

CHUYÊN ĐỀ: MỘT VÀI KỸ NĂNG TÍNH TỔNG TỔ HỢP

Lời mở đầu

“Tổng tổ hợp” là một nội dung cơ bản và quan trọng của chương trình môn Toán ở THPT và thường gặp trong các đề thi tuyển sinh đại học và cao đẳng. “Tổng tổ hợp” được đánh giá là một nội dung khó và khá hay. Trong quá trình học, học sinh đã được làm quen với các khái niệm và bài toán liên quan về các quy tắc đếm, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp, ứng dụng của nhị thức Newton. Trong các bài tập về tổ hợp, dạng toán tính tổng tổ hợp là một trong các dạng gây khó khăn cho học sinh. Trong khi đó, tài liệu hoàn chỉnh dành cho dạng toán này cũng không nhiều. Trong quá trình giải các bài tập dạng tính tổng tổ hợp nhiều học sinh còn lúng túng không biết hướng giải và không biết áp dụng các kiến thức đã học vào bài toán như thế nào. Chúng tôi hy vọng với bài viết này, các em có thể tự luyện tập để khỏi bỡ ngỡ trước các đề toán kiểm tra và thi có dạng tính tổng các tổ hợp.

Cấu trúc chuyên đề

Chuyên đề được trình bày trong 3 chương:

Chương 1. Một số kiến thức cơ bản

Trong chương này điểm lại một số kiến thức cơ bản về hai quy tắc đếm cơ bản, hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp và một số công thức tính toán.

Chương 2. Một số kỹ năng tính tổng tổ hợp

Trong chương 2 tập chung vào một số kỹ năng và các bài tập mẫu về tính tổng tổ hợp như: Sử dụng bài toán đếm, sử dụng công thức, sử dụng khai triển nhị thức Newton, đạo hàm, tích phân và số phức.

Chương 3. Bài tập áp dụng

Đưa ra một số bài tập áp dụng để học sinh có thể rèn luyện kỹ năng tính các tổng tổ hợp.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

1. Hai quy tắc đếm cơ bản

1.1 Quy tắc cộng

Giả sử, một công việc có thể thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, \dots, A_k$. Có n_1 cách thực hiện phương án A_1 , n_2 cách thực hiện phương án A_2 , ..., n_k cách thực hiện phương án A_k . Khi đó, công việc có thể được thực hiện bởi $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ cách.

Quy tắc cộng mở rộng

Cho hai tập hợp hữu hạn bất kì A và B . Khi đó, số phần tử của $A \cup B$ bằng số phần tử của A cộng với số phần tử của B rồi trừ đi số phần tử của $A \cap B$, tức là

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

1.2 Quy tắc nhân

Giả sử, một công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, \dots, A_k$. Công đoạn A_1 có thể thực hiện theo n_1 cách, công đoạn A_2 có thể thực hiện theo n_2 cách, ..., công đoạn A_k có thể thực hiện theo n_k cách. Khi đó công việc đó có thể thực hiện theo $n_1 n_2 \dots n_k$ cách.

2. Hoán vị

Cho tập hợp A có n ($n \geq 1$) phần tử. Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một **hoán vị** các phần tử của tập A , gọi tắt là một hoán vị của A .

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của tập hợp có n phần tử.

Ta có $P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1$.

3. Chỉnh hợp

Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một **chỉnh hợp** chập k của n phần tử của A , gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của A .

Kí hiệu số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là A_n^k .

$$\text{Ta có } A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (1)$$

Quy ước $0! = 1$, $A_n^0 = 1$.

Khi đó công thức (1) đúng với mọi số nguyên k thỏa mãn $0 \leq k \leq n$.

4. Tổ hợp

Cho tập A có n phần tử ($n \in \mathbb{N}$) và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một **tổ hợp** chập k của n phần tử của A , gọi tắt là một tổ hợp chập k của A .

Kí hiệu số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là C_n^k hoặc $\binom{n}{k}$.

$$\text{Ta có } C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

Quy ước $C_n^0 = 1$.

Khi đó công thức (2) đúng với mọi số nguyên k thỏa mãn $0 \leq k \leq n$.

5. Một số công thức tính toán

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$;
- $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$;
- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;

- $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1};$
- **Nhị thức Newton**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}.$$

Hệ quả:

- $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n;$
- $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n;$
- $\sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n;$
- $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}.$

Chương 2

Một số kĩ năng tính tổng tổ hợp

1. Sử dụng bài toán đếm

1.1 Phương pháp

- *Bước 1.* Lập bài toán.
- *Bước 2.* Giải bài toán bằng hai cách. Mỗi cách cho kết quả được biểu diễn dưới dạng là một vế của đẳng thức cần chứng minh.
- *Bước 3.* Từ đó rút ra đẳng thức cần chứng minh.

1.2 Một số bài tập áp dụng

Bài 1. Chứng minh rằng

$$C_{2011}^1 + C_{2011}^3 + C_{2011}^5 + \dots + C_{2011}^{2011} = 2^{2010}.$$

Giải.

❖ *Xét bài toán*

Cho tập S có 2011 phần tử. Tìm số các tập con có lẻ phần tử của S .

❖ *Giải bài toán*

- *Cách 1*

Chọn ra k phần tử từ 2011 phần tử của S với k lẻ.

Số tập con có k (k lẻ) phần tử là $C_{2011}^k = C_{2011}^{2i+1}$, với $1 \leq i \leq 1005$.

Theo quy tắc cộng, số tập con có lẻ phần tử của S là

$$\sum_{i=0}^{1005} C_{2011}^{2i+1} = C_{2011}^1 + C_{2011}^3 + C_{2011}^5 + \dots + C_{2011}^{2011}.$$

• *Cách 2*

Gọi $P = \{ A \mid A \subset S; A \text{ có lẻ phần tử} \};$

$\bar{P} = \{ \bar{A} \mid \bar{A} \subset S; \bar{A} \text{ có chẵn phần tử} \}.$

$\Rightarrow$ Số phần tử của $P =$ số phần tử của $\bar{P} = \frac{m}{2}$, với m là số tập con của S .

Số tập con của S là $m = 2^{2011}$.

Suy ra số phần tử của P là $\frac{2^{2011}}{2} = 2^{2010}$.

Số tập con có lẻ phần tử của S là 2^{2010} .

Vì hai cách giải cho kết quả bằng nhau nên ta có

$$C_{2011}^1 + C_{2011}^3 + C_{2011}^5 + \dots + C_{2011}^{2011} = 2^{2010}.$$

Điều phải chứng minh. □

Bài 2. Chứng minh rằng

$$C_{2012}^0 + C_{2012}^2 + C_{2012}^4 + \dots + C_{2012}^{2012} = 2^{2011}.$$

Giải.

❖ *Xét bài toán*

Cho tập S có 2012 phần tử. Tìm số tập con của S có chẵn phần tử.

❖ *Giải bài toán*

• *Cách 1*

Chọn ra k phần tử từ 2012 phần tử của S , với k chẵn.

Số tập con của S có k phần tử (k chẵn) là $C_{2012}^k = C_{2012}^{2i}$, với $1 \leq i \leq 1006$

Theo quy tắc cộng, số tập con có chẵn phần tử của S là

$$\sum_{i=0}^{1006} C_{2012}^{2i} = C_{2012}^0 + C_{2012}^2 + C_{2012}^4 + \dots + C_{2012}^{2012}.$$

• *Cách 2*

Không mất tính tổng quát, ta có $S = S_1 \cup \{n_{2012}\}$, với S_1 có 2011 phần tử,

n_{2012} là phần tử thứ 2012.

Ta có tập con có chẵn phần tử của S là tập con có chẵn phần tử của S_1 hoặc là tập con có lẻ phần tử của $S_1 \cup \{n_{2012}\}$.

Suy ra số tập con có chẵn phần tử của S bằng số tập con có chẵn phần tử của S_1 cộng với số tập con có lẻ phần tử của S_1 .

Theo bài 1, số tập con có chẵn phần tử của S_1 bằng số tập con có chẵn phần tử của S_1 bằng 2^{2010} .

Suy ra số tập con có chẵn phần tử của S là $2^{2010} + 2^{2010} = 2^{2011}$.

Vì hai cách giải cho kết quả như nhau nên ta có

$$\sum_{i=0}^{1006} C_{2011}^{2i} = C_{2012}^0 + C_{2012}^2 + C_{2012}^4 + \dots + C_{2012}^{2012} = 2^{2011}.$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 3. Chứng minh rằng

$$C_{2020}^1 + 2C_{2020}^2 + 3C_{2020}^3 + \dots + 2020C_{2020}^{2020} = 2020 \cdot 2^{2019}.$$

Giải.

❖ Xét bài toán

Có bao nhiêu cách lập ra một nhóm học sinh từ 2020 học sinh để đi thực hiện nhiệm vụ, trong đó có một người là nhóm trưởng.

❖ Giải bài toán

• Cách 1

Chọn ra k học sinh từ 2020 học sinh để lập thành một nhóm. Sau đó, chọn một trong số k học sinh trong nhóm để làm nhóm trưởng.

Suy ra có kC_{2020}^k cách chọn, với $1 \leq k \leq 2020$.

Theo quy tắc cộng, có tất cả số cách chọn là

$$\sum_{k=1}^{2020} kC_{2020}^k = C_{2020}^1 + 2C_{2020}^2 + 3C_{2020}^3 + \dots + 2020C_{2020}^{2020}.$$

- *Cách 2*

Ta chọn một học sinh trong số 2020 học sinh làm nhóm trưởng. Khi đó, 2019 học sinh còn lại, mỗi học sinh có hai cách chọn là tham gia hoặc không tham gia vào nhóm đi thực hiện nhiệm vụ.

Suy ra số cách chọn là $2020 \cdot 2^{2019}$.

Vì hai cách giải cho kết quả như nhau nên ta có

$$C_{2020}^1 + 2C_{2020}^2 + 3C_{2020}^3 + \dots + 2020C_{2020}^{2020} = 2020 \cdot 2^{2019}.$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 4. Chứng minh rằng

$$1 \cdot 2C_{2010}^2 + 2 \cdot 3C_{2010}^3 + 3 \cdot 4C_{2010}^4 + \dots + 2009 \cdot 2010C_{2010}^{2010} = 2010 \cdot 2009 \cdot 2^{2008}.$$

Giải.

❖ Xét bài toán

Một công trường có 2010 công nhân. Hỏi có bao nhiêu cách lập ra một đội từ 2010 công nhân để thực hiện công việc, trong đó có một người là đội trưởng và một người là đội phó.

❖ Giải bài toán

- *Cách 1*

Chọn ra k người từ 2010 công nhân để lập thành một đội. Sau đó, chọn một người trong số k người làm đội trưởng, và chọn một người trong số $k-1$ người còn lại làm đội phó. Như vậy, có $k(k-1)C_n^k$ cách chọn, với $2 \leq k \leq 2010$.

Theo quy tắc cộng, tổng số cách chọn là

$$\sum_{k=2}^{2010} k(k-1)C_{2010}^k = 1 \cdot 2C_{2010}^2 + 2 \cdot 3C_{2010}^3 + 3 \cdot 4C_{2010}^4 + \dots + 2009 \cdot 2010C_{2010}^{2010}.$$

- *Cách 2*

Chọn một người trong số 2010 công nhân làm đội trưởng. Sau đó, chọn một người trong số 2009 người còn lại làm đội phó. Khi đó, 2008 người còn lại, mỗi người còn lại có hai lựa chọn tham gia hoặc không tham gia vào đội đã lập.

Suy ra có tất cả $2010 \cdot 2009 \cdot 2^{2008}$ cách.

Vì hai cách giải có kết quả như nhau nên ta có

$$1.2C_{2010}^2 + 2.3C_{2010}^3 + 3.4C_{2010}^4 + \dots + 2009.2010C_{2010}^{2010} = 2010.2009.2^{2008}.$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bài 5. Chứng minh rằng

$$C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \dots + C_m^m C_n^{k-m} = C_{m+n}^k, \text{ với } 0 \leq m \leq k \leq n.$$

Giải.

❖ Xét bài toán

Cho tập hợp A gồm m người, tập hợp B gồm n người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra k người từ hai tập A và B .

❖ Giải bài toán

• Cách 1

Chọn ra i người từ tập hợp A và $k-i$ người từ tập hợp B .

Suy ra có $C_m^i C_n^{k-i}$ cách chọn, với $0 \leq i \leq m$.

Theo quy tắc cộng, ta có tổng số cách chọn ra k người từ hai tập A và B là

$$\sum_{i=0}^m C_m^i C_n^{k-i} = C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \dots + C_m^m C_n^{k-m}.$$

• Cách 2

Chọn trực tiếp k người từ $m+n$ người sau khi ghép hai nhóm lại.

Số cách chọn ra k người từ hai tập hợp A và B là C_{m+n}^k cách.

Vì hai cách giải cho kết quả như nhau nên ta có

$$C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \dots + C_m^m C_n^{k-m} = C_{m+n}^k.$$

Điều phải chứng minh. $\square$

Bài 6. Chứng minh rằng

$$\left(C_{1013}^0\right)^2 + \left(C_{1013}^1\right)^2 + \left(C_{1013}^2\right)^2 + \dots + \left(C_{1013}^{1013}\right)^2 = C_{2026}^{1013}.$$

Giải.

❖ **Xét bài toán**

Có bao nhiêu cách chọn từ 1013 học sinh nam và 1013 học sinh nữ ra một đội gồm 1013 học sinh để đi thực hiện nhiệm vụ.

❖ **Giải bài toán**

• **Cách 1**

Ta có thể chọn ra k học sinh từ 1013 học sinh nam và $1013-k$ học sinh từ 1013 học sinh nữ để lập thành một đội để đi thực hiện nhiệm vụ. Khi đó, số cách chọn là $C_{1013}^k C_{1013}^{1013-k} = C_{1013}^k C_{1013}^k = (C_{1013}^k)^2$, với $0 \leq k \leq 1013$.

Theo quy tắc cộng, tổng số cách chọn ra 1013 học sinh từ 1013 học sinh nam và 1013 học sinh nữ để đi thực hiện nhiệm vụ là

$$\sum_{k=0}^{1013} (C_{1013}^k)^2 = (C_{1013}^0)^2 + (C_{1013}^1)^2 + (C_{1013}^2)^2 + \dots + (C_{1013}^{1013})^2.$$

• **Cách 2**

Ghép hai nhóm học sinh nam và nữ thành một nhóm gồm 2026 học sinh. Sau đó chọn ra 1013 học sinh từ 2026 học sinh để lập thành một đội đi thực hiện nhiệm vụ.

Số cách chọn 1013 học sinh từ 2026 học sinh là C_{2026}^{1013} cách.

Vì hai cách giải cho kết quả như nhau nên ta có

$$(C_{1013}^0)^2 + (C_{1013}^1)^2 + (C_{1013}^2)^2 + \dots + (C_{1013}^{1013})^2 = C_{2026}^{1013}.$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 7. Chứng minh rằng

$$(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \dots + n(C_n^n)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}.$$

Giải.

❖ **Xét bài toán**

Có bao nhiêu cách lập ra một đội gồm n người từ n nam và n nữ, trong đó có một đội trưởng là nam.

❖ ***Giải bài toán***

• ***Cách 1***

Chọn ra k nam và $n-k$ nữ từ n nam và n nữ để lập thành một đội. Sau đó, chọn một người từ k nam ra để làm đội trưởng.

Số cách chọn là $kC_n^k C_n^{n-k} = k(C_n^k)^2$, với $1 \leq k \leq n$.

Theo quy tắc cộng, ta có tổng số cách chọn là

$$\sum_{k=1}^n k(C_n^k)^2 = (C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \dots + n(C_n^n)^2.$$

• ***Cách 2***

Chọn ra một người làm đội trưởng từ n nam. Sau đó, gộp hai nhóm lại thành một nhóm mới gồm $2n-1$ người, rồi chọn $n-1$ người còn lại từ $2n-1$ người của nhóm mới.

Tổng số cách chọn là nC_{2n-1}^{n-1} cách chọn.

Vì hai cách giải cho kết quả như nhau nên ta có

$$1(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \dots + n(C_n^n)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}.$$

Điều phải chứng minh. □

Bài 8. Chứng minh rằng

$$1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}.$$

Giải.

❖ ***Xét bài toán***

Cho một nhóm gồm n người. Có bao nhiêu cách lập ra một đội văn nghệ để tham gia biểu diễn, trong đó có một người hát chính và một người chơi đàn.

❖ ***Giải bài toán***

• ***Cách 1***

Chọn ra k người từ n người đã cho để lập thành đội văn nghệ. Sau đó chọn một người hát chính và một người chơi đàn từ k người đã chọn.

Vì người hát chính có thể là người chơi đàn nên có $k \cdot kC_n^k = k^2 C_n^k$ cách chọn, với $1 \leq k \leq n$.

Theo quy tắc cộng, tổng số cách lập ra một đội văn nghệ từ n người, trong đó có một người hát chính và một người chơi đàn là

$$\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = 1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n.$$

• *Cách 2*

Xét hai trường hợp:

➤ *Trường hợp 1:* Người hát chính và người chơi đàn là hai người khác nhau.

Chọn ra một người hát chính từ n người. Sau đó, chọn một người chơi đàn từ $n-1$ người còn lại. Khi đó, $n-2$ người còn lại, mỗi người có hai cách chọn là tham gia hoặc không tham gia vào đội văn nghệ.

Khi đó, số cách chọn là $n(n-1)2^{n-2}$ cách.

➤ *Trường hợp 2:* Người hát chính và người chơi đàn là một người.

Như vậy, chọn một người từ n người để hát chính và chơi đàn.

Khi đó, $n-1$ người còn lại, mỗi người có hai cách chọn là tham gia hoặc không tham gia vào đội văn nghệ.

Suy ra số cách chọn là $n2^{n-1}$ cách.

Theo quy tắc cộng, tổng số cách chọn là $n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$ cách.

Vì hai cách giải cho kết quả như nhau nên ta có

$$1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}.$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

2. Sử dụng công thức

2.1 Một số công thức thường dùng

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$;

- $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$;
- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;
- $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$.

2.2 Một số bài tập áp dụng

Bài 1. Tính các tổng sau:

- $S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$;
- $S_2 = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n$.

Giải.

- Áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, $1 \leq k \leq n$. Ta có

$$\begin{aligned} S_1 &= C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n \\ &= nC_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 + \dots + nC_{n-1}^{n-1} \\ &= n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) \\ &= n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}. \end{aligned}$$

Suy ra $S_1 = n2^{n-1}$. □

- Tương tự, ta có $S_2 = n[C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1}] = n(1-1)^{n-1} = 0$.

Suy ra $S_2 = 0$. □

Bài 2. Tính tổng

$$S = 1.2C_{2010}^2 + 2.3C_{2010}^3 + 3.4C_{2010}^4 + \dots + 2009.2010C_{2010}^{2010}.$$

Giải.

$$\text{Ta có } S = 1.2C_{2010}^2 + 2.3C_{2010}^3 + 3.4C_{2010}^4 + \dots + 2009.2010C_{2010}^{2010} = \sum_{k=2}^{2010} (k-1)kC_{2010}^k.$$

Áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, với $n = 2010$, $2 \leq k \leq 2010$, ta có

$$(k-1)kC_{2010}^k = 2010(k-1)C_{2009}^{k-1} = 2010.2009C_{2008}^{k-2}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=2}^{2010} 2010.2009C_{2008}^{k-2} = 2010.2009 \sum_{k=2}^{2010} C_{2008}^{k-2} \\ &= 2010.2009(C_{2008}^0 + C_{2008}^1 + C_{2008}^2 + \dots + C_{2008}^{2008}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = 2010.2009(1+1)^{2008}$$

$$= 2010.2009. 2^{2008}.$$

$$\text{Vậy } S = 2010.2009. 2^{2008}.$$

□

Nhận xét

• Nếu trong biểu thức của tổng cần tính có xuất hiện dạng kC_n^k , thì ta sử dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

• Nếu biểu thức tổng cần tính có xuất hiện dạng $(k-i) \dots (k-1)kC_n^k$, với $0 \leq i \leq k-1$ thì ta áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ lần lượt $i+1$ lần như sau

$$(k-i) \dots (k-1)kC_n^k = n(k-i) \dots (k-1)C_{n-1}^{k-1} = \dots = n(n-1) \dots (n-i)C_{n-i-1}^{k-i-1}.$$

Bài 3. Tính tổng

$$S = n2^{n-1}C_n^0 + (n-1)2^{n-2}3C_n^1 + (n-2)2^{n-3}3^2C_n^2 + \dots + 3^{n-1}C_{n-1}^{n-1}.$$

Giải.

Áp dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ và $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, ta được

$$\begin{aligned} S &= n2^{n-1}C_n^n + (n-1)2^{n-2}3C_n^{n-1} + (n-2)2^{n-3}3^2C_n^{n-2} + \dots + 3^{n-1}C_{n-1}^1 \\ &= n(2^{n-1}C_{n-1}^{n-1} + 2^{n-2}3C_{n-1}^{n-2} + 2^{n-3}3^2C_{n-1}^{n-3} + \dots + 3^{n-1}C_{n-1}^0) \\ &= n(3+2)^{n-1} = n5^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } S = n5^{n-1}.$$

□

Nhận xét

Nếu trong biểu thức tổng cần tính có xuất hiện dạng $(a+k)C_n^k$ thì ta biến đổi $(a+k)C_n^k = aC_n^k + kC_n^k$. Sau đó áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ để tính tổng.

3. Sử dụng khai triển Nhị thức Newton

3.1 Lý thuyết

❖ *Nhị thức Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

❖ *Hệ quả*

- $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$;
- $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n$;
- $\sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$;
- $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$

❖ *Dấu hiệu nhận biết*

Khi số hạng của tổng có dạng $C_n^k a^{n-k} b^k$ hoặc $C_n^{n-k} a^{n-k} b^k$ thì ta sẽ áp dụng khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$, với hệ số a, b thích hợp.

3.2 Một số bài tập áp dụng

Bài 1. Tính tổng

$$S = C_{2000}^0 2^{2001} 3 + C_{2000}^1 2^{2000} 3^2 + C_{2000}^2 2^{1999} 3^3 + \dots + C_{2000}^{2000} 2.3^{2001}.$$

Giải.

Ta có

$$S = 2.3 \left(C_{2000}^0 2^{2000} + C_{2000}^1 2^{1999} 3 + C_{2000}^2 2^{1998} 3^2 + \dots + C_{2000}^{2000} 3^{2000} \right).$$

$$\text{Mà } C_{2000}^0 2^{2000} + C_{2000}^1 2^{1999} 3 + C_{2000}^2 2^{1998} 3^2 + \dots + C_{2000}^{2000} 3^{2000} = (2+3)^{2000} = 5^{2000}.$$

$$\text{Suy ra } S = 2.3.5^{2000} = 6.5^{2000}.$$

□

Bài 2. Tính tổng

$$S = C_{2009}^0 + 3^2 C_{2009}^2 + 3^4 C_{2009}^4 + \dots + 3^{2008} C_{2009}^{2008}.$$

Giải.

Áp dụng các khai triển:

$$(1+x)^{2009} = C_{2009}^0 + x C_{2009}^1 + x^2 C_{2009}^2 + \dots + x^{2008} C_{2009}^{2008} + x^{2009} C_{2009}^{2009};$$

$$(1-x)^{2009} = C_{2009}^0 - x C_{2009}^1 + x^2 C_{2009}^2 - \dots + x^{2008} C_{2009}^{2008} - x^{2009} C_{2009}^{2009}.$$

Với $x=3$, ta có:

$$(1+3)^{2009} = C_{2009}^0 + 3 C_{2009}^1 + 3^2 C_{2009}^2 + \dots + 3^{2008} C_{2009}^{2008} + 3^{2009} C_{2009}^{2009}; \quad (1)$$

$$(1-3)^{2009} = C_{2009}^0 - 3 C_{2009}^1 + 3^2 C_{2009}^2 - \dots + 3^{2008} C_{2009}^{2008} - 3^{2009} C_{2009}^{2009}. \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được

$$4^{2009} + (-2)^{2009} = 2(C_{2009}^0 + 3^2 C_{2009}^2 + 3^4 C_{2009}^4 + \dots + 3^{2008} C_{2009}^{2008}) = 2S.$$

$$\text{Suy ra } S = \frac{4^{2009} + (-2)^{2009}}{2} = 2^{2008} (2^{2009} - 1).$$

□

Bài 3. Chứng minh rằng với $0 \leq m \leq k \leq n$ thì

$$C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \dots + C_m^m C_n^{k-m} = C_{m+n}^k.$$

Giải.

Xét các khai triển:

$$(1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^m x^m;$$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n;$$

$$(1+x)^{m+n} = C_{n+m}^0 + C_{n+m}^1 x + \dots + C_{n+m}^k x^k + \dots + C_{n+m}^{n+m} x^{n+m}.$$

$$\text{Theo phép tính lũy thừa, ta có } (1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n. \quad (1)$$

Xét lũy thừa x^k

Ở vế trái của (1), hệ số của x^k là C_{m+n}^k .

Ở vế phải của (1), ta có

$$(1+x)^m (1+x)^n = (C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^m x^m) (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n).$$

Hệ số của x^k là $C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \dots + C_m^m C_n^{k-m}$.

Đồng nhất hệ số ta được

$$C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \dots + C_m^m C_n^{k-m} = C_{m+n}^k.$$

Điều phải chứng minh. □

Bài 4. Chứng minh rằng

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \dots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Giải.

Xét các khai triển:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n;$$

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^n x^n + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

$$\text{Ta có } (1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n. \quad (1)$$

Xét lũy thừa x^n

Ở vế trái của (1), hệ số của x^n là C_{2n}^n .

Ở vế phải của (1), ta có

$$(1+x)^n (1+x)^n = (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n).$$

Hệ số của x^n là

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + \dots + C_n^n C_n^0 = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \dots + \left(C_n^n\right)^2.$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \dots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Điều phải chứng minh. □

Bài 5. Tính tổng

$$S = \left(\frac{C_n^0}{1}\right)^2 + \left(\frac{C_n^1}{2}\right)^2 + \left(\frac{C_n^2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{C_n^n}{n+1}\right)^2.$$

Giải.

Áp dụng công thức $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$, với $0 \leq k \leq n$, ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{(n+1)^2} \left[(C_{n+1}^1)^2 + (C_{n+1}^2)^2 + (C_{n+1}^3)^2 + \dots + (C_{n+1}^{n+1})^2 \right] \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \left\{ \left[(C_{n+1}^0)^2 + (C_{n+1}^1)^2 + (C_{n+1}^2)^2 + (C_{n+1}^3)^2 + \dots + (C_{n+1}^{n+1})^2 \right] - (C_{n+1}^0)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Theo kết quả bài 4 ta có

$$(C_{n+1}^0)^2 + (C_{n+1}^1)^2 + (C_{n+1}^2)^2 + (C_{n+1}^3)^2 + \dots + (C_{n+1}^{n+1})^2 = C_{2n+2}^{n+1}.$$

$$\text{Suy ra } S = \frac{1}{(n+1)^2} (C_{2n+2}^{n+1} - 1).$$

□

4. Sử dụng đạo hàm

4.1. Lý thuyết

❖ Dấu hiệu nhận biết

Khi trong biểu thức tổng cần tính có xuất hiện số hạng có dạng kC_n^k hoặc $kC_n^k a^{n-k} b^{k-1}$ hoặc $(n-k)C_n^k a^{n-k-1} b^k$, thì ta có thể sử dụng đạo hàm cấp một để tính.

❖ Các bước giải

- Bước 1. Chọn hàm số $f(x)$ thích hợp (có thể sử dụng khai triển nhị thức Newton).
- Bước 2. Lấy đạo hàm của hàm số $f(x)$ đã chọn theo hai cách:
 - + Lấy đạo hàm trực tiếp hàm số $f(x)$;
 - + Lấy đạo hàm của hàm số $f(x)$ sau khi đã sử dụng khai triển nhị thức Newton hàm số $f(x)$ ở trên.

• *Bước 3.* Thay x bằng một giá trị thích hợp vào biểu thức vừa tính đạo hàm.
 Đồng nhất hai phép tính ta được kết quả tổng tổ hợp cần tính.

❖ *Chú ý*

Ta thường sử dụng khai triển

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \dots + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1) ta được

$$n(a+x)^{n-1} = C_n^1 a^{n-1} + 2C_n^2 a^{n-2}x + 3C_n^3 a^{n-3}x^2 + \dots + nC_n^n x^{n-1}.$$

Đến đây, ta thay a, x bằng số thích hợp để tính tổng cần tìm.

4.2 Một số bài tập áp dụng

Bài 1. Tính tổng

$$S = n2^{n-1}C_n^0 + (n-1)2^{n-2}3C_n^1 + (n-2)2^{n-3}3^2C_n^2 + \dots + 3^{n-1}C_n^{n-1}.$$

Giải.

Xét khai triển

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + C_n^3 x^{n-3}a^3 + \dots + C_n^n a^n. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1) ta được

$$\begin{aligned} n(x+a)^{n-1} &= \\ &= nC_n^0 x^{n-1} + (n-1)C_n^1 x^{n-2}a + (n-2)C_n^2 x^{n-3}a^2 + (n-3)C_n^3 x^{n-4}a^3 + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Thay $x=2, a=3$ vào (2) ta được

$$\begin{aligned} n(2+3)^{n-1} &= \\ &= nC_n^0 2^{n-1} + (n-1)C_n^1 2^{n-2}3 + (n-2)C_n^2 2^{n-3}3^2 + (n-3)C_n^3 2^{n-4}3^3 + \dots + C_n^{n-1} 3^{n-1} \\ &= n2^{n-1}C_n^0 + (n-1)2^{n-2}3C_n^1 + (n-2)2^{n-3}3^2C_n^2 + \dots + 3^{n-1}C_n^{n-1} = S. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = n(2+3)^{n-1} = n5^{n-1}.$$

□

Bài 2. Tính tổng

$$S = 2002C_{2001}^0 + 2001C_{2001}^1 + 2000C_{2001}^2 + \dots + 2C_{2001}^{2000} + C_{2001}^{2001}.$$

Giải.

Xét khai triển

$$(x+1)^{2001} = C_{2001}^0 x^{2001} + C_{2001}^1 x^{2000} + C_{2001}^2 x^{1999} + \dots + C_{2001}^{2001}. \quad (1)$$

Nhân x vào hai vế của (1) ta được

$$\begin{aligned} x(x+1)^{2001} &= x(C_{2001}^0 x^{2001} + C_{2001}^1 x^{2000} + C_{2001}^2 x^{1999} + \dots + C_{2001}^{2001}) \\ &= C_{2001}^0 x^{2002} + C_{2001}^1 x^{2001} + C_{2001}^2 x^{2000} + \dots + C_{2001}^{2001} x. \end{aligned} \quad (2)$$

Đạo hàm theo x hai vế của (2) ta được

$$\begin{aligned} (x+1)^{2001} + 2001x(x+1)^{2000} &= \\ &= 2002C_{2001}^0 x^{2001} + 2001C_{2001}^1 x^{2000} + 2000C_{2001}^2 x^{1999} + \dots + C_{2001}^{2001}. \end{aligned} \quad (3)$$

Thay $x=1$ vào (3) ta được

$$2^{2001} + 2001 \cdot 2^{2000} = 2002C_{2001}^0 + 2001C_{2001}^1 + 2000C_{2001}^2 + \dots + 2C_{2001}^{2000} + C_{2001}^{2001} = S.$$

$$\text{Suy ra } S = 2^{2001} + 2001 \cdot 2^{2000} = 2003 \cdot 2^{2000}. \quad \square$$

Bài 3. Cho tổng

$$S = 2C_n^0 + 3C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^{n-1} + (n+2)C_n^n.$$

Tìm n biết $S = 144$.

Giải.

Cách 1

Xét khai triển

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n. \\ \Rightarrow x^2 (1+x)^n &= x^2 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) \\ &= C_n^0 x^2 + C_n^1 x^3 + C_n^2 x^4 + \dots + C_n^n x^{n+2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1) ta được

$$2x(1+x)^n + nx^2(1+x)^{n-1} = 2C_n^0 x + 3C_n^1 x^2 + 4C_n^2 x^3 + \dots + (n+2)C_n^n x^{n+1}. \quad (2)$$

Thay $x=1$ vào (2) ta được

$$2(1+1)^n + n(1+1)^{n-1} = 2C_n^0 + 3C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + (n+2)C_n^n = S.$$

$$\text{Suy ra } S = 2(1+1)^n + n(1+1)^{n-1} = 2.2^n + n2^{n-1} = 2^{n-1}(4+n).$$

$$\text{Mà } S = 144 \text{ nên } 2^{n-1}(4+n) = 144.$$

$$\text{Suy ra } n = 5.$$

Cách 2

Xét khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n. \quad (3)$$

Đạo hàm theo x hai vế của (3) ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + nC_n^n x^{n-1}. \quad (4)$$

Thay $x=1$ vào (3) và (4) ta được:

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n; \quad (5)$$

$$n(1+1)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n. \quad (6)$$

Nhân (5) với 2 rồi cộng với (6) ta được

$$2.2^n + n2^{n-1} = 2C_n^0 + 3C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^{n-1} + (n+2)C_n^n = S.$$

$$\Rightarrow S = 2.2^n + n.2^{n-1} = 2^{n-1}(4+n) = 144.$$

$$\text{Suy ra } n = 5$$

□

Bài 4. Tính tổng

$$S = 3C_n^0 2^2 + 4C_n^1 2^3 + 5C_n^2 2^4 + \dots + (n+3)C_n^n 2^{n+2}.$$

Giải.

Xét khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n.$$

$$\Rightarrow x^3(1+x)^n = x^3(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n)$$

$$= C_n^0 x^3 + C_n^1 x^4 + C_n^2 x^5 + \dots + C_n^n x^{n+3}. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) theo x ta được

$$3x^2(1+x)^n + nx^3(1+x)^{n-1} = 3C_n^0x^2 + 4C_n^1x^3 + 5C_n^2x^4 + \dots + (n+3)C_n^n x^{n+2}. \quad (2)$$

Thay $x=2$ vào (2) ta được

$$3.2^2(1+2)^n + n2^3(1+2)^{n-1} = 3C_n^02^2 + 4C_n^12^3 + 5C_n^22^4 + \dots + (n+3)C_n^n 2^{n+2} = S.$$

$$\text{Suy ra } S = 3.2^2(1+2)^n + n2^3(1+2)^{n-1} = 3.2^23^n + n2^33^{n-1} = 4.3^{n-1}(9+2n).$$

$$\text{Vậy } S = 4.3^{n-1}(9+2n).$$

□

Tổng quát, ta có bài toán sau

Bài 5. Tính tổng

$$S = kC_n^0a^{k-1} + (k+1)C_n^1a^k + (k+2)C_n^2a^{k+1} + \dots + (k+n)C_n^na^{k+n-1}.$$

Giải.

Xét khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^k(1+x)^n &= x^k(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n) \\ &= C_n^0x^k + C_n^1x^{k+1} + C_n^2x^{k+2} + \dots + C_n^nx^{k+n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1) ta được

$$\begin{aligned} kx^{k-1}(1+x)^n + nx^k(1+x)^{n-1} &= \\ &= kC_n^0x^{k-1} + (k+1)C_n^1x^k + (k+2)C_n^2x^{k+1} + \dots + (k+n)C_n^nx^{k+n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Thay $x=a$ vào (2) ta được

$$\begin{aligned} ka^{k-1}(1+a)^n + na^k(1+a)^{n-1} &= \\ &= kC_n^0a^{k-1} + (k+1)C_n^1a^k + (k+2)C_n^2a^{k+1} + \dots + (k+n)C_n^na^{k+n-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } S = ka^{k-1}(1+a)^n + na^k(1+a)^{n-1} = a^{k-1}(1+a)^{n-1} [k(1+a) + na].$$

$$\text{Vậy } S = a^{k-1}(1+a)^{n-1} [k(1+a) + na].$$

□

Nhận xét

Khi các số hạng của tổng cần tính có dạng $k(k-1)\dots(k-i)C_n^k$ với $0 \leq i \leq k-1$ thì ta sử dụng đạo hàm cấp $i+1$ để tính tổng đó.

5. Sử dụng tích phân xác định

5.1 Dấu hiệu nhận biết

Ý tưởng của kĩ năng này là dựa vào hệ thức $\int_a^b x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$. Từ đó, ta nhận thấy nếu số hạng của tổng có dạng $\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} C_n^k$ hoặc $\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} C_n^{n-k}$ với $0 \leq k \leq n$, thì ta sử dụng tích phân hai xác định với cận thích hợp để tính tổng đó.

Ta thường sử dụng khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Tích tích phân hai vế của (1), ta được

$$\begin{aligned} \int_a^b (1+x)^n dx &= \int_a^b (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) dx \\ \Rightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b &= \left(C_n^0 x + C_n^1 \frac{x^2}{2} + C_n^2 \frac{x^3}{3} + \dots + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_a^b \\ \Rightarrow \frac{(1+b)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1+a)^{n+1}}{n+1} &= C_n^0 (b-a) + C_n^1 \frac{b^2 - a^2}{2} + C_n^2 \frac{b^3 - a^3}{3} + \dots + C_n^n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Khi đó, thay x, a, b thích hợp ta được tổng tổ hợp cần tìm.

5.2 Một số bài tập áp dụng

Bài 1. Tính tổng

$$S = (2+1)C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3+1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n.$$

Giải.

Ta xét khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n. \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_a^b (1+x)^n dx = \int_a^b (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) dx \\
&\Rightarrow \left. \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \left(C_n^0 x + C_n^1 \frac{x^2}{2} + C_n^2 \frac{x^3}{3} + \dots + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_a^b \\
&\Rightarrow \frac{(1+b)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1+a)^{n+1}}{n+1} = C_n^0 (b-a) + C_n^1 \frac{b^2-a^2}{2} + C_n^2 \frac{b^3-a^3}{3} + \dots + C_n^n \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Thay $a = -1; b = 2$ vào (2) ta được

$$\frac{(1+2)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} = C_n^0 (2+1) + C_n^1 \frac{2^2 - (-1)^2}{2} + C_n^2 \frac{2^3 - (-1)^3}{3} + \dots + C_n^n \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{Suy ra } \frac{3^{n+1}}{n+1} = (2+1)C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3+1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n = S.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{3^{n+1}}{n+1}.$$

□

Bài 2. Tính tổng

$$S = \frac{3^2}{2}C_n^0 - \frac{3^3}{3}C_n^1 + \frac{3^4}{4}C_n^2 - \dots + \frac{(-1)^n 3^{n+2}}{n+2}C_n^n.$$

Giải.

Ta xét khai triển

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n.$$

$$\Rightarrow x(1-x)^n = C_n^0 x - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 - \dots + (-1)^n C_n^n x^{n+1}.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^3 x(1-x)^n dx &= \int_0^3 \left[C_n^0 x - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 - \dots + (-1)^n C_n^n x^{n+1} \right] dx \\
&= \left[C_n^0 \frac{x^2}{2} - C_n^1 \frac{x^3}{3} + C_n^2 \frac{x^4}{4} - \dots + (-1)^n C_n^n \frac{x^{n+2}}{n+2} \right] \Big|_0^3 \\
&= \frac{3^2}{2}C_n^0 - \frac{3^3}{3}C_n^1 + \frac{3^4}{4}C_n^2 - \dots + \frac{(-1)^n 3^{n+2}}{n+2}C_n^n = S.
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
\int_0^3 x(1-x)^n dx &= \int_0^3 [1-(1-x)](1-x)^n dx = \int_0^3 (1-x)^n dx - \int_0^3 (1-x)^{n+1} dx. \\
&= -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^3 + \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2} \Big|_0^3 \\
&= -\frac{(-2)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{(-2)^{n+2}}{n+2} - \frac{1}{n+2} \\
&= \left[\frac{(-1)^{n+2} 2^{n+2}}{n+2} + \frac{(-1)^{n+2} 2^{n+1}}{n+1} \right] + \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right] \\
&= (-1)^{n+2} 2^{n+1} \left(\frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
\Rightarrow \int_0^3 x(1-x)^n dx &= (-1)^n 2^{n+1} \frac{3n+4}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \\
\text{Từ đó suy ra } S &= (-1)^n 2^{n+1} \frac{3n+4}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \quad \square
\end{aligned}$$

Nhận xét

Nếu các số hạng của tổng có dạng $\frac{1}{k+i} C_n^k$ thì ta nhân hai vế của khai triển

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ với x^{i-1} . Sau đó lấy tích phân hai vế của đẳng thức thu được với cận thích hợp ta sẽ tính được tổng cần tìm.

6. Sử dụng số phức

6.1 Nhắc lại một số kiến thức cơ bản về số phức

- Dạng lượng giác của số phức

$$\begin{aligned}
z = a + ib &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\
&= r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ trong đó } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

- *Dạng mũ của số phức*

$$z = re^{i\varphi}, \text{ với } \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

- *Công thức thức Moivre*

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}.$$

- *Căn bậc n của số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ là các số:*

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k2\pi}{n} \right) \\ &= \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + k2\pi}{n}}, \text{ với } k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Ở phần này, chúng ta thường sử dụng tính chất sau

Mệnh đề. Cho m là một số nguyên dương. Khi đó, phương trình $x^m = 1$ có m nghiệm phức phân biệt

$$x_k = \cos \frac{k2\pi}{m} + i \sin \frac{k2\pi}{m}, \text{ với } k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

Nếu ε là một căn nguyên thủy bậc m của 1, tức là $\varepsilon^m = 1$ thì ta có:

$$\checkmark 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{m-1} = 0;$$

$$\checkmark 1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \dots + \varepsilon^{k(m-1)} = 0, \text{ với } (k; m) = 1.$$

6.2 Một số bài tập áp dụng

Bài 1. Tính các tổng sau:

a. $S_1 = C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - \dots + C_{4n}^{4n};$

b. $S_2 = C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - \dots + C_{4n}^{4n-1}.$

Giải.

Từ tính chất $i^2 = -1$ suy ra $i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i; i^{4k+2} = -1; i^{4k+3} = -i$.

Ta có

$$\begin{aligned} (1+i)^{4n} &= C_{4n}^0 + C_{4n}^1 i + C_{4n}^2 i^2 + C_{4n}^3 i^3 + C_{4n}^4 i^4 + C_{4n}^5 i^5 + \dots + C_{4n}^{4n-1} i^{4n-1} + C_{4n}^{4n} i^{4n} \\ &= (C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - \dots + C_{4n}^{4n}) + (C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - \dots + C_{4n}^{4n-1}) i. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } (1+i)^{4n} = S_1 + i S_2. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } (1+i)^{4n} = \left[(1+i)^2 \right]^{2n} = (2i)^{2n} = 2^{2n} i^{2n} = (-1)^n 4^n. \quad (2)$$

$$\text{a. Từ (1) và (2) suy ra } S_1 = \operatorname{Re} \left[(1+i)^{4n} \right] = (-1)^n 4^n. \quad \square$$

$$\text{b. Từ (1) và (2) suy ra } S_2 = \operatorname{Im} \left[(1+i)^{4n} \right] = 0. \quad \square$$

Bài 2. Tính tổng

$$S = C_{4n}^0 + C_{4n}^1 - C_{4n}^2 - C_{4n}^3 + C_{4n}^4 + C_{4n}^5 - \dots + C_{4n}^{4n-1} + C_{4n}^{4n}.$$

Giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= C_{4n}^0 + C_{4n}^1 - C_{4n}^2 - C_{4n}^3 + C_{4n}^4 + C_{4n}^5 - \dots + C_{4n}^{4n-1} + C_{4n}^{4n} \\ &= (C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - \dots + C_{4n}^{4n}) + (C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - \dots + C_{4n}^{4n-1}). \end{aligned}$$

Theo bài 1, ta có:

$$C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - \dots + C_{4n}^{4n} = (-1)^n 4^n;$$

$$C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - \dots + C_{4n}^{4n-1} = 0.$$

$$\text{Suy ra } S = (-1)^n 4^n. \quad \square$$

Bài 3. Chứng minh rằng

$$\left(C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - \dots + C_{4n}^{4n} \right)^2 + \left(C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - \dots + C_{4n}^{4n-1} \right)^2 = 2^{4n}.$$

Giải.

Cách 1

Theo kết quả bài 1, ta có:

$$C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - \dots + C_{4n}^{4n} = (-1)^n 4^n$$

$$C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - \dots + C_{4n}^{4n-1} = 0$$

$$\text{Suy ra VT} = \left[(-1)^n 4^n \right]^2 + 0 = 2^{4n} = \text{VP}.$$

Điều phải chứng minh. $\square$

Cách 2

Xét số phức $z = i + 1$, với $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} z^n &= (1+i)^n = \sum_{k=0}^{4n} C_{4n}^k i^k \\ &= (C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - \dots + C_{4n}^{4n}) + (C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - \dots + C_{4n}^{4n-1})i. \end{aligned}$$

Áp dụng công thức $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, ta được

$$|z^n| = \sqrt{(C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - \dots + C_{4n}^{4n})^2 + (C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - \dots + C_{4n}^{4n-1})^2}. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } |z^n| = |z|^n = (\sqrt{1^2+1^2})^{4n} = \sqrt{2}^{4n}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - \dots + C_{4n}^{4n})^2 + (C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - \dots + C_{4n}^{4n-1})^2 = 2^{4n}.$$

Điều phải chứng minh. □

Nhận xét

Nếu số hạng của tổng cần tính có dạng kC_n^k thì ta có thể kết hợp sử dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ hoặc đạo hàm cấp một để đưa tổng cần tính về dạng quen thuộc. Sau đó áp dụng số phức để tính tổng tổ hợp đó.

Chương 3

Bài tập áp dụng

Tính các tổng sau:

1. $S = C_n^1 + 3C_n^2 + 7C_n^3 + \dots + (2^n - 1)C_n^n.$

ĐA. $3^n - 2^n.$

2. $S = C_n^k + 5C_n^{k-1} + 10C_n^{k-2} + 10C_n^{k-3} + 5C_n^{k-4} + C_n^{k-5}.$

ĐA. $C_{n+5}^k.$

3. $S = C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + \dots + p\frac{C_n^p}{C_n^{p-1}} + \dots + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}$

ĐA. $\frac{n(n+1)}{2}.$

4. $S = \frac{1}{7}C_n^0 + \frac{1}{10}C_n^1 + \frac{1}{13}C_n^2 + \dots + \frac{1}{3n+7}C_n^n.$

ĐA. $\frac{2^{n+3}}{n+3} - \frac{2^{n+3}}{n+2} + \frac{2^{n+1}}{n+1}.$

5. $S = C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \dots + (n-1)C_n^n.$

ĐA. $(n-2)2^{n-1} + 1.$

6. $S = \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}.$

ĐA. $\frac{2^{2n} - 1}{2n + 1}.$

7. $S = C_n^1 + 2C_n^2 \tan x + 3C_n^3 \tan^2 x + \dots + nC_n^n \tan^{n-1} x.$

ĐA. $n(1 + \tan x)^{n-1}.$

8. $S = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{(k+1)2^{k+1}}.$

ĐA. $\frac{2^{2n+2} - 3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}.$

9. $S = C_{4n}^0 + C_{4n}^2 + C_{4n}^4 + \dots + C_{4n}^{2n}.$

ĐA. $2^{4n-2} + \frac{(4n-1)!}{(2n-1)!(2n)!}.$

10. $S = C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (2n+1)C_n^n.$

ĐA. $(n+1)2^n.$

Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \dots + C_m^{k-1} C_n^1 = C_{m+n}^k - C_n^k - C_m^k, \text{ với } \forall k, m, n \in \mathbb{N} \text{ và } k \leq m \leq n.$

2. $\frac{A_n^0}{0!} + \frac{A_n^1}{1!} + \frac{A_n^2}{2!} + \dots + \frac{A_n^n}{n!} = 2^n.$

3. $C_n^1 + 4C_n^2 + 3 \cdot 2^2 C_n^3 + \dots + n2^{n-1} C_n^n =$
 $= n4^{n-1} C_n^0 - (n-1)4^{n-2} C_n^1 + (n-2)4^{n-3} C_n^2 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}.$

4. $C_n^0 - \frac{C_n^1}{1+1} + \frac{C_n^2}{1+2} - \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{1+n} = \frac{1}{n+1}.$

5. $C_n^0 C_n^k - C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} + \dots + (-1)^k C_n^k C_{n-k}^0 = 0.$