-1} = \sqrt{1.(x-1)}$ và $\sqrt{y-2} = \frac{\sqrt{2.(y-2)}}{\sqrt{2}}$. Theo bất đẳng thức Cô-si

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{\sqrt{1.(x-1)}}{x} \le \frac{1+x-1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{y-2}}{y} = \frac{\sqrt{2.(y-2)}}{y\sqrt{2}} \le \frac{2+y-2}{2y\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\max B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 1 \\ y-2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Ví dụ 47(4). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$$A = 2x + 3y \text{ biết } 2x^2 + 3y^2 \le 5.$$

Giải : Ta xét biểu thức $A^2 = (2x+3y)^2$.

Nhớ lại bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

$$(am+bn)^2 \le (a^2+b^2)(m^2+n^2). \qquad (1)$$

Nếu áp dụng (1) với a = 2, b = 3, m = x, n = y, ta có

$$A^2 = (2x+3y)^2 \le (2^2+3^2)(x^2+y^2) = 13(x^2+y^2).$$

Với cách trên, ta không chỉ ra được hằng số α để $A^2 \le \alpha$. Bây giờ ta viết A^2 dưới dạng

$A^2 = \left(\sqrt{2}.\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}.\sqrt{3}\,y\right)^2$ rồi áp dụng (1) ta có

$$A^2 \le \left[\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2\right]\left[\left(x\sqrt{2}\right)^2 + \left(y\sqrt{3}\right)^2\right] = (2+3)(2x^2+3y^2) \le 5.5 = 25.$$

$$A^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = y.$$

Do $A^2 \le 25$ nên $-5 \le A \le 5$.

$$\min A = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1.$$

$$\max A = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

4. Chia khoảng để tìm cực trị

Ví dụ 48(7). Tìm giá trị lớn nhất của

$$A = x^2(3 - x) \text{ với } x \ge 0.$$

Giải :

a) Xét $0 \le x \le 3$. Ta có $A = 4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(3 - x)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 3 - x$ ta được

$$\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(3 - x) \le \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 3 - x}{3}\right)^3 = 1.$$

Do đó $A \le 4$. (1)

b) Xét $x > 3$, khi đó $A < 0$. (2)

So sánh (1) và (2) ta đi đến kết luận

$$\max A = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 3 - x \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

5. Dùng đồ thị để tìm cực trị

Ví dụ 49(10). Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$y = |x - 1| + |x - 3| - |2x + 2| \text{ với } -2 \le x \le 4.$$

Giải : Xét giá trị của y ứng với từng khoảng giá trị của x, ta có :

Với $-2 \le x \le -1$

thì $y = (1 - x) + (3 - x) - (-2x - 2) = 6.$

Với $-1 < x \le 1$

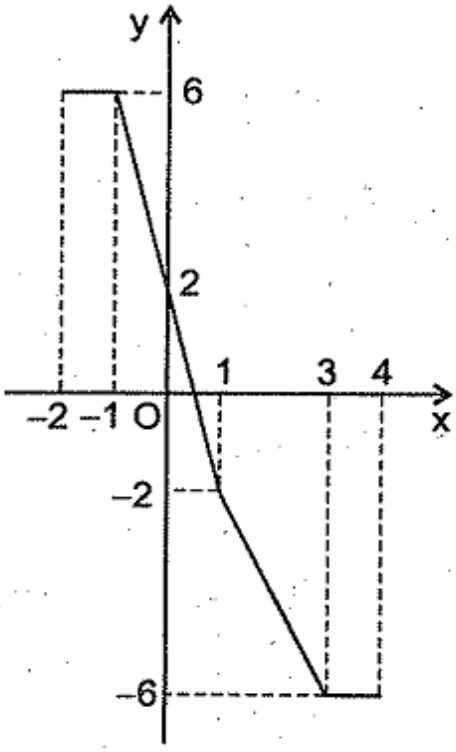
thì $y = (1 - x) + (3 - x) - (2x + 2) = -4x + 2.$

Với $1 < x < 3$

thì $y = (x - 1) + (3 - x) - (2x + 2) = -2x.$

Với $3 \le x \le 4$

thì $y = (x - 1) + (x - 3) - (2x + 2) = -6.$



Hình 9

Trên hình 9 ta có đồ thị của hàm số

$y = |x - 1| + |x - 3| - |2x + 2|$ với $-2 \le x \le 4$.

Từ đồ thị ta thấy :

$\max y = 6 \Leftrightarrow -2 \le x \le -1$;

$\min y = -6 \Leftrightarrow 3 \le x \le 4.$

6. Tìm liên hệ giữa biểu thức đã cho và biểu thức phải tìm cực trị

Ví dụ 50(1). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = a^3 + b^3 + c^3$$

biết rằng $a \ge -1$, $b \ge -1$, $c \ge -1$ và $a + b + c = 0$.

Giải

Ta tìm liên hệ giữa $a^3 + b^3 + c^3$ và $a + b + c$. Trước hết tìm liên hệ giữa a^3 và a với $a \ge -1$.

Ta có $\quad a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1) = (a + 1)\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}(a + 1)$

do đó $\quad a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4} = (a + 1)\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$ với $a \ge -1$.

Tương tự $b^3 - \frac{3}{4}b + \frac{1}{4} \ge 0$, $c^3 - \frac{3}{4}c + \frac{1}{4} \ge 0$ với $b \ge -1$, $c \ge -1$.

Do đó $(a^3 + b^3 + c^3) - \frac{3}{4}(a + b + c) + \frac{3}{4} \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq -\frac{3}{4}$.

$$A = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \text{ hoặc } a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \text{ hoặc } b = \frac{1}{2} \\ c = -1 \text{ hoặc } c = \frac{1}{2} \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Vậy min $A = -\frac{3}{4}$ khi và chỉ khi trong a, b, c có hai số bằng $\frac{1}{2}$ và một số bằng -1.

Bài tập

126(2). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của :

a) $A = \dfrac{1}{5 + 2\sqrt{6 - x^2}}$; b) $B = \sqrt{-x^2 + 2x + 4}$.

127(2). Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $A = x - \sqrt{x}$; b) $B = x - \sqrt{x - 2005}$.

128(2). Tìm giá trị lớn nhất của $A = x + \sqrt{2 - x}$.

129(3). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$$A = |x - \sqrt{2}| + |y - 1| \text{ trong đó } |x| + |y| = 5.$$

130(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $A = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;

b) $B = \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}}$;

c) $C = |x - 2| + |2x - 3| + |4x - 1| + |5x - 10|$.

131(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$.

132(4). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của :

a) $A = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$; b) $B = \sqrt{x - 2} + \sqrt{6 - x}$.

133*(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $A = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$; b) $B = \sqrt{x^2 - 8x + 17} + \sqrt{x^2 + 16}$.

134*(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{-x^2 + 4x + 12} - \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$.

135(5). Tìm giá trị lớn nhất của $A = x\sqrt{1 - x^2}$.

136(4). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = 2x + \sqrt{5 - x^2}$.

137*(4). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = x(99 + \sqrt{101 - x^2})$.

138(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x + y$ biết x, y là các số dương thoả mãn $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ (a và b là các hằng số dương).

139(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$A = (x + y)(x + z)$ với các số dương x, y, z và $xyz(x + y + z) = 1$.

140(2). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$$A = x^2 + y^2,$$

biết rằng $x^2(x^2 + 2y^2 - 3) + (y^2 - 2)^2 = 1$.

141(2). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^4 + y^4 + z^4$ biết rằng $xy + yz + zx = 1$.

142(1). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$A = x + y + z + xy + yz + zx$ biết rằng $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

143(5). Tìm giá trị lớn nhất của $A = |x - y|$ biết rằng $x^2 + 4y^2 = 1$.

144(5). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$A = x^3 + y^3$ biết $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x^2 + y^2 = 1$.

145(1). Tìm giá trị lớn nhất của

$A = a^2 + b^2 + c^2$ biết $-1 \leq a, b, c \leq 3$ và $a + b + c = 1$.

146*(1). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$B = a^3 + b^3 + c^3$ biết a, b, c lớn hơn -1 và $a^2 + b^2 + c^2 = 12$.

147(5). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$A = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$ biết $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

148(4). Tìm giá trị lớn nhất của :

a) $A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ với $a > 0$, $b > 0$ và $a + b \le 1$;

b*) $B = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 + (\sqrt{a} + \sqrt{c})^4 + (\sqrt{a} + \sqrt{d})^4 + (\sqrt{b} + \sqrt{c})^4 +$

$+ (\sqrt{b} + \sqrt{d})^4 + (\sqrt{c} + \sqrt{d})^4$

với a, b, c, d là các số dương và $a + b + c + d \le 1$.

149(1). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x-1}$ với $x > 1$.

150(1). Tìm giá trị lớn nhất của

$A = \dfrac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \dfrac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \dfrac{1}{c^3 + a^3 + 1}$ với a, b, c là các số dương và $abc = 1$.

151(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y}$ với x, y, z là các số dương và :

a) $x + y + z = 1$; b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

152(1). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$A = \dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b}$ với a, b, c là các số dương và $a + b + c = 6$.

153*(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $A = \dfrac{a^2}{a+b} + \dfrac{b^2}{b+c} + \dfrac{c^2}{c+a}$ với a, b, c là các số dương và $a + b + c = 1$;

b) $B = \dfrac{a^2}{a+b} + \dfrac{b^2}{b+c} + \dfrac{c^2}{c+d} + \dfrac{d^2}{d+a}$ với a, b, c, d là các số dương và $a + b + c + d = 1$.

154*(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ với $x > y > 0$ và $xy = 1$.

155*(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{5 - 3x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

156*(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $A = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ với $x > 0$, $y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$;

b) $B = (1 + x)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) + (1 + y)\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ với $x > 0$, $y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$.

157*(5). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 2$.

158(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 3^x + 3^y$ với $x + y = 4$.

159*(4). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$A = \frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b}$ với $b + c \geq a + d$; b và c dương ; a và d không âm.

160*(1). Cho a, b, c là các số dương thoả mãn $1 \leq a \leq b \leq c \leq 2$.

a) Chứng minh rằng $\frac{a}{b} \geq \frac{1}{2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của $B = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$.

161*(1). Tìm giá trị lớn nhất của

$$M = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

với a, b, c là các số dương thoả mãn $1 \leq a \leq b \leq c \leq 2$.

162(7). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^4 - 4x + 1$.

163(7). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2(2 - x)$ biết $x \leq 4$.

164(7). Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^2\sqrt{9 - x^2}$.

165(7). Tìm giá trị nhỏ nhất của

$A = xy + yz + zx - 12xyz$ với x, y, z là các số dương và $x + y + z = 1$.

166(7). a) Một miếng bìa hình vuông có cạnh 3dm. Ở mỗi góc của hình vuông lớn, người ta cắt đi một hình vuông nhỏ rồi gấp bìa để được một cái hộp hình hộp chữ nhật không nắp. Tính cạnh của hình vuông nhỏ để thể tích của hộp là lớn nhất.

b) Cũng hỏi như câu a, thay hình vuông có cạnh 3dm bởi hình chữ nhật có cạnh 8dm và 5dm.

167*(7). Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$$A = x(x^2 - 6) \text{ biết } 0 \leq x \leq 3.$$

168*(7). Xét tích $A = x_1x_2x_3x_4...x_{30}$, trong đó $x_1, x_2, ..., x_{30}$ là 30 số nguyên dương có tổng bằng 2003.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Ta gọi *phương trình vô tỉ* là phương trình chứa ẩn trong dấu căn. Sau đây là các phương pháp thường dùng để giải phương trình vô tỉ.

I – PHƯƠNG PHÁP NÂNG LÊN LUỸ THỪA

Ví dụ 51(4). Giải phương trình

$$3 + \sqrt{2x - 3} = x \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện xác định của phương trình là $2x - 3 \geq 0$. (2)

Tách riêng căn thức ở một vế được $\sqrt{2x - 3} = x - 3$. (3)

Ta phải có $x - 3 \geq 0$ (4)

Với điều kiện (4) thì

$$(3) \Leftrightarrow 2x - 3 = (x - 3)^2 \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ ; } x_2 = 6.$$

Giá trị $x_1 = 2$ không thoả mãn (4), loại.

$x_2 = 6$ thoả mãn (2) và (4), là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 6$.

Nhận xét

a) Nếu không đặt điều kiện $x - 3 \geq 0$ ở (3), ta sẽ sai lầm khi nhận $x = 2$ là nghiệm của (1). Chú ý rằng từ (3) suy ra được (5) nhưng từ (5) chỉ suy ra được (3) với điều kiện $x - 3 \geq 0$.

b) Có thể bình phương hai vế của (1) với điều kiện $x \geq 0$ (điều kiện này đã có ở $2x - 3 \geq 0$), nhưng lời giải không ngắn gọn bằng cách tách riêng căn thức ở mỗi vế.

Ví dụ 52(4). Giải phương trình

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2}.$$

Giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 1$. (1)

Chuyển vế, ta có $\sqrt{x-1} = \sqrt{5x-1} + \sqrt{3x-2}$. (2)

Bình phương hai vế được

$$x - 1 = 5x - 1 + 3x - 2 + 2\sqrt{15x^2 - 13x + 2}. \quad (3)$$

Rút gọn thành $2 - 7x = 2\sqrt{15x^2 - 13x + 2}$. (4)

Đến đây có hai cách giải

Cách 1. Với điều kiện $2 - 7x \geq 0$ (5)

thì (4) $\Leftrightarrow 4 - 28x + 49x^2 = 4(15x^2 - 13x + 2)$ (6)

$$\Leftrightarrow 11x^2 - 24x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (11x - 2)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{11}\ ;\ x_2 = 2.$$

Giá trị $x_1 = \frac{2}{11}$ không thoả mãn (1), loại.

Giá trị $x_2 = 2$ không thoả mãn (5), loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Cách 2. Ta phải có $2 - 7x \geq 0$ (5) tức là $x \leq \frac{2}{7}$, điều này trái với (1). Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Cách giải khác. Xem Ví dụ 57.

Ví dụ 53(7). Giải phương trình

$$\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x} = 1. \quad (1)$$

Giải : Lập phương hai vế, áp dụng hằng đẳng thức

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

ta được $2x + 1 + x + 3\sqrt[3]{x(2x+1)}.(\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x}) = 1.$ (2)

Thay $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{x}=1$ vào (2) ta có

$$3x+1+3\sqrt[3]{x(2x+1)}=1 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x(2x+1)}=-x \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow x(2x+1)=-x^3 \Leftrightarrow x(2x+1+x^2)=0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x_1=0\,;\ x_2=-1.$$

Thử lại : $x_1=0$ thoả mãn (1).

$x_2=-1$ không thoả mãn (1), loại.

Phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x=0$.

Nhận xét

a) Các phương trình (1) và (2) tương đương, nhưng các phương trình (2) và (3) không tương đương. Từ (2) suy ra được (3), nhưng từ (3) không suy ra được (2). Do đó sau khi tìm được các nghiệm của (3) là 0 và –1, phải thử các giá trị đó vào (1) để chọn ra nghiệm của (1).

b) Cách giải khác : Xem các Ví dụ 56 và 59.

II – PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI.

Ví dụ 54(4). Giải phương trình

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2. \qquad (1)$$

Giải : Điều kiện $x\ge 1$. Biến đổi

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=1. \qquad (2)$$

Nếu $x>2$ thì (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}-1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=1$

$x=2$, không thuộc khoảng đang xét.

Nếu $1\le x\le 2$ thì (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2$, vô số nghiệm $1\le x\le 2$.

Kết luận : $1\le x\le 2$.

Chú ý : Sau khi biến đổi đến (2), có thể viết (2) dưới dạng

$$\left|1-\sqrt{x-1}\right| = 1-\sqrt{x-1}$$

và chú ý đến bất đẳng thức $|A| \geq A$ với điều kiện xảy ra dấu "=" là $A \geq 0$ được

$$1-\sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta có $1 \leq x \leq 2$.

III – PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Ví dụ 55(4). Giải phương trình

$$3x^2 + 21x + 18 + 2\sqrt{x^2+7x+7} = 2. \qquad (1)$$

Giải : Điều kiện $x^2 + 7x + 7 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^2+7x+7} = y \geq 0$ thì $x^2 + 7x + 7 = y^2$.

(1) $\Leftrightarrow 3y^2 - 3 + 2y = 2 \Leftrightarrow 3y^2 + 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(3y+5) = 0$

$\Leftrightarrow y = -\dfrac{5}{3}$ (loại), $y = 1$.

$\sqrt{x^2+7x+7} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+6) = 0$.

Các giá trị $x = -1$, $x = -6$ thoả mãn $x^2 + 7x + 7 \geq 0$, do đó là nghiệm của (1).

Nhận xét : Cách đặt ẩn phụ $\sqrt{x^2+7x+7} = y$ làm cho phương trình được chuyển về dạng hữu tỉ.

Ví dụ 56(7). Giải phương trình

$$\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x} = 1$$

bằng cách đặt $\sqrt[3]{2x+1} = a$, $\sqrt[3]{x} = b$ rồi tìm a và b.

Giải : Đặt $\sqrt[3]{2x+1} = a$, $\sqrt[3]{x} = b$ thì $2x + 1 = a^3$, $x = b^3$ nên

$$a^3 - 2b^3 = 2x + 1 - 2x = 1.$$

Cần tìm a và b thoả mãn $a + b = 1$ và $a^3 - 2b^3 = 1$.

Ta có $\quad a^3 - 2(1-a)^3 = 1 \Leftrightarrow a^3 - 1 - 2(1-a)^3 = 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^2+a+1) + 2(a-1)^3 = 0$

$\Leftrightarrow (a-1)[(a^2+a+1) + 2(a-1)^2] = 0.$

Dễ thấy $a^2 + a + 1 + 2(a-1)^2 > 0$ nên $a = 1$. Suy ra $b = 0$.

Vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

IV – PHƯƠNG PHÁP BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp bất đẳng thức để giải phương trình vô tỉ được thể hiện dưới nhiều dạng :

1. Chứng tỏ rằng phương trình vô nghiệm vì có một vế luôn nhỏ hơn vế kia

Ví dụ 57(4). Giải phương trình

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2}. \qquad (1)$$

Bằng cách chứng tỏ rằng với điều kiện xác định của phương trình, có một vế của phương trình luôn nhỏ hơn vế kia.

Giải

Điều kiện để xác định của (1) là $x \geq 1$. Với điều kiện này thì $x < 5x$, do đó $\sqrt{x-1} < \sqrt{5x-1}$ suy ra vế trái của (1) là số âm, còn vế phải không âm. Phương trình vô nghiệm.

2. Sử dụng tính đối nghịch ở hai vế

Ví dụ 58(4). Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2. \qquad (1)$$

Giải

Vế trái $\quad \sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} \geq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5.$

Vế phải $\quad 4 - 2x - x^2 = 5 - (x+1)^2 \leq 5.$

Vậy hai vế của (1) đều bằng 5, khi đó $x = -1$.

Kết luận : $x = -1$.

3. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Ví dụ 59(7). Giải phương trình

$$\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x} = 1 \qquad (1)$$

bằng cách chứng tỏ rằng $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Giải : Ta thấy x = 0 nghiệm đúng phương trình (1).

Với x > 0 thì $\sqrt[3]{x+1} > 1$, $\sqrt[3]{x} > 0$ nên vế trái của (1) lớn hơn 1.

Với x < 0 thì $\sqrt[3]{x+1} < 1$, $\sqrt[3]{x} < 0$ nên vế trái của (1) nhỏ hơn 1.

Vậy x = 0 là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

4. Sử dụng điều kiện xảy ra dấu "=" ở bất đẳng thức không chặt

Ví dụ 60(4). Giải phương trình

$$\frac{x}{\sqrt{3x-2}} + \frac{\sqrt{3x-2}}{x} = 2. \qquad (1)$$

Giải : Điều kiện : $x > \frac{2}{3}$. (2)

Ta có bất đẳng thức $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với a > 0, b > 0, xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi a = b.

Với $x > \frac{2}{3}$ thì (1) $\Leftrightarrow x = \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 1$; $x_2 = 2$ đều thoả mãn (2).

Phương trình có hai nghiệm là x = 1 ; x = 2.

Bài tập

Giải các phương trình (từ bài 169 đến bài 181) :

169(4). a) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4} = 1$; b) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$;

c) $\sqrt{10-x} + \sqrt{x+3} = 5$; d) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x+4} = 1$;

e) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 2$.

170(4). a) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 1$;

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$;

c) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}} + \sqrt{x-\sqrt{6x-9}} = \sqrt{6}$.

171(4). a) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=1$;

b) $\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}+\sqrt{x+9-6\sqrt{x}}=1$;

c) $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}=1$;

d) $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=1$.

172(4). a) $\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=1$;

b) $\sqrt{1-\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{x}-1$;

c) $\sqrt{x^2+6}=x-2\sqrt{x^2-1}$;

d) $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$;

e*) $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=x^2-16x+66$.

173(4). a) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}$;

b) $\sqrt{3x+15}-\sqrt{4x+17}=\sqrt{x+2}$;

c) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=4-2x$;

d) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+10}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}$.

174(4). a) $\sqrt{2x+3+\sqrt{x+2}}+\sqrt{2x+2-\sqrt{x+2}}=1+2\sqrt{x+2}$;

b) $\sqrt{2x^2-9x+4}+3\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^2+21x-11}$.

175*(5). a) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2-3x+2}+(x-2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}=3$;

b) $(x-2)(x+2)+4(x-2)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}=-3$.

176*(6). a) $\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$;

b) $$\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\ddots\,2+\cfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}} = 8$$ (vế trái có 100 dấu phân thức).

177(7). a) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$; b) $\sqrt[3]{25+x}+\sqrt[3]{3-x}=4$;

c) $1+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x+3}$; d) $\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{6-x}=1$.

178(7). a) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$; b) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$;

c) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$.

179(7). a) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$;

b) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}=1$;

c) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

180*(7). $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$.

181*(7). a) $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}=3$;

b) $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{2-x}=\sqrt[4]{3-2x}$.

PHẦN NGUYÊN

I – ĐỊNH NGHĨA

1. Phần nguyên của một số

Cho số thực x. Ta gọi *phần nguyên* của x, kí hiệu [x], là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Chẳng hạn : $[1,2]=1$; $[7]=7$; $[-2,4]=-3$.

Định nghĩa trên được diễn đạt dưới một trong hai dạng :

$$[x] = a \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x - a < 1 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1)$$

hoặc $$[x] = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \le x < a + 1 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}. \quad (2)$$

2. Phần lẻ của một số

Với định nghĩa phần nguyên nói trên, mỗi số thực x đều viết được dưới dạng tổng của một số nguyên (là [x]) với một số không âm nhỏ hơn 1 (là x – [x])

Chẳng hạn : 1,2 = 1 + 0,2 ; 7 = 7 + 0 ; –2,4 = –3 + 0,6.

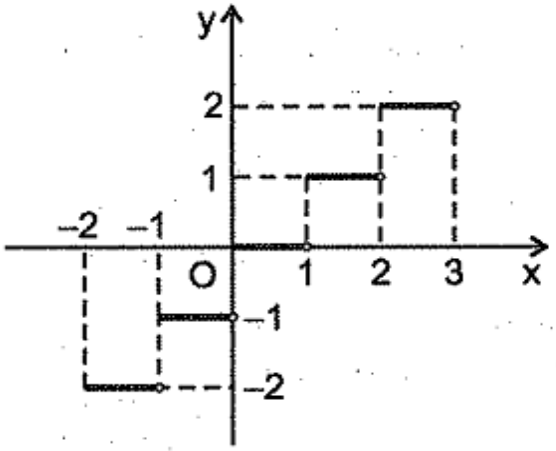
Số không âm nhỏ hơn 1 nói trên gọi là *phần lẻ* của x, kí hiệu {x}. Như vậy {x} = x – [x].

Ta có $0 \le \{x\} < 1$.

3. Đồ thị

Đồ thị của hàm phần nguyên y = [x] gồm các đoạn thẳng nằm ngang, xếp với nhau thành dạng bậc thang (h.10) :

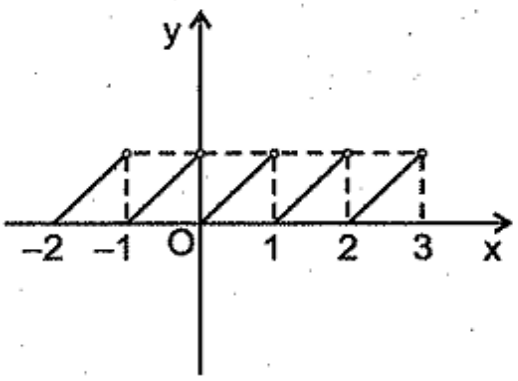
$$y = [x] = \begin{cases} \ldots \\ -2 & \text{với } -2 \le x < -1 \\ -1 & \text{với } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{với } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{với } 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{với } 2 \le x < 3 \\ \ldots \end{cases}$$



Hình 10

Đồ thị của hàm phần lẻ y = {x} gồm các nửa đoạn xiên có một đầu thuộc trục hoành (h.11) :

$$y = \{x\} = x - [x] = \begin{cases} \ldots \\ x + 2 & \text{với } -2 \le x < -1 \\ x + 1 & \text{với } -1 \le x < 0 \\ x & \text{với } 0 \le x < 1 \\ x - 1 & \text{với } 1 \le x < 2 \\ x - 2 & \text{với } 2 \le x < 3 \\ \ldots \end{cases}$$



Hình 11

II – TÌM PHẦN NGUYÊN CỦA MỘT SỐ

Ví dụ 61(6). Tìm phần nguyên của số

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} \text{ (có 100 dấu căn).}$$

Giải : Kí hiệu $a_n = \sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$ (có n dấu căn).

Ta có $a_1 = \sqrt{6} < 3$

$a_2 = \sqrt{6+a_1} < \sqrt{6+3} = 3$

$a_3 = \sqrt{6+a_2} < \sqrt{6+3} = 3$

...

$a_{100} = \sqrt{6+a_{99}} < \sqrt{6+3} = 3.$

Hiển nhiên $a_{100} > \sqrt{6} > 2$. Như vậy $2 < a_{100} < 3$, do đó $[a_{100}] = 2$.

Chú ý

a) Có thể trình bày lời giải của ví dụ trên như sau : Trong biểu thức a_{100}, thay số 6 cuối cùng bởi số 9, ta được biểu thức b có giá trị bằng 3. Dễ thấy $2 < a_{100} < b = 3$ nên $[a_{100}] = 2$.

b) Tổng quát, ta chứng minh được với $a \geq 0$ thì

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+...+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}}_{\text{có n dấu căn}} < \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}. \qquad (1)$$

Thật vậy, kí hiệu vế trái của (1) là a_n. Ta có :

$$a_1 = \sqrt{a},\ a_2 = \sqrt{a+a_1},\ a_3 = \sqrt{a+a_2},\ ...,\ a_n = \sqrt{a+a_{n-1}}.$$

Chứng minh (1) bằng quy nạp toán học.

Với n = 1 ta có $\sqrt{a} < \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{a} < 1+\sqrt{4a+1}$

$\Leftrightarrow 4a < 1 + 4a + 1 + 2\sqrt{4a+1}$, đúng với mọi $a \geq 0$.

Giả sử $a_k < \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$, cần chứng minh $a_{k+1} < \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

Ta có $a_{k+1} = \sqrt{a + a_k}$

nên $$a_{k+1}^2 = a + a_k < a + \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$$

$$= \frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2} = \frac{4a + 2 + 2\sqrt{4a + 1}}{4} = \left(\frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}\right)^2.$$

Do đó $a_{k+1} < \dfrac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$.

Vậy (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 62(6). Cho $a = 2 + \sqrt{3}$.

a) Tính $[a^2]$.

b) Tính $[a^3]$.

c*) Chứng minh rằng $[a^n]$ là số tự nhiên lẻ với mọi số n nguyên dương.

Giải

a) *Cách 1* (tính trực tiếp)

$$a^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}.$$

Ta có $6 < 4\sqrt{3} < 7$ nên $13 < a^2 < 14$. Vậy $[a^2] = 13$.

Cách 2 (tính gián tiếp).

Ta có $a^2 = 7 + 4\sqrt{3}$. Đặt $b = 2 - \sqrt{3}$ thì $b^2 = 7 - 4\sqrt{3}$. Suy ra

$$a^2 + b^2 = 14 \qquad (1)$$

Ta có $0 < b < 1$ nên $$0 < b^2 < 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $13 < a^2 < 14$. Vậy $[a^2] = 13$.

b) *Đáp số* : $[a^3] = 51$.

c) Đặt $b = 2 - \sqrt{3}$. Theo khai triển $(x + y)^n$, ta được

$$a^n = (2 + \sqrt{3})^n = A + B\sqrt{3} \text{ với A, B là số tự nhiên}$$

$$b^n = (2 - \sqrt{3})^n = A - B\sqrt{3}.$$

Suy ra $$a^n + b^n = 2A. \quad (3)$$

Ta có $0 < b < 1$ nên $$0 < b^n < 1. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $2A - 1 < a^n < 2A$. Vậy $[a^n] = 2A - 1$, tức là $[a^n]$ là số lẻ.

Chú ý : Trong cách tính gián tiếp, để chứng tỏ $[a^n]$ là số nguyên m, ta chứng minh rằng $a^n + b^n = m + 1$ và $0 < b^n < 1$, thế thì $m < a^n < m + 1$, do đó $[a^m] = m$.

Ví dụ 63*(6). Cho $a = 5 + 2\sqrt{6}$ và $b = 5 - 2\sqrt{6}$.

a) Chứng minh rằng $a^2 = 10a - 1$ và $b^2 = 10b - 1$.

b) Đặt $s_n = a^n + b^n$. Chứng minh rằng $s_0, s_4, s_8, ..., s_{24}$ là các số tự nhiên có chữ số hàng đơn vị là 2.

c) Tìm chữ số hàng đơn vị của $\left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{48}\right]$.

Giải

a) $a^2 = (5 + 2\sqrt{6})^2 = 25 + 24 + 20\sqrt{6} = 10(5 + 2\sqrt{6}) - 1 = 10a - 1$.

$b^2 = (5 - 2\sqrt{6})^2 = 25 + 24 - 20\sqrt{6} = 10(5 - 2\sqrt{6}) - 1 = 10b - 1$.

b) Ta có $s_0 = a^0 + b^0 = 2$. Ta sẽ chứng minh rằng s_n và s_{n+4} là các số tự nhiên có chữ số hàng đơn vị như nhau. Ta có :

$$a^2 = 10a - 1 \quad (1)$$

$$b^2 = 10b - 1. \quad (2)$$

Nhân (1) với a^n, nhân (2) với b^n ta được

$$a^{n+2} = 10a^{n+1} - a^n$$

$$b^{n+2} = 10b^{n+1} - b^n.$$

Suy ra $$a^{n+2} + b^{n+2} = 10(a^{n+1} + b^{n+1}) - (a^n + b^n)$$

tức là $s_{n+2} = 10s_{n+1} - s_n$.

Từ đó, ta rút ra nhận xét $(s_n + s_{n+2}) \vdots 10$, tương tự $(s_{n+2} + s_{n+4}) \vdots 10$, suy ra $(s_{n+4} - s_n) \vdots 10$.

Ta có $s_0 = 2$, $s_1 = 10$ nên từ nhận xét trên suy ra $s_2, s_3, s_4, ..., s_n$ là các số tự nhiên và $s_0, s_4, s_8, ..., s_{20}$ có chữ số hàng đơn vị là 2.

c) Từ câu b suy ra

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{48}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{48}=(5+2\sqrt{6})^{24}+(5-2\sqrt{6})^{24}=A,$$

là số tự nhiên có chữ số hàng đơn vị là 2.

Ta lại có $0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<1$ nên $0<(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{48}<1$ suy ra

$$A-1<(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{48}<A, \text{ do đó } \left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{48}\right]=A-1.$$

Vậy $\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{48}\right]$ có chữ số hàng đơn vị là 1.

Nhận xét

a) Với cách giải như ở Ví dụ 62, ta chứng minh được $\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{48}\right]$ là số lẻ, nhưng chưa tìm được chữ số hàng đơn vị của $\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{48}\right]$. Câu a) và câu b) là các câu gợi ý để tìm chữ số hàng đơn vị của $\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{48}\right]$.

b) Để đi đến câu a), có thể dùng định lí Vi-ét đảo : Do a và b có tổng bằng 10, tích bằng 1 nên chúng là nghiệm của phương trình $X^2-10X+1=0$, tức là $a^2=10a-1$, $b^2=10b-1$.

c) Ở câu c) ta còn có $0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<\frac{2}{5}\Rightarrow 0<(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3<\left(\frac{2}{5}\right)^3<\frac{1}{10}$

$$\Rightarrow 0<(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{48}<\frac{1}{10^{16}}.$$

Từ đó ta còn chứng minh được : Khi viết số $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{48}$ dưới dạng thập phân, ta được chữ số liền trước dấu phẩy là 1 và 16 chữ số liền sau dấu phẩy là 9.

III – GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ LIÊN QUAN ĐẾN PHẦN NGUYÊN

Giải phương trình với phần nguyên thường đưa về giải bất phương trình

$$[x]=a\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x-a<1\\ a\in\mathbf{Z}\end{cases}\qquad(1)$$

hoặc

$$[x]=a\Leftrightarrow\begin{cases}a\le x<a+1\\ a\in\mathbf{Z}\end{cases}.\qquad(2)$$

Ví dụ 64(2). Giải phương trình $x^2 - 8[x] + 7 = 0$.

Giải

Cách 1. (đưa về giải bất phương trình ẩn x)

Rút [x] ta được $[x] = \dfrac{x^2+7}{8}$. Giải các điều kiện

$$\begin{cases} 0 \le x - \dfrac{x^2+7}{8} < 1 & (1) \\ \dfrac{x^2+7}{8} \in \mathbf{Z} & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta có $\dfrac{8x - x^2 - 7}{8} \ge 0 \Leftrightarrow 8x - x^2 - 7 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-7) \le 0$

$$\Leftrightarrow 1 \le x \le 7. \qquad (3)$$

$$\frac{8x - x^2 - 7}{8} < 1 \Leftrightarrow 8x - x^2 - 7 < 8 \Leftrightarrow (x-3)(x-5) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 3 \\ x > 5. \end{array}\right. \qquad (4)$$

Kết hợp cả (3) và (4) được $\left[\begin{array}{l} 1 \le x < 3 \\ 5 < x \le 7 \end{array}\right.$.

Do $[x] \in \mathbf{Z}$ nên $[x] \in \{1 ; 2 ; 5 ; 6 ; 7\}$. Ta có

[x]	1	2	5	6	7
$x^2 + 7$ (= 8 [x])	8	16	40	48	56
x^2	1	9	33	41	49
x	1	3	$\sqrt{33}$	$\sqrt{41}$	7

x = 3 loại vì trái với (4).

Phương trình có bốn nghiệm : 1 ; $\sqrt{33}$; $\sqrt{41}$; 7.

Cách 2. (đưa về bất phương trình ẩn [x])

Đặt [x] = a. Giải các điều kiện :

$$\begin{cases} x^2 + 7 = 8a \\ a \le x < a + 1. \\ a \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Ta có $8a = x^2 + 7$ nên $a > 0$.

Từ $0 < a \le x < a + 1$ suy ra

$$a^2 \le x^2 < (a+1)^2 \Rightarrow a^2 + 7 \le x^2 + 7 < (a+1)^2 + 7$$

$$\Rightarrow a^2 + 7 \le 8a < a^2 + 2a + 8.$$

Giải các điều kiện $\begin{cases} a^2 + 7 - 8a \le 0 \\ a^2 + 2a + 8 - 8a > 0 \end{cases}$ được $\begin{cases} 1 \le a \le 7 \\ \left[\begin{array}{l} a < 2 \\ a > 4 \end{array}\right. \end{cases}$.

Do $a \in \mathbf{Z}$ nên $a \in \{1 ; 5 ; 6 ; 7\}$. Ta có

a	1	5	6	7
$x^2 + 7$ (= 8a)	8	40	48	56
x^2	1	33	41	49
x (x > 0)	1	$\sqrt{33}$	$\sqrt{41}$	7

Các giá trị của x tìm được đều thỏa mãn phương trình đã cho.

IV – CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC CÓ LIÊN QUAN ĐẾN PHẦN NGUYÊN

Ví dụ 65(1). Chứng minh rằng

$$[x] + [y] \le [x + y].$$

Giải

Cách 1. Ta có $[x] \le x$, $[y] \le y$ nên $[x] + [y] \le x + y$.

Suy ra $[x] + [y]$ là số nguyên không vượt quá $x + y$. (1)

Theo định nghĩa phần nguyên, $[x + y]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $x + y$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $[x] + [y] \le [x + y]$.

Cách 2. Theo định nghĩa phần nguyên, ta có

$$0 \le x - [x] < 1$$

$$0 \le y - [y] < 1.$$

Suy ra $$0 \le (x + y) - ([x] + [y]) < 2.$$

Xét hai trường hợp :

– Nếu $0 \le (x + y) - ([x] + [y]) < 1$ thì

$$[x + y] = [x] + [y]. \quad (1)$$

– Nếu $1 \le (x + y) - ([x] + [y]) < 2$ thì $0 \le (x + y) - ([x] + [y] + 1) < 1$ nên

$$[x + y] = [x] + [y] + 1. \quad (2)$$

Trong cả hai trường hợp ta đều có $[x] + [y] \le [x + y]$.

Bài tập

182(6). Tìm phần nguyên của các số :

a) $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn) ;

b) $a_n = \sqrt{4 + \sqrt{4 + ... + \sqrt{4 + \sqrt{4}}}}$ (có n dấu căn) ;

c*) $a_n = \sqrt{1996 + \sqrt{1996 + ... + \sqrt{1996 + \sqrt{1996}}}}$ (có n dấu căn).

183(6). Cho $a = \sqrt{6 + \sqrt{6 + ... + \sqrt{6}}}$ (có n dấu căn),

$b = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + ... + \sqrt[3]{6}}}$ (có n dấu căn).

Hãy tính : a) [a] ; b) [b] ; c) [a + b].

184(6). Cho $m = 2 + \sqrt{5}$. Hãy tính : a) $[m^3]$; b) $[m^4]$.

185(6). Tìm phần nguyên của A với n là số tự nhiên

$$A = \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}}.$$

186(6). Tìm phần nguyên của A, biết rằng

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2500}}.$$

187*(7). a) Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số n nguyên dương

$$\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2} < \frac{2}{3\sqrt[3]{n}} < \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}.$$

b) Tìm phần nguyên của A, biết rằng

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{216}}.$$

188*(6). Tìm chữ số tận cùng của phần nguyên của $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{250}$.

189(1). Giải phương trình $[x^2] + [x] = \{x\} + 2$ trong đó kí hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của x, tức là $\{x\} = x - [x]$.

190(1). Giải phương trình $3[x]^2 + 5[x] = 2$.

191(1). Tìm các số x, y, z thoả mãn cả ba phương trình sau

$$x + [y] + \{z\} = 1,1$$
$$y + [z] + \{x\} = 2,2$$
$$z + [x] + \{y\} = 3,3.$$

192(1). Giải các phương trình :

a) $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = x$;

b) $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = x$.

193*(1). Tìm nghiệm nguyên của các phương trình :

a) $\left[\frac{x}{1!}\right] + \left[\frac{x}{2!}\right] + \left[\frac{x}{3!}\right] = 224$;

b) $\left[\frac{x}{1!}\right] + \left[\frac{x}{2!}\right] + \left[\frac{x}{3!}\right] + ... \left[\frac{x}{10!}\right] = 1001$.

194(7). Tìm số tự nhiên n lớn nhất để $[\sqrt[n]{2000}] > 1$.

195(1). Chứng minh rằng [2x] bằng 2[x] hoặc 2[x] + 1.

196*(6). Tính tổng $A = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + ... + [\sqrt{24}]$.

197*(1). a) Xét các số $x_n = \frac{a + 15n}{100}$ trong đó a là số nguyên dương nhỏ hơn 85 và n = 1, 2, 3, ... Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên p mà $[x_p] = 96$.

b) Chứng minh rằng trong các số có dạng a + 15n, trong đó a là số nguyên dương nhỏ hơn 85 và n = 1, 2, 3, ..., tồn tại một số mà hai chữ số đầu tiên của nó là 96.

c) Chứng minh như khẳng định ở Câu b) trong đó a là số nguyên dương tuỳ ý.

Bài đọc thêm

Khai phương một số mà không dùng bảng số hoặc máy tính

Loài người đã biết khai phương một số từ nhiều thế kỉ trước Công nguyên. Ba nghìn năm trước đây, người Ba-bi-lon đã biết tìm giá trị gần đúng của căn bậc hai của các số. Sau đó người Hi Lạp và người Ấn Độ cũng biết khai phương các số bằng những phương pháp khác.

Từ thế kỉ I, nhà toán học Hi Lạp *Hê-rông* đã đưa ra công thức tính gần đúng sau :

$$\sqrt{a^2+b} \approx a+\frac{b}{2a}.$$

Với công thức trên, ta có $\sqrt{83} = \sqrt{9^2+2} \approx 9+\frac{2}{2.9} \approx 9{,}111$;

$$\sqrt{147} = \sqrt{12^2+3} \approx 12+\frac{3}{2.12} \approx 12{,}125.$$

Kiểm tra lại bằng máy tính bỏ túi : $\sqrt{83} \approx 9{,}1104...$, $\sqrt{147} \approx 12{,}1243...$

Công thức tính gần đúng trên đơn giản và tương đối chính xác. Thật vậy, $a^2 + b = \left(a+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \approx \left(a+\frac{b}{2a}\right)^2$, nên khi khai phương số 83 ta chỉ tăng số 83 thêm $\frac{2^2}{4.9^2} = \frac{1}{81}$, khi khai phương số 147 ta chỉ tăng số 147 thêm $\frac{3^2}{4.12^2} = \frac{1}{64}$.

Một cách khai phương khác được giới thiệu trong cuốn *Cửu chương toán thuật* của *Trần Sanh* (Trung Quốc) từ thế kỉ II trước Công nguyên.

Ví dụ. Tính $\sqrt{6889}$.

Bước 1. Tách số lấy căn (6889) thành từng nhóm hai chữ số kể từ phải sang trái (68'89), riêng nhóm đầu tiên bên trái có thể có một chữ số.

Bước 2. (tìm chữ số thứ nhất của kết quả) : Chọn số nguyên lớn nhất mà bình phương của nó chưa quá 68, ta được 8. Ta có a = 8 là chữ số thứ nhất của kết quả.

Bước 3. (tìm số dư thứ nhất) : Bình phương số a, được 64, rồi trừ vào 68, được 4. Hạ nhóm chữ số tiếp theo là 89 xuống, ta được 489, đó là số dư thứ nhất.

$\sqrt{68'89} = 8$
64
489

Bước 4. (tìm chữ số thứ hai của kết quả) : Nhân đôi số 8 đã được viết ở kết quả, được 16. Chữ số thứ hai của kết quả (là b) được chọn lớn nhất sao cho $\overline{16b}.b \leq 489$.

Để tìm b ta thử lấy số chục của số dư thứ nhất (là 48) chia cho 16, được 3. Thử : 163.3 = 489 (trong trường hợp tích vượt quá số dư thứ nhất, ta phải giảm số b vừa chọn đi một đơn vị).

$\sqrt{68'89} = 83$
64 | 489 | 489 | 0 | 163.3 = 489

Bước 5. (tìm số dư thứ hai) : Trừ tích tìm được (489) vào số dư thứ nhất rồi lại tiếp tục làm như trên. Trong ví dụ này ta được số dư thứ hai bằng 0, phép khai phương cho kết quả đúng : $\sqrt{6689} = 83$.

Ta có thể giải thích thuật toán khai phương nói trên như sau :

Số 6889 nói trên là bình phương của số $\overline{ab}$. Ta biết rằng

$$(\overline{ab})^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

Ở bước 3, số dư thứ nhất bằng : $(100a^2 + 20ab + b^2) - 100a^2 = 20ab + b^2$.

Ta cần tìm b sao cho $20ab + b^2 = 489$, tức là

$$(20a + b)b = 489. \qquad (1)$$

Ở bước 4, với a = 8, nhân đôi số 8 (chục) được 16 (chục) tức là được 20a, như vậy 20a + b chính là $\overline{16b}$, ta cần tìm b để $\overline{16b}.b = 489$ chính là để thoả mãn đẳng thức (1).

Bạn đọc hãy vận dụng thuật toán khai phương nêu trên để khai phương các số sau :

$\sqrt{4'53'69} = 213$
4 | 053 | 41 | 1269 | 1269 | 0 | 41.1 | 423.3

$\sqrt{2'30} \approx 15,16$
1 | 130 | 125 | 500 | 301 | 19900 | 18156 | 1744 | 25.5 = 125 | 301.1 = 301 | 3026.6 = 18156

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (h.12). Ta có :

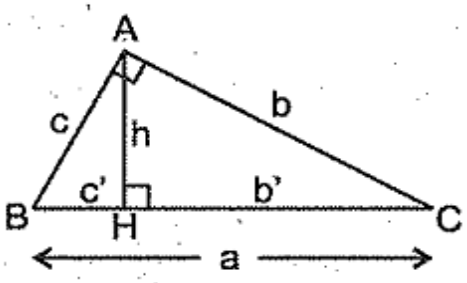
1) $b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$.

2) $b^2 + c^2 = a^2$ (định lí Py-ta-go).

3) $h^2 = b'c'$.

4) $ah = bc$.

5) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.



Hình 12

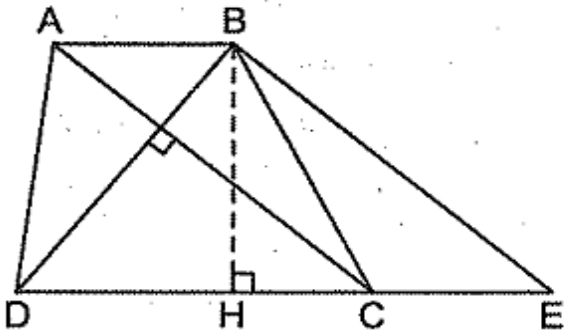
Ví dụ 1. Tính diện tích hình thang ABCD có đường cao bằng 12cm, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau, BD = 15cm.

Giải : (h.13). Qua B vẽ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở E. Gọi BH là đường cao của hình thang. Ta có BE // AC, AC ⊥ BD nên BE ⊥ BD.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông BDH, ta có

$BH^2 + HD^2 = BD^2 \Rightarrow 12^2 + HD^2 = 15^2$

$\Rightarrow HD^2 = 225 - 144 = 81 \Rightarrow HD = 9$ (cm).



Hình 13

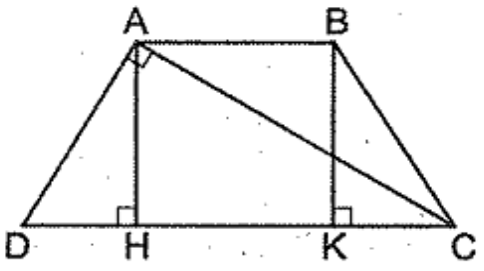
Xét tam giác BDE vuông tại B

$$BD^2 = DE \,.\, DH \Rightarrow 15^2 = DE \,.\, 9 \Rightarrow DE = 225 : 9 = 25 \text{ (cm)}.$$

Ta có AB = CE nên AB + CD = CE + CD = DE = 25 (cm).

Do đó $S_{ABCD} = 25.\ 12 : 2 = 150\ (cm^2)$.

Ví dụ 2. Hình thang cân ABCD có đáy lớn CD = 10cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.



Hình 14

Giải : (h.14) Gọi AH, BK là đường cao của hình thang. Đặt AB = AH = BK = x. Dễ dàng chứng minh được $DH = CK = \frac{10 - x}{2}$. Do đó

$$HC = \frac{10 + x}{2}.$$

Xét tam giác ADC vuông tại A, ta có $AH^2 = HD.HC$. Do đó

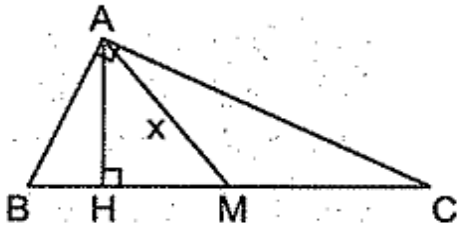
$$x^2 = \frac{10 - x}{2}.\frac{10 + x}{2} = \frac{100 - x^2}{4}.$$

Từ đó $x = 2\sqrt{5}$ cm.

Đường cao của hình thang bằng $2\sqrt{5}$ cm.

Ví dụ 3. Tính diện tích một tam giác vuông có chu vi 72cm, hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7cm.

Giải : Kí hiệu như trên hình 15. Đặt AM = x, ta có BC = 2x, AH = x – 7.



Hình 15

Theo các hệ thức trong tam giác vuông :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4x^2 \qquad (1)$$

$$AB.AC = BC.AH = 2x(x - 7). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$AB^2 + AC^2 + 2AB.AC = 4x^2 + 4x(x - 7)$$

$$\Leftrightarrow (AB + AC)^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow (72 - 2x)^2 = 8x^2 - 28x.$$

Đưa về phương trình $x^2 + 65x - 1296 = 0 \Leftrightarrow (x - 16)(x + 81) = 0$.

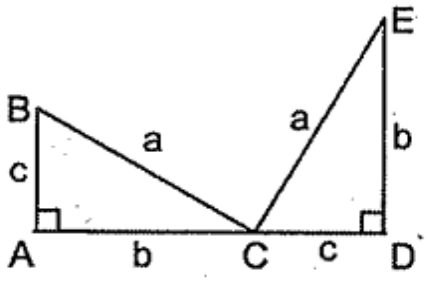
Nghiệm dương của phương trình là x = 16.

Từ đó BC = 32cm, AH = 9cm.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.\ 32.9 = 144\ (cm^2).$$

Bài tập

1. Chứng minh định lí Py-ta-go bằng cách đặt hai tam giác vuông bằng nhau ABC, DCE như trên hình 16.



Hình 16

2. Cho tam giác ABC cân có AB = AC = 9cm, BC = 12cm, đường cao AH, I là hình chiếu của H trên AC.

a) Tính độ dài CI.

b) Kẻ đường cao BK của tam giác ABC. Chứng minh rằng điểm K nằm giữa hai điểm C và A.

3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^o$, BC = a, AC = b, AB = c. Chứng minh rằng

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

4. Tính cạnh đáy BC của tam giác cân ABC biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15,6cm và đường cao ứng với cạnh bên bằng 12cm.

5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD, đường cao AH. Biết BD = 7,5cm và DC = 10cm. Tính các độ dài AH, BH, HD.

6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, AB = 20cm, HC = 9cm. Tính độ dài AH.

7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của góc HAC cắt HC ở D. Gọi K là hình chiếu của D trên AC. Biết BC = 25cm, DK = 6cm. Tính độ dài AB.

8. Cho tam giác ABC có AB = 6cm, AC = 8cm, các đường trung tuyến BD và CE vuông góc với nhau. Tính độ dài BC.

9. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^o$, BC = 8cm, AB + AC = 12cm. Tính các độ dài AB, AC.

10. Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng $54cm^2$ và $96cm^2$. Tính độ dài cạnh huyền.

11. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi D là hình chiếu của C trên BM, H là hình chiếu của D trên AC. Chứng minh rằng AH = 3HD.

12. a) Một tam giác vuông có tỉ số các cạnh góc vuông bằng k. Tính tỉ số các hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của một tam giác vuông, biết rằng tỉ số hai cạnh góc vuông bằng 5 : 4 và cạnh huyền dài 82 cm.

13. Trong một tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với 1 : 3. Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỉ số nào ?

14. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh AB, BC, CA là ba số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Chứng minh rằng HM = 2.

15. Một hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi và diện tích hình thang biết rằng đáy nhỏ dài 14cm, đáy lớn dài 50cm.

16. Một hình thoi có diện tích bằng một nửa diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tỉ số của đường chéo dài và đường chéo ngắn của hình thoi là :

A) $2-\sqrt{3}$; B) $2+\sqrt{3}$; C) 2 ; D) $\sqrt{3}$; E) $\sqrt{3}+1$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

17. Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh a, vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng DC ở I. Chứng minh rằng $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{a^2}$.

18. Cho hình vuông ABCD có cạnh 1dm. Tính cạnh của tam giác đều AEF có E thuộc cạnh CD và F thuộc cạnh BC.

19. Trong các tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài ba đường cao bằng :

a) 3cm, 4cm, 5cm ; b) 12cm, 15cm, 20cm.

20*. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông nếu các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thoả mãn BD.CE = 2BI.CI.

21. Xét các tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC = 2a. Gọi AH là đường cao của tam giác, D và E là hình chiếu của H trên AC và AB. Tìm giá trị lớn nhất của :

a) Độ dài DE ; b*) Diện tích tứ giác ADHE.

22. Chứng minh rằng trong một tam giác :

a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia trừ đi hai lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

b) Bình phương của cạnh đối diện với góc tù bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia cộng với hai lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

23. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Chứng minh rằng :

a) Nếu $b^2 < a^2 + c^2$ thì $\hat{B} < 90^o$.

b) Nếu $b^2 > a^2 + c^2$ thì $\hat{B} > 90^o$.

c) Nếu $b^2 = a^2 + c^2$ thì $\hat{B} = 90^o$.

24. Tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của góc A cắt BD ở I. Biết IB = $10\sqrt{5}$ cm, ID = $5\sqrt{5}$ cm, tính diện tích tam giác ABC.

25. Tam giác ABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác.

a) Biết AB = 5cm, IC = 6cm. Tính độ dài BC.

b) Biết IB = $\sqrt{5}$ cm, IC = $\sqrt{10}$ cm. Tính các độ dài AB, AC.

26. Cho tam giác ABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác, M là trung điểm của BC.

a) Biết AB = 6cm, AC = 8cm. Tính $\widehat{BIM}$.

b) Biết $\widehat{BIM} = 90^o$. Ba cạnh của tam giác ABC tỉ lệ với ba số nào ?

27. Một tam giác vuông có độ dài một cạnh bằng trung bình cộng của độ dài hai cạnh kia.

a) Độ dài ba cạnh của tam giác vuông đó tỉ lệ với ba số nào ?

b) Nếu độ dài các cạnh của tam giác vuông đó là các số nguyên dương thì số nào trong các số sau có thể là độ dài một cạnh của tam giác đó : 17, 13, 35, 41, 22 ?

28. Cho tam giác ABC vuông tại A, BC = $3\sqrt{5}$ cm. Hình vuông ADEF cạnh 2cm có D thuộc AB, E thuộc BC, F thuộc AC. Tính các độ dài AC, AB.

29*. Tam giác ABC cân tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác. Biết IA = $2\sqrt{5}$ cm, IB = 3cm. Tính độ dài AB.

30*. Tam giác ABC cân tại A, đường cao AD, trực tâm H. Tính độ dài AD, biết AH = 14cm, BH = HC = 30cm.

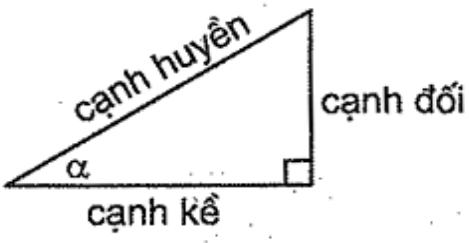
31*. Tam giác ABC có BC = 40cm, đường phân giác AD dài 45cm, đường cao AH dài 36cm. Tính các độ dài BD, DC.

~ ***Ví dụ :*** 26, 27, 29.

Bài tập : 167 đến 173, 186, 188 đến 191, 423.

§2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α (h.17) được định nghĩa như sau :



Hình 17

$$\sin\alpha = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}}\ ; \qquad \cos\alpha = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}}\ ;$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{đối}}{\text{kề}}\ ; \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{\text{kề}}{\text{đối}}.$$

Với hai góc α và β phụ nhau, ta có $\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$, $\text{tg}\alpha = \text{cotg}\beta$, $\text{cotg}\alpha = \text{tg}\beta$.

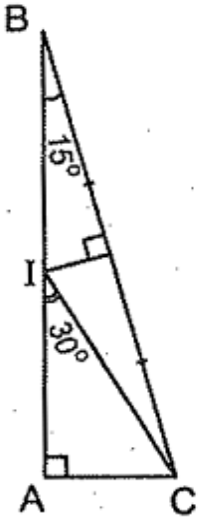
Với một số góc đặc biệt, ta có :

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{cotg}60^\circ = \text{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{tg}45^\circ = \text{cotg}45^\circ = 1, \qquad \text{cotg}30^\circ = \text{tg}60^\circ = \sqrt{3}.$$

Ví dụ 4*. Tính $\text{tg}15^\circ$ mà không dùng bảng số, không dùng máy tính.



Hình 18

Giải : *Cách 1.* Xét tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 15^\circ$, AC = 1 (h.18). Đường trung trực của BC cắt AB ở I. Ta có $\widehat{AIC} = 30^\circ$ nên $IC = 2AC = 2$, $\frac{AC}{AI} = \text{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra $AI = \sqrt{3}$.

Ta có $\quad AB = AI + BI = AI + IC = \sqrt{3} + 2,$

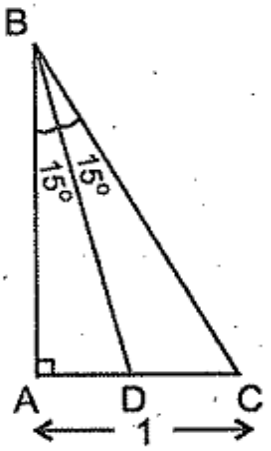
$$\text{tg}15^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Cách 2. Xét tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 30^\circ$, AC = 1 (h.19).

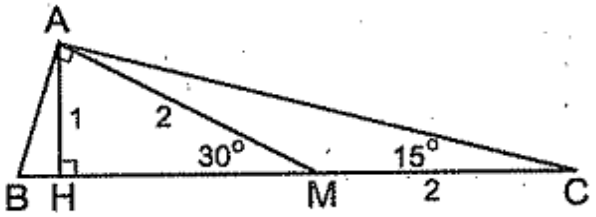
Ta có $\widehat{B} = 30^\circ$ nên $BC = 2AC = 2$, $\frac{AC}{AB} = \text{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $AB = \sqrt{3}$. Kẻ đường phân giác BD. Theo tính chất đường phân giác :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{AD + DC}{AB + BC} = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ta có $$\text{tg}15^\circ = \frac{AD}{AB} = 2 - \sqrt{3}.$$



Hình 19



Hình 20

Cách 3. Xét tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 15^\circ$, BC = 4 (h.20).

Kẻ đường trung tuyến AM, đường cao AH. Ta có $\widehat{AMB} = 30^\circ$, AM = 2 nên AH = 1, $\frac{AH}{HM} = \text{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $HM = \sqrt{3}$.

Suy ra $$HC = HM + MC = \sqrt{3} + 2.$$

$$\text{tg}15^\circ = \frac{AH}{HC} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

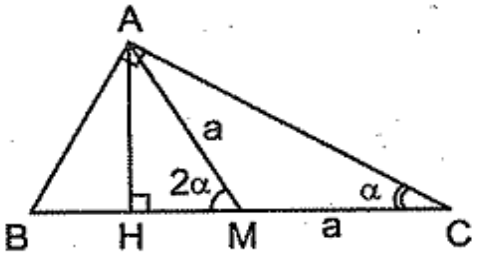
Ví dụ 5. Xét tam giác ABC vuông tại A, AB < AC, $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, đường trung tuyến AM, đường cao AH, MA = MB = MC = a. Chứng minh các công thức :

a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

b) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$;

c) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

Giải : (h.21)



Hình 21

Ta có $\sin\alpha = \frac{AH}{AC}$, $\cos\alpha = \frac{CH}{AC}$, $\widehat{AMH} = 2\alpha$,

$\cos 2\alpha = \frac{HM}{AM} = \frac{HM}{a}$, $\sin 2\alpha = \frac{AH}{AM} = \frac{AH}{a}$.

a) $2\sin\alpha.\cos\alpha = 2.\frac{AH}{AC}.\frac{CH}{AC} = \frac{2AH.CH}{AC^2} = \frac{2AH.CH}{BC.CH} = \frac{2AH}{2a} = \frac{AH}{a} = \sin 2\alpha.$

b) Xét $$2\cos^2\alpha = 2\left(\frac{CH}{AC}\right)^2 = \frac{2.CH^2}{BC.CH} = \frac{2CH}{2a} = \frac{CH}{a}. \quad (1)$$

Xét $$1 + \cos 2\alpha = 1 + \frac{HM}{a} = \frac{a + HM}{a} = \frac{CH}{a}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$.

c) Thay $\cos^2\alpha$ bởi $1 - \sin^2\alpha$ vào $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$, ta có

$$1 + \cos 2\alpha = 2 - 2\sin^2\alpha \text{ nên } 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha.$$

Bài tập

32. Tính sai số của các phép dựng sau :

a) Dựng góc 72° bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 1cm và 3cm.

b) Dựng góc 20° bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy 2cm, cạnh bên 6cm.

33. Tam giác ABC có đường trung tuyến AM bằng cạnh AC. Tính tgB : tgC.

34. Cho $tg\alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.

35. Cho hình vuông ABCD. Tính $\cos\widehat{MAN}$ biết rằng M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, CD.

36. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua B. Gọi E là điểm thuộc tia đối của tia HA sao cho HE = 2HA. Chứng minh rằng $\widehat{DEC} = 90^o$.

37*. Chứng minh rằng trong một tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.

38. Tính $tg\,22^o30'$ mà không dùng bảng số, không dùng máy tính.

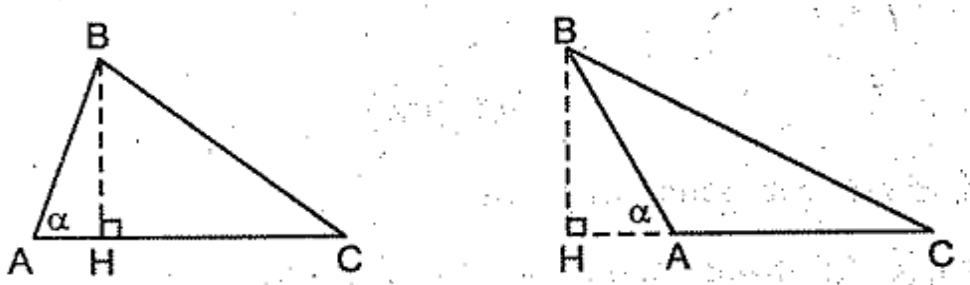
39. Chứng minh rằng $\cos 15^o = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{4}}{2}$, $\sin 15^o = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{4}}{2}$ mà không dùng bảng số, không dùng máy tính.

40*. Tính $\cos 36^o$, $\cos 72^o$ mà không dùng bảng số, không dùng máy tính.

§3. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với côsin góc kề ; mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hay nhân với côtang góc kề.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng diện tích của một tam giác (không vuông) bằng một nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.



Hình 22

Giải : Gọi α là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB, AC của ΔABC (h.22). Vẽ đường cao BH, ta có $BH = AB\sin\alpha$.

Do đó $$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BH = \frac{1}{2}AC.AB\sin\alpha.$$

Chú ý : Sau này nghiên cứu hàm số lượng giác ta có $\sin 90^o = 1$, $\sin\alpha = \sin(180^o - \alpha)$, do đó : Diện tích tam giác bằng một nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc tạo bởi hai cạnh ấy.

Ví dụ 7*. Tam giác ABC có $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ và độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

a) Tính độ dài các cạnh của tam giác.

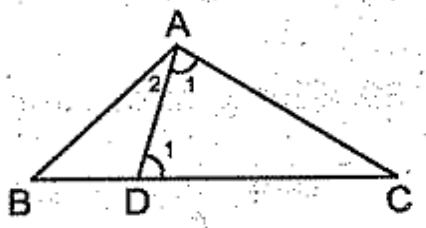
b) Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tính số đo của các góc A, B, C.

Giải : a) (h.23) Trên cạnh CB lấy điểm D sao cho CD = CA. Ta có

$$\widehat{A} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{D_1} + \widehat{A_2}$$
$$= \widehat{B} + \widehat{A_2} + \widehat{A_2} = \widehat{B} + 2\widehat{A_2}$$

Theo đề bài, $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$, suy ra $\widehat{C} = \widehat{A_2}$.

$\Delta ABC \backsim \Delta DBA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{BC}{AB}$.



Hình 23

Đặt BC = a, AC = b, AB = c với a, b, c ∈ N, ta có

$$\frac{c}{a-b} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a(a-b). \qquad (1)$$

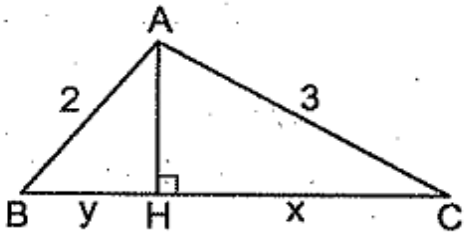
Do các cạnh của tam giác ABC là ba số tự nhiên liên tiếp và a > b nên a − b = 1 hoặc a − b = 2.

Nếu a − b = 1 thì a − c = 2, (1) $\Leftrightarrow c^2 = c + 2 \Leftrightarrow c(c-1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c - 1 = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ c = 2. Khi đó a = 4, b = 3. Ba số 2, 3 và 4 thoả mãn bất đẳng thức tam giác.

Nếu a − b = 2 thì a − c = 1, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow c^2 = 2(c+1) \Leftrightarrow c(c-2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = 3 \end{cases}, \text{ loại.}$$

Vậy AB = 2, AC = 3, BC = 4.



Hình 24

b) (h.24). Kẻ AH ⊥ BC. Đặt HC = x, HB = y. Ta có

$$x + y = 4,$$

$$x^2 - y^2 = (3^2 - AH^2) - (2^2 - AH^2) = 9 - 4 = 5,$$

nên $x - y = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

Từ đó x = 2,625 ; y = 1,375 ; $\cos C = \frac{x}{3} = 0{,}875$; $\widehat{C} = 28^o57'$; $\cos B = \frac{y}{2} = 0{,}6875$; $\widehat{B} = 46^o34'$; $\widehat{A} = 104^o29'$.

Chú ý : Ta còn chứng minh được bài toán tổng quát hơn Ví dụ 7 : Nếu tam giác ABC có góc A tù và độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp thì các độ dài đó bằng 2, 3, 4.

Để chứng minh bài này, ta sử dụng bổ đề : Nếu tam giác ABC có góc A tù thì $AB^2 + AC^2 < BC^2$ (xem Bài tập 22).

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là n − 1, n, n + 1 với n ∈ N. Do $\widehat{A} > 90^o$ nên BC là cạnh lớn nhất, do đó BC = n + 1. Theo bổ đề trên :

$$(n-1)^2 + n^2 < (n+1)^2.$$

Biến đổi thành $n^2 < 4n$ nên n < 4. Hiển nhiên n ≥ 2, vậy n = 2 hoặc n = 3.

Loại n = 2 vì không tồn tại tam giác có ba cạnh 1, 2, 3. Với n = 3, độ dài ba cạnh của tam giác là 2, 3, 4, thoả mãn bất đẳng thức tam giác.

Bài tập

41. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi, hãy tính :

a) Chiều cao ứng với cạnh 40cm của một tam giác, biết góc kề với cạnh này bằng 40° và 55°.

b) Góc tạo bởi đường cao và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh của tam giác, biết các góc ở hai đỉnh kia bằng 60° và 80°.

42. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 105^o$, $\widehat{B} = 45^o$, BC = 4cm. Tính các độ dài AB, AC.

43. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^o$, AB = 28cm, AC = 35cm. Tính độ dài BC.

44. Cho một hình vuông có cạnh 1dm. Người ta cắt đi ở mỗi góc của hình vuông một tam giác vuông cân để được một bát giác đều. Tính tổng diện tích của bốn tam giác vuông cân bị cắt đi.

45. Tam giác đều ABC có cạnh 60cm. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho BD = 20cm. Đường trung trực của AD cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở E, F. Tính độ dài các cạnh của tam giác DEF.

46. Cho tam giác ABC có AB = c, AC = b, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC ở N. Tính tỉ số BN : NC.

47*. Độ dài hai đường chéo của một hình bình hành tỉ lệ với độ dài hai cạnh liên tiếp của nó. Chứng minh rằng các góc tạo bởi hai đường chéo bằng các góc của hình bình hành.

48*. Tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau ở O và không vuông góc với nhau. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác AOB và COD. Gọi G và I lần lượt là trọng tâm của các tam giác BOC và AOD.

a) Gọi E là trọng tâm của tam giác AOB, F là giao điểm của AH và DK. Chứng minh rằng các tam giác IEG và HFK đồng dạng.

b) Chứng minh rằng IG vuông góc với HK.

49*. Cho tam giác nhọn ABC, các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng trong ba tam giác ADF, BDE, CEF, tồn tại một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC. Khi nào cả ba tam giác đó cùng có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC ?

~ ***Ví dụ :*** 28.

Bài tập : 192.

Chương II

ĐƯỜNG TRÒN

§4. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

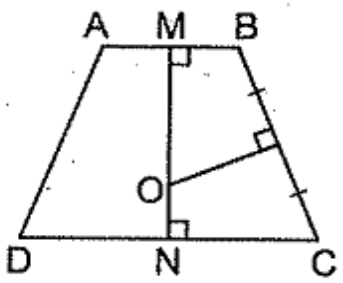
Đường tròn tâm O bán kính R (với R > 0) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

Tuỳ theo OM = R, OM < R, OM > R mà ta có điểm M nằm trên, nằm bên trong, nằm bên ngoài đường tròn.

Qua ba điểm không thẳng hàng, bao giờ cũng vẽ được một đường tròn và chỉ một đường tròn.

Đường tròn có một tâm đối xứng, đó là tâm của đường tròn. Đường tròn có vô số trục đối xứng, đó là bất kì đường kính nào của nó.

Ví dụ 8. Cho hình thang cân ABCD. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của hình thang.



Hình 25

Giải : (h.25)

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh đáy AB, CD của hình thang cân. MN là trục đối xứng của hình thang cân nên MN là đường trung trực của AB và của CD.

Gọi O là giao điểm của MN với đường trung trực của BC.

O thuộc đường trung trực của AB nên OA = OB.

O thuộc đường trung trực của BC nên OB = OC.

O thuộc đường trung trực của CD nên OC = OD.

Vậy OA = OB = OC = OD, do đó đường tròn (O ; OA) đi qua các điểm A, B, C, D.

Bài tập

50. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), AC = 40cm, BC = 48cm. Tính khoảng cách từ O đến BC.

51. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), cạnh bên bằng b, đường cao AH = h. Tính bán kính của đường tròn (O).

52. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi M là trung điểm BC. Giả sử O nằm trong tam giác AMC hoặc O nằm giữa A và M. Gọi I là trung điểm của AC. Chứng minh rằng :

a) Chu vi tam giác IMC lớn hơn 2R.

b) Chu vi tam giác ABC lớn hơn 4R.

53. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Kẻ các đường thẳng DD', EE', FF' sao cho DD' // OA, EE' // OB, FF' // OC. Chứng minh rằng các đường thẳng DD', EE', FF' đồng quy.

54. Cho ba điểm A, B, C bất kì và đường tròn (O) bán kính bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một điểm M nằm trên đường tròn (O) sao cho

$$MA + MB + MC \geq 3.$$

~ ***Bài tập :*** 141, 147, 156, 175, 193.

§5. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

Quan hệ về độ dài giữa đường kính và dây được thể hiện ở định lí : Trong một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây được thể hiện ở các định lí :

– Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

– Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Để so sánh độ dài hai dây của một đường tròn dựa vào các định lí : Trong một đường tròn

– Hai dây bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.

– Trong hai dây không bằng nhau, dây lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.

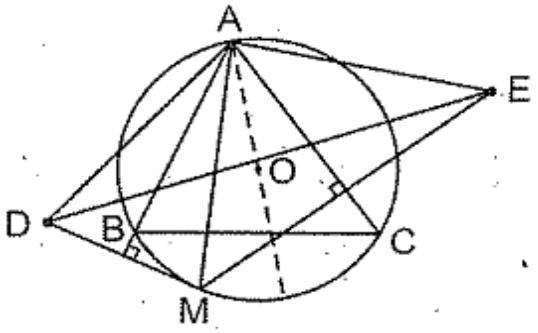
Ví dụ 9. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm bất kì thuộc cung BC không chứa A. Gọi D, E theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB, AC. Tìm vị trí của M để DE có độ dài lớn nhất.

Giải : (h.26)

AB là đường trung trực của MD nên AM = AD, AC là đường trung trực của ME nên AM = AE. Suy ra AD = AE.

Ta có

$$\widehat{MAD} + \widehat{MAE} = 2(\widehat{MAB} + \widehat{MAC}) = 2\widehat{BAC}.$$

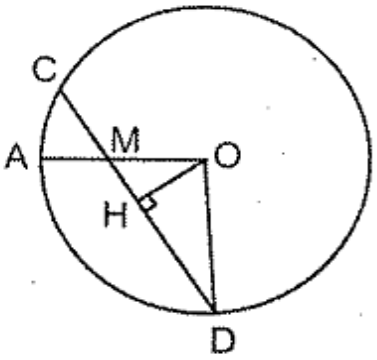


Hình 26

Tam giác ADE cân tại A có $\widehat{DAE} = 2\widehat{BAC}$ không đổi nên DE lớn nhất ⇔ AD lớn nhất ⇔ AM lớn nhất ⇔ AM là đường kính của đường tròn (O).

Ví dụ 10. Cho đường tròn tâm O bán kính OA = 11cm. Điểm M thuộc bán kính OA và cách O là 7cm. Qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm. Tính các độ dài MC, MD (MC < MD).

Giải : (h.27)



Hình 27

Kẻ OH ⊥ CD. Ta có

$$HC = HD = \frac{CD}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ (cm)}.$$

Tam giác OHD vuông nên

$$OH^2 = OD^2 - HD^2 = 11^2 - 9^2 = 121 - 81 = 40.$$

Tam giác OHM vuông nên

$$MH^2 = OM^2 - OH^2 = 49 - 40 = 9 \Rightarrow MH = 3\text{cm}.$$

Do đó $MD = MH + HD = 3 + 9 = 12$ (cm),

$MC = HC - MH = 9 - 3 = 6$ (cm).

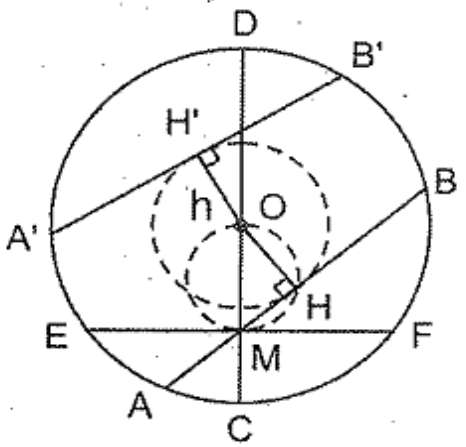
Ví dụ 11. Cho đường tròn tâm O bán kính 15cm, điểm M cách O là 9cm.

a) Dựng dây AB đi qua M và có độ dài 26cm.

b) Có bao nhiêu dây đi qua M và có độ dài là một số nguyên xentimét ?

Giải : (h.28)

a) *Phân tích.* Giả sử đã dựng được dây AB đi qua M và AB = 26cm. Kẻ OH ⊥ AB, độ dài OH = h xác định (h là khoảng cách từ O đến dây A'B' bất kì dài 26cm).



Hình 28

Điểm H thoả mãn hai điều kiện :

– Nằm trên đường tròn có đường kính OM ;

– Nằm trên đường tròn (O ; h).

Cách dựng. Bạn đọc tự giải.

Chứng minh. Bạn đọc tự giải.

Biện luận. Bài toán có hai nghiệm hình.

b) Dây ngắn nhất đi qua M là dây EF có khoảng cách từ tâm đến dây lớn nhất (bằng 9cm), dây này có độ dài $2\sqrt{15^2 - 9^2} = 24$cm. Dây dài nhất đi qua M là đường kính CD có độ dài 30cm.

Ứng với mỗi độ dài 25, 26, 27, 28, 29cm, có hai dây đi qua M. Do đó có $2 + 5.2 = 12$ (dây) đi qua M và có độ dài là một số nguyên xentimét.

Bài tập

55. Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^o$.

a) Chứng minh rằng $AC \leq BD$.

b) Trong trường hợp nào thì $AC = BD$?

56. Cho đường tròn tâm O đường kính AB, các dây AC, AD. Gọi E là điểm bất kì trên đường tròn, H và K theo thứ tự là hình chiếu của E trên AC, AD. Chứng minh rằng $HK \leq AB$.

57. Cho đường tròn tâm O, dây AB = 24cm, dây AC = 20cm ($\widehat{BAC} < 90^o$ và điểm O nằm trong góc BAC). Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ M đến AB bằng 8cm.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C.

b) Tính bán kính của đường tròn.

58. Cho đường tròn tâm O bán kính 5cm, hai dây AB và CD song song với nhau có độ dài theo thứ tự bằng 8cm và 6cm. Tính khoảng cách giữa hai dây.

59. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 13cm. Dây CD có độ dài 12cm vuông góc với AB tại H.

a) Tính các độ dài HA, HB.

b*) Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H trên AC, BC. Tính diện tích tứ giác CMHN.

60. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, dây CD. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến CD.

a) Chứng minh rằng CH = DK.

b) Chứng minh rằng $S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$.

c) Tính diện tích lớn nhất của tứ giác AHKB, biết AB = 30cm, CD = 18cm.

61. Cho tam giác ABC, các đường cao AD, BE, CF. Đường tròn đi qua D, E, F cắt BC, CA, AB theo thứ tự ở M, N, P. Chứng minh rằng các đường thẳng kẻ từ M vuông góc với BC, kẻ từ N vuông góc với AC, kẻ từ P vuông góc với AB đồng quy.

62*. Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm của AB, E là trọng tâm của tam giác ACD. Chứng minh rằng OE vuông góc với CD.

~ ***Bài tập :*** 142, 143, 153, 154, 176.

§6. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

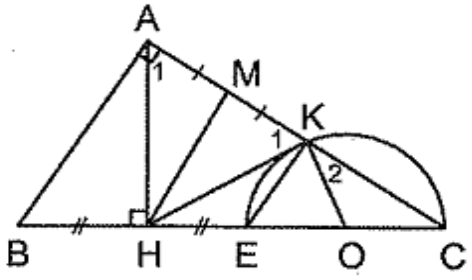
Căn cứ vào số điểm chung 0, 1, 2 của đường thẳng và đường tròn mà ta định nghĩa các vị trí : đường thẳng và đường tròn không giao nhau, tiếp xúc nhau, cắt nhau. Ứng với các vị trí trên, khoảng cách d từ tâm đường tròn đến đường thẳng và bán kính R của đường tròn có các liên hệ : $d < R$, $d = R$, $d > R$.

Ta có các định lí :

– Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

– Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH. Gọi E là điểm đối xứng với B qua H. Đường tròn có đường kính là EC cắt AC ở K. Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn.



Hình 29

Giải : (h.29). Gọi O là trung điểm của EC thì OE = OC = OK nên $\widehat{EKC} = 90^o$. Gọi M là trung điểm của AK thì HM là đường trung bình của hình thang ABEK, do đó HM ⊥ AK.

Tam giác AHK có đường cao HM cũng là đường trung tuyến nên là tam giác cân, do đó $\widehat{K}_1 = \widehat{A}_1$. Ta lại có $\widehat{K}_2 = \widehat{C}$, suy ra $\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = \widehat{A}_1 + \widehat{C} = 90^o$, tức là $\widehat{OKH} = 90^o$. Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ví dụ 13. Cho một hình vuông 8 × 8 gồm 64 ô vuông nhỏ. Đặt một tấm bìa hình tròn có đường kính 8 sao cho tâm O của hình tròn trùng với tâm của hình vuông.

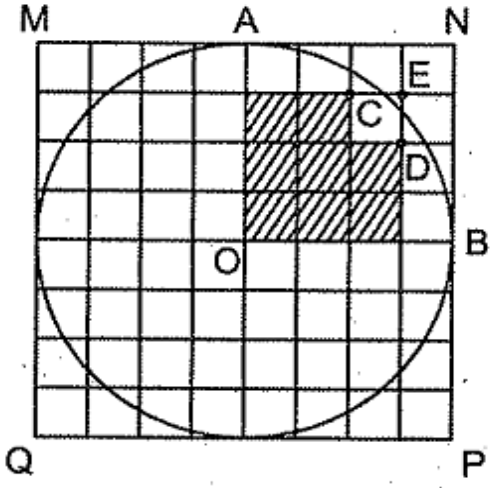
a) Chứng minh rằng hình tròn tiếp xúc với các cạnh của hình vuông.

b) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp hoàn toàn ?

Giải : (h.30)

a) Bán kính của hình tròn bằng khoảng cách từ tâm của hình tròn đến mỗi cạnh của hình vuông (cùng bằng 4) nên hình tròn tiếp xúc với các cạnh của hình vuông.

b) Xét hình vuông AOBN và các điểm C, D, E như trên hình vẽ. Ta có OC = OD = $\sqrt{13} < 4$ nên C và D nằm trong đường tròn, OE = $\sqrt{18} > 4$ nên E nằm ngoài đường tròn. Có 8 ô vuông nhỏ bị che lấp hoàn toàn. Vậy tổng cộng có 32 ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp hoàn toàn.



Hình 30

Bài tập

63. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, M là một điểm thuộc nửa đường tròn. Qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D và C theo thứ tự là các hình chiếu của A và B trên tiếp tuyến ấy.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của CD.

b) Chứng minh rằng AB = BC + AD.

c) Giả sử $\widehat{AOM} \geq \widehat{BOM}$, gọi E là giao điểm của AD với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác BCDE.

d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn sao cho tứ giác ABCD có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính R của nửa đường tròn đã cho.

64. Cho tam giác ABC cân tại A, I là giao điểm của các đường phân giác.

a) Hãy xác định vị trí tương đối của đường thẳng AC với đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác BIC.

b) Gọi H là trung điểm của BC, IK là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh rằng $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}$.

65. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB, Ax là tiếp tuyến của nửa đường tròn (Ax và nửa đường tròn nằm cùng phía đối với AB), C là một điểm thuộc nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Đường thẳng qua O và vuông góc với AC cắt Ax tại M. Gọi I là giao điểm của MB và CH. Chứng minh rằng CI = IH.

66. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$) có $\widehat{BMC} = 90^o$ với M là trung điểm của AD. Chứng minh rằng :

a) AD là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính BC.

b) BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính AD.

67. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB, C là một điểm thuộc nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Qua trung điểm M của CH, kẻ đường vuông góc với OC, cắt nửa đường tròn tại D và E. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn (C ; CD).

68. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi d và d' là các tiếp tuyến tại A và tại B của đường tròn, C là một điểm bất kì thuộc d. Đường vuông góc với OC tại O cắt d' ở D. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

69*. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB, C là một điểm thuộc nửa đường tròn. Qua C kẻ tiếp tuyến d với nửa đường tròn. Kẻ các tia Ax, By song song với nhau, cắt d theo thứ tự tại D, E. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

70. Cho đường tròn tâm O có đường kính AB = 2R. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn, A là tiếp điểm. Gọi M là điểm bất kì thuộc d. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BM, cắt d tại N.

a) Chứng minh rằng tích AM. AN không đổi khi điểm M chuyển động trên đường thẳng d.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.

71*. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = \alpha$, đường cao AH = h. Vẽ đường tròn tâm A bán kính h. Một tiếp tuyến bất kì (khác BC) của đường tròn (A) cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại B', C'.

a) Chứng minh rằng $S_{ABC} < S_{AB'C'}$.

b) Trong các tam giác ABC có $\widehat{A} = \alpha$ và đường cao AH = h, tam giác nào có diện tích nhỏ nhất ?

~ ***Ví dụ :*** 30.

Bài tập : 174, 177.

§7. TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :

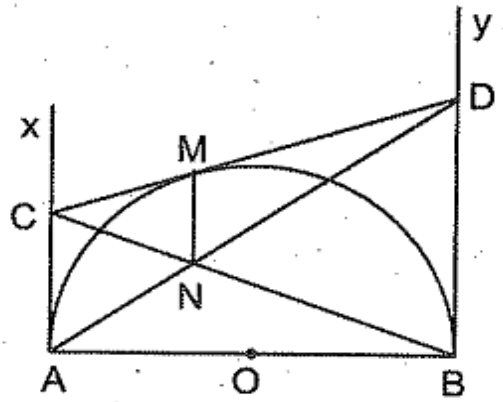
– Điểm đó cách đều hai tiếp điểm ;

– Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến ;

– Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

Ví dụ 14. Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn (O) đường kính AB và các tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Gọi N là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với AB.

Giải : (h.31) Ta có Ax // By nên theo định lí Ta-lét



Hình 31

$$\frac{ND}{NA} = \frac{DB}{AC}. \qquad (1)$$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau

$$DB = MD,\ AC = MC. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{ND}{NA} = \frac{MD}{MC}$. Do đó

MN // AC (định lí Ta-lét đảo).

MN // AC, mà AC ⊥ AB nên MN ⊥ AB.

Ví dụ 15*. Cho đường tròn tâm O, điểm K nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến KA, KB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AOC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt AB ở E. Chứng minh rằng :

a) Các tam giác KBC và OBE đồng dạng.

b) CK vuông góc với OE.

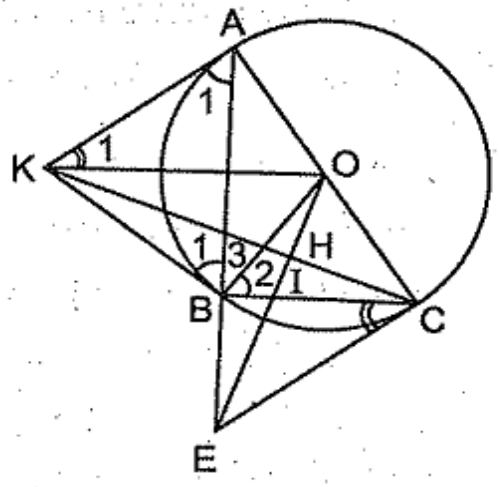
Giải : (h.32)

a) Ta có AK // CE (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{K_1} = \widehat{OKB}$

$\Rightarrow \text{tg}\,\widehat{BCE} = \text{tg}\,\widehat{OKB} \Rightarrow \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{OB}{KB}$

$\Rightarrow \dfrac{KB}{BC} = \dfrac{OB}{BE}$. (1)



Hình 32

Ta lại có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (cùng phụ với $\widehat{B_3}$) nên

$\widehat{KBC} = \widehat{OBE}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta KBC \backsim \Delta OBE$ (c.g.c).

b) Từ câu a) suy ra $\widehat{BCK} = \widehat{BEO}$.

Gọi I là giao điểm của BC và OE. H là giao điểm của CK và OE. Xét hai tam giác IBE và IHC ta chứng minh được $\widehat{H} = 90^o$. Vậy CK $\perp$ OE.

Bài tập

72. Cho nửa đường đường tròn tâm O có đường kính AB = 2R. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn và tia Oz vuông góc với AB (các tia Ax, By, Oz cùng phía với nửa đường tròn đối với AB). Gọi E là điểm bất kì của nửa đường tròn. Qua E vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax, By, Oz theo thứ tự ở C, D, M. Chứng minh rằng khi điểm E thay đổi vị trí trên nửa đường tròn thì :

a) Tích AC. BD không đổi.

b) Điểm M chạy trên một tia.

c) Tứ giác ACDB có diện tích nhỏ nhất khi nó là hình chữ nhật. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

73. Cho đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các tia Ax, By song song với nhau.

a) Dựng đường tròn tâm O tiếp xúc với đoạn thẳng AB và tiếp xúc với các tia Ax, By.

b) Tính $\widehat{AOB}$.

c) Gọi các tiếp điểm của đường tròn (O) với Ax, By, AB theo thứ tự là M, N, H. Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính AB.

d) Các tia Ax, By có vị trí như thế nào thì HM = HN ?

74. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm I của AD.

a) Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn (I ; IA).

b) Cho AD = 2a. Tính tích của AB và CD theo a.

c) Gọi H là tiếp điểm của BC với đường tròn (I) nói trên. K là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng KH song song với DC.

75. Cho đường tròn tâm O có đường kính AB, D là một điểm nằm trên đường tròn. Các tiếp tuyến của đường tròn tại A và tại D cắt nhau ở C. Gọi E là hình chiếu của D trên AB, gọi I là giao điểm của BC và DE. Chứng minh rằng DI = IE.

76. Cho tam giác ABC cân tại A, O là trung điểm của BC. Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB, AC tại H, K. Một tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt các cạnh AB, AC ở M, N.

a) Cho $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$. Tính $\widehat{MON}$.

b) Chứng minh rằng OM, ON chia tứ giác BMNC thành ba tam giác đồng dạng.

c) Cho BC = 2a. Tính tích BM.CN.

d) Tiếp tuyến MN ở vị trí nào thì tổng BM + CN nhỏ nhất ?

77. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, HB = 20cm, HC = 45cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Kẻ các tiếp tuyến BM, CN với đường tròn (M và N là các tiếp điểm, khác điểm H).

a) Tính diện tích tứ giác BMNC.

b) Gọi K là giao điểm của CN và HA. Tính các độ dài AK, KN.

c) Gọi I là giao điểm của AM và CB. Tính các độ dài IM, IB.

78. Cho đường tròn tâm O bán kính 6cm. Một điểm A nằm bên ngoài đường tròn sao cho các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn vuông góc với nhau (B, C là các tiếp điểm). Trên hai cạnh AB, AC của góc A, lấy các điểm D, E sao cho AD = 4cm, AE = 3cm. Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

79. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Với tâm B và bán kính a, vẽ cung AC nằm trong hình vuông. Qua điểm E thuộc cung đó, vẽ tiếp tuyến với cung AC, cắt DA và DC theo thứ tự tại M và N.

a) Tính chu vi tam giác DMN.

b) Tính số đo góc MBN.

c) Chứng minh rằng $\frac{2a}{3} < MN < a$.

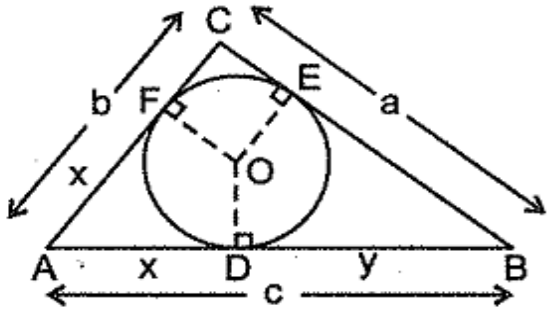
80. Cho hình vuông ABCD. Một đường tròn tâm O tiếp xúc với các đường thẳng AB, AD và cắt mỗi cạnh BC, CD thành hai đoạn thẳng có độ dài 2cm và 23cm. Tính bán kính của đường tròn.

~ ***Bài tập :*** 144, 158, 178, 181, 182, 187.

§8. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong của tam giác.

Ví dụ 16. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại D. Tính số đo góc C biết rằng AC.BC = 2AD.DB.



Hình 33

Giải : (h.33) Gọi E, F là các tiếp điểm của đường tròn (O) trên CB, CA. Ta có :

$$AD = AF,\ BD = BE,\ CE = CF.$$

Đặt AD = AF = x, BD = BE = y.

Theo giả thiết

$$ab = 2xy \qquad (1)$$

ta có

$$AB + AC - BC = (x + y) + (x + CF) - (CE + y) = 2x$$

nên $$2x = b + c - a.$$

Tương tự $\qquad 2y = a + c - b.$

Suy ra $\qquad 2x.2y = [c - (a - b)][c + (a - b)] = c^2 - (a - b)^2$

$$= c^2 - a^2 + 2ab - b^2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2ab = c^2 - a^2 + 2ab - b^2$ hay $a^2 + b^2 = c^2$.

Theo định lí Py-ta-go đảo, $\widehat{ACB} = 90^o$.

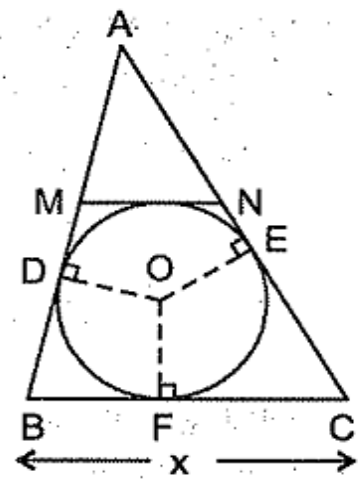
Ví dụ 17. Tam giác ABC có chu vi 80cm ngoại tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của đường tròn (O) song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự ở M, N.

a) Cho biết MN = 9,6cm. Tính độ dài BC.

b) Cho biết AC – AB = 6cm. Tính các độ dài AB, AC, BC để MN có giá trị lớn nhất.

Giải : (h.34) MN // BC nên tam giác AMN và tam giác ABC đồng dạng, do đó

$$\frac{MN}{BC} = \frac{\text{chu vi AMN}}{\text{chu vi ABC}}. \qquad (1)$$



Hình 34

Gọi D, E, F theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn (O) với AB, AC, BC. Ta có AD = AE, BD = BF, CE = CF.

Chu vi tam giác AMN bằng

$$AD + AE = AB + AC - BC. \qquad (2)$$

a) Đặt BC = x. Từ (2) suy ra chu vi tam giác AMN bằng 80 – 2BC, hay 80 – 2x.

Từ (1) suy ra $\qquad \dfrac{9,6}{x} = \dfrac{80 - 2x}{80}.$

Đưa về phương trình $x^2 - 40x + 384 = 0 \Leftrightarrow (x - 24)(x - 16) = 0$.

Có hai đáp số : BC = 24cm hoặc BC = 16cm.

b) Đặt BC = x. Từ (1) suy ra

$\dfrac{MN}{x} = \dfrac{80 - 2x}{80}$ nên $40MN = x(40 - x) = -(x - 20)^2 + 400 \le 400$.

max MN = 10 $\Leftrightarrow$ x = 20.

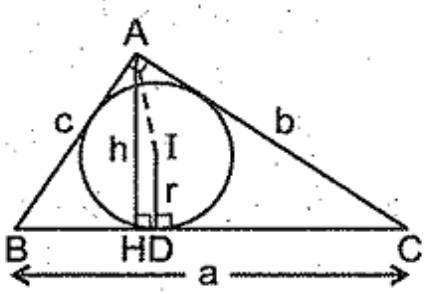
Dễ dàng tính được BC = 20cm, AB = 27cm, AC = 33cm.

Ví dụ 18. Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp một tam giác vuông và h là đường cao ứng với cạnh huyền. Chứng minh rằng $2 < \frac{h}{r} < 2,5$.

Giải : Xét tam giác ABC vuông tại A, gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp (h.35). Kẻ AH, ID vuông góc với BC. Đặt BC = a, AC = b, AB = c.

Ta có ah = (a + b + c)r (cùng bằng 2S)

nên $$\frac{h}{r} = \frac{a+b+c}{a} > \frac{a+a}{a} = \frac{2a}{a} = 2. \quad (1)$$



Hình 35

Mà AH ≤ AI + ID hay $h \le r\sqrt{2} + r$ do đó

$$\frac{h}{r} \le \sqrt{2} + 1 < 2,5. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2 < \frac{h}{r} < 2,5$.

Bài tập

81. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 15cm, AC = 20cm. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. Tính khoảng cách từ I đến đường cao AH của tam giác ABC.

82. Tính các cạnh của tam giác vuông ngoại tiếp đường tròn biết :

a) Tiếp điểm trên cạnh huyền chia cạnh đó thành hai đoạn thẳng 5cm và 12cm ;

b) Một cạnh góc vuông bằng 20cm, bán kính của đường tròn nội tiếp bằng 6cm.

83. Tính diện tích tam giác vuông biết một cạnh góc vuông bằng 12cm, tỉ số giữa bán kính của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác đó bằng 2 : 5.

84. Cho một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10cm, diện tích bằng $24cm^2$. Tính bán kính của đường tròn nội tiếp.

85. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 5. Tính các độ dài AC, BC biết rằng số đo chu vi tam giác ABC bằng số đo diện tích tam giác đó.

86. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi (O ; r), (O_1 ; r_1), (O_2 ; r_2) theo thứ tự là các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH.

a) Chứng minh rằng $r + r_1 + r_2 = AH$.

b) Chứng minh rằng $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

c) Tính độ dài O_1O_2 biết AB = 3cm, AC = 4cm.

87. Đường tròn (O ; r) nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) song song với các cạnh của tam giác ABC cắt từ tam giác ABC thành ba tam giác nhỏ. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính của đường tròn nội tiếp các tam giác nhỏ đó. Chứng minh rằng $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

88. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AB, AC theo thứ tự ở D, E, F. Qua E kẻ đường thẳng song song với BC cắt AD và DF theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng M là trung điểm của EN.

89. Tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. Gọi G là trọng tâm của tam giác. Tính các cạnh của tam giác ABC theo r biết rằng IG song song với AC.

90. Tam giác ABC vuông tại A có AB = 9cm, AC = 12cm. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG.

91. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm trên các cạnh BC, AB, AC. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến EF. Chứng minh rằng $\widehat{BHE} = \widehat{CHF}$.

92. Cho tam giác ABC có AB = AC = 40cm, BC = 48cm. Gọi O và I theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Tính :

a) Bán kính của đường tròn nội tiếp ;

b) Bán kính của đường tròn ngoại tiếp ;

c) Khoảng cách OI.

93. Tính các cạnh của một tam giác cân biết bán kính của đường tròn nội tiếp bằng 6cm, bán kính của đường tròn ngoại tiếp bằng 12,5cm.

94*. Bán kính của đường tròn nội tiếp một tam giác bằng 2cm, tiếp điểm trên một cạnh chia cạnh đó thành hai đoạn thẳng 4cm và 6cm. Tính các cạnh còn lại của tam giác.

95*. Tính các góc của một tam giác vuông biết tỉ số giữa các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp bằng $\sqrt{3} + 1$.

96. Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Vẽ đường kính DN của đường tròn (O). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt AB, AC theo thứ tự tại I, K.

a) Chứng minh rằng $\frac{NI}{NK} = \frac{DC}{DB}$.

b) Gọi F là giao điểm của AN và BC. Chứng minh rằng BD = CF.

97. Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác đều ABC. Một tiếp tuyến của đường tròn cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự ở M và N.

a) Tính diện tích tam giác AMN biết BC = 8cm và MN = 3cm.

b) Chứng minh rằng $MN^2 = AM^2 + AN^2 - AM.AN$.

c*) Chứng minh rằng $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$.

98*. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. Đường vuông góc với CI tại I cắt AC, AB theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng :

a) $AM.\ BN = IM^2 = IN^2$;

b) $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$.

99*. Cho tam giác ABC có BC < AC < AB. Trên các cạnh AB, AC lấy các điểm D, E sao cho BD = CE = BC. Gọi O, I theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE bằng OI.

100. Gọi R và r theo thứ tự là các bán kính của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp một tam giác vuông có diện tích S. Chứng minh rằng $R + r \geq \sqrt{2S}$.

101. Trong các tam giác ABC có BC = a, chiều cao tương ứng bằng h, tam giác nào có bán kính của đường tròn nội tiếp lớn nhất ?

102. Trong các tam giác vuông ngoại tiếp cùng một đường tròn, tam giác nào có đường cao ứng với cạnh huyền lớn nhất ?

103*. a) Cho đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $IA + IB + IC \geq 6r$.

b) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi P , Q, N theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB. Chứng minh rằng $OP + OQ + ON \geq 3R$.

104. Độ dài các đường cao của tam giác ABC là các số tự nhiên, bán kính của đường tròn nội tiếp bằng 1. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều và tính độ dài các đường cao của tam giác đó.

105*. Gọi h_a, h_b, h_c là các đường cao ứng với các cạnh a, b, c của một tam giác, r là bán kính của đường tròn nội tiếp. Chứng minh các bất đẳng thức sau ;

a) $h_a + h_b + h_c \geq 9r$;

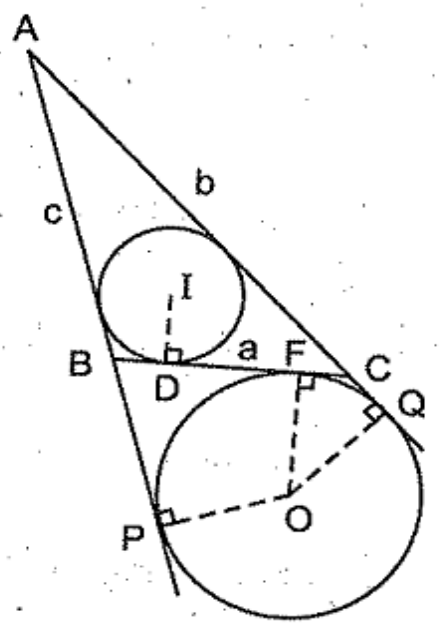
b) $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq 27r^2$.

Khi nào thì xảy ra đẳng thức ?

~ ***Bài tập*** **:** 155, 157.

§9. ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP TAM GIÁC

Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác. Tâm của mỗi đường tròn bàng tiếp tam giác là giao điểm hai đường phân giác của hai góc ngoài của tam giác hoặc giao điểm của tia phân giác của góc trong và một trong hai đường phân giác của góc ngoài không kề với nó.



Hình 36

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng các tiếp điểm trên cạnh BC của đường tròn bàng tiếp trong góc A và của đường tròn nội tiếp đối xứng với nhau qua trung điểm của BC.

Giải : (h.36)

Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp, O là tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A, D là tiếp điểm của (I) trên BC. Gọi P, F, Q là tiếp điểm của (O) với các đường thẳng AB, BC, AC.

Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Theo tính chất các tiếp tuyến của đường tròn (O) :

$$CF = CQ = AQ - AC \qquad (1)$$

$$AP + AQ = 2AQ = \text{chu vi } ABC. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2CF = 2QA - 2AC = (a + b + c) - 2b = a + c - b. \qquad (3)$$

Theo tính chất các tiếp tuyến của đường tròn (I) ta có

$$2BD = a + c - b. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra CF = BD.

Vậy D và F đối xứng với nhau qua trung điểm của BC.

Bài tập

106. Gọi a, b, c lần lượt là các cạnh của tam giác ABC ; h_a, h_b, h_c là các đường cao tương ứng ; R_a, R_b, R_c là bán kính của các đường tròn bàng tiếp tương ứng ; r là bán kính của đường tròn nội tiếp ; p là nửa chu vi tam giác ; S là diện tích tam giác.

Chứng minh rằng :

a) $S = R_a(p - a) = R_b(p - b) = R_c(p - c)$;

b) $\frac{1}{r} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$;

c) $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}$.

107. Tính cạnh huyền của một tam giác vuông, biết r là bán kính của đường tròn nội tiếp và R là bán kính của đường tròn bàng tiếp trong góc vuông.

108. Cho tam giác ABC. Gọi (P), (Q), (R) theo thứ tự là các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C.

a) Gọi tiếp điểm của (Q), (R) trên đường thẳng BC theo thứ tự là E, F. Chứng minh rằng CE = BF.

b) Gọi H, I, K theo thứ tự là tiếp điểm của các đường tròn (P), (Q), (R) với các cạnh BC, AC, AB. Nếu AH = BI = CK thì tam giác ABC là tam giác gì ?

~ ***Ví dụ :*** 24.

Bài tập : 149, 183 đến 185.

§10. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Căn cứ vào số điểm chung (0, 1, 2) của hai đường tròn mà ta định nghĩa các vị trí : hai đường tròn không giao nhau, tiếp xúc nhau, cắt nhau.

Do tính đối xứng của đường tròn, nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

Ví dụ 20. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, B ∈ (O), C ∈ (O').

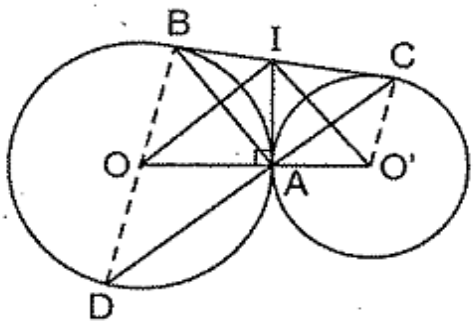
a) Tính $\widehat{BAC}$.

b) Tính BC.

c) Gọi D là giao điểm của CA với đường tròn tâm O, (D ≠ A). Chứng minh rằng ba điểm B, O, D thẳng hàng.

d) Tính BA, CA.

Giải : (h.37)



Hình 37

a) Kẻ tiếp tuyến chung trong tại A, cắt BC ở I. Ta có IB = IA = IC nên $\widehat{BAC} = 90^o$.

b) IO ⊥ IO' (tia phân giác của hai góc kề bù) nên $\widehat{OIO'} = 90^o$.

Tam giác IOO' vuông, đường cao IA nên

$$IA^2 = OA.O'A = Rr.$$

Do đó $BC = 2\,IA = 2\sqrt{Rr}$.

c) Ta có $\widehat{BAC} = 90^o$ nên $\widehat{BAD} = 90^o$. Tam giác ABD vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) nên BD là đường kính.

d) ΔCBD vuông tại B nên :

$$\frac{1}{BA^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{4Rr} = \frac{R+r}{4R^2r}$$

suy ra $$BA = \frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R+r}}.$$

Tương tự $$CA = \frac{2r\sqrt{R}}{\sqrt{R+r}}.$$

Ví dụ 21*. Cho điểm B nằm giữa A và C sao cho AB = 14cm, BC = 28cm. Vẽ về một phía của AC các nửa đường tròn tâm I, K, O có đường kính theo thứ tự AB, BC, AC. Tính bán kính của đường tròn tâm M tiếp xúc ngoài với các nửa đường tròn (I), (K) và tiếp xúc trong với nửa đường tròn (O).

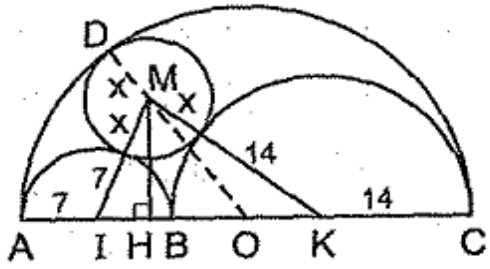
Giải : (h.38). Gọi D là giao điểm của OM và đường tròn (O). Ta có

$$OA = OD = OC = \frac{AC}{2} = \frac{14+28}{2} = 21 \text{ (cm)},$$

$OI = OA - IA = 21 - 7 = 14$ (cm),

$OK = OC - KC = 21 - 14 = 7$ (cm),

$IK = 14 + 7 = 21$ (cm).



Hình 38

Gọi bán kính của đường tròn (M) là x. Ta có $IM = x + 7$, $MK = x + 14$, $MO = OD - MD = 21 - x$.

Cách 1. Kẻ $MH \perp AC$. Ta có

$$HK^2 - HI^2 = MK^2 - MI^2 = (x + 14)^2 - (x + 7)^2 = 7(2x + 21).$$

Ta lại có $HK + HI = IK = 21$, suy ra

$$HK - HI = \frac{2}{3}x + 7. \qquad (1)$$

Ta có $HO^2 - HI^2 = MO^2 - MI^2 = (21 - x)^2 - (x + 7)^2 = 28(14 - 2x)$.

Ta lại có $HO + HI = OI = 14$, suy ra

$$HO - HI = 2(14 - 2x). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$HK - HO = \frac{2}{3}x + 7 - 2(14 - 2x) = 7\left(\frac{2}{3}x - 3\right).$$

Ta lại có $HK - HO = OK = 7$, suy ra $\frac{2}{3}x - 3 = 1$. Vậy $x = 6$.

Bán kính đường tròn (M) bằng 6cm.

Cách 2. Kẻ $MH \perp AC$. Gọi thêm $HI = y$. Ta có

$$HK^2 - HI^2 = MK^2 - MI^2 \Leftrightarrow (21 - y)^2 - y^2 = (x + 14)^2 - (x + 7)^2$$

$$\Leftrightarrow 21(21 - 2y) = 7(2x + 21)$$

Rút gọn được $\qquad x + 3y = 21. \qquad (3)$

Ta lại có

$$HO^2 - HI^2 = MO^2 - MI^2 \Leftrightarrow (14 - y)^2 - y^2 = (21 - x)^2 - (x + 7)^2$$

$$\Leftrightarrow 14(14 - 2y) = 28(14 - 2x).$$

Rút gọn được $\qquad 2x - y = 7. \qquad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $x = 6$, $y = 5$. Bán kính đường tròn (M) bằng 6cm.

Cách 3. (áp dụng công thức Hê-rông tính diện tích tam giác

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

với độ dài các cạnh a, b, c và nửa chu vi p).

Chu vi tam giác MOI bằng $14 + (21 - x) + (x + 7) = 42$ (cm).

Chu vi tam giác MOK bằng $7 + (21 - x) + (x + 14) = 42$ (cm).

Do IO = 2OK nên $S_{MOI} = 2\,S_{MOK}$, tức là $S^2_{MOI} = 4S^2_{MOK}$.

Ta có $S^2_{MOI} = 21(21 - 14)[21 - (21 - x)][21 - (x + 7)] = 21.7x(14 - x)$,

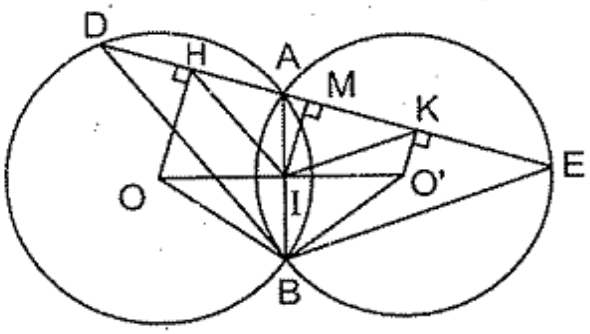
$$S^2_{MOK} = 21(21 - 7)[21 - (21 - x)][21 - (x + 14)] = 21.14x(7 - x).$$

Do $S^2_{MOI} = 4S^2_{MOK}$ nên

$$21.7x(14 - x) = 4.21.14x\,(7 - x).$$

Từ đó x = 6. Bán kính đường tròn (M) bằng 6cm.

Ví dụ 22. Cho hai đường tròn (O), (O') có cùng bán kính, cắt nhau tại A và B. Kẻ cát tuyến chung DAE của hai đường tròn, $D \in (O)$, $E \in (O')$. Chứng minh rằng BD = BE.



Hình 39

Giải : (h.39). Gọi I là giao điểm của AB và OO'. Theo tính chất của hai đường tròn cắt nhau, $OO' \perp AB$ và AI = IB.

Tam giác BOO' cân tại B, BI là đường cao nên

$$IO = IO'.$$

Kẻ OH, IM, O'K vuông góc với DE. Ta có OH // IM // O'K và OI = IO' nên theo tính chất đường thẳng song song cách đều, ta có HM = MK.

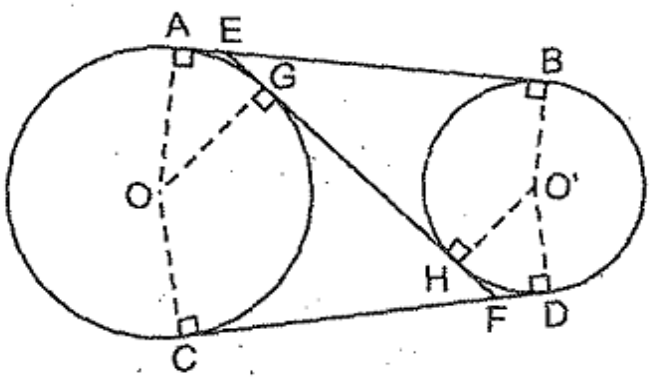
Tam giác IHK có đường cao IM là đường trung tuyến nên HI = IK. Ta lại có HI là đường trung bình của tam giác ABD, IK là đường trung bình của tam giác ABE nên $HI = \frac{BD}{2}$, $IK = \frac{BE}{2}$. Vậy BD = BE.

Chú ý : Nếu dùng kiến thức về góc nội tiếp (§12), ta dễ dàng chứng minh được $\widehat{D} = \widehat{E}$ nên BD = BE.

Ví dụ 23. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD, A và C thuộc (O), B và D thuộc (O'). Tiếp tuyến chung trong GH cắt AB và CD theo thứ tự tại E và F, G thuộc (O), H thuộc (O'). Chứng minh rằng :

a) AB = EF ; b) EG = FH.

Giải : (h.40)



Hình 40

a) Ta có

$$AB + CD = (AE + EB) + (CF + FD)$$
$$= (AE + CF) + (EB + FD)$$
$$= (EG + GF) + (EH + HF)$$
$$= EF + EF = 2EF. \quad (1)$$

Ta lại có AB = CD (đối xứng nhau qua OO'), nên

$$AB + CD = 2AB. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra AB = EF.

b) Ta có EG + EH = EA + EB = AB nên

$$2EG + GH = AB. \quad (3)$$

Tương tự $$2FH + HG = CD. \quad (4)$$

Vì AB = CD nên từ (3) và (4) suy ra 2EG = 2FH. Do đó EG = FH.

Bài tập

Hai đường tròn cắt nhau

109. Hai đường tròn (O) và (O') có cùng bán kính R, cắt nhau tại A và B. Đoạn nối tâm OO' cắt các đường tròn (O) và (O') theo thứ tự ở C và D. Tính R biết rằng AB = 24cm, CD = 12cm.

110. Hai đường tròn (O) và (O') có cùng bán kính R, cắt nhau tại A và B, trong đó $\widehat{OAO'} = 90^o$. Vẽ cát tuyến chung MAN, M thuộc (O), N thuộc (O'). Tính $AM^2 + AN^2$ theo R.

111. Cho ba đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 có cùng bán kính và cùng đi qua một điểm I. Gọi các giao điểm khác I của hai trong ba đường tròn đó là A, B, C. Chứng minh rằng :

a) $\Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$.

b) I là trực tâm của tam giác ABC.

112. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AO. Gọi CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, $C \in (O)$, $D \in (A)$.

Đoạn nối tâm OA cắt đường tròn (O) ở H. Chứng minh rằng DH là tiếp tuyến của đường tròn (O).

113. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ hình bình hành OBO'C. Chứng minh rằng ACOO' là hình thang cân.

114. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B.

a) Nêu cách dựng cát tuyến chung CAD , $C \in (O)$, $D \in (O')$, sao cho A là trung điểm của CD.

b) Tính độ dài CD nêu ở câu a biết rằng OO' = 5cm, OA = 4cm, O'A = 3cm.

115. Cho góc vuông xOy. Các điểm A và B theo thứ tự di chuyển trên các tia Ox và Oy sao cho OA + OB = k (k là hằng số). Vẽ các đường tròn (A ; OB) và (B ; OA).

a) Chứng minh rằng hai đường tròn (A) và (B) luôn cắt nhau.

b) Gọi M, N là các giao điểm của hai đường tròn (A) và (B). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hai đường tròn tiếp xúc nhau

116. Hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O)$, $C \in (O')$.

a) Cho R = 3cm, r = 1cm. Tính các độ dài AB, AC.

b) Cho AB = 19,2cm, AC = 14,4cm. Tính R và r.

117. Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) tiếp xúc với hai cạnh của một góc nhọn và (O_1) tiếp xúc ngoài với (O_2), (O_2) tiếp xúc ngoài với (O_3). Biết bán kính của các đường tròn (O_1) và (O_3) là a và b. Tính bán kính của đường tròn (O_2).

118. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Gọi AB là đường kính của đường tròn (O), AC là đường kính của đường tròn (O'), DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, $D \in (O)$, $E \in (O')$, K là giao điểm của BD và CE.

a) Tứ giác ADKE là hình gì ? Vì sao ?

b) Chứng minh rằng AK là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

c) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MK vuông góc với DE.

119. Hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) tiếp xúc ngoài tại A. Gọi BC, DE là các tiếp tuyến chung của hai đường tròn (B và D thuộc đường tròn tâm O).

a) Chứng minh rằng BDEC là hình thang cân.

b) Tính diện tích hình thang cân đó.

120. Hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) tiếp xúc ngoài nhau. Gọi AB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, $A \in (O)$, $B \in (O')$.

a) Tính độ dài AB.

b) Cho R = 36cm, r = 9cm. Tính bán kính của đường tròn (I) tiếp xúc với đường thẳng AB và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O').

121. Trong một hình thang cân có hai đường tròn tiếp xúc ngoài nhau, mỗi đường tròn tiếp xúc với hai cạnh bên và tiếp xúc với một đáy của hình thang. Biết bán kính của các đường tròn đó bằng 2cm và 8cm. Tính diện tích hình thang.

122. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi (O') là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) và tiếp xúc với hai cạnh AB, AC theo thứ tự tại M, N.

a) Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng.

b) Tính bán kính của đường tròn (O') theo R.

123. Cho tam giác ABC vuông cân tại A nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi (O') là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) và tiếp xúc với hai cạnh AB, AC. Tính bán kính của đường tròn (O') theo R.

124. Cho đường tròn (O) đường kính AB, đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Các dây BC, BD của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O') theo thứ tự tại E, F. Gọi I là giao điểm của EF và AB. Chứng minh rằng I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

125. Cho ba đường tròn bán kính r tiếp xúc ngoài đôi một. Tính bán kính của đường tròn tiếp xúc với cả ba đường tròn đó.

126. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Vẽ về một phía của đường kính AB các tia tiếp tuyến Am, Bn. Gọi (I), (K) là các đường tròn tiếp xúc ngoài nhau và tiếp xúc ngoài đường tròn (O), trong đó đường tròn (I) tiếp xúc với tia Am, đường tròn (K) tiếp xúc với tia Bn. Gọi x và y là bán kính của các đường tròn (I) và (K). Chứng minh rằng $R = 2\sqrt{xy}$.

127. Cho nửa đường tròn tâm O với đường kính AB. Gọi OC là bán kính vuông góc với AB, d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại C. Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc trong với nửa đường tròn tâm O và tiếp xúc với đường kính AB. Chứng minh rằng điểm I cách đều đường thẳng d và điểm O.

128. Cho nửa đường tròn tâm O với đường kính AB = 2R. Gọi OE là bán kính vuông góc với AB. Vẽ đường tròn (C) có đường kính OE. Gọi (D) là đường tròn tiếp xúc ngoài với đường tròn (C), tiếp xúc trong với đường tròn (O) và tiếp xúc với đoạn thẳng OB. Tính bán kính của đường tròn (D).

129*. Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB, AC = 4cm. CB = 8cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AC, AB. Tính bán kính của đường tròn (I) tiếp xúc với các nửa đường tròn trên và tiếp xúc với đoạn thẳng AB.

130*. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 6cm, BC = 10cm. Tính bán kính của đường tròn (O') tiếp xúc với AB, AC và tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

131*. Cho hai đường tròn tâm O bán kính 9cm và tâm O' bán kính 3cm tiếp xúc ngoài nhau. Một đường thẳng bị hai đường tròn đó cắt tạo thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Tính độ dài của mỗi đoạn thẳng đó.

Hai đường tròn không giao nhau

132. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau, OO' = 65cm. Gọi AB là tiếp tuyến chung ngoài, CD là tiếp tuyến chung trong, A và C thuộc (O), B và D thuộc (O'). Tính bán kính của các đường tròn (O) và (O'), biết rằng AB = 63cm, CD = 25cm.

133. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB và tiếp tuyến chung trong EF ($A, E \in (O)$; $B, D \in (O')$).

a) Gọi M là giao điểm của AB và EF. Chứng minh rằng ΔAOM và $\Delta BMO'$ đồng dạng.

b) Chứng minh rằng AE vuông góc với BF.

c)* Gọi N là giao điểm của AE và BF. Chứng minh rằng ba điểm O, N, O' thẳng hàng.

134. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Qua O, kẻ các tia tiếp tuyến với đường tròn (O'), chúng cắt đường tròn (O) tại A và B. Qua O', kẻ các tia tiếp tuyến với đường tròn (O), chúng cắt đường tròn (O') ở C và D. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

135. Cho hai đường tròn đồng tâm O, có bán kính R và r (R > r). Dây BC của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại D và E. Gọi EA là đường kính của đường tròn nhỏ. Chứng minh rằng

$$DA^2 + DB^2 + DC^2 = 2(R^2 + r^2).$$

136. Hai dây AB, CD song song với nhau của đường tròn (O) là tiếp tuyến của đường tròn (O'), AB = 10cm, CD = 24cm. Biết đường kính của đường tròn (O') bằng 7cm, tính bán kính của đường tròn (O).

137. Cũng hỏi như bài 136, nếu AB = 6cm, CD = 8cm.

~ *Ví dụ :* 25.

Bài tập : 138 đến 140, 145, 146, 148, 150 đến 152, 159 đến 166, 179, 180.

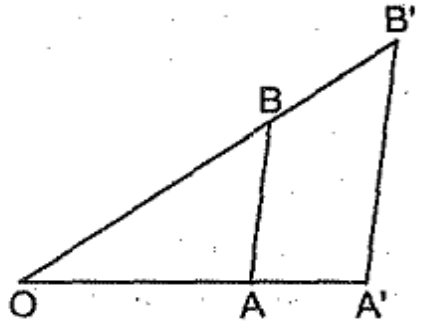
CHUYÊN ĐỀ

ĐƯỜNG TRÒN VÀ PHÉP VỊ TỰ

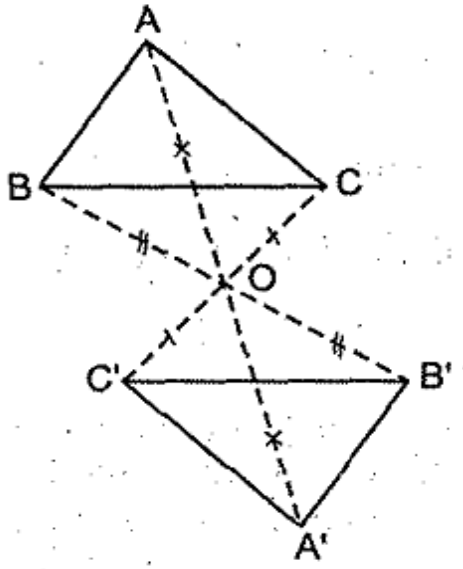
Cho điểm O trong mặt phẳng và một số $k \neq 0$. Phép vị tự tâm O tỉ số k là một quy tắc cho tương ứng mỗi điểm A của mặt phẳng với điểm A' sao cho $OA' = |k|OA$, trong đó A' thuộc tia OA nếu $k > 0$, A' thuộc tia đối của tia OA nếu $k < 0$.

Trên hình 41, điểm B là ảnh của điểm A trong phép vị tự tâm O tỉ số 2, điểm C là ảnh của điểm A trong phép vị tự tâm O tỉ số $-\frac{1}{2}$.

Hình 41



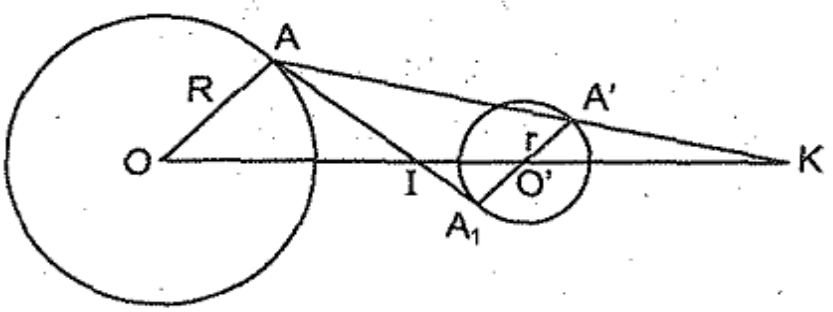
Hình 42



Hình 43

Trên hình 42, A'B' là ảnh của AB trong phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{3}{2}$. Trên hình 43, tam giác A'B'C' là ảnh của tam giác ABC trong phép vị tự tâm O tỉ số -1 (đó chính là phép đối xứng tâm O).

Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) (h.44).



Hình 44

Xét các bán kính OA, O'A' song song và "cùng chiều". Giả sử R > r. Gọi K là giao điểm của OO' và AA'. Ta có

$$\frac{KA'}{KA} = \frac{KO'}{KO} = \frac{r}{R}.$$

Do đó K là điểm cố định : K chia ngoài đoạn O'O theo tỉ số $\frac{r}{R}$. Ta có

$$KA' = \frac{r}{R}KA.$$

Đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) trong phép vị tự tâm K tỉ số $\frac{r}{R}$.

Xét các bán kính OA, $O'A_1$ song song và "ngược chiều".

Gọi I là giao điểm của OO' và AA_1. Ta có $\frac{IA_1}{IA} = \frac{IO'}{IO} = \frac{r}{R}$. Do đó I là điểm cố định : I chia trong đoạn O'O theo tỉ số $\frac{r}{R}$. Ta có $IA_1 = \frac{r}{R}IA$, A thuộc tia đối của tia IA. Đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) trong phép vị tự tâm I tỉ số $-\frac{r}{R}$.

Trong trường hợp hai đường tròn ở ngoài nhau hoặc tiếp xúc ngoài, điểm K nói trên là giao điểm của đường nối tâm với tiếp tuyến chung ngoài, điểm I nói trên là giao điểm của đường nối tâm với tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn.

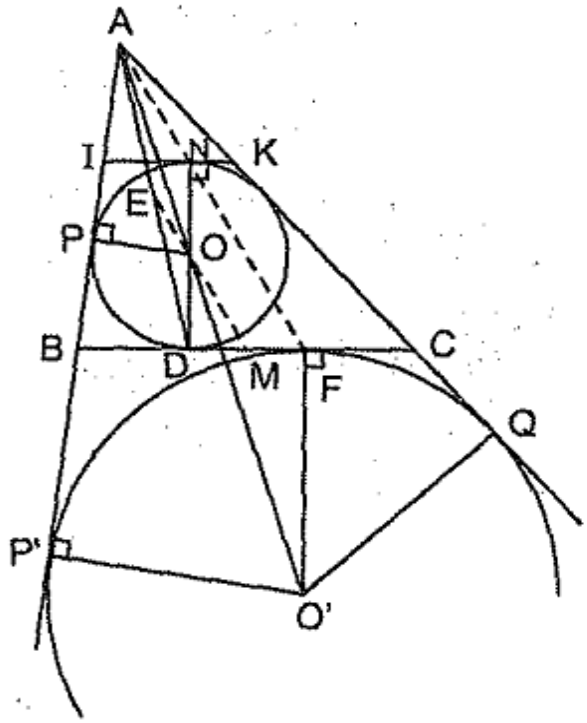
Mục này gồm các bài tập về *chứng minh* có liên quan đến phép vị tự. Các bài tập về *dựng hình*, xem chuyên đề cùng tên trong cuốn sách này.

Ví dụ 24*(9). Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC ở D. Gọi M, E theo thứ tự là trung điểm của BC, AD.

a) Gọi DN là đường kính của đường tròn (O), F là tiếp điểm trên BC của đường tròn (O') bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC. Chứng minh rằng ba điểm A, N, F thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng ba điểm E, O, M thẳng hàng.

Giải : (h.45)



Hình 45

a) Cách 1 (dùng phép vị tự). Qua N kẻ IK // BC. (O) là đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác AIK, N là tiếp điểm trên IK. (O') là đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC, F là tiếp điểm trên BC.

Tam giác ABC là ảnh của tam giác AIK trong một phép vị tự tâm A. Trong phép vị tự đó, (O') là ảnh của (O) nên F là ảnh của N.

Do đó A, N, F thẳng hàng.

Cách 2 (không dùng phép vị tự)

Ta đã có A, O, O' thẳng hàng. Gọi P, P' là tiếp điểm của (O), (O') với AB.

$\Delta AOP \backsim \Delta AO'P'$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AO}{AO'} = \frac{OP}{O'P'} \Rightarrow \frac{AO}{AO'} = \frac{ON}{O'F}$$

$\Rightarrow \Delta AON \backsim \Delta AO'F$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{OAN} = \widehat{O'AF} \Rightarrow$ A, N, F thẳng hàng.

b) Ta có BD = CF (Ví dụ 19) nên trung điểm M của BC cũng là trung điểm của DF.

Theo tính chất đường trung bình của tam giác, OM // NF, OE // NA, mà A, N, F thẳng hàng nên E, O, M thẳng hàng.

Bài tập

138(10). Cho hai đường tròn (I) và (K) có cùng bán kính r tiếp xúc trong với đường tròn (O ; R) theo thứ tự tại A và B. Gọi C là một điểm thuộc đường tròn (O), CA cắt đường tròn (I) tại điểm D, CB cắt đường tròn (K) tại điểm E. Chứng minh rằng DE song song với AB.

139(10). Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') tiếp xúc ngoài tại A (R > R'). Vẽ các bán kính OB và O'B' song song với nhau (B và B' thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OO'). Các đường thẳng BB' và OO' cắt nhau tại K.

a) Tính $\widehat{BAB'}$.

b) Tính OK theo R và R'.

c) Chứng minh rằng tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn trên cũng đi qua điểm K.

d) Khi các bán kính OB và O'B' di chuyển thì trọng tâm G của tam giác ABB' di chuyển trên đường nào ?

140(10). Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') cắt nhau tại A và B (R > R'). Tiếp tuyến chung ngoài CD cắt OO' ở K, C thuộc (O), D thuộc (O'). Gọi E là giao điểm thứ hai của AK và đường tròn (O'). Chứng minh rằng AC song song với ED.

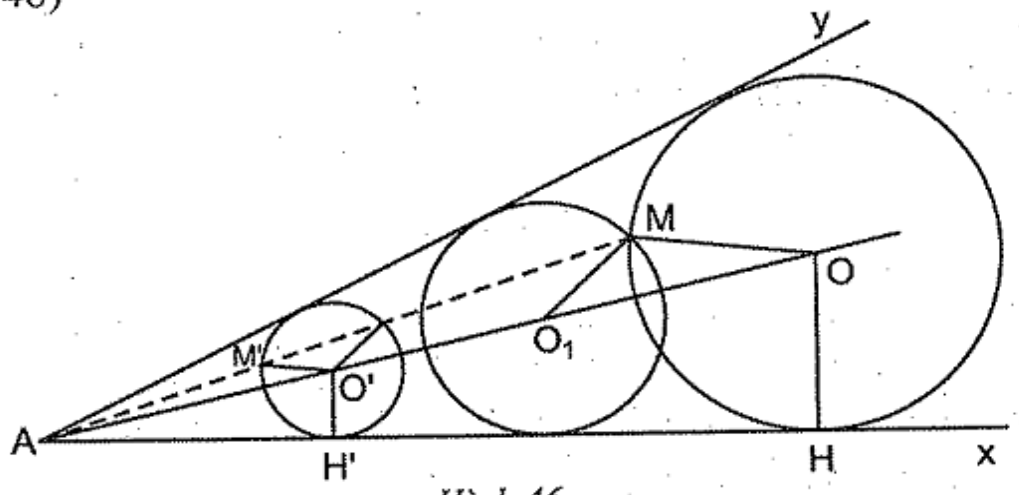
DỰNG HÌNH

Cách giải bài toán dựng hình đã được trình bày trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8 tập một*. Các kiến thức về đường tròn làm cho các bài toán dựng hình đa dạng và phong phú hơn. Sau đây là các nội dung cần chú ý.

I – VẬN DỤNG CÁC PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC, ĐỐI XỨNG TÂM, VỊ TỰ ĐỂ DỰNG HÌNH

Ví dụ 25(10). Dựng đường tròn đi qua một điểm cho trước và tiếp xúc với hai cạnh của một góc cho trước.

Giải : (h.46)



Hình 46

1. Phân tích. Giả sử đã dựng được đường tròn (O) đi qua điểm M cho trước và tiếp xúc với hai cạnh của góc xAy cho trước.

Tạm chưa xét đến điều kiện đường tròn đi qua M, ta dựng được đường tròn (O') bất kì tiếp xúc với Ax và Ay. Kẻ bán kính O'M' song song với OM (O'M' và OM thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AO). Kẻ O'H' ⊥ Ax, OH ⊥ Ax. Ta có

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{O'H'}{OH} = \frac{O'M'}{OM} \Rightarrow \Delta AO'M' \backsim \Delta AOM \text{ (c.g.c).}$$

Do đó $\widehat{O'AM'} = \widehat{OAM} \Rightarrow$ A, M', M thẳng hàng.

Từ đó suy ra cách dựng.

2. Cách dựng

– Dựng đường tròn (O') bất kì tiếp xúc với hai cạnh của góc A.

– Đường thẳng AM cắt (O') ở M'.

– Qua M kẻ đường thẳng song song với M'O', cắt AO' ở O.

– Dựng OH ⊥ Ax. Dựng đường tròn (O ; OH).

3. Chứng minh. Bạn đọc tự giải.

4. *Biện luận.* Đường thẳng AM cắt (O') ở hai điểm. Bài toán có hai nghiệm hình : đường tròn (O) và (O_1) trên hình 46.

Nhận xét : Trong Ví dụ 25, ta dựng đường tròn phụ (O') bất kì tiếp xúc với hai cạnh của góc A, đó là ảnh của đường tròn (O) phải dựng trong một phép vị tự tâm A.

II – DỰNG HÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ

1. Các bài toán dựng hình cơ bản

Cho các đoạn thẳng có độ dài a, b, c. Ta có thể :

– Dựng tổng hay hiệu của hai đoạn thẳng cho trước : Dựng x = a + b hay dựng x = a – b (a > b).

– Dựng một đoạn thẳng bằng m lần đoạn thẳng cho trước : Dựng x = ma (m là số nguyên dương cho trước).

– Chia một đoạn thẳng thành n phần bằng nhau : Dựng $x = \frac{a}{n}$ (n là số nguyên dương cho trước).

– Dựng một đoạn thẳng bằng $\frac{m}{n}$ lần đoạn thẳng cho trước : Dựng $x = \frac{m.a}{n}$ (m, n là các số nguyên dương cho trước).

– Dựng đoạn tỉ lệ thứ tư của ba đoạn thẳng cho trước : Dựng x sao cho a : b = c : x hay $x = \frac{b.c}{a}$.

– Dựng đoạn trung bình nhân của hai đoạn thẳng cho trước : Dựng $x = \sqrt{ab}$.

– Dựng đoạn thẳng $x = \sqrt{a^2 + b^2}$: Dựng cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng a và b.

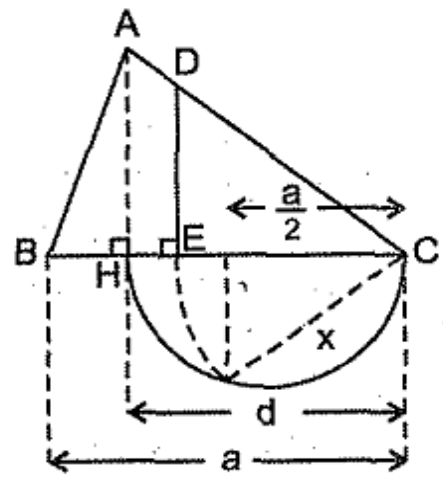
– Dựng đoạn thẳng $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ (a > b) : Dựng cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng a, cạnh góc vuông kia bằng b.

2. Ví dụ

Ví dụ 26(1). Cho tam giác ABC có B và C là các góc nhọn. Dựng đường thẳng vuông góc với BC chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Giải : (h.47)

Kẻ đường cao AH, giả sử HC ≥ HB. Gọi DE là đường thẳng phải dựng (D ∈ AC, E ∈ BC). Đặt BC = a, HC = d, CE = x.



Hình 47

Ta biểu thị x theo các độ dài đã biết a và d. Ta có :

$$S_{DEC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

$$S_{AHC} = \frac{d}{a} S_{ABC}$$

nên $$S_{DEC} : S_{AHC} = \frac{a}{2d}. \quad (1)$$

$\Delta DEC \backsim \Delta AHC$ do đó $S_{DEC} : S_{AHC} = \left(\frac{x}{d}\right)^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x^2}{d^2} = \frac{a}{2d} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a}{2}.d}$.

Ta chia đôi đoạn thẳng a, dựng đoạn x là trung bình nhân của $\frac{a}{2}$ và d. Ta xác định được điểm E. Cách dựng điểm E được thể hiện trên hình 47.

3. Giải bài toán dựng hình bằng phương pháp đại số

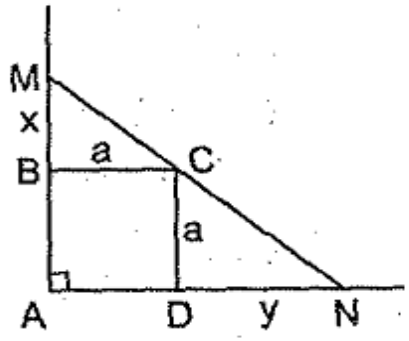
Trong ví dụ trên, ta dựng hình bằng phương pháp đại số. Để giải bài toán dựng hình bằng phương pháp này, ta làm như sau :

– Giả sử đã dựng được một hình thoả mãn các điều kiện của đề bài, tìm xem trong hình ấy những đoạn thẳng nào đã biết độ dài (a, b, c...). Gọi độ dài của một đoạn thẳng chưa biết cần xác định là x. Dùng phương trình thiết lập sự tương quan giữa x với a, b, c ...Giải phương trình này ta tìm được công thức biểu thị x theo a, b, c..

– Nếu công thức biểu thị x theo a, b, c... có thể đưa về các bài toán dựng hình cơ bản nêu trong mục 1 thì ta dựng được độ dài x, từ đó dựng được toàn bộ hình phải dựng.

Ví dụ 27*(1). Cho hình vuông ABCD. Dựng đường thẳng đi qua C cắt các tia AB, AD theo thứ tự ở M, N sao cho MN có độ dài bằng k cho trước.

Giải : (h.48)



Hình 48

Đặt BM = x, DN = y. Gọi cạnh của hình vuông bằng a. Ta sẽ xác định các độ dài x và y.

Xét tam giác AMN vuông :

$$MN^2 = AM^2 + AN^2$$

$$\Rightarrow k^2 = (a + x)^2 + (a + y)^2 = 2a^2 + 2a(x + y) + x^2 + y^2$$

$$= 2a^2 + 2a(x + y) + (x + y)^2 - 2xy.$$

Ta lại có $\Delta MBC \backsim \Delta CDN$ nên $\frac{x}{a} = \frac{a}{y}$ hay $xy = a^2$.

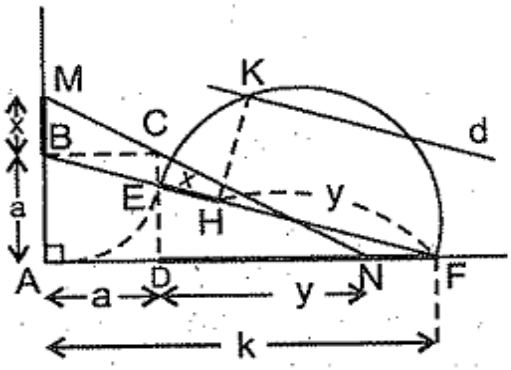
Do đó $\quad k^2 = 2a(x + y) + (x + y)^2 = 2as + s^2$ (với $s = x + y$).

Suy ra $\quad k^2 + a^2 = a^2 + 2as + s^2 = (a + s)^2$.

Như vậy a + s là cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng a và k. Dựng được độ dài a + s, do đó dựng được độ dài s(*).

(*) *Cách dựng khác :* Độ dài s là nghiệm dương của phương trình $s^2 + 2as - k^2 = 0$, do đó $s = -a + \sqrt{a^2 + k^2}$. Dựng $\sqrt{a^2 + k^2}$ là cạnh huyền của tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng a và k.

Bây giờ ta dựng các độ dài x và y. Ta có $x + y = s$, $xy = a^2$ (a và s là các độ dài đã biết) nên có thể dựng x và y như sau (h.49) :



Hình 49

– Dựng tam giác ABF vuông tại A có AB = a, AF = k.

– Dựng E trên cạnh BF sao cho BE = a.

– Dựng đường tròn có đường kính EF.

– Dựng đường thẳng d // EF và cách EF một khoảng bằng a, cắt đường tròn ở K.

– Dựng KH ⊥ EF. Ta có EH = x, HF = y(*). Cách dựng các độ dài s, x, y được thể hiện trên hình 49.

Biện luận. Bài toán có nghiệm hình khi và chỉ khi

$$s \geq 2a \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + k^2} - a \geq 2a \Leftrightarrow k \geq 2a\sqrt{2}.$$

Do $a\sqrt{2} = AC$ nên :

– Nếu $k > 2AC$ thì bài toán có hai nghiệm hình.

– Nếu $k = 2AC$ thì bài toán có một nghiệm hình.

– Nếu $k < 2AC$ thì bài toán không có nghiệm hình.

Bài tập

141(4). Cho đường tròn (O) với các bán kính OA, OB và O, A, B không thẳng hàng. Dựng dây CD sao cho các bán kính OA, OB chia dây CD thành ba phần bằng nhau.

142(5). Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm C thuộc đường kính ấy. Dựng dây DE vuông góc với AB sao cho AD vuông góc với EC.

143(5). Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B nằm bên ngoài đường tròn. Dựng các đường thẳng theo thứ tự đi qua A và đi qua B song song với nhau và cắt đường tròn (O) tạo thành hai dây bằng nhau.

(*) *Cách dựng khác :* Các độ dài x và y là nghiệm của phương trình $x^2 - sx + a^2 = 0$, do đó x (hoặc y) bằng $\frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4a^2}}{2}$. Dựng $\sqrt{s^2 - 4a^2}$ là cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng s và cạnh góc vuông kia bằng 2a.

144(7). Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không giao với đường tròn. Dựng điểm M thuộc d sao cho nếu vẽ các tiếp tuyến MC, MD với đường tròn thì $\widehat{COD} = 130^o$.

145(10). Qua điểm M nằm bên trong đường tròn (O) và không trùng O, dựng dây AB sao cho MA – MB = a (a là độ dài cho trước).

146(10). Cho hai đường tròn (O), (O') bằng nhau, tiếp xúc ngoài tại B, có các đường kính theo thứ tự là AB, BC. Dựng đường thẳng đi qua A cắt (O) ở D, cắt (O') ở E và F sao cho E là trung điểm của DF.

147(4). Dựng tam giác vuông biết độ dài hai đường trung tuyến ứng với các cạnh góc vuông.

148(10). Dựng tam giác ABC biết $\widehat{A} = \alpha$, đường cao AH = h, bán kính đường tròn nội tiếp bằng r.

149(9). Dựng tam giác ABC biết AC – AB = d, đường cao AH = h, bán kính đường tròn nội tiếp bằng r.

150(10). Cho hai điểm O và O' nằm về một phía của đường thẳng d. Dựng các đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài sao cho tiếp tuyến chung ngoài song song với d.

151*(10). Cho đường tròn (I) và đường thẳng m không giao nhau, điểm A thuộc đường tròn. Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (I) tại A và tiếp xúc với đường thẳng m.

152*(10). Cho đường tròn (I) và đường thẳng m không giao nhau, điểm C thuộc đường thẳng m. Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng m tại C và tiếp xúc với đường tròn (I).

153(5). Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau và điểm A nằm ngoài hai đường thẳng ấy. Dựng đường tròn tâm A cắt các đường thẳng a, b tạo thành hai dây có tổng bằng 2k.

154(5). Cho góc xOy và điểm M nằm trong góc đó. Dựng đường thẳng đi qua M cắt hai cạnh của góc ở A và B sao cho OA + OB = k.

155*(8). Dựng tam giác cân biết độ dài của đoạn nối hai tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh bên và đường cao h ứng với cạnh bên.

156*(4). Cho ba điểm H, D, M thẳng hàng theo thứ tự ấy, trong đó HD = 2, DM = 3. Dựng tam giác ABC vuông tại A nhận HA là đường cao, AD là đường phân giác, AM là đường trung tuyến.

157*(8). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, M là trung điểm của BC, D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp trên cạnh huyền.

a) Gọi E là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác AHM. Chứng minh rằng MD = ME bằng cách tính các tỉ số $\frac{ME}{MF}$ và $\frac{MD}{MF}$ theo các cạnh của tam giác ABC.

b) Suy ra cách dựng tam giác vuông ABC biết ba điểm H, D, M theo thứ tự thuộc một đường thẳng.

Vận dụng các phép đối xứng trục, đối xứng tâm, vị tự để dựng hình

158(7). Cho đường thẳng xy, điểm A và đường tròn (O) nằm cùng phía đối với xy. Dựng điểm M thuộc xy sao cho nếu vẽ tiếp tuyến MB với đường tròn (O) thì $\widehat{AMx} = \widehat{BMy}$.

159(10). Cho đường thẳng xy và hai đường tròn (O), (O') nằm về hai phía của xy. Dựng điểm A trên xy sao cho các tiếp tuyến kẻ từ A đến hai đường tròn nhận xy là đường thẳng chứa tia phân giác.

160(10). Cho đường thẳng xy và hai đường tròn (O), (O') nằm về hai phía của xy. Dựng hình vuông ABCD có $A \in (O)$, $C \in (O')$, B và D nằm trên xy.

161(10). Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Dựng đường thẳng đi qua A bị hai đường tròn cắt thành hai dây có hiệu bằng a.

162(10). Cho hai đường tròn (O), (O') và một đường thẳng d. Dựng đường thẳng song song với d và bị hai đường tròn cắt thành hai dây bằng nhau.

163(10). Cho hai đường tròn (O), (O') và một đường thẳng d. Dựng đường thẳng song song với d và bị hai đường tròn cắt thành hai dây có tổng bằng a.

164(10). Cho hai đường tròn (O), (O') và một đường thẳng d. Dựng đường thẳng song song với d và bị hai đường tròn cắt thành hai dây có hiệu bằng a.

165(10). Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên trong đường tròn và không trùng O. Dựng dây BC đi qua A sao cho AB = 2AC.

166(10). Cho hai đường tròn tâm O, điểm A thuộc đường tròn lớn. Dựng dây AB của đường tròn lớn sao cho đường tròn nhỏ chia AB thành ba phần bằng nhau.

Dựng hình bằng phương pháp đại số

167(1). Cho đoạn thẳng AB. Dựng điểm H thuộc đoạn thẳng ấy sao cho $AH.BH = a^2$ (a là một độ dài cho trước).

168 (1). Dựng hình vuông có diện tích bằng diện tích một hình thang cho trước.

169(1). Dựng tam giác đều có diện tích bằng diện tích một tam giác cho trước

170(1). Dựng tam giác ABC biết các cạnh AB = c, AC = b, đường phân giác AD = d.

171(1). Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng song song với BC chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

172(1). Cho một hình thang. Dựng đường thẳng song song với hai đáy chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau.

173 (1). Cho hình thang ABCD (AB // CD). Dựng đường thẳng EF song song với hai đáy ($E \in AD$, $F \in BC$) sao cho BE song song với DF.

174*(6). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Gọi BB' là tiếp tuyến của nửa đường tròn. Dựng điểm M nằm trên nửa đường tròn sao cho MA bằng khoảng cách từ M đến BB'.

TOÁN CỰC TRỊ

Cách giải các bài toán cực trị đã được đề cập đến trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8* tập hai. Sau đây là các nội dung cần lưu ý.

1. Vận dụng bất đẳng thức để giải toán cực trị

Ngoài quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu, bất đẳng thức tam giác, các bất đẳng thức đại số $x^2 \geq 0$, $-x^2 \leq 0$, $(x + y)^2 \geq 4xy$... thuộc chương trình Lớp 8 đã học nêu trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 8* tập hai, cần nắm vững các bất đẳng thức khác thuộc chương trình Lớp 9 :

– Quan hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây, quan hệ giữa dây và đường kính, quan hệ giữa dây và cung trong đường tròn ;

– Bất đẳng thức Cô-si với hai số a và b không âm :

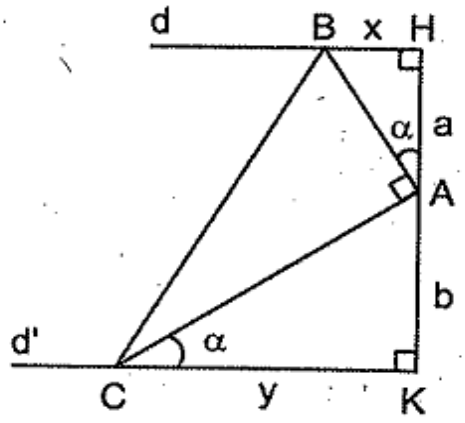
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ ;$$

– Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki với các số m, n, x, y :

$$(m^2 + n^2)(x^2 + y^2) \geq (mx + ny)^2.$$

Ví dụ 28*(3). Cho điểm A nằm bên trong dải tạo bởi hai đường thẳng song song d và d'. Dựng điểm B thuộc d, điểm C thuộc d' sao cho tam giác ABC vuông tại A và có diện tích nhỏ nhất.

Giải : (h.50)



Hình 50

Cách 1. Gọi H, K là hình chiếu của A trên d, d'.

Đặt HB = x, KC = y. Cần tìm x, y để S_{ABC} nhỏ nhất.

Ta có $2S_{ABC} = AB.AC$,

AB.AC nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB^2.AC^2$ nhỏ nhất.

Ta có $AB^2.AC^2 = (a^2 + x^2)(b^2 + y^2)$. (1)

Ta lại có

$$(a^2 + x^2)(b^2 + y^2) \geq (ab + xy)^2 \quad (2)$$

(Chứng minh : hiệu hai vế bằng $(ay - bx)^2 \geq 0$).

Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow ay = bx$. (3)

Lại chú ý rằng $\Delta ABH \backsim \Delta CAK$ nên

$$\frac{AH}{CK} = \frac{BH}{AK} \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{x}{b} \Rightarrow ab = xy. \quad (4)$$

Từ (1), (2) và (4) suy ra $AB^2.AC^2 \geq 4a^2b^2$. Xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi xảy ra (3) và (4), tức là x = a. Khi đó y = b.

Cách 2. Đặt $\widehat{HAB} = \widehat{ACK} = \alpha$. Ta có $AB = \frac{a}{\cos\alpha}$, $AC = \frac{b}{\sin\alpha}$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}.\frac{a}{\cos\alpha}.\frac{b}{\sin\alpha}$. Như vậy S_{ABC} nhỏ nhất $\Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha$ lớn nhất.

Ta có $2\sin\alpha\cos\alpha \leq \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Do đó :

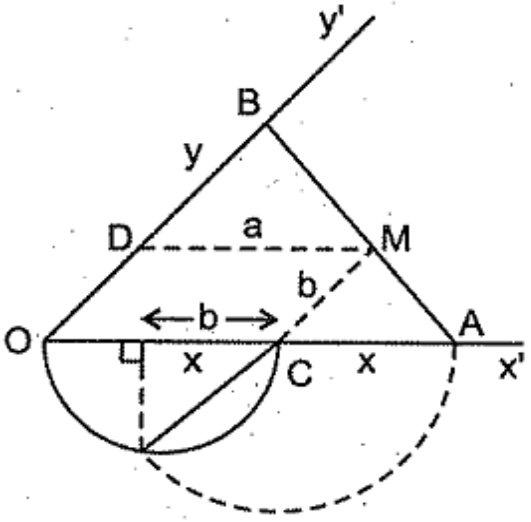
$$\max(2\sin\alpha\cos\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^o.$$

2. Chọn biến trong bài toán cực trị

Trong các bài toán cực trị giải bằng phương pháp đại số, ta thường chọn một đại lượng làm biến (độ dài đoạn thẳng, số đo góc, tỉ số lượng giác của một góc...). Cũng có trường hợp nên chọn hai đại lượng thay đổi làm biến, đồng thời chú ý đến các đại lượng không đổi để chọn biến cho hợp lí.

Ví dụ 29*(1). Cho góc x'Oy' và điểm M nằm trong góc. Dựng đường thẳng đi qua M cắt Ox', Oy' theo thứ tự ở A, B sao cho tổng OA + OB có giá trị nhỏ nhất.

Giải : (h.51). Qua M vẽ MD // Ox', MC // Oy' (D ∈ Oy', C ∈ Ox'). Đặt OC = a, OD = b (a, b là hằng số). Đặt CA = x, BD = y.



Hình 51

ΔBDM ∽ ΔMCA (g.g) nên

$$\frac{BD}{MC} = \frac{DM}{CA} \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{a}{x} \Rightarrow xy = ab.$$

OA + OB = a + x + b + y = (a + b) + (x + y).

Do đó

OA + OB nhỏ nhất ⇔ x + y nhỏ nhất.

Do x và y là các số dương có tích không đổi nên x + y nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y. Khi đó x là trung bình nhân của a và b.

Cách dựng độ dài x được thể hiện trên hình 51.

Chú ý : Một số bài toán có nội dung gần giống nhau :

1. Qua điểm M nằm trong góc xOy cho trước, dựng một đường thẳng cắt Ox và Oy ở A và B sao cho :

a) OA + OB = k (Bài tập 154) ;

b) OA + OB nhỏ nhất (Ví dụ 29) ;

c) Diện tích ΔAOB nhỏ nhất (Ví dụ 59 *Nâng cao và phát triển Toán 8 tập hai*) ;

d) Chu vi ΔAOB bằng 2p (Bài tập 184a) ;

e) Chu vi ΔAOB nhỏ nhất (Bài tập 185).

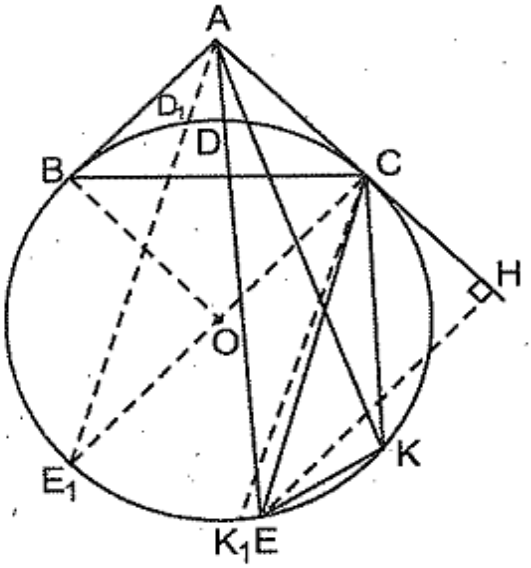
2. Qua điểm M thuộc tia phân giác của góc vuông xOy, dựng một đường thẳng cắt Ox và Oy ở A và B sao cho :

a) AB = k (Ví dụ 27) ;

b) AB nhỏ nhất (Bài tập 190) ;

c) AB nhỏ nhất, bỏ điều kiện góc vuông (Bài tập 191).

Ví dụ 30(6). Cho tám giác ABC cân tại A. Đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại B, tiếp xúc với AC tại C. Qua A vẽ cát tuyến ADE bất kì. Vẽ dây CK song song với DE. Hãy xác định vị trí của cát tuyến ADE để tam giác AKE có diện tích lớn nhất.



Hình 52

Giải : (h.52) Gọi R là bán kính của đường tròn (O). Kẻ EH ⊥ AC. Ta có CK // DE nên

$$S_{AKE} = S_{ACE} = \frac{1}{2}AC.EH$$

$$\leq \frac{1}{2}AC.EC \leq \frac{1}{2}AC.2R = AC.R.$$

Do đó max. $S_{AKE} = AC.R \Leftrightarrow$ EC là đường kính của đường tròn (O).

Cát tuyến ADE ở vị trí AD_1E_1 trên hình 52 thì tam giác AKE có diện tích lớn nhất (đó là tam giác AK_1E_1 trên hình 52).

Bài tập

175(4). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Dựng điểm C thuộc nửa đường tròn sao cho tam giác CEF có diện tích lớn nhất, trong đó CH là đường cao của tam giác ABC, CE và CF là các đường phân giác của các tam giác CHA và CHB.

176(5). Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên trong đường tròn và không trùng O. Dựng điểm B thuộc đường tròn sao cho góc OBA có số đo lớn nhất.

177(6). Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Dựng đường thẳng đi qua A, cắt đường tròn ở B và C sao cho tổng AB + AC có giá trị lớn nhất.

178(7). Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không giao nhau. Dựng điểm M thuộc đường thẳng d sao cho nếu kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn thì AB có độ dài nhỏ nhất.

179 (10). Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Qua A, dựng hai tia vuông góc với nhau sao cho chúng cắt các đường tròn (O) và (O') theo thứ tự ở B và C tạo thành tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

180 (10). Cho đoạn thẳng AB, các tia Ax và By vuông góc với AB và nằm về một phía của AB. Dựng các đường tròn (I) và (K) tiếp xúc ngoài với nhau, tiếp xúc với đoạn AB, đường tròn (I) tiếp xúc với tia Ax, đường tròn (K) tiếp xúc với tia By sao cho tứ giác CIKD có diện tích lớn nhất (C, D theo thứ tự là tiếp điểm của các đường tròn (I), (K) với AB).

181(7). Cho góc xAy, đường tròn (O) nằm trong góc ấy. Dựng điểm M thuộc đường tròn sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai cạnh của góc có giá trị nhỏ nhất.

182*(7). Cho đường tròn (O) bán kính 2 và đường thẳng d đi qua O. Dựng điểm A nằm bên ngoài đường tròn sao cho các tiếp tuyến kẻ từ A với đường tròn cắt d tại B, C tạo thành tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất.

183*(9). Cho góc xOy, đường tròn (I) tiếp xúc với hai cạnh của góc tại A và B. Dựng tiếp tuyến với cung nhỏ AB của đường tròn (I) cắt hai cạnh của góc tại C và D sao cho :

a) CD có độ dài nhỏ nhất ;

b) Tam giác OCD có diện tích lớn nhất.

184(9). a) Cho góc xOy và điểm M nằm bên trong góc đó. Dựng đường thẳng đi qua M cắt hai cạnh của góc ở A và B sao cho chu vi tam giác OAB bằng 2p.

b*) Cho góc xOy. Dựng các điểm C, D theo thứ tự nằm trên Ox, Oy sao cho chu vi tam giác OCD bằng 2p cho trước và tam giác OCD có diện tích lớn nhất.

185*(9). Cho góc xOy và một điểm M nằm bên trong góc đó. Dựng đường thẳng đi qua M cắt Ox, Oy ở A, B sao cho tam giác OAB có chu vi nhỏ nhất.

186(1). Cho đoạn thẳng AD và trung điểm H của nó. Dựng tam giác ABC nhận AD là đường cao, H là trực tâm sao cho BC có độ dài nhỏ nhất.

187(7). Cho đường tròn (O). Dựng điểm A nằm bên ngoài đường tròn sao cho đường vuông góc với OA tại O tạo thành với các tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ A một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

188(1). Chứng minh rằng trong các tam giác có cùng chu vi, tam giác đều có diện tích lớn nhất.

189(1). Cho hình vuông ABCD có cạnh a. Các điểm M, N theo thứ tự chuyển động trên các cạnh BC, CD sao cho $\widehat{MAN} = 45^o$.

a) Chứng minh rằng khoảng cách từ A đến MN và chu vi tam giác CMN không đổi.

b) Dựng các điểm M, N để MN có độ dài nhỏ nhất.

c) Chứng minh rằng khi MN có độ dài nhỏ nhất thì tam giác CMN có diện tích lớn nhất.

190*(1). Cho hình vuông ABCD. Dựng đường thẳng đi qua C cắt các tia AB, AD tại hai điểm M, N sao cho đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

191*(1). Cho điểm C thuộc tia phân giác của góc A. Dựng đường thẳng đi qua C cắt các cạnh của góc A tại hai điểm M, N sao cho đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

192*(3). a) Chứng minh rằng trong các tam giác ABC có diện tích S và có số đo góc A không đổi, tam giác có cạnh BC nhỏ nhất là tam giác cân tại A.

b) Cho tam giác ABC. Dựng điểm M thuộc tia AB, điểm N thuộc tia AC sao cho $S_{AMN} = \frac{1}{2}.S_{ABC}$ và MN có độ dài nhỏ nhất.

193*(4). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính MN. Dựng hình chữ nhật ABCD nội tiếp nửa đường tròn (A và D thuộc MN, B và C thuộc nửa đường tròn) sao cho hình chữ nhật đó :

a) Có diện tích lớn nhất ;

b) Có chu vi lớn nhất.

Bài đọc thêm

TỈ SỐ VÀNG

Trước hết ta xét bài toán dựng hình bằng phương pháp đại số sau đây :

Cho một đoạn thẳng có độ dài a, dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho x bằng trung bình nhân của đoạn thẳng đã cho a và phần còn lại a – x.

Giải : Ta phải có

$$x^2 = a(a - x) \Leftrightarrow x^2 + ax = a^2 \Leftrightarrow x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Do đó x > 0 nên $x = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$.

Cách dựng được thể hiện trên hình 53a :

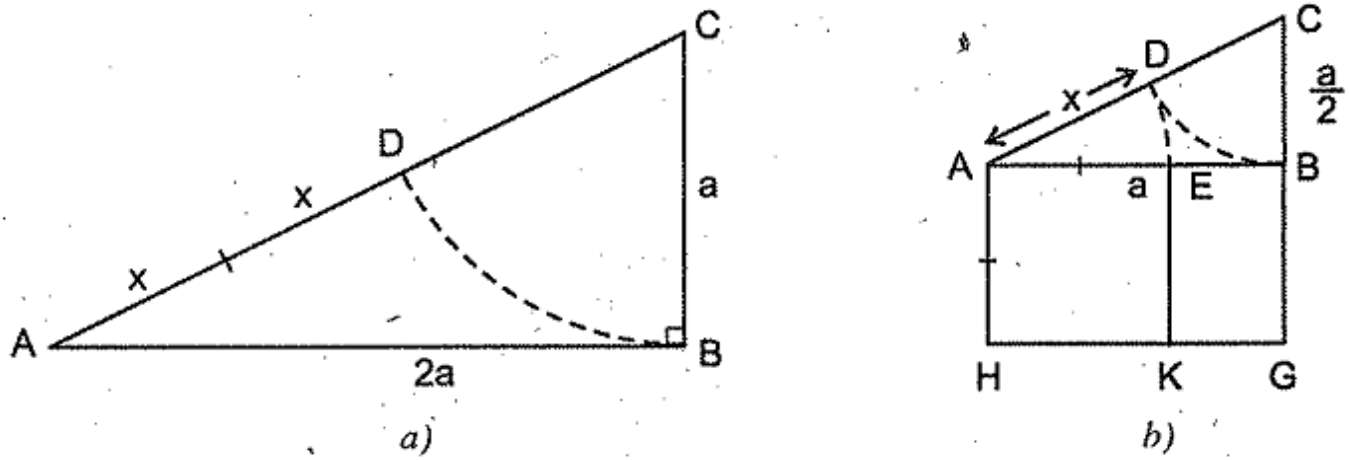
– Dựng tam giác ABC vuông tại B có AB = 2a, BC = a. Thế thì AC = $a\sqrt{5}$.

– Trên đoạn CA lấy điểm D sao cho CD = CB. Ta có AD = $a\sqrt{5} - a$.

– Chia đôi đoạn thẳng AD, ta được đoạn thẳng có độ dài x.

Ta có thể cải tiến cách dựng trên một chút để không phải chia đôi đoạn thẳng AD (h.53b).

– Dựng tam giác ABC vuông tại B có AB = a, BC = $\frac{a}{2}$.

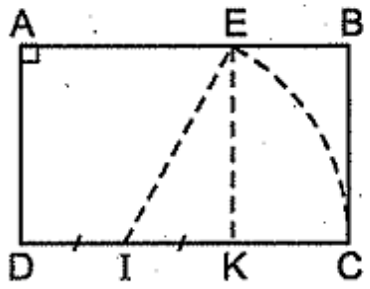


Hình 53

– Trên đoạn CA lấy điểm D sao cho CD = CB, ta được AD là đoạn thẳng có độ dài x phải dựng.

Nếu lấy điểm E trên đoạn thẳng AB sao cho AE = AD thì điểm E chia đoạn thẳng AB thành hai đoạn thẳng AE và EB, trong đó AE là trung bình nhân của AB và EB. Phép chia một đoạn thẳng thành hai đoạn thẳng, trong đó đoạn lớn bằng trung bình nhân của đoạn thẳng đã cho và đoạn nhỏ được danh hoạ I-ta-li-a là Lê-ô-nac-đô đa Vin-xi (1452 – 1519) gọi là *phép chia vàng*. Tỉ số $\frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$ được gọi là *tỉ số vàng*.

Hình chữ nhật ABGH, trong đó AH = AE (h.53b) gọi là *hình chữ nhật vàng*. Đương nhiên hình chữ nhật BEKG cũng là hình chữ nhật vàng. Một cách dựng hình chữ nhật vàng được thực hiện như ở hình 54 : Dựng hình vuông AEKD ; dựng cung tròn với tâm là trung điểm I của DK và bán kính bằng IE, cắt DK ở C ; hình chữ nhật ABCD là hình chữ nhật vàng.



Hình 54

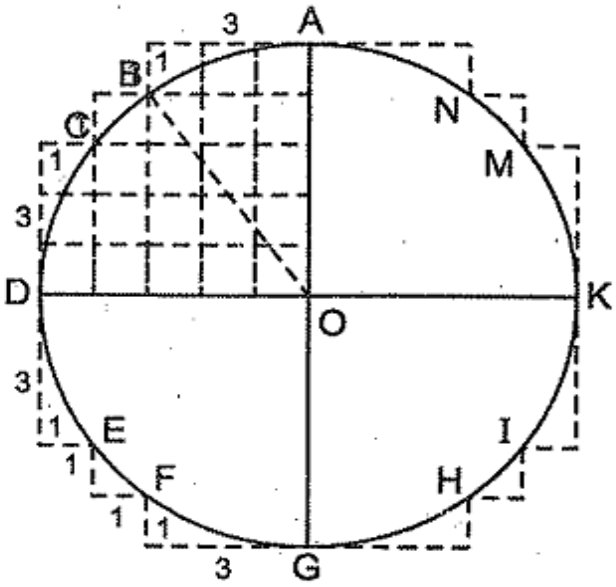
Người ta coi hình chữ nhật có tỉ số hai cạnh xấp xỉ 0,62 : 1 (hoặc 1 : 1,62) là hình chữ nhật có kích thước hài hoà, cân đối nhất. Ta cũng gặp hình chữ nhật vàng và tỉ số vàng ở kích thước và cách bố trí trong những bức tranh và công trình kiến trúc nổi tiếng.

Một điều đáng chú ý là khi đo tỉ số giữa chiều ngang với chiều dài, giữa chiều rộng với chiều cao của các cấu trúc ở Ngọ Môn thuộc kinh thành Huế được xây dựng từ đầu thế kỉ XX, người ta đã phát hiện ra rằng những hiệp thợ tài giỏi của nước ta cũng đã biết chọn "tỉ số vàng".

Nhà toán học Đức Kê-ple (1571 – 1630) đã nói : "Định lí Py-ta-go và tỉ số vàng là hai kho báu của hình học".

CÂU THẦN CHÚ "BA MỘT – MỘT MỘT – MỘT BA"

Có những lúc ta cần vẽ đường tròn mà không có compa trong tay. Xin mách các bạn một cách vẽ đường tròn khá "tròn" trên giấy có dòng kẻ ô vuông.



Hình 55

Bạn chỉ cần nhớ sáu con số kiểu như số điện thoại 31 – 11 –13. Nào, chúng ta cùng bắt đầu : Điểm đầu tiên của đường tròn là điểm A (h.55).

Điểm thứ hai là điểm B có vị trí : lùi sang trái 3 ô và xuống dưới 1 ô. Đưa bút vẽ một đường cong từ A đến B.

Điểm thứ ba là điểm C có vị trí : lùi sang trái 1 ô và xuống dưới 1 ô. Đưa bút vẽ một đường cong từ B đến C.

Điểm thứ tư là điểm D có vị trí : lùi sang trái 1 ô và xuống dưới 3 ô. Đưa bút vẽ một đường cong từ C đến D.

Ta đã vẽ được cung một phần tư đường tròn. Lặp lại "câu thần chú" trên : *ba một – một một – một ba*, chỉ có điều khác : thay cho *sang trái* và *xuống dưới* là *xuống dưới* và *sang phải*, ta vẽ được cung phần tư thứ hai DG của đường tròn.

Cứ tiếp tục như vậy, bạn dễ dàng vẽ được cả đường tròn khá chính xác.

Bây giờ ta chứng minh rằng các điểm A, B, C, D nói trên thuộc cùng một đường tròn tâm O.

Thật vậy, OA = 5, OD = 5, OB là cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 3 và 4 nên OB = 5, tương tự OC = 5. Đúng là các điểm B, C, D và do đó các điểm E, F, G, H, I, K, M, N thuộc đường tròn (O ; OA).

DÙNG THƯỚC VÀ COMPA ĐỂ CHIA ĐƯỜNG TRÒN THÀNH NĂM PHẦN BẰNG NHAU

Dùng thước và compa, ta có thể chia đường tròn thành năm phần bằng nhau như sau :

Cho đường tròn (O). Dựng đường kính BC và bán kính OA vuông góc với BC. Dựng trung điểm I của OB. Đường tròn (I ; IA) cắt OC ở E. Dựng liên tiếp các cây bằng AE (h.56a).

Ta sẽ chứng minh rằng với cách dựng trên thì đường tròn (O) được chia thành năm phần bằng nhau.

Gọi R là bán kính của đường tròn (O). Ta có $OI = \frac{R}{2}$, dễ dàng tính được

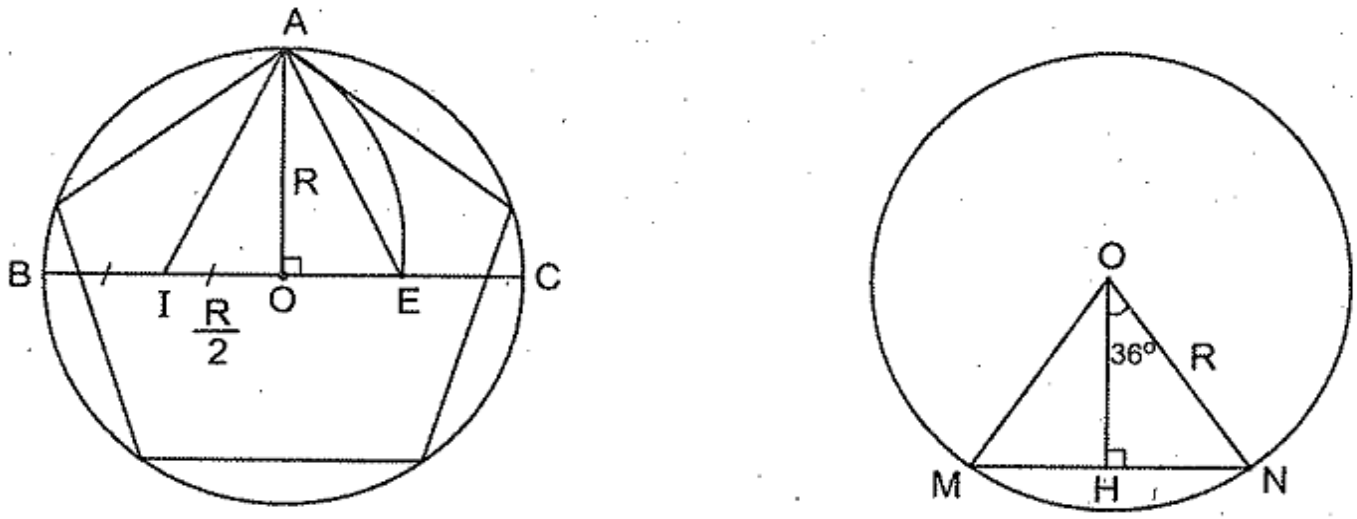
$$IA = \frac{R\sqrt{5}}{2},$$

do đó $$OE = IE - OI = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1), \text{ suy ra } OE^2 = \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}).$$

Xét tam giác AOE vuông tại O, ta có

$$AE^2 = OA^2 + OE^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}),$$

nên $$AE = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad (1)$$



a) *b)*

Hình 56

Xét hình 56b, trong đó $\overset{\frown}{MN}$ là cung $\frac{1}{5}$ đường tròn (O ; R), ta có

$$\widehat{MON} = 360^o : 5 = 72^o.$$

Kẻ OH ⊥ MN thì $\widehat{HON} = 36^o$ và MN = 2HN = $2R\sin 36^o$.

Theo Bài tập 40, ta có $\cos 36^o = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ nên

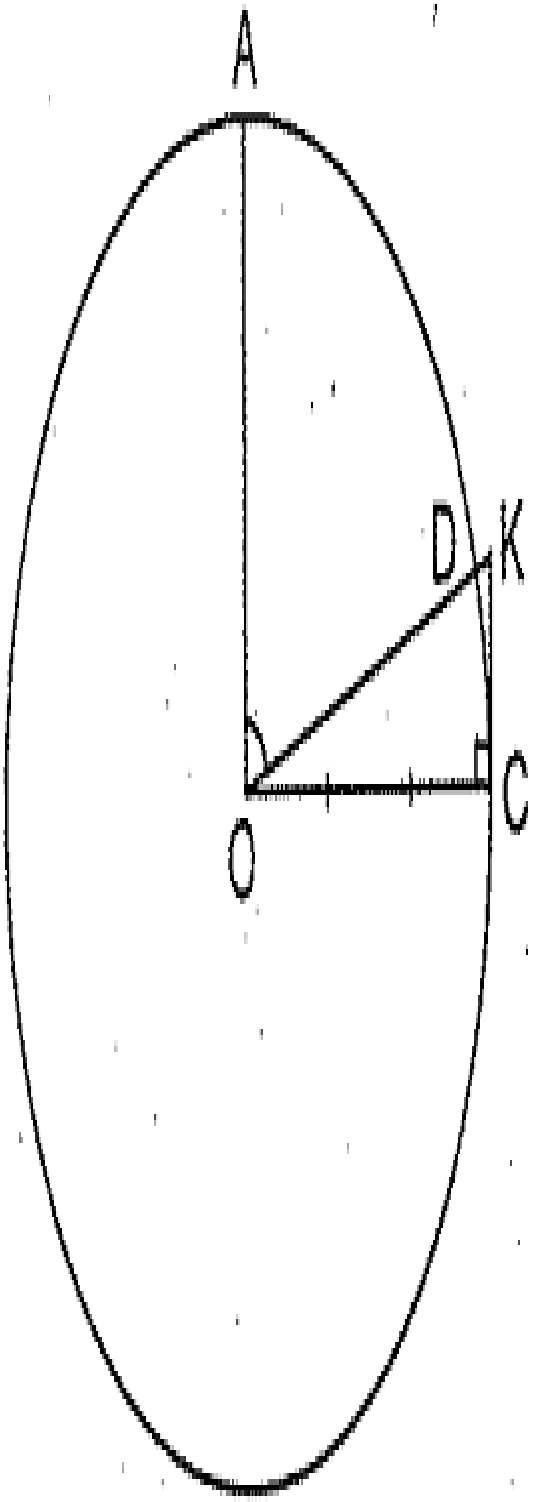
$$\sin^2 36^o = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{16 - (6 + 2\sqrt{5})}{16} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16},$$

suy ra $$\sin 36^o = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Do đó $$MN = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra AE = MN. Cách dựng được chứng minh.

Ta còn có thể chia đường tròn thành năm phần bằng nhau bằng cách vẽ gần đúng. Ta thấy cung $\frac{1}{5}$ đường tròn bằng 72°, mà $tg72^o \approx 3,078 \approx 3$. Do đó có thể



Hình 57

dựng góc AOK xấp xỉ 72^0 bằng cách vẽ một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 1 và 3.

Cách vẽ được thể hiện trên hình 57, trong đó tam giác OCK vuông tại C, OC = 3CK. Do tgK = 3 nên $\hat{K} \approx 72^0$.

Kẻ bán kính OA vuông góc với OC (A và K nằm cùng phía đối với OC). Dễ thấy $\widehat{AOK} = \hat{K} \approx 72^0$.

Gọi D là giao điểm của cạnh OK với đường tròn (O) thì cung AD xấp xỉ bằng cung $\frac{1}{5}$ đường tròn.

LỜI GIẢI, CHỈ DẪN HOẶC ĐÁP SỐ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I – CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA

§1. Ôn tập kiến thức Đại số 8

1. a) $x < -3$ hoặc $x > 7$; b) $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$;

c) Mọi x ; d) Vô nghiệm.

§2. Căn bậc hai và số vô tỉ

2. a) Giả sử $\sqrt{1+\sqrt{2}} = m$ (m là số hữu tỉ) thì $\sqrt{2} = m^2 - 1$ nên $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, vô lí.

b) Giả sử $m + \dfrac{\sqrt{3}}{n} = a$ (a là số hữu tỉ) thì $\dfrac{\sqrt{3}}{n} = a - m \Rightarrow \sqrt{3} = n(a-m)$

$\Rightarrow \sqrt{3}$ là số hữu tỉ, vô lí.

3. a) Có thể. b, c) Không thể.

4. a) $(2\sqrt{3})^2 = 4.3 = 12$; $(3\sqrt{2})^2 = 9.2 = 18$.

$(2\sqrt{3})^2 < (3\sqrt{2})^2$ nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

b) $6\sqrt{5} > 5\sqrt{6}$.

c) $\sqrt{24} + \sqrt{45} < \sqrt{25} + \sqrt{49} = 5 + 7 = 12$.

d) $\sqrt{37} - \sqrt{15} > \sqrt{36} - \sqrt{16} = 6 - 4 = 2$.

5. a) Chẳng hạn với $a = \frac{1}{4}$ thì $\sqrt{a} = \frac{1}{2}$, ta có $\sqrt{a} > a$.

b) $\sqrt{a} > a \Leftrightarrow a > a^2 \Leftrightarrow a^2 - a < 0 \Leftrightarrow a(a-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

6. a) Ta chỉ ra số thực x mà $x - \frac{1}{x} = 2$. (1)

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x$ với $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

b) Giả sử x là số hữu tỉ, $x = \frac{m}{n}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản).

Theo giả thiết $x - \frac{1}{x}$ nguyên $\Rightarrow \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{m^2 - n^2}{mn}$ nguyên $\Rightarrow m^2 - n^2 \vdots mn$ $\Rightarrow n^2 \vdots m$. Do (m, n) = 1 nên $n \vdots m$ và $m = \pm 1$. Tương tự $n = \pm 1$. Vậy $x = \pm 1$, trái với giả thiết. Do đó x là số vô tỉ.

Ta có $\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) = 2x$. Giả sử $x + \frac{1}{x}$ là số hữu tỉ thì mâu thuẫn, do đó $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỉ.

Đặt $x - \frac{1}{x} = k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ta có

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 = k^2 + 4 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ là số nguyên $\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ là số nguyên.

Ta có $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1} : \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n} = x + \frac{1}{x}$. Giả sử $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ là số hữu tỉ thì mâu thuẫn, do đó nó là số vô tỉ.

§3. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

7. a) $|4x| \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$.

b) $\begin{cases} x^2 \geq 3 \\ \sqrt{x^2 - 3} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{3} \text{ hoặc } x \geq \sqrt{3} \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\sqrt{3}\ (x \neq -2) \\ x \geq \sqrt{3}\ (x \neq 2) \end{array}\right.$.

c) $(x-3)(5-x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5$.

d) Mọi x.

e) $\frac{1}{2} \leq x \neq 1$.

g) Giải $2x + 1 > 0$ được $x > -\frac{1}{2}$.

Giải $x^2 \leq 16$ được $-4 \leq x \leq 4$.

Giải $x^2 - 8x + 14 \geq 0$ được

$$x^2 - 8x + 14 \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 4 \leq -\sqrt{2} \\ x - 4 \geq \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 4 - \sqrt{2} \\ x \geq 4 + \sqrt{2} \end{array}\right..$$

Kết luận : $-\frac{1}{2} < x \leq 4 - \sqrt{2}$.

8. a) $A = |x-3| - |x+3| = \begin{cases} 6 & \text{với } x < -3 \\ -2x & \text{với } -3 \leq x \leq 3. \\ -6 & \text{với } x > 3 \end{cases}$

b) Giải $-2x = 1$ với điều kiện $-3 \leq x \leq 3$, ta được $x = -\frac{1}{2}$.

9. a) Đặt $\sqrt{x^2 - 3} = a \geq 0$. (1)

Ta có $a \leq a^2 \Leftrightarrow a^2 - a \geq 0 \Leftrightarrow a(a-1) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \leq 0 \\ a \geq 1 \end{array}\right.$. (2)

Kết hợp (1) với (2) ta được $a = 0$ hoặc $a \geq 1$.

Với $a = 0$ ta được $x = \pm\sqrt{3}$. Với $a \geq 1$ ta được $x \geq 2$ hoặc $x \leq -2$.

Đáp số : $x = \pm\sqrt{3}$; $x \geq 2$; $x \leq -2$.

b) Giải bất phương trình $|x-3| > x - 6$, ta được nghiệm là mọi x.

10. $$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(c+b+a)}{abc} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

§4. Liên hệ giữa phép nhân, phép chia và phép khai phương

11. a) $\sqrt{10}-1$; b) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$.

c) $(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)=2$; d) $(\sqrt{5}-2)-(\sqrt{5}+2)=-4$.

e) $-\sqrt{2}$; g) 3.

h) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$; $\sqrt{28-10\sqrt{3}}=5-\sqrt{3}$. *Đáp số :* 5 .

i) $\sqrt{5}+1$;

k) $(7-3\sqrt{5})-(7+3\sqrt{5})=-6\sqrt{5}$.

12. a) Viết $4+\sqrt{15}$ thành $\sqrt{4+\sqrt{15}}.\sqrt{4+\sqrt{15}}$ ta được :

$$\sqrt{4+\sqrt{15}}.\sqrt{4+\sqrt{15}}.\sqrt{4-\sqrt{15}}.(\sqrt{10}-\sqrt{6})=\sqrt{4+\sqrt{15}}.1.\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{8+2\sqrt{15}}.(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2.$$

b) *Đáp số :* 8.

c) Đặt $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=m$, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=n$.

Tính m^2 ta được $m^2=2$ nên $m=\sqrt{2}$. Tính n ta được $\sqrt{2}-1$. *Đáp số :* 1.

13. Bạn đọc tự giải.

14. Nếu $2\le x<4$ thì $A=2\sqrt{2}$. Nếu $x\ge 4$ thì $A=2\sqrt{x-2}$.

15. a) $\begin{cases}x^2-2x\ge 0\\ x\ne\pm\sqrt{x^2-2x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)\ge 0\\ x^2\ne x^2-2x\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x<0\end{array}\right.$.

b) $A=2\sqrt{x^2-2x}$ với điều kiện trên.

c) Giải $A<2$ ta được

$$\sqrt{x^2-2x}<1\Leftrightarrow x^2-2x<1\Leftrightarrow (x-1)^2<2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}<x-1<\sqrt{2}\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}.$$

Kết hợp với điều kiện nêu ở câu a), các giá trị phải tìm của x là :

$$1-\sqrt{2}<x<0 \text{ và } 2\le x<1+\sqrt{2}.$$

16. a) Đặt $x = 2 + \sqrt{3}$. Ta có $x^2 = 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 7 + 4(x - 2) \Rightarrow x^2 = 4x - 1$.

Phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$ nhận $2 + \sqrt{3}$ là một nghiệm.

b) Phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ nhận $6 - 4\sqrt{2}$ là một nghiệm.

Chú ý : Phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$ còn có nghiệm là $2 - \sqrt{3}$. Phương trình $x^2 - 12x + 4 = 0$ còn có nghiệm là $6 + 4\sqrt{2}$.

17. a) Giả sử $\sqrt{3} - \sqrt{2} = a$ (a là số hữu tỉ).

Bình phương hai vế được $5 - 2\sqrt{6} = a^2$ nên $\sqrt{6} = \dfrac{5 - a^2}{2}$.

Vế phải là số hữu tỉ, vế trái là số vô tỉ, vô lí. Vậy $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ là số vô tỉ.

b) Chứng minh tương tự như câu a).

18. a) Có, chẳng hạn : $\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

b) Không. Giả sử tồn tại các số hữu tỉ dương a và b mà $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Bình phương hai vế được $a + b + 2\sqrt{ab} = \sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{ab} = \sqrt{2} - (a + b)$.

Lại bình phương hai vế ta có

$4ab = 2 + (a + b)^2 - 2(a + b)\sqrt{2} \Rightarrow 2(a + b)\sqrt{2} = 2 + (a + b)^2 - 4ab$.

Vế phải là số hữu tỉ, vế trái là số vô tỉ (vì $a + b \neq 0$), mâu thuẫn.

19. Đặt $x - y = a$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$ (1) thì a, b là các số hữu tỉ.

Xét hai trường hợp :

a) Nếu $b \neq 0$ thì $\dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dfrac{a}{b}$ nên $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{a}{b}$ là số hữu tỉ. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\left(b + \dfrac{a}{b}\right)$ là số hữu tỉ,

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a}{b}\right) \text{ là số hữu tỉ.}$$

b) Nếu $b = 0$ thì $x = y = 0$, hiển nhiên $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ là số hữu tỉ.

20. Xét tổng hai số

$$(2a + b - 2\sqrt{cd}) + (2c + d - 2\sqrt{ab}) = (a + b - 2\sqrt{ab}) + (c + d - 2\sqrt{cd}) + a + c$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{d})^2 + a + c > 0.$$

Tồn tại một trong hai số trên là số dương.

21. a) $A^2 = 1 + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{(a+1)^2} = \dfrac{a^2(a+1)^2 + (a+1)^2 + a^2}{a^2(a+1)^2} =$

$$= \frac{a^2(a^2 + 2a + 1 + 1) + (a+1)^2}{a^2(a+1)^2} = \frac{a^4 + 2a^2(a+1) + (a+1)^2}{a^2(a+1)^2} =$$

$$= \frac{(a^2 + a + 1)^2}{a^2(a+1)^2} = \left[\frac{a^2 + a + 1}{a(a+1)}\right]^2.$$

Do $a > 0$ nên $A > 0$ và $A = \dfrac{a^2 + a + 1}{a(a+1)}$.

b) Từ câu a) suy ra

$$\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} = \frac{a^2 + a + 1}{a(a+1)} = 1 + \frac{1}{a(a+1)} = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}.$$

Do đó

$$B = \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

$$= 99 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

$$= 100 - \frac{1}{100} = 99,99.$$

22. a) $997^2 = 997^2 - 3^2 + 3^2 = (997 - 3)(997 + 3) + 9 = 994000 + 9 = 994009.$

b) $A = (\sqrt{A})^2 - 16 + 16 = (\sqrt{A} - 4)(\sqrt{A} + 4) + 16$

$$= \underbrace{99\ldots9}_{100\text{ chữ số }9}2 \,.\, 1\underbrace{00\ldots0}_{101\text{ chữ số }0} + 16 = \underbrace{99\ldots9}_{100\text{ chữ số }9}2\underbrace{00\ldots0}_{99\text{ chữ số }0}16.$$

Tổng các chữ số của A bằng $900 + 2 + 1 + 6 = 909$.

§5. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

23. Điều kiện xác định : $a < 0$ hoặc $a = 1$. Ta có

$$A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} - |a|.\sqrt{\frac{a-1}{a}} = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} - \sqrt{a(a-1)} = \sqrt{1-a}.$$

24. a) Chứng minh rằng $(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40}$.

b) Cần chứng minh $\sqrt{6 + \sqrt{24} + \sqrt{12} + \sqrt{8}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$.

Hãy chứng tỏ $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)^2 = 6 + \sqrt{24} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$.

25. Ta có

$$10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = (2 + 3 + 5) + 2\sqrt{2.3} + 2\sqrt{2.5} + 2\sqrt{3.5} =$$

$$= (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2.$$

Vậy $A = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

26. Điều kiện xác định : $x > 3$ hoặc $x \le -3$.

Cách 1. Xét hai trường hợp :

a) Trường hợp $x > 3$ thì $x + 3 > x - 3 > 0$.

$$A = \frac{\sqrt{x+3}.\sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x+3)(x-3)}}{2\sqrt{x-3}.\sqrt{x-3} + \sqrt{(x+3)(x-3)}} = \frac{\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}(2\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3})}$$

$$= \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}.$$

b) Trường hợp $x \le -3$ thì $3 - x > -3 - x \ge 0$.

$$A = \frac{-\sqrt{-x-3}.\sqrt{-x-3} + 2\sqrt{-x-3}.\sqrt{3-x}}{-2\sqrt{3-x}.\sqrt{3-x} + \sqrt{-x-3}.\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{-x-3}(-\sqrt{-x-3} + 2\sqrt{3-x})}{-\sqrt{3-x}(2\sqrt{3-x} - \sqrt{-x-3})}$$

$$= -\sqrt{\frac{-x-3}{3-x}} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}.$$

Hai kết quả ở hai trường hợp a và b có thể viết chung dưới dạng $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$.

Cách 2. Nhân cả tử và mẫu của A với biểu thức liên hợp của mẫu (nếu biểu thức liên hợp này khác 0, tức là $x \ne 5$) ta có

$$A = \frac{(x+3+2\sqrt{x^2-9}).\left[2(x-3)-\sqrt{x^2-9}\right]}{\left[2(x-3)+\sqrt{x^2-9}\right].\left[2(x-3)-\sqrt{x^2-9}\right]}$$

$$= \frac{2(x^2-9)-(x+3)\sqrt{x^2-9}+4(x-3)\sqrt{x^2-9}-2(x^2-9)}{4(x-3)^2-(x^2-9)}$$

$$= \frac{(4x-12-x-3)\sqrt{x^2-9}}{(x-3)(4x-12-x-3)} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} \text{ với } x \neq 5.$$

Với $x = 5$ thì $A = 2$.

Do biểu thức $\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ cũng có giá trị bằng 2 khi $x = 5$ nên trong cả hai trường hợp $x = 5$ và $x \neq 5$ đều có đáp số chung là $\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$.

27. Điều kiện $-3 \leq x < 3$.

$$B = \frac{(x+3)(x+2)+x\sqrt{3+x}.\sqrt{3-x}}{x(3-x)+(x+2)\sqrt{3+x}.\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{3+x}\left[\sqrt{3+x}(x+2)+x\sqrt{3-x}\right]}{\sqrt{3-x}\left[x\sqrt{3-x}+(x+2)\sqrt{3+x}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}.$$

28. a) Trục căn thức ở mẫu

$$A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + ... + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-(n-1)} = \sqrt{n}-1.$$

b) *Đáp số :* $-\sqrt{1}+\sqrt{25} = 4$.

§6. Rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai

29. a) Trước hết tính $\frac{A}{\sqrt{2}}$, được -1. Vậy $A = -\sqrt{2}$.

b) Điều kiện $0 \leq a \neq 1$. Đặt $\sqrt{a} = x$. *Đáp số :* $B = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = 1$.

c) Rút gọn C ta được. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$. Ta có $C^2 = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{xy} = 2$.

Vậy $C = -\sqrt{2}$.

30. Điều kiện : $x \geq 1$ $(x \neq 2)$.

Nếu $x > 2$ thì $P = -1$.

Nếu $1 \leq x < 2$ thì $P = 1$.

31. Gọi tử là M. Tính M^2 được $2(x-y)$, do đó $M = \sqrt{2(x-y)}$. *Đáp số :* $Q = 1$.

32. Trước hết rút gọn biểu thức A được $x + \sqrt{x^2-1}$. *Đáp số :* $A = \frac{b}{a}$.

33. Trước hết tính x theo a được $x = \frac{1-2a}{2\sqrt{a(1-a)}}$.

Sau đó tính $\sqrt{1+x^2}$ được $\frac{1}{2\sqrt{a(1-a)}}$. *Đáp số :* $B = 1$.

34. Ta có $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$.

Tương tự $b^2 + 1 = (b+a)(b+c)$, $c^2 + 1 = (c+a)(c+b)$. *Đáp số :* $M = 0$.

35. Trước hết tính A^2 được

$$\frac{x+\sqrt{x^2-4x+4}}{x+\sqrt{x^2-2x+1}}.(2x-1) = \frac{x+|x-2|}{x+|x-1|}.(2x-1).$$

– Với $x > 2$ thì $A^2 = 2x - 2$ nên $A = \sqrt{2x-2}$.

– Với $1 \leq x \leq 2$ thì $A^2 = 2$ nên $A = \sqrt{2}$.

36. Gọi vế trái là A, ta có

$$A^2 = \sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}} + \sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}} + 2\sqrt{x - \frac{x^2-4}{x}} =$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = \frac{2x+4}{\sqrt{x}}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

37. Ta có $a + b = -1$, $ab = -\frac{1}{4}$ nên

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{8} = \frac{17}{8},$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}.$$

Do đó

$$a^7 + b^7 = (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) - a^3b^3(a + b) = -\frac{7}{4}.\frac{17}{8} - \left(-\frac{1}{64}\right)(-1) = -\frac{239}{64}.$$

38. Các biểu thức dưới dấu căn đều dương. Đặt $\sqrt{x^2 - 6x + 13} = a \geq 0$, $\sqrt{x^2 - 6x + 10} = b \geq 0$. Ta có $a - b = 1$ và $a^2 - b^2 = 3$. Suy ra $a + b = 3$. Do $a + b > a - b$ nên $b > 0$, do đó $a > 0$. Vậy giá trị của biểu thức phải tính bằng 3.

39. a) a bằng 0 ; 1 ; 9 ; 16 ; 36.

b) $M = 1 + \frac{4}{\sqrt{a} - 2}$. Đặt $\frac{4}{\sqrt{a} - 2} = n \in \mathbf{Z}$ ta tìm được $\sqrt{a} = \frac{2n + 4}{n}$.

Giải $\frac{2n + 4}{n} \geq 0$ được $\left[\begin{array}{l} n > 0 \\ n \leq -2 \end{array}\right.$.

Vậy $\sqrt{a} = \frac{2n + 4}{n}$, $a = \left(\frac{2n + 4}{n}\right)^2$ với $n \in \mathbf{Z}$, $n \notin \{0 ; -1\}$.

40. a) $a^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8}$.

$$a^3 = (\sqrt{2} - 1)^3 = 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7 = \sqrt{50} - \sqrt{49}.$$

b) Theo khai triển $(x + y)^n$

$$(1 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2} \ ; \ (1 + \sqrt{2})^n = A + B\sqrt{2} \text{ với } A, B \in \mathbf{N}.$$

Suy ra $A^2 - 2B^2 = (A + B\sqrt{2})(A - B\sqrt{2}) = \left[(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})\right]^n = (-1)^n$.

Nếu n chẵn thì $A^2 - 2B^2 = 1$. (1)

Nếu n lẻ thì $A^2 - 2B^2 = -1$. (2)

Bây giờ ta xét a^n. Có hai trường hợp :

– Nếu n chẵn thì $a^n = (\sqrt{2} - 1)^n = (1 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{2B^2}$.

Điều kiện $A^2 - 2B^2 = 1$ được thoả mãn do (1).

– Nếu n lẻ thì $a^n = (\sqrt{2} - 1)^n = -(1 - \sqrt{2})^n = B\sqrt{2} - A = \sqrt{2B^2} - \sqrt{A^2}$.

Điều kiện $2B^2 - A^2 = 1$ được thoả mãn do (2).

§7. Căn bậc ba. Căn bậc n

41. a) Tử bằng $2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}.(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)$.

Đáp số : $\sqrt[3]{2}$.

b) Chú ý rằng $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$. *Đáp số :* $\sqrt{3} + 1$.

c) *Đáp số :* $\sqrt{3} + 1$.

42. Số m là một nghiệm của phương trình đã cho.

43. a) Đặt $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Lập phương hai vế, ta được $x^3 = 6 + 6x$.

b) Đặt $x = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$. Lập phương hai vế, ta được $x^3 = 6 - 9x$.

44. a) *Đáp số :* $A = (\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1) = 2$.

b) Tính B^3 được

$$B^3 = 10 - 9B \Leftrightarrow B^3 + 9B - 10 = 0 \Leftrightarrow (B - 1)(B^2 + B + 10) = 0.$$

Từ đó $B = 1$.

c) *Đáp số :* $C = 6$.

d) *Đáp số :* $D = 2$.

e) Tính E^3 được $E^3 = 8 - 7E$. Từ đó $E = 1$.

45. a) Lập phương hai vế. *Đáp số :* $x = \pm\sqrt{5}$.

b) $(x\sqrt[3]{2})^3 = (x - 1)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{2} = x - 1 \Leftrightarrow x(1 - \sqrt[3]{2}) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{1 - \sqrt[3]{2}}$.

46. Đặt $am^3 = bn^3 = cp^3 = k^3$ thì $a = \dfrac{k^3}{m^3}$, $b = \dfrac{k^3}{n^3}$, $c = \dfrac{k^3}{p^3}$.

Ta có $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \frac{k}{m} + \frac{k}{n} + \frac{k}{p} = k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) = k$.

Mặt khác $am^2 + bn^2 + cp^2 = \frac{am^3}{m} + \frac{bn^3}{n} + \frac{cp^3}{p} = \frac{k^3}{m} + \frac{k^3}{n} + \frac{k^3}{p}$

$$= k^3\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) = k^3.$$

Do đó $\sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2} = k = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

47. a) Chú ý rằng $\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt[6]{(2 + \sqrt{5})^2} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$. *Đáp số :* -2.

b) 1 ; c) $\sqrt{5} - 1$; d) $\sqrt{3}$.

e) $A = \frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt[4]{125}}}$. Đặt $\sqrt[4]{5} = x$ thì $x^4 = 5$. Ta có

$$A = \frac{2}{\sqrt{4 - 3x + 2x^2 - x^3}} = \frac{2(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2(4 - 3x + 2x^2 - x^3)}}$$

$$= \frac{2(x+1)}{\sqrt{-x^5 + 5x + 4}}.$$

Ta thấy $-x^5 + 5x = x(5 - x^4) = 0$ nên $A = \frac{2(x+1)}{\sqrt{4}} = x + 1 = \sqrt[4]{5} + 1$.

Chương II – HÀM SỐ BẬC NHẤT

§8. Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

48. Bạn đọc tự giải.

49. a) Đường thẳng $y = -1$.

b) Đường thẳng $x = 2$.

c) Đường phân giác của các góc vuông phần tư I và III.

d) Đường phân giác của các góc vuông phần tư II và IV.

50. a) Đặt $x + 1 = t$ thì $x = t - 1$. Ta có

$$f(t) = (t-1)^2 - 2(t-1) + 3 = t^2 - 2t + 1 - 2t + 2 + 3 = t^2 - 4t + 6.$$

Vậy $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

51. $g(x) = 2x + 9$.

52. a) Bạn đọc tự giải.

b) Hàm số $y = f(x) = ax^3$ xác định với mọi số thực x.

Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_2 > x_1$. Xét

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2^3 - ax_1^3 = a(x_2^3 - x_1^3) = a(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$$

Ta có $x_2 - x_1 > 0$, $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 = \left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3x_1^2}{4} > 0$, do đó :

– Nếu $a > 0$ thì $f(x_2) > f(x_1)$, hàm số đồng biến.

– Nếu $a < 0$ thì $f(x_2) < f(x_1)$, hàm số nghịch biến.

53. Hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$ được xác định khi $x \geq 3$ và $x \leq 3$, tức là khi $x = 3$, khi đó $y = 0$. Đồ thị của hàm số chỉ gồm một điểm (3 ; 0).

54. a) $CA^2 = (3-2)^2 + (-1+4)^2 = 10$,

$CB^2 = (-1-2)^2 + (-3+4)^2 = 10$,

$AB^2 = (-1-3)^2 + (-3+1)^2 = 16 + 4 = 20$.

Dễ dàng chứng minh ΔABC vuông cân. Diện tích tam giác bằng

$$\frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}.\sqrt{10}.\sqrt{10} = 5 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

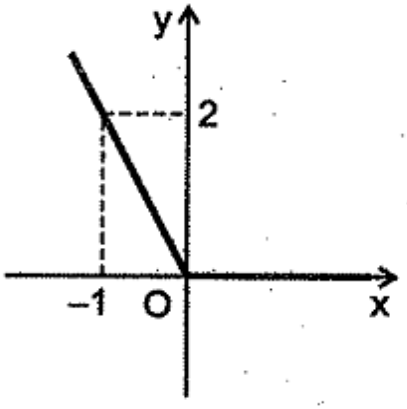
b) Tam giác ABC vuông cân có diện tích bằng 2,5 đơn vị diện tích.

55. Trước hết tính $f(2) - f(-2)$, được 4. Từ đó tính được $f(-2) = 13$.

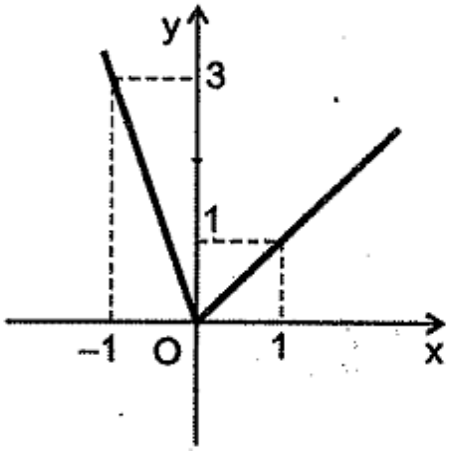
§9. Hàm số y = ax

56. a) $y = |x| - x = \begin{cases} -2x & \text{với } x < 0 \\ 0 & \text{với } x \geq 0 \end{cases}$

Đồ thị của hàm số : xem hình 58.



Hình 58



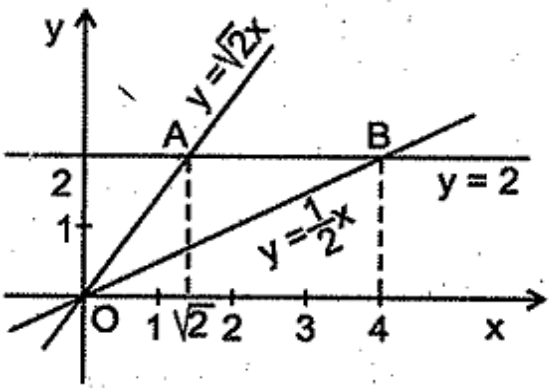
Hình 59

b) $y = |2x| - x = \begin{cases} -3x & \text{với } x < 0 \\ x & \text{với } x \geq 0 \end{cases}$.

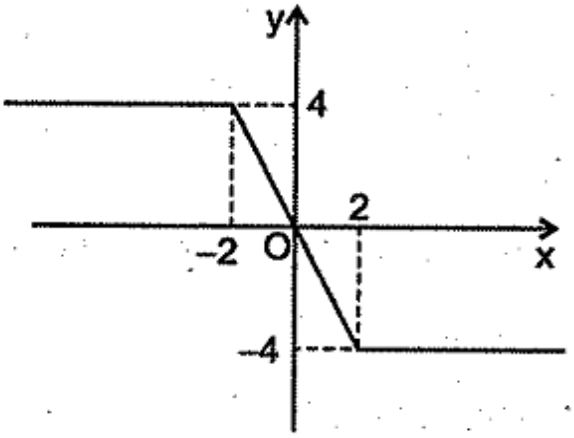
Đồ thị của hàm số : xem hình 59.

57. (h.60) Ta tính được toạ độ các đỉnh của ΔOAB là $A(\sqrt{2}; 2)$, $B(4 ; 2)$.

Đáp số : $S_{OAB} = 4 - \sqrt{2}$ (đơn vị diện tích).



Hình 60



Hình 61

58. $y = |x - 2| - |x + 2| = \begin{cases} 4 & \text{với } x \leq -2 \\ -2x & \text{với } -2 < x < 2 \\ -4 & \text{với } x \geq 2 \end{cases}$

Đồ thị của hàm số : xem hình 61.

$\min y = -4 \Leftrightarrow x \geq 2$;

$\max y = 4 \Leftrightarrow x \leq -2$.

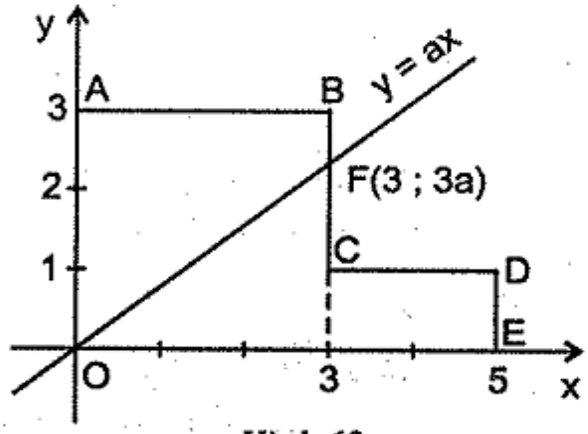
59. (h.62) Đường thẳng $y = ax$ phải cắt cạnh BC, gọi giao điểm đó là F, có toạ độ $(3 ; 3a)$.

$S_{OABCDE} = 11$.

$S_{OABF} = \dfrac{3 + (3 - 3a)}{2}.3 = \dfrac{(6 - 3a).3}{2}$.

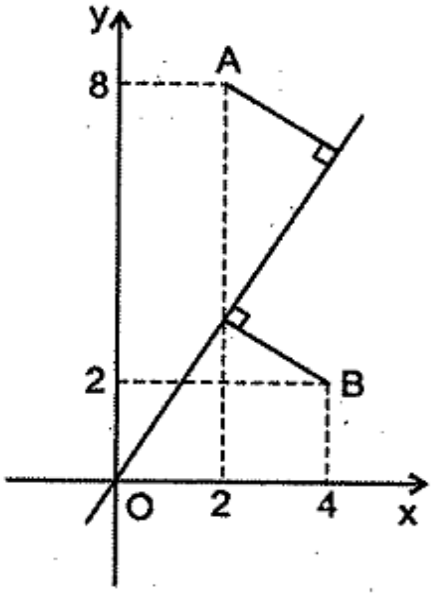
Giải $\dfrac{(6 - 3a).3}{2} = \dfrac{11}{2}$ được $a = \dfrac{7}{9}$.

Đường thẳng phải tìm là $y = \dfrac{7}{9}x$.

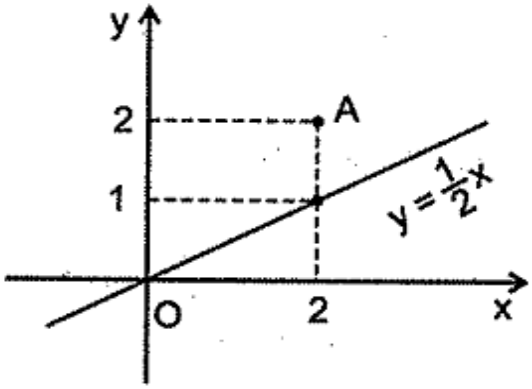


Hình 62

60. (h.63) Giải tương tự Ví dụ 21. *Đáp số :* $y = \dfrac{5}{3}x$.



Hình 63



Hình 64

61. (h.64) Điểm A(2 ; 2) thuộc miền phải tìm. Miền phải tìm là nửa mặt phẳng chứa điểm A có bờ là đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}x$.

§10. Hàm số bậc nhất

62. Điểm cố định là : a) (0 ; 3) ; b) (–1 ; 2) ; c) (–2 ; 1).

63. Điểm đối xứng với điểm (x ; y) qua trục hoành là điểm (x ; –y).

Xét y = 2x + 11, thay y bởi –y ta được –y = 2x + 11 hay y = –2x – 11.

Vậy câu trả lời B là đúng.

64. Điểm đối xứng với điểm (x ; y) qua đường thẳng y = x là điểm (y ; x). Xét y = 2x + 4, thay x bởi y và thay y bởi x ta được x = 2y + 4 hay $y = \dfrac{1}{2}x - 2$.

Vậy câu trả lời C là đúng.

65. a) $y = \frac{1}{2}x + 1$; b) $y = -2x + 6$; c) $y = x + 4$; d) $y = -17x + 1$.

66. a) Xác định đường thẳng đi qua hai điểm A và B được $y = 3x - 5$. Sau đó chứng tỏ rằng các điểm C và D thuộc đường thẳng trên.

b) *Đáp số :* $x = -3$.

67. Ba đường thẳng : trục tung, trục hoành, đường thẳng $y = -x + 2$ xác định một tam giác. Có bốn điểm cách đều ba đường thẳng này, chúng không cùng thuộc một đường thẳng. Vậy D là câu trả lời đúng.

68. Gọi đường thẳng cần xác định là $y = mx + n$.

Đường thẳng đi qua điểm (0 ; b) nên $b = m.0 + n \Rightarrow n = b$.

Đường thẳng $y = mx + b$ đi qua điểm (a ; 0) nên

$$0 = m.a + b \Rightarrow m = -\frac{b}{a} \text{ (chú ý rằng } a \neq 0).$$

Đường thẳng cần xác định có phương trình là

$$y = -\frac{b}{a}x + b \text{ hay } \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \text{ tức là } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

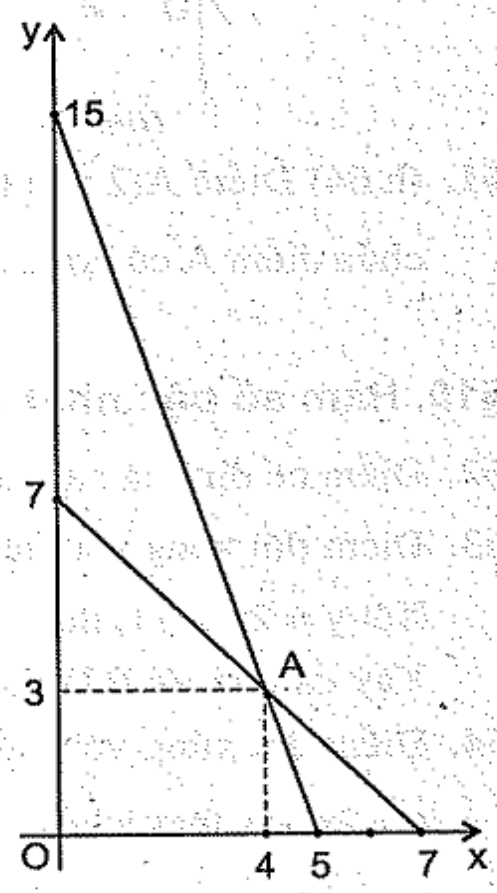
69. (h.65) Đường thẳng $y = ax + b$ có giao điểm với trục hoành nên $a \neq 0$. Giao điểm của đường thẳng với trục tung là (0 ; b), với trục hoành là $\left(-\frac{b}{a} ; 0\right)$.

Theo đề bài, b và $-\frac{b}{a}$ là các số nguyên dương, a là số nguyên.

Điểm (4 ; 3) thuộc đường thẳng nên $3 = 4a + b$. Do đó

$$-b = 4a - 3 \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{4a - 3}{a} = 4 - \frac{3}{a}.$$

Số a phải là ước của 3. Do $-\frac{b}{a}$ và b là các số nguyên dương nên a là số nguyên âm, $a \in \{-1 ; -3\}$.



Hình 65

Với $a = -1$ thì $b = 7$, ta có đường thẳng $y = -x + 7$ cắt trục tung tại điểm $(0 ; 7)$, cắt trục hoành tại điểm $(7 ; 0)$.

Với $a = -3$ thì $b = 15$, ta có đường thẳng $y = -3x + 15$ cắt trục tung tại điểm $(0 ; 15)$, cắt trục hoành tại điểm $(5 ; 0)$.

70. Giả sử đường thẳng phải tìm cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng a, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b thì đường thẳng có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (xem Bài tập 68).

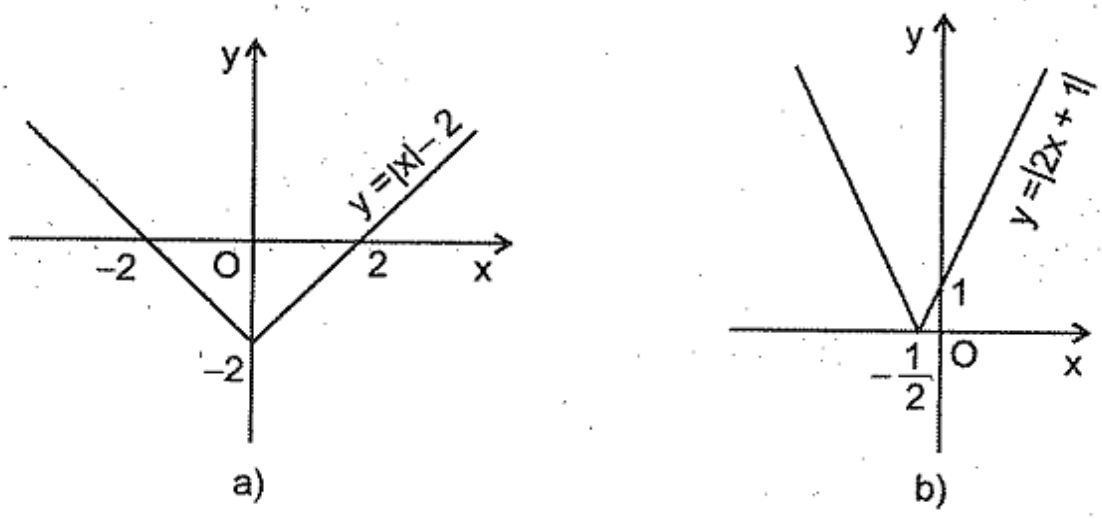
Điểm $A(4 ; 3)$ thuộc đường thẳng nên $\frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 1$. Do đó $b = \frac{3a}{a-4} = 3 + \frac{12}{a-4}$.

Do a là số nguyên tố nên $a \geq 2$, $a - 4 \geq -2$.

Lần lượt cho $a - 4$ nhận các giá trị $-2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12$, với chú ý rằng a là số nguyên tố và $b > 0$, ta được $\begin{cases} a = 5 \\ b = 15 \end{cases}$ và $\begin{cases} a = 7 \\ b = 7 \end{cases}$.

Ta tìm được hai đường thẳng là $\frac{x}{5} + \frac{y}{15} = 1$ (hay $y = -3x + 15$) và $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$ (hay $y = -x + 7$).

71. Xem hình 66.

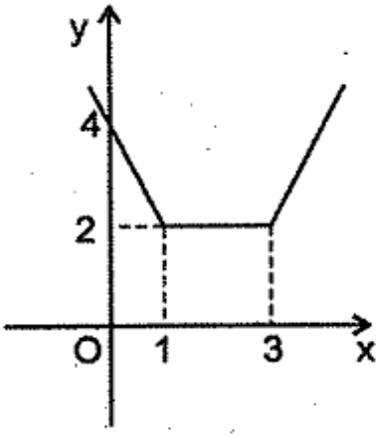


Hình 66

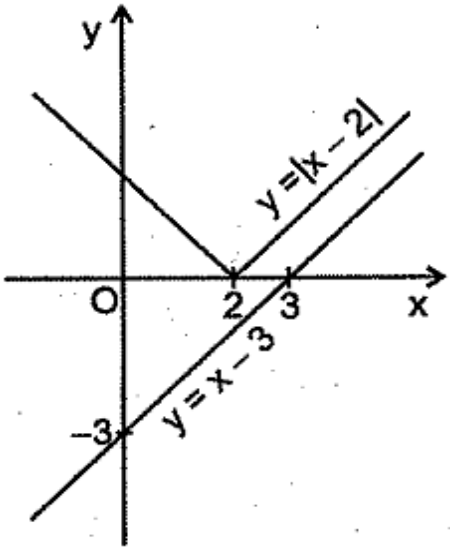
72. (h.67) $y = \begin{cases} -2x + 4 & \text{với } x < 1 \\ 2 & \text{với } 1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 4 & \text{với } x > 3 \end{cases}$

Đồ thị của hàm số : xem hình 67.

Từ đồ thị, ta thấy min y = 2 $\Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.



Hình 67



Hình 68

73. Cần chứng minh $|x - 2| > x - 3$. Xem hình 68.

74. Theo đề bài $f(3) \le f(1) \le f(2)$ nên $3a + b \le a + b \le 2a + b$, suy ra $3a \le a \le 2a$. Do $3a \le a$ nên $a \le 0$, do $a \le 2a$ nên $a \ge 0$. Vậy $a = 0$. Hàm số đã cho là hàm hằng $f(x) = b$.

Theo đề bài $f(4) = 2$, vậy $f(0) = 2$. Hàm số đã cho là $f(x) = 2$.

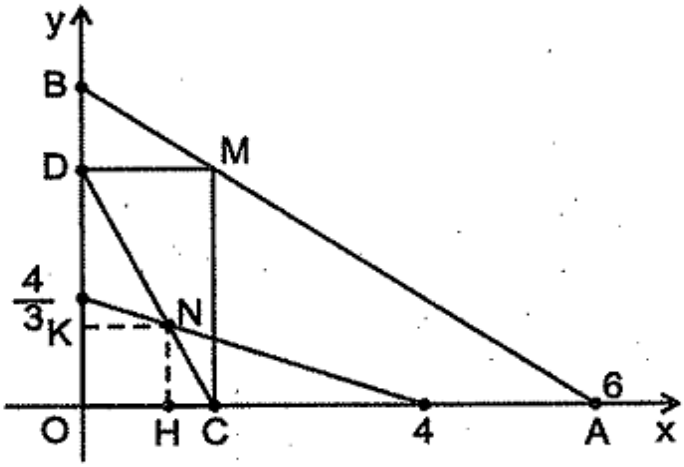
75. (h.69) Đường thẳng đi qua A và B là

$$y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

Gọi tọa độ của M là (x ; y) thì

$$y = -\frac{2}{3}x + 4. \qquad (1)$$

Gọi hình chiếu của N trên Ox, Oy theo thứ tự là H, K. Ta có



Hình 69

$$NK = \frac{2}{3}OC = \frac{2}{3}MD = \frac{2}{3}x,$$

$$NH = \frac{1}{3}OD = \frac{1}{3}MC = \frac{1}{3}y.$$

Gọi tọa độ của N là (x' ; y') thì $x' = \frac{2}{3}x$, $y' = \frac{1}{3}y$.

Thay vào (1) ta được $3y' = -\frac{2}{3}.\frac{3}{2}x' + 4$ hay $y' = -\frac{1}{3}x' + \frac{4}{3}$.

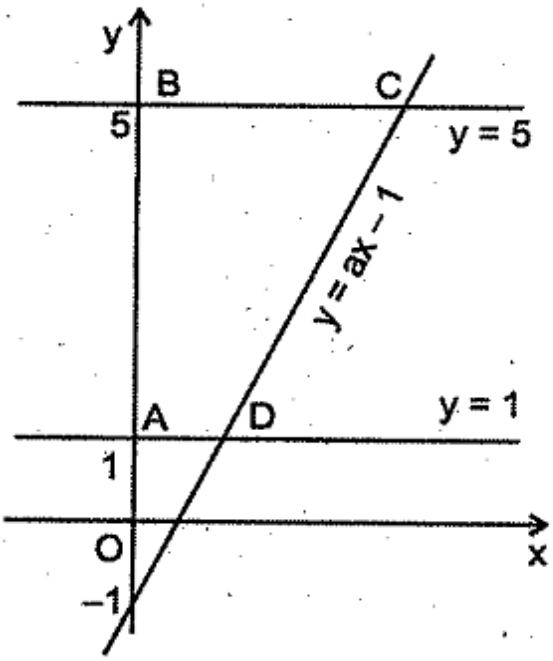
Vậy điểm N di chuyển trên đường thẳng $y = -\frac{1}{4}x + \frac{4}{3}$ (phần đường thẳng nằm trong góc vuông phần tư I).

76. (h.70) Kí hiệu ABCD là hình thang cần tìm diện tích như trên hình vẽ. Ta tính được $C\left(\frac{6}{a}; 5\right)$, $D\left(\frac{2}{a}; 1\right)$, $BC = \frac{6}{a}$, $AD = \frac{2}{a}$.

Ta có

$$S_{ABCD} = 8 \Rightarrow \left(\frac{6}{a} + \frac{2}{a}\right).4 : 2 = 8 \Rightarrow a = 2.$$

Đường thẳng phải tìm là $y = 2x - 1$.



Hình 70

77. (h.71) a) Điểm cố định là (0 ; 2).

b) Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng d với trục hoành và trục tung. Ta tính được $OA = \frac{2}{|2 - m|}$, $OB = 2$.

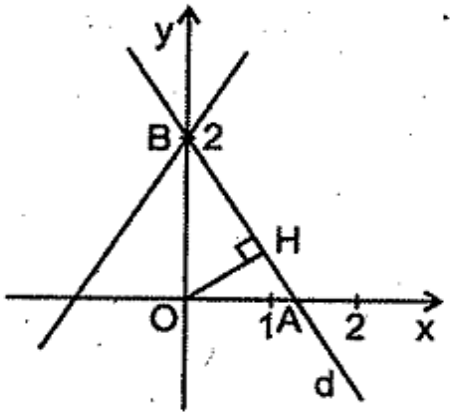
Gọi OH là khoảng cách từ O đến AB, ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$
$$= \frac{(2-m)^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{m^2 - 4m + 5}{4}.$$

Mặt khác $OH = 1 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 5 = 4$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2 = 3 \Leftrightarrow m - 2 = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 - \sqrt{3} \\ m = 2 + \sqrt{3} \end{array}\right..$$



Hình 71

Tương ứng với các giá trị trên của m là hai đường thẳng $y = -\sqrt{3}x + 2$ và $y = \sqrt{3}x + 2$.

c) OH lớn nhất $\Leftrightarrow m^2 - 4m + 5$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow m = 2$. Khi đó đường thẳng là $y = 2$ và $OH = 2$.

78. (h.72) Gọi đường thẳng d phải tìm là $y = ax + b$. Điểm A(7 ; 2) thuộc d nên

$$2 = 7a + b \qquad (1)$$

Đường thẳng qua B và song song với trục hoành cắt d tại M, đường thẳng qua C và song song với trục hoành cắt d tại N. Gọi BH, CK là các đường vuông góc kẻ từ B, C đến d. Ta có BH = CK ⇔ BM = CN. Đặt BM = CN = m. Toạ độ của M là (2 + m ; 8), toạ độ của N là (8 − m ; 4).

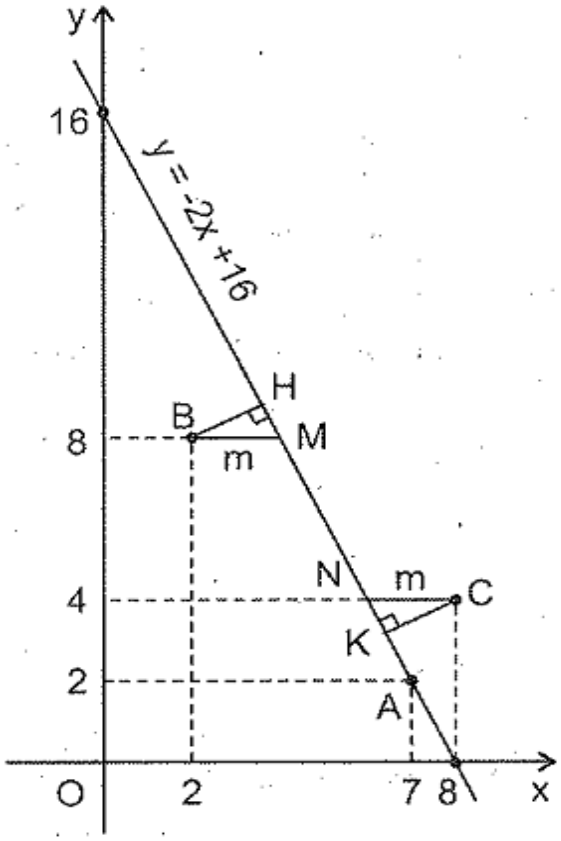
$$M \in d \text{ nên } 8 = a(2 + m) + b\ ; \qquad (2)$$

$$N \in d \text{ nên } 4 = a(8 - m) + b. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta tìm được a = −2, b = 16, m = 2.

Đường thẳng phải tìm là $y = -2x + 16$.

Chú ý : Nếu sử dụng công thức tính toạ độ trung điểm của một đoạn thẳng (xem Bài tập 48) thì đường thẳng phải tìm đi qua hai điểm A(7 ; 2) và I(5 ; 6), trong đó I là trung điểm của BC. Ta xác định được đường thẳng cần tìm là $y = -2x + 16$.



Hình 72

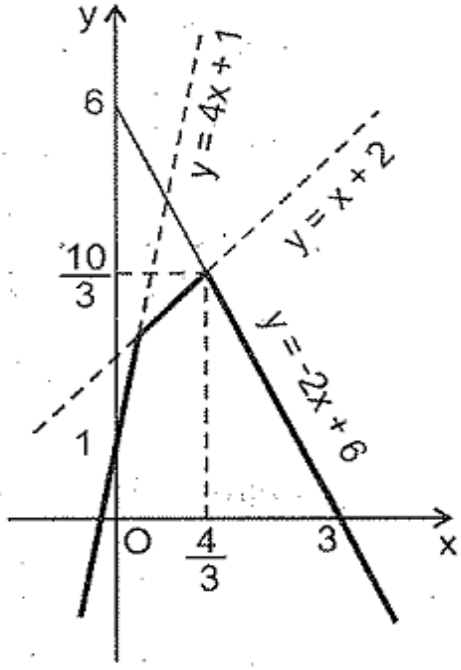
79. a) Xem hình 73.

b) Tìm giao điểm của các đường thẳng

$$y = -2x + 6 \text{ và } y = x + 2,$$

ta được điểm $A\left(\frac{4}{3} ; \frac{10}{3}\right)$.

Giá trị lớn nhất của f(x) là $\frac{10}{3}$ với $x = \frac{4}{3}$.



Hình 73

§11. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau. Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b

80. a) $m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = 3$. b) $m \neq 3$.

c) $2(m - 1) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

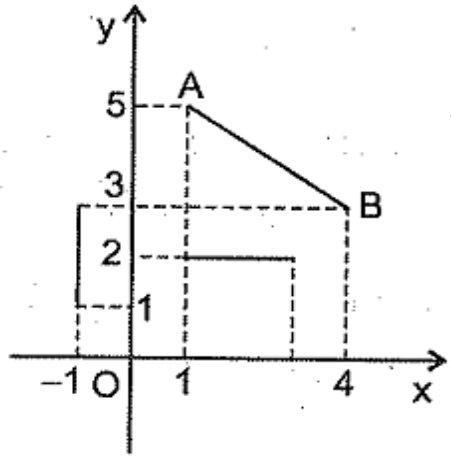
81. a) $m = 2$; b) $m \neq 2$.

c) $m(3m - 4) = -1 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(3m - 1) = 0$

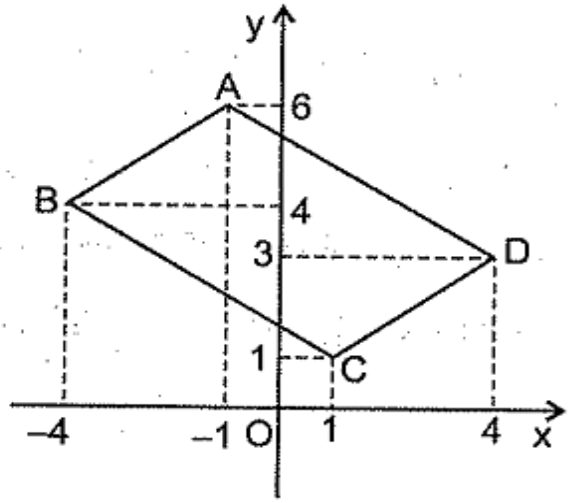
$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = \frac{1}{3}.$$

82. Đường thẳng OA có phương trình $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$ nên $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta tìm được $b = -2$.

83. (h.74) a) $x = 0$; b) $y = 0$; c) $y = -\frac{2}{3}x$.



Hình 74



Hình 75

84. (h.75) Đường thẳng AB có phương trình $2x - 3y = -20$.

Đường thẳng BC có phương trình $3x + 5y = 8$.

Đường thẳng qua A và song song với BC có phương trình

$$3x + 5y = 27. \quad (1)$$

Đường thẳng qua C và song song với AB có phương trình

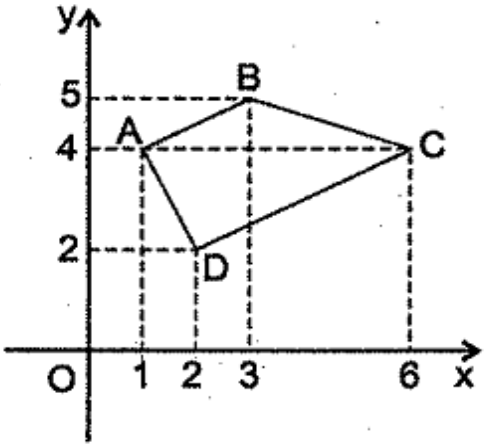
$$2x - 3y = -1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được tọa độ của D.

Đáp số : (4 ; 3).

Chú ý : Nếu dùng công thức tính toạ độ trung điểm của một đoạn thẳng (xem Bài tập 48), ta tìm được toạ độ trung điểm M của AC, từ đó tìm được toạ độ của D.

85. (h.76) ABCD là hình thang vuông. Chứng minh rằng AB // CD và AB ⊥ AD.



Hình 76

86. a) Ba đường thẳng không tạo thành tam giác vuông vì có hai đường thẳng song song.

b) Ba đường thẳng đồng quy tại điểm (3 ; 1).

c) Các đường thẳng $y = -x + 1$ và $y = x + 3$ vuông góc với nhau tại điểm A(−1 ; 2). Đường thẳng $y = -2x + 6$ cắt các đường thẳng trên và không đi qua điểm A. Ba đường thẳng tạo thành một tam giác vuông.

87. $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Hệ số góc của đường thẳng là $-\frac{2}{3}$.

88. Đường thẳng $y = mx + n$ đi qua điểm A(m ; 3) nên $3 = m^2 + n$. Đường thẳng $y = mx + n$ đi qua điểm B(1 ; m) nên $m = m + n$. Từ đó $n = 0$, $m = \sqrt{3}$.

89. Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(x_1 ; y_1)$ nên $y_1 = ax_1 + b$. Do đó

$$y = ax + (y_1 - ax_1) \text{ suy ra } y - y_1 = a(x - x_1).$$

BẤT ĐẲNG THỨC

90. a) Biến đổi $\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$.

b) Biến đổi tương đương hoặc áp dụng Ví dụ 26.

91. a) Hiệu

$$3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

b) Hiệu của vế trái và vế phải bằng $(a - b)^2(a + b)$.

92. *Cách 1.* $\frac{1}{a} = \sqrt{2004} + \sqrt{2003}$, $\frac{1}{b} = \sqrt{2005} + \sqrt{2004}$.

Ta thấy $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ nên $a > b$ (vì a, b là hai số dương).

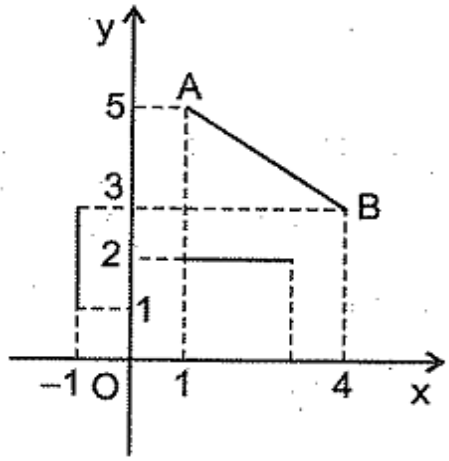
81. a) $m = 2$; b) $m \neq 2$.

c) $m(3m - 4) = -1 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(3m - 1) = 0$

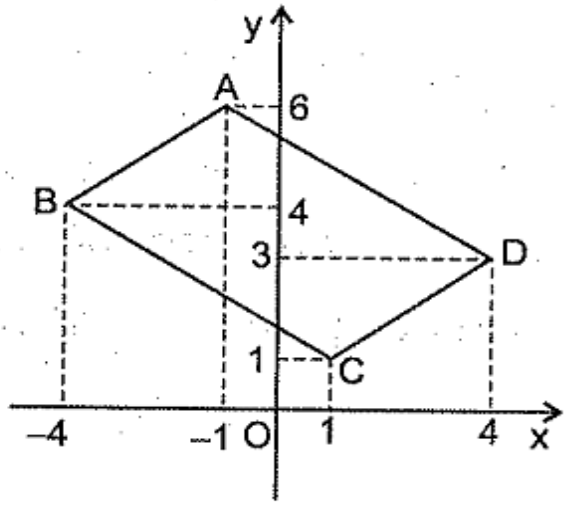
$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = \frac{1}{3}.$$

82. Đường thẳng OA có phương trình $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$ nên $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta tìm được $b = -2$.

83. (h.74) a) $x = 0$; b) $y = 0$; c) $y = -\frac{2}{3}x$.



Hình 74



Hình 75

84. (h.75) Đường thẳng AB có phương trình $2x - 3y = -20$.

Đường thẳng BC có phương trình $3x + 5y = 8$.

Đường thẳng qua A và song song với BC có phương trình

$$3x + 5y = 27. \quad (1)$$

Đường thẳng qua C và song song với AB có phương trình

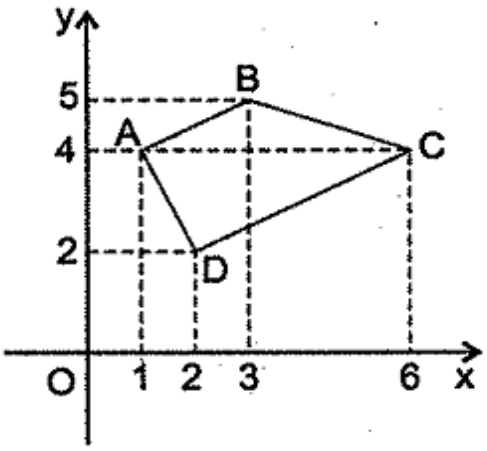
$$2x - 3y = -1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được tọa độ của D.

Đáp số : (4 ; 3).

Chú ý : Nếu dùng công thức tính toạ độ trung điểm của một đoạn thẳng (xem Bài tập 48), ta tìm được toạ độ trung điểm M của AC, từ đó tìm được toạ độ của D.

85. (h.76) ABCD là hình thang vuông. Chứng minh rằng AB // CD và AB ⊥ AD.



Hình 76

86. a) Ba đường thẳng không tạo thành tam giác vuông vì có hai đường thẳng song song.

b) Ba đường thẳng đồng quy tại điểm (3 ; 1).

c) Các đường thẳng $y = -x + 1$ và $y = x + 3$ vuông góc với nhau tại điểm A(−1 ; 2). Đường thẳng $y = -2x + 6$ cắt các đường thẳng trên và không đi qua điểm A. Ba đường thẳng tạo thành một tam giác vuông.

87. $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Hệ số góc của đường thẳng là $-\frac{2}{3}$.

88. Đường thẳng $y = mx + n$ đi qua điểm A(m ; 3) nên $3 = m^2 + n$. Đường thẳng $y = mx + n$ đi qua điểm B(1 ; m) nên $m = m + n$. Từ đó $n = 0$, $m = \sqrt{3}$.

89. Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(x_1 ; y_1)$ nên $y_1 = ax_1 + b$. Do đó

$$y = ax + (y_1 - ax_1) \text{ suy ra } y - y_1 = a(x - x_1).$$

BẤT ĐẲNG THỨC

90. a) Biến đổi $\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$.

b) Biến đổi tương đương hoặc áp dụng Ví dụ 26.

91. a) Hiệu

$$3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

b) Hiệu của vế trái và vế phải bằng $(a - b)^2(a + b)$.

92. *Cách 1.* $\frac{1}{a} = \sqrt{2004} + \sqrt{2003}$, $\frac{1}{b} = \sqrt{2005} + \sqrt{2004}$.

Ta thấy $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ nên $a > b$ (vì a, b là hai số dương).

Cách 2. Theo Ví dụ 26, ta có

$$\frac{\sqrt{2003}+\sqrt{2005}}{2} < \sqrt{2004}$$

nên $\sqrt{2003}+\sqrt{2005} < \sqrt{2004}+\sqrt{2004}$,

do đó $\sqrt{2005}-\sqrt{2004} < \sqrt{2004}-\sqrt{2003}$ tức là $b < a$.

93. $a = \sqrt{80}-\sqrt{81} < 0$, $d = \sqrt{324}-\sqrt{325} < 0$, $e = \sqrt{120}-\sqrt{121} < 0$.

Xét b và c, ta có

$$b = 9-\sqrt{80} = \frac{1}{9+\sqrt{80}} > 0\ ;\quad c = 7-\sqrt{48} = \frac{1}{7+\sqrt{48}} > 0.$$

Do $9+\sqrt{80} > 7+\sqrt{48}$ nên $b < c$. Số phải tìm là b.

94. a) $a = \sqrt{37}-\sqrt{35} = \dfrac{2}{\sqrt{37}+\sqrt{35}} < \dfrac{2}{6+5} = \dfrac{2}{11}$;

$\sqrt{37}+\sqrt{35} < 12$ (xem Ví dụ 26) $\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{37}+\sqrt{35}} > \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

Vậy $\dfrac{1}{6} < a < \dfrac{2}{11}$.

Trong dãy số tăng dần $\dfrac{2}{13}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{11}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{9}$, số lớn nhất nhỏ hơn a là $\dfrac{1}{6}$, số nhỏ nhất lớn hơn a là $\dfrac{2}{11}$.

b) Ta có $a = \sqrt{65}-\sqrt{63} = \dfrac{2}{\sqrt{65}+\sqrt{63}}$.

$\sqrt{65}+\sqrt{63} > 8+7 = 15$ nên $a < \dfrac{2}{15}$.

$\sqrt{65}+\sqrt{63} < 16$ (xem Ví dụ 26) nên $a > \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.

Ta có $\dfrac{1}{8} < a < \dfrac{2}{15}$ nên $0{,}125 < a < 0{,}1333...$, do đó phần thập phân của a sát với số 0,13 nhất.

95. Chứng minh rằng mỗi số hạng của A đều lớn hơn 0,001. Dùng bất đẳng thức $\dfrac{1}{\sqrt{ab}} > \dfrac{2}{a+b}$ với $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

96. a) Ta có
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$
Dễ dàng giải tiếp bài toán.

b) Ta có
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{n(n+1)}=\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
$$=\left(1+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$
Dễ dàng giải tiếp bài toán.

97. Đặt $a=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ta có
$$\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>...>\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ nên } a<n.\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$
Ta có $$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$
nên $$a<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+...+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{1}-\sqrt{0})=2\sqrt{n}.$$
Chú ý : Ở Ví dụ 28, ta còn có kết quả mạnh hơn $2\sqrt{n}-2<a<2\sqrt{n}-1$.

98. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong 25 số tự nhiên đã cho, không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử
$$a_1<a_2<...<a_{25}.$$
Suy ra $$a_1\geq 1,\ a_2\geq 2,\ ...,\ a_{25}\geq 25.$$
Thế thì $$\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{25}}}\leq\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{25}}. \quad (1)$$
Ta lại có
$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{25}}<2\sqrt{25}-1=9 \text{ (xem Ví dụ 28).} \quad (2)$$
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{25}}}<9$, trái với giả thiết. Vậy tồn tại hai số bằng nhau trong 25 số $a_1, a_2 ..., a_{25}$.

Cách 2. Theo Ví dụ 26, ta có

$$\frac{\sqrt{2003}+\sqrt{2005}}{2} < \sqrt{2004}$$

nên $\sqrt{2003}+\sqrt{2005} < \sqrt{2004}+\sqrt{2004}$,

do đó $\sqrt{2005}-\sqrt{2004} < \sqrt{2004}-\sqrt{2003}$ tức là $b < a$.

93. $a = \sqrt{80}-\sqrt{81} < 0$, $d = \sqrt{324}-\sqrt{325} < 0$, $e = \sqrt{120}-\sqrt{121} < 0$.

Xét b và c, ta có

$$b = 9-\sqrt{80} = \frac{1}{9+\sqrt{80}} > 0\ ;\quad c = 7-\sqrt{48} = \frac{1}{7+\sqrt{48}} > 0.$$

Do $9+\sqrt{80} > 7+\sqrt{48}$ nên $b < c$. Số phải tìm là b.

94. a) $a = \sqrt{37}-\sqrt{35} = \dfrac{2}{\sqrt{37}+\sqrt{35}} < \dfrac{2}{6+5} = \dfrac{2}{11}$;

$$\sqrt{37}+\sqrt{35} < 12 \text{ (xem Ví dụ 26)} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{37}+\sqrt{35}} > \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Vậy $\dfrac{1}{6} < a < \dfrac{2}{11}$.

Trong dãy số tăng dần $\dfrac{2}{13}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{11}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{9}$, số lớn nhất nhỏ hơn a là $\dfrac{1}{6}$, số nhỏ nhất lớn hơn a là $\dfrac{2}{11}$.

b) Ta có $a = \sqrt{65}-\sqrt{63} = \dfrac{2}{\sqrt{65}+\sqrt{63}}$.

$$\sqrt{65}+\sqrt{63} > 8+7 = 15 \text{ nên } a < \frac{2}{15}.$$

$$\sqrt{65}+\sqrt{63} < 16 \text{ (xem Ví dụ 26) nên } a > \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Ta có $\dfrac{1}{8} < a < \dfrac{2}{15}$ nên $0{,}125 < a < 0{,}1333...$, do đó phần thập phân của a sát với số 0,13 nhất.

95. Chứng minh rằng mỗi số hạng của A đều lớn hơn 0,001. Dùng bất đẳng thức $\dfrac{1}{\sqrt{ab}} > \dfrac{2}{a+b}$ với $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

96. a) Ta có $$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Dễ dàng giải tiếp bài toán.

b) Ta có

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{n(n+1)}=\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Dễ dàng giải tiếp bài toán.

97. Đặt $a=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>...>\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ nên } a<n.\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Ta có $$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

nên $$a<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+...+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{1}-\sqrt{0})=2\sqrt{n}.$$

Chú ý : Ở Ví dụ 28, ta còn có kết quả mạnh hơn $2\sqrt{n}-2<a<2\sqrt{n}-1$.

98. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong 25 số tự nhiên đã cho, không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$a_1<a_2<...<a_{25}.$$

Suy ra $$a_1\geq 1,\ a_2\geq 2,\ ...,\ a_{25}\geq 25.$$

Thế thì $$\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{25}}}\leq\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{25}}. \quad (1)$$

Ta lại có

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{25}}<2\sqrt{25}-1=9 \text{ (xem Ví dụ 28).} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{25}}}<9$, trái với giả thiết. Vậy tồn tại hai số bằng nhau trong 25 số $a_1, a_2 ..., a_{25}$.

99. *Cách 1*. (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học).

Mệnh đề đúng với n = 1 vì $\sqrt{1} \le 1.\sqrt{\frac{1+1}{2}}$.

Giả sử mệnh đề đúng với n = k, tức là

$$S_k = \sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{k} \le k.\sqrt{\frac{k+1}{2}}.$$

Cần chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1.

$$S_{k+1} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{k+1} \le (k+1).\sqrt{\frac{k+2}{2}}.$$

Ta có $\quad S_{k+1} = S_k + \sqrt{k+1} \le k.\sqrt{\frac{k+1}{2}} + \sqrt{k+1}$.

Như vậy chỉ cần chứng minh $k.\sqrt{\frac{k+1}{2}} + \sqrt{k+1} \le (k+1).\sqrt{\frac{k+2}{2}}$, điều này tương đương với

$$\sqrt{k+1}\left(\frac{k}{\sqrt{2}} + 1\right) \le \sqrt{k+1}.\sqrt{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (k + \sqrt{2})^2 \le (k+1)(k+2)$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2 + 2k\sqrt{2} \le k^2 + 2 + 3k$$

$$\Leftrightarrow 2k\sqrt{2} \le 3k, \text{ đúng.}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2. Bất đẳng thức đúng với n = 1.

Xét $n \ge 2$. Áp dụng bất đẳng thức

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)$$

(theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki) với $a_1 = \sqrt{1}$, $a_2 = \sqrt{2}$, ..., $a_n = \sqrt{n}$ ta được

$$(\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n})^2 \le n(1 + 2 + ... + n) = n.\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n} \le n.\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

100. Xét

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+(n+1)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n+1}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}}<\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n}}=$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Do đó

$$a<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{24}}-\frac{1}{\sqrt{25}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}.$$

101. a) Ta có

$$A=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n}$$

$$A<\frac{2}{3}.\frac{4}{5}...\frac{2n}{2n+1}$$

nên

$$A^2<\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}.\frac{2.4...(2n)}{3.5...(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}.$$

Suy ra

$$A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

b) Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2k-1}{2k}<\frac{\sqrt{3k-2}}{\sqrt{3k+1}}. \qquad (1)$$

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow (2k-1)\sqrt{3k+1}<2k\sqrt{3k-2}$

$\Leftrightarrow (4k^2-4k+1)(3k+1)<4k^2(3k-2)$

$\Leftrightarrow 12k^3-8k^2-k+1<12k^3-8k^2$

$\Leftrightarrow k-1>0$, đúng với mọi $k\geq 2$.

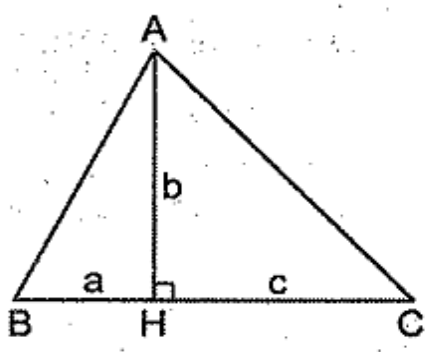
Trong (1), lần lượt thay k bằng 1, 2, ... , n ta được

$$\frac{1}{2}\leq\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}},\ \frac{3}{4}<\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}},...,\ \frac{2n-1}{2n}<\frac{\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3n+1}}.$$

Nhân từng vế các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n}<\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}.\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}}...\frac{\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3n+1}}=\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

102. Đặt các đoạn BH = a, HC = c trên một đường thẳng. Kẻ đoạn thẳng HA = b vuông góc với BC (h.77).



Hình 77

Dễ thấy

$$AB.AC \geq 2S_{ABC} = BC.AH.$$

103. Bình phương hai vế rồi rút gọn, ta được bất đẳng thức tương đương

$$(ad - bc)^2 \geq 0.$$

Chú ý : Cũng có thể chứng minh bằng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki.

104. Giải tương tự Ví dụ 29.

105. Giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Theo đề bài : $b + c > a$. Suy ra

$$b + c + 2\sqrt{bc} > a \Rightarrow (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 > (\sqrt{a})^2 \Rightarrow \sqrt{b} + \sqrt{c} > \sqrt{a}.$$

Vậy ba đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{b}, \sqrt{c}$, $\sqrt{a}$ lập được thành một tam giác.

106. Lần lượt chứng minh

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c) \; ; \qquad (1)$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} < \sqrt{3}(a + b + c). \qquad (2)$$

Chứng minh (1) : Dễ thấy $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ nên $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

Tương tự $b + c \leq \sqrt{2(b^2 + c^2)}$, $c + a \leq \sqrt{2(c^2 + a^2)}$.

Suy ra

$$2(a + b + c) \leq \sqrt{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2})$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(a + b + c) \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}.$$

Chứng minh (2) : Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên

$$(a - b)^2 < c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2 + 2ab \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} < \sqrt{c^2 + 2ab}.$$

Tương tự $\sqrt{b^2 + c^2} < \sqrt{a^2 + 2bc}$, $\sqrt{c^2 + a^2} < \sqrt{b^2 + 2ac}$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} < \sqrt{c^2 + 2ab} + \sqrt{a^2 + 2bc} + \sqrt{b^2 + 2ac}.$$

Dễ dàng chứng minh được $(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$ nên $x + y + z \le \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}$. Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$\sqrt{c^2 + 2ab} + \sqrt{a^2 + 2bc} + \sqrt{b^2 + 2ac} \le \sqrt{3(c^2 + 2ab + a^2 + 2bc + b^2 + 2ac)} =$$

$$= \sqrt{3(a + b + c)^2} = \sqrt{3}(a + b + c).$$

107. Ta có a và b không âm nên

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} = \frac{a+b}{2}\left(a + b + \frac{1}{2}\right) \ge \sqrt{ab}\left(a + b + \frac{1}{2}\right)$$

(bất đẳng thức Cô-si).

Cần chứng minh $\sqrt{ab}(a + b + \frac{1}{2}) \ge a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$. Xét hiệu hai vế

$$\sqrt{ab}\left(a + b + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{ab}\left(a + b + \frac{1}{2} - \sqrt{a} - \sqrt{b}\right) =$$

$$= \sqrt{ab}\left[\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2\right] \ge 0.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{4}$ hoặc $a = b = 0$.

108. Theo bất đẳng thức Cô-si

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}.1} \le \left(\frac{b+c}{a} + 1\right) : 2 = \frac{b+c+a}{2a}.$$

Do đó
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} \ge \frac{2a}{a+b+c}.$$

Tương tự $\sqrt{\frac{b}{a+c}} \ge \frac{2b}{a+b+c}$, $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2c}{a+b+c}$.

Cộng từng vế $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = b + c \\ b = a + c \\ c = a + b \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 0, \text{ trái với giả thiết a, b, c là ba số dương.}$$

Vậy đẳng thức không xảy ra.

109. Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$ với $x > 0$, $y > 0$ thì

$$\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+a} = \frac{a^2 + ad + bc + c^2}{(b+c)(a+d)} \geq \frac{4(a^2 + ad + bc + c^2)}{(a+b+c+d)^2}. \quad (1)$$

Tương tự $$\frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b} \geq \frac{4(b^2 + ab + cd + d^2)}{(a+b+c+d)^2}. \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) được

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq$$

$$\geq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ad + bc + ab + cd)}{(a+b+c+d)^2} = 4B.$$

Cần chứng minh $B \geq \frac{1}{2}$, bất đẳng thức này tương đương với

$$2B \geq 1 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ad + bc + ab + cd) \geq (a+b+c+d)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 0 \text{ đúng.}$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$.

110. Đặt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a$. Bình phương hai vế ta được $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 = a^2$. Dễ dàng chứng minh $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2$ nên $a^2 \geq 4$, do đó $a \geq 2$ hoặc $a \leq -2$. (1)

Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$a^2 - 2 + 4 \geq 3a \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq 2 \text{ hoặc } a \leq 1. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra (2). Bài toán được chứng minh.

111. $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} > 100 \Leftrightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 100.$ (1)

Đến đây có thể giải bất phương trình (1), bằng cách chuyển vế $\sqrt{n-1} > 100 - \sqrt{n}$, bình phương hai vế và đưa về $\sqrt{n} > 50,005$ do đó $n > 2500,500025$. Do $n \in \mathbb{N}$ và nhỏ nhất nên $n = 2501$.

Cũng có thể ước lượng từ (1) để thấy $\sqrt{n}$ vào khoảng 50. Với $n \le 2500$ thì

$$\sqrt{n} + \sqrt{n-1} \le \sqrt{2500} + \sqrt{2499} < 100,$$

với $n = 2501$ thì $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} = \sqrt{2501} + \sqrt{2500} > 100$.

Ta chọn $n = 2501$.

112. Xét bất đẳng thức $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \le n(a^4 + b^4 + c^4)$. Bất đẳng thức phải đúng với $a = b = c$, do đó $(3a^2)^2 \le n.3a^4$ nên $n \ge 3$. Xảy ra được với $n = 3$, vì bất đẳng thức $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \le 3(a^4 + b^4 + c^4)$ là đúng (bạn đọc tự chứng minh).

Vậy giá trị tự nhiên nhỏ nhất của n là 3.

113. Ta có $$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Cần chứng minh $$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} < \frac{(a-b)^2}{8b}. \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow b\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 < \frac{(a-b)^2}{4} \Leftrightarrow \sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) < \frac{a-b}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{ab} - 2b < a - b \Leftrightarrow 0 < a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2, \text{ đúng với } a > b > 0.$$

114. Ta có $S = 5 + 7 + 9 + ... + x$, gồm $\frac{x-5}{2} + 1 = \frac{x-3}{2}$ (số hạng).

$$S = \frac{(5+x)(x-3)}{2.2} = \frac{x^2 + 2x - 15}{4}.$$

Giải $S \ge 10000 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 \ge 40000 \Leftrightarrow (x+1)^2 \ge 40016$. Vì x là số tự nhiên nên $x + 1 > 200$ hay $x > 199$.

Do x là số lẻ nhỏ nhất thoả mãn $x > 199$ nên $x = 201$. Giá trị của x được in ra là 201.

115. *Cách 1.* Đặt $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Bất đẳng thức phải chứng minh $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ tương đương với

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz \quad \text{hay} \quad x^3+y^3+z^3-3xyz \geq 0.$$

Ta có hằng đẳng thức

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2].$$

Do $a, b, c \geq 0$ nên $x, y, z \geq 0$, do đó $x^3+y^3+z^3-3xyz \geq 0$.

Như vậy $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2. Đặt $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với hai số không âm, ta có

$$(x^3+y^3)+(z^3+xyz) \geq 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{xyz^4} = 2\sqrt{xy}(xy+z^2). \quad (1)$$

$$xy+z^2 \geq 2\sqrt{xyz^2} = 2z\sqrt{xy}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$x^3+y^3+z^3+xyz \geq 2\sqrt{xy}\,.\,2z\sqrt{xy} = 4xyz$$

tức là $$x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz.$$

Vậy $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y \\ xy = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c.$

116. Từ giả thiết suy ra

$$\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1} \leq 1-\frac{a}{a+1} = \frac{1}{a+1}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương ta có

$$\frac{1}{a+1} \geq \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{bcd}{(b+1)(c+1)(d+1)}}$$

Tương tự $$\frac{1}{b+1} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{acd}{(a+1)(c+1)(d+1)}};$$

$$\frac{1}{c+1} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{abd}{(a+1)(b+1)(d+1)}};$$

$$\frac{1}{d+1} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}}.$$

Nhân từng vế bốn bất đẳng thức, ta được $1 \geq 81abcd$ nên $abcd \leq \frac{1}{81}$.

117. Gọi $A = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki được

$$3A = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right)(1+1+1) \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với ba số x, y, z không âm, ta được

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}} = 3. \quad (2)$$

Nhân từng vế của (1) với (2)

$$3A\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 \Rightarrow A \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

118. *Cách 1.* (Dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki)

Ta có $$\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \leq (x^2+y^2)(1-y^2+1-x^2).$$

Đặt $x^2 + y^2 = m$ ta được $1^2 \leq m(2-m) \Rightarrow (m-1)^2 \leq 0 \Rightarrow m = 1$.

Cách 2. Theo giả thiết

$$x\sqrt{1-y^2} = 1 - y\sqrt{1-x^2}.$$

Bình phương hai vế được

$$x^2(1-y^2) = 1 - 2y\sqrt{1-x^2} + y^2(1-x^2) \Rightarrow x^2 = 1 - 2y\sqrt{1-x^2} + y^2$$

$$\Rightarrow 0 = \left(y - \sqrt{1-x^2}\right)^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

119. Đặt $x = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$, $y = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ thì $x^3 + y^3 = 6$. (1)

Xét hiệu $b^3 - a^3$, được

$$b^3 - a^3 = 24 - (x+y)^3 = 24 - (x^3 + y^3) - 3xy(x+y).$$

Do (1) nên

$$24 - (x^3 + y^3) = 4(x^3 + y^3) - (x^3 + y^3) = 3(x^3 + y^3).$$

Do đó

$$b^3 - a^3 = 3(x^3 + y^3) - 3xy(x+y) = 3(x+y)(x^2 - xy + y^2 - xy) =$$

$$= 3(x+y)(x-y)^2 > 0 \text{ (vì } x > y > 0).$$

Vậy $b^3 > a^3$, do đó $b > a$.

120. a) Kí hiệu $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn).

Ta có

$$a_1 = \sqrt{2} < 2$$

$$a_2 = \sqrt{2+a_1} < \sqrt{2+2} = 2$$

$$a_3 = \sqrt{2+a_2} < \sqrt{2+2} = 2$$

...

$$a_{100} = \sqrt{2+a_{99}} < \sqrt{2+2} = 2.$$

b) Với kí hiệu như câu a thì tử là $2 - a_{100}$, mẫu là

$$2 - a_{99} = 2 - (a_{100}^2 - 2) = 4 - a_{100}^2.$$

Đặt $a_{100} = a$, cần chứng minh $\dfrac{2-a}{4-a^2} > \dfrac{1}{4}$.

Biến đổi tương đương

$$\frac{2-a}{4-a^2} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2+a} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2+a < 4 \Leftrightarrow a < 2, \text{ đúng (theo câu a).}$$

121. a) Bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Với $n \geq 2$, theo khai triển $(a+b)^n$ ta có

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...2.1}{n!}.\frac{1}{n^n}$$

$$< 1 + 1 + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right).$$

Dễ dàng chứng minh được

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Do đó $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

b) Với $n = 2$, ta chứng minh

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}. \qquad (1)$$

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 > \left(\sqrt{2}\right)^6 \Leftrightarrow 3^2 > 2^3$, đúng.

Với $n \geq 3$, ta chứng minh

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}. \qquad (2)$$

Thật vậy, (2) $\Leftrightarrow \left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^{n(n+1)} < \left(\sqrt[n]{n}\right)^{n(n+1)}$

$$\Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n. \qquad (3)$$

Theo câu a) ta có $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, mà $3 \leq n$ nên (3) được chứng minh, do đó (2) được chứng minh.

122. Xét hiệu

$$(a + b + c)(x + y + z) - 3(ax + by + cz)$$
$$= a(x + y + z) - 3ax + b(x + y + z) - 3by + c(x + y + z) - 3cz$$
$$= a(y + z - 2x) + b(x + z - 2y) + c(x + y - 2z)$$
$$= a[(y - x) - (x - z)] + b[(z - y) - (y - x)] + c[(x - z) - (z - y)]$$
$$= (y - x)(a - b) + (x - z)(c - a) + (z - y)(b - c) \geq 0$$

vì $a \geq b \geq c$ và $x \leq y \leq z$.

123. Đặt $0,\underbrace{99\ldots9}_{20 \text{ chữ số } 9} = a$. Ta sẽ chứng minh rằng 20 chữ số thập phân đầu tiên của $\sqrt{a}$ là các chữ số 9. Muốn vậy chỉ cần chứng minh $a < \sqrt{a} < 1$.

Thật vậy ta có

$$0 < a < 1 \Rightarrow a(a - 1) < 0 \Rightarrow a^2 - a < 0 \Rightarrow a^2 < a.$$

Từ $a^2 < a < 1$ suy ra $a < \sqrt{a} < 1$.

Vậy $\sqrt{0,\underbrace{99\ldots9}_{20 \text{ chữ số } 9}} = 0,\underbrace{99\ldots9}_{20 \text{ chữ số } 9}\ldots$

124. a) Đặt $A = (8 + 3\sqrt{7})^7$. Để chứng minh bài toán, chỉ cần tìm số B sao cho $0 < B < \frac{1}{10^7}$ và A + B là số tự nhiên.

Chọn $B = (8 - 3\sqrt{7})^7$. Dễ thấy $B > 0$ vì $8 > 3\sqrt{7}$ (do $64 > 63$). Ta có

$$8 + 3\sqrt{7} > 10 \Rightarrow \frac{1}{(8 + 3\sqrt{7})^7} < \frac{1}{10^7} \Rightarrow (8 - 3\sqrt{7})^7 < \frac{1}{10^7}.$$

Theo khai triển $(x + y)^n$ ta có

$$A = (8 + 3\sqrt{7})^7 = a + b\sqrt{7} \text{ với } a, b \in \mathbb{N};$$
$$B = (8 - 3\sqrt{7})^7 = a - b\sqrt{7}.$$

Suy ra $A + B = 2a$, là số tự nhiên.

Do $0 < B < \frac{1}{10^7}$ và A + B là số tự nhiên nên a có bảy chữ số 9 liền sau dấu phẩy.

b) Giải tương tự như câu a).

125. Ta thấy nếu n là số chính phương thì $\sqrt{n}$ là số tự nhiên, nếu n không là số chính phương thì $\sqrt{n}$ là số vô tỉ, nên $\sqrt{n}$ không có dạng $\overline{....,5}$. Do đó ứng với mỗi số $n \in \mathbf{N}^*$ có duy nhất một số nguyên a_n gần $\sqrt{n}$ nhất.

Qua ví dụ ở đề bài, ta thấy với n bằng 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,... thì a_n bằng 1, 1, 2, 2, 2, 2,3,... Ta sẽ chứng minh rằng a_n lần lượt nhận các giá trị : hai số 1, bốn số 2, sáu số 3... Nói cách khác, ta sẽ chứng minh bất phương trình

$1 - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < 1 + \frac{1}{2}$ có hai nghiệm nguyên dương,

$2 - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < 2 + \frac{1}{2}$ có bốn nghiệm nguyên dương,

$3 - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < 3 + \frac{1}{2}$ có sáu nghiệm nguyên dương,

tổng quát : $k - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < k + \frac{1}{2}$ có 2k nghiệm nguyên dương.

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < x < k^2 + k + \frac{1}{4}.$$

Rõ ràng bất phương trình này có 2k nghiệm nguyên dương là

$$k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, ..., k^2 + k.$$

Do đó

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{1980}} = \underbrace{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right)}_{2\text{số}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{4\text{số}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + ... + \frac{1}{3}\right)}_{6\text{số}} + ... +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{44} + ... + \frac{1}{44}\right)}_{88\text{số}} = 2.44 = 88.$$

TÌM CỰC TRỊ

126. a) $\min A = 5 - 2\sqrt{6}$ với $x = 0$; $\max A = \frac{1}{5}$ với $x = \pm\sqrt{6}$.

b) $\min B = 0$ với $x = 1 \pm \sqrt{5}$; $\max B = \sqrt{5}$ với $x = 1$.

127. a) $A = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$; $\min A = -\frac{1}{4}$ với $x = \frac{1}{4}$.

b) Đặt $\sqrt{x - 2005} = y$, $\min B = 2004\frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2005\frac{1}{4}$.

128. Đặt $\sqrt{2 - x} = y \geq 0$, ta có $y^2 = 2 - x$;

$$A = 2 - y^2 + y = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}.$$

$$\max A = \frac{9}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}.$$

129. a) Tìm giá trị lớn nhất : Áp dụng $|a + b| \leq |a| + |b|$ được

$$A \leq |x| + \sqrt{2} + |y| + 1 = 6 + \sqrt{2}.$$

$\max A = 6 + \sqrt{2}$ khi chẳng hạn $x = -2$, $y = -3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất : Áp dụng $|a - b| \geq |a| - |b|$ được

$$A \geq |x| - \sqrt{2} + |y| - 1 = 4 - \sqrt{2}$$

$\min A = 4 - \sqrt{2}$ khi chẳng hạn $x = 2$, $y = 3$.

130. a) $A = |x - 1| + |x - 3| = |x - 1| + |3 - x|$. Áp dụng bất đẳng thức $|M| \geq M$, ta có $A \geq x - 1 + 3 - x = 2$.

$$\min A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

Chú ý : Có thể tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng đồ thị, xem Bài tập 72.

b) Đặt $\sqrt{x - 1} = y \geq 0$. Rút gọn B thành $|y - 1| + |y + 1|$. Ta có

$$B = |1 - y| + |y + 1| \geq 1 - y + y + 1 = 2.$$

$$\min B = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 1 - y \geq 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

c) $C = |2 - x| + |2x - 3| + |4x - 1| + |10 - 5x| \geq$

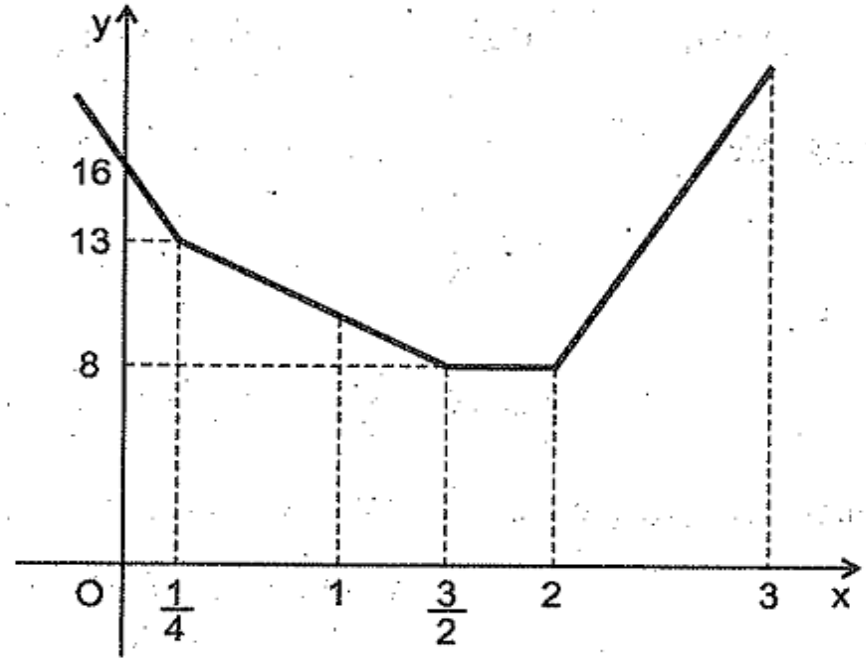
$$\geq 2 - x + 2x - 3 + 4x - 1 + 10 - 5x = 8.$$

$\min C = 8 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0, 2x - 3 \geq 0, 4x - 1 \geq 0, 10 - 5x \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq 2.$$

Chú ý : Có thể giải bài toán bằng cách xét từng khoảng giá trị của x

$$C = \begin{cases} 16 - 12x \text{ với } x < \frac{1}{4} \\ -4x + 14 \text{ với } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{2}. \\ 8 \text{ với } \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \\ 12x - 16 \text{ với } x > 2 \end{cases}$$



Hình 78

Đồ thị của hàm số, xem hình 78 (đơn vị trên hai trục tọa độ được lấy khác nhau để dễ quan sát).

131. *Cách 1.* $A^2 = 2\left(x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right) \geq 4.$

$\min A = 2$ với $x = 0$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si (dùng kiến thức của §7) được

$$A \geq 2\sqrt[4]{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = 2\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} \geq 2.$$

$\min A = 2$ với $x = 0$.

132. a) Xét $A^2 = 2 + 2\sqrt{1 - x^2}$.

Ta có $\quad 0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 2 + 2\sqrt{1 - x^2} \leq 4 \Rightarrow 2 \leq A^2 \leq 4$

$\min A = \sqrt{2}$ với $x = \pm 1$; $\max A = 2$ với $x = 0$.

b) Xét $B^2 = 4 + 2\sqrt{(x - 2)(6 - x)}$.

Ta có $B^2 \geq 4$, từ đó $\min B = 2 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 6$.

Áp dụng bất đẳng thức $2\sqrt{ab} \leq a + b$ ta có

$$B^2 \leq 4 + (x - 2) + (6 - x) = 8.$$

Từ đó $\quad \max B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x - 2 = 6 - x \Leftrightarrow x = 4.$

133. a) Áp dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$ (Ví dụ 27) ta có

$$A=\sqrt{x^2+1^2}+\sqrt{(1-x)^2+2^2}\ge\sqrt{(x+1-x)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$$

$\min A=\sqrt{10}\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{x}=2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

b) Giải tương tự câu a ; $\min B=\sqrt{41}\Leftrightarrow x=\dfrac{16}{5}$.

134. Điều kiện xác định :

$$\begin{cases}-x^2+4x+12\ge 0\\-x^2+2x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)(6-x)\ge 0\\(x+1)(3-x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x\le 3.\qquad(1)$$

Xét hiệu $\quad(-x^2+4x+12)-(-x^2+2x+3)=2x+9.$

Do (1) nên $2x+9>0$, do đó $A>0$.

Xét $A^2=\left(\sqrt{(x+2)(6-x)}-\sqrt{(x+1)(3-x)}\right)^2$. Hiển nhiên $A^2\ge 0$ nhưng dấu "=" không xảy ra (vì $A>0$). Ta biến đổi A^2 dưới dạng khác

$$\begin{aligned}A^2&=(x+2)(6-x)+(x+1)(3-x)-2\sqrt{(x+2)(6-x)(x+1)(3-x)}\\&=(x+1)(6-x)+(6-x)+(x+2)(3-x)-(3-x)-\\&\qquad-2\sqrt{(x+1)(6-x)(x+2)(3-x)}\\&=(x+1)(6-x)+(x+2)(3-x)-2\sqrt{(x+1)(6-x)(x+2)(3-x)}+3\\&=(\sqrt{(x+1)(6-x)}-\sqrt{(x+2)(3-x)})^2+3.\end{aligned}$$

$A^2\ge 3$. Do $A>0$ nên $\min A=\sqrt{3}$ với $x=0$.

135. Xét $-1\le x\le 0$ thì $A\le 0$.

Xét $0<x\le 1$ thì $\quad A=\sqrt{x^2(1-x^2)}\le\dfrac{x^2+(1-x^2)}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $\qquad\max A=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=1-x^2\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

136. Điều kiện $x^2 \le 5$.

a) Tìm giá trị lớn nhất : Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki được

$$A^2 = \left(2.x + 1.\sqrt{5 - x^2}\right)^2 \le (2^2 + 1^2)(x^2 + 5 - x^2) = 25 \Rightarrow A^2 \le 25.$$

$$A^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \sqrt{5 - x^2} \\ x^2 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 4(5 - x^2) \\ x^2 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Với $x = 2$ thì $A = 5$. Vậy max $A = 5$ với $x = 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất : Chú ý rằng tuy từ $A^2 \le 25$, ta có $-5 \le A \le 5$, nhưng không xảy ra $A = -5$.

Do điều kiện xác định của A, ta có $x^2 \le 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$.

Do đó $2x \ge -2\sqrt{5}$. Ta lại có $\sqrt{5 - x^2} \ge 0$ nên $A = 2x + \sqrt{5 - x^2} \ge -2\sqrt{5}$.
Suy ra min $A = -2\sqrt{5}$ với $x = -\sqrt{5}$.

137. Xét biểu thức phụ $|A|$ và áp dụng các bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki và Cô-si được

$$|A| = |x|(\sqrt{99}.\sqrt{99} + 1.\sqrt{101 - x^2}) \le |x|.\sqrt{(99 + 1)(99 + 101 - x^2)} =$$

$$= |x|.10.\sqrt{200 - x^2} \le 10.\frac{x^2 + 200 - x^2}{2} = 1000.$$

$$|A| = 1000 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 101 \\ \dfrac{\sqrt{99}}{1} = \dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{101 - x^2}} \\ x^2 = 200 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 10.$$

Do đó $-1000 \le A \le 1000$.

min $A = -1000$ với $x = -10$; max $A = 1000$ với $x = 10$.

138. *Cách 1*

$$A = x + y = 1.(x + y) = \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right)(x + y) = a + \frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} + b.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si với hai số dương

$$\frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} \geq 2.\sqrt{\frac{ay}{x}.\frac{bx}{y}} = 2\sqrt{ab}.$$

Suy ra $$A \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

Do đó min $A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ với $\begin{cases} \dfrac{ay}{x} = \dfrac{bx}{y} \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 1 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \sqrt{ab} \\ y = b + \sqrt{ab} \end{cases}.$

Cách 2. Dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

$$A = (x + y).1 = (x + y)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right) \geq \left(\sqrt{x.\frac{a}{x}} + \sqrt{y.\frac{b}{y}}\right)^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

Từ đó tìm được giá trị nhỏ nhất của A.

139. $A = (x + y)(x + z) = x^2 + xz + xy + yz$

$$= x(x + y + z) + yz \geq 2.\sqrt{xyz(x + y + z)} = 2$$

min $A = 2$ khi chẳng hạn $y = z = 1$, $x = \sqrt{2} - 1$.

140. Từ giả thiết suy ra

$$(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 3 = -x^2 \leq 0.$$

Do đó $A^2 - 4A + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (A - 1)(A - 3) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq A \leq 3.$

min $A = 1 \Leftrightarrow x = 0, y = \pm 1.$

max $A = 3 \Leftrightarrow x = 0,\ y = \pm\sqrt{3}.$

141. Ta có $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$; $y^4 + z^4 \geq 2y^2z^2$; $z^4 + x^4 \geq 2z^2x^2$.

Suy ra $$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2. \qquad (1)$$

Mặt khác, dễ chứng minh rằng nếu $a + b + c = 1$ thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$. Do đó từ giả thiết suy ra

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq \frac{1}{3}. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra min $A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

142. Tìm giá trị lớn nhất : Áp dụng bất đẳng thức $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ (xem Bài tập 91a), ta được $(x + y + z)^2 \leq 9$ nên

$$x + y + z \leq 3. \qquad (1)$$

Ta có bất đẳng thức $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$ (bạn đọc tự chứng minh), mà $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ nên

$$xy + yz + zx \leq 3. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \leq 6$. Ta có max $A = 6 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất : Đặt $x + y + z = m$ thì

$$m^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 3 + 2(xy + yz + zx).$$

Do đó $xy + yz + zx = \frac{m^2 - 3}{2}$. Ta có $A = m + \frac{m^2 - 3}{2}$ nên

$$2A = m^2 + 2m - 3 = (m + 1)^2 - 4 \geq -4.$$

Suy ra $A \geq -2$.

min $A = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$ khi chẳng hạn $x = -1$, $y = -1$, $z = 1$.

143. $A = |x - y| \geq 0$, do đó A lớn nhất khi và chỉ khi A^2 lớn nhất.

$$A^2 = (x - y)^2 = \left(1.x - \frac{1}{2}.2y\right)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{4}\right)(x^2 + 4y^2) = \frac{5}{4}$$

(bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki).

$$\max A = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x} = -\frac{1}{2} \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{10} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}.$$

144. a) Tìm giá trị lớn nhất

Từ giả thiết

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \le x^2 \\ y^3 \le y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + y^3 \le x^2 + y^2 = 1$$

$$\max A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x^2 \\ y^3 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, y = 1 \text{ hoặc } x = 1, y = 0.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất

$$(x + y)^2 \le 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow x + y \le \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x + y}{\sqrt{2}} \le 1.$$

Do đó $x^3 + y^3 \ge \dfrac{(x^3 + y^3)(x + y)}{\sqrt{2}}$. Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

$$(x^3 + y^3)(x + y) = [(\sqrt{x^3})^2 + (\sqrt{y^3})^2][(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2] \ge$$

$$\ge (\sqrt{x^3}.\sqrt{x} + \sqrt{y^3}.\sqrt{y})^2 = (x^2 + y^2)^2 = 1.$$

$$\min A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

145. Ta có $a + 1 \ge 0$, $a - 3 \le 0$ nên $(a + 1)(a - 3) \le 0$, suy ra $a^2 - 2a - 3 \le 0$, do đó $a^2 \le 2a + 3$.

Tương tự, $b^2 \le 2b + 3$, $c^2 \le 2c + 3$.

Suy ra $$a^2 + b^2 + c^2 \le 2(a + b + c) + 9 = 11.$$

$$\min (a^2 + b^2 + c^2) = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \text{ hoặc } a = 3 \\ b = -1 \text{ hoặc } b = 3 \\ c = -1 \text{ hoặc } c = 3 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ trong a, b, c có một số bằng 3, hai số bằng -1.

146. Trước hết ta tìm liên hệ giữa a^3 và a^2 với điều kiện $a > -1$. Ta có

$$(a^3 + 1) - 3(a^2 - 1) = (a + 1)(a^2 - a + 1) - 3(a - 1)(a + 1)$$

$$= (a + 1)(a^2 - a + 1 - 3a + 3) = (a + 1)(a^2 - 4a + 4) = (a + 1)(a - 2)^2 \ge 0.$$

Do đó $a^3 - 3a^2 \geq -4$. Tương tự $b^3 - 3b^2 \geq -4$, $c^3 - 3c^2 \geq -4$.

Suy ra $(a^3 + b^3 + c^3) - 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq -12$ tức là $B - 36 \geq -12$.

$\min B = 24 \Leftrightarrow a = b = c = 2$.

147. Đặt $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$, ta có a, b là hai số không âm, $a + b = 1$.

$A = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab = 1 - 3ab$.

Do $ab \geq 0$ nên $A \leq 1$.

$\max A = 1 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 1$ hoặc $x = 1, y = 0$.

Ta có $$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 3ab \geq \frac{1}{4}.$$

$$\min A = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4}.$$

148. a) $A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2a + 2b \leq 2$.

$$\max A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

b) Ta có $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^4 = 2(a^2 + b^2 + 6ab)$.

Tương tự
$$(\sqrt{a} + \sqrt{c})^4 \leq 2(a^2 + c^2 + 6ac)$$
$$(\sqrt{a} + \sqrt{d})^4 \leq 2(a^2 + d^2 + 6ad)$$
$$(\sqrt{b} + \sqrt{c})^4 \leq 2(b^2 + c^2 + 6bc)$$
$$(\sqrt{b} + \sqrt{d})^4 \leq 2(b^2 + d^2 + 6bd)$$
$$(\sqrt{c} + \sqrt{d})^4 \leq 2(c^2 + d^2 + 6cd).$$

Suy ra $$B \leq 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd) =$$
$$= 6(a + b + c + d)^2 \leq 6.$$

$$\max B = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c} = \sqrt{d} \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = \frac{1}{4}.$$

149. $A = \frac{x-1+1}{2} + \frac{2}{x-1} = \frac{1}{2} + \left(\frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1}\right) \geq \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

$\min A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

150. Dễ chứng minh $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ với $a > 0, b > 0$. Do đó

$$a^3 + b^3 + 1 \geq ab(a + b) + abc = ab(a + b + c).$$

$$A \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} + \frac{1}{bc(a+b+c)} + \frac{1}{ca(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = 1.$$

$\max A = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

151. a) Theo bất đẳng thức Cô-si

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x}} = 2y.$$

Tương tự $\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 2z$; $\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geq 2x$.

Suy ra $2A \geq 2(x + y + z) = 2$; $\min A = 1$ với $x = y = z = \frac{1}{3}$.

b) Ta có $$A^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{x^2z^2}{y^2} + 2.$$

Hãy chứng tỏ $A^2 \geq 3$.

$$\min A = \sqrt{3} \text{ với } x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

152. Áp dụng Ví dụ 29 có $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$ với a, b, c là các số dương ;

$$\min A = 3 \Leftrightarrow a = b = c = 2.$$

153. a) Giải tương tự Ví dụ 29, ta được $A \geq \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}$;

$$\min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

b) Giải tương tự Ví dụ 29, ta được $B \geq \dfrac{a+b+c+d}{2} = \dfrac{1}{2}$;

$$\min B = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = d = \frac{1}{4}.$$

154. Xét $A^2 = \dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x-y)^2}$. Đặt $x^2 + y^2 = a$ thì $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = a - 2$.

Do $x > y$ nên $a - 2 > 0$.

$A^2 = \dfrac{a^2}{a-2}$. Dễ thấy $\dfrac{a^2}{a-2} \geq 8$ vì $a^2 - 8(a-2) = (a-4)^2 \geq 0$.

Do $A \geq 0$ nên min $A = 2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm\sqrt{6} \\ x - y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

155. Điều kiện $-1 < x < 1$.

Cách 1

$$A^2 = \frac{25 - 30x + 9x^2}{1 - x^2} = \frac{(3-5x)^2}{1-x^2} + 16 \geq 16 \text{ (chú ý rằng } 1 - x^2 > 0).$$

Từ đó tìm được giá trị nhỏ nhất của A.

Cách 2. Đặt $\sqrt{1+x} = a$, $\sqrt{1-x} = b$, ta có $a > 0$, $b > 0$.

$$A = \frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 + x + 4(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{a^2 + 4b^2}{ab} \geq 2.\frac{\sqrt{a^2.4b^2}}{ab} = \frac{2.2ab}{ab} = 4.$$

min $A = 4$ với $a^2 = 4b^2$, khi đó $x = \dfrac{3}{5}$.

156. a) Dễ chứng minh được

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow A^2 \geq \frac{16}{(x+y)^2} \geq \frac{16}{2(x^2+y^2)} = 8.$$

$$\min A = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Biến đổi $$B = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2.$$

Tuy $B \geq 8$ nhưng không xảy ra $B = 8$ vì không xảy ra đồng thời $x = y = 1$ và $x^2 + y^2 = 1$. Để có $x = y$ và $x^2 + y^2 = 1$ thì $2x^2 = 1$, tức là $x = \frac{1}{2x}$. Ta biến đổi như sau :

$$B = \left(x + \frac{1}{2x}\right) + \left(y + \frac{1}{2y}\right) + \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2.$$

Dễ thấy $x + \frac{1}{2x} \geq \sqrt{2}$, $y + \frac{1}{2y} \geq \sqrt{2}$, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. Còn $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \geq \sqrt{2}$ (xem câu a). Do đó $\min B = 4 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$.

157. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

$$(a^2 + b^2)(m^2 + n^2) \geq (am + bn)^2$$

$$2A = \left[\left(\sqrt{\frac{2}{2-x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2\right].\left[(\sqrt{2-x})^2 + (\sqrt{x})^2\right] \geq \left(\sqrt{\frac{2}{2-x}.(2-x)} + \sqrt{\frac{1}{x}.x}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2A \geq \left(\sqrt{2} + 1\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$\min 2A = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{2-x}}{2-x} = \frac{\frac{1}{x}}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{(2-x)^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 - 4x + 4$$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 8 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} - 2$ (chú ý $x > 0$).

Vậy $\min A = 1{,}5 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} - 2$.

158. $A = 3^x + 3^y \geq 2.\sqrt{3^x.3^y} = 2.\sqrt{3^{x+y}} = 2.\sqrt{3^4} = 18$.

$$\min A = 18 \text{ với } x = y = 2.$$

159. Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b \geq c + d$. Từ giả thiết suy ra

$$b + c \geq \frac{a + b + c + d}{2};$$

$$A = \frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b} = \frac{b+c}{c+d} - \left(\frac{c}{c+d} - \frac{c}{a+b}\right) \geq$$

$$\geq \frac{a+b+c+d}{2(c+d)} - \left(\frac{c+d}{c+d} - \frac{c+d}{a+b}\right).$$

Đặt $a + b = x$, $c + d = y$ với $x \geq y > 0$, ta có

$$A \geq \frac{x+y}{2y} - \frac{y}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x}{2y} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{y}{x} = \left(\frac{x}{2y} + \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \geq$$

$$\geq 2.\sqrt{\frac{x}{2y}.\frac{y}{x}} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

$\min A = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow d = 0,\ x = y\sqrt{2},\ b + c = a + d$; khi chẳng hạn $a = \sqrt{2} + 1$, $b = \sqrt{2} - 1$, $c = 2$, $d = 0$.

160. a) Do $1 \leq a \leq b \leq c \leq 2$ nên $2 \geq b$, $a \geq 1$, suy ra $2a \geq b$, do đó $\frac{a}{b} \geq \frac{1}{2}$.

b) Ta có $\frac{a}{b} \leq 1$, lại có $\frac{a}{b} \geq \frac{1}{2}$ (câu a)) nên

$$\left(2 - \frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{b}\right) \leq 0 \Rightarrow 1 - \frac{2a}{b} - \frac{a}{2b} + \frac{a^2}{b^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{a^2}{b^2} \leq \frac{5}{2}.\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq \frac{5}{2} \text{ (chia hai vế cho } \frac{a}{b}\text{)}.$$

$\max A = 2{,}5 \Leftrightarrow b = 2a \Leftrightarrow a = 1$ và $b = 2$.

Nhận xét : Mặc dù ta có $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{b} \leq 1$, nhưng ta đã dùng một bất đẳng thức "yếu hơn", đó là $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{b} \leq 2$ dẫn đến $\left(2 - \frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{b}\right) \leq 0$ để chứng minh được đơn giản vì $\frac{1}{2}$ và 2 là hai số nghịch đảo của nhau.

Nếu dùng bất đẳng thức $\left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{b}\right) \leq 0$ thì phải chứng minh như sau

$$\frac{1}{2}-\frac{a}{b}-\frac{a}{2b}+\frac{a^2}{b^2}\le 0 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{2}\le \frac{a}{b}+\frac{a}{2b}=\frac{3a}{2b}.$$

Chia hai vế cho $\frac{a}{b}$ được $\qquad \frac{a}{b}+\frac{b}{2a}\le \frac{3}{2}. \qquad (1)$

Ta lại có $\qquad \frac{b}{2a}\le 1. \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\qquad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\le 2,5.$

c) Ta có $\frac{a}{b}\le 1$, $\frac{b}{c}\le 1$, $\frac{b}{a}\ge 1$, $\frac{c}{b}\ge 1$ nên

$\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)\ge 0$ (xảy ra đẳng thức với b = a hoặc b = c) ;

$\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)\ge 0$ (xảy ra đẳng thức với b = a hoặc b = c).

Suy ra $\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)+\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)\ge 0$

do đó $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\le 2+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$ nên $B\le 2+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$.

Chứng minh như câu a, ta được $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\le 2,5$. Do đó $B\le 4,5$.

$$\max B=4,5 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=2 \\ b=1 \text{ hoặc } b=2 \end{cases}$$

161. $M=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$$=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right).$$

Theo Bài tập 160, ta có $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\le 4,5$ và $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\le 2,5$ nên $M\le 10$.

$$\max M = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = c = 2 \end{cases}$$

Nhận xét : Lời giải trên dựa vào kết quả của Bài tập 160.

Một cách khác tìm giá trị lớn nhất của M ngắn gọn hơn, nhưng cách biến đổi có phần chưa tự nhiên và phải biết trước giá trị lớn nhất của M bằng 10.

Do $1 \le a \le b \le c \le 2$ nên $2 \le 2a \le 2b \le 2c$, do đó $a \le c \le 2 \le 2a \le 2c$. Ta có

$$M \le 10 \Leftrightarrow (a + b + c).\frac{ab + bc + ca}{abc} \le 10.$$

Xét hiệu

$$\begin{aligned}
&(a + b + c)(ab + bc + ca) - 10abc \\
&= (a + c)[b(a + c) + ca] + b[b(a + c) + ca] - 10abc \\
&= b(a + c)^2 + ac(a + c) + b^2(a + c) - 9abc \\
&= ac(a + c) + b^2(a + c) - b(a + c)^2 + 2b(a + c)^2 - 9abc \\
&= (a + c)(ac + b^2 - ba - bc) + b(2a^2 + 2c^2 - 5ac) \\
&= (a + c)(b - a)(b - c) + b(2a - c)(a - 2c) \le 0.
\end{aligned}$$

Vậy $\max M = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 1 \\ b = c = 2 \end{cases}$

162. Ta có $x \le |x|$ (xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $x \ge 0$) nên $-4x \ge -4|x|$. Do đó $A \ge x^4 - 4|x| + 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với bốn số không âm

$$x^4 + 1 + 1 + 1 \ge 4\sqrt[4]{x^4} = 4|x| \Rightarrow x^4 - 4|x| + 1 \ge -2.$$

$\min A = -2 \Leftrightarrow x^4 = 1$ và $x \ge 0 \Leftrightarrow x = 1$.

163. Với $x < 2$ thì $A \ge 0$ (1)

Với $2 \le x \le 4$, xét $-A = x^2(x - 2)$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm

$$-\frac{A}{4} = \frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(x - 2) \le \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + x - 2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2x - 2}{3}\right)^3 \le 8 \text{ (do } x \le 4)$$

$$-A \le 32 \Rightarrow A \ge -32.$$

$\min A = -32$ với $x = 4$.

164. Điều kiện : $x^2 \le 9$.

$$A^2 = x^4(9 - x^2) = 4.\frac{x^2}{2}.\frac{x^2}{2}(9 - x^2) \le 4.\left(\frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + 9 - x^2}{3}\right)^3 = 4.27$$

max $A = 6\sqrt{3}$ với $x = \pm\sqrt{6}$.

165. Với các số dương x, y, z ta có bất đẳng thức

$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge 9$ (chỉ cần làm phép nhân và sử dụng $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$ với $a > 0$, $b > 0$). Suy ra

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge 9 \Rightarrow \frac{yz + xz + xy}{xyz} \ge 9 \Rightarrow xy + yz + zx - 9xyz \ge 0$$

$$\Rightarrow A \ge -3xyz. \qquad (1)$$

Mặt khác có

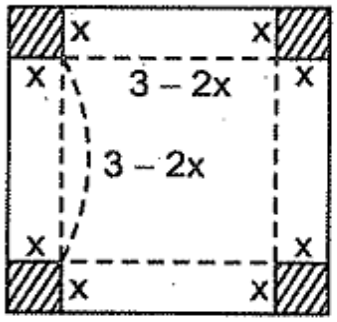
$$xyz \le \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \text{ nên } -3xyz \ge -\frac{1}{9}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \ge -\frac{1}{9}$.

min $A = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

166. a) (h.79) Gọi x là cạnh của hình vuông nhỏ, V là thể tích của hộp. Cần tìm giá trị lớn nhất của

$$V = x(3 - 2x)^2.$$



Hình 79

Theo bất đẳng thức Cô-si với ba số dương

$$4V = 4x(3 - 2x)(3 - 2x) \le \left(\frac{4x + 3 - 2x + 3 - 2x}{3}\right)^3 = 8$$

max $V = 2 \Leftrightarrow 4x = 3 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Thể tích lớn nhất của hộp là $2dm^3$ khi cạnh của hình vuông nhỏ bằng $\frac{1}{2}dm$.

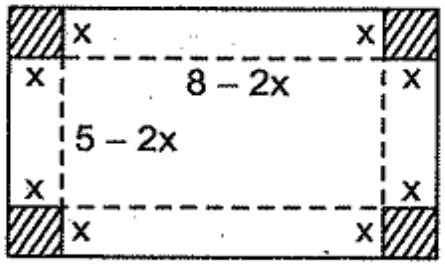
b) (h.80) Gọi x là cạnh của hình vuông cắt ra, V là thể tích của hộp. Cần tìm giá trị lớn nhất của

$$V = x(8 - 2x)(5 - 2x) = 2x(4 - x)(5 - 2x).$$

Theo bất đẳng thức Cô-si với ba số dương

$$\frac{3}{2}V = 3x(4 - x)(5 - 2x)$$

$$\leq \left(\frac{3x + 4 - x + 5 - 2x}{3}\right)^3 = 27.$$



Hình 80

max V = 18 $\Leftrightarrow$ 3x = 4 – x = 5 – 2x $\Leftrightarrow$ x = 1.

Thể tích lớn nhất của hộp là $18dm^3$ khi cạnh của hình vuông cắt ra là 1dm.

167. a)Tìm giá trị lớn nhất :

Cách 1. Với $0 \leq x < \sqrt{6}$ thì $A = x(x^2 - 6) \leq 0$.

Với $\sqrt{6} \leq x \leq 3$ thì $6 \leq x^2 \leq 9$ nên $0 \leq x^2 - 6 \leq 3$.

Suy ra $x(x^2 - 6) \leq 9$; max A = 9 với x = 3.

Cách 2. $A = x(x^2 - 9) + 3x$. Ta có $x \geq 0$, $x^2 - 9 \leq 0$, $3x \leq 9$ nên $A \leq 9$; max A = 9 với x = 3.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất :

Cách 1. $A = x^3 - 6x = x^3 + (2\sqrt{2})^3 - 6x - (2\sqrt{2})^3$

$$= (x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 8) - 6x - 16\sqrt{2}$$

$$= (x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) + (x + 2\sqrt{2}).6 - 6x - 16\sqrt{2}$$

$$= (x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} \geq -4\sqrt{2}.$$

min $A = -4\sqrt{2}$ với $x = \sqrt{2}$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với ba số không âm

$$x^3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \geq 3.\sqrt[3]{x^3.2\sqrt{2}.2\sqrt{2}} = 6x.$$

Suy ra $x^3 - 6x \geq -4\sqrt{2}$; min $A = -4\sqrt{2}$ với $x = \sqrt{2}$.

168. a) Giả sử tích $A = x_1x_2 \ldots x_{30}$ có giá trị nhỏ nhất. Ta sẽ chứng minh rằng trong 30 số $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$ này, không tồn tại hai số lớn hơn 1.

Thật vậy, giả sử tồn tại hai số a, b mà $2 \le a \le b$. Khi đó ta thay a bởi $a - 1$, thay b bởi $b + 1$, ta có

$$(a - 1)(b + 1) < ab, \text{ vì } ab - (a - 1)(b + 1) = b - a + 1 > 0$$

ta được tích mới nhỏ hơn tích A, trái với giả thiết tích A nhỏ nhất.

Vậy tích A nhỏ nhất nếu có 29 số bằng 1, số còn lại bằng $2003 - 29 = 1974$. Khi đó min A = 1974.

b) Giả sử tích $A = x_1x_2 \ldots x_{30}$ có giá trị lớn nhất và $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{30}$. Ta sẽ chứng minh rằng không thể xảy ra $x_{30} - x_1 \ge 2$. Thật vậy, nếu $x_{30} - x_1 \ge 2$ thì ta thay x_{30} bởi $x_{30} - 1$, thay x_1 bởi $x_1 + 1$, ta có $(x_{30} - 1)(x_1 + 1) > x_{30}x_1$, vì $(x_{30} - 1)(x_1 + 1) - x_{30}x_1 = x_{30} - x_1 - 1 > 0$, ta được tích mới lớn hơn tích A, trái với giả thiết tích A lớn nhất.

Như vậy các số $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$ chỉ nhận hai giá trị nguyên dương liên tiếp. Gọi hai số đó là a và $a + 1$, giả sử có k số bằng $a + 1$ và $30 - k$ số bằng a với $0 < k < 30$.

Khi đó $$A = \underbrace{a.a\ldots.a}_{30-k \text{ số}} . \underbrace{(a + 1)(a + 1)\ldots(a + 1)}_{k \text{ số}}.$$

Ta có $$a(30 - k) + k(a + 1) = 2003 \Rightarrow 30a + k = 2003.$$

Do $0 < k < 30$ nên k là số dư trong phép chia 2003 cho 30. Ta tìm được $k = 23$, $a = 66$.

$$\max A = 66^7.67^{23} \text{ với } x_1 = x_2 = \ldots = x_7 = 66$$

$$x_8 = x_9 = \ldots = x_{30} = 67.$$

Nhận xét : Nếu đề bài không yêu cầu các số x_i $(1 \le i \le 30)$ là số nguyên dương thì theo bất đẳng thức Cô-si với n số không âm, tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi các số đó bằng nhau. Do các số x_i phải là số nguyên dương nên ta dự đoán rằng để tích của chúng lớn nhất, các số đó phải "rất sát nhau", chúng chỉ có thể nhận hai giá trị nguyên dương liên tiếp.

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

169. a) Chuyển vế được $$\sqrt{x + 3} = 1 + \sqrt{x - 4}.$$

Bình phương hai vế. Nghiệm $x = 13$.

b) Chuyển vế được $\sqrt{15-x} = 6 - \sqrt{3-x}$.

Bình phương hai vế. Nghiệm $x = -1$.

c) Bình phương hai vế. Nghiệm 1 và 6.

d) Nghiệm $x = 20$ (chú ý rằng $x = 0$ không là nghiệm).

e) $\sqrt{x-1} = 2 + \sqrt{x+1}$. Vế phải lớn hơn vế trái, phương trình vô nghiệm.

170. a) Chuyển vế được $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1 + \sqrt{x-1}$.

Bình phương hai vế. Nghiệm $x = 1$.

b) Bình phương hai vế. Nghiệm $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

c) Bình phương hai vế. Nghiệm $\frac{3}{2} \le x \le 3$.

171. a) Đưa về dạng

$$|x-2| + |3-x| = 1. \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $|A| \ge A$, ta có $|x-2| \ge x-2$, $|3-x| \ge 3-x$ nên

$$|x-2| + |3-x| \ge 1. \qquad (2)$$

Do (1) nên phải xảy ra dấu "=" ở (2), tức là $x - 2 \ge 0$ và $3 - x \ge 0$.

Nghiệm $2 \le x \le 3$.

b) Đặt $\sqrt{x} = y$. Đưa về dạng $|y-2| + |3-y| = 1$. Nghiệm $4 \le x \le 9$.

c) Đặt $\sqrt{x+2} = y$. Đưa về dạng $|y-2| + |3-y| = 1$. Nghiệm $2 \le x \le 7$.

d) Đặt $\sqrt{x-2} = y$. Đưa về dạng $|y-2| + |3-y| = 1$. Nghiệm $6 \le x \le 11$.

172. a) Chuyển vế được $\sqrt{x + \sqrt{1-x}} = 1 - \sqrt{x}$, rồi bình phương hai vế.

Nghiệm $x = 0$ (chú ý loại $x = \frac{16}{25}$).

b) Nghiệm $\frac{25}{16}$.

c) Vế trái lớn hơn x, vế phải không lớn hơn x. Phương trình vô nghiệm.

d) Điều kiện $x \ge 1$ hoặc $x = -1$. Bình phương hai vế rồi rút gọn

$$2\sqrt{2(x+1)^2(x+3)(x-1)} = x^2 - 1 \text{ ta có}$$

$$8(x+1)^2(x+3)(x-1) = (x+1)^2(x-1)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)(7x+25) = 0$$

$x = -\dfrac{25}{7}$ loại. Nghiệm $x = \pm 1$.

e) Vế trái

$$A = \sqrt{x-7} + \sqrt{9-x}$$

$\Rightarrow A^2 = 2 + 2\sqrt{(x-7)(9-x)} \le 2 + (x-7) + (9-x) = 4$, do đó $A \le 2$.

Vế phải $B = (x-8)^2 + 2 \ge 2$.

Theo đề bài, $A = B$ nên $A = B = 2$. Do đó $x - 7 = 9 - x$ và $x = 8$. Vậy $x = 8$, thoả mãn phương trình đã cho.

173. a) Điều kiện $x \ge 2$. (1)

Bình phương hai vế được

$$2x - 1 + x - 2 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 2 - x.$$

Phải có $x \le 2$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $x = 2$. Giá trị này nghiệm đúng phương trình đã cho. Nghiệm $x = 2$.

b) Điều kiện $x \ge -2$.

Chuyển vế được $\sqrt{3x+15} = \sqrt{x+2} + \sqrt{4x+17}$.

Bình phương hai vế, xuất hiện điều kiện $x \le -2$.

Do đó $x = -2$. Giá trị này nghiệm đúng phương trình đã cho.

c) Do $x \ge 1$ nên vế trái lớn hơn hoặc bằng 2, vế phải nhỏ hơn hoặc bằng 2. Suy ra hai vế bằng 2, khi đó $x = 1$, thoả mãn phương trình.

d) Điều kiện $x \ge -1$. Bình phương hai vế, xuất hiện điều kiện $x \le -1$. Nghiệm $x = -1$.

174. a) Đặt $\sqrt{2x + 3 + \sqrt{x+2}} = y$, $\sqrt{2x + 2 - \sqrt{x+2}} = z$. (1)

Ta có $y^2 - z^2 = 1 + 2\sqrt{x+2}$, $y + z = 1 + 2\sqrt{x+2}$.

Suy ra $y - z = 1$. Từ đó $z = \sqrt{x+2}$ (2)

Từ (1) và (2) tính được x.

Nghiệm $x = 2$ (chú ý loại giá trị $x = -1$).

b) Đặt $2x^2 - 9x + 4 = a \geq 0$, $2x - 1 = b \geq 0$. Phương trình là

$$\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = \sqrt{a + 15b}.$$

Bình phương hai vế rồi rút gọn ta được $b = 0$ hoặc $b = a$. Nghiệm là $\frac{1}{2}$; 5.

175. a) Điều kiện $1 - x \geq 0$, $2 - x \geq 0$ nên $x \leq 1$. Ta có

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{(x-1)(x-2)} - |x-2|.\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{(x-1)(x-2)} - \sqrt{(x-1)(x-2)} = 3$$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 3$. Nghiệm $x = -8$.

b) Điều kiện $\frac{x+2}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ hoặc $x > 2$.

Đặt $$(x-2).\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = y \qquad (1)$$

thì $$y^2 = (x-2)(x+2). \qquad (2)$$

Ta có $y^2 + 4y + 3 = 0$ nên $y_1 = -1$, $y_2 = -3$. Do $y < 0$ nên từ (1) suy ra

$$x < 2. \qquad (3)$$

Với $y = -1$, thay vào (2) được $x^2 - 4 = 1$. Do $x < 2$ nên $x = -\sqrt{5}$.

Với $y = -3$, thay vào (2) được $x^2 - 4 = 9$. Do $x < 2$ nên $x = -\sqrt{13}$.

Nghiệm là $-\sqrt{5}$; $-\sqrt{13}$.

176. a) Điều kiện $0 \leq x \leq 4$. Đặt $\sqrt{2+\sqrt{x}} = a \geq 0$, $\sqrt{2-\sqrt{x}} = b \geq 0$.

Ta có $ab = \sqrt{4-x}$, $a^2 + b^2 = 4$. Phương trình là

$$\frac{a^2}{\sqrt{2}+a} + \frac{b^2}{\sqrt{2}-b} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a^2\sqrt{2} - a^2b + b^2\sqrt{2} + ab^2 = \sqrt{2}(2 - b\sqrt{2} + a\sqrt{2} - ab)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(a^2 + b^2 - 2 + ab) - ab(a-b) = 2(a-b)$$

$\Rightarrow \sqrt{2}(2 + ab) = (a-b)(2+ab)$ (chú ý $a^2 + b^2 = 4$)

Do $ab + 2 \neq 0$ nên $a - b = \sqrt{2}$.

Bình phương hai vế được

$$a^2 + b^2 - 2ab = 2 \Rightarrow 2ab = 2 \Rightarrow ab = 1 \Rightarrow \sqrt{4 - x} = 1.$$

Tìm được $x = 3$, thử lại đúng.

b) Ta xét

$$\frac{x}{1 + \sqrt{1 + x}} = \frac{x(1 - \sqrt{1 + x})}{1 - (1 + x)} = \sqrt{1 + x} - 1,$$

$$2 + \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x}} = 2 + (\sqrt{1 + x} - 1) = 1 + \sqrt{1 + x},$$

$$\frac{x}{2 + \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x}}} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x}} = \sqrt{1 + x} - 1...$$

Cuối cùng ta được $\sqrt{1 + x} - 1 = 8$. Nghiệm $x = 80$.

177. a) *Cách 1*. Lập phương hai vế, áp dụng hằng đẳng thức

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b),$$

ta được $$x + 1 + 7 - x + 3\sqrt[3]{(x + 1)(7 - x)}.2 = 8.$$

Đưa về $(x + 1)(7 - x) = 0$, được $x_1 = -1$, $x_2 = 7$, thoả mãn phương trình đã cho.

Cách 2. Đặt $\sqrt[3]{x + 1} = a$, $\sqrt[3]{7 - x} = b$. Ta có $a + b = 2$ và $a^3 + b^3 = 8$. Đưa về $3a^2 - 6a = 0$. Nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 7$.

b) Đặt $\sqrt[3]{25 + x} = a$, $\sqrt[3]{3 - x} = b$. Ta có $a + b = 4$ và $a^3 + b^3 = 28$. Đưa về $a^2 - 4a + 3 = 0$. Nghiệm $x_1 = -24$, $x_2 = 2$.

c) Đặt $\sqrt[3]{x + 3} = a$, $\sqrt[3]{x - 16} = b$. Ta có $a - b = 1$ và $a^3 - b^3 = 19$. Đưa về $a^2 - a - 6 = 0$. Nghiệm $x_1 = -11$, $x_2 = 24$.

d) *Cách 1*. Đặt $\sqrt[3]{x + 3} = a$, $\sqrt[3]{6 - x} = b$. Ta có $a - b = 1$ và $a^3 + b^3 = 9$. Đưa về $(b - 1)(2b^2 + 5b + 8) = 0$ được $b = 1$. Nghiệm $x = 5$.

Cách 2. $$\sqrt[3]{x + 3} - \sqrt[3]{6 - x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x + 3} + \sqrt[3]{x - 6} = 1.$$

Hãy chứng tỏ rằng $x = 5$ là nghiệm duy nhất.

178. a) Đặt $\sqrt[3]{24+x} = a$; $\sqrt{12-x} = b$. Ta có $a + b = 6$, $a^3 + b^2 = 36$ với $b \geq 0$.

Thay $b = 6 - a$ vào $a^3 + b^2 = 36$ và rút gọn được $a(a-3)(a+4) = 0$.

Với $a = 0$ ta được $x = -24$. Với $a = 3$ ta được $x = 3$. Với $a = -4$ ta được $x = -88$.

b) Đặt $\sqrt[3]{2-x} = a$, $\sqrt{x-1} = b$. Ta có $a + b = 1$, $a^3 + b^2 = 1$ với $b \geq 0$.

Đưa về $a(a-1)(a+2) = 0$. Nghiệm là 1 ; 2 ; 10.

c) Đặt $\sqrt[3]{x-2} = a$, $\sqrt{x+1} = b$. Ta có $a + b = 3$, $b^2 - a^3 = 3$ với $b \geq 0$.

Đưa về $(a-1)(a^2+6) = 0$. Nghiệm $x = 3$.

179. a) Lập phương hai vế. Nghiệm là 0 ; $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

b) Đặt $\sqrt[3]{x+1} = a$, $\sqrt[3]{x-1} = b$. Ta có :

$$a^2 + b^2 + ab = 1 \qquad (1)$$

$$a^3 - b^3 = 2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $a - b = 2$. Thay $b = a - 2$ vào (1) ta được $a = 1$. Nghiệm $x = 0$.

c) *Cách 1*. $x = -2$ nghiệm đúng phương trình.

Với $x + 2 \neq 0$, chia hai vế cho $\sqrt[3]{x+2}$.

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+2}} = a$, $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x+2}} = b$. Giải $a^3 + b^3 = 2$, $a + b = -1$, vô nghiệm.

Cách 2. Đặt $\sqrt[3]{x+2} = y$. Chuyển vế $\sqrt[3]{y^3-1} + \sqrt[3]{y^3+1} = -y$.

Lập phương được

$$y^3 - 1 + y^3 + 1 + 3.\sqrt[3]{y^6-1}.(-y) = -y^3 \Leftrightarrow y^3 = y.\sqrt[3]{y^6-1}.$$

Với $y = 0$, có nghiệm $x = -2$.

Với $y \neq 0$, có $y^2 = \sqrt[3]{y^6-1}$. Lập phương hai vế được $y^6 = y^6 - 1$, vô nghiệm.

Cách 3. Ta thấy $x = -2$ nghiệm đúng phương trình. Với $x < -2$, $x > -2$, phương trình vô nghiệm, xem bảng dưới đây

x	$\sqrt[3]{x+1}$	$\sqrt[3]{x+2}$	$\sqrt[3]{x+3}$	Vế trái
$x < -2$	< -1	< 0	< 1	< 0
$x > -2$	> -1	> 0	> 1	> 0

180. Đặt $\sqrt[3]{7-x} = a$, $\sqrt[3]{x-5} = b$. Ta có $a^3 + b^3 = 2$, $a^3 - b^3 = 12 - 2x$, do đó vế phải của phương trình đã cho là $\dfrac{a^3 - b^3}{2}$. Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a^3 - b^3}{2}.$$

Vì $a^3 + b^3 = 2$ nên

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} \Rightarrow (a-b)(a^3 + b^3) = (a+b)(a^3 - b^3).$$

Do $a + b \neq 0$ nên

$$(a-b)(a^2 - ab + b^2) = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Từ $a = b$ ta được $x = 6$.

Từ $ab = 0$ ta được $x = 7$; $x = 5$.

181. a) Đặt $1 + x = a \geq 0$, $1 - x = b \geq 0$. Ta có

$$a + b = 2 \qquad (1)$$

$$\sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} = 3. \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si $\sqrt{mn} \leq \dfrac{m+n}{2}$, ta có

$$3 = \sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}} + \sqrt{1.\sqrt{a}} + \sqrt{1.\sqrt{b}} \leq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} + \frac{1 + \sqrt{a}}{2} + \frac{1 + \sqrt{b}}{2}$$

$$= \sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 \leq \frac{1+a}{2} + \frac{1+b}{2} + 1 = \frac{a+b}{2} + 2 = 3.$$

Phải xảy ra đẳng thức, tức là $a = b = 1$. Do đó $x = 0$.

b) Đặt $\sqrt[4]{1-x} = a \geq 0$, $\sqrt[4]{2-x} = b \geq 0$. Điều kiện

$$x \leq 1. \qquad (1)$$

Ta có

$$a + b = \sqrt[4]{a^4 + b^4} \Leftrightarrow (a + b)^4 = a^4 + b^4 \Leftrightarrow 2ab(2a^2 + 3ab + 2b^2) = 0.$$

Nếu $a > 0$, $b > 0$ thì $2a^2 + 3ab + 2b^2 > 0$. Do đó $a = 0$ hoặc $b = 0$.

Suy ra $x = 1$ hoặc $x = 2$. Loại $x = 2$ vì trái với điều kiện (1).

Nghiệm $x = 1$.

PHẦN NGUYÊN

182. Giải tương tự Ví dụ 61.

a) $1 < a_n < 2$. Vậy $[a_n] = 1$.

b) $2 \le a_n < 3$. Vậy $[a_n] = 2$.

c) Ta thấy $44^2 = 1936 < 1996 < 2025 = 45^2$, còn $46^2 = 2116$

$$a_1 = \sqrt{1996} \Rightarrow 44 < a_1 < 45.$$

Hãy chứng tỏ rằng với $n \ge 2$ thì $45 < a_n < 46$.

Như vậy với $n = 1$ thì $[a_n] = 44$, với $n \ge 2$ thì $[a_n] = 45$.

183. a) Trong biểu thức a, thay số 6 cuối cùng bởi số 9, ta được biểu thức a'. Dễ thấy $2 < a < a' = 3$ nên $[a] = 2$.

b) Trong biểu thức b, thay số 6 cuối cùng bởi số 8, ta được biểu thức b'. Dễ thấy $1 < b < b' = 2$ nên $[b] = 1$.

c) Ta có $\sqrt{6} + \sqrt[3]{6} > 2,4 + 1,8 = 4,2 > 4$. Do $4 < a + b < a' + b' = 3 + 2 = 5$ nên $[a + b] = 4$.

184. a) Ta có $$(a + b)^3 - (a - b)^3 = 6a^2b + 2b^3.$$

Thay $a = \sqrt{5}$, $b = 2$ ta được

$$(\sqrt{5} + 2)^3 - (\sqrt{5} - 2)^3 = 6.5.2 + 2.8 = 76.$$

Ta lại có $0 < \sqrt{5} - 2 < 1$ nên $0 < (\sqrt{5} - 2)^3 < 1$. Vậy $\left[(\sqrt{5} + 2)^3\right] = 76$.

b) Ta có $$(a + b)^4 + (a - b)^4 = 2a^4 + 12a^2b^2 + 2b^4.$$

Thay $a = \sqrt{5}$, $b = 2$ vào đẳng thức trên.

Đáp số : $\left[(\sqrt{5}+2)^4\right] = 321.$

185. Cần tìm số tự nhiên B sao cho $B \le A < B + 1$. Làm giảm và làm trội A để được hai số tự nhiên liên tiếp.

Ta có $$(4n+1)^2 < 16n^2 + 8n + 3 < (4n+2)^2.$$

Lấy căn bậc hai được $4n + 1 < \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < 4n + 2.$

Thêm $4n^2$ vào hai vế ta có

$$4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < 4n^2 + 4n + 2 < 4n^2 + 8n + 4$$

nên $$(2n+1)^2 < 4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < (2n+2)^2.$$

Lấy căn bậc hai : $2n + 1 < A < 2n + 2$.

Vậy $[A] = 2n + 1$.

186. Ta có $97 < A < 98$ (xem Ví dụ 28), do đó $[A] = 97$.

187. a) $$\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2} < \frac{2}{3\sqrt[3]{n}} < \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{n(n+1)^2} - 3n < 2 < 3n - 3\sqrt[3]{n(n-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3n + 2 > 3\sqrt[3]{n(n+1)^2} & (1) \\ 3n - 2 > 3\sqrt[3]{n(n-1)^2} & (2) \end{cases}$$

Bất đẳng thức (1) chính là bất đẳng thức Cô-si với ba số không âm n, n + 1, n + 1.

Bất đẳng thức (2) chính là bất đẳng thức Cô-si với ba số không âm n, n – 1, n – 1.

b) Từ câu a), dễ dàng chứng minh được

$$\frac{2}{3}A < \sqrt[3]{(6^3)^2} - \sqrt[3]{3^2} < 36 - \sqrt[3]{8} = 36 - 2 = 34 \text{ nên } A < 51. \qquad (3)$$

$$\frac{2}{3}A > \sqrt[3]{(6^3+1)^2} - \sqrt[3]{4^2} > \sqrt[3]{(6^3)^2} - \sqrt[3]{2^4} = 36 - \sqrt[3]{2^4}$$

nên $A > \frac{3}{2}.36 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2^4} = 54 - \sqrt[3]{54} > 54 - \sqrt[3]{64} = 54 - 4 = 50$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra [A] = 50.

188. Biến đổi $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{250} = (5 + 2\sqrt{6})^{125}$. Phần nguyên của nó có chữ số tận cùng là 9. Giải tương tự Ví dụ 63.

189. Từ đề bài ta có $\{x\}$ là số nguyên. Ta lại có $0 \le \{x\} < 1$ nên $\{x\} = 0$. Suy ra x là số nguyên. Do đó $[x^2] = x^2$, $[x] = x$.

Phương trình đã cho trở thành $x^2 + x = 2$. *Đáp số :* $x = 1$, $x = -2$.

190. Đặt $[x] = y \in \mathbf{Z}$. Giải phương trình

$$3y^2 + 5y - 2 = 0 \text{ được } y = -2,\ y = \frac{1}{3} \text{ (loại).}$$

$$[x] = -2 \Rightarrow -2 \le x < -1.$$

191. Cộng từng vế các phương trình đã cho được $x + y + z = 3{,}3$.

Cộng từng vế hai phương trình đầu được

$$x + y + [z] + \{z\} + [y] + \{x\} = 3{,}3.$$

Suy ra $[y] + \{x\} = 0$ (chú ý rằng $[z] + \{z\} = z$).

Do đó $\{x\}$ là số nguyên, suy ra $\{x\} = 0$. Vậy $[y] = 0$ và $x = [x]$.

Từ $x + [y] + \{z\} = 1{,}1$ và $[y] = 0$ suy ra $x + \{z\} = 1{,}1$.

Do $0 \le \{z\} < 1$ và $x = [x]$ nên $x = 1$, do đó $\{z\} = 0{,}1$.

Từ $y + [z] + \{x\} = 2{,}2$ và $\{x\} = 0$ suy ra $y + [z] = 2{,}2$.

Ta lại có $[y] = 0$ nên $0 \le y < 1$, do đó $y = 0{,}2$, $[z] = 2$.

Vậy $z = [z] + \{z\} = 2{,}1$.

Đáp số : $x = 1$; $y = 0{,}2$; $z = 2{,}1$.

192. Ta thấy x là số nguyên. Đặt $x = 6a + r$ trong đó $a, r \in \mathbf{Z}$ và $0 \le r < 6$.

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = x \Leftrightarrow \left[\frac{6a + r}{2}\right] + \left[\frac{6a + r}{3}\right] = 6a + r$$

$$\Leftrightarrow 5a + \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] = 6a + r \Leftrightarrow a = -r + \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r}{3}\right].$$

Lần lượt cho r bằng 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta được

r	0	1	2	3	4	5
a	0	–1	–1	–1	–1	–2
x	0	–5	–4	–3	–2	–7

b) Đặt $x = 12a + r$ trong đó $a, r \in \mathbb{Z}$ và $0 \le r < 12$.

Giải tương tự như câu a được $a = r - \left(\left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] + \left[\frac{r}{4}\right]\right)$.

Đáp số : $x \in \{0 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 13 ; 14 ; 15 ; 17 ; 19 ; 23\}$.

193. a) Ta có
$$[x] + \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = 224.$$

Trước hết ta ước lượng giá trị của x.

Do $[x] \le x$ nên

$$224 \le x + \frac{x}{2} + \frac{x}{6} = \frac{5}{3}x, \text{ suy ra } x \ge 134,4. \qquad (1)$$

Do $[x] > x - 1$ nên

$$224 > (x-1) + \left(\frac{x}{2} - 1\right) + \left(\frac{x}{6} - 1\right) = \frac{5}{3}x - 3, \text{ suy ra } x < 136,2. \qquad (2)$$

Do x là số nguyên nên từ (1) và (2) suy ra $x \in \{135 ; 136\}$.

Thử vào phương trình đã cho, ta được $x = 135$.

b) Cũng ước lượng như câu a ta được

$$1001 > x\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{10!}\right) - 10 > x\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}\right) - 10$$

$$\Rightarrow 1011 > \frac{103}{60}x \Rightarrow x \le 588 \text{ (do } x \in \mathbb{Z}).$$

Do $x \le 588$ mà $6! = 720$ nên $\left[\frac{x}{6!}\right] = \left[\frac{x}{7!}\right] = ... = \left[\frac{x}{10!}\right] = 0$.

Do đó
$$[x] + \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] + \left[\frac{x}{24}\right] + \left[\frac{x}{120}\right] = 1001.$$

Ước lượng theo cách tương tự ở câu a được $584 \le x \le 586$. Sau khi thử, ta được $x = 584$ thoả mãn bài toán.

194. $\left[\sqrt[n]{2000}\right] > 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{2000} \ge 2 \Leftrightarrow 2000 \ge 2^n$. (1)

Ta có $2^{10} < 2000 < 2^{11}$ nên số tự nhiên n lớn nhất thoả mãn (1) là $n = 10$.

195. Nếu $0 \le x - [x] < \frac{1}{2}$ thì

$$0 \le 2x - 2[x] < 1 \text{ nên } [2x] = 2[x].$$

Nếu $\frac{1}{2} \le x - [x] < 1$ thì

$$1 \le 2x - 2[x] < 2 \Rightarrow 0 \le 2x - (2[x] + 1) < 1 \Rightarrow [2x] = 2[x] + 1.$$

196. $A = \left([\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]\right) + \left([\sqrt{4}] + ... + [\sqrt{8}]\right)$

$$+\left([\sqrt{9}] + ... + [\sqrt{15}]\right) + \left([\sqrt{16}] + ... + [\sqrt{24}]\right).$$

Theo cách chia nhóm như trên, nhóm 1 có ba số, nhóm 2 có năm số, nhóm 3 có bảy số, nhóm 4 có chín số.

Các số thuộc nhóm 1 bằng 1, các số thuộc nhóm 2 bằng 2, các số thuộc nhóm 3 bằng 3, các số thuộc nhóm 4 bằng 4.

Vậy $A = 1.3 + 2.5 + 3.7 + 4.9 = 70$.

Chú ý : Trường hợp tổng quát cần tính tổng

$$A = 1.3 + 2.5 + 3.7 + ... + n(2n + 1),$$

ta tính như sau :

$$A = (2.1^2 + 1) + (2.2^2 + 2) + (2.3^2 + 3) + ... + (2.n^2 + n)$$
$$= 2(1^2 + 2^2 + ... + n^2) + (1 + 2 + ... + n).$$

Sau đó áp dụng công thức $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

(xem Ví dụ 14 *Nâng cao và phát triển Toán 8 tập một*) và

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

197. a) Ta có $x_1 = \frac{a+15}{100}$. Do $1 \le a < 85$ nên $16 \le a + 15 < 100$, do đó $0 < x_1 < 1$.

Xét các số $x_n = \frac{a+15n}{100}$. Cứ mỗi lần n tăng thêm một đơn vị thì giá trị của x_n tăng 0,15, do đó $[x_n]$ sẽ trải qua tất cả các giá trị 1, 2, 3, ..., đến một lúc nào đó sẽ có $[x_p] = 96$.

b) Do $[x_p] = 96$ nên $96 \le x_p < 97$, tức là

$$96 \le \frac{a+15p}{100} < 97 \text{ hay } 9600 \le a + 15p < 9700.$$

Vậy hai chữ số đầu tiên của a + 15p là 96.

c) Giả sử số a + 15 có k chữ số thì $10^{k-1} \le a + 15 < 10^k$ nên

$$0{,}1 \le \frac{a+15}{10^k} < 1.$$

Đặt $x_n = \frac{a+15n}{10^k}$, ta có $0 < x_1 < 1$. Cho n lần lượt nhận các giá trị 2, 3, 4,... thì các giá trị của x_n tăng dần, mỗi lần tăng $\frac{15}{10^k}$ (không đến 1 đơn vị), do đó $[x_n]$ sẽ trải qua tất cả các giá trị 1, 2, 3, ..., đến một lúc nào đó sẽ có $[x_p] = 96$. Bạn đọc tự giải tiếp bài toán.

PHẦN HÌNH HỌC

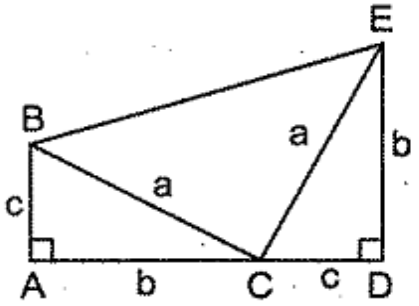
Chương I – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

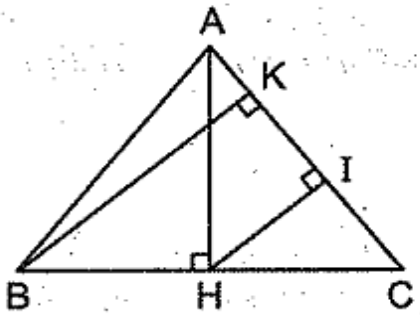
1. (h.81) $S_{ABED} = S_{ABC} + S_{CDE} + S_{BCE} \Rightarrow \dfrac{(b+c)^2}{2} = \dfrac{bc}{2} + \dfrac{bc}{2} + \dfrac{a^2}{2}$

$$\Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Chú ý : Cách chứng minh trên của Gac-phiu (*James Garfield*, 1831 – 1881). Là giáo sư cổ ngữ, ông cũng nghiên cứu toán học và được bầu làm tổng thống Mĩ năm 1880.



Hình 81



Hình 82

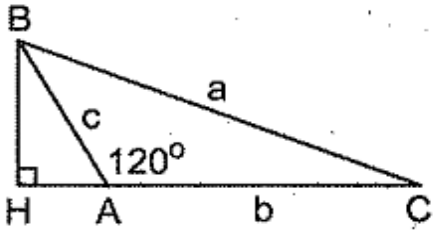
2. (h.82) a) Trong ΔAHC vuông : $HC^2 = CI.CA$. Từ đó tính được $CI = 4$ cm.

b) $CK = 2CI = 8 < CA$. Do đó K nằm giữa C và A.

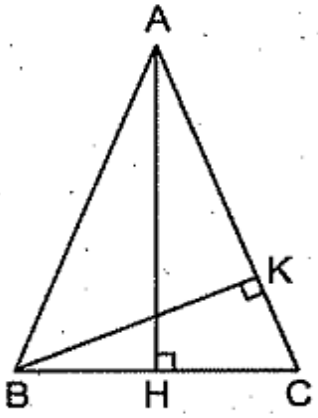
3. (h.83) Kẻ $BH \perp AC$. Ta có

$a^2 = BH^2 + HC^2 = BH^2 + (AH + AC)^2 = BH^2 + AH^2 + 2AH.\,AC + AC^2$

$= c^2 + cb + b^2.$



Hình 83



Hình 84

4. (h.84). Gọi AH, BK là các đường cao của ΔABC. Ta có

$$AC = \frac{BC.AH}{BK} = \frac{BC.15,6}{12} = 1,3BC.$$

Đặt BC = x thì AC = 1,3x. Theo định lí Py-ta-go :

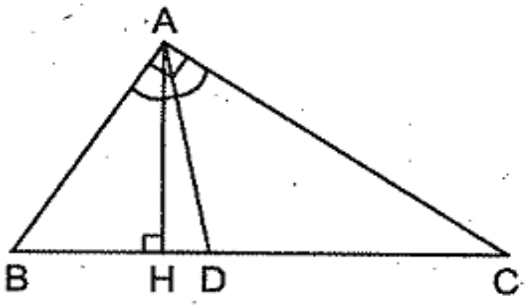
$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \text{ nên } 15,6^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = (1,3x)^2$$

ta tính được x =13. Vậy BC = 13cm.

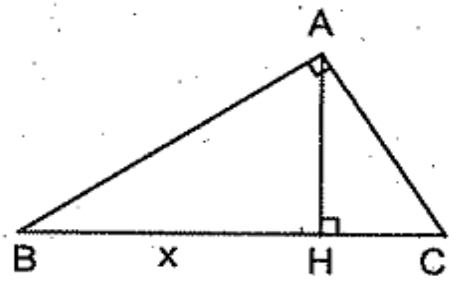
5. (h.85) Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{7,5}{10} = \frac{3}{4}$ nên tính được AB = 10,5cm và AC = 14cm.

Nhờ công thức ah = bc ta tính được AH = 8,4cm.

Nhờ công thức $c^2 = a.c'$ ta tính được BH = 6,3cm nên HD = 1,2cm.



Hình 85



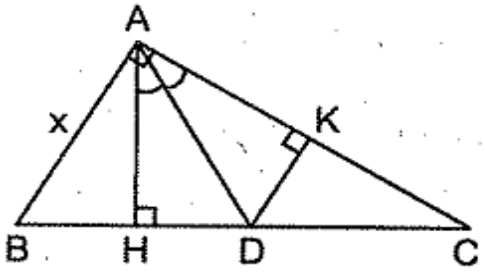
Hình 86

6. (h.86) Đặt BH = x, ta có $AB^2 = BC.BH$ nên $20^2 = (x + 9).x$.

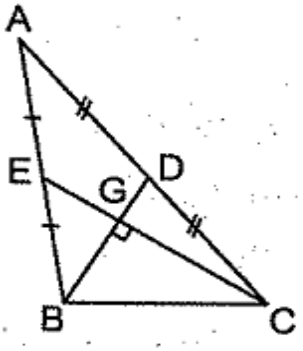
Giải phương trình trên, ta được (x – 16)(x + 25) = 0 nên x = 16 (thích hợp). Từ đó AH = 12 cm.

7. (h.87) Dễ chứng minh AB = BD. Đặt AB = BD = x. Ta có $AB^2 = BC.BH$ nên $x^2 = 25(x - 6)$. Giải phương trình trên ta được (x – 10)(x – 15) = 0.

Đáp số : AB bằng 10cm hoặc 15cm.



Hình 87



Hình 88

8. (h.88) Gọi G là giao điểm của BD và CE. Đặt GD = x, GE = y thì GB = 2x, GC = 2y. Xét các tam giác vuông BGE, CGD để chứng minh rằng $x^2 + y^2 = 5$.

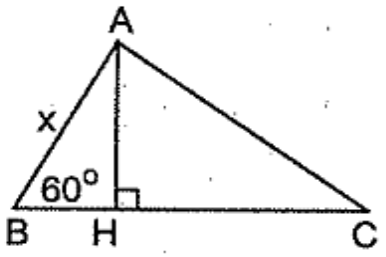
Đáp số : $BC = 2\sqrt{5}$ cm.

9. (h.89) Đặt AB = x. Ta có $AH^2 + HC^2 = AC^2$ nên

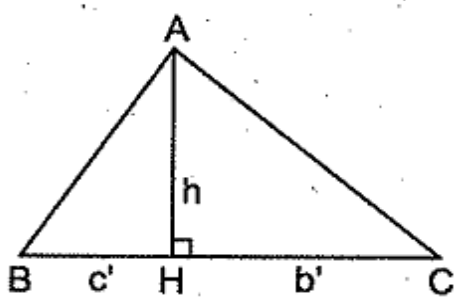
$$\frac{3x^2}{4} + \left(8 - \frac{x}{2}\right)^2 = (12 - x)^2.$$

Giải phương trình trên ta được x = 5.

Đáp số : AB = 5cm, AC = 7cm.



Hình 89



Hình 90

10. (h.90) Ta có hc' = 54.2, hb' = 96.2 , mà $h^2 = b'.c'$ nên $h^4 = 12^4$, suy ra h = 12.

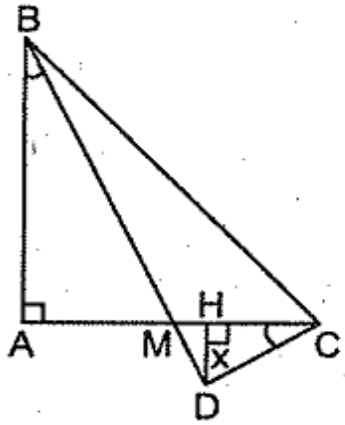
Do đó $$BC = \frac{2(54 + 96)}{12} = 25 \text{ (cm)}.$$

11. (h.91). $\Delta HCD \backsim ABM$ (g.g) mà AB = 2AM nên HC = 2HD. Đặt HD = x thì HC = 2x. Ta có

$$DH^2 = HM.HC \text{ hay } x^2 = HM.2x$$

$\Rightarrow$ HM = 0,5x ; MC = 2,5x ; AM = 2,5x ; AH = 3x.

Vậy AH = 3 HD.



Hình 91

12. a) Gọi b' và c' là hình chiếu của các cạnh góc vuông b và c trên cạnh huyền a. Ta có $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$ nên $\left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b'}{c'}$. Vậy tỉ số phải tìm bằng k^2.

b) Áp dụng câu a). *Đáp số :* 50cm và 32cm.

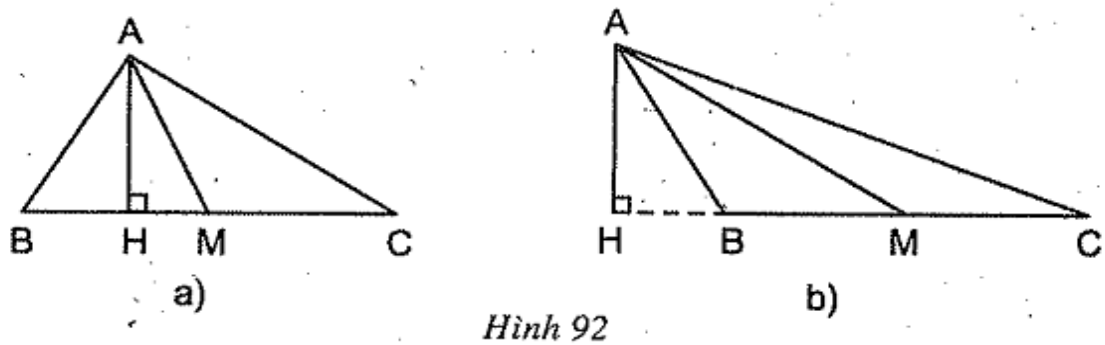
13. Áp dụng Bài tập 12a) và tính chất đường phân giác. *Đáp số :* 1 : 9.

14. (h.92) Đặt BC = a thì AB = a − 1, AC = a + 1. Đặt HM = x.

Ta thấy HB = MB − MH (nếu $\hat{B} \le 90^o$, h.92a),

HB = MH − MB (nếu $\hat{B} > 90^o$, h.92b),

nên $$HB^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2.$$



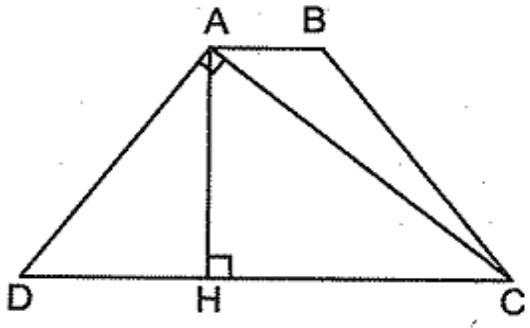
Hình 92

Ta có $AC^2 - HC^2 = AB^2 - HB^2$ (cùng bằng AH^2) nên

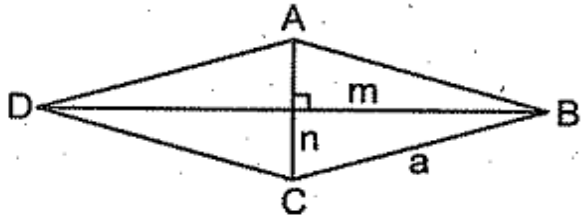
$$(a+1)^2 - \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = (a-1)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 2$.

15. (h.93) Kẻ $AH \perp CD$. Ta tính được $HD = 18cm$, $HC = 32cm$, $AH = 24cm$, $AD = 30cm$. Chu vi hình thang bằng 124 cm, diện tích hình thang bằng $768cm^2$.



Hình 93



Hình 94

16. (h.94) Gọi 2m và 2n là độ dài các đường chéo của hình thoi cạnh a. Ta có $m^2 + n^2 = a^2$ và $2mn = \frac{a^2}{2}$. Từ đó ta tính được $m + n = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $m - n = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Do đó $m = \frac{a(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$, $n = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$.

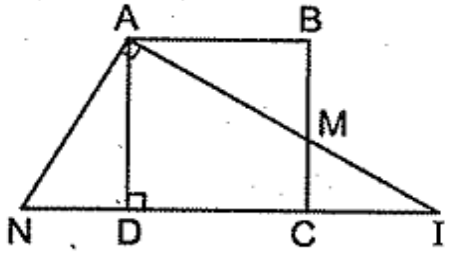
Suy ra $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3}$.

Vậy B là câu trả lời đúng.

17. Vẽ đường vuông góc với AM tại A, cắt CD ở N (h.95). Trong ΔANI vuông, ta có

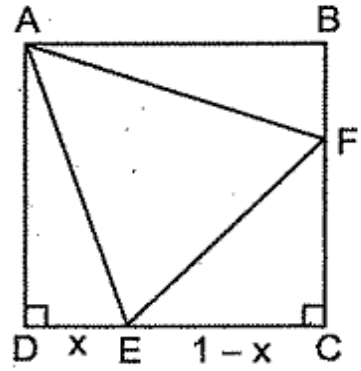
$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AI^2},$$

sau đó chứng minh rằng $AN = AM$.



Hình 95

18. (h.96) Đặt DE = x thì CE = 1 − x thì CF = CE = 1 − x, $AE^2 = x^2 + 1$.



Hình 96

Từ $CE^2 + CF^2 = EF^2$, ta có $2(1-x)^2 = x^2 + 1$.

Đưa về phương trình

$$x^2 - 4x + 4 = 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Do x < 1 nên ta chọn $x = 2 - \sqrt{3}$.

$$EF = (1-x)\sqrt{2} = \left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \text{ (dm)}.$$

19. Gọi a, b, c là ba cạnh của tam giác có diện tích S.

a) Ta có $a = \frac{2S}{3}$, $b = \frac{2S}{4}$, $c = \frac{2S}{5}$, a > b > c.

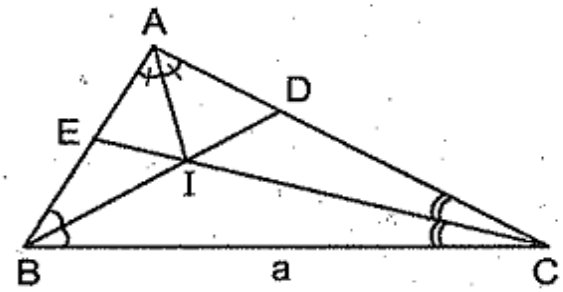
Do $a^2 \neq b^2 + c^2$ nên tam giác đang xét không là tam giác vuông.

b) Ta có $a = \frac{2S}{12}$, $b = \frac{2S}{15}$, $c = \frac{2S}{20}$, a > b > c.

Do $a^2 = b^2 + c^2$ nên tam giác đang xét là tam giác vuông.

20. (h.97). Từ giả thiết suy ra

$$\frac{BI}{BD}.\frac{CI}{CE} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$



Hình 97

Ta sẽ tính các tỉ số $\frac{BI}{BD}$, $\frac{CI}{CE}$ theo các cạnh của ΔABC.

Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Theo tính chất đường phân giác có $\frac{BI}{ID} = \frac{AB}{AD}$ nên $\frac{BI}{BI + ID} = \frac{AB}{AB + AD}$. Ta tính được $AD = \frac{bc}{c+a}$, do đó

$$\frac{BI}{BD} = \frac{c}{c + \frac{bc}{c+a}} = \frac{1}{1 + \frac{b}{c+a}} = \frac{c+a}{a+b+c}. \qquad (2)$$

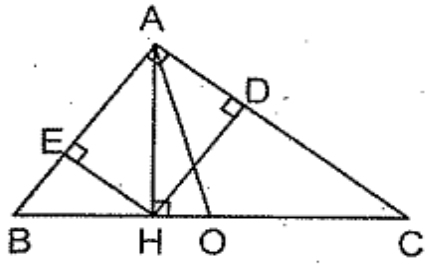
Tương tự

$$\frac{CI}{CE} = \frac{b+a}{a+b+c}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3), ta suy ra được $a^2 = b^2 + c^2$, do đó ΔABC vuông tại A.

21. (h.98) a) Gọi O là trung điểm của BC.

$DE = AH \le AO = a$; max $DE = a \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.



Hình 98

b) *Cách 1*. Ta có $S_{ADHE} = AE.AD$.

Ta lại có $AH^2 = AE.AB$ nên $AE = \dfrac{AH^2}{AB}$.

Tương tự $AD = \dfrac{AH^2}{AC}$. Do đó

$$S_{ADHE} = \frac{AH^4}{AB.AC} = \frac{AH^4}{BC.AH} = \frac{AH^3}{BC} \le \frac{AO^3}{BC} = \frac{a^3}{2a} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\max S_{ADHE} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại A.}$$

Cách 2. $S_{ADHE} = 2S_{HEA}$. Do đó S_{ADHE} lớn nhất $\Leftrightarrow S_{HEA}$ lớn nhất.

Ta thấy $\Delta HEA \backsim \Delta BAC$ (g.g) nên $\dfrac{S_{HEA}}{S_{BAC}} = \left(\dfrac{AH}{BC}\right)^2$. Do đó S_{HEA} lớn nhất $\Leftrightarrow$ AH lớn nhất $\Leftrightarrow$ H trùng với O. Khi đó ΔABC vuông cân tại A, ta tính được $S_{ADHE} = \dfrac{a^2}{2}$.

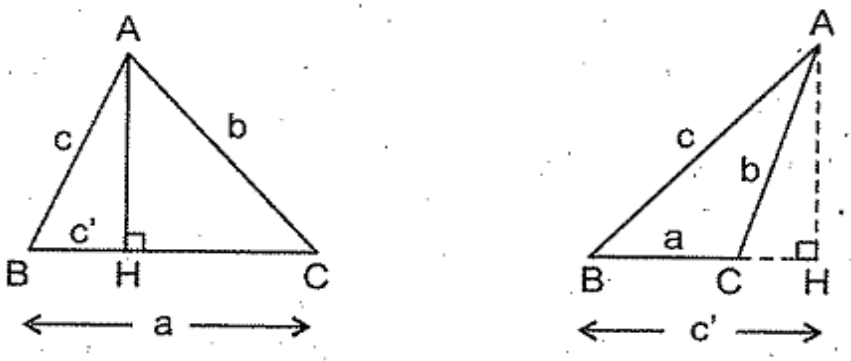
22. Xét ΔABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi c' là hình chiếu của cạnh AB trên BC. Ta phải chứng minh :

Nếu $\widehat{B} < 90^o$ thì $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$;

Nếu $\widehat{B} > 90^o$ thì $b^2 = a^2 + c^2 + 2ac'$.

a) Nếu $\widehat{B} < 90^o$ (h.99) thì $b^2 = AH^2 + HC^2$. Chú ý rằng nếu $\widehat{C} < 90^o$ thì $HC = a - HB$ (h.99a), còn nếu $\widehat{C} \ge 90^o$ thì $HC = HB - a$ (h.99b), cả hai trường hợp đều có $HC^2 = (a - HB)^2$. Do đó

$b^2 = (c^2 - HB^2) + (a - HB)^2 = c^2 - HB^2 + a^2 + HB^2 - 2a.HB = a^2 + c^2 - 2ac'$.



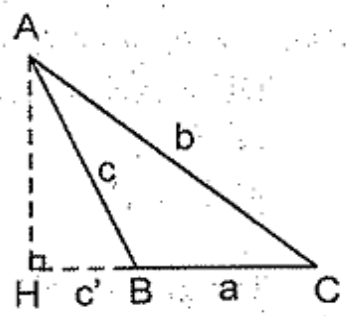
a) *Hình 99* b)

b) Nếu $\widehat{B} > 90^o$ (h.100) thì

$b^2 = AH^2 + HC^2 = (c^2 - HB^2) + (a + HB)^2$

$= c^2 - HB^2 + a^2 + HB^2 + 2a.HB$

$= a^2 + c^2 + 2ac'$.



Hình 100

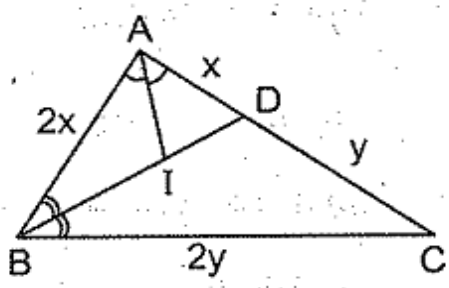
23. a) Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $\widehat{B} > 90^o$ thì theo Bài tập 22, ta có $b^2 > a^2 + c^2$, trái với giả thiết. Giả sử $\widehat{B} = 90^o$ thì theo định lí Py-ta-go ta có $b^2 = a^2 + c^2$, trái với giả thiết.

Vậy $\widehat{B} < 90^o$.

b) c) Chứng minh tương tự như câu a).

24. (h.101). Theo tính chất đường phân giác :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{IB}{ID} = \frac{10\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = 2, \ \frac{BC}{CD} = \frac{BA}{AD} = 2.$$



Hình 101

Đặt AD = x, DC = y. Ta có AB = 2x, BC = 2y nên

$$\begin{cases} x^2 + (2x)^2 = (15\sqrt{5})^2 & (1) \\ (2x)^2 + (x + y)^2 = (2y)^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta được x = 15. Thay vào (2) và rút gọn được

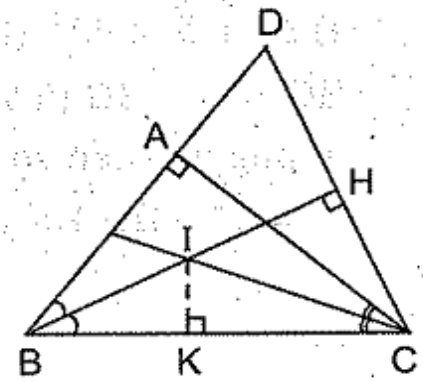
$$y^2 - 10y - 375 = 0 \Leftrightarrow (y - 25)(y + 15) = 0.$$

Từ đó y = 25. *Đáp số :* 600 cm^2.

25. (h.102) a) Kẻ CH ⊥ BI, CH cắt BA tại D. ΔBCD cân nên CH = HD. Đặt BC = x thì AD = x – 5.

ΔCHI vuông cân có

$$\widehat{CIH} = 45^o \Rightarrow CH = \frac{IC}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow DC = \frac{12}{\sqrt{2}}.$$



Hình 102

Xét ΔACD vuông có

$AD^2 + AC^2 = DC^2 \Rightarrow (x - 5)^2 + (x^2 - 25) = 72.$

Rút gọn được $x^2 - 5x - 36 = 0 \Leftrightarrow (x - 9)(x + 4) = 0$. *Đáp số :* BC = 9cm.

b) Kẻ CH ⊥ BI. Ta có ΔCIH vuông cân nên $CH = \frac{IC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$ (cm).

Suy ra BH = $2\sqrt{5}$cm. Xét ΔBHC vuông :

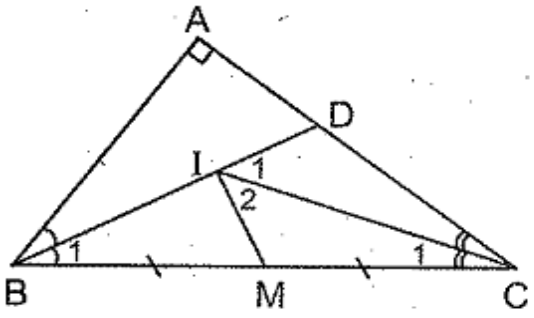
$$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 20 + 5 = 25 \text{ nên } BC = 5\text{cm}.$$

Kẻ IK ⊥ BC. Ta có IK.BC = $2S_{BIC}$ = BI.CH = $\sqrt{5}.\sqrt{5} = 5$.

Suy ra IK = 1cm.

Dễ dàng tính được BK = 2cm. Từ đó AB = 3cm, AC = 4cm.

26. (h.103). BI cắt AC tại D.



Hình 103

a) Dễ dàng tính được : BC = 10cm, DA = 3cm, DC = 5cm.

Do DC = MC = 5cm nên ΔIMC = ΔIDC (c.g.c)

suy ra $\hat{I}_2 = \hat{I}_1 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 45^o$.

Vậy $\widehat{BIM} = 90^o$.

b) Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Ta sẽ biểu thị a và c theo b. Trước hết ta có

$$a^2 - c^2 = b^2 \qquad (1)$$

Do $\widehat{BIM} = 90^o$, $\hat{I}_1 = 45^o$ nên $\hat{I}_2 = 45^o$. Ta có ΔDIC = ΔMIC (g.c.g) nên DC = MC. Do đó a = 2DC, c = 2AD (tính chất đường phân giác). Suy ra

$$a + c = 2\,(DC + AD) = 2AC = 2b. \qquad (2)$$

Ta có $a^2 - c^2 = b^2$, a + c = 2b. Giả sử $b \geq c$, ta được $a = \frac{5b}{4}$, $c = \frac{3b}{4}$. Do đó

$$a : b : c = \frac{5}{4} : 1 : \frac{3}{4} = 5 : 4 : 3.$$

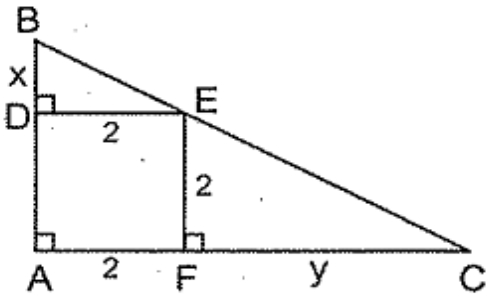
27. Gọi độ dài ba cạnh của tam giác vuông từ nhỏ đến lớn là x – d, x, x + d. Theo định lí Py-ta-go $(x - d)^2 + x^2 = (x + d)^2$ nên $x^2 = (x + d)^2 - (x - d)^2 = 4dx$. Suy ra x = 4d.

Độ dài ba cạnh của tam giác vuông là 3d, 4d, 5d. Tỉ số giữa ba cạnh của tam giác vuông đó là 3 ; 4 ; 5.

b) Nếu x – d, x, x + d là các số nguyên dương thì d là số nguyên dương. Theo câu a, độ dài các cạnh của tam giác vuông đó là bội của 3, của 4, của 5. Trong các số 17, 13, 35, 41, 22, chỉ có 35 là bội của 5, các số còn lại không chia hết cho 3, cho 4, cho 5. Do đó chỉ có số 35 có thể là độ dài một cạnh của tam giác vuông đó (khi đó tam giác vuông có ba cạnh 21, 28, 35).

28. (h.104). Đặt DB = x, FC = y. Các tam giác BDE và EFC đồng dạng nên $\frac{x}{2} = \frac{2}{y}$, suy ra

$$xy = 4. \qquad (1)$$



Hình 104

Ta lại có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 45. \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra $x^2 + y^2 + 4(x + y) = 37$. Đặt x + y = a, kết hợp với (1) ta được $a^2 - 8 + 4a = 37 \Leftrightarrow (a - 5)(a + 9) = 0$ nên a = 5. Suy ra y = 5 – x.

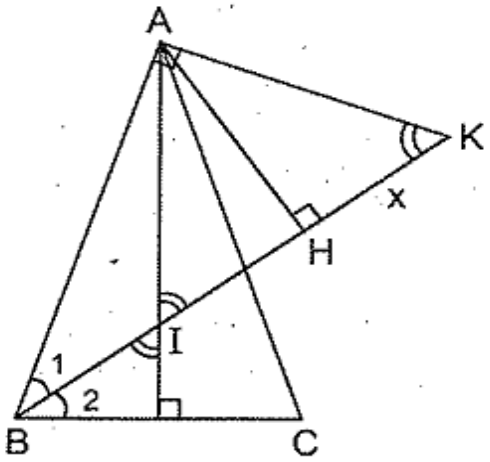
Thay y bởi 5 – x vào (1) được

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) = 0.$$

Với x = 1 thì y = 4, khi đó AB = 3cm, AC = 6cm.

Với x = 4 thì y = 1, khi đó AB = 6cm, AC = 3cm.

29. (h.105). Đường vuông góc với AB tại A cắt BI ở K. Ta có $\widehat{K}$ phụ với $\widehat{B}_1$, $\widehat{AIK}$ phụ với $\widehat{B}_2$, $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, nên $\widehat{K} = \widehat{AIK}$.



Hình 105

Kẻ AH ⊥ BK. Đặt IH = HK = x.

Xét ΔABK vuông có

$$AK^2 = KH.KB \text{ hay } \left(2\sqrt{5}\right)^2 = x(2x + 3).$$

Rút gọn phương trình

$$2x^2 + 3x - 20 = 0 \Leftrightarrow (2x - 5)(x + 4) = 0.$$

Nghiệm dương x = 2,5 thích hợp. Suy ra KB = 8cm. Từ đó AB = $2\sqrt{11}$ cm.

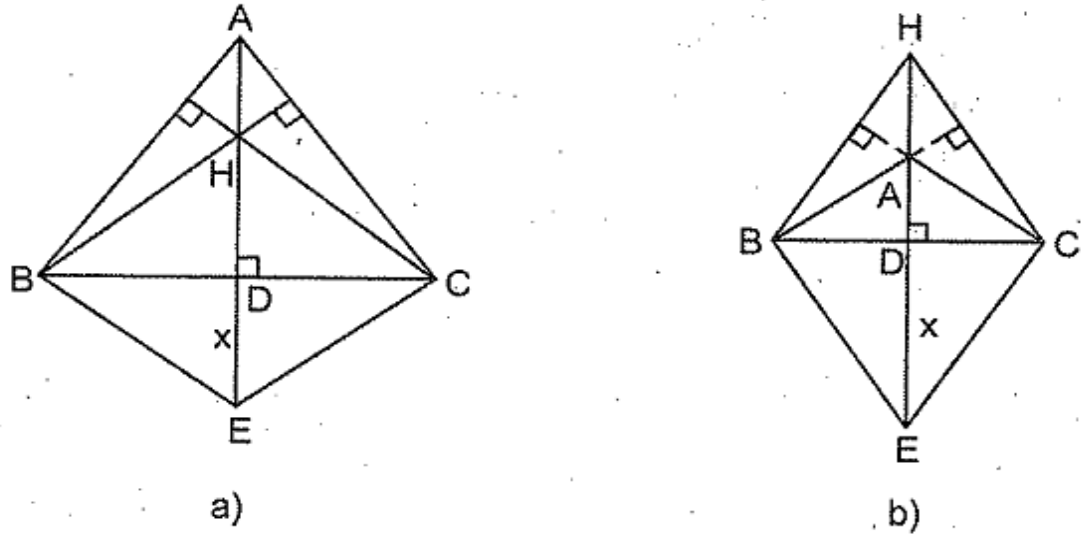
30. (h.106). Gọi E là điểm đối xứng với H qua BC. Ta có BHCE là hình thoi, ΔABE vuông tại B nên $BE^2 = ED.EA$. Đặt DE = x. Có hai trường hợp :

a) $\widehat{BAC} < 90^\circ$ (h.106a). Ta có $x(2x + 14) = 30^2$.

Rút gọn phương trình

$$x^2 + 7x - 450 = 0 \Leftrightarrow (x - 18)(x + 25) = 0.$$

Nghiệm dương x = 18 thích hợp. Từ đó AD = 32cm.



Hình 106

b) $\widehat{BAC} > 90^\circ$ (h.106b). Ta có $x(2x - 14) = 30^2$.

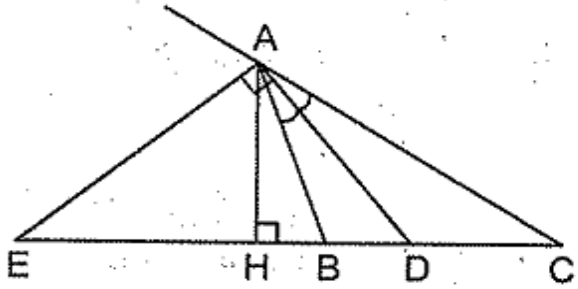
Rút gọn phương trình

$$x^2 - 7x - 450 = 0 \Leftrightarrow (x - 25)(x + 18) = 0.$$

Nghiệm dương $x = 25$ thích hợp. Từ đó AD = 11cm.

31. (h.107) Đặt BD = x, DC = y. Giả sử $x < y$. Ta tính được HD = 27cm. Vẽ tia phân giác của góc ngoài tại A, cắt BC ở E. Ta có $AE \perp AD$ nên $AD^2 = DE.DH$. Suy ra

$$DE = \frac{AD^2}{DH} = \frac{45^2}{27} = 75 \text{ (cm)}.$$



Hình 107

Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{75 - x}{75 + y}. \quad (1)$$

Mặt khác $$x + y = 40. \quad (2)$$

Thay $y = 40 - x$ vào (1) và rút gọn được

$$x^2 - 115x + 1500 = 0 \Leftrightarrow (x - 15)(x - 100) = 0.$$

Do $x < 40$ nên $x = 15$, từ đó $y = 25$.

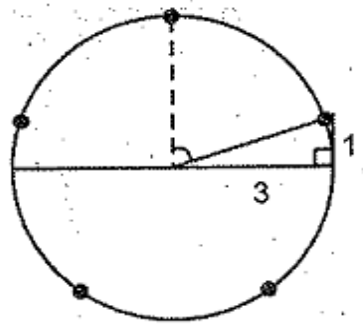
Vậy DB = 15cm, DC = 25cm.

§2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

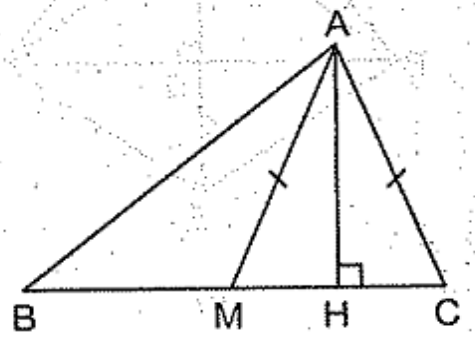
32. a) $tg\alpha = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow \alpha \approx 71^\circ 34'$. Sai số của phép dựng là $0^\circ 26'$.

Chú ý : $360^\circ : 5 = 72^\circ$. Bài toán trên cho ta cách dựng gần đúng một ngũ giác đều nội tiếp trong đường tròn (h.108).

b) Sai số $0^\circ 50'$.



Hình 108



Hình 109

33. Vẽ đường cao AH (h.109). Do AM = AC nên $CH = HM = \frac{BC}{2}$. Do đó

$$\frac{tgB}{tgC} = \frac{AH}{BH} : \frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH} = \frac{1}{3}.$$

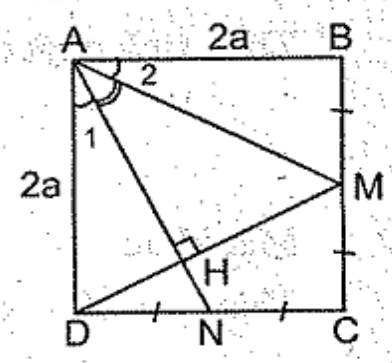
34. Chia cả tử và mẫu của $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ cho $\sin\alpha \neq 0$, ta được :

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1} = \frac{\cot g\alpha + 1}{\cot g\alpha - 1} = \frac{2+1}{2-1} = 3.$$

35. (h.110) Gọi H là giao điểm của AN và DM. Dễ dàng chứng minh được $\Delta ADN = \Delta ABM$ (c.g.c) nên $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, suy ra $AH \perp DM$, $\cos\widehat{MAN} = \frac{AH}{AM}$.

Đặt AB = AD = 2a. Ta tính được $AM = AN = a\sqrt{5}$.

Từ $AD^2 = AH \cdot AN$, ta tính được $AH = \frac{4a}{\sqrt{5}}$. Do đó



Hình 110

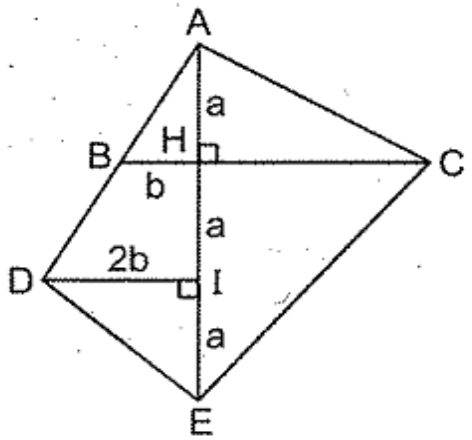
$$\cos\widehat{MAN} = \frac{AH}{AM} = \frac{4a}{\sqrt{5}} : \left(a\sqrt{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

36. (h.111) Gọi I là trung điểm của HE. Đặt AH = a, HB = b thì DI = 2b, EH = 2a, $HC = \frac{AH^2}{HB} = \frac{a^2}{b}$.

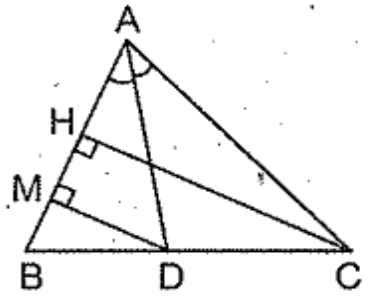
$$\text{tg}\widehat{IED} = \frac{DI}{IE} = \frac{2b}{a}, \quad \text{tg}\widehat{HCE} = \frac{HE}{HC} = \frac{2a}{\frac{a^2}{b}} = \frac{2b}{a}.$$

Suy ra $\widehat{IED} = \widehat{HCE}$ do đó $\widehat{IED} + \widehat{HEC} = 90^o$.

Vậy $\widehat{DEC} = 90^o$.



Hình 111



Hình 112

37. (h.112). Xét ΔABC có $BC \geq AC \geq AB$, đường phân giác AD, đường cao CH. Cần chứng minh $CH \geq AD$.

Kẻ $DM \perp AB$. Ta có :

$$AC \geq AB \Rightarrow DC \geq DB \Rightarrow BC \geq 2BD \Rightarrow CH \geq 2DM. \qquad (1)$$

Mặt khác do $\widehat{A}$ là góc lớn nhất của ΔABC nên $\widehat{A} \geq 60^o$

$$\Rightarrow \widehat{MAD} \geq 30^o \Rightarrow \sin\widehat{MAD} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DM}{AD} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2DM \geq AD. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CH \geq AD$.

38. Giải tương tự như Ví dụ 4.

Đáp số : $\text{tg}\,22^o30' = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1.$

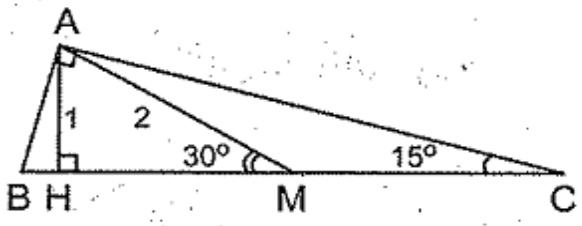
Cách 1. Xét ΔABC có $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{B} = 22^o30'$ rồi kẻ đường trung trực của BC.

Cách 2. Xét ΔABC có $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{B} = 45^o$ rồi kẻ đường phân giác BD.

Cách 3. Xét ΔABC có $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{C} = 22^o30'$ rồi kẻ đường trung tuyến AM và đường cao AH.

39. Xét ΔABC có $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{C} = 15^o$, $BC = 4$ (h.113). Kẻ đường trung tuyến AM, đường cao AH. Ta có $\widehat{AMB} = 30^o$, $AM = 2$ nên $AH = 1$, $\dfrac{AH}{HM} = tg30^o = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra $HM = \sqrt{3}$. Do đó $HC = HM + MC = \sqrt{3} + 2$. Ta có

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$
$$= 1 + (\sqrt{3} + 2)^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$
$$= 4(2 + \sqrt{3})$$



Hình 113

nên $AC = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Do đó

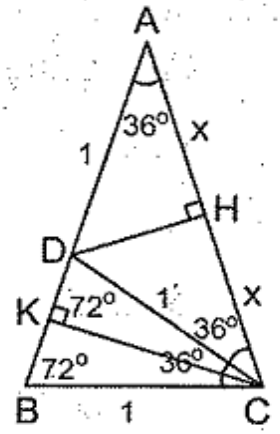
$$\cos 15^o = \frac{HC}{AC} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Bạn đọc tự chứng minh $\sin 15^o = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{4}}$.

40. Vẽ ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 36^o$, $BC = 1$ (h.114). Thế thì $\widehat{B} = \widehat{C} = 72^o$. Vẽ đường phân giác CD. Ta có ΔADC cân tại D, ΔBCD cân tại C, $AD = DC = CB = 1$.

Kẻ $DH \perp AC$. Đặt $AH = HC = x$. Như vậy

$$\cos 36^o = \frac{AH}{AD} = x.$$



Hình 114

Ta có $AB = AC = 2x$, $BD = 2x - 1$.

Xét ΔABC với đường phân giác CD

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{1}{2x - 1} = 2x \Rightarrow 4x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow 2x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Nghiệm dương của phương trình : $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Do đó $\cos 36^o = x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Để tính $\cos 72^o$, ta kẻ $CK \perp AB$. Ta có

$$\cos 72^o = \frac{DK}{DC} = \frac{2x-1}{2} = x - \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

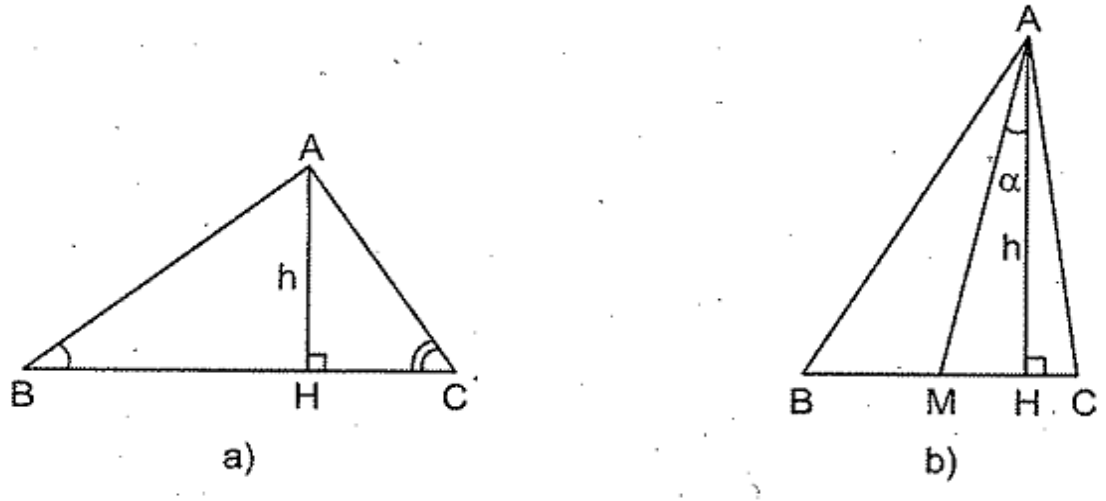
Chú ý : Cũng có thể giải bài toán bằng cách vẽ ΔABC cân có $\widehat{B} = \widehat{C} = 36^o$, $AB = AC = 1$, lấy điểm D trên BC sao cho $BD = AB$, rồi xét các tam giác đồng dạng ABC và DAC. Bạn đọc tự giải.

§3. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

41. a) (h.115a). $BH = h.\text{cotg}B$, $CH = h.\text{cotg}\, C$

$$\Rightarrow BC = BH + CH = h.(\text{cotg}B + \text{cotg}C).$$

$$h = \frac{40}{\text{cotg}40^o + \text{cotg}55^o} \approx \frac{40}{1{,}1918 + 0{,}7002} \approx \frac{40}{1{,}892} \approx 21 \text{ (cm)}.$$



Hình 115

b) (h.115b) Đặt $\widehat{MAH} = \alpha$. Ta có $BH = h\text{cotg}B$, $CH = h\text{cotg}C$, $MH = h\text{tg}\alpha$,

$$BH - CH = (BM + MH) - (CM - MH) = 2MH$$

$$\Rightarrow h\text{cotg}B - h\text{cotg}C = 2h\text{tg}\alpha$$

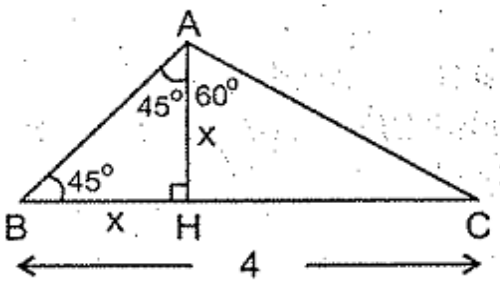
$$\Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\text{cotg}B - \text{cotg}C}{2} = (0{,}5774 - 0{,}1763) : 2 \approx 0{,}2006$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 11^o21'.$$

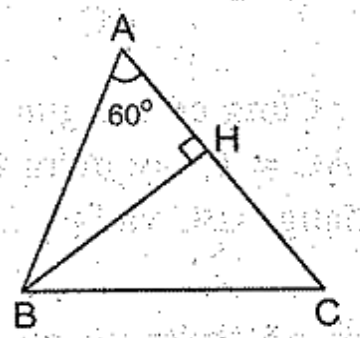
42. (h.116) Kẻ $AH \perp BC$. Đặt $AH = BH = x$. Ta có $HC = AH.\text{tg}60^o = x\sqrt{3}$.

Do $BH + HC = BC$ nên $x + x\sqrt{3} = 4$. Suy ra $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}+1} = 2(\sqrt{3}-1)$ cm.

Từ đó $AB = x\sqrt{2} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm, $AC = 2x = 4(\sqrt{3} - 1)$ cm.



Hình 116

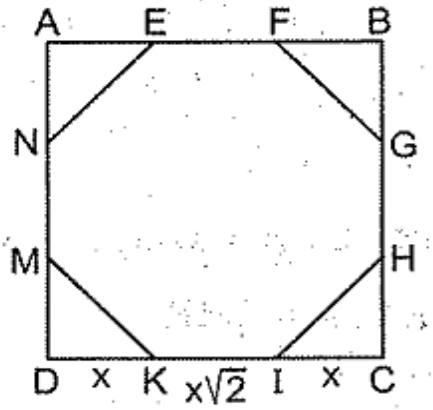


Hình 117

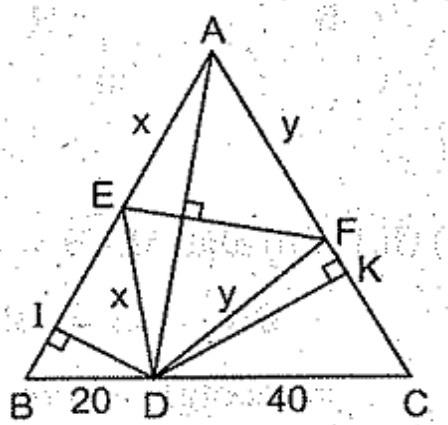
43. (h.117) Kẻ $BH \perp AC$. Ta có $AH = 14$, $BH = AB.\sin 60^o = 28.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$, $HC = 21$, $BC^2 = BH^2 + HC^2 = 588 + 441 = 1029$. Từ đó $BC = 7\sqrt{21}$ cm.

44. (h.118) Đặt $DK = IC = x$ thì $KI = MK = x\sqrt{2}$. Từ $DK + KI + IC = DC$ suy ra $x(2 + \sqrt{2}) = 1$, do đó $x = \dfrac{1}{2 + \sqrt{2}}$. Tổng diện tích của bốn tam giác vuông cân bị cắt đi bằng

$$2x^2 = 2.\frac{1}{6 + 4\sqrt{2}} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}\ (dm^2).$$



Hình 118

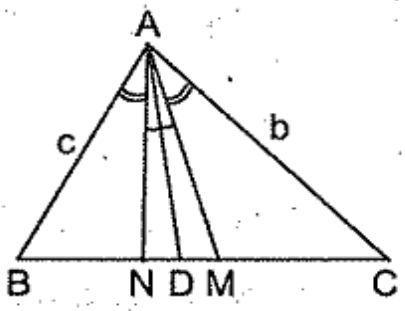


Hình 119

45. (h.119) Đặt $DE = AE = x$, $DF = AF = y$. Kẻ $DI \perp AB$, $DK \perp AC$. Ta tính được $BI = 10$, $DI = 10\sqrt{3}$, từ đó áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔDIE vuông ta tính được $x = 28$.

Bằng cách tương tự, ta tính được $y = 35$. Biết $AE = 28$, $AF = 35$ và $\widehat{EAF} = 60^o$, ta tính được $EF = 7\sqrt{21}$ (xem Bài tập 43).

46. (h.120). Ta có $\widehat{DAN} = \widehat{DAM}$, $\widehat{NAB} = \widehat{MAC}$.



Hình 120

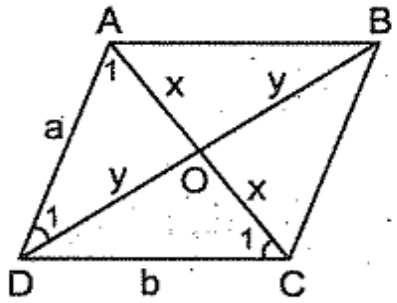
Theo Ví dụ 6 ta có

$$\frac{BN}{MC} = S_{ABN} : S_{AMC} = \frac{c.AN}{b.AM}; \qquad (1)$$

$$\frac{BM}{NC} = S_{ABM} : S_{ANC} = \frac{c.AM}{b.AN}. \qquad (2)$$

Nhân từng vế (1) với (2) : $\frac{BN}{MC}.\frac{BM}{NC} = \frac{c^2}{b^2}$. Do BM = MC nên $\frac{BN}{NC} = \frac{c^2}{b^2}$.

47. (h.121). Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD. Đặt OA = OC = x; OB = OD = y, AD = a, DC = b, theo đề bài $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.



Hình 121

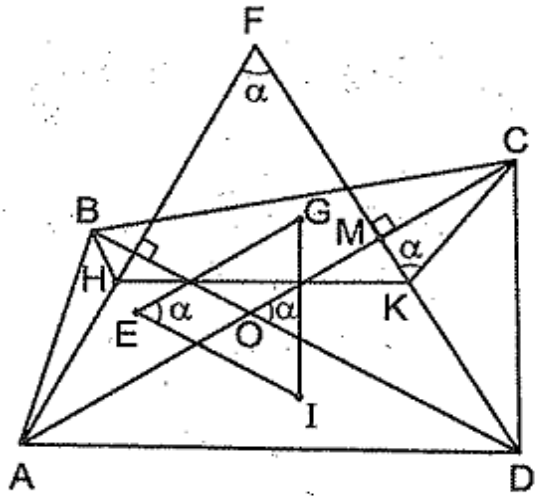
Giả sử $a \le b \Rightarrow \widehat{C}_1 < \widehat{A}_1 \Rightarrow \widehat{C}_1 < 90^o$. Do $a \le b$ nên $x \le y \Rightarrow \widehat{D}_1 < \widehat{A}_1 \Rightarrow \widehat{D}_1 < 90^o$.

Theo Ví dụ 6, $S_{ADO} = \frac{1}{2}ay\sin D_1$, $S_{OCD} = \frac{1}{2}bx\sin C_1$ mà

$$S_{ADO} = S_{OCD}, \quad ay = bx$$

$$\Rightarrow \sin D_1 = \sin C_1 \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{ADC}.$$

48. (h.122)



Hình 122

a) Gọi $\widehat{COD} = \alpha < 90^o$. Ta chứng minh được $\widehat{IEG} = \widehat{DOC}$, $\widehat{HFK} = \widehat{DOC}$ nên

$$\widehat{IEG} = \widehat{HFK} \qquad (1)$$

Dễ thấy $EG = \frac{1}{3}AC$, $EI = \frac{1}{3}BD$ nên

$$\frac{EG}{EI} = \frac{AC}{BD} \qquad (2)$$

Gọi M là giao điểm của FK và AC, ta có

$$FK = FM + MK = AM\,\text{cotg}\alpha + MC\,\text{cotg}\alpha = AC\,\text{cotg}\alpha.$$

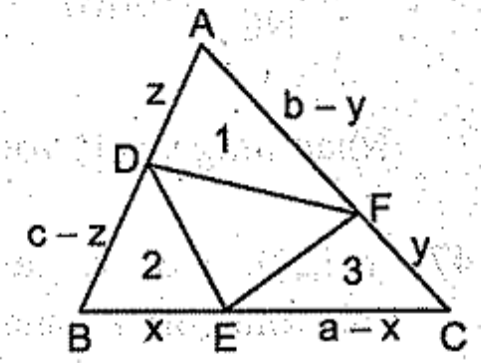
Tương tự FH = BD cotgα. Do đó

$$\frac{FK}{FH} = \frac{AC}{BD}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2) , (3) suy ra $\Delta IEG \backsim HFK$ (c.g.c).

b) Sử dụng câu a) và chú ý rằng $IE \perp HF$.

49. (h.123). Chứng minh bằng phản chứng. Gọi S là diện tích ΔABC và kí hiệu như hình vẽ.



Hình 123

Giả sử $\frac{S_1}{S} > \frac{1}{4}$; $\frac{S_2}{S} > \frac{1}{4}$; $\frac{S_3}{S} > \frac{1}{4}$

thì $$\frac{S_1.S_2.S_3}{S^3} > \frac{1}{64}. \qquad (1)$$

Áp dụng công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (Ví dụ 6) ta có :

$$\frac{S_1}{S} = \frac{z(b-y)}{bc}; \quad \frac{S_2}{S} = \frac{x(c-z)}{ac}; \quad \frac{S_3}{S} = \frac{y(a-x)}{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1.S_2.S_3}{S^3} = \frac{x(a-x)}{a^2}.\frac{y(b-y)}{b^2}.\frac{z(c-z)}{c^2}.$$

Ta có $$\frac{x(a-x)}{a^2} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^2 \ge 4x(a-x) \Leftrightarrow (a-2x)^2 \ge 0.$$

Tương tự đối với $\frac{y(b-y)}{b^2}$, $\frac{z(c-z)}{c^2}$.

Suy ra $\frac{S_1.S_2.S_3}{S^3} \le \frac{1}{64}$, mâu thuẫn với (1). Suy ra điều phải chứng minh.

$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{4}S \Leftrightarrow a = 2x, b = 2y, c = 2z \Leftrightarrow$ D, E, F là trung điểm các cạnh của ΔABC.

Chú ý : Bài toán vẫn đúng nếu ΔABC có góc vuông hay góc tù.

§4. Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn

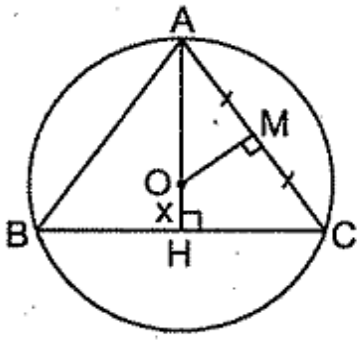
50. (h.124) Kẻ đường cao AH. Ta tính được AH = 32cm. Do AH > HC nên tâm O nằm giữa A và H. Đặt OH = x.

Kẻ OM ⊥ AC. Ta có

$$\Delta AMO \backsim \Delta AHC \text{ (g.g)}$$

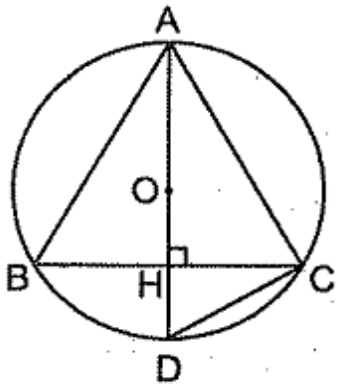
$$\Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{AM}{AH} \Rightarrow \frac{32 - x}{40} = \frac{20}{32}.$$

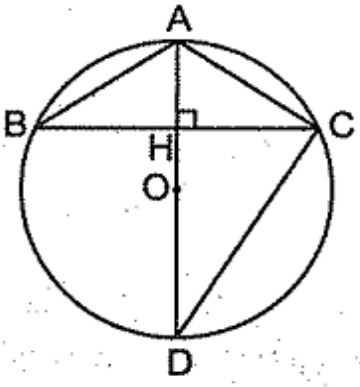
Từ đó x = 7cm.



Hình 124

51. (h.125) Kẻ đường kính AD thì $\widehat{ACD} = 90^o$. Ta có $AC^2 = AD.AH$ nên $AD = \frac{AC^2}{AH} = \frac{b^2}{h}$. Bán kính của đường tròn bằng $\frac{b^2}{2h}$.





Hình 125

52. (h.126). a) Ta có

$$IC + IM = IA + IM > AM$$

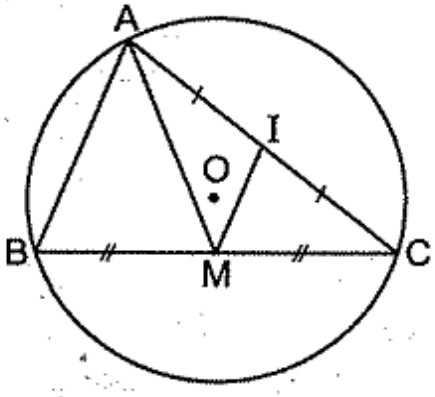
nên $\quad IC + IM + MC > AM + MC \qquad (1)$

Ta chứng minh được

$$AM + MC > AO + OC = R + R = 2R \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra chu vi ΔIMC lớn hơn 2R.

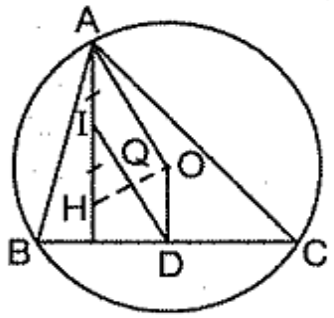
b) Chu vi ΔIMC bằng nửa chu vi ΔABC (vì $IC = \frac{AC}{2}$, $IM = \frac{AB}{2}$, $MC = \frac{BC}{2}$) nên từ câu a) suy ra chu vi ΔABC lớn hơn 4R.



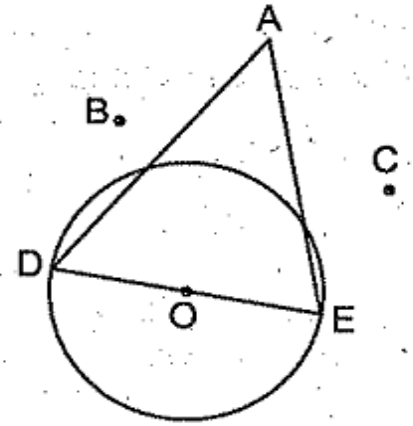
Hình 126

53. (h.127) Gọi H là trực tâm của ΔABC, I là trung điểm của AH. Ta chứng minh được AH = 2OD, DOAI là hình bình hành, suy ra DD' đi qua trung điểm Q của OH.

Tương tự EE', FF' cũng đi qua Q (điểm Q là tâm đường tròn Ơ-le của ΔABC).



Hình 127



Hình 128

54. (h.128) Gọi DE là một đường kính của đường tròn (O), ta có

$$DA + EA \geq DE = 2cm,$$

$$DB + EB \geq DE = 2cm,$$

$$DC + EC \geq DE = 2cm.$$

Suy ra $(DA + DB + DC) + (EA + EB + EC) \geq 6cm.$

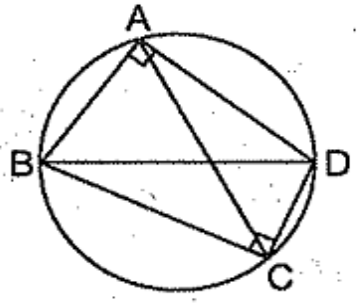
Nếu DA + DB + DC ≥ 3cm thì điểm M phải tìm là D.

Nếu DA + DB + DC < 3cm thì EA + EB + EC > 3cm, điểm M phải tìm là E.

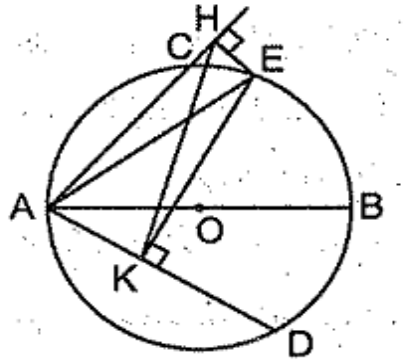
§5. Đường kính và dây của đường tròn. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

55. (h.129) a) AC là dây của đường tròn có đường kính là BD nên AC ≤ BD.

b) AC = BD ⇔ ABCD là hình chữ nhật.



Hình 129



Hình 130

56. (h.130) Các điểm A, H, E, K thuộc đường tròn có đường kính AE, mà HK là dây của đường tròn đó nên HK ≤ AE.

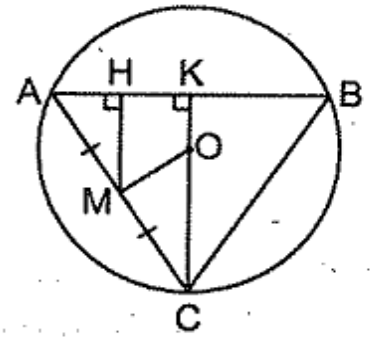
Trong đường tròn (O), ta có AE ≤ AB. Do đó HK ≤ AB.

57. (h.131) a) Kẻ MH ⊥ AB. Tam giác vuông AHM có AM = 10cm, MH = 8cm, nên AH = 6cm.

Kẻ CK ⊥ AB. Ta có

$$CK = 2MH = 16cm,$$

$$AK = 2AH = 12cm.$$



Hình 131

Do $AK = \frac{1}{2}AB$ nên CK là đường trung trực của AB, do đó CK đi qua O. Vậy ΔABC cân tại C.

b) Để tính OC, ta chú ý đến cặp tam giác đồng dạng OMC và AKC. Suy ra

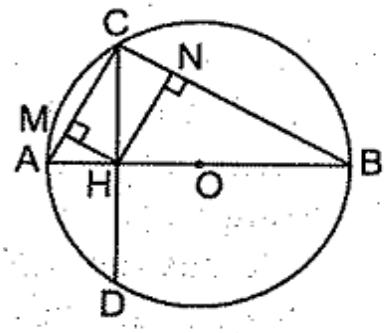
$$\frac{MC}{KC} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow \frac{10}{16} = \frac{OC}{20}.$$

Đáp số : OC = 12,5cm.

58. Tính khoảng cách từ O đến AB, được 3cm. Tính khoảng cách từ O đến CD được 4cm.

Đáp số : 7cm hoặc 1cm.

59. (h.132)



Hình 132

a) Đường kính AB vuông góc với dây CD nên

$$CH = \frac{CD}{2} = 6cm \quad \text{(giả sử HA < HB).}$$

Áp dụng định lí Py-ta-go ta tính được OH = 2,5cm. Do đó HB = 9cm, HA = 4cm.

b) *Cách 1*. Ta tính được

$$S_{CMHN} = \frac{CH^3}{AB} \text{ (xem Bài tập 21b) nên}$$

$$S_{CMHN} = \frac{6.6.6}{13} = \frac{216}{13} = 16\frac{8}{13}(cm^2).$$

Cách 2. ΔCHN và ΔABC đồng dạng nên

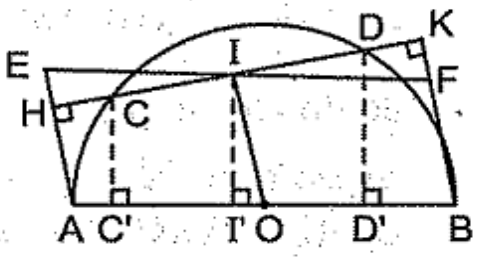
$$S_{CHN} : S_{ABC} = \left(\frac{CH}{AB}\right)^2 = \left(\frac{6}{13}\right)^2 = \frac{36}{169}.$$

Ta lại có $S_{ABC} = \frac{1}{2}.13.6 = 39(cm^2)$

$$S_{CHN} = 39.\frac{36}{169} = \frac{108}{13}.$$

Vậy $S_{CMHN} = \frac{216}{13} = 16\frac{8}{13}$ (cm^2).

60. (h.133) a) Gọi I là trung điểm của CD. Hãy chứng minh IH = IK và IC = ID.



Hình 133

b) Qua I kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AH và BK ở E và F. Lần lượt chứng minh :

$$S_{AHKB} = S_{AEFB}$$

$$S_{AEFB} = AB.II',$$

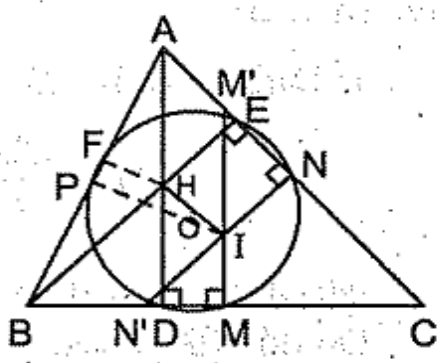
$$S_{ABC} + S_{ADB} = AB.\ II' \text{ (kẻ II' , CC', DD' vuông góc với AB).}$$

c) Ta tính được IO = 12cm.

$$S_{AHKB} = AB.II' \le AB.IO = 30.12 = 360.$$

max $S_{AHKB} = 360cm^2 \Leftrightarrow I' \equiv O \Leftrightarrow CD \,//\, AB$. Khi đó AHKB là hình chữ nhật.

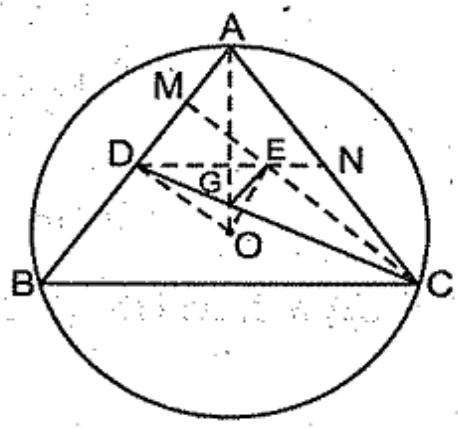
61. (h.134) Kẻ MM' ⊥ BC, NN' ⊥ AC, MM' cắt NN' tại I. Gọi H là trực tâm của ΔABC, O là trung điểm của HI. Chứng minh rằng O thuộc đường trung trực của dây DM, O thuộc đường trung trực của dây EN, do đó O là tâm của đường tròn đi qua sáu điểm D, M, N, E, F, P ; điểm I đối xứng với H qua O.



Hình 134

Chứng minh tương tự, MM' cắt PP' tại I' thì I' đối xứng với H qua tâm đường tròn nói trên. Suy ra I ≡ I'. Vậy PP' cũng đi qua I.

62. (h.135). Kẻ các đường trung tuyến CM, DN của ΔACD, chúng cắt nhau ở E. Gọi G là giao điểm của CD và AO, G là trọng tâm của ΔABC.



Hình 135

Ta có

$$\frac{CE}{CM} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow EG \,//\, AB.$$

Ta lại có OD ⊥ AB nên

$$EG \perp OD. \qquad (1)$$

Ta có GO ⊥ BC mà BC // DN nên OG ⊥ DN, tức là

$$OG \perp DE. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra G là trực tâm của ΔODE, do đó OE ⊥ DG, tức là OE ⊥ CD.

§6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

63. (h.136) a) Hình thang ABCD có AO = OB, OM // AD // BC nên M là trung điểm của CD.

b) Cùng bằng 2OM.

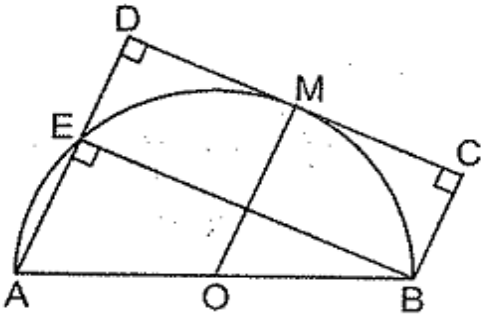
c) Tứ giác BCDE là hình chữ nhật.

d) Gọi diện tích ABCD là S.

Ta có

$$S = \frac{BC + AD}{2}.BE = OM.BE \le OM.AB = 2R^2.$$

$\max S = 2R^2 \Leftrightarrow OM \perp AB.$



Hình 136

64. (h.137)

a) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔBIC.Các điểm I và O thuộc đường trung trực của BC nên A, I, O thẳng hàng và AO ⊥ BC. Ta có

$$\widehat{OCI} = \widehat{OIC}, \quad \widehat{ICA} = \widehat{ICB}$$

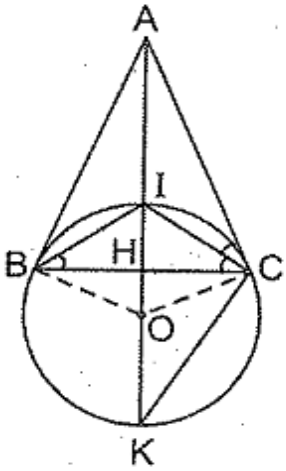
nên $\widehat{OCI} + \widehat{ICA} = \widehat{OIC} + \widehat{ICB} = 90^o.$

AC là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Xét ΔCAH, CI là đường phân giác trong, CK là đường phân giác ngoài. Theo tính chất đường phân giác

$$\frac{IA}{IH} = \frac{KA}{KH} \left(\text{cùng bằng } \frac{CA}{CH}\right).$$

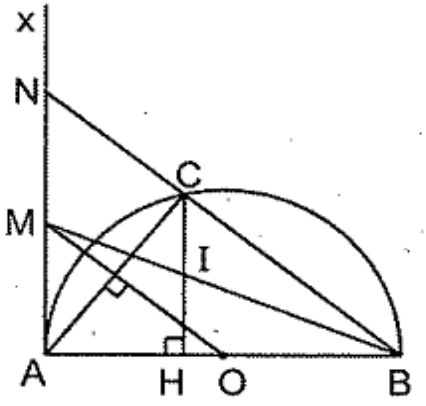
Suy ra $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}.$



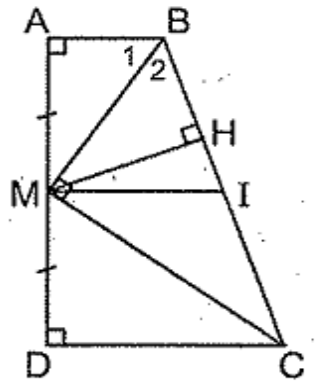
Hình 137

65. (h.138) Gọi N là giao điểm của BC và AM. Tam giác ABN có AO = OB, OM // BC nên NM = MA.

$$CH \,//\, AN \Rightarrow \frac{CI}{NM} = \frac{IH}{MA} \left(\text{cùng bằng } \frac{BI}{BM}\right) \text{ mà } NM = MA \text{ nên } CI = IH.$$



Hình 138



Hình 139

66. (h.139) a) Gọi I là trung điểm của BC. Hãy chứng minh IM ⊥ AD.

b) Kẻ MH ⊥ BC. Hãy chứng minh ΔABM = ΔHBM (chú ý $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ vì cùng bằng $\widehat{BMI}$).

67. (h.140) OC cắt DE ở K và cắt đường tròn (O) ở I. Ta có ΔCEI vuông nên

$$CE^2 = CI.CK = 2CO.CK. \qquad (1)$$

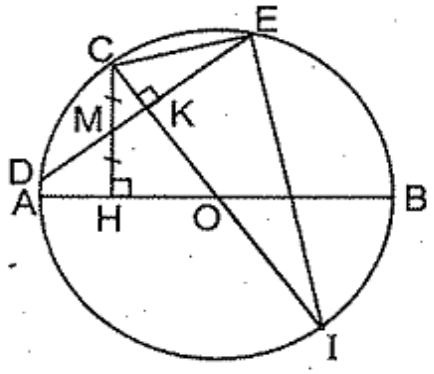
ΔCMK ∽ ΔCOH (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CM}{CO} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow CO.CK = CM.CH. \qquad (2)$$

Do CH = 2CM nên

$$CH^2 = 2CM.CH. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra CE = CH. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

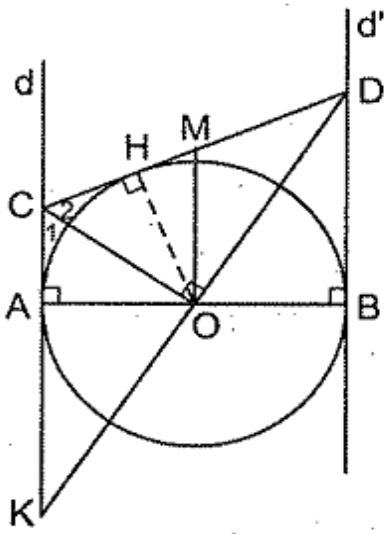


Hình 140

68. (h.141)

Cách 1. Kẻ OH ⊥ CD, DO cắt d tại K. Dễ dàng chứng minh OK = OD, do đó ΔCKD cân tại C, $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$, suy ra OH = OA. Vậy H ∈ (O). Vì CD vuông góc với bán kính OH tại H nên CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Cách 2. Kẻ OH ⊥ CD. Gọi M là trung điểm của CD. Hãy dùng tính chất đường trung bình của



Hình 141

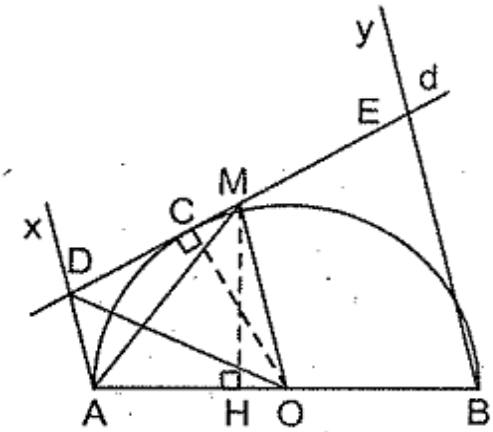
hình thang và đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (cùng bằng $\widehat{COM}$). Sau đó giải tiếp như ở cách 1.

69. (h.142) Gọi M là trung điểm của DE. Kẻ MH ⊥ AB. Ta sẽ chứng minh MH = MD.

OM là đường trung bình của hình thang ABED ⇒ OM // AD ⇒ $S_{AOM} = S_{DOM}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}OA.MH = \frac{1}{2}OC.MD.$$

Do OA = OC nên MH = MD. Từ đó suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn (M ; MD).



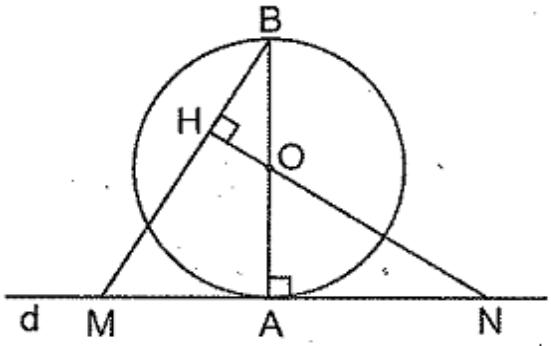
Hình 142

70. (h.143) a) Xét các tam giác đồng dạng ABM và ANO để suy ra

$$AM.AN = 2R^2.$$

b) Các độ dài AM, AN là hai số dương có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau. Khi đó

$$MN = 2\sqrt{2}\,R.$$



Hình 143

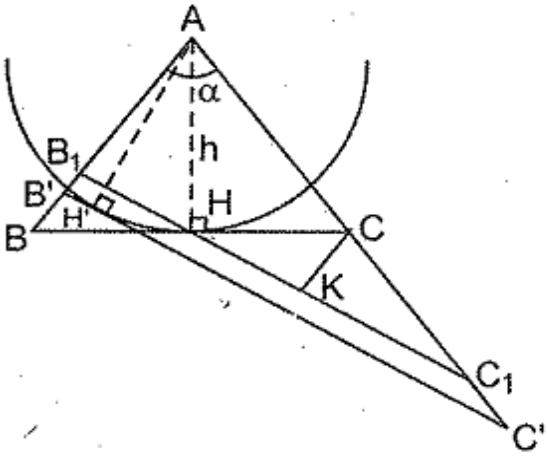
71. a) Không mất tính tổng quát, giả sử B' thuộc cạnh AB và C' thuộc tia đối của CA (h.144).

Điểm H ở bên trong ΔAB'C'. Qua H kẻ đường thẳng song song với B'C' cắt các cạnh AB' và AC' ở B_1 và C_1. Dễ thấy

$$S_{AB_1C_1} < S_{AB'C'}. \qquad (1)$$

Ta lại có

$$S_{ABC} < S_{AB_1C_1} \qquad (2)$$



Hình 144

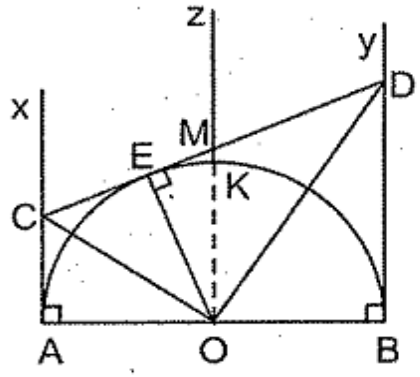
(Thật vậy, kẻ CK// AB (K thuộc B_1C_1) thì $S_{HBB_1} = S_{HCK} < S_{HCC_1}$).

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABC} < S_{AB'C'}$.

b) Từ câu a) suy ra trong các tam giác ABC có $\widehat{A} = \alpha$ và đường cao AH = h, tam giác cân tại A có diện tích nhỏ nhất.

§7. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

72. (h.145)



Hình 145

a) ΔCOD vuông có OE là đường cao. Ta có

$$AC.BD = EC.ED = OE^2 = R^2.$$

b) OM là đường trung bình của hình thang ACDB nên OM // Ax // By. Điểm M chạy trên tia Kz song song cách đều hai tia Ax, By (K thuộc nửa đường tròn tâm O).

c) $S_{ACDB} = \dfrac{AC + BD}{2}.AB = OM.2R \geq OK.2R = 2R^2.$

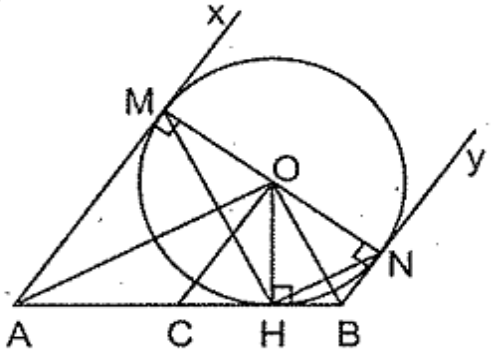
min $S_{ACDB} = 2R^2 \Leftrightarrow M \equiv K$. Khi đó ACDB là hình chữ nhật.

73. (h.146) a) Tâm O là giao điểm của các tia phân giác của các góc A và B.

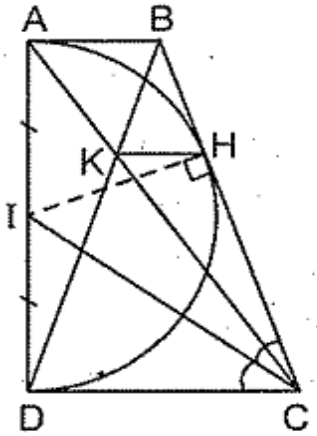
b) $\widehat{AOB} = 90^o$.

c) Gọi C là trung điểm của AB. Ta có OM và ON cùng vuông góc với OC.

d) $HM = HN \Leftrightarrow HO \perp MO \Leftrightarrow \widehat{MAH} = 90^o \Leftrightarrow Ax \perp AB$, $By \perp AB$.



Hình 146



Hình 147

74. (h.147)

a) Kẻ $IH \perp BC$. Chứng minh rằng $H \in (I)$.

b) Hãy chứng minh $\widehat{BIC} = 90^o$ để suy ra

$$AB.CD = HB.HC = IH^2 = a^2.$$

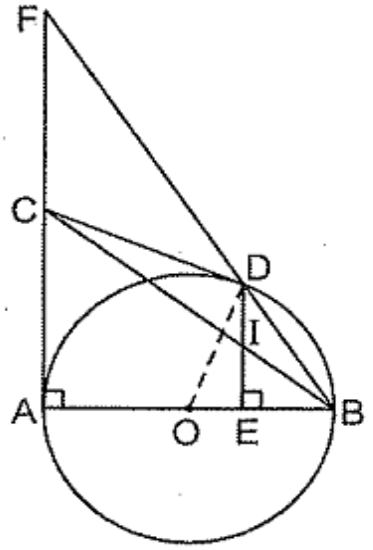
c) Theo tính chất của tiếp tuyến và định lí Ta-lét ta có $\dfrac{BH}{HC} = \dfrac{BA}{DC} = \dfrac{BK}{KD}$.

Suy ra KH // DC (định lí Ta-lét đảo).

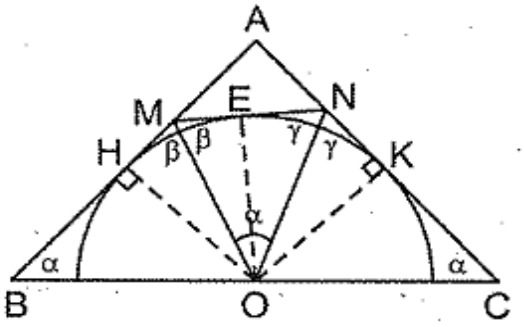
75. (h.148) Gọi F là giao điểm của BD và AC. Ta có

$$\frac{IE}{AC} = \frac{ID}{CF} \left(\text{cùng bằng } \frac{BI}{BC}\right).$$

Hãy chứng minh AC = CF.



Hình 148



Hình 149

76. (h.149)

a) Ta có

$$\widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{HOK} = \frac{180^o - \widehat{A}}{2}.$$

Do đó $\widehat{MON} = \widehat{B} = \widehat{C} = \alpha.$

b) $\Delta BMO \backsim \Delta OMN$ (g.g)

$\Delta OMN \backsim \Delta CON$ (g.g).

c) ΔBMO và ΔCON đồng dạng $\Rightarrow \frac{BM}{CO} = \frac{BO}{CN} \Rightarrow BM.CN = BO.CO = a^2.$

d) Tích BM.CN không đổi nên tổng BM + CN nhỏ nhất khi và chỉ khi BM = CN. Khi đó tiếp tuyến MN song song với BC.

77. (h.150)

a) M, A, N thẳng hàng. Tứ giác BMNC là hình thang, $S_{BMNC} = 2S_{ABC}$. Tính AH được 30cm.

Đáp số : $S_{BMNC} = 1950cm^2.$

b) Đặt AK = x, KN = y.

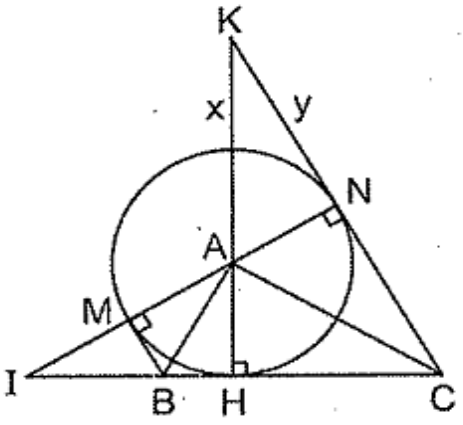
Ta có $\Delta KNA \backsim \Delta KHC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{KN}{KH} = \frac{AN}{CH}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+45} = \frac{y}{x+30} = \frac{2}{3}.$$

Từ đó suy ra x = 78cm, y = 72cm.

c) *Đáp số :* IM = 48cm, IB = 52cm.



Hình 150

78. (h.151) Dễ dàng tính được DE = 5cm.

Ta có

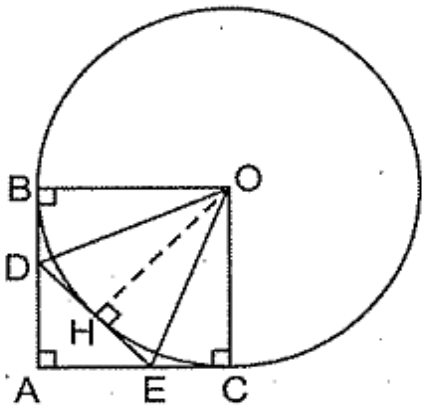
$S_{ODE} = S_{ABOC} - S_{ADE} - S_{OBD} - S_{OCE}$

$S_{ODE} = 36 - 6 - 6 - 9 = 15(cm^2)$.

Kẻ OH ⊥ DE, ta có

$OH = 2S_{ODE} : DE = 2.15 : 5 = 6(cm)$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.



Hình 151

79. (h.152)

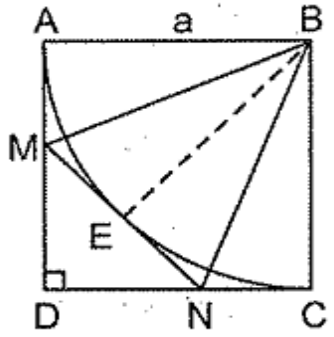
a) Chu vi ΔDMN bằng 2a.

b) $\widehat{MBN} = 45^o$.

c) Ta có MN < DM + DN

⇒ MN + MN < DM + DN + MN = 2a (câu a))

⇒ 2 MN < 2a ⇒ MN < a.



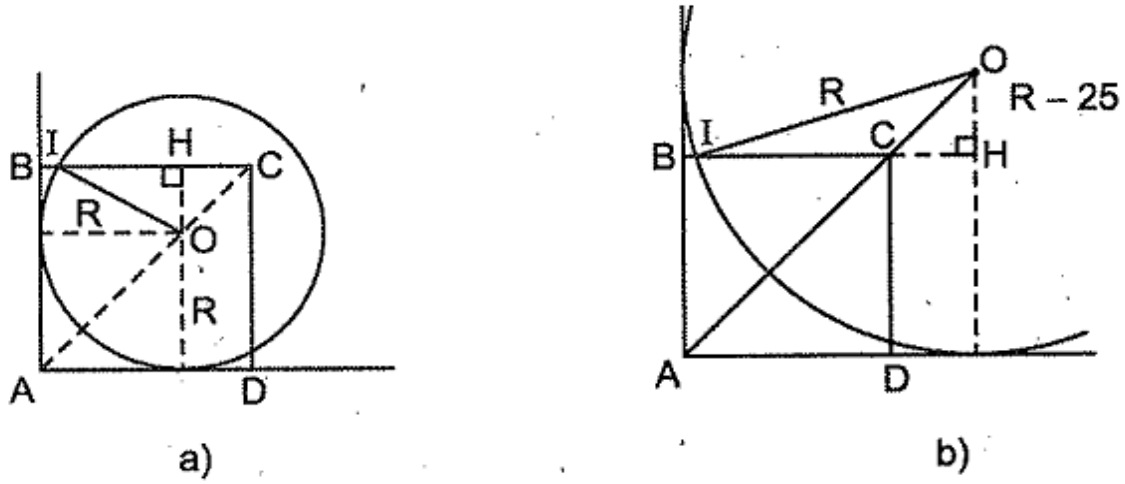
Hình 152

Ta có MN > DM, MN > DN nên

$$2MN > DM + DN \Rightarrow 3MN > DM + DN + MN = 2a \text{ (câu a))}$$

$$\Rightarrow MN > \frac{2a}{3}.$$

80. (h.153) Kẻ OH ⊥ BC. Gọi bán kính của (O) là R. Ta có OH = 25 – R (nếu O thuộc đoạn thẳng AC, h.153a) hoặc OH = R – 25 (nếu O thuộc tia đối của tia CA, h.153b).



Hình 153

Gọi I là giao điểm của (O) với cạnh BC, ta có OI = R, IH = R – 2. Trong ΔOHI vuông :

$$IH^2 + OH^2 = OI^2 \text{ nên } (R-2)^2 + (25-R)^2 = R^2.$$

Đưa về phương trình $R^2 - 54R + 629 = 0 \Leftrightarrow (R-37)(R-17) = 0$.

Vậy R = 17cm (ứng với hình 153a) hoặc R = 37cm (ứng với hình 153b).

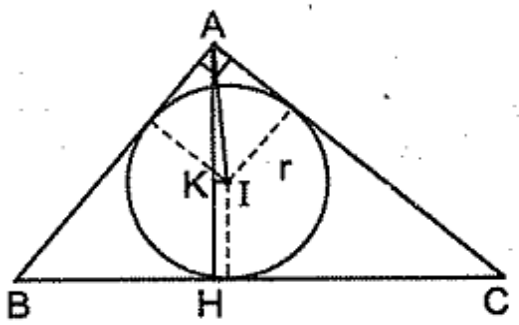
§8. Đường tròn nội tiếp tam giác

81. (h.154) Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp ΔABC. Dễ dàng tính được

BC = 25cm,

$$r = \frac{15 + 20 - 25}{2} = 5(\text{cm}).$$

$AI = 5\sqrt{2}$cm, AH = 12cm.



Hình 154

Kẻ IK ⊥ AH. Ta tính được AK = 7cm, IK = 1cm.

82. (h.155) a) Gọi x là bán kính của đường tròn nội tiếp.

Phương trình $(x+5)^2 + (x+12)^2 = 17^2$; x = 3.

Đáp số : AB = 8cm, AC = 15cm, BC = 17cm.

b) Giả sử AB = 20cm. Thế thì BD = BF = 20 – 6 = 14 (cm).

Đặt CD = CE = x. Phương trình $20^2 + (x+6)^2 = (x+14)^2$; x = 15.

Đáp số : AC = 21cm, BC = 29cm.

83. (h.155) Xét ΔABC vuông tại A. Giả sử AB = 12cm. Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp thì BC = 5r. Do đó

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25r^2 - 144. \quad (1)$$

Ta có $AB + AC - BC = 2r$, nên $AC = BC + 2r - AB = 7r - 12$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(7r - 12)^2 = 25r^2 - 144$.

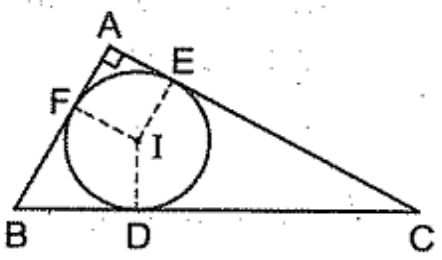
Thu gọn phương trình được

$$r^2 - 7r + 12 = 0 \Leftrightarrow (r - 3)(r - 4) = 0.$$

Vậy $r = 3$ hoặc $r = 4$.

Đáp số : $S = 54cm^2$ hoặc $S = 96cm^2$.

84. (h.155) Gọi b, c là các cạnh góc vuông và giả sử $b \geq c$.



Hình 155

Từ $bc = 48$ và $b^2 + c^2 = 100$, ta tính được $(b + c)^2$, $(b - c)^2$, $(b + c)$, $(b - c)$. Từ đó tính được $b = 8$, $c = 6$.

Bán kính của đường tròn nội tiếp bằng

$$\frac{8 + 6 - 10}{2} = 2(cm).$$

85. (h.155) Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp. Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Số đo diện tích tam giác bằng số đo chu vi nên

$$(a + b + c).\frac{r}{2} = a + b + c.$$

Từ đó $r = 2$. Ta có $b + c - a = 2r$. Do $r = 2$ và $c = 5$ nên $a - b = 1$.

Từ $a^2 - b^2 = 25$ và $a - b = 1$, ta tính được $a = 13$, $b = 12$.

86. (h.156)

a) Dễ chứng minh : Đường kính của đường tròn nội tiếp tam giác vuông bằng tổng các cạnh góc vuông trừ đi cạnh huyền.

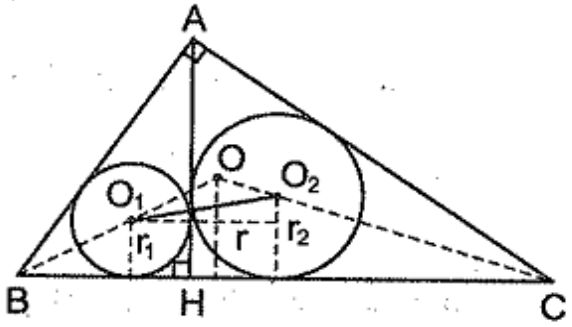
Do đó :

$$2r_1 = AH + BH - AB$$

$$2r_2 = AH + CH - AC$$

$$2r = AB + BC - BC.$$

Suy ra $r + r_1 + r_2 = AH$.



Hình 156

b) Các tam giác vuông ABC, HBA, HAC đồng dạng nên

$$\frac{r}{BC} = \frac{r_1}{AB} = \frac{r_2}{AC}.$$

Do đó $$\frac{r^2}{BC^2} = \frac{r_1^2}{AB^2} = \frac{r_2^2}{AC^2} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{AB^2 + AC^2} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{BC^2}$$

suy ra $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

c) $O_1O_2^2 = (r_2 - r_1)^2 + (r_2 + r_1)^2 = 2(r_1^2 + r_2^2) = 2r^2$.

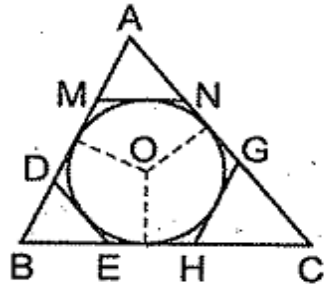
Ta lại có $r = \dfrac{AB + AC - BC}{2} = \dfrac{3 + 4 - 5}{2} = 1(cm)$.

Do đó $O_1O_2^2 = 2$, suy ra $O_1O_2 = \sqrt{2}$ (cm).

87. (h.157) Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt là chu vi của các tam giác nhỏ, P là chu vi của ΔABC. Các tam giác nhỏ đồng dạng với ΔABC nên

$$\frac{r_1}{r} = \frac{P_1}{P}, \ \frac{r_2}{r} = \frac{P_2}{P}, \ \frac{r_3}{r} = \frac{P_3}{P}.$$

Do đó $$\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P}.$$



Hình 157

Nhưng $P_1 + P_2 + P_3 = P$ (dễ dàng chứng minh) nên $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

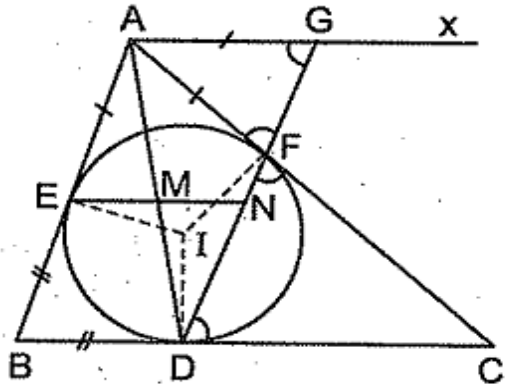
88. (h.158) Kẻ Ax // BC, cắt DF ở G. Dễ dàng chứng minh được AE = AF = AG.

Lần lượt chứng minh :

$$\frac{MN}{AG} = \frac{DM}{DA} = \frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BA} = \frac{EM}{EA} = \frac{EM}{AG}.$$

Suy ra MN = EM.

Vậy M là trung điểm của EN.

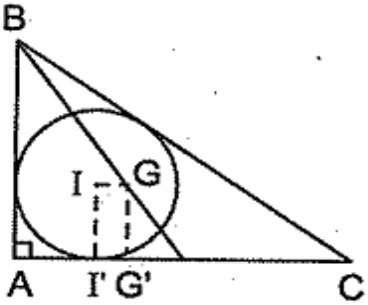


Hình 158

89. (h.159) Kẻ GG', II' vuông góc với AC. Ta có GG' = II' = r.

Đặt BC = a, AC = b, AB = c.

Ta có 2r = b + c − a, mà c = 3GG' = 3r nên



Hình 159

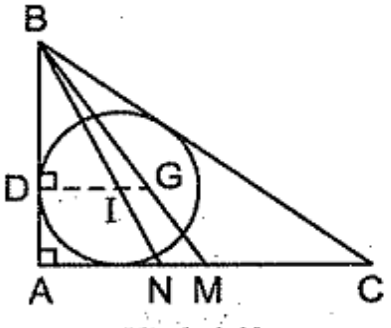
$$a - b = r. \quad (1)$$

Ta lại có $a^2 - b^2 = c^2 = 9r^2$ nên kết hợp với (1) suy ra

$$a + b = 9r. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 5r$, $b = 4r$, do đó $c = 3r$.

90. (h.160) Gọi D là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB. Ta tính được



Hình 160

$$BC = 15\text{cm},$$

$$AD = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{9 + 12 - 15}{2} = 3 \text{ (cm)}.$$

Gọi N là giao điểm của BI và AC. Ta có

$$\frac{BI}{BN} = \frac{BD}{BA} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{BG}{BM} \Rightarrow IG \,//\, NM,$$

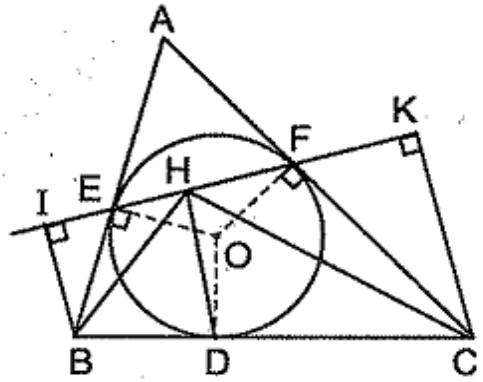
$$IG = \frac{2}{3}NM.$$

Lần lượt tính AN = 4,5cm ; AM = 6cm. Suy ra NM = 1,5cm, do đó IG = 1cm.

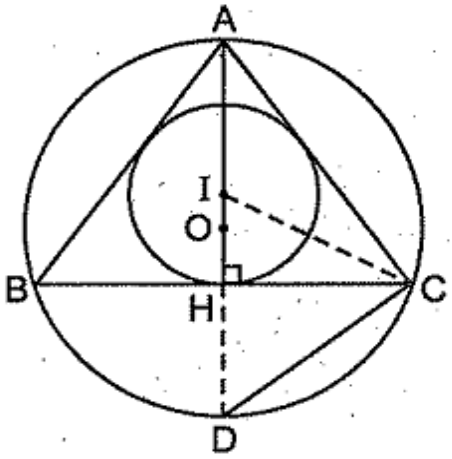
91. (h.161) Kẻ BI, CK vuông góc với EF. Tam giác AEF cân tại A nên $\widehat{BEI} = \widehat{CFK}$. $\Delta BEI \backsim \Delta CFK$ (g.g).

Lần lượt chứng minh $\frac{BI}{CK} = \frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD} = \frac{HI}{HK}$ để suy ra $\Delta BHI \backsim \Delta CHK$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{BHE} = \widehat{CHF}$.



Hình 161



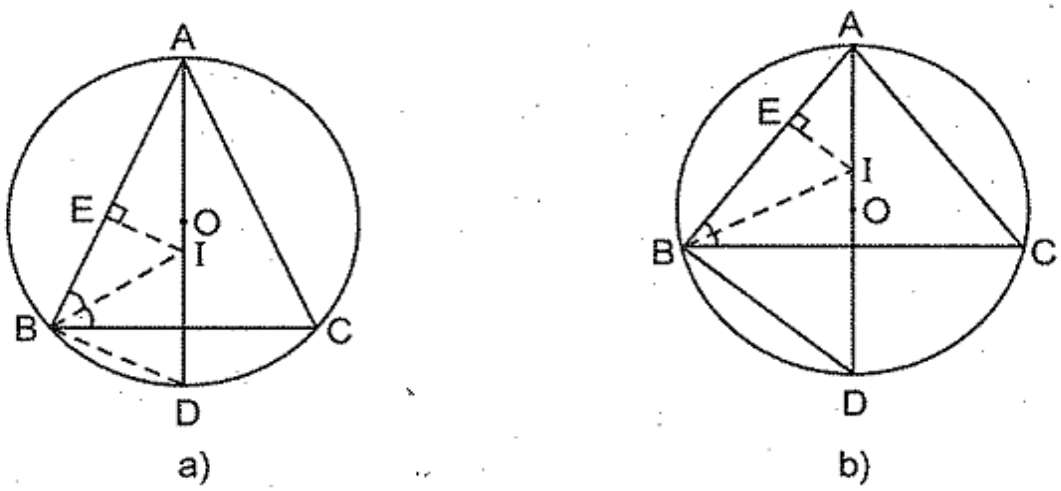
Hình 162

92. (h.162) a) Kẻ đường cao AH. Ta tính được AH = 32cm. Áp dụng tính chất đường phân giác của ΔAHC, tính được IH = 12cm.

b) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O). Từ $AC^2 = AH.HD$, tính được AD = 50cm. Do đó OA = 25cm.

c) *Đáp số :* OI = 5cm.

93. (h.163) Gọi (I) và (O) là các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp ΔABC cân tại A. Kẻ đường kính AD. Dễ chứng minh DI = DB. Đặt AI = x, ID = y.



Hình 163

Kẻ $IE \perp AB$. Ta có $\quad x + y = AD = 25 \quad (1)$

$$\frac{AI}{AD} = \frac{IE}{BD} = \frac{IE}{ID} \Rightarrow \frac{x}{25} = \frac{6}{y}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra x = 15, y = 10 hoặc x = 10, y = 15.

Trường hợp thứ nhất cho $AB = 5\sqrt{21}$cm, $BC = 4\sqrt{21}$cm (h.163a).

Trường hợp thứ hai cho AB = 20cm, BC = 24cm (h.163b).

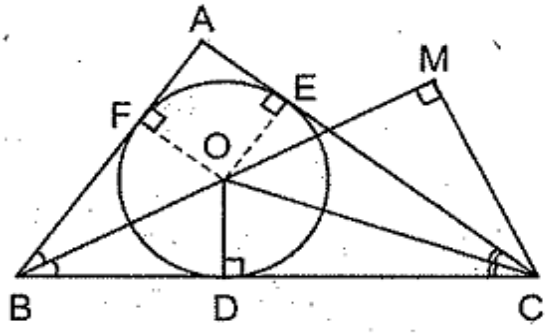
94. (h.164) Tính OB trong ΔODB được $OB = 2\sqrt{5}$.

Kẻ $CM \perp BO$. Ta có $\Delta BOD \backsim \Delta BCM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{BO}{BC} = \frac{OD}{CM} \Rightarrow \frac{4}{BM} = \frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{2}{CM}.$$

Suy ra $CM = 2\sqrt{5}$, $BM = 4\sqrt{5}$.

Do đó $OM = 2\sqrt{5}$.



Hình 164

Vậy ΔCOM vuông cân, $\widehat{COM} = 45^o$. Do đó $\widehat{A} = 90^o$. Dễ dàng tính được AE = AF = OE = 2cm, AB = 6cm, AC = 8cm.

95. Gọi a là cạnh huyền, b và c là các cạnh góc vuông (giả sử $b \geq c$), R và r là các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp. Ta có :

$$a = 2R \quad (1)$$

$$\frac{R}{r} = \sqrt{3} + 1 \quad (2)$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \qquad (3)$$

$$b + c - a = 2r. \qquad (4)$$

Cần tính $\sin B = \frac{b}{a}$, $\sin C = \frac{c}{a}$, do đó đặt $\frac{b}{a} = m$, $\frac{c}{a} = n$.

Từ (3) suy ra $$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow m^2 + n^2 = 1.$$

Từ (4), (1), (2) có

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 = \frac{2r}{a} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Suy ra $$m + n = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

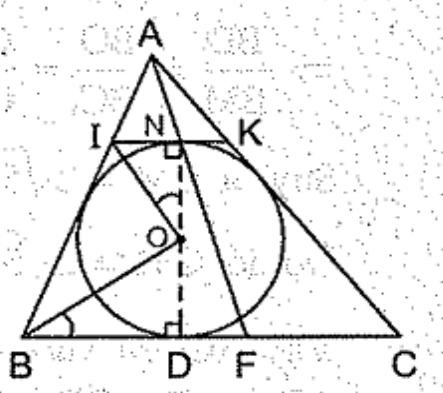
Từ $m^2 + n^2 = 1$, $m + n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ với $m \geq n$, ta tính được $(m+n)^2$, $2mn$, $(m-n)^2$, $m - n$. Từ đó $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $n = \frac{1}{2}$.

Đáp số : $\widehat{B} = 60^o$, $\widehat{C} = 30^o$, $\widehat{A} = 90^o$.

96. (h.165) a) Đặt OD = ON = r. Ta có $\Delta NOI \backsim \Delta DBO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{NI}{DO} = \frac{NO}{DB} \Rightarrow NI.DB = NO.DO = r^2.$$

Tương tự $NK.DC = r^2$. Suy ra $NI.DB = NK.DC$, do đó $\frac{NI}{NK} = \frac{DC}{DB}$.



Hình 165

b) Do IK // BC nên theo định lí Ta-lét

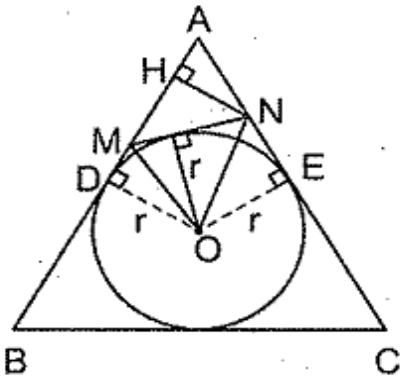
$$\frac{NK}{FC} = \frac{AK}{AC} = \frac{IK}{BC}. \qquad (1)$$

Từ câu a) suy ra $$\frac{NK}{DB} = \frac{NI}{DC} = \frac{NK + NI}{DB + DC} = \frac{IK}{BC}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{NK}{FC} = \frac{NK}{DB}$, do đó FC = DB.

97. (h.166). Gọi r là bán kính của đường tròn (O), D và E là tiếp điểm trên cạnh AB và AC.

Đặt AB = AC = BC = a, AM = x, AN = y, MN = z.



Hình 166

a) Trước hết tính r, được $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lần lượt tính S_{ADOE}, S_{MON} và chú ý rằng

$$S_{AMN} = S_{ADOE} - 2S_{MON}$$

Đáp số : $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (cm^2).

b) Kẻ NH ⊥ AB. Ta có $AH = \frac{y}{2}$, $NH = \frac{y\sqrt{3}}{2}$, $HM = x - \frac{y}{2}$. Theo định lí Py-ta-go :

$$MN^2 = NH^2 + HM^2 = \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 - xy.$$

c) Dễ thấy x + y + z = 2AD = a. Hệ thức phải chứng minh $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$ tương đương với

$$\frac{x}{a-x} + \frac{y}{a-y} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} = 1$$

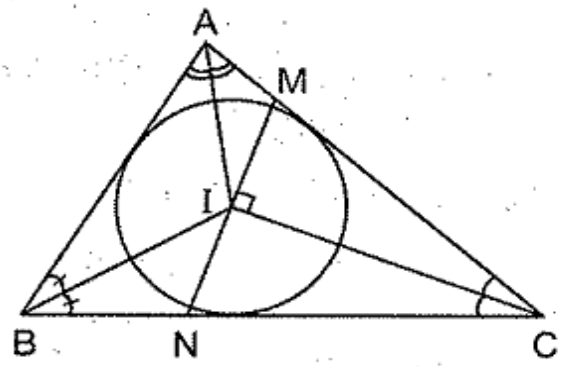
$$\Leftrightarrow x(x+z) + y(y+z) = (x+z)(y+z)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + xz + y^2 + yz = xy + xz + yz + z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy = z^2.$$

Đẳng thức cuối đã được chứng minh ở câu b).

98. (h.167) a) Ta có

$$\widehat{AMI} = \widehat{INB} = \widehat{AIB} \left(\text{cùng bằng } 90^o + \frac{\widehat{C}}{2}\right).$$



Hình 167

ΔAMI ∽ ΔAIB (g.g), ΔAIB ∽ ΔINB (g.g) nên các tam giác AMI và INB đồng dạng. Suy ra

$$\frac{IM}{BN} = \frac{AM}{IN}.$$

Do đó $$AM.BN = IM.IN = IM^2 = IN^2.$$

b) Đặt AM = m, BN = n, IM = IN = x. Do ΔAMI và ΔAIB đồng dạng nên

$$\frac{AM}{AI} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow IA^2 = AM.AB = m.c \Rightarrow \frac{IA^2}{bc} = \frac{m}{b}. \quad (1)$$

Tương tự $$\frac{IB^2}{ca} = \frac{n}{a}. \quad (2)$$

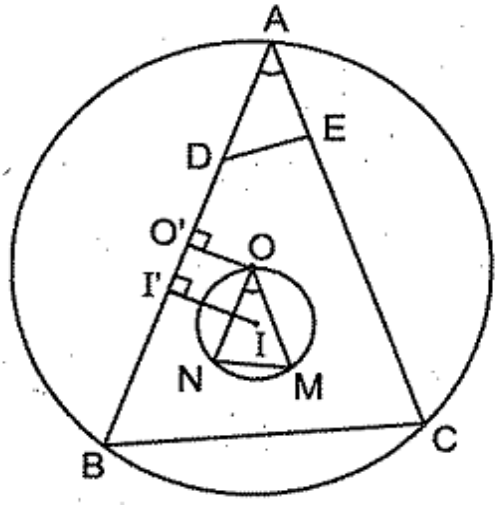
Xét ΔMIC vuông tại I, ta có $IC^2 = CM^2 - IM^2$. Do $IM^2 = mn$ (câu a)) và CM = CN nên

$$IC^2 = (b - m)(a - n) - mn = ab - bn - am + mn - mn = ab - bn - am.$$

Do đó $$\frac{IC^2}{ab} = 1 - \frac{n}{a} - \frac{m}{b}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $$\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1.$$

99. (h.168) Vẽ đường tròn (I ; IO), ta sẽ chứng minh rằng đường tròn (I) ngoại tiếp một tam giác bằng tam giác ADE. Vẽ các dây OM, ON của đường tròn (I) theo thứ tự song song với AC, AB.



Hình 168

Ta sẽ chứng minh ΔADE = ΔOMN.

Kẻ OO', II' vuông góc với AB. Ta có

ON = 2 O'I' = 2 (AI' – AO') =

= (AB + AC – BC) – AB = AC – BC = AE.

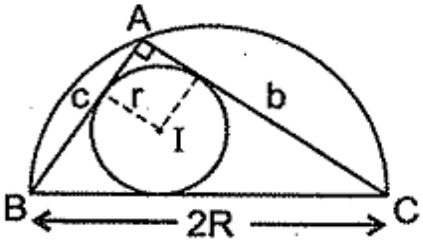
Tương tự OM = AD.

ΔOMN = ΔADE (c.g.c). Do đó các bán kính của các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác đó bằng nhau, tức là bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔADE bằng OI.

100. (h.169) Gọi b và c là các cạnh góc vuông. Ta có

$$2r = b + c - 2R$$

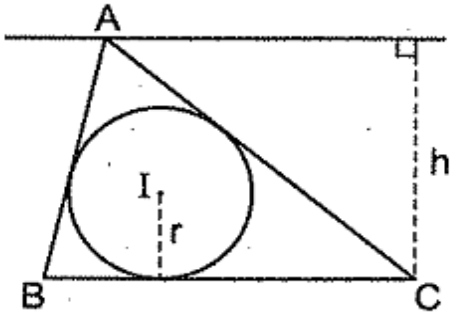
$$\Rightarrow R + r = \frac{b + c}{2} \geq \sqrt{bc} = \sqrt{2S}.$$



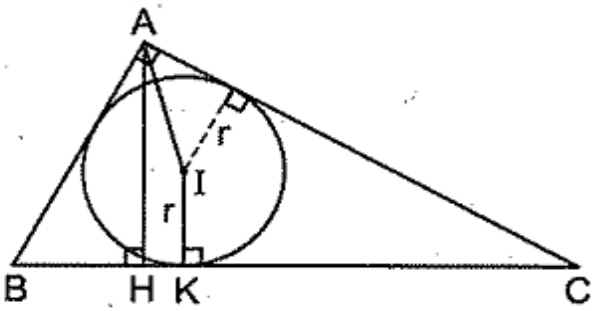
Hình 169

101. (h.170) Gọi S là diện tích ΔABC thì S không đổi, gọi p là nửa chu vi, r là bán kính của đường tròn nội tiếp ΔABC, ta có $S = pr$. Do đó r lớn nhất $\Leftrightarrow$ p nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $AB + AC$ nhỏ nhất.

Dễ dàng chứng minh được tam giác phải tìm là tam giác cân tại A.



Hình 170



Hình 171

102. (h.171) Xét ΔABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (I ; r).

Kẻ AH, IK vuông góc với BC. Ta có $AH \le AI + IK = r\sqrt{2} + r = r(\sqrt{2} + 1)$.

max $AH = r(\sqrt{2} + 1) \Leftrightarrow$ các đường thẳng AI, AH trùng nhau $\Leftrightarrow$ ΔABC vuông cân tại A.

103. a) (h.172) Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Kẻ BB', CC' vuông góc với AI.

Ta có $cr = IA.BB'$, $br = IA.CC'$ nên

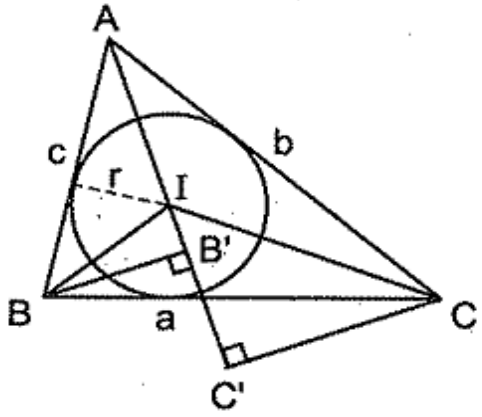
$$(b + c)r = IA.(BB' + CC') \le IA.a \Rightarrow \frac{IA}{r} \ge \frac{b + c}{a}.$$

Tương tự $\frac{IB}{r} \ge \frac{a + c}{b}$, $\frac{IC}{r} \ge \frac{a + b}{c}$.

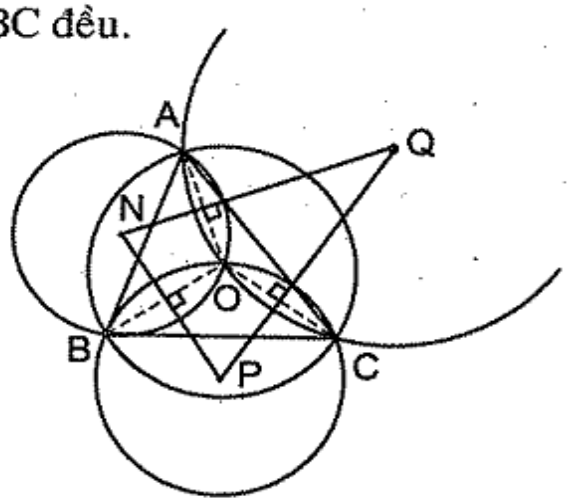
Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{IA + IB + IC}{r} \ge \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \ge 6 \Rightarrow IA + IB + IC \ge 6r.$$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.



Hình 172



Hình 173

b) (h.173) Dễ thấy khoảng cách từ O đến các cạnh của ΔPQN bằng $\frac{R}{2}$ nên O là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đó. Theo câu a)

$$OP + OQ + ON \geq 6.\frac{R}{2} = 3R.$$

104. Ta có $h_a > 2r = 2 \Rightarrow h_a \geq 3$ (vì $h_a \in N$). Suy ra

$$2S = ah_a \geq 3a. \qquad (1)$$

Giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$2S = (a + b + c)\, r = a + b + c \leq 3a \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2S = 3a$. Xảy ra dấu bằng ở (2) khi và chỉ khi $b = a$, $c = a$, tức là ΔABC đều. Khi đó $h_a = h_b = h_c = 3$.

105. Trước hết bạn đọc tự chứng minh bổ đề sau

Nếu a, b, c dương 0 thì $\quad (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \qquad (1)$

a) $h_a + h_b + h_c = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) =$

$$= r(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9r.$$

Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

b) Trước hết chứng minh $h^2_a + h^2_b + h^2_c \geq \frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c)^2$, sau đó áp dụng kết quả ở câu a).

Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow h_a = h_b = h_c$ và $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

§9. Đường tròn bàng tiếp tam giác

106. (h.174). Gọi O là tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A. Ta có

$$S_{OAC} + S_{OAB} - S_{OBC} = S_{ABC} \Rightarrow bR_a + cR_a - aR_a = 2S. \qquad (1)$$

a) Từ (1) suy ra

$$S = \frac{R_a(b + c - a)}{2} = R_a(p - a). \qquad (2)$$

Tương tự

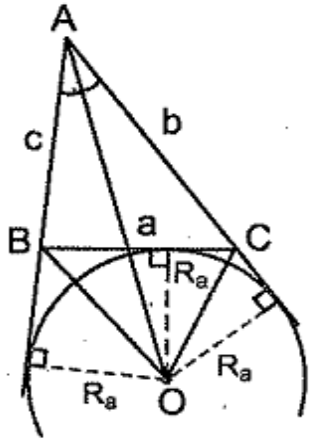
$$S = R_b(p - b) = R_c(p - c).$$

b) Chứng minh dựa vào câu a.

c) Do $bh_b = ch_c = ah_a = 2S$ nên từ (1) suy ra :

$$\frac{bR_a}{bh_b} + \frac{cR_a}{ch_c} - \frac{aR_a}{ah_a} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = \frac{1}{R_a}.$$

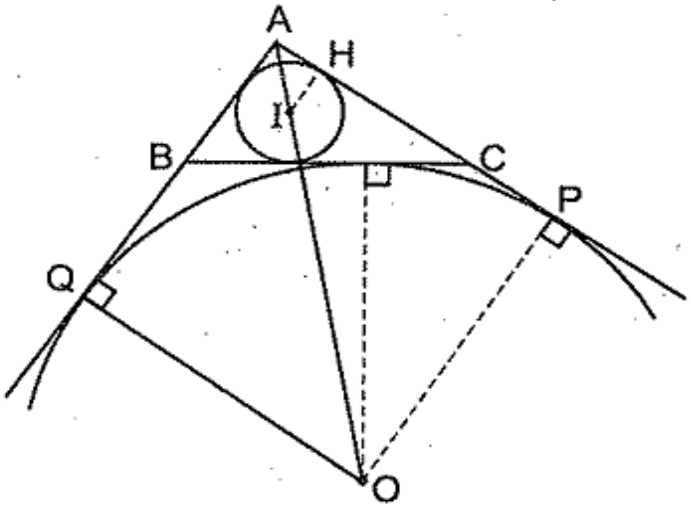


Hình 174

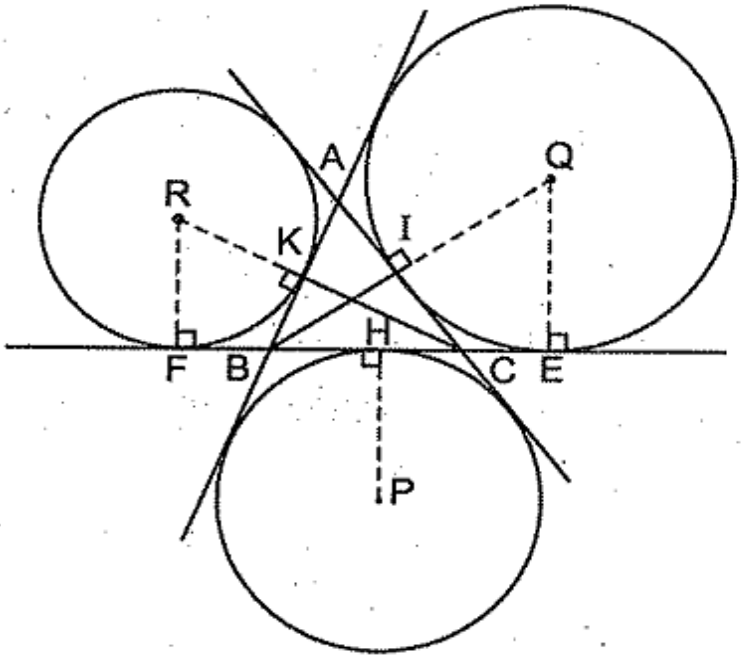
107. (h.175). Gọi H và P là các tiếp điểm trên AC của đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp trong góc vuông A.

Ta có $2AH = AB + AC - BC$; $2AP = AB + AC + BC$.

Suy ra $AP - AH = BC$, tức là $BC = R - r$.



Hình 175



Hình 176

108. (h.176)

a) Ta có BE = CF (cùng bằng nửa chu vi ΔABC). Trừ đi BC, được CE = BF.

b) CE = BF mà CE = CI, BF = BK nên CI = BK.

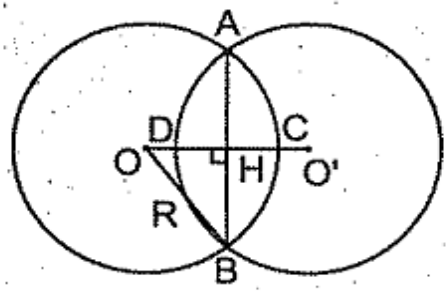
Ta lại có BI = CK (giả thiết) nên $\Delta BIC = \Delta CKB$ (c.c.c), suy ra $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Tương tự $\widehat{C} = \widehat{A}$. Vậy ΔABC là tam giác đều.

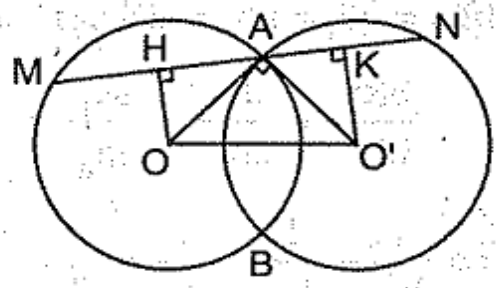
§10. Vị trí tương đối của hai đường tròn

109. (h.177) Gọi H là giao điểm của AB và CD. ΔOHB vuông nên

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow R^2 = (R-6)^2 + 12^2 \Rightarrow R = 15 \text{ (cm)}.$$



Hình 177



Hình 178

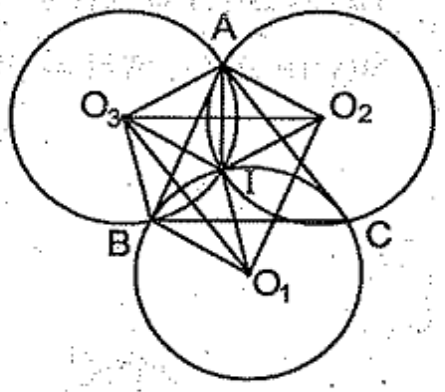
110. (h.178) Kẻ OH và O'K vuông góc với MN. Ta có $\Delta AOH = \Delta O'AK$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên OH = AK. *Đáp số :* $AM^2 + AN^2 = 4R^2$.

111. (h.179) a) Các tứ giác O_1BO_3I, O_3IO_2A là hình thoi $\Rightarrow O_1B \parallel IO_3$, $O_1B = IO_3$, $IO_3 \parallel O_2A$, $IO_3 = O_2A \Rightarrow O_1B \parallel O_2A$, $O_1B = O_2A \Rightarrow O_1BAO_2$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = O_1O_2$, $AB \parallel O_1O_2$.

Chứng minh tương tự $BC = O_2O_3$, $CA = O_3O_1$. Vậy $\Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$ (c.c.c).

b) Ta có $AI \perp O_2O_3$ mà $O_2O_3 \parallel BC$ nên $AI \perp BC$.

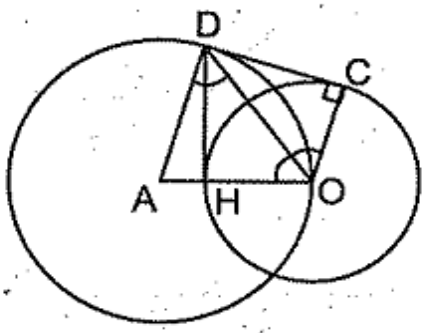
Chứng minh tương tự $BI \perp AC$. Vậy I là trực tâm của ΔABC.



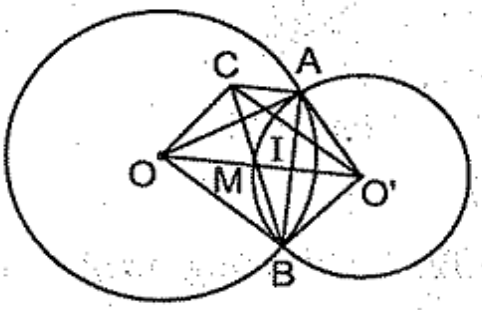
Hình 179

112. (h.180) Ta có $\widehat{AOD} = \widehat{COD}$ (cùng bằng $\widehat{ADO}$) nên $\Delta OHD = \Delta OCD$ (c.g.c), từ đó $\widehat{OHD} = \widehat{OCD} = 90^o$.

Suy ra DH là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Hình 180



Hình 181

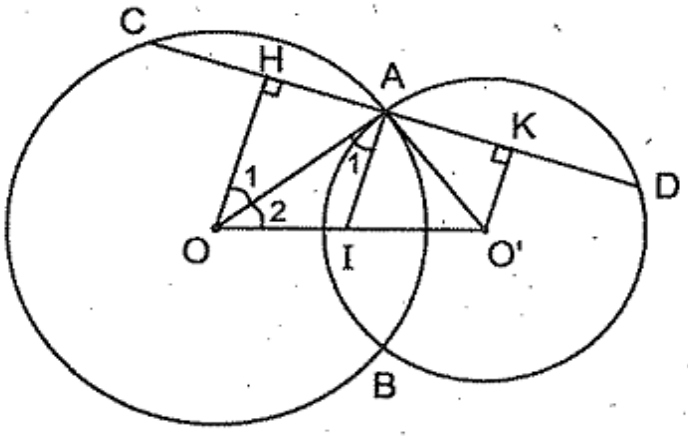
113. (h.181) OO' cắt AB, BC theo thứ tự ở I, M. Ta có IM là đường trung bình của ΔABC nên $IM \parallel AC$. Ta lại có OA = O'C (cùng bằng OB). Do đó ACOO' là hình thang cân.

114. (h.182)

a) Gọi I là trung điểm của OO'. Kẻ CD vuông góc với IA tại A.

Kẻ OH, O'K vuông góc với CD. Dễ chứng minh AH = AK nên AC = AD.

b) Ta có $\widehat{OAO'} = 90^o$, $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (cùng bằng $\widehat{A_1}$).



Hình 182

$\Delta HOA \backsim \Delta AOO'$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{O'A} = \frac{AO}{O'O} \Rightarrow \frac{AH}{3} = \frac{4}{5} \Rightarrow AH = 2{,}4cm \Rightarrow CD = 9{,}6cm.$$

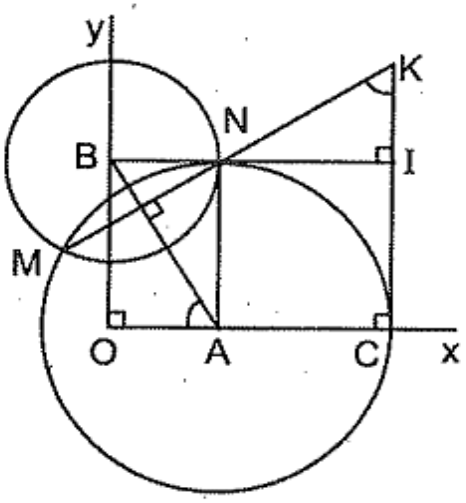
115.(h.183) a) Hai đường tròn (A) và (B) cắt nhau vì

$$|OA - OB| < AB < OA + OB.$$

b) Gọi C là giao điểm của đường tròn (A) và tia Ox. Ta có

$$OC = OA + AC = OA + OB = k \Rightarrow C \text{ cố định.}$$

Kẻ đường vuông góc với AC tại C, cắt MN ở K. Hãy chứng minh rằng CK = k để suy ra K là điểm cố định (chú ý $\widehat{NKC}$ và $\widehat{BAO}$ cùng bù với $\widehat{BAC}$).

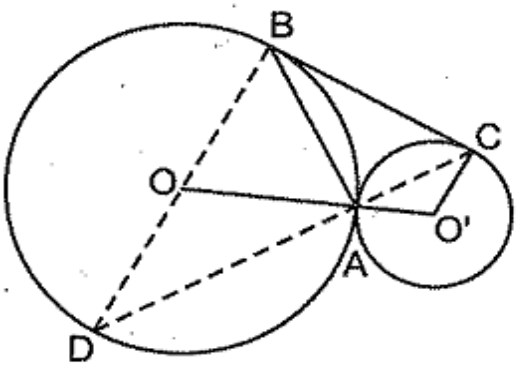


Hình 183

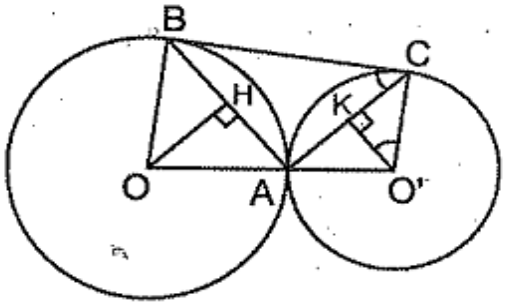
116. a) (h.184) Trước hết tính BC, được $2\sqrt{3}$ cm. Kẻ đường kính BOD thì C, A, D thẳng hàng.

Tính BA theo công thức $\frac{1}{BA^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{BC^2}$ được BA = 3cm.

Từ đó $AC = \sqrt{3}$ cm.



Hình 184



Hình 185

b) (h.185). Dễ dàng tính được BC = 24cm. Vẽ O'K ⊥ AC, ta có

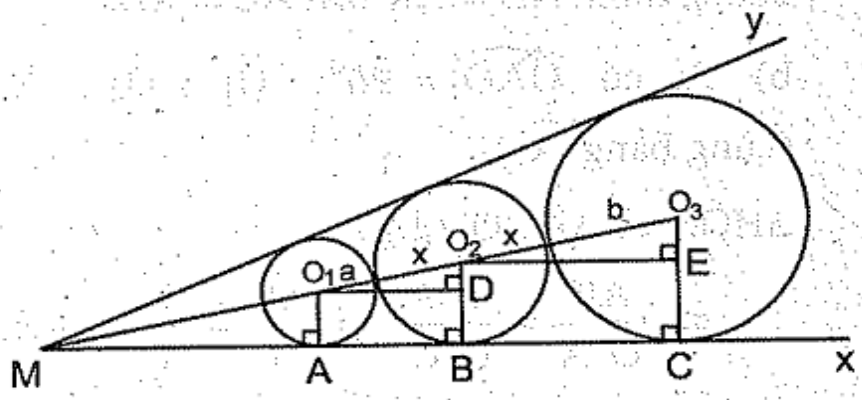
$\Delta O'KC \backsim \Delta CAB$ (g.g). Suy ra

$$\frac{O'C}{CB} = \frac{KC}{AB} \Rightarrow \frac{r}{24} = \frac{7,2}{19,2} \Rightarrow r = 9\,cm.$$ Tương tự R = 16cm.

117. Gọi x là bán kính của đường tròn (O_2). Kí hiệu như trên hình 186. Từ các tam giác đồng dạng ta có

$$\frac{x-a}{x+a} = \frac{b-x}{x+b}.$$

Từ đó $x = \sqrt{ab}$.

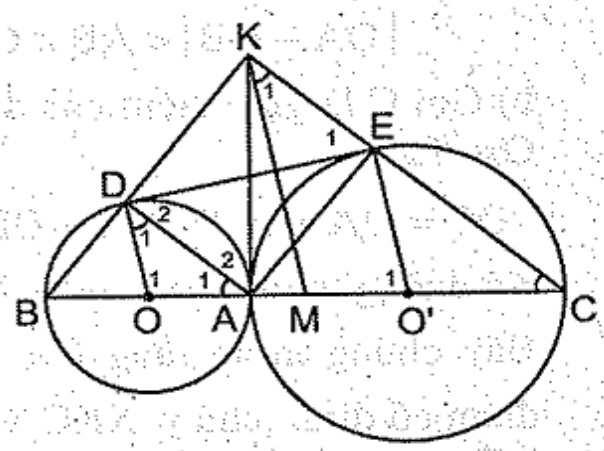


Hình 186

118. (h.187) a) Theo tính chất góc ngoài của tam giác : $\widehat{O_1} = 2\widehat{B}$, $\widehat{O'_1} = 2\widehat{C}$, mà $\widehat{O_1} + \widehat{O'_1} = 180^o$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^o$, suy ra $\widehat{K} = 90^o$. Ta lại có $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^o$ nên tứ giác ADKE là hình chữ nhật.

b) $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 90^o$ nên KA ⊥ BC. Vậy AK là tiếp tuyến chung của (O) và (O').

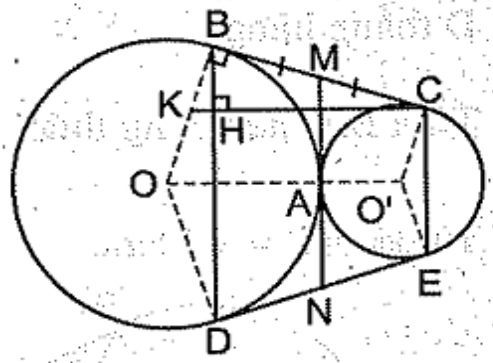
c) $\widehat{K_1} + \widehat{E_1} = \widehat{C} + \widehat{EKA} = 90^o$ nên MK ⊥ DE.



Hình 187

119. (h.188) a) Do tính đối xứng nên BD ⊥ OO', CE ⊥ OO' ⇒ BD // CE ⇒ BDEC là hình thang. Do tính đối xứng nên $\widehat{CBD} = \widehat{EDB}$, do đó BDEC là hình thang cân.

b) Kẻ tiếp tuyến chung tại A cắt BC, DE ở M, N. Ta có $MN = 2AM = BC = 2\sqrt{Rr}$ (dễ chứng minh, chẳng hạn xem Ví dụ 20).



Hình 188

Kẻ đường cao CH của hình thang, CH cắt OB tại K.

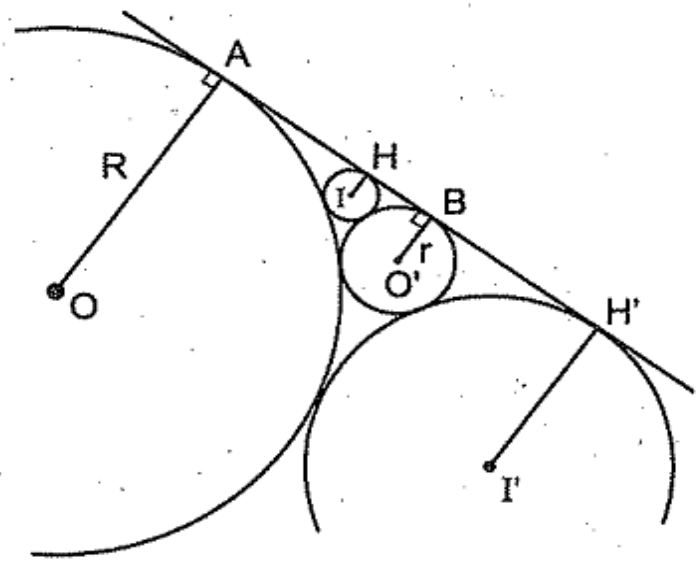
Xét ΔBKC vuông :

$$BC^2 = KC.HC \Rightarrow 4Rr = (R + r).HC \Rightarrow HC = \frac{4Rr}{R + r}.$$

Chú ý rằng MN là đường trung bình của hình thang BDEC nên

$S_{BDEC} = MN.CH$

$$= 2\sqrt{Rr}.\frac{4Rr}{R+r} = \frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}.$$



Hình 189

120. (h.189) a) $AB = 2\sqrt{Rr}$.

b) Gọi H là tiếp điểm của đường tròn (I ; x) với AB.

Xét hai trường hợp :

+ H thuộc đoạn AB. Theo cách tính ở câu a, $HA = 2\sqrt{Rx}$, $HB = 2\sqrt{rx}$.

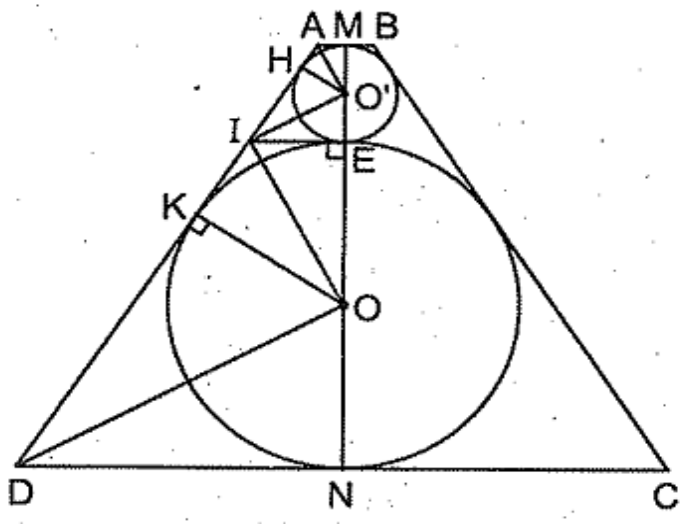
Ta có $HA + HB = AB \Rightarrow 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr}$.

Từ đó ta tính được $x = \dfrac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$. Thay số x = 4. Vậy IH = 4cm.

+ H thuộc tia đối của tia BA (H ở vị trí H' trên hình vẽ). Khi đó ta có H'A – H'B = AB. Ta tính được I'H' = 36cm.

Đáp số : 4cm hoặc 36cm.

121. (h.190). Gọi ABCD là hình thang cân (AB // CD), tiếp điểm của hai đường tròn (O) và (O') là E. Gọi tiếp điểm của (O') với AB, AD là M, H. Gọi tiếp điểm của (O) với CD, AD là N, K. Tiếp tuyến chung tại E cắt AD ở I.



Hình 190

Xét ΔOIO' vuông

$$EI^2 = EO^2.EO'^2 = 8.2 = 16$$

$\Rightarrow EI = 4$ (cm).

Xét ΔO'AI vuông

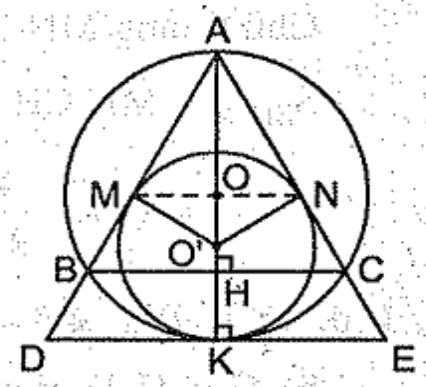
$$O'H^2 = IH.HA \Rightarrow 4 = 4.HA \Rightarrow HA = 1\text{cm}.$$

Suy ra AM = 1cm.

Tương tự, DN = DK = 16 cm.

$$S_{ABCD} = (AM + DN).MN = (1 + 16).20 = 340(\text{cm}^2).$$

122. (h.191) a). Gọi K là tiếp điểm của hai đường tròn. Ta có A, O, O', K thẳng hàng. Kẻ tiếp tuyến chung tại K cắt AB, AC ở D, E. Ta có ΔADE đều, O' là giao điểm của các đường phân giác nên cũng là giao điểm của các đường trung trực. Suy ra M, N là trung điểm của AD, AE. Ta lại có O là trung điểm của AK nên M, O, N thẳng hàng.



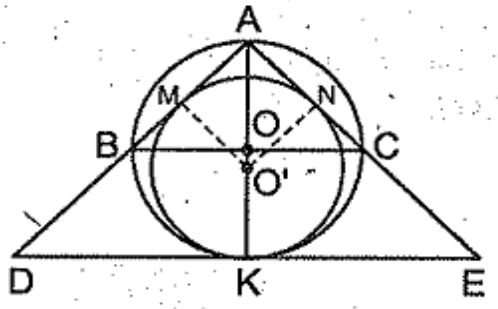
Hình 191

b) $O'K = \frac{1}{3}AK = \frac{2R}{3}$.

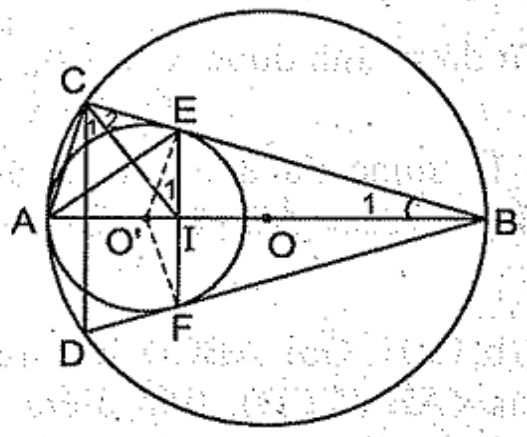
123. (h.192) Vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn

$$O'K = O'M = (AD + AE - DE) : 2$$

Đáp số : $2R(\sqrt{2} - 1)$.



Hình 192

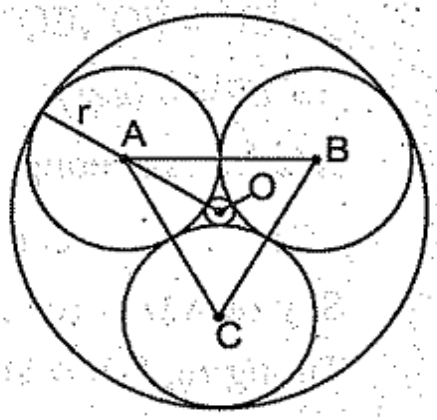


Hình 193

124. (h.193). Do tính đối xứng nên CD ⊥ AB, EF ⊥ AB. Ta có $\widehat{CAE} = \widehat{EAB}$ (cùng bằng $\widehat{O'EA}$) nên EC = EI. Suy ra $\widehat{C}_2 = \widehat{I}_1$, lại có $\widehat{C}_1 = \widehat{I}_1$ nên $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$. Điểm I là giao điểm của các đường phân giác các góc B và C của ΔBCD nên là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Chú ý : Bài tập 124 là trường hợp đặc biệt của Bài tập 287 trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 9 tập hai.*

125. (h.194). Gọi A, B, C là tâm của các đường tròn bán kính r đã cho, O là tâm của đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn trên. O là tâm của ΔABC đều, $OA = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.



Hình 194

Xét hai trường hợp :

+ Ba đường tròn đã cho tiếp xúc trong với đường tròn (O ; R_1). Khi đó

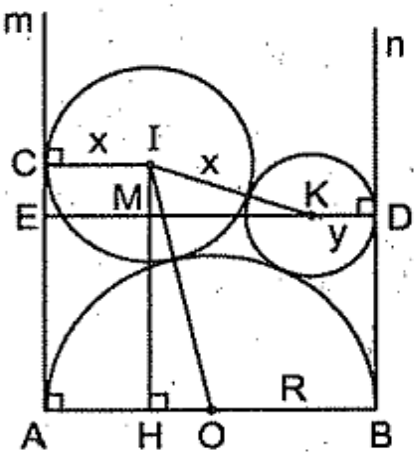
$$R_1 = OA + r.$$

+ Ba đường tròn đã cho tiếp xúc ngoài với đường tròn (O ; R_2). Khi đó

$$R_2 = OA - r.$$

Đáp số : $R_1 = r\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)$, $R_2 = r\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)$.

126. (h.195) Kẻ IC ⊥ Am, KD ⊥ Bn, DK cắt Am tại E.



Hình 195

Kẻ IH ⊥ AB, IH cắt DE tại M. Ta có

$$IK^2 - MK^2 = IM^2. \qquad (1)$$

Ta lại có $IK = x + y$,

$MK = 2R - x - y$,

$IM = CE = AC - BD$

$= 2\sqrt{Rx} - 2\sqrt{Ry}$ (công thức tính đoạn tiếp tuyến chung)

$= 2\sqrt{R}(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

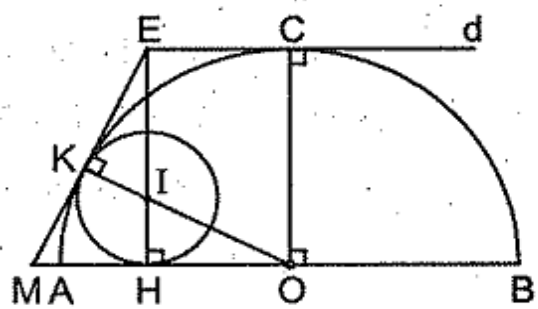
Thay vào (1) được

$$(x + y)^2 - (2R - x - y)^2 = 4R(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$\Leftrightarrow 2R(2x + 2y - 2R) = 4R(x + y - 2\sqrt{xy})$$

$$\Leftrightarrow x + y - R = x + y - 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow R = 2\sqrt{xy}.$$

127. (h.196) Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với (O) tại K và tiếp xúc với AB tại H. Tiếp tuyến của đường tròn (I) tại K cắt OA ở M, cắt HI ở E. Ta có MK = MH, ΔMHE = ΔMKO (g.c.g) ⇒ HE = KO = OC. Suy ra tứ giác HOCE là hình chữ nhật, CE ⊥ CO.



Hình 196

Do đó đường thẳng CE trùng với đường thẳng d. Dễ thấy IE = IO.

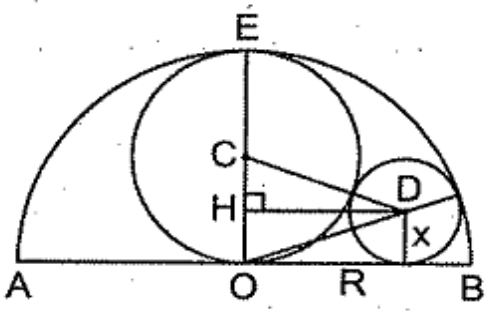
Vậy I cách đều d và O.

128. (h.197) Gọi x là bán kính của đường tròn (D). Kẻ DH ⊥ OE. Ta có

$$OD^2 - OH^2 = CD^2 - CH^2$$

nên $(R - x)^2 - x^2 = \left(\frac{R}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{R}{2} - x\right)^2$.

Từ đó ta tìm được $x = \frac{R}{4}$.



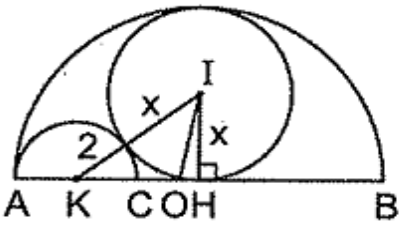
Hình 197

129. (h.198). Gọi K là trung điểm của AC. Kẻ IH ⊥ AB. Dễ thấy OK = 4cm. Gọi x là bán kính của (I).

Đặt OH = y. Ta có

$$IH^2 = OI^2 - OH^2 \Rightarrow x^2 = (6 - x)^2 - y^2 \quad (1)$$

$$IH^2 = IK^2 - KH^2.$$



Hình 198

Ta có KH = 4 + y (nếu O thuộc đoạn KH),

KH = 4 – y (nếu H nằm giữa K và O).

Do đó $x^2 = (x + 2)^2 - (4 \pm y)^2$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $(6 - x)^2 - y^2 = (x + 2)^2 - (4 \pm y)^2$. Từ đó y = 2x – 6 hoặc y = 6 – 2x.

Thay vào (1) và rút gọn được 4x(x – 3) = 0. Suy ra x = 3 (và do đó y = 0).

Đáp số : 3cm.

130. (h.199) Tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm của BC. Gọi x là bán kính của (O'), ta có OO' = 5 – x. Kẻ OD, O'K vuông góc với AC ; OE, O'I vuông góc với AB.

Dễ dàng tính được OD = 3cm, OE = 4cm.

OE cắt O'K tại H. Ta có :

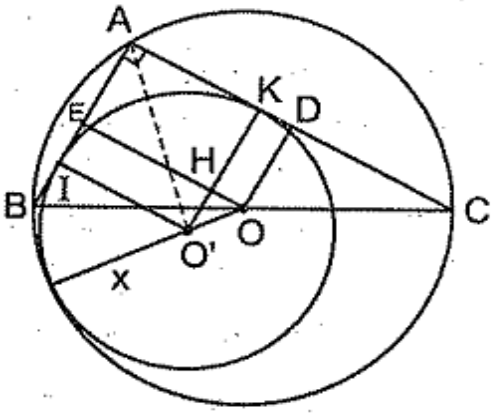
OH = OE – EH = 4 – O'I = 4 – x,

O'H = O'K – HK = x – OD = x –3.

Xét ΔOO'H vuông có

$$(4 - x)^2 + (x - 3)^2 = (5 - x)^2.$$

Suy ra x = 4.



Hình 199

Đáp số : 4 cm.

131. (h.200) Ta có BC = CD = DE. Kẻ OH, O'K vuông góc với BE, O'M vuông góc với OH.

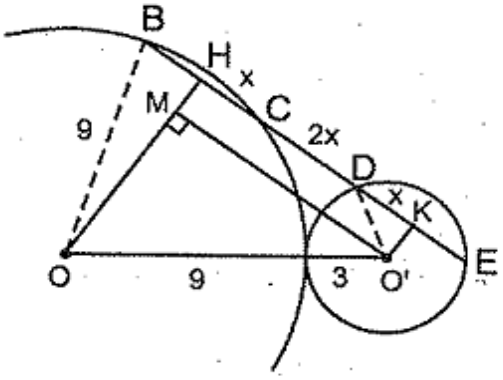
Đặt CH = DK = x thì CD = 2x, O'M = HK = 4x,

$$OM = OH - MH = OH - O'K$$

$$= \sqrt{81 - x^2} - \sqrt{9 - x^2}.$$

Từ $OM^2 + O'M^2 = OO'^2$ ta có

$$\left(\sqrt{81 - x^2} - \sqrt{9 - x^2}\right)^2 + 16x^2 = 144.$$



Hình 200

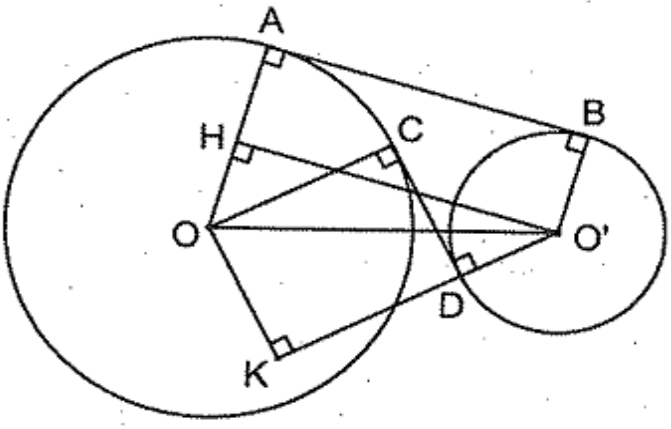
Rút gọn ta được $7x^2 - 27 = \sqrt{729 - 90x^2 + x^4}$. Bình phương hai vế (với $x^2 \geq \frac{27}{7}$) rồi rút gọn được $48x^2(x^2 - 6) = 0$. Suy ra $x = \sqrt{6}$.

Đáp số : BC = CD = DE = $2\sqrt{6}$ cm.

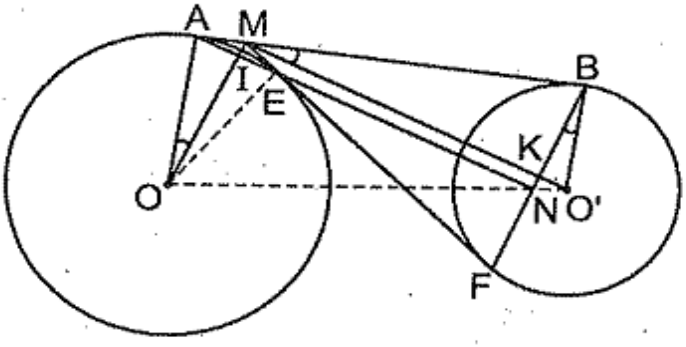
132. (h.201) Gọi R và r là bán kính của các đường tròn (O) và (O'). Kẻ O'H ⊥ OA, OK ⊥ O'D. Ta có R − r = OH, R + r = O'K.

Tính OH được 16cm, O'K = 60cm.

Từ đó tính được R = 38cm, r = 22cm.



Hình 201



Hình 202

133. (h.202) a) ΔAOM ∽ ΔBMO' (g.g). Chú ý rằng

$$\widehat{AOM} = \widehat{BMO'} \text{ (do cùng phụ với } \widehat{OMA}).$$

b) Ta có MO ⊥ AE, MO' ⊥ BF, mà MO ⊥ MO' (tia phân giác của hai góc kề bù) nên AE ⊥ BF.

c) Gọi I là giao điểm của OM và AE. Trước hết ta chứng minh rằng hai tam giác OIN và OMO' đồng dạng. Thật vậy, hai tam giác AOM và BMO'

đồng dạng (câu a) có AI và BK là các đường cao tương ứng nên $\frac{OI}{OM} = \frac{MK}{MO'}$. Ta lại có MK = IN nên $\frac{OI}{OM} = \frac{IN}{MO'}$. Suy ra $\Delta OIN \backsim \Delta OMO'$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{ION} = \widehat{MOO'}$. Vậy O, N, O' thẳng hàng.

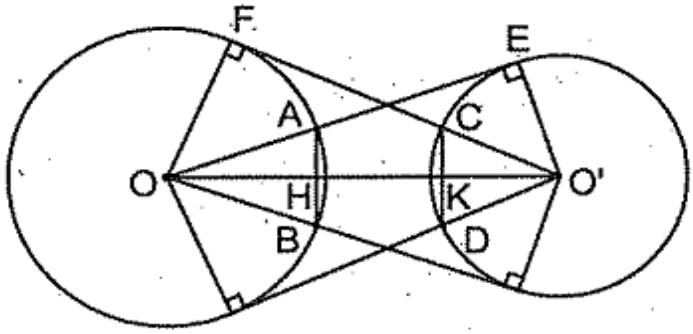
134. (h.203) Gọi R, r lần lượt là bán kính của (O), (O'). Do tính đối xứng của hình qua đường nối tâm OO', ta có AB và CD cùng vuông góc với OO' nên AB // CD. Gọi H, K theo thứ tự là giao điểm của AB, CD với OO'.

Ta có $AH = R\sin\widehat{AOH}$, mà

$$\sin\widehat{AOH} = \sin\widehat{EOO'} = \frac{r}{OO'}$$

nên $AH = \frac{Rr}{OO'}$. Tương tự $CK = \frac{Rr}{OO'}$.

Suy ra AH = CK, do đó AB = CD. Từ đó dễ dàng chứng minh được ABDC là hình chữ nhật.

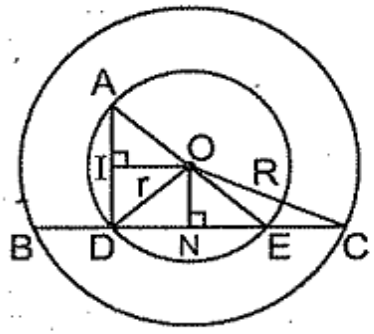


Hình 203

135. (h.204) Kẻ OI ⊥ AD, ON ⊥ DE. Đặt DA = a, DB = b, DC = c.

Ta có $$r^2 = DI^2 + DN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2,$$

$$R^2 = ON^2 + NC^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2.$$



Hình 204

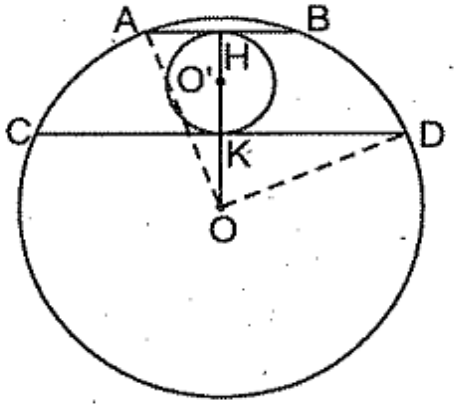
Do đó $R^2 + r^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2}$, suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 2(R^2 + r^2)$.

136. (h.205). Kẻ OH ⊥ AB, OK ⊥ CD. Ta có

$$OH^2 + HA^2 = OK^2 + KD^2$$

nên $OH^2 - OK^2 = KD^2 - HA^2 = 12^2 - 5^2 = 119$.

Nếu O nằm giữa H và K thì OH + OK = HK = 7, do đó OH − OK = 119 : 7 = 17, vô lí. Vậy O nằm ngoài đoạn thẳng HK và OH − OK = HK = 7.



Hình 205

Suy ra $OH + OK = 119 : 7 = 17$.

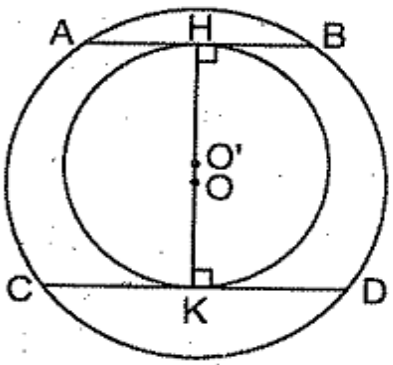
Từ $OH + OK = 17$ và $OH - OK = 7$, ta tính được

$$OK = 5(cm).$$

Bán kính của đường tròn (O) bằng 13cm.

137. (h.206). Kẻ $OH \perp AB$, $OK \perp CD$. Ta chứng minh được O nằm giữa H và K.

Đáp số : 5cm.



Hình 206

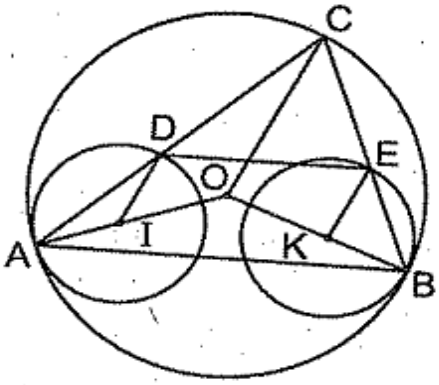
ĐƯỜNG TRÒN VÀ PHÉP VỊ TỰ

138. (h.207). $\Delta AID \backsim \Delta AOC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AI}{AO} = \frac{r}{R}.$$

Chứng minh tương tự, $\frac{BE}{BC} = \frac{r}{R}$.

Vậy $\frac{AD}{AC} = \frac{BE}{BC}$, do đó DE // AB.



Hình 207

139. (h.208) a) $\widehat{OAB} + \widehat{O'AB} = \frac{180^o - \widehat{O_1}}{2} + \frac{180^o - \widehat{O_1'}}{2} =$

$$= \frac{360^o - \left(\widehat{O_1} + \widehat{O_1'}\right)}{2} = 90^o.$$

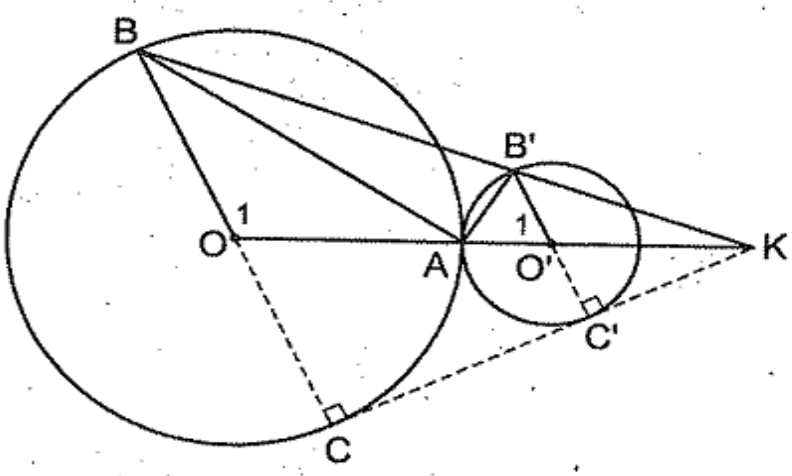
b) OB // O'B' do đó

$$\frac{O'K}{OK} = \frac{O'B'}{OB} = \frac{R'}{R}.$$

Suy ra $\frac{OK - O'K}{OK} = \frac{R - R'}{R}$

hay $\frac{OO'}{OK} = \frac{R - R'}{R}$.

Vậy $OK = \frac{R(R + R')}{R - R'}$.

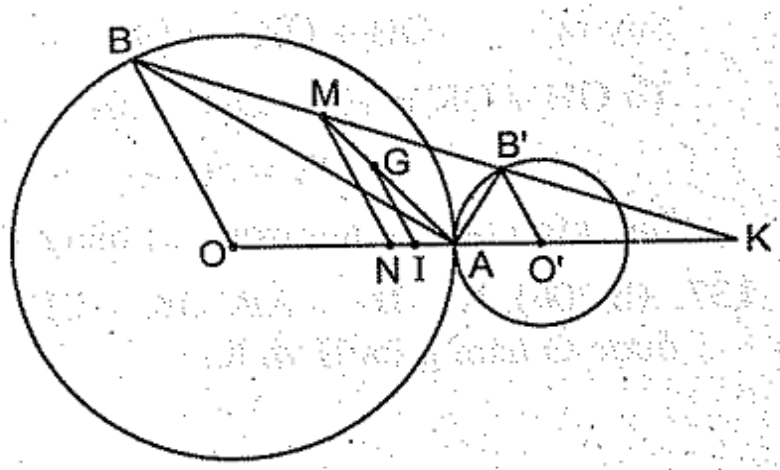


Hình 208

c) Gọi CC' là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, K' là giao điểm của CC' và OO'. Tương tự câu b) ta có

$$OK' = \frac{R(R + R')}{R - R'}.$$

Suy ra OK = OK', do đó K' trùng K. Vậy CC' cũng đi qua K.

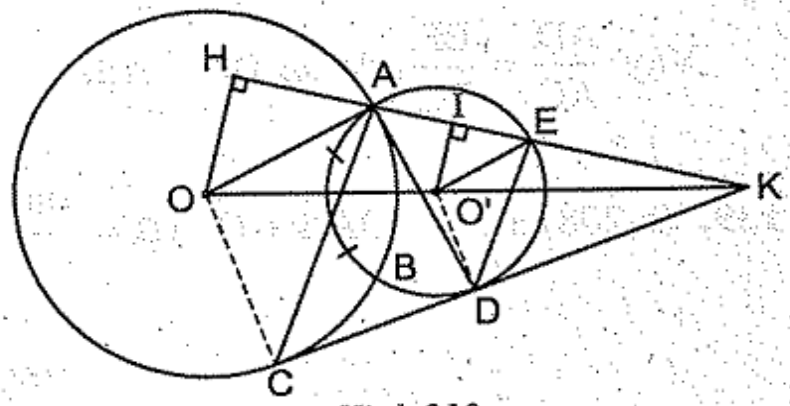


Hình 209

d) (h.209). Gọi G là trọng tâm của ΔABB', AG cắt BB' ở M. Trước hết ta tìm chuyển động của điểm M. Gọi N là trung điểm của OO' thì $MN = \frac{R + R'}{2}$ nên M di chuyển trên đường tròn $(N ; \frac{R + R'}{2})$. Điểm G là ảnh của M trong phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{2}{3}$ nên G chuyển động trên đường tròn $(I ; \frac{R + R'}{3})$ với I nằm trên đoạn AN và $AI = \frac{2}{3}AN$.

140. (h.210) Ta có E là ảnh của A trong phép vị tự tâm K tỉ số $\frac{R'}{R}$ nên OE' // OA (thật vậy, kẻ OH và O'I vuông góc với AK. Ta có

$$\frac{O'I}{OH} = \frac{O'K}{OK} = \frac{O'D}{OC} = \frac{O'E}{OA}$$



Hình 210

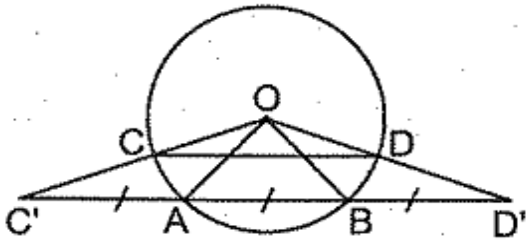
$\Rightarrow \Delta OAH \backsim O'EI$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{O'EI} \Rightarrow O'E // OA$).

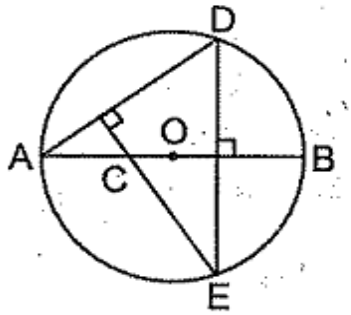
$$O'E // OA \Rightarrow \frac{KE}{KA} = \frac{KO'}{KO} = \frac{KD}{KC} \Rightarrow ED // AC.$$

DỰNG HÌNH

141. (h.211). Dựng C' đối xứng với B qua A. Dựng D' đối xứng với A qua B. Gọi C và D theo thứ tự là giao điểm của các đoạn thẳng OC' và OD' với (O).



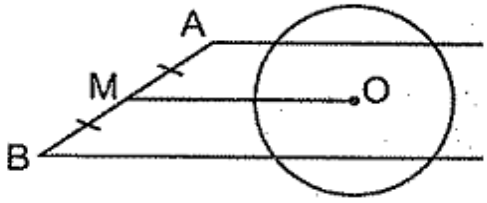
Hình 211



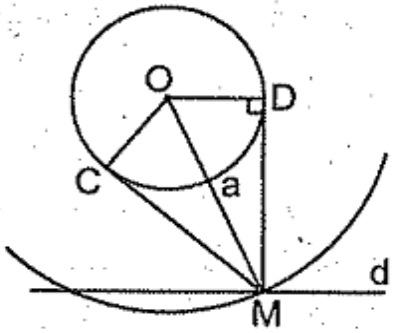
Hình 212

142. (h.212) Dựng DE là đường trung trực của BC.

143. (h.213). Gọi M là trung điểm của AB. Qua A và qua B, theo thứ tự dựng các đường thẳng song song với MO.



Hình 213

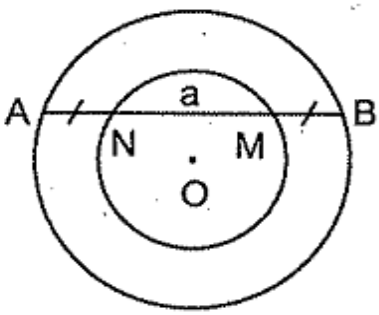


Hình 214

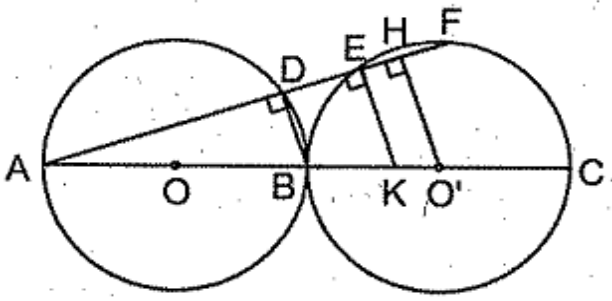
144. (h.214) M cách O một khoảng a là cạnh huyền của một tam giác vuông có một cạnh góc vuông bán kính của (O), một góc nhọn bằng 65°.

145. (h.215) Giả sử đã dựng được dây AB có MA – MB = a. Trên MA lấy N sao cho AN = BM, thế thì MN = a. Hãy dựng điểm N : điểm N thuộc đường tròn (O ; OM) và đường tròn (M ; a).

Nếu a = 2OM thì bài toán có một nghiệm hình. Nếu 0 < a < 2OM thì bài toán có hai nghiệm hình.



Hình 215

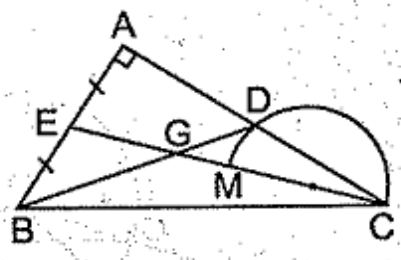


Hình 216

146. (h.216) Kẻ O'H ⊥ EF. Kẻ đường vuông góc với AE tại E, cắt BC ở K. Ta có DE = 2EH nên BK = 2KO'. Điểm K xác định, từ đó dựng được điểm E.

147. (h.217). Giả sử đã dựng được ΔABC vuông tại A, các đường trung tuyến BD = m và CE = n cắt nhau ở G. Gọi M là trung điểm của CE. Các điểm G, M trên CE xác định được ngay. Điểm D thuộc đường tròn có đường kính MC và đường tròn $(G ; \frac{m}{3})$.

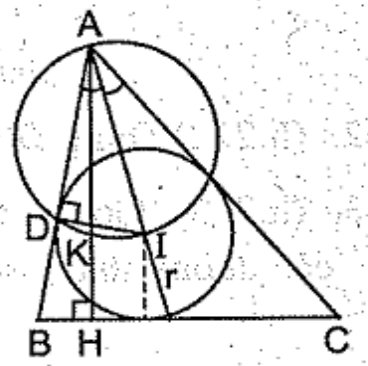
A đối xứng với C qua D.



Hình 217

148. (h.218) Dựng ΔADI vuông tại D có $\widehat{IAD} = \frac{\widehat{A}}{2}$, ID = r. Dựng đường tròn có đường kính AI. Dựng cung (A ; h – r) cắt đường tròn trên ở K. Trên tia AK lấy H sao cho AH = h. Từ đó dựng được tam giác.

Bài toán có một nghiệm hình nếu $h - r \leq AI$.



Hình 218

149. (h.219). *Phân tích.* Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp, E là tiếp điểm trên BC, EN là đường kính của đường tròn, F là tiếp điểm trên BC của đường tròn bàng tiếp trong góc A. Trước hết ta có A, N, F thẳng hàng (Ví dụ 24). Ta có :

$$BE = \frac{a + c - b}{2};$$

$$BF = BP' = \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

Suy ra EF = b – c = d.

Cách dựng

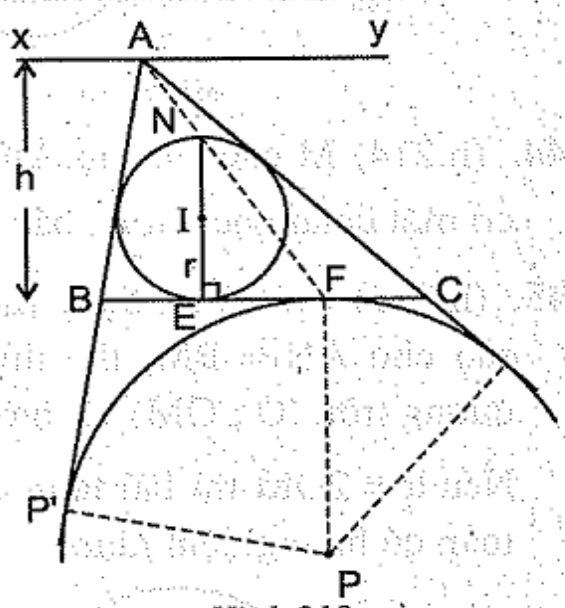
– Dựng ΔNEF vuông tại E, EN = 2r, EF = d.

– Dựng xy // EF cách EF một khoảng h (cùng phía với N đối với EF).

– Dựng giao điểm A của xy và tia FN.

– Dựng đường tròn (I) có đường kính EN.

– Dựng các tiếp tuyến kẻ từ A với (I), cắt EF ở B, C.

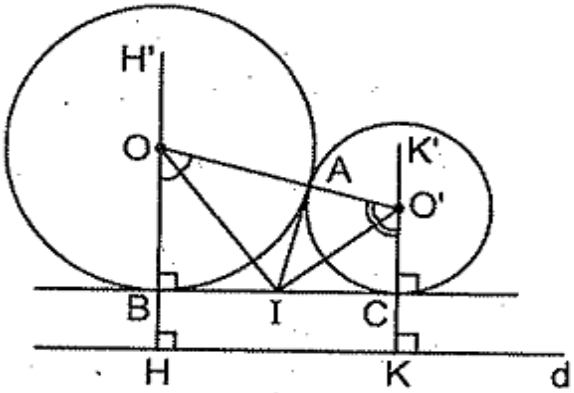


Hình 219

150. (h.220) *Phân tích.* Kẻ các đường thẳng H'OH và K'OK vuông góc với d. Gọi I là giao điểm của tiếp tuyến chung ngoài phải dựng và tiếp tuyến

chung trong. Khi đó I là giao điểm của các tia phân giác của các góc HOO' và KO'O (hoặc $\widehat{H'OO'}$ và $\widehat{K'O'O}$).

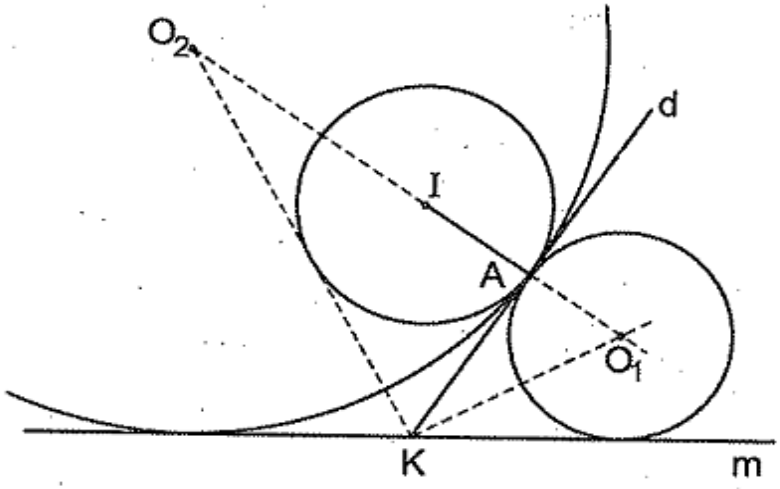
Biện luận. Nếu OO' không vuông góc với d thì bài toán có hai nghiệm hình. Nếu OO' ⊥ d thì bài toán không có nghiệm hình.



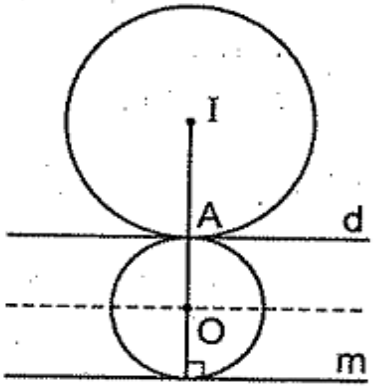
Hình 220

151. (h.221) *Phân tích.* Gọi d là tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn (I) và(O), K là giao điểm của hai đường thẳng d và m. Điểm O phải nằm trên tia phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng.

Trên hình 221, đường tròn (O_1 ; O_1A) ứng với cách vẽ tia phân giác KO_1, đường tròn (O_2 ; O_2A) ứng với cách vẽ tia phân giác KO_2.



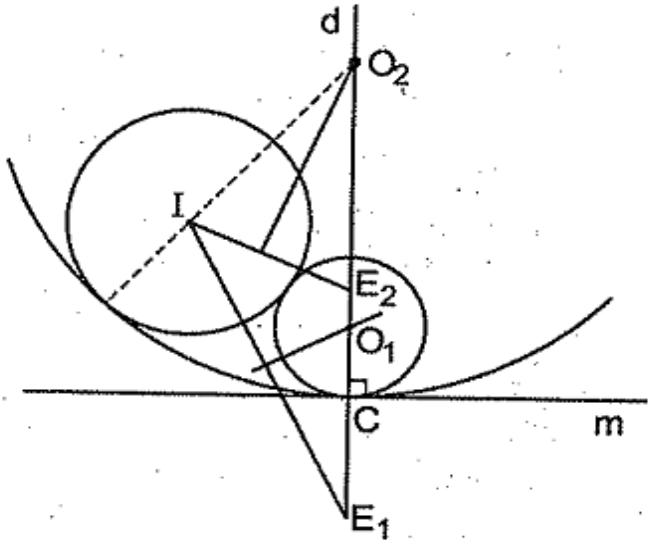
Hình 221



Hình 222

Biện luận. Nói chung bài toán có hai nghiệm hình. Riêng trường hợp IA ⊥ m bài toán có một nghiệm hình (h.222), khi đó thay cho dựng tia phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d và m, ta dựng đường thẳng song song cách đều hai đường thẳng ấy.

Chú ý : Đề bài cho đường thẳng m và đường tròn (I) không giao nhau để dễ biện luận. Cách dựng trên vẫn đúng đối với các vị trí khác của m và (I).



Hình 223

152. (h.223) *Phân tích.* Gọi R là bán kính của đường tròn (I). Trên đường thẳng d

(d ⊥ m tại C), dựng điểm E sao cho CE = R. Ta có OI = OE nên O nằm trên đường trung trực của IE.

Trên hình 223, đường tròn (O_1 ; O_1C) ứng với cách chọn điểm E_1, đường tròn (O_2 ; O_2C) ứng với cách chọn điểm E_2.

Biện luận. Bài toán có hai nghiệm hình.

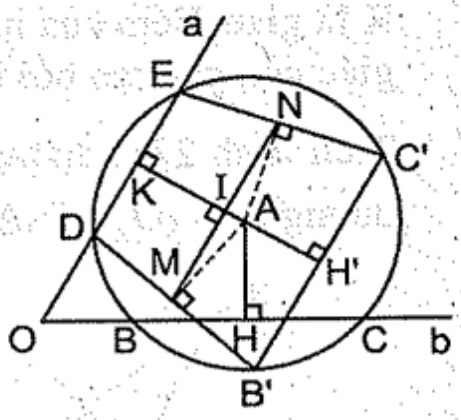
Chú ý : Đề bài cho đường thẳng m và đường tròn (I) không giao nhau để dễ biện luận. Cách dựng trên vẫn đúng đối với các vị trí khác của đường thẳng m và đường tròn (I).

153. (h.224) Gọi AH, AK là khoảng cách từ A đến các dây BC, DE. Trên tia đối của tia AK lấy H' sao cho AH' = AH. Các điểm K, H' là xác định.

Kẻ đường vuông góc với AH' tại H', cắt (A) ở B', C'. Ta có B'C' = BC nên B'C' + DE = 2k.

Gọi M, N là trung điểm của B'D, C'E thì MN = k.

Gọi I là giao điểm của MN và KH' thì I xác định (I là trung điểm của KH').



Hình 224

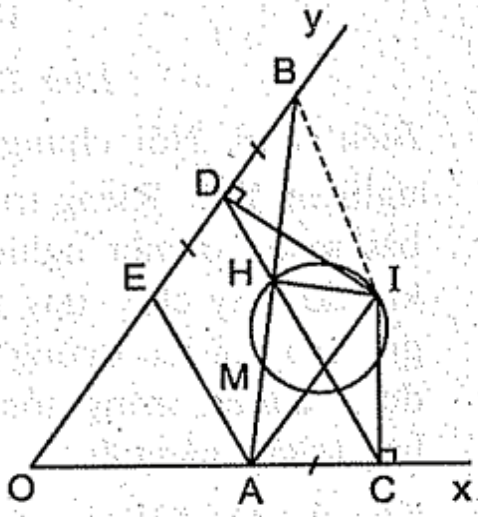
Các điểm M, N thuộc đường vuông góc với KI tại I và IM = IN = $\frac{k}{2}$ nên M, N dựng được. Đường vuông góc với AM tại M cắt a ở D. Đường tròn (A ; AD) là đường tròn phải dựng.

154. (h.225) Lấy C ∈ Ox, D ∈ Oy sao cho

$$OC = OD = \frac{k}{2}.$$

Ta có C, D xác định. Gọi H là giao điểm của AB và CD. Ta sẽ dựng điểm H.

Vẽ đường vuông góc với OC tại C, vẽ đường vuông góc với OD tại D, chúng cắt nhau tại I, đó là điểm xác định. Ta có AC = BD.



Hình 225

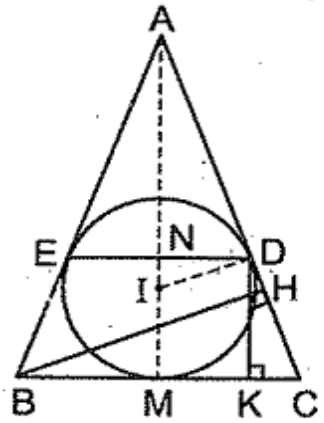
ΔICA = ΔIDB (c.g.c) suy ra IA = IB. Lấy E đối xứng với B qua D thì AE // CD nên H là trung điểm của AB. Do đó IH ⊥ AB. H là giao điểm của CD và đường tròn đường kính IM.

155. (h.226). Giả sử đã dựng được ΔABC cân tại A. Gọi D, E, M là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với AC, AB, BC. Kẻ DK ⊥ BC.

Ta có $CD = CM = \frac{BC}{2}$ nên dễ chứng minh được

$$DK = \frac{BH}{2} = \frac{h}{2}.$$

Từ đó dựng được ΔDEM, dựng đường tròn qua D, E, M rồi dựng ΔABC.

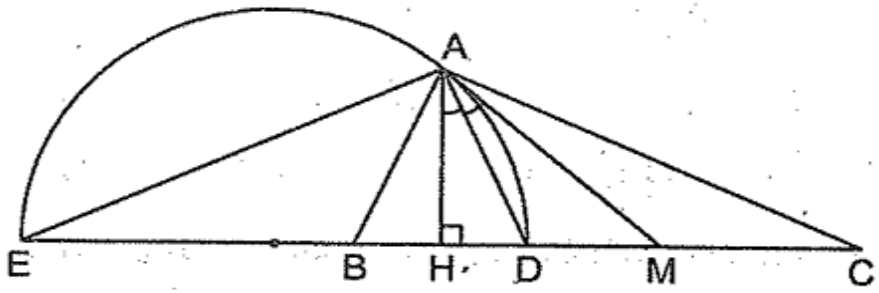


Hình 226

156. (h.227) *Phân tích.* Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn bài toán. Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{C} = \widehat{MAC}$ nên AD là tia phân giác của góc HAM. Kẻ $AE \perp AD$ thì AE là tia phân giác của góc ngoài tại A, nên

$$\frac{EH}{EM} = \frac{DH}{DM} \text{ (cùng bằng } \frac{AH}{AM}\text{)}.$$

Do đó dựng được điểm E (E chia ngoài đoạn HM theo tỉ số 2 : 3). Từ đó dựng được các điểm A, B, C.



Hình 227

Cách dựng

Dựng điểm E chia ngoài đoạn HM theo tỉ số 2 : 3.

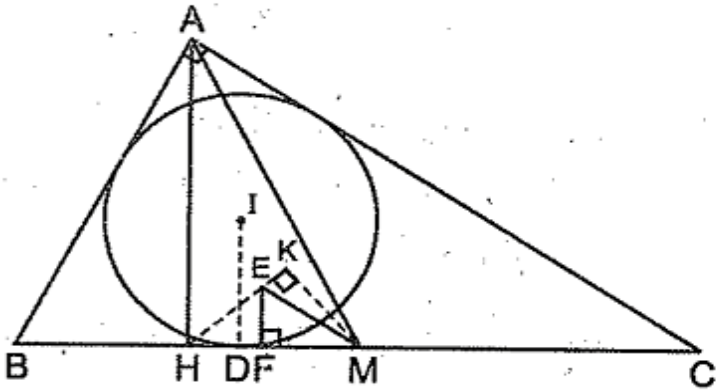
Dựng đường tròn có đường kính ED.

Dựng đường vuông góc với HM tại H, cắt đường tròn ở A.

Dựng các điểm B, C thuộc đường thẳng HM sao cho MB = MC = MA.

157. (h.228) Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Giả sử b > c. Gọi F là tiếp điểm trên BC của đường tròn (E). Ta có

$$\widehat{EMF} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = \widehat{C}$$



Hình 228

$$\Rightarrow \Delta FEM \backsim \Delta ABC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{MF} = \frac{CB}{CA} = \frac{a}{b}. \qquad (1)$$

Bây giờ ta tính tỉ số $\frac{MD}{MF}$. Ta có :

$$MD = CD - CM = \frac{a+b-c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}. \qquad (2)$$

$$2MF = MH + MA - AH = CH - CM + MA - AH = CH - AH$$

$$= \frac{b^2}{a} - \frac{bc}{a} = \frac{b(b-c)}{a}. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\frac{MD}{MF} = \frac{b-c}{2}.\frac{2a}{b(b-c)} = \frac{a}{b}. \qquad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra MD = ME.

Cách dựng

– Dựng $\widehat{MHx} = 45^o$, dựng đường tròn (M ; MD) cắt Hx ở E.

– Dựng tia My sao cho ME là tia phân giác của góc HMy.

– Đường vuông góc với HM tại H cắt tia My ở A.

– Dễ dàng dựng được B và C.

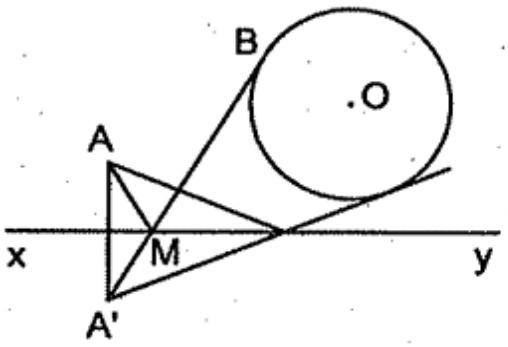
Biện luận. Điều kiện có nghiệm hình :

$$MD \geq MK \text{ (kẻ } MK \perp HE)$$

$$\Leftrightarrow \quad MD \geq \frac{MH}{\sqrt{2}}.$$

158. (h.229) Dựng A' đối xứng với A qua xy. Qua A' dựng tiếp tuyến A'B với đường tròn (O).

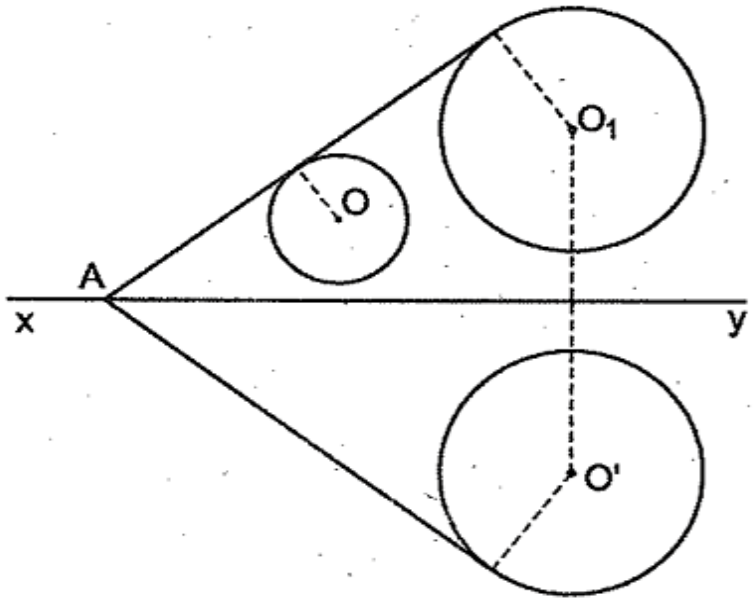
Bài toán có hai nghiệm hình.



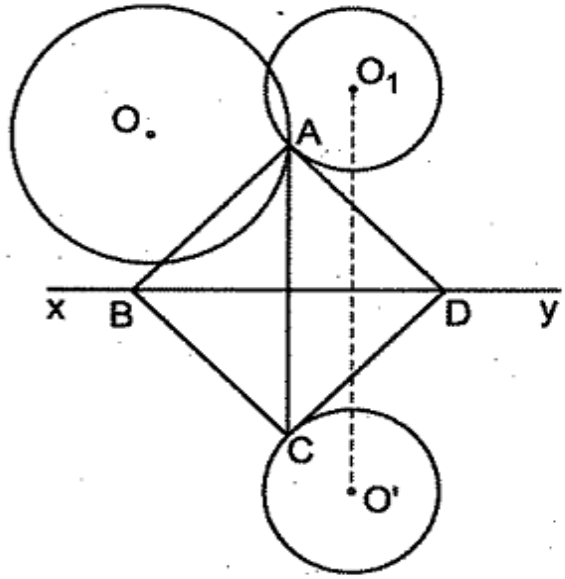
Hình 229

159. (h.230) Dựng đường tròn (O_1) đối xứng với (O') qua xy.

Dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O_1).



Hình 230



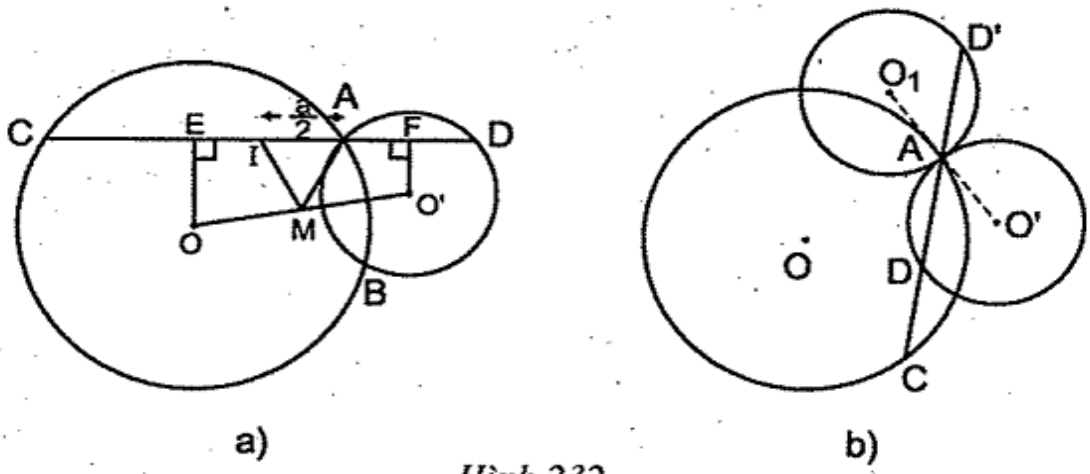
Hình 231

160. (h.231) Dựng (O_1) đối xứng với (O') qua xy. Giao điểm của (O_1) và (O) cho ta điểm A.

161. (h.232). Gọi hai dây bị hai đường tròn cắt là AC, AD (giả sử AC > AD, chú ý rằng AC có thể là dây của (O) hoặc (O')). Xét hai trường hợp :

a) C và D nằm về hai phía của A (h.232a)

Gọi M là trung điểm của OO', E và F theo thứ tự là trung điểm của AC và AD. Trên EA lấy I sao cho EI = AF, thế thì $AI = \frac{a}{2}$. Dễ chứng minh ΔMAI cân tại M nên dựng được điểm I (bằng cách dựng Δ MAI biết ba cạnh). Bài toán có hai nghiệm hình (vì có hai điểm I và I' nằm về hai phía của MA).



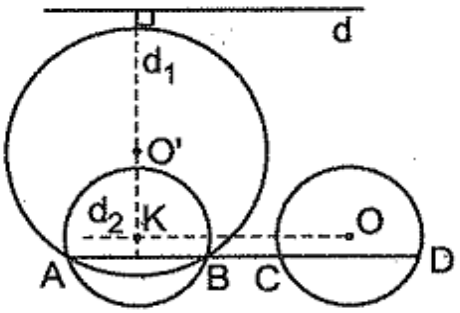
Hình 232

b) C và D nằm về một phía của A (h.232b) :

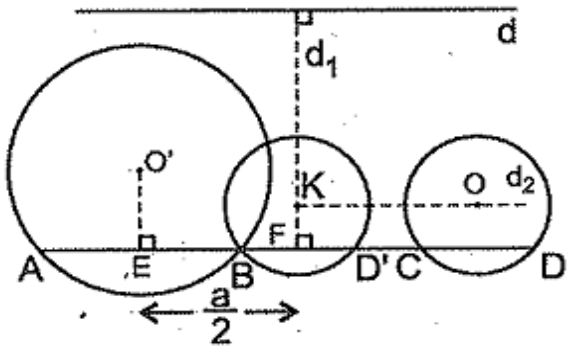
Dựng (O_1) đối xứng với (O') qua A. Giả sử AC – AD = a thì AC – AD' = a (D' là giao điểm của đường thẳng CA với (O_1).

Bài toán được đưa về trường hợp a).

162. (h.233) Vẽ hình bình hành ACOK thì BDOK là hình bình hành. Điểm K là giao điểm của các đường thẳng d_1 đi qua O' vuông góc với d và d_2 đi qua O song song với d.



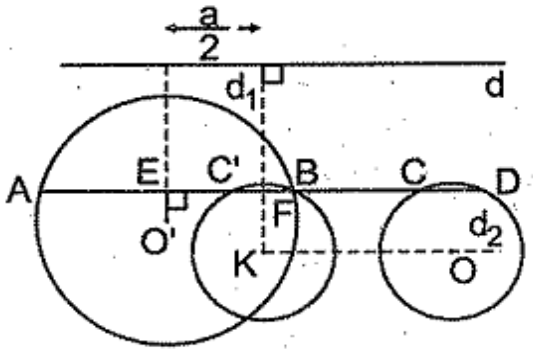
Hình 233



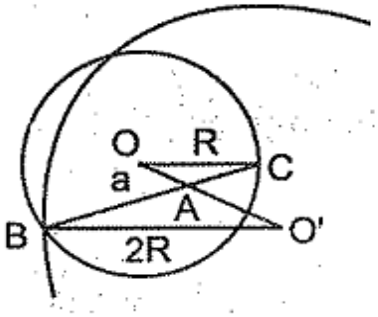
Hình 234

163. (h.234) Vẽ hình bình hành BCOK thì D'DOK là hình bình hành. Kẻ O'E, KF vuông góc với AD'. Điểm K là giao điểm của đường thẳng $d_1 \perp d$ cách O'E một khoảng $\frac{a}{2}$ và d_2 đi qua O song song với d.

164. (h.235) Vẽ hình bình hành ODBK thì C'COK là hình bình hành. Bạn đọc tự giải.



Hình 235



Hình 236a

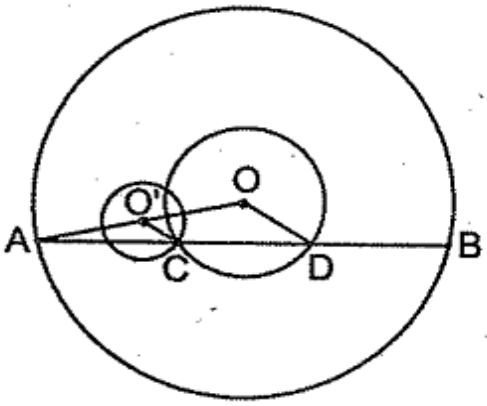
165. (h.236a) B là ảnh của C trong phép vị tự tâm A tỉ số –2. Bạn đọc tự giải. Bài toán có 0, 1, 2 nghiệm hình tuỳ theo $OA < \frac{R}{3}$, $OA = \frac{R}{3}$, $OA > \frac{R}{3}$ với R là bán kính của (O).

166. (h.236b) C là ảnh của D trong phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$. Gọi bán kính của hai đường tròn là R và r (R > r). C là giao điểm của (O ; r) và $\left(O' ; \frac{r}{2}\right)$, O' là trung điểm của AO.

Điều kiện có nghiệm hình là

$$r - \frac{r}{2} < \frac{R}{2} \le r + \frac{r}{2} \Leftrightarrow r < R \le 3r.$$

Nếu R = 3r thì bài toán có một nghiệm hình, nếu r < R < 3r thì bài toán có hai nghiệm hình.

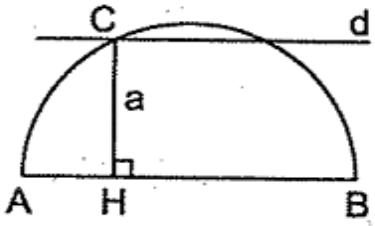


Hình 236b

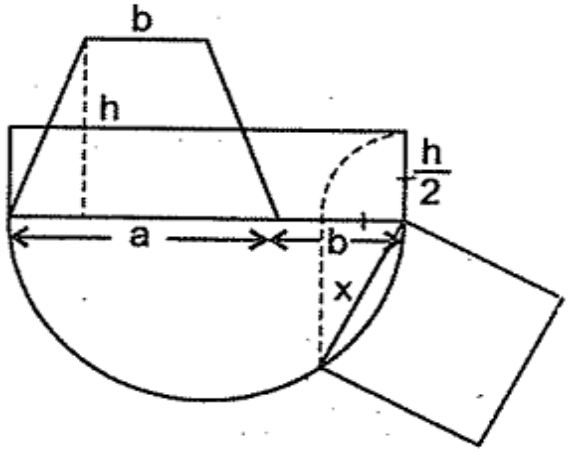
167. (h.237) Dựng đường tròn đường kính AB.

– Dựng d // AB, cách AB một khoảng bằng a.

– Gọi C là giao điểm của d với đường tròn. Kẻ CH ⊥ AB.



Hình 237



Hình 238

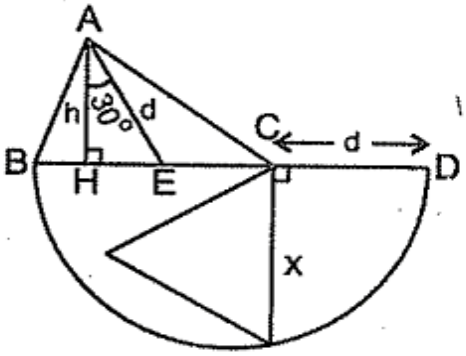
168. (h.238) Đặt a, b là hai đáy của hình thang, h là đường cao.

Gọi x là cạnh của hình vuông. Ta có $x^2 = (a + b)\frac{h}{2}$.

x là trung bình nhân của a + b và $\frac{h}{2}$. Cách dựng được thể hiện trên hình 238.

169. (h.239) Gọi a là một cạnh của tam giác đã cho, h là đường cao tương ứng. Gọi x là cạnh của tam giác đều phải dựng. Ta có

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{ah}{2} \Rightarrow x^2 = a.\frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a.\frac{h}{\cos 30^o}.$$

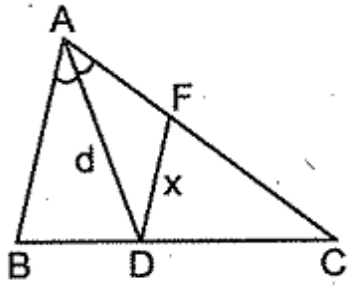


Hình 239

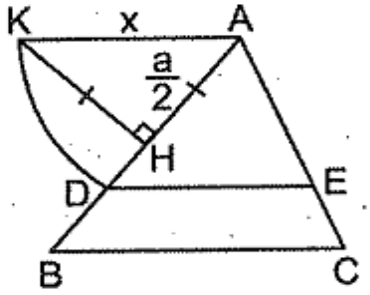
Trước hết dựng $d = \frac{h}{\cos 30^o}$. Sau đó dựng x là trung bình nhân của a và d. Cách dựng được thể hiện trên hình 239 trong đó $\widehat{HAE} = 30^o$ và CD = AE.

170. (h.240) Kẻ DF // AB (F ∈ AC). Đặt DF = x. Hãy chứng minh $x = \frac{bc}{b+c}$.

Bài toán có một nghiệm hình nếu $d < 2x \Leftrightarrow d < \frac{2bc}{b+c}$.



Hình 240



Hình 241

171. (h.241) Gọi DE là đoạn thẳng phải dựng. Đặt AB = a, AD = x. Hãy chứng minh $x^2 = \frac{a^2}{2}$. Đoạn thẳng x là trung bình nhân của a và $\frac{a}{2}$.

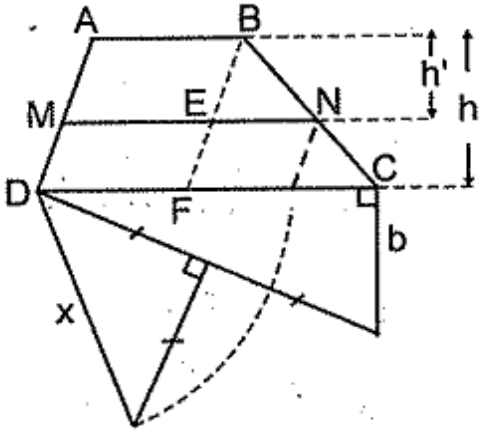
Cách dựng được thể hiện trên hình 241, trong đó AH = HB, ΔAHK vuông cân tại H, AK = AD.

172. (h.242) Gọi MN là đường thẳng phải dựng. AB = b, CD = a là hai đáy của hình thang, h' và h theo thứ tự là chiều cao của các hình thang ABNM và ABCD. Đặt MN = x, ta có :

$$S_{ABNM} = \frac{(x+b)h'}{2}, S_{ABCD} = \frac{(a+b)h}{2}.$$

Do đó $$\frac{(x+b)h'}{(a+b)h} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Qua B kẻ đường thẳng song song với AD, cắt MN và DC ở E và F. Ta có $\frac{h'}{h} = \frac{x-b}{a-b}$ nên (1) trở thành



Hình 242

$$\frac{x^2-b^2}{a^2-b^2} = \frac{1}{2} \text{ do đó } 2x^2 = a^2 + b^2 \text{ hay } x\sqrt{2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

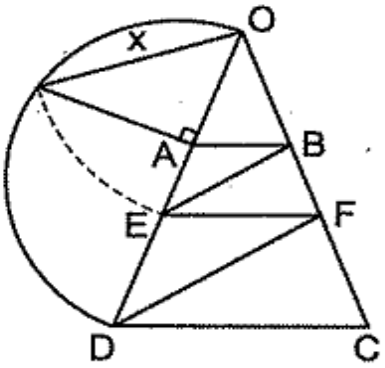
Cách dựng được thể hiện trên hình 242.

173. (h.243) Dễ dàng chứng minh được rằng nếu ABCD là hình bình hành thì EF là đường trung bình.

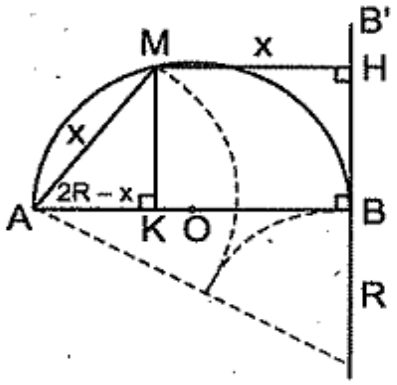
Giả sử AD cắt BC ở O.

Ta có $\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF} = \frac{OE}{OD}$ suy ra $OE^2 = OA.OD$.

Cách xác định điểm E được thể hiện trên hình 243.



Hình 243



Hình 244

174. (h.244) Kẻ MH ⊥ BB', MK ⊥ AB. Đặt MA = MH = x thì AK = 2R – x. Ta có

$$MA^2 = AB.AK \Rightarrow x^2 = 2R(2R - x) \Rightarrow x^2 + 2Rx = 4R^2$$

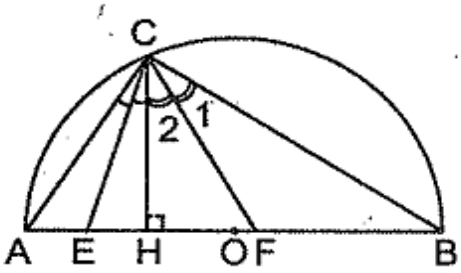
$$\Rightarrow (x + R)^2 = 4R^2 + R^2.$$

x + R là cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 2R và R.

Cách dựng độ dài x được thể hiện trên hình 244.

TOÁN CỰC TRỊ

175. (h.245) Ta có $\widehat{ACF} = 90^o - \widehat{C}_1$, $\widehat{AFC} = 90^o - \widehat{C}_2$ mà $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ nên $\widehat{ACF} = \widehat{AFC}$, do đó AF = AC.



Hình 245

Tương tự BE = BC. Suy ra

$$AC + BC = AF + BE = AB + EF.$$

Đặt AC = x, BC = y, ta có EF = x + y – 2R.

Từ bất đẳng thức $2xy \le x^2 + y^2$, cộng $x^2 + y^2$ vào hai vế được

$$(x + y)^2 \le 2(x^2 + y^2) = 2(2R)^2 = 8R^2$$

do đó $x + y \le 2\sqrt{2}R$ suy ra $x + y - 2R \le (2\sqrt{2} - 2)R$ hay $EF \le 2(\sqrt{2} - 1)R$.

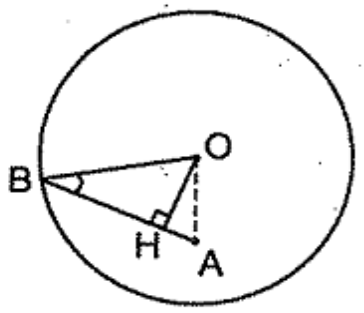
Ta lại có $CH \le R$ nên

$$S_{CEF} = \frac{1}{2}EF.CH \le \left(\sqrt{2}-1\right)R^2$$

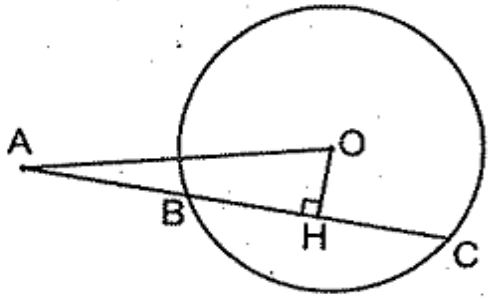
$$\max S_{CEF} = \left(\sqrt{2}-1\right)R^2 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow CO \perp AB.$$

176. (h.246) Gọi OH là khoảng cách từ O đến AB. Ta có $\widehat{OBA}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ sinB lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{OH}{OB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ OH lớn nhất.

Ta lại có $OH \le OA$ nên OH lớn nhất khi và chỉ khi AB vuông góc với OA tại A.



Hình 246



Hình 247

177. (h.247) Gọi OH là khoảng cách từ O đến BC. Ta có

$$AB + AC = (AH - HB) + (AH + HC) = 2AH \le 2AO.$$

Do đó $\max(AB + AC) = 2AO \Leftrightarrow$ đường thẳng phải dựng là AO.

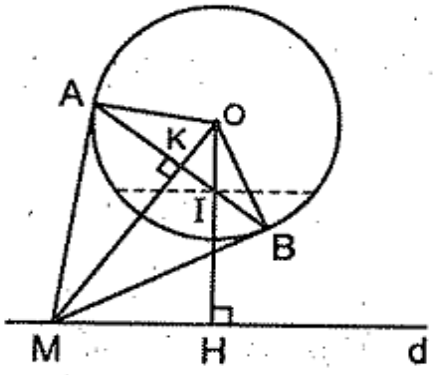
178. (h.248) Kẻ $OH \perp d$, cắt AB ở I, OM cắt AB ở K. Ta có

$$\Delta OKI \backsim \Delta OHM \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OK}{OH} \Rightarrow OI.OH = OM.OK.$$

Ta lại có $OM.OK = OA^2 = R^2$ nên $OI.\ OH = R^2$, do đó độ dài OI không đổi nên I là điểm cố định.

Trong các dây đi qua I, dây vuông góc với OI tại I có độ dài nhỏ nhất, khi đó M trùng với H.



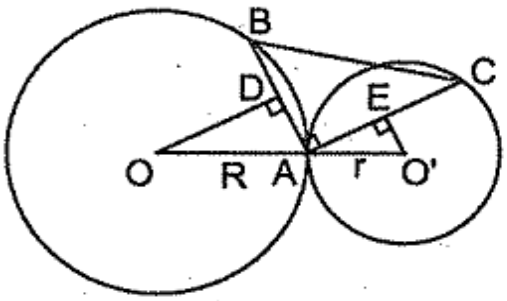
Hình 248

179. (h.249) Kẻ $OD \perp AB$, $O'E \perp AC$. Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.2AD.2AE = 2AD.AE.$$

Đặt OA = R, O'A = r, $\widehat{AOD} = \widehat{O'AE} = \alpha$ ($\alpha < 90^o$) ta có AD = Rsinα, AE = rcosα. Do đó

$$S_{ABC} = Rr.2\sin\alpha.\cos\alpha. \qquad (1)$$



Hình 249

Áp dụng bất đẳng thức $2ab \le a^2 + b^2$ với a = sinα, b = cosα ta được

$$2\sin\alpha.\cos\alpha \le \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABC} \le Rr$.

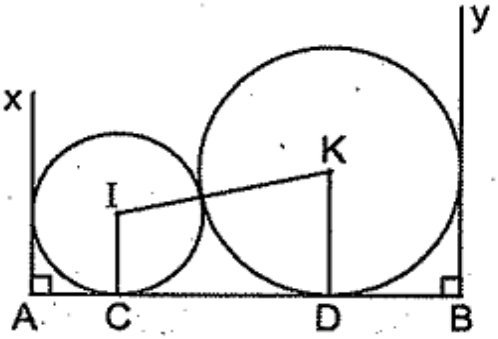
max S = Rr với $\sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin(90^o - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^o - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^o$.

Các dây AB, AC phải dựng sao cho $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = 45^o$, B và C nằm cùng phía đối với OO'.

Bài toán có hai nghiệm hình.

180. (h.250) Đặt IC + KD = AC + DB = x. Đặt AB = a.

Ta tính được $S_{CIKD} = \dfrac{x(a-x)}{2}$. Hai số x và a – x có tổng không đổi nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi x = a – x, tức là $x = \dfrac{a}{2}$.



Hình 250

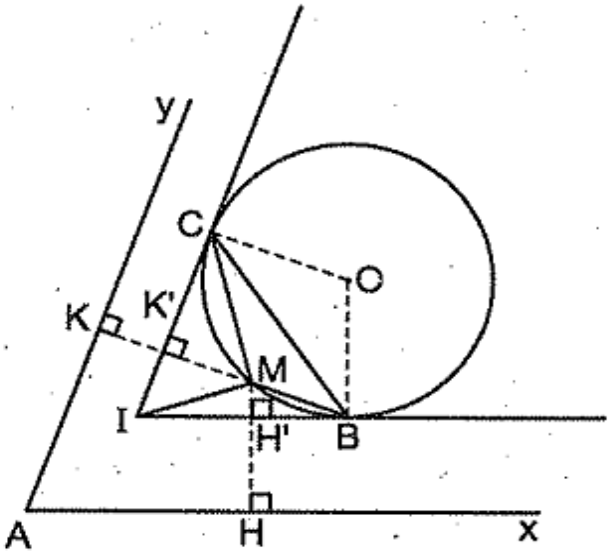
Khi đó CIKD là hình chữ nhật, $AC = CI = \dfrac{a}{4}$, $BD = DK = \dfrac{a}{4}$, $S_{CIKD} = \dfrac{a^2}{8}$.

181. (h.251) Gọi IB, IC là các tiếp tuyến của (O) theo thứ tự song song với Ax, Ay. Gọi H, H' là hình chiếu của M trên Ax, IB. Gọi K, K' là hình chiếu của M trên Ay, IC.

Ta có MH + MK nhỏ nhất khi và chỉ khi MH' + MK' nhỏ nhất.

ΔIBC cân cố định. Đặt IB = IC = a. Dễ thấy M phải thuộc cung nhỏ BC. Ta có :

$$MH' + MK' = \frac{2S_{IMB}}{a} + \frac{2S_{IMC}}{a}$$



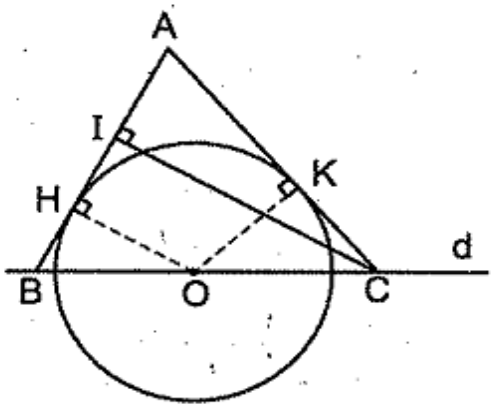
Hình 251

Do đó MH' + MK' nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{IMB} + S_{IMC}$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow S_{BMC}$ lớn nhất

$\Leftrightarrow$ M là giao điểm của OI với cung nhỏ BC.

182. Kí hiệu như trên hình 252.



Hình 252

Đặt $S_{ABC} = S$, ta có

$$S = \frac{AB.OH + AC.OK}{2} = AB + AC \geq$$

$$\geq 2\sqrt{AB.AC} \geq 2\sqrt{AB.CI} = 2\sqrt{2S}.$$

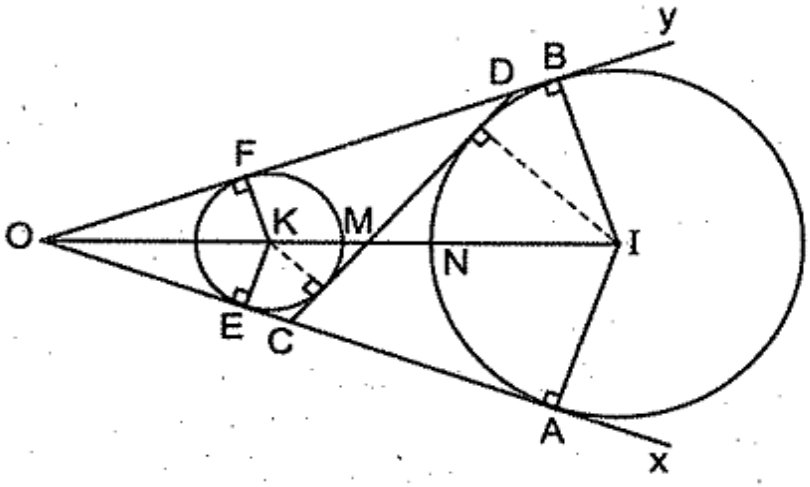
$$S \geq 2\sqrt{2S} \Rightarrow S^2 \geq 8S \Rightarrow S \geq 8.$$

$$\min S = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AC = CI \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Từ đó suy ra cách dựng điểm A : điểm A thuộc đường vuông góc với d tại O và $OA = 2\sqrt{2}$. Bài toán có hai nghiệm hình.

183. (h.253) a) Vẽ đường tròn (K) nội tiếp ΔOCD, các tiếp điểm trên OC, OD là E, F.



Hình 253

Ta chứng minh được CD = EA (xem Ví dụ 23a).

Do đó CD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OE lớn nhất. Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm của đoạn thẳng KI với (K) và (I).

Ta có :

$$\frac{OE}{OA} = \frac{OK}{OI} = \frac{KE}{IA} = \frac{OK + KE}{OI + IA} = \frac{OK + KM}{OI + IA} = \frac{OM}{OI + IA}.$$

Do đó OE lớn nhất $\Leftrightarrow$ OM lớn nhất.

max OM = ON $\Leftrightarrow$ M $\equiv$ N. Khi đó CD vuông góc với IN tại N.

b) Dễ thấy OC + OD + DC = OA + OB. Đặt OA = p (hằng số) thì OC + OD + DC = 2p, hay chu vi của ΔOCD không đổi. Vẽ đường tròn (K)

nội tiếp ΔOCD, gọi r là bán kính của đường tròn, ta có $S_{OCD} = pr$. Do p không đổi nên S_{OCD} lớn nhất khi và chỉ khi r lớn nhất. Như vậy cần dựng tiếp tuyến CD sao cho bán kính của đường tròn (K) là lớn nhất.

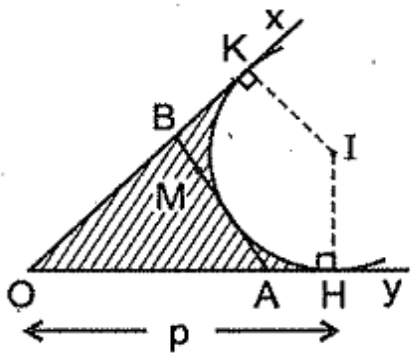
Gọi E là tiếp điểm của (K) với OA, gọi M và N theo thứ tự là giao điểm của đoạn thẳng KI với (K) và (I).

Ta có $$\frac{KE}{IA} = \frac{OK}{OI} = \frac{OK + KE}{OI + IA} = \frac{OM}{OI + IA}.$$

Do đó KE lớn nhất ⇔ OM lớn nhất.

max OM = ON ⇔ M ≡ N. Khi đó CD vuông góc với IN tại N.

184. a) (h.254) *Phân tích.* Vẽ đường tròn (I) bàng tiếp ΔOAB. Gọi H, K là tiếp điểm trên Ox, Oy. Ta có OH = OK = p. Lần lượt dựng H, K, (I), rồi dựng AB.



Hình 254

Biện luận

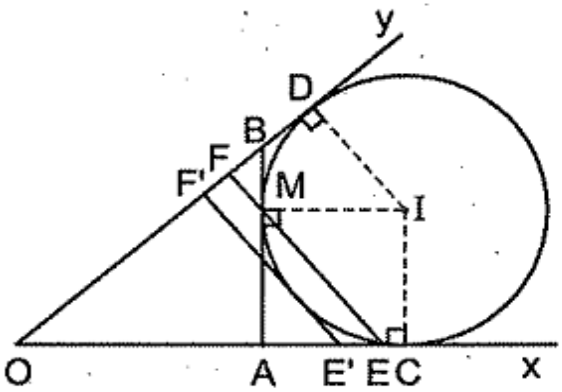
– M nằm bên trong phần gạch sọc, bài toán có hai nghiệm hình.

– M ∈ cung HK, bài toán có một nghiệm hình.

– M thuộc phần còn lại trong góc xOy, bài toán không có nghiệm hình.

b) Giải như Bài tập 183b.

185. (h.255) Qua M dựng đường tròn (I) tiếp xúc với Ox, Oy. Gọi tiếp điểm là C và D. Cách dựng đường tròn (I) : xem Ví dụ 25, chú ý chọn (I) sao cho M thuộc cung nhỏ CD của (I).



Hình 255

Kẻ đường vuông góc với IM tại M, cắt OC, OD ở A, B. Ta sẽ chứng minh ΔOAB là tam giác phải dựng.

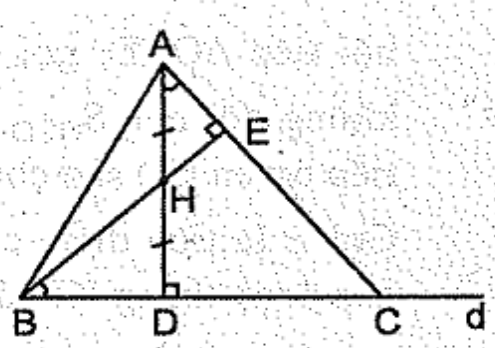
Thật vậy, xét đường thẳng EF qua M và không vuông góc với IM (E ∈ OC, F ∈ OD). Kẻ tiếp tuyến E'F' song song với EF và tiếp xúc với cung CD. Hiển nhiên chu vi ΔOEF lớn hơn chu vi ΔOE'F'. Nhưng chu vi ΔOE'F' bằng chu vi ΔOAB (cùng bằng OC + OD). Vậy chu vi ΔOEF lớn hơn chu vi ΔOAB.

186. (h.256) Đặt AH = HD = a. Ta có ΔBDH và ΔADC đồng dạng nên $\frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC}$, suy ra

$$BD.DC = AD.DH = 2a.a = 2a^2.$$

Do tích BD. DC không đổi nên BD + DC nhỏ nhất khi và chỉ khi $BD = DC = a\sqrt{2}$.

Bạn đọc tự nêu cách dựng.



Hình 256

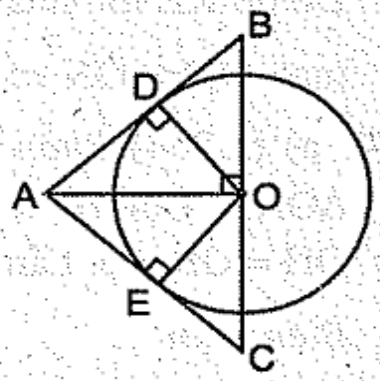
187. (h.257) Gọi AD, AE là các tiếp tuyến của đường tròn (O ; R), chúng cắt đường vuông góc với OA tại O theo thứ tự ở B và C. Ta có

$$S_{ABC} = 2S_{AOB} = AB.OD = (AD + DB).R \quad (1)$$

$$AD + DB \geq 2\sqrt{AD.DB} = 2R \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABC} \geq 2R^2$;

min $S_{ABC} = 2R^2 \Leftrightarrow AD = DB = R \Leftrightarrow$ tứ giác ADOE là hình vuông $\Leftrightarrow$ A thuộc đường tròn $(O ; R\sqrt{2})$.



Hình 257

188. Xét các tam giác có chu vi 2p không đổi. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh, theo công thức Hê-rông ta có

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \text{ (S là diện tích tam giác).}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với ba số dương p – a, p – b, p – c ta có

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}.$$

Suy ra $S^2 \leq \frac{p^4}{27}$ nên $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

Do đó max $S = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy trong các tam giác có cùng chu vi, tam giác đều có diện tích lớn nhất.

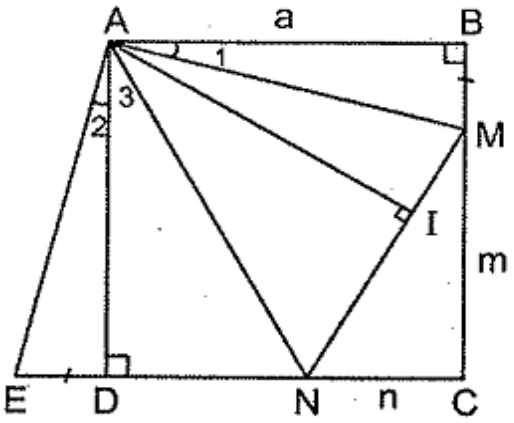
189. (h.258) a) Trên tia đối của tia DC lấy E sao cho DE = BM. Ta có

$$\Delta ABM = \Delta ADE \text{ (c.g.c) nên } AM = AE,\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2}.$$

Ta lại có $\widehat{A_1} + \widehat{A_3} = 45^o$ nên $\widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 45^o$, do đó $\widehat{EAN} = \widehat{MAN}$.

$\Delta EAN = \Delta MAN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ENA} = \widehat{MNA}$. Kẻ $AI \perp MN$ thì $AI = AD = a$.

$\Delta AIN = \Delta ADN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow NI = ND$. Tương tự $MI = MB$. Suy ra $NI + MI = ND + MB$, từ đó chu vi ΔCMN bằng 2a.



Hình 258

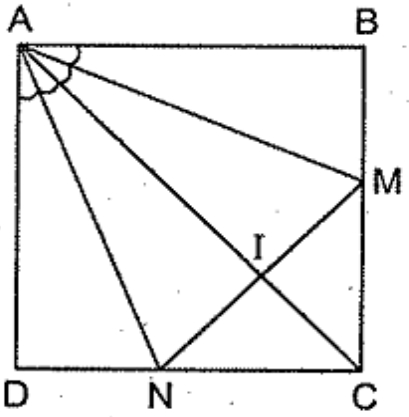
b) Đặt CM = m, CN = n, MN = x. Theo câu a ta có m + n + x = 2a. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của x.

Sử dụng bất đẳng thức $2(m^2 + n^2) \geq (m + n)^2$ ta có

$$2x^2 \geq (2a - x)^2 \Rightarrow x\sqrt{2} \geq 2a - x \Rightarrow x(1 + \sqrt{2}) \geq 2a$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{2a}{1 + \sqrt{2}} = 2a(\sqrt{2} - 1).$$

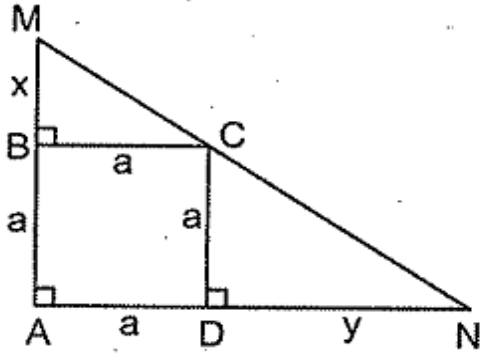
min $MN = 2a(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow m = n$. Khi đó $BM = DN$, $MI = NI$, các điểm A, I, C, thẳng hàng, AM là tia phân giác của góc BAC, AN là tia phân giác của góc DAC (h.259).



Hình 259

c) AMN có đường cao AI = a, $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABMND}$ nên khi MN nhỏ nhất thì S_{AMN} nhỏ nhất, S_{ABMND} nhỏ nhất, suy ra S_{CMN} lớn nhất.

190. (h.260) Gọi a là cạnh của hình vuông. Đặt BM = x, DN = y. Chú ý rằng giữa x, y và hằng số a có quan hệ $xy = a^2$. Thật vậy BC // AN suy ra $\frac{x}{a} = \frac{a}{y}$ nên $xy = a^2$.



Hình 260

Ta biến đổi

$$MN^2 = (a + x)^2 + (a + y)^2$$

$$= 2a^2 + 2a(x + y) + (x^2 + y^2)$$

$$= 2a^2 + 2a(x + y) + (x + y)^2 - 2xy = 2a(x + y) + (x + y)^2.$$

Khi x + y nhỏ nhất (chẳng hạn x + y = b) thì $MN^2 = 2ab + b^2$. Khi x + y > b thì $MN^2 > 2ab + b^2$.

Như vậy MN^2 nhỏ nhất ⇔ x + y nhỏ nhất.

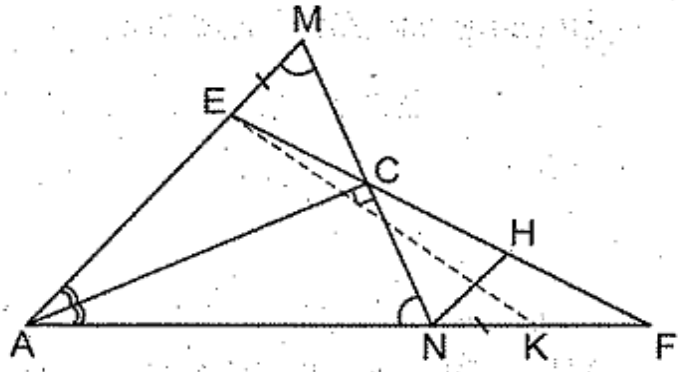
Do xy = a^2 (hằng số) nên x + y nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y.

Do đó MN nhỏ nhất khi ΔAMN vuông cân tại A, tức là MN ⊥ AC tại C.

191. Dựng đường thẳng vuông góc với AC tại C, cắt các cạnh của góc A tại M và N. Ta sẽ chứng minh rằng MN là đường thẳng phải dựng. Xét đường thẳng đi qua C và không vuông góc với AC, cắt các tia AM, AN tại E và F. Cần chứng minh EF > MN. Xét hai trường hợp :

a) Trường hợp E thuộc đoạn thẳng AM, khi đó F thuộc tia đối của tia NA (h.261). Trước hết ta thấy ME < NF. Thật vậy qua N kẻ đường thẳng song song với EM, cắt CF ở H. Ta có

$$\widehat{NHF} = \widehat{AEC} > \widehat{AMC}$$
$$= \widehat{ANC} > \widehat{AFH}$$
$$\Rightarrow NF > NH \Rightarrow NF > ME.$$



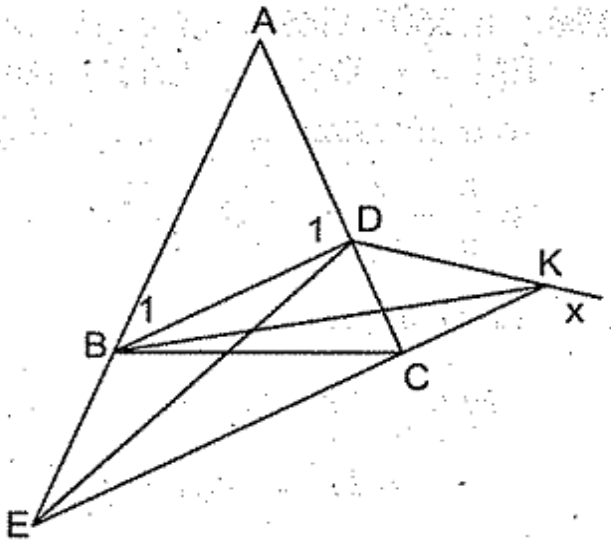
Hình 261

Trên NF lấy K sao cho NK = ME. Do ME < NF nên K nằm giữa N và F. Dễ dàng chứng minh được EK > MN (bằng cách kẻ các đường vuông góc từ E và K đến MN) và EF > EK (vì $\widehat{EKF} > 90^o$) do đó EF > MN.

b) Trường hợp E thuộc tia đối của tia MA, khi đó F thuộc đoạn thẳng AN, chứng minh tương tự.

192. a) Gọi ABC là tam giác cân tại A. Xét ΔADE bất kì có góc DAE trùng với góc BAC và $S_{ADE} = S_{ABC}$ (h.262). Giả sử D thuộc cạnh AC thì E phải thuộc tia đối của tia BA. Ta sẽ chứng minh rằng BC < DE.

Thật vậy, do $S_{ABC} = S_{ADE}$ nên trừ đi S_{ABD} ta được $S_{CBD} = S_{EBD}$, suy ra CE // BD. Để so sánh BC và DE, ta vẽ thêm điểm K sao cho EBDK là



Hình 262

hình thang cân có cạnh đáy BD. (Cách vẽ như sau : Trên nửa mặt phẳng chứa E có bờ BD vẽ tia Dx sao cho $\widehat{BDx} = \widehat{DBE}$, Dx cắt EC ở K). Do đó

$$BK = DE. \qquad (1)$$

Ta có AB > AD nên $\widehat{D}_1 > \widehat{B}_1$, suy ra $\widehat{BDC} < \widehat{DBE}$, do đó $\widehat{BDC} < \widehat{BDK}$, vì thế C nằm giữa E và K. Ta có $\widehat{BCK} > \widehat{CBE} > 90^o$ nên

$$BK > BC. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra BC < DE.

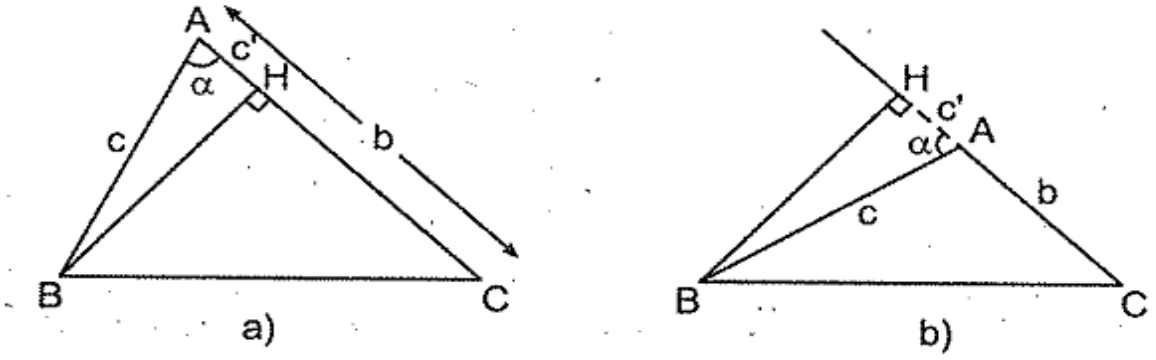
Chú ý : Có thể dùng kết quả của Bài tập 22 và Ví dụ 16 để giải câu a) như sau :

Xét các tam giác ABC có diện tích S và số đo góc A không đổi. Đặt AC = b, AB = c. Gọi c' là hình chiếu của cạnh AB trên AC. Xét ba trường hợp :

– Trường hợp $\widehat{A} = \alpha < 90^o$ (h.263a). Theo Bài tập 22 ta có

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc' = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos\alpha).$$

Do $1 - \cos\alpha$ không đổi và bc không đổi $\left(\text{vì } bc = \dfrac{2S}{\sin\alpha}\right)$ nênBC nhỏ nhất khi và chỉ khi b = c.



Hình 263

– Trường hợp $\widehat{A} > 90^o$ (h.263b), đặt $\alpha = 180^o - \widehat{A}$. Theo Bài tập 22 ta có

$$BC^2 = b^2 + c^2 + 2bc' = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha = (b - c)^2 + 2bc(1 + \cos\alpha).$$

Do $1 + \cos\alpha$ không đổi và bc không đổi $\left(\text{vì } bc = \dfrac{2S}{\sin\alpha}\right)$ nên BC nhỏ nhất khi và chỉ khi b = c.

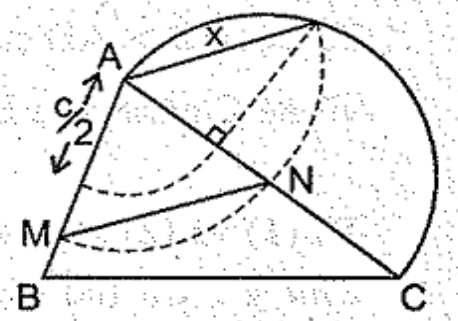
– Trường hợp $\widehat{A} = 90^o$. Ta có

$$BC^2 = b^2 + c^2 = (b - c)^2 + 2bc.$$

Do bc = 2S không đổi nên BC nhỏ nhất khi và chỉ khi b = c.

Vậy trong các tam giác ABC có diện tích S và số đo góc A không đổi, tam giác có cạnh BC nhỏ nhất là tam giác cân tại A.

b) (h.264) Xét các tam giác MAN có $\widehat{MAN}$ không đổi, cùng có diện tích bằng $\frac{1}{2}S_{ABC}$ nên tam giác có MN nhỏ nhất là tam giác cân tại A (theo câu a).



Hình 264

Ta dựng các điểm M, N sao cho AM = AN và $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ bằng phương pháp đại số. Đặt AB = c, AC = b, AM = AN = x.

Ta có $S_{AMN} = \frac{1}{2}x^2\sin\alpha$, $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ nên $\frac{x^2}{bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = b.\frac{c}{2}$.

x là trung bình nhân của $\frac{c}{2}$ và b. Cách dựng được thể hiện trên hình 264.

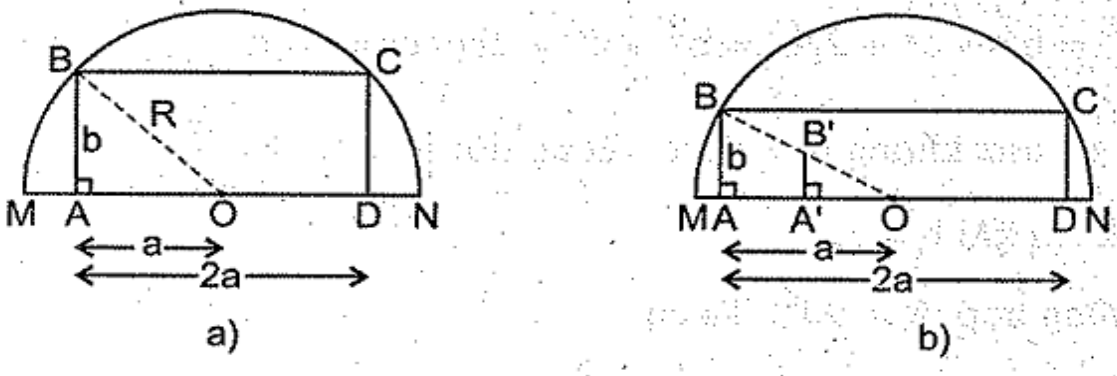
193. (h.265) Đặt AD = 2a, AB = b, OB = R. Xét ΔOAB vuông

$$OA^2 + AB^2 = OB^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = R^2.$$

a) (h.265a) Xét $S = 2ab \le a^2 + b^2 = R^2$

$$\max S = R^2 \Leftrightarrow a = b = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy hình chữ nhật ABCD có diện tích lớn nhất bằng R^2 khi và chỉ khi AD = 2AB. Cách dựng hình chữ nhật đó được thể hiện trên hình 265a trong đó $\widehat{AOB} = 45^o$.



Hình 265

b) (h.265b). Ta có chu vi ABCD lớn nhất $\Leftrightarrow$ 2a + b lớn nhất $\Leftrightarrow$ $(2a + b)^2$ lớn nhất.

Dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki

$$(mx + ny)^2 \leq (m^2 + n^2).(x^2 + y^2), \text{ xảy ra dấu bằng khi } \frac{m}{x} = \frac{n}{y}.$$

Do đó

$$(2a + b)^2 = (2.a + 1.b)^2 \leq (2^2 + 1^2)(a^2 + b^2) = 5R^2.$$

$$\max(2a + b) = R\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow a = 2b.$$

Vậy hình chữ nhật ABCD có chu vi lớn nhất bằng $2R\sqrt{5}$ khi và chỉ khi AD = 4AB. Cách dựng hình chữ nhật đó được thể hiện trên hình 265b, trong đó OA' = 2A'B', OB' cắt nửa đường tròn ở B.