

ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

MÔN TOÁN (thời gian: 90 phút)

Câu 1: Tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x^2 - 2x - 63}}$ là

- A. $(-\infty; -7)$ B. $(9; 10)$ C. $(0; +\infty)$ D. $(9; +\infty)$

Câu 2: Gọi x_1, x_2 là điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 5$. Giá trị biểu thức

$$S = \frac{x_1^2 - 1}{x_1} + \frac{x_2^2 - 1}{x_2} \text{ bằng}$$

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 1

Câu 3: Tập hợp tất cả các điểm M trên mặt phẳng biểu diễn số phức z thỏa mãn $(1-i)\bar{z} = (1+i)z$ là:

- A. $y = 0$ B. $x + y = 0$ C. $x - y = 0$ D. $x = 0$

Câu 4: Để làm một hộp hình trụ có nắp, bằng tôn và có thể tích $V = 2\pi m^3$, cần có ít nhất bao nhiêu mét vuông tôn?

- A. $2\pi m^2$ B. $4\pi m^2$ C. $6\pi m^2$ D. $8\pi m^2$

Câu 5: Cho $z = \frac{1-5i}{1+i} + (2-i)^2$. Môđun của z bằng

- A. 1 B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. $5\sqrt{2}$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với $A(0; -3; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0), B_1(4; 0; 4)$. Gọi M là trung điểm của A_1B_1 . Mặt phẳng (P) đi qua A, M và song song với BC_1 cắt A_1C_1 tại N. Độ dài đoạn thẳng MN là

- A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ B. 3 C. 4 D. $2\sqrt{3}$

Câu 7: Tìm tất cả các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có khoảng cách đến trục hoành bằng 1

- A. $M(0; -1), N(-2; 1)$ B. $M(-2; 1)$
C. $M(0; -1), N(-1; -1)$ D. $M(0; -1)$

Câu 8: Khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ đến trục hoành là

- A. $\frac{23}{27}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1

Câu 9: Tập hợp các nghiệm của bất phương trình $\frac{1 - \log_{0,5}(-x)}{\sqrt{-2-6x}} < 0$ là

- A. $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right]$ B. $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

Câu 10: Thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục Ox của hình phẳng giới hạn bởi các trục tọa độ và các đường $y = \sqrt{x-1}, y = 2$ là:

- A. 9π B. 16π C. 15π D. 12π

Câu 11: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a và AB' vuông góc với BC'. Thể tích của lăng trụ đã cho là

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để phương trình $\frac{a}{3^x + 3^{-x}} = 3^x - 3^{-x}$ có nghiệm duy nhất.

- A. $a > 0$ B. $0 < a < 1$ C. $a < 0$ D. $a \in \mathbb{R}$

Câu 13: Cho hàm số có bảng biến thiên dưới đây. Phát biểu nào là đúng?

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$	

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và đạt cực đại tại $x = 3$.
 B. Giá trị cực đại của hàm số là -2.
 C. Giá trị cực tiểu của hàm số là 0.
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có $A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0)$ và $A'(0;0;1)$. Xét mặt phẳng (P) chứa CD', gọi α là góc giữa (P) và mặt phẳng $(BB'C'C)$. Giá trị nhỏ nhất của α là

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ trên đoạn $[-1;1]$ là

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})$ D. $\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)$

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x-1=m(x-1)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;0]$

- A. $m \geq 1$ B. $m \leq \frac{3}{2}$ C. $1 \leq m \leq 2$ D. $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$

Câu 17: Xét $f(z) = -z^3 - 1$ với $z \in \mathbb{C}$. Tính $S = f(z_0) + f(\bar{z}_0)$, trong đó $z_0 = 1+i$

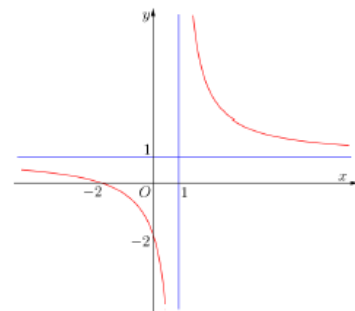
- A. $S = 2$ B. $S = 4$ C. $S = 1$ D. $S = 3$

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn $z^3 + 4z = 0$. Khi đó

- A. $|z| \in \{1;2\}$ B. $|z| \in \{0\}$ C. $|z| \in \{0;2\}$ D. $|z| \in \{0;1\}$

Câu 19: Giá trị a, b để hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị như hình bên là

- A. $a = -1, b = 2$ B. $a = -1, b = -2$
C. $a = 1, b = 2$ D. $a = 1, b = -2$



Câu 20: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$ là

- A. $(0;2)$ B. $(2;+\infty)$ C. $(-2;-1)$ D. $(0;+\infty)$

Câu 21: Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O;R)$ và $(O';R)$, chiều cao $h = \sqrt{3}R$. Đoạn thẳng AB có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy của hình trụ sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là $\alpha = 30^\circ$. Thể tích khối tứ diện ABOO' là

A. $\frac{3R^3}{2}$

B. $\frac{3R^3}{4}$

C. $\frac{R^3}{2}$

D. $\frac{R^3}{4}$

Câu 22: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm $4^x - 2(\sqrt{12})^x - m \cdot 3^x = 0$

A. $m \geq 0$

B. $0 \leq m < 1$

C. $m \geq -1$

D. $m < -1$

Câu 23: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, góc giữa $A'B$ và mặt đáy bằng 45° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCC'A'$ là:

A. $\frac{a}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. a

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 24: Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - (m-1)x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ là

A. $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$

B. $[-2; 4]$

C. $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$

D. $(-2; 4)$

Câu 25: Tập nghiệm của bất phương trình $\int_0^x t \cdot e^{2t} dt \leq \frac{1}{4}$ là

A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$

C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

D. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

A. $\{e^2; \pm 1\}$

B. $\{e^2\}$

C. $\{e^2; 1\}$

D. $\{e; e^2\}$

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ x^3 + y^3 = m \end{cases}$ có nghiệm

A. $m \geq 2$

B. $2 \leq m \leq 64$

C. $m \geq 0$

D. $m \leq 64$

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$$f(x) + f(-x) = \cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Câu 29: Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn $|z| = 2, z + \bar{z} + |z| = 0$

- A. $z = 1 \pm \sqrt{3}i$ B. $z = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$ C. $z = -1 \pm \sqrt{3}i$ D. $z = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$

Câu 30: Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 9)$ là:

- A. 49 B. 1 C. 4 D.

Câu 31: Gọi S là diện tích mặt phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 2x - 3$ và đường thẳng $y = kx + 1$ với k là tham số thực. Tìm k để S nhỏ nhất.

- A. $k = 1$ B. $k = 2$ C. $k = -1$ D. $k = -2$

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = 4\sin^2(3x - 1)$. Tập giá trị của hàm số $f'(x)$ là:

- A. $[-12; 12]$ B. $[-2; 2]$ C. $[-4; 4]$ D. $[0; 4]$

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng đáy bằng 30° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:

- A. $\frac{8\pi a^2}{3}$ B. $8\pi a^2$ C. $\frac{4\pi a^2}{3}$ D. $4\pi a^2$

Câu 34: Một hộp bóng bàn hình trụ chứa được 5 quả bóng sao cho các quả bóng tiếp xúc với thành hộp và tiếp xúc với nhau, quả trên cùng tiếp xúc với nắp hộp. Tỷ lệ thể tích mà 5 quả bóng chiếm so với thể tích của hộp là:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + (m^2 - 1)x^2 - 1$ có ba cực trị

- A. $m < -1$ B. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

C. $m \in (-1; 1)$

D. $m > 1$

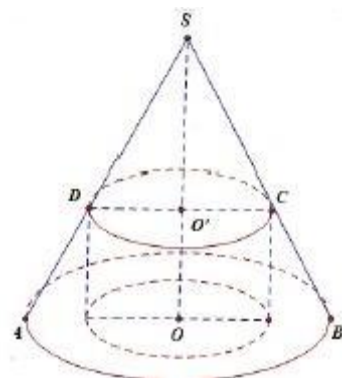
Câu 36: Cho hình nón tròn xoay (N) có đỉnh S và đáy là hình tròn tâm O bán kính r , đường cao $SO = h$. Hãy tính chiều cao x của hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp hình nón đã cho.

A. $x = \frac{1}{2}h$

B. $x = \frac{1}{3}h$

C. $x = \frac{2}{3}h$

D. $x = \frac{3}{4}h$



Câu 37: Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, cho hình chóp $S.ABC$ có $S(2; 2; 6), A(4; 0; 0), B(4; 4; 0), C(0; 4; 0)$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. 48

B. 16

C. 8

D. 24

Câu 38: Một chiếc ly hình nón chứa đầy rượu. Người ta uống đi một phần rượu sao cho chiều cao phần rượu còn lại bằng một nửa chiều cao ban đầu. Số phần rượu được uống là:

A. $\frac{7}{8}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{2}{3}$

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $A(-4; 4; 0), B(2; 0; 4), C(1; 2; -1)$. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AB là:

A. 3

B. $2\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}$

D. $\sqrt{13}$

Câu 40: Tháp Eiffel ở Pháp cao 300 m, được làm hoàn toàn bằng sắt và nặng khoảng 8000000 kg. Người ta làm một mô hình thu nhỏ của tháp với cùng chất liệu và cân nặng khoảng 1 kg. Hỏi chiều cao của mô hình là bao nhiêu?

A. 1,5 m

B. 2 m

C. 0,5 m

D. 3 m

Câu 41: Tập hợp giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ có tiệm cận đứng là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

B. $\mathbb{R}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

D. $\left\{ \frac{7}{2} \right\}$

Câu 42: Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$ cắt mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 4$ theo một đường tròn có tọa độ tâm là:

- A. $(1; 1; -2)$ B. $(1; -2; 1)$ C. $(-2; 1; 1)$ D. $(-1; -23)$

Câu 43: Tìm hàm số $F(x)$ thỏa mãn các điều kiện $F'(x) = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$ và $F(0) = 1$

- A. $F(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} + x$ B. $F(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} - x$
 C. $F(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ D. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}, d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$$

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là:

- A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + y - z = 0$ B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 2z = 0$
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z = 0$ D. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y + z = 0$

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 5 = 0$ và các điểm $A(0; 0; 4), B(2; 0; 0)$. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất, đi qua O, A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có tâm là:

- A. $I(1; 2; 2)$ B. $I\left(1; -\frac{19}{4}; 2\right)$ C. $I(1; -2; 2)$ D. $I\left(1; \frac{19}{4}; 2\right)$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$

và $d_2: \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 5 - t \\ z = 2t \end{cases}$. Mặt phẳng tọa độ Oxz cắt các đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm

A, B. Diện tích tam giác OAB là

- A. 5 B. 10 C. 15 D. 55

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), C(0; 2; 0), A_1(0; 0; m) (m > 0)$ và A_1C vuông góc với BC_1 . Thể tích khối tứ diện A_1CBC_1 là:

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{3}$ C. 4 D. 8

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin 2x - m \cos 2x = 2m \sin x - 2 \cos x$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

- A. $[1; 2]$ B. $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2\right]$ C. $[0; 1]$ D. $\left[0; \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$

Câu 49: Mô đun của số phức $z = i^{2016} - 3i^{2017}$ là

- A. $2\sqrt{5}$ B. 2 C. 3 D. $\sqrt{10}$

Câu 50: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1$ là

- A. $S = \frac{8}{3}$ B. $S = 4$ C. $S = \frac{10}{3}$ D. $S = 2$

Đáp án

1-D	2-C	3-B	4-C	5-D	6-A	7-A	8-A	9-C	10-D
11-D	12-D	13-D	14-B	15-C	16-D	17-A	18-C	19-C	20-B
21-D	22-C	23-D	24-B	25-B	26-C	27-B	28-D	29-C	30-B
31-B	32-A	33-B	34-A	35-C	36-B	37-B	38-A	39-D	40-A
41-A	42-C	43-C	44-C	45-A	46-A	47-A	48-B	49-D	50-A

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án D

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x - 63 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 9 \Rightarrow x > 9 \Leftrightarrow D = (9; +\infty) \\ x < -7 \end{cases}$$

Câu 2: Đáp án C

$$\text{Ta có } y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 5 \right)' = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S = \frac{x_1^2 - 1}{x_1} + \frac{x_2^2 - 1}{x_2} = x_1 + x_2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = x_1 + x_2 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = 2 - \frac{2}{-1} = 4$$

Câu 3: Đáp án B

$$\text{Đặt } z = x + yi; x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (1-i)(x-yi) = (1+i)(x+yi) \Leftrightarrow (x+y)i = 0 \Rightarrow x+y=0$$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn điểm M là đường thẳng $x+y=0$

Câu 4: Đáp án C

Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ. Ta có $V = \pi r^2 h = 2\pi \Leftrightarrow h = \frac{2}{r^2}$

$$\text{Diện tích toàn phần là } S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{2}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{4\pi}{r} = 2\pi r^2 + \frac{2\pi}{r} + \frac{2\pi}{r} \geq 3\sqrt{2\pi r^2 \cdot \frac{2\pi}{r} \cdot \frac{2\pi}{r}} = 6\pi$$

Câu 5: Đáp án D

$$\text{Ta có } z = \frac{1-5i}{1+i} + (2-i)^2 = 1-7i \Rightarrow |z| = 5\sqrt{2}$$

Câu 6: Đáp án A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = (4; 3; 0) \Leftrightarrow (4-x_{A_1}; 0-y_{A_1}; 4-z_{A_1}) = (4; 3; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A_1} = 0 \\ y_{A_1} = -3 \Rightarrow A_1(0; -3; 4) \\ z_{A_1} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(2; -\frac{3}{2}; 4\right). \text{ Ta có } \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x_{C_1}-4; y_{C_1}-0; z_{C_1}-4) = (-4; 3; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{C_1} = 0 \\ y_{C_1} = 3 \Rightarrow C_1(0; 3; 4) \\ z_{C_1} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{vtpt của (P) là } \vec{n}(1; 4; -2)$$

$$\text{Khi đó: } (P): 1(x-0) + 4(y+3) - 2(z-0) = 0 \text{ hay } (P): (x+4y-2z+12=0)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{A_1C_1}(0; 6; 0) = 6(0; 1; 0) \Rightarrow A_1C_1: \begin{cases} x=0 \\ y=3+t \\ z=4 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (P) \cap (A_1C_1) = N(0; -1; 4) \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Câu 7: Đáp án A

Gọi M thuộc đồ thị hàm số, suy ra $M\left(a; \frac{2a+1}{a-1}\right), a \neq 1$

$$\text{Ta có } d(M, Ox) = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2a+1}{a-1} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a+1}{a-1} = 1 \\ \frac{2a+1}{a-1} = -1 \end{cases} \begin{cases} a = -2 \Rightarrow M(-2; 1) \\ a = 0 \Rightarrow M(0; -1) \end{cases}$$

Câu 8: Đáp án A

$$\text{Ta có } y' = (x^3 - 2x^2 + x - 1)' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } y'' = 6x - 4 \Rightarrow \begin{cases} y''(1) = 2 > 0 \\ y''\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -\frac{23}{27}\right) \text{ là điểm cực đại của đồ thị hàm số}$$

$$\text{Suy ra } d(M, Ox) = \frac{23}{27}$$

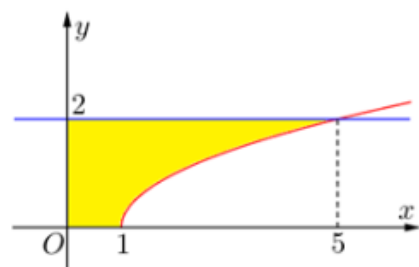
Câu 9: Đáp án C

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > 0 \\ -2 - 6x > 0 \\ 1 - \log_{0.5}(-x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < -\frac{1}{3} \\ \log_{0.5}(-x) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ -x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$$

Câu 10: Đáp án D

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$.
Vật thể tròn xoay được tạo thành bởi hình được tô đậm khi quay quanh trục hoành.

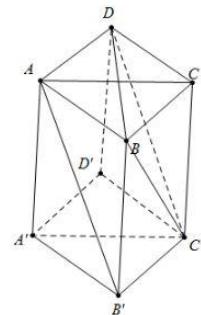
$$\text{Ta có: } V = \pi \int_0^1 |2^2 - 0^2| dx + \int_1^5 |2^2 - (x-1)| dx = 12\pi$$



Câu 11: Đáp án D

Dựng hình hộp $A'B'C'D'.ABCD$ khi đó $AB' \parallel DC'$ và đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $BD = a\sqrt{3}$.

Do đó $BC' \perp DC'$ suy ra tam giác $BC'D$ vuông cân tại C' (vì $BC' = DC' = \sqrt{h^2 + a^2}$)



$$\text{Do đó } BC' = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow h = \sqrt{BC'^2 - a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Thể tích của lăng trụ là: } V = S_{ABC} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$$

(còn nhiều cách khác như gắn hệ trục....)

Câu 12: Đáp án D

$$PT \Leftrightarrow a = (3^x - 3^{-x})(3^x + 3^{-x}) \Leftrightarrow a = 9^x - 9^{-x} \xrightarrow{t=9^x} a = t - \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 - at - 1 = 0 (*)$$

PT ban đầu có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi PT (*) có 1 nghiệm dương.

Lại thấy $t_1 t_2 = -1 < 0 \Rightarrow (*)$ luôn có hai nghiệm trái dấu, suy ra (*) luôn có 1 nghiệm dương

Suy ra PT ban đầu luôn có nghiệm duy nhất với $\forall a \in \mathbb{R}$.

Câu 13: Đáp án D

Câu 14: Đáp án B

Góc α nhỏ nhất bằng góc giữa CD' và $(BB'C'C)$ và bằng $D'CC' = 45^\circ$

Câu 15: Đáp án C

$$\text{Ta có } f'(x) = \left[\sqrt{x^2 + 1} - x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]' = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f(-1) = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1) \\ f(0) = 1 \\ f(1) = \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1) \end{cases} \Rightarrow \min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$$

Câu 16: Đáp án D

$$\text{Với } x \in [-1; 0] \Rightarrow PT \Leftrightarrow m = \frac{2x-1}{x-1} = f(x)$$

$$\text{Ta có } f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in [-1; 0] \Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến trên đoạn } [-1; 0]$$

$$\text{Suy ra } \min_{[-1;0]} f(x) = f(0) = 1, \max_{[-1;0]} f(x) = f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$PT \text{ ban đầu có nghiệm thuộc đoạn } [-1; 0] \Leftrightarrow \min_{[-1;0]} f(x) \leq m \leq \max_{[-1;0]} f(x) \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}$$

Câu 17: Đáp án A

Ta có $S = (-z_0^3 - 1) + (-\bar{z}_0^3 - 1) = [-(1+i)^3 - 1] + [-(1-i)^3 - 1] = 2$

Câu 18: Đáp án C

$$PT \Leftrightarrow z(z^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z^2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 2i \\ z = -2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ |z| = 2 \end{cases} \Rightarrow |z| \in \{0; 2\}$$

Câu 19: Đáp án C

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy

- Đồ thị hàm số có TCD và TCN lần lượt là $x=1, y=1 \Rightarrow a=1$
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm có tọa độ $(-2; 0), (0; -2) \Rightarrow b=2$

Câu 20: Đáp án B

$$BPT \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \sqrt{x+2} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \\ x+2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x > 2 \Rightarrow S = (2; +\infty)$$

Câu 21: Đáp án D

Ta có $S_{AOO'} = \frac{1}{2} R \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

Gọi H là hình chiếu của A lên (O'), K là hình chiếu của B lên O'H

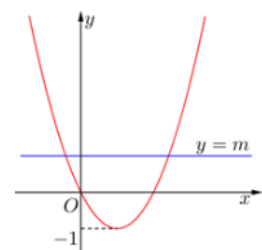
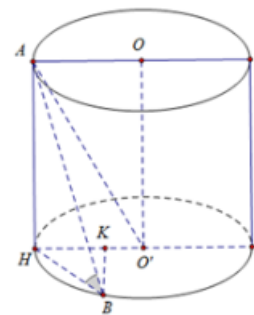
Ta có $BH = AH \tan HAB = AH \tan 30^\circ = \sqrt{3}R \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = R \Delta O'BH$ đều

$$\Rightarrow BK = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích khối tứ diện ABOO' là: $V = \frac{1}{3} BK \cdot S_{AOO'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^3}{4}$

Câu 22: Đáp án C

$$PT \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^x - 2 - m \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^x = 0 \xrightarrow{t = \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^x} t - \frac{m}{t} - 2 = 0$$



$$\Leftrightarrow t^2 - 2t - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t = m(*)$$

PT ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi PT (*) có ít nhất một nghiệm dương

PT (*) là PT có hoành độ giao điểm đồ thị hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ và đường thẳng $y = m$ như hình bên

PT (*) có ít nhất 1 nghiệm dương khi và chỉ khi $m \geq -1$

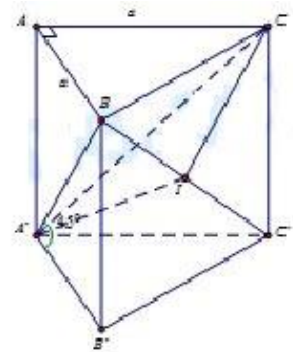
Câu 23: Đáp án D

Ta có: $BC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, $BB' = B'A = a$, $A'B = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$BC' = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$. Ta có $BC'^2 = A'B^2 + A'C'^2 \Rightarrow \Delta A'BC'$ vuông tại A' . Gọi I là trung điểm của BC' . Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCC'A'$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCC'A'$ là: $R = \frac{BC'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Cách 2: Trong bài toán này mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCC'A'$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đứng.



Tính nhanh: $R = \sqrt{R_d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BB'}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 24: Đáp án B

Ta có $y' = [x^3 - (m-1)x^2 + 3x + 1]' = 3x^2 - 2(m-1)x + 3$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (-\infty; +\infty)$

$$\text{Suy ra } \Delta'(y') \leq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 4 \Leftrightarrow m \in [-2; 4]$$

Câu 25: Đáp án B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = t \\ dv = e^{2t} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \frac{1}{2} e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \int_0^x t \cdot e^{2t} dt = \left(\frac{t}{2} e^{2t} \right) \Big|_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x e^{2t} dt = \left(\frac{t}{2} e^{2t} \right) \Big|_0^x - \frac{1}{4} e^{2t} \Big|_0^x$$

$$\text{Suy ra BPT} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}}{4} (2x-1) + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}}{4} (2x-1) \leq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right]$$

Câu 26: Đáp án C

$$PT \Leftrightarrow \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2\ln x - \ln^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 1 \\ x = e^2 \end{cases} \Rightarrow S = \{e^2; 1\}$$

Cách 2: dùng máy tính thử $\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln^2 x}{x} \right) \Big|_{x=e^2} \dots$

Câu 27: Đáp án B

$$\text{Ta có } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = 4 \Rightarrow x + y = 4 - 2\sqrt{xy} \leq 4$$

$$\text{Mặt khác } 2 = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{xy}} \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow x + y \geq 2$$

$$\text{Đặt } x + y = t \Rightarrow xy = \left(2 - \frac{t}{2} \right)^2, t \in [2; 4] \Rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3y(x + y) = t^3 - 3t \left(2 - \frac{t}{2} \right)^2$$

$$\text{Suy ra } x^3 + y^3 = m \Leftrightarrow t^3 - 3t \left(2 - \frac{t}{2} \right)^2 = m \Leftrightarrow f(t) = \frac{t^3}{4} + 6t^2 - 12t = m$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{3}{4}t^2 + 12t - 12 > 0, \forall t \in [2; 4] \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên đoạn } [2; 4] \Rightarrow f(2) \leq f(t) \leq f(4)$$

$$\text{Suy ra hệ PT đã cho có nghiệm khi và chỉ khi } \Leftrightarrow f(2) \leq m \leq f(4) \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 64$$

Câu 28: Đáp án D

$$\text{Ta có } \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(-x) dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6}, t = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{6}, t = -\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(-x) dx = - \int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} f(t) dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx$$

$$\text{Suy ra } \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(-x) dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Cách 2: vì } \cos 2x = \cos(-2x) \text{ ta chọn } f(x) = \frac{\cos 2x}{2} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Câu 29: Đáp án C

$$\text{Đặt } z = a + bi; a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ a + bi + a - bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ 2a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow z = -1 \pm \sqrt{3}i$$

Câu 30: Đáp án B

Ta có $y' = x^2 - mx - 4$. Lại có $ac = -4 < 0 \Rightarrow$ PT $y' = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt.

$$\text{Khi đó } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 9) = (x_1 \cdot x_2)^2 - 9x_1^2 - x_2^2 + 9 = 25 - (9x_1^2 + x_2^2)$$

$$\text{Ta có } 9x_1^2 + x_2^2 \geq 2\sqrt{9x_1^2 \cdot x_2^2} = 2\sqrt{9(-4)^2} = 24 \Rightarrow 25 - (9x_1^2 + x_2^2) \leq 1 \Leftrightarrow S \leq 1 \Rightarrow \max S = 1$$

Câu 31: Đáp án B

$$\text{PT hoành độ giao điểm là } x^2 + 2x - 3 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - (k-2)x - 4 = 0$$

$$\text{Ta có } ac = -4 < 0 \text{ PT trên luôn có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \begin{cases} x_1 + x_2 = k-2 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$$

$$\text{Giả sử } x_1 < x_2 \Rightarrow S = \left| \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - (k-2)x - 4) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{k-2}{2}x^2 - 4x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) - \frac{k-2}{2}(x_2^2 - x_1^2) - 4(x_2 - x_1) \right| = \left| (x_2 - x_1) \left[\frac{1}{3}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - \frac{k-2}{2}(x_1 + x_2) - 4 \right] \right|$$

$$= \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} \left| \frac{1}{3}[(x_2 + x_1)^2 - x_1x_2] - \frac{k-2}{2}(x_1 + x_2) - 4 \right| = \sqrt{(k-2)^2 + 16} \left| \frac{(k-2)^2}{6} + \frac{8}{3} \right|$$

$$\text{Ta có } (k-2)^2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(k-2)^2 + 16} \geq 4 \\ \left| \frac{(k-2)^2}{6} + \frac{8}{3} \right| \geq \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow S \geq \frac{32}{3} \Rightarrow \min S = \frac{32}{3} \Leftrightarrow (k-2)^2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

Cách 2: thử từng đáp án và chọn đáp án cho diện tích nhỏ nhất.

Câu 32: Đáp án A

$$\text{Ta có } f'(x) = [4 \sin^2(3x-1)]' = 12 \sin(6x-2)$$

$$\text{Ta có } \sin(6x-2) \in [-1; 1] \Rightarrow 12 \sin(6x-2) \in [-12; 12] \Leftrightarrow f'(x) \in [-12; 12]$$

Câu 33: Đáp án B

Gọi O là trung điểm của SC. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

$$\text{Ta có: } AC = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{7};$$

$$SA = AD \tan 30^\circ = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = a,$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{7})^2} = 2a\sqrt{2}$$

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: } R = \frac{SC}{2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: } S = 4\pi R^2 = 4\pi (a\sqrt{2})^2 = 8\pi a^2$$

$$\text{Cách 2: tính nhanh } R_c = \sqrt{R_d^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} = a\sqrt{2}$$

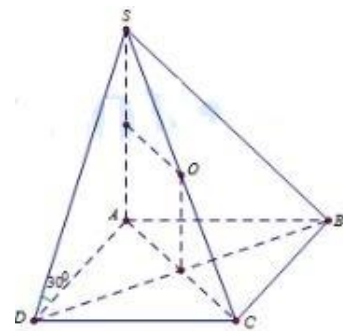
Câu 34: Đáp án A

Gọi r là bán kính của 1 quả bóng. Chiều cao của hình trụ là $h = 5.2r = 10r$

$$\text{Tỉ lệ thể tích mà 5 quả bóng chiếm so với thể tích của hộp là: } \frac{5 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2 \cdot 10r} = \frac{2}{3}$$

Câu 35: Đáp án C

$$\text{Ta có } y' = [x^4 + (m^2 - 1)x^2 - 1]' = 4x^3 + 2(m^2 - 1)x = 2x(2x^2 + m^2 - 1)$$



Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi PT $y' = 2x(2x^2 + m^2 - 1) = 0$ có ba nghiệm phân biệt

Khi đó PT $2x^2 + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{1-m^2}{2} > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1 \Leftrightarrow m \in (-1; 1)$

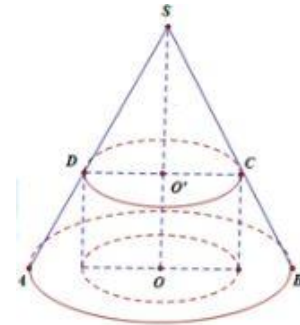
Chú ý: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + cx$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow (m^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 1)$

Câu 36: Đáp án B

Theo định lý Talet ta có $\frac{SO'}{SO' + x} = \frac{h-x}{h} = \frac{r'}{r} (0 < x < h)$

Thể tích hình trụ là $V = \pi r'^2 x = \pi \frac{[(h-x)r]^2}{h^2} \cdot x = f(x)$

Vì thể tích khối nón không đổi nên để phần thể tích phần không gian nằm phía trong (N) nhưng phía ngoài của (T) đạt giá trị nhỏ nhất thì thể tích hình trụ là lớn nhất.



Ta có $f(x) = \frac{\pi r^2}{h^2} x \cdot (h-x)^2$

Cách 1: xét $M(x) = x(h-x)^2$

Cách 2: ta có $M(x) = 4 \cdot \frac{h-x}{2} \cdot \frac{h-x}{2} \cdot x \leq 4 \left(\frac{\frac{h-x}{2} + \frac{h-x}{2} + x}{3} \right)^3 = \frac{4h^3}{27}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{h-x}{2} = x \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$

Câu 37: Đáp án B

Ta có $\overrightarrow{SA}(2; -2; -6), \overrightarrow{SB}(2; 2; -6), \overrightarrow{SC}(-2; 2; -6) \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{6} ([\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SB}] \overrightarrow{SC}) = 16$

Câu 38: Đáp án A

Gọi h là chiều cao ban đầu; r và r' là bán kính đường tròn mặt đáy rượu lúc đầu và lúc sau

Ta có $\frac{r'}{r} = \frac{\frac{h}{2}}{h} \Leftrightarrow r' = \frac{r}{2}$. Tỷ lệ thể tích rượu lúc sau và lúc đầu là: $\frac{\frac{1}{3} \pi r'^2 \frac{h}{2}}{\frac{1}{3} \pi r^2 h} = \frac{\frac{r^2}{4} \cdot \frac{1}{2}}{r^2} = \frac{1}{8}$

Số phần rượu đã được uống là $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Câu 39: Đáp án D

Ta có $\overrightarrow{AB}(6; -4; 4), \overrightarrow{AC}(5; -2; -1)$. Khi đó: $d(C; AB) = \frac{[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]}{|\overrightarrow{AB}|} = \sqrt{13}$

Câu 40: Đáp án A

Ta có: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 h_1}{S_2 h_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 = 8000000 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = 200$. Chú ý $\frac{h_1}{h_2} = k; \frac{S_1}{S_2} = k^2$ (tỷ số đồng dạng)

Khi đó $h_2 = \frac{h_1}{200} = 1,5m$

Câu 41: Đáp án A

Đồ thị hàm số có TCD khi và chỉ khi PT $mx^2 + 6x - 2 = 0$ không có nghiệm $x = 2$

Khi đó $m(-2)^2 + 6(-2) - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{7}{2} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$

Câu 42: Đáp án C

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 2)$. VTPT của (P) là $\vec{n}(1; 1; 1)$. Đường thẳng d đi qua I và vuông

góc với (P) là: $d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Gọi J là tâm cần tìm. Khi đó $I = (P) \cap d \Rightarrow J(-2; 1; 1)$

Câu 43: Đáp án C

Đặt $t = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \Rightarrow t^2 = x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow 2t dt = (4x^3 - 2x) dx$

$$F(x) = \int \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} dx = \int dt = t + C \Leftrightarrow F(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} + C$$

Mặt khác $F(0) = 1 \Rightarrow 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$

Câu 44: Đáp án C

Giả sử $M(3t+4; -t+1; -2t-5), N(s+2; 3s-3; s)$ và MN là đoạn vuông góc chung của d_1, d_2 .

Ta có: $\overrightarrow{MN}(s-3t-2; 3s+t-4; s+2t+5)$

Các vtcp của d_1, d_2 lần lượt là: $\vec{u}_1(3; -1; -2), \vec{u}_2(1; 3; 1)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s-3t-2) \cdot 3 + (3s+t-4) \cdot (-1) + (s+2t+5) \cdot (-2) = 0 \\ (s-3t-2) \cdot 1 + (3s+t-4) \cdot 3 + (s+2t+5) \cdot 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow M(1; 2; -3), N(3; 0; 1)$. Tâm I của mặt cầu cần tìm là trung điểm của $MN \Rightarrow I(2; 1; -1)$ và

$$\text{bán kính mặt cầu là } R = \frac{MN}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

Câu 45: Đáp án A

Giả sử, phương trình mặt cầu là $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

$$\text{Vì } A, B, O \in (S) \text{ nên } \begin{cases} a^2 + b^2 + (4-c)^2 = R^2 \\ (2-a)^2 + b^2 + c^2 = R^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = \pm\sqrt{R^2 - 5} \end{cases} \Rightarrow (1; \pm\sqrt{R^2 - 5}; 2)$$

$$\text{Khi đó } d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|11 \pm \sqrt{R^2 - 5}|}{3} = R \Leftrightarrow \begin{cases} R = \frac{21}{4} \\ R = 3 \end{cases} \text{ Vì } R \text{ nhỏ nhất nên}$$

$$R = 3 \Rightarrow I(1; 2; 2)$$

Cách 2: thử 4 đáp án đề bài cho với $IA = IB = IO = d(I, (P)) = R$ nhỏ nhất

Câu 46: Đáp án A

Ta có $(Oxz): y = 0$. Khi đó $d_1 \cap (Oxz) = A(-5; 0; -5), d_2 \cap (Oxz) = B(12; 0; 10)$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{OA} = (-5; 0; -5), \overrightarrow{OB} = (12; 0; 10) \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \left| [\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}] \right| = \frac{10}{2} = 5$$

Câu 47: Đáp án A

Ta có: $C_1(0; 2; m), \overline{A_1C}(0; -2; m), \overline{BC_1}(-2; 2; m)$

Vì A_1C vuông góc với BC_1 nên $\overline{A_1C} \cdot \overline{BC_1} = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 + m \cdot m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (vì $m > 0$)

$$\text{Ta có: } AC = 2; AB = 2; AA_1 = 2 \Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$

Thể tích khối tứ diện A_1CBC_1 là: $V = \frac{1}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{4}{3}$

Câu 48: Đáp án B

$$PT \Leftrightarrow m(2\sin x + \cos 2x) = \sin 2x + 2\cos x, x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow (2\sin x + \cos 2x) \neq 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{\sin 2x + 2\cos x}{2\sin x + \cos 2x}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{\sin 2x + 2\cos x}{2\sin x + \cos 2x} \Rightarrow f'(x) = 2\sin 3x - 2 \leq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

Suy ra $f(x)$ là hàm nghịch biến trên đoạn

$$\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{2}}{2} \leq f(x) \leq 2$$

$$PT \text{ có nghiệm khi và chỉ khi } \frac{2+\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 2 \Leftrightarrow m \in \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; 2\right]$$

Câu 49: Đáp án D

$$\text{Ta có } z = i^{2016} - 3i^{2017} = 1 - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{10}$$

Câu 50: Đáp án A

$$PT \text{ hoành độ giao điểm hai đồ thị là } 1 - x^2 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Suy ra diện tích cần tính bằng } S = \left| \int_{-1}^1 (1 - x^2 - (x^2 - 1)) dx \right| = \frac{8}{3}$$

toan123.vn